

COPPEAD/UFRJ

RELATÓRIO COPPEAD Nº 161

ELEMENTOS DE CONTROLE  
ESTATÍSTICO DE QUALIDADE

Janeiro de 1986

Paulo Carneiro Bravo\*

\* Instituto de matemática (IM) e Instituto de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração - COPPEAD, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

*Aos meus pais*

## PREFÁCIO

Nestas notas apresentamos, num nível bastante elementar, algumas das principais técnicas do Controle Estatístico de Qualidade, de uso generalizado no controle de serviços e de processos produtivos.

Na Introdução, que constitui o Capítulo I, apresentamos a conceituação de qualidade e fizemos algumas considerações breves sobre os custos de qualidade. Os Capítulos 2 a 4 tratam do controle de qualidade propriamente dito, contendo os principais tipos de gráficos de controle por atributos e por variáveis. Nos três últimos Capítulos a inspeção de qualidade é abordada, apresentando-se os principais tipos de planos de inspeção por amostragem, também por atributos e por variáveis.

Na seleção de técnicas do Controle Estatístico de Qualidade que fizemos para preparar estas notas, excluimos algumas técnicas igualmente importantes tais como os gráficos de somas acumuladas, os planos de amostragem para inspeção retificadora (planos de Dodge - Romig) e os planos de amostragem para produção contínua. Uma vez que só abordamos os aspectos estatísticos do controle de qualidade, também não foram considerados tópicos tais como organização e motivação para a qualidade, garantia de qualidade, um maior detalhamento de custos e economia de qualidade, e confiabilidade, entre outros. Estes e outros tópicos, juntamente com o controle estatístico de qualidade, constituem o que é comumente denominado de Controle Total de Qualidade. O leitor interessado numa abordagem mais ampla do Controle de Qualidade pode consultar, por exemplo, Feigenbaum (1961) e Juran e Gryna (1970). Em português, o único texto que conhecemos no gênero, embora resumido, é Palmer (1974). Existem muitos textos sobre Controle Estatístico de Qualidade. Consideramos Duncan (1974) como o mais completo e relacionamos outros na Bibliografia.

Desejamos agradecer à Comissão Organizadora do 6º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística pela oportunidade que nos concedeu para ministrar o curso para o qual estas notas foram redigidas e a Aparecida Rosa de Souza pelo trabalho de datilografia.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	
1.1. Conceituação de Qualidade	01
1.2. Custos de Qualidade	02
1.3. Controle Estatísticos de Qualidade	04
2. GRÁFICOS DE CONTROLE	
2.1. Introdução	07
2.2. Curva Característica de um Gráfico	10
2.3. Algumas Considerações Práticas	12
2.4. Análise Estatística de um Gráfico de Controle	13
3. GRÁFICOS DE CONTROLE POR ATRIBUTOS	
3.1. Gráficos de Controle para a Fração Defeituosa (Gráfico p)	17
3.2. Curva Característica e Tamanho da Amostra	21
3.3. Gráficos de Controle para o Número de Defeitos	24
3.3.1. Gráfico c	24
3.3.2. Gráfico u	25
3.3.3. Gráfico para Defeitos Categorizados	27
Exercícios	29
4. GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS	
4.1. Introdução	32
4.2. Gráfico $\bar{X}$ e R	34
4.3. Curva Característica	40
4.4. Gráficos para Amostras Grandes	42
4.5. Capacitação do Processo	43
Exercícios	47
5. INSPEÇÃO DE QUALIDADE	
5.1. Introdução	49
5.2. Conceitos Básicos	51

6. INSPEÇÃO POR ATRIBUTOS	
6.1. Plano de Amostragem Simples	55
6.1.1. Determinação de um Plano	57
6.2. Plano de Amostragem Dupla	63
6.2.1. Determinação de um Plano	66
6.3. Plano de Amostragem Múltipla	67
6.4. Plano de Amostragem Seqüencial	69
6.4.1. Curva Característica e Curvas ASN	73
6.5. Esquema de Inspeção por Atributos	75
Exercícios	78
7. INSPEÇÃO POR VARIÁVEIS	
7.1. Introdução	81
7.2. Controle da Fração Defeituosa - Especificação Unilateral	82
7.2.1. Variância Conhecida	83
7.2.2. Variância Desconhecida	86
7.3. Controle da Fração Defeituosa - Especificação Bilateral	90
7.3.1. Variância Conhecida	92
7.3.1.1. Procedimento Gráfico	94
7.3.2. Variância Desconhecida	99
7.3.2.1. Procedimento Gráfico	100
7.4. Sistema de Inspeção por Variáveis	102
7.5. Outros Tipos de Planos	103
Exercícios	104
APÊNDICE - TABELAS	105
BIBLIOGRAFIA	109

## 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1. Conceituação de Qualidade

A preocupação com a qualidade sempre foi uma constante na mente humana. Tudo aquilo que fazemos, procuramos fazer com um certo nível de qualidade. Por outro lado, sempre fazemos avaliações de qualidade ao julgarmos, por exemplo, os serviços que nos são prestados, a refeição que nos é servida, a habilidade de um jogador de futebol, etc.

Um aspecto essencial dos produtos e serviços é que eles sejam adequados ao uso. Segundo Juran (1974), adequação ao uso é o significado básico da palavra "qualidade". Qualidade de um produto ou serviço não significa a melhor qualidade que pode ser atingida, mas sim a qualidade que atende aos anseios dos consumidores, de acordo com o preço do produto ou serviço considerado. Assim, o nível de qualidade que é aceitável em um produto está relacionado não somente ao que é possível, mas também às circunstâncias econômicas envolvidas na produção e venda do produto.

A qualidade de um produto industrial pode ser definida como a resultante de uma combinação de características de engenharia e de fabricação, determinantes do grau de satisfação que o produto proporciona ao consumidor, durante o seu uso. Esta definição, bastante completa, evidencia a figura do consumidor, bem como o fato que a qualidade de um produto é uma combinação de qualidade do projeto, qualidade de conformação (ao projeto) e qualidade de desempenho.

A qualidade do projeto é o nível de qualidade que o projetista pretende dar ao produto. Ela é geralmente expressa em termos da máxima variação admissível no produto e é denominada *tolerância*. Para comparar artigos similares, porém de marcas diferentes, ou dois modelos de um mesmo produto, por exemplo "popular" e "de luxo",

avalia-se a qualidade do projeto. Em geral, melhor qualidade do projeto implica em custos de produção mais elevados.

A qualidade de conformação é o grau de fidelidade que o produto apresenta em relação às especificações do projeto. Quando se analisa as variações na qualidade de um determinado tipo de produto, de uma unidade para outra, avalia-se a qualidade de conformação.

Para deixar bem clara a diferença entre qualidade de projeto e qualidade de conformação, consideremos os automóveis modelo Fiat 147 e Del Rey. O Del Rey tem uma qualidade de projeto superior à do Fiat, porque foi projetado para ter um desempenho superior. Dois automóveis Del Rey têm a mesma qualidade de projeto, porém, podem apresentar diferentes qualidades de conformação. Um que apresente, por exemplo, defeito na suspensão será de qualidade inferior.

A qualidade de desempenho é a capacidade do produto desempenhar sua função de uma maneira satisfatória e a um custo aceitável. A qualidade de desempenho está então ligada aos aspectos econômicos e técnicos.

Numa empresa produtora, cada uma das três classificações (tipos) de qualidade interagem. A informação sobre a qualidade de desempenho pode sugerir uma maior ou menor rigidez na qualidade de projeto, e isto influenciará a facilidade com a qual a produção atenderá a esta qualidade.

## 1.2. Custos de Qualidade

O problema de qualidade numa empresa produtora de bens (ou serviços) é, basicamente, um problema de custos.

Uma vez que elevando-se a qualidade de projeto eleva-se os custos de produção, é claro que, em geral, não se pode pretender pro

duzir um produto ou serviço ao mais alto nível de qualidade que é tecnicamente possível. Isto porque pode não ser possível vender aquele nível de qualidade.

A Figura 1.1 ilustra, de forma genérica, os comportamentos do custo de qualidade de projeto e do valor de mercado de um produto. Observa-se que à medida que se eleva a qualidade de projeto, o custo de qualidade cresce segundo uma taxa crescente, enquanto que o valor de mercado daquela qualidade cresce segundo uma taxa decrescente.

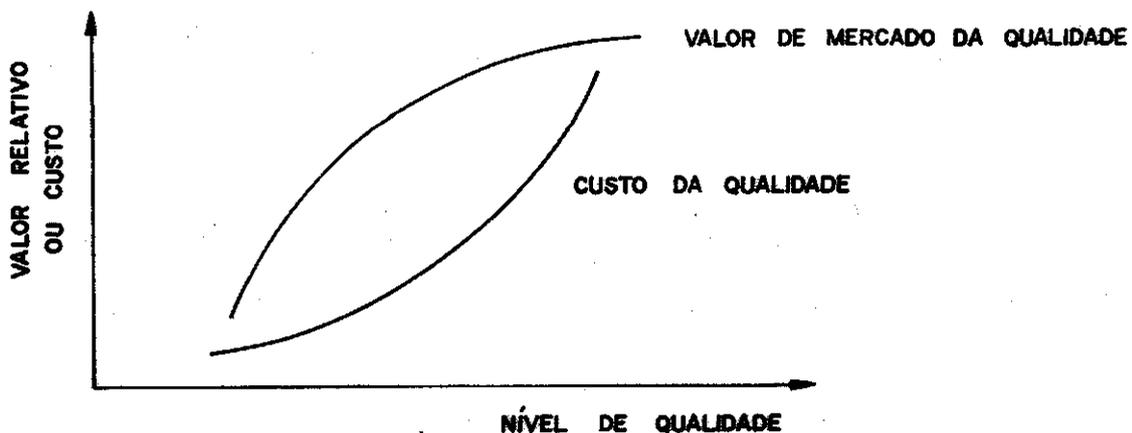


Figura 1.1 Valor e custo da qualidade

Só quando o aumento em valor for superior ao aumento do custo, para um dado aumento na qualidade, tem sentido elevar o nível de qualidade. O nível ideal de qualidade de projeto que deve ser adotado é aquele para o qual um dado aumento nos custos origina igual aumento em valor. Este nível é denominado *qualidade marginal*. Na prática, pode ser difícil determinar este nível de qualidade, devido à dificuldade em se obter a curva de valor de mercado.

Da mesma forma que um nível ótimo de qualidade de projeto

existe, também existe, sob certas condições, um nível ótimo de qualidade de conformação.

Quando uma empresa se propõe produzir um produto (ou serviço) atendendo a uma dada qualidade de projeto, inevitavelmente o correrão produtos (ou serviços) fora das especificações, o que determinará rejeições do produto. Uma rejeição produz um aumento nos custos do processo, através, principalmente, do material e trabalho perdidos. Uma redução dos custos de rejeição é conseguida com adoção de um processo mais refinado, porém, de custo mais elevado. Isto é, à medida que os custos do processo aumentam, diminuem os custos de rejeição. Como estes custos sempre estarão presentes, a qualidade de conformação para a qual a soma desses custos é mínima definirá o nível ótimo de qualidade. A Figura 1.2 ilustra genericamente a relação entre os citados custos e mostra que a adoção da meta de zero defeituosos não é adequada.

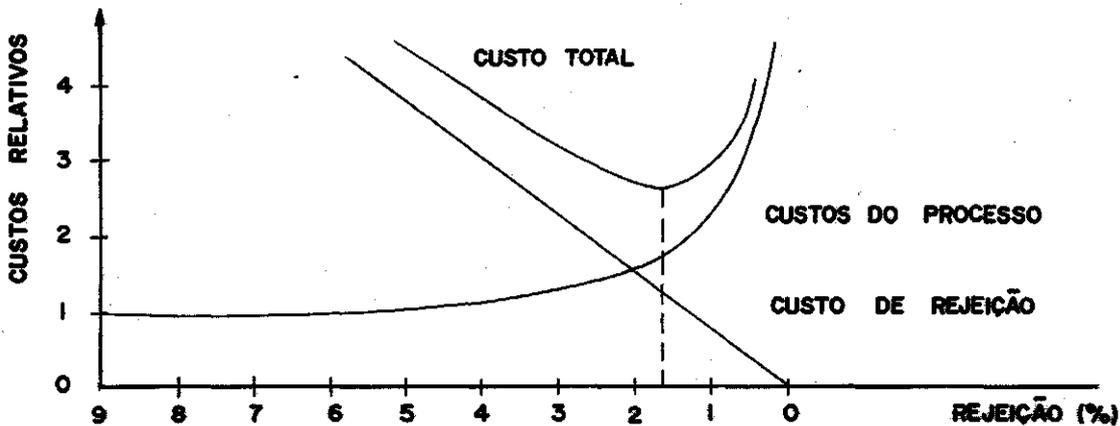


Figura 1,2. Qualidade ótima de conformação.

### 1.3. Controle Estatístico de Qualidade

O controle da qualidade de conformação constitui o Control

le Estatístico de Qualidade, em relação ao qual alguns aspectos serão abordados neste trabalho.

O Controle Estatístico de Qualidade se divide em Controle de Produção e Inspeção de Qualidade. O controle de produção é exercido durante o processo produtivo com o objetivo de manter a qualidade do produto satisfazendo às especificações de produção.

O principal dispositivo para o controle de produção são os *gráficos de controle* que são procedimentos adotados com o objetivo de indicar, de forma simples e eficiente, um eventual descontrole no funcionamento do processo.

Da mesma forma que o produtor procura produzir um produto atendendo a um certo padrão de qualidade, o consumidor tem interesse em precaver-se para não comprar um produto de qualidade inferior. Se ele adquire grandes lotes de um produtor, uma inspeção completa não é, em geral, possível e ele terá que recorrer à inspeção por amostragem.

O procedimento de inspeção é geralmente adotado de comum acordo entre produtor e consumidor, de forma que um sabe, perfeitamente, o que pode esperar do outro. Tais procedimentos constituem a inspeção de qualidade, e o principal dispositivo para a sua execução são os *planos de inspeção por amostragem*.

Com base nos resultados amostrais um lote será aceito ou rejeitado, (ou sofrerá um tratamento intermediário), conforme atenda ou não aos padrões acordados entre produtor e consumidor.

Gráficos de controle e planos de inspeção por amostragem serão abordados com algum nível de detalhes nos capítulos posteriores destas notas. Convém, neste ponto, deixar bem clara a diferença entre os objetivos destes dois procedimentos estatísticos usados no controle de qualidade. O objetivo básico dos gráficos de controle é controlar a qualidade, fornecendo informações que permitirão

modificar a produção e assim originar um produto de qualidade superior. O objetivo básico do plano de inspeção (por amostragem) não é controlar nem estimar a qualidade, mas sim fornecer uma linha de ação em relação à aceitação ou não de lotes. A inspeção de qualidade origina uma certa garantia de qualidade, uma vez que a aplicação de um plano de inspeção a uma série de lotes fornecerá uma probabilidade especificada de aceitar lotes de uma dada qualidade.

Em algumas situações, o esquema de inspeção prevê uma inspeção posterior dos lotes rejeitados. Nestes casos, os planos de inspeção se enquadram no esquema de *inspeção retificadora*, como são os planos de Dodge e Romig (1959). Um esquema de inspeção retificadora fornece uma garantia efetiva de qualidade, em relação à qualidade média do produto aceito segundo o esquema, o que não é conseguido com os planos que não preveem retificação.

Tanto o controle da produção quanto a inspeção de qualidade podem ser efetuadas *por atributos* ou *por variáveis*. No primeiro caso, o produto é simplesmente classificado como possuindo ou não um certo atributo qualitativo, por exemplo, classificado como perfeito ou defeituoso. No segundo caso, o controle ou a inspeção do produto é efetuada através de mensurações, em escala contínua, de características qualitativas como comprimento, peso, resistência, etc.

## 2. GRÁFICOS DE CONTROLE

### 2.1. Introdução

O primeiro gráfico de controle que se tem notícia foi introduzido por W.A. Shewart, em 1924, como um procedimento estatístico para controlar processos produtivos, através do estudo do comportamento das flutuações observadas na qualidade do produto.

Todo o processo produtivo apresenta variação na qualidade do produto e a fundamentação dos gráficos de controle é que aquela variação pode ser dividida em *variação aleatória* e *variação não aleatória*. A variação aleatória é inevitável e é o resultante de muitas causas complexas, cada uma delas contribuindo com uma parcela insignificante para a variação total. Variações não aleatórias são variações devidas a causas identificáveis e podem afetar significativamente a qualidade do produto. Ocorrendo variações não aleatórias num processo, suas causas devem ser identificadas e removidas garantindo-se com isso que apenas a variação aleatória estará presente na qualidade do produto. Com isto, muito provavelmente o produto atenderá às especificações. Caso contrário, um processo mais refinado deverá ser adotado, a menos que as especificações possam ser alteradas.

Se um processo produtivo for tal que a variação da qualidade do produto não for devida a causas identificáveis e se o processo estiver operando a um nível de qualidade aceitável, ele será considerado *sob controle* e no caso contrário, *fora de controle*.

O gráfico de controle é um procedimento simples que nos permite verificar este estado de controle estatístico de um processo, de uma forma rápida e eficiente.

Além do controle efetivo da produção, a adoção dos gráficos de controle fornece outras vantagens indiretas. Algumas dessas

vantagens são: verificações periódicas do desempenho do setor produtivo, comparações da qualidade de produtos provenientes de diferentes setores e, o que talvez seja o mais importante, a motivação para a qualidade que cria no pessoal envolvido na produção.

O gráfico de controle idealizado por Shewart consiste simplesmente em três linhas paralelas: uma linha central, que reflete o nível de operação do processo, e duas linhas externas denominadas *limite superior de controle* (LSC) e *limite inferior de controle* (LIC). Para a operação de um gráfico de controle selecionam-se amostras aleatórias (geralmente de tamanho  $n$ ), do processo produtivo, e marca-se no gráfico, para cada amostra, o valor de uma estatística  $X$  (função de valores amostrais) - proporção de defeituosos, amplitude, média, etc. Se o processo estiver sob controle, os valores da estatística  $X$  oscilarão em torno da linha central do gráfico, com uma certa variabilidade. Esta variabilidade será considerada aceitável se os valores da estatística estiverem todos compreendidos entre os limites de controle, isto porque aqueles limites são estabelecidos de forma que, estando o processo sob controle, é pequena a probabilidade de obter um valor da estatística fora dos limites. A Figura 2.1 ilustra um gráfico típico.

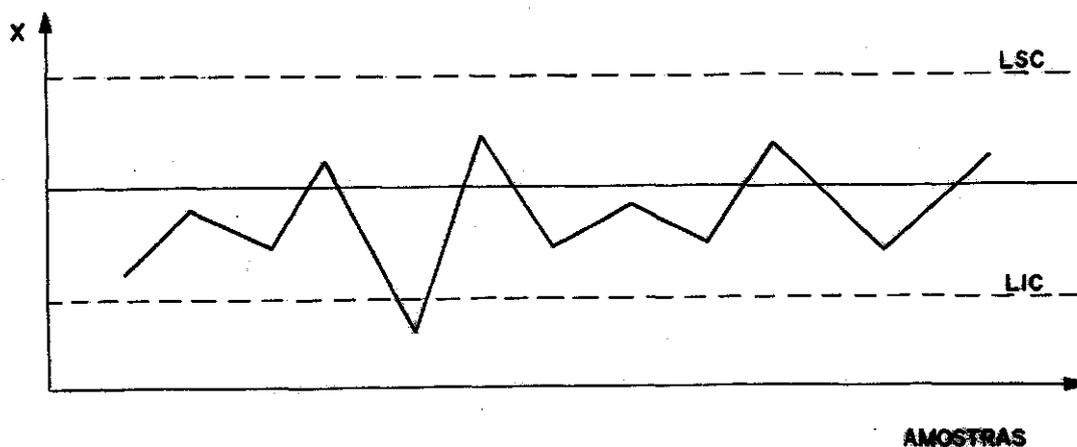


Figura 2.1 Gráfico de controle

Ainda que a descrição e operação de um gráfico de controle sejam simples, existem fatores importantes na sua composição, tais como: a frequência e tamanho das amostras, a determinação dos limites de controle, a ação a tomar quando um ponto se situa fora dos limites, etc. Alguns desses fatores dependerão das características do processo produtivo, enquanto que outros podem ser abordados de forma mais genérica.

Em relação aos limites de controle, existem duas possibilidades, já de uso tradicional, para a sua determinação. Se a distribuição da estatística  $X$  for conhecida sob a hipótese do processo estar sob controle, os limites de controle podem ser determinados de forma que

$$P(LIC \leq X \leq LSC) \geq 1 - \alpha, \quad (2.1.1.)$$

para  $\alpha$  fixado e pequeno. Os limites assim obtidos são denominados *limites probabilísticos*. Sendo  $\alpha$  suficientemente pequeno, a observação de um ponto fora dos limites será uma indicação da presença de causas identificáveis de variação na qualidade, isto é, será uma indicação de que o processo está fora de controle. Uma cuidadosa análise das condições de operação do processo deve então ser feita visando identificar as possíveis causas, as quais, sendo identificadas, devem ser eliminadas.

O leitor, com algum conhecimento de Estatística, já deve ter concluído que a operação de um gráfico de controle é semelhante à aplicação de um teste de hipóteses. Usando gráficos de controle existem também duas espécies de erros que podem ser cometidos. Pode-se concluir que o processo está fora de controle quando ele de fato não está. Isto seria um alarme falso ou erro de 1.<sup>a</sup> espécie e a probabilidade de cometê-lo é  $\alpha$ . Pode-se também concluir que o processo está sob controle quando de fato ele não está - erro de 2.<sup>a</sup> espécie. As consequências desses erros podem ser sérias. Se uma linha de produção é interrompida para identificar causas de variação na qualidade quando elas não existem, os custos podem ser eleva

dos. Por outro lado, a não constatação que um processo está operando fora de controle pode levar a perda de material, tempo e dinheiro, devido aos produtos defeituosos.

Os limites probabilísticos de controle não são os mais utilizados, especialmente no controle por variáveis, quando a distribuição da estatística  $X$  pode não ser conhecida. De uso mais generalizado são os limites de controle definidos em termos de múltiplos do desvio padrão da estatística  $X$ , isto é, limites definidos por

$$\mu_x \pm k\sigma_x, \quad (2.1.2.)$$

onde  $\mu_x$  e  $\sigma_x$  representam, respectivamente, a média e o desvio padrão de  $X$ . Usualmente toma-se  $k=3$  e os limites são denominados limites a 3 desvios padrão.

Se a distribuição da estatística  $X$  é normal, os limites a 3 desvios padrão correspondem a limites probabilísticos com  $\alpha \approx 0,003$ . Para distribuições não normais, porém unimodais, pode-se garantir uma correspondência com  $\alpha < 0,05$ , de acordo com a seguinte desigualdade de Camp-Meidel: "Se  $X$  é uma variável aleatória com distribuição unimodal, então

$$P(|X - \mu_x| > k\sigma_x) \leq 1/(2,25k^2), \quad k > 0". \quad (2.1.3.)$$

Para  $k=3$  obtém-se  $1/2,25 k^2 \approx 0,05$ , correspondente ao valor  $\alpha$  de um gráfico com limites probabilísticos.

Neste trabalho serão sempre considerados os gráficos de controle com limites a 3 desvios padrão, como é usado no sistema norte-americano. O sistema inglês adota limites probabilísticos de controle.

## 2.2. Curva Característica de um Gráfico

Na operação de um gráfico de controle, é de grande valia

a curva característica (C.C.) associada ao gráfico. Esta curva é obtida calculando-se as probabilidades de obter valores da estatística  $X$  entre os limites de controle, para diferentes níveis de operação do processo. Desta forma, a C.C. fornece a probabilidade de afirmar que o processo está sob controle a um determinado nível, porque um valor amostral foi observado entre os limites de controle, quando na realidade o processo está operando a um nível diferente. Exemplificando, se um gráfico para o controle da fração defeituosa  $p'$  de um processo produtivo é estabelecido originando limites de controle  $LIC=p_1$  e  $LSC=p_2$ , e sendo concluído que o processo está sob controle, operando ao nível  $p'_1$ , a C.C. será obtida calculando-se, para alguns valores de  $p' \neq p'_1$  a probabilidade:

$$L_{p'} = P(p_1 \leq p \leq p_2 | p'), \quad (2.2.1.)$$

onde  $p$  é a fração defeituosa amostral.

A C.C., para  $p'=p'_2$ , fornecerá a probabilidade de dizer que o processo está sob controle (operando ao nível  $p'=p'_1$ ), quando na realidade ele está operando ao nível  $p'=p'_2$ .

Para um gráfico que está sendo usado no controle da produção atual, a probabilidade  $L_p$ , pode também ser interpretada como a probabilidade de *não detectar* uma mudança na média do processo, na primeira amostra tomada após a ocorrência da mudança. Estando o processo sob controle (só está sendo afetado por variações aleatórias), amostras sucessivas definem eventos independentes. Portanto, se  $L_p$  é a probabilidade de não detectar uma mudança na primeira amostra,  $(L_p)^k$  será a probabilidade de não detectar a mudança em  $k$  amostras sucessivas. É claro que esta probabilidade tende a zero à medida que  $k$  aumenta e, portanto, com probabilidade 1, qualquer alteração que ocorra (e se mantenha) na média do processo será detectada.

Em geral, para um determinado gráfico de controle, a probabilidade de não detectar uma alteração no processo decresce a medida que aumenta o tamanho  $n$  da amostra. A Figura 2.2. ilustra

a forma da curva característica para a fração defeituosa, para dois valores arbitrários de  $n$ .

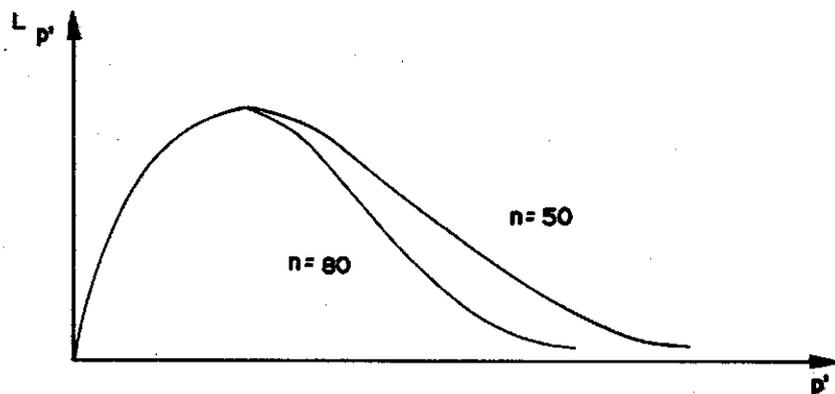


Figura 2.2 Curva característica

### 2.3. Algumas Considerações Práticas

Uma vez que um dos objetivos básicos dos gráficos de controle é revelar prontamente eventuais descontroles no processo, o ideal para o estabelecimento de um gráfico de controle seria tomar amostras relativamente grandes a pequenos intervalos de tempo. Com isto, teríamos uma grande chance de detectar uma alteração no processo tão logo ela ocorra. Entretanto, tomar amostras grandes com muita freqüência é, em geral, muito dispendioso. Na prática, tem-se que decidir entre tomar amostras grandes menos freqüentemente ou tomar amostras menores com maior freqüência. Algumas recomendações práticas serão feitas para alguns casos particulares, uma vez que a solução do problema depende das características do processo específico, tais como probabilidade de ocorrência de mudanças no processo, custos de não detectar uma mudança no nível de processo, custos de inspeção, etc.

Outro elemento muito importante a ser considerado no estabelecimento de um gráfico de controle é a formação dos subgrupos de elementos que compõem as amostras. A fim de que, através de um gráfico de controle, se consiga detectar a presença de causas identificáveis de variação na qualidade do produto, as amostras devem ser constituídas por subgrupos tão homogêneos quanto possíveis. Se causas identificáveis podem aparecer, elas devem originar diferenças *entre* os subgrupos, e não *dentro* dos subgrupos. Assim, se por exemplo três operários estão efetuando um mesmo tipo de tarefa, para controlar a qualidade do serviço realizado não se deve nunca selecionar uma amostra constituída por tarefas realizadas pelos três operários. Uma amostra deve ser constituída por tarefas realizadas por um mesmo operário, porque a diferença entre operários pode ser uma causa identificável de variação na qualidade, e esta diferença poderá ser mascarada se as tarefas forem misturadas num mesmo subgrupo.

Segundo Duncan (1974), "Nada é mais importante no estabelecimento de um gráfico de controle do que uma cuidadosa determinação dos subgrupos".

#### 2.4. Análise Estatística de um Gráfico de Controle

Pelo que comentamos até este ponto, um gráfico de controle revelará eventuais variações na qualidade quando pelo menos um ponto se situar fora dos limites de controle. Entretanto, uma vez que um processo sob controle só apresenta variações aleatórias na qualidade do produto, o conjunto de pontos representados no gráfico deve ter um comportamento semelhante ao de uma *série aleatória* de pontos, isto é, de uma série de pontos gerados por um processo aleatório. A comparação estatística do comportamento dos pontos de um gráfico de controle com o comportamento esperado de uma série (de igual número) de pontos provenientes de um processo aleatório permite constatar que um processo está fora de controle, mesmo que todos os pontos estejam localizados entre os limites de controle. Em muitas situações, uma análise estatística do comportamento dos pontos

de um gráfico de controle pode prevenir a produção de material fora das especificações.

A análise estatística de um gráfico de controle é efetuada em relação às *seqüências de pontos*, onde uma seqüência é uma sucessão de pontos de uma mesma classe, isto é, pontos que satisfazem uma determinada propriedade. Por exemplo, pode-se considerar a classe dos pontos localizados acima (ou abaixo) da linha central do gráfico, a classe dos pontos em acréscimo (ou decréscimo), etc. Assim sendo, uma sucessão de 5 pontos localizados acima da linha central de um gráfico de controle definirá uma seqüência (de tamanho 5) de pontos situados acima da linha central.

Os testes estatísticos mais usados para analisar um gráfico de controle são testes baseados na distribuição do número total de seqüências de uma dada classe e na distribuição do comprimento da maior seqüência de um dado tipo.

Para uma série aleatória, os valores críticos daquelas distribuições estão tabelados em função do número total de pontos observados. As tabelas N1 a Q que aparecem em Duncan (1974) fornecem alguns dos valores críticos. No Apêndice deste trabalho apresentamos aqueles valores para o estudo do número total de seqüência (Tabela I) e do comprimento da maior seqüência crescente ou decrescente (Tabela II).

Para ilustrar estes testes, consideremos o gráfico de controle representado na Figura 2.3.

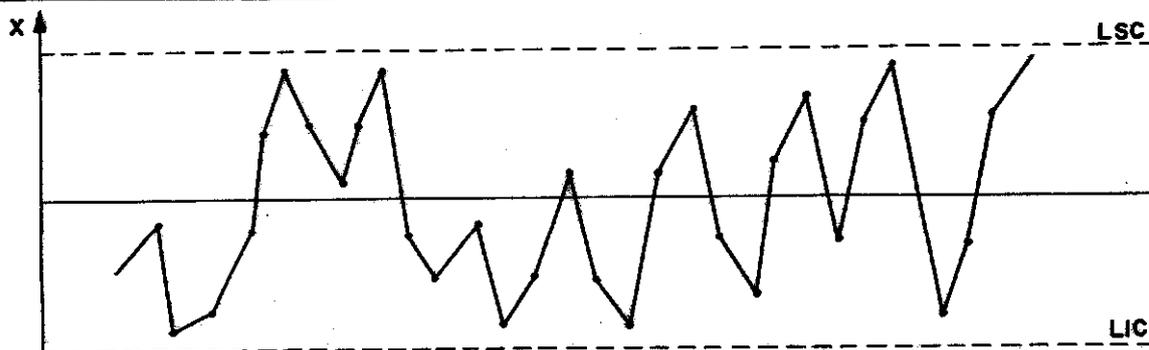


Figura 2.3 Gráfico de controle

Para a análise do número total de seqüências procede-se da seguinte forma:

- a) Contamos o número de pontos em cada uma das classes que caracterizam a seqüência. Sejam  $r$  e  $s$  estes números, onde  $r < s$ .

Para o gráfico acima, e considerando as seqüências de pontos localizados acima e abaixo da linha central, temos:

número de pontos acima : 15 =  $r$

números de pontos abaixo : 17 =  $s$

- b) Contamos o número total  $t$  de seqüências das classes consideradas.

Para o gráfico considerado, temos 6 seqüências acima e 6 seqüências abaixo do valor central, ou seja, um total de  $t=12$  seqüências.

- c) Com os valores de  $r$  e  $s$  observados ( $r < s$ ), lê-se na tabela correspondente o limite (inferior) do número  $\ell$  de seqüências. Se  $t < \ell$ , isto é uma indicação de que o gráfico não tem um comportamento semelhante ao de uma série aleatória, ao nível de significância estabelecido na tabela. Para o gráfico em estudos, temos  $r=15$  e  $s=17$ . Na tabela I do Apêndice, temos que para estes valores, o valor limite para o número de seqüências é  $\ell=11$ . Como obtivemos  $t > \ell$ , não temos elementos (ao nível 0,05 da tabela) de suspeitar de um comportamento não aleatório dos pontos do gráfico.

Para analisar o comportamento dos pontos de um gráfico, em relação à maior seqüência crescente ou decrescente, a Tabela II do Apêndice fornece os maiores comprimentos aceitáveis de seqüências, em função do número total de pontos. Qualquer seqüência com comprimento superior ao valor fornecido pela tabela, é uma indicação de não

aleatoriedade, ou seja, falta de controle do processo.

Analisando a Figura 2.3 vemos que a maior seqüência é uma seqüência crescente de tamanho 4. Como este número é inferior ao valor (7) fornecido pela Tabela II, concluimos pela não evidência de falta de controle do processo.

Outros testes estatísticos podem ser aplicados na análise de um gráfico de controle. Somente quando todos os pontos de um gráfico se encontram entre os limites de controle e além disso o gráfico "passa" nos testes de aleatoriedade, pode-se ter uma razoável confiança que o processo que originou os pontos do gráfico está operando sob controle.

Na prática, os seguintes critérios são geralmente aceitos como indicação de falta de controle de um processo produtivo:

- a. Pelo menos um ponto fora dos limites de controle.
- b. Uma seqüência constituída de pelo menos 7 pontos pertencentes a uma mesma classe.
- c. Presença de ciclos ou outras configurações nitidamente não aleatórias no conjunto de pontos.

### 3. GRÁFICOS DE CONTROLE POR ATRIBUTOS

Neste capítulo serão apresentados os principais gráficos de controle por atributos. Nestes gráficos, o produto, cuja qualidade deve ser controlada, é classificado como possuindo ou não um determinado atributo qualitativo. Unidades do produto que não possuem o atributo são denominadas *defeituosas*. Os principais gráficos de controle por atributos são o gráfico para a fração (ou porcentagem) defeituosa e o gráfico para o número de defeitos.

#### 3.1. Gráfico de Controle para a Fração Defeituosa (Gráfico p)

A variação da fração defeituosa observada em amostras tomadas de um processo produtivo é controlada através do gráfico p.

Para construir um gráfico p, toma-se k (da ordem de 20 a 25) amostras do processo produtivo, registrando-se para cada amostra o número de itens defeituosos. Sejam  $n_i$  e  $d_i$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) o tamanho da amostra e o número observado de itens defeituosos. A linha central do gráfico será a estimativa da fração defeituosa  $p'$  do processo, dada por

$$\bar{p} = (\sum d_i) / (\sum n_i), \quad (3.1.1.)$$

e os limites de controle para a amostra de ordem i serão dados por

$$\bar{p} \pm 3 (\bar{p}(1-\bar{p})/n_i)^{1/2}. \quad (3.1.2.)$$

Como se observa, a menos que as amostras sejam todas de um mesmo tamanho, os limites de controle serão variáveis. Na prática adota-se, para facilitar o uso do gráfico, amostras de tamanho constante, que denotaremos por n.

Uma vez obtidos a linha central e os limites de controle, traçam-se estas linhas num gráfico e registram-se nele as frações de feituosas observadas para as diferentes amostras. A localização das observações em relação aos limites de controle, bem como o comportamento das mesmas no gráfico indicarão se o processo pode ou não ser considerado sob controle.

O exemplo a seguir ilustra a operação e a análise de um gráfico p.

*Exemplo 3.1* (adaptado de Duncan, 1974). Suponha que de uma fundição foram selecionadas 28 amostras de 50 peças cada, tomadas das produções diárias, obtendo-se os seguintes números de peças defeituosas para as sucessivas amostras: 4, 9, 10, 11, 13, 30, 26, 13, 8, 21, 34, 25, 18, 12, 4, 3, 11, 8, 14, 21, 22, 18, 10, 8, 18, 19, 4 e 8. Seja estabelecer um gráfico para controlar a fração de feituosa do processo.

*Solução.* Foram inspecionadas  $50 \times 28 = 1400$  peças, tendo sido encontradas 402 peças defeituosas. Portanto, a estimativa da fração de feituosa do processo é  $\bar{p} = 402/1400 = 0,287$ , e a estimativa do desvio padrão da fração defeituosa é  $\hat{\sigma}_p = (\bar{p}(1-\bar{p})/50)^{1/2} = 0,064$ . Os limites de controle são dados por  $\bar{p} \pm 3\hat{\sigma}_p$ , originando LIC=0,095 e LSC=0,479. Representando-se as frações defeituosas observadas num gráfico com os limites de controle e linha central como determinados, obtém-se o gráfico de controle indicado na Figura 3.1

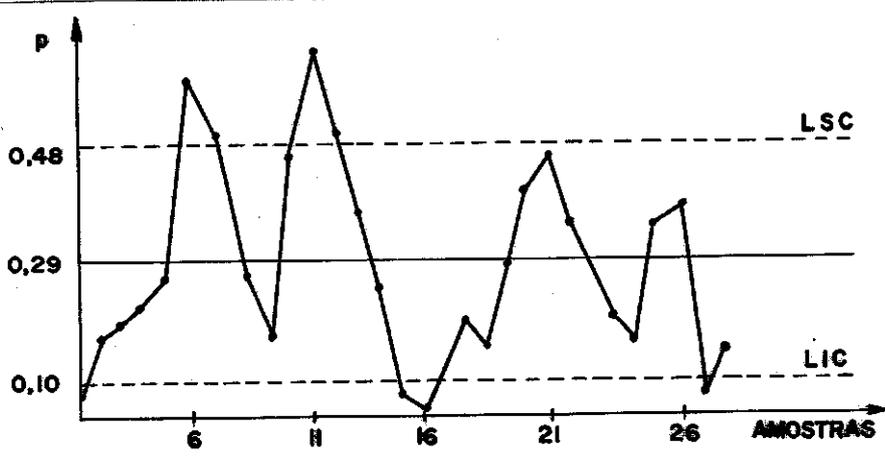


Figura 3.1 Gráfico de controle para o Exemplo 3.1

O gráfico obtido revela que o processo está nitidamente fora de controle. Todos os pontos fora dos limites de controle são indicações de causas identificáveis de variação na qualidade. Estas causas devem ser investigadas e eliminadas do processo. Vamos supor que foram identificadas as causas que originaram os pontos das amostras 6, 7, 11 e 12 acima do LSC (por exemplo, operários mal treinados) e que o número de peças defeituosas na amostra 16 fora 8 e não 3, como previamente registrado. Vamos supor que nenhuma causa aparente foi encontrada para justificar os demais pontos fora dos limites. As causas identificadas devem ser removidas (operários treinados e retificação do valor errado) e as observações correspondentes àquelas amostras devem ser eliminadas para a determinação de novo gráfico de controle, denominado *gráfico revisado*.

A nova fração defeituosa média passa a ser  $\bar{p}=292/1200=0,243$ , originando a estimativa  $\hat{\sigma}_p=0,061$ . Os novos limites de controle são então  $LIC=0,060$  e  $LSC=0,426$ . Construindo um novo gráfico com estes limites e com a nova linha central, obtém-se o gráfico indicado na Figura 3.2, onde os pontos correspondentes às amostras iniciais de números 6, 7, 11 e 12 foram eliminados e o ponto correspondente à amostra de número 16 foi corrigido.

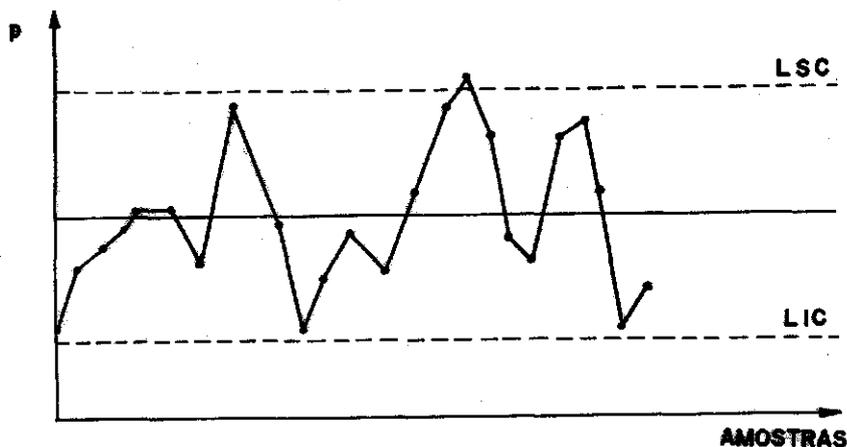


Figura 3.2 Gráfico de controle revisado

Observamos, ainda, um ponto fora dos limites de controle. Imaginemos que nenhuma causa que o justifique fora dos limites foi encontrada. Aceitamos então este ponto "alarme falso" e fazemos u ma análise de seqüências no gráfico revisado para verificar se exis te evidência de um comportamento não aleatório dos valores observa- dos.

Analisando a Figura 3.2, temos 14 pontos abaixo da linha central e 10 pontos acima. Ou seja, temos  $r=10$  e  $s=14$ . Temos tam- bém 5 seqüências abaixo da linha central e 4 seqüências acima, ou seja, temos um total de  $t=9$  seqüências. O valor crítico para o nú- mero mínimo de seqüências para  $r=10$  e  $s=14$  é  $l=8$  (ver Tabela I). Por- tanto, com referência à localização dos pontos em relação ao valor central, não existe evidência de não aleatoriedade. No gráfico ob- servam-se também 6 seqüências crescentes e 5 seqüências decrescentes, observadas para 13 pontos em acréscimo e 9 pontos em decréscimo. Pa- ra  $r=9$  e  $s=13$ , o valor crítico para o número de seqüências é  $l=7$ , me- nor que o total  $t=11$  de seqüências observadas. Portanto, também em relação às seqüências crescentes e decrescentes, não existe evidên- cia de comportamento não aleatório dos dados. Finalizando a análi- se estatística, vemos, na Figura 3.2, que a maior seqüência crescen- te ou decrescente é uma seqüência crescente de tamanho 4. Para  $n=24$  pontos a Tabela II (ver apêndice) indica que uma seqüência crescen- te ou decrescente de tamanho 4 é perfeitamente aceitável.

Uma vez que as análises de seqüências não revelaram com- portamento não aleatório dos dados, não temos evidência para afir- mar que o processo está operando fora de controle (lembre que não foi encontrada, anteriormente, nenhuma causa que justifique o ponto observado fora dos limites). Assim sendo, recomendaríamos adotar a linha central e os limites de controle para o controle da produ- ção futura, possivelmente com a observação que o processo está apre- sentando uma variação muito elevada. Usando-se o gráfico para con- trolar a produção futura, novas revisões devem ser efetuadas sempre que ocorrerem causas identificáveis de variação na qualidade do pro- duto.

Na operação de um gráfico de controle deve-se analisar com cuidado se uma determinada causa que originou pontos fora dos limites de controle também não afetou outros pontos localizados entre os limites. Se isto pode ter ocorrido, estes pontos também devem ser eliminados. É possível também que uma determinada causa, identificada num determinado instante, tenha afetado a qualidade da última parte da produção. Por exemplo, suponha que, identificando a causa que originou um ponto abaixo do LIC de um gráfico  $p$ , concluiu-se que a causa é devida a uma nova matéria-prima que passou a ser usada a partir do tempo  $t_0$ . Se esta matéria-prima provoca uma redução na proporção de defeituosos, e se ela vai continuar em uso, então todos os dados anteriores ao tempo  $t_0$  devem ser eliminados para a de terminação dos novos limites de controle.

### 3.2 Curva Característica e Tamanho da Amostra para o Gráfico $p$ .

A curva característica de um gráfico, em uso para a manutenção do estado de controle de um processo produtivo, é obtida calculando-se as probabilidades indicadas em (2.2.1).

Se denotamos por  $X$  o número de itens defeituosos numa amostra de tamanho  $n$ , selecionada do processo sob controle ao nível  $p_1'$ , temos que  $X$  é uma variável aleatória binomial com parâmetros  $n$  e  $p_1'$  (escreve-se  $X: b(n, p_1')$ ) e a equação (2.2.1) pode ser escrita

$$L_{p_1'} = P(np_1 \leq X \leq np_2). \quad (3.2.1.)$$

Esta probabilidade pode ser calculada através da distribuição binomial ou através de uma aproximação pela distribuição de Poisson ou pela distribuição normal, como segue:

- 1) Se  $n$  e  $p'$  são tais que  $np' > 5$  e  $n(1-p') > 5$ , a binomial pode ser aproximada pela normal com média  $np'$  e variância  $np'(1-p')$ . Usando a correção de continuidade, que é recomendada ao se aproximar uma distribuição discreta

por uma contínua, tem-se então que

$$L_p \approx P(np_1 - 0,5 \leq Y \leq np_2 + 0,5), Y: N(np', np'(1-p')).$$

Denotando por  $\Phi(\cdot)$  a função de distribuição da distribuição normal reduzida, podemos escrever:

$$L_p \approx \Phi((p_2 - p' + 1/2n)/\sigma_p) - \Phi((p_1 - p' - 1/2n)\sigma_p), \quad (3.2.2.)$$

onde

$$\sigma_p = (p'(1-p')/n)^{1/2}.$$

- 2) Para  $n$  relativamente grande e  $p'$  relativamente pequeno e tais que  $np' \leq 5$  ou  $n(1-p') \leq 5$ , a distribuição binomial é melhor aproximada pela distribuição de Poisson com parâmetro  $np'$ . A probabilidade em (3.2.1) pode ser então aproximada como segue:

$$L_p \approx P(np_1 \leq W \leq np_2), \quad (3.2.3.)$$

onde  $W$  é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro  $np'$ .

Para o dimensionamento da amostra para a construção do gráfico  $p$ , existem duas soluções bastante simples. Especialmente para pequenos valores de  $p'$ , o tamanho  $n$  da amostra deve ser tal que exista uma alta probabilidade de obter itens defeituosos na amostra. De outro modo, poderíamos obter pontos fora dos limites de controle devido à presença de apenas um item defeituoso na amostra. Por exemplo, suponha que o nível médio do processo seja  $p'=0,01$ . Se um gráfico é construído com  $n=9$ , o limite superior de controle será  $LSC=0,01 + ((0,01)(0,99))^{1/2} = 0,1095$ . Se a amostra origina exatamente um item defeituoso, a fração defeituosa amostral será  $p=1/9 = 0,112$ , que se localizará fora dos limites de controle, indicando que o processo talvez esteja fora de controle. Para evitar este problema, sugere-se que o valor de  $n$  seja tal que exista uma probabilidade de pelo menos 0,9 de se obter pelo menos um item defeituoso na amostra. Sendo  $p'$  pequeno, aquela probabilidade pode ser calculada de forma aproximada pela distribuição de Poisson com parâmetro  $np'$ , obtendo-se:

$$0,10 = P(X = 0) = e^{-np'}. \quad (3.2.4.)$$

Portanto, o valor de  $n$  deverá ser maior ou igual ao inteiro mais próximo de  $2,3/p'$ . Para a ilustração acima, na qual consideramos  $p'=0,01$ , a amostra deveria ser de tamanho 230.

Outra possibilidade para o dimensionamento da amostra consiste em se exigir que com probabilidade pelo menos igual a 0,5 se detecte, com uma única amostra, um acréscimo de magnitude  $d$  no nível  $p'$  do processo. Ou seja,  $n$  é determinado satisfazendo à equação:

$$P(p > LSC | p' + d) \geq 0,5. \quad (3.2.5.)$$

Supondo que a fração defeituosa tenha distribuição aproximadamente normal, e considerando a igualdade em (3.2.5), o valor de  $n$  é obtido através da equação

$$LSC = p' + d \quad (3.2.6)$$

cuja solução em  $n$  fornece

$$n = 9p'(1-p')/d^2. \quad (3.2.7.)$$

Para fins de ilustração, suponha que se estabeleceu o controle de um processo produtivo operando ao nível  $p'=0,05$ . Suponha que para fins de acompanhamento do processo, deseja-se determinar o tamanho da amostra de tal forma que se a média do processo sofre um acréscimo de 0,04, isto seja detectado, na primeira amostra tomada após a ocorrência da alteração, com pelo menos 50% de probabilidade.

Aplicando a fórmula em (3.2.7), com  $p'=0,05$  e  $d=0,04$ , obtêm-se  $n=267$ . Se for desejado detectar, com igual probabilidade, um acréscimo igual a 0,03, o tamanho da amostra deverá ser 475, e deverá ser igual a 1069 para se detectar um acréscimo da ordem de 0,02. Como era de se esperar, para detectar pequenos acréscimos na média do processo, tem-se que tomar amostras muito grandes.

Encerramos esta seção lembrando ao leitor que as soluções apresentadas para o dimensionamento da amostra são soluções simplistas, ba

seadas em critérios às vezes contestados. Estudos mais elaborados, visando tanto o dimensionamento da amostra quanto a frequência da amostragem, têm sido desenvolvidos. Nestes estudos, o objetivo consiste na determinação de um gráfico de controle que minimize os custos e perdas envolvidas com a operação do gráfico, tais como a perda devida a não constatação de um acréscimo na fração defeituosa, o custo de inspeção, o custo de alarme falso, o custo de identificar uma causa de variação na qualidade, etc. Recomendamos ao leitor interessado consultar, por exemplo, Chiu (1975) e Duncan (1978).

### 3.3. Gráficos de Controle para o Número de Defeitos

#### 3.3.1. Gráfico c

Na inspeção de conjuntos complexos tais como geladeira, motor de automóvel e também em observações tais como o número de defeitos na superfície de uma chapa de metal de determinada área, número de defeitos de isolamento por metro de um cabo condutor, é mais natural considerar o número de defeitos na unidade como a variável a controlar. Esta variável, usualmente denotada por  $c$ , segue, sob condições bastante gerais, a forma de uma distribuição de Poisson. Isto será válido sempre que houver uma grande quantidade de pontos para a ocorrência de defeitos, porém sendo pequena a probabilidade de ocorrer um defeito em qualquer ponto.

O gráfico para controle do número de defeitos numa unidade é denominado gráfico  $c$ , o qual tem os limites de controle determinados em termos da distribuição de Poisson.

Para a operação de um gráfico  $c$ , a "unidade" não necessita ser necessariamente uma unidade de determinado produto, como uma geladeira ou um motor. A unidade, denominada *unidade de inspeção*, pode ser um subgrupo (de tamanho constante) de itens. Assim, a unidade de inspeção pode ser definida como sendo 5 rádios, uma área de  $2m^2$ , etc. A fim de que o modelo de Poisson seja aplicável, os subgrupos devem ser uniformes de forma a apresentarem probabili-

dades aproximadamente iguais de ocorrência de defeitos. Sendo a unidade de inspeção formada por uma única unidade do produto (um aparelho de TV, por exemplo) ou por um subgrupo de unidades do produto (10 livros, por exemplo), o gráfico c apresentará as variações do número total de defeitos observados *por unidade de inspeção*. Isto é, o gráfico c apresentará as variações do número de defeitos por aparelho de TV inspecionado, se a unidade de inspeção for um aparelho de TV, ou as variações do número de defeitos por 10 livros inspecionados, se a unidade de inspeção for definida como sendo 10 livros.

Sendo inspecionadas  $n$  ( $n > 20$ ) unidades de inspeção, isto é, sendo tomadas  $n$  amostras de tamanho 1, uma estimativa da média (e da variância) de  $c$  será a média amostral  $\bar{c}$  e o gráfico terá então os limites de controle dados por

$$\bar{c} \pm 3 (\bar{c})^{1/2}. \quad (3.3.1.)$$

Uma vez definida, a unidade de inspeção deve ser mantida constante para a construção e operação do gráfico c, no qual as amostras são constituídas de uma unidade de inspeção.

Em algumas situações, pode haver interesse em inspecionar, para cada amostra, um número arbitrário  $k$  de unidades de inspeção. Numa situação como esta, para continuar operando um gráfico c, a unidade de inspeção deve ser redefinida de forma a coincidir com o tamanho da amostra. Isto é, a nova unidade de inspeção deve ser igual a  $k$  unidades antigas.

Se a unidade de inspeção não é redefinida, o gráfico de controle deve ser estabelecido em termos do número médio de defeitos por unidade. Um tal gráfico é denominado *gráfico u*.

### 3.3.2 Gráfico u

Um gráfico u apresenta as variações observadas da variã-

vel  $u = c/k$ , onde  $c$  representa o número de defeitos em uma amostra formada por  $k$  unidades de inspeção.

Se todas as amostras são constituídas de  $k$  unidades de inspeção, como  $u$  é, na realidade, uma média, os limites de controle para o gráfico  $u$  serão dados por

$$\bar{u} \pm 3(\bar{u}/k)^{1/2} = (\bar{c} \pm 3(\bar{c})^{1/2})/k. \quad (3.3.2.)$$

Em algumas situações, como no caso de inspeção completa, o número de unidades que compõem as amostras é variável e a utilização do gráfico  $u$  se faz necessária para o controle do número de defeitos.

Se a  $i$ -ésima amostra é composta por  $k_i$  unidades de inspeção, o valor a aparecer no gráfico, para aquela amostra, será,  $u_i = c_i/k_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , onde  $c_i$  denota o número de defeitos naquela amostra. Supondo ser o modelo de Poisson adequado, o desvio padrão de  $u_i$  é estimado através de  $(\bar{u}/k_i)^{1/2}$ , e os limites de controle serão dados por

$$\bar{u} \pm 3(\bar{u}/k_i)^{1/2}, \quad (3.3.3.)$$

onde  $\bar{u} = (\sum k_i u_i) / (\sum k_i) = C / \sum k_i$ , sendo  $C$  o número total de defeitos.

Como se observa, os limites de controle para um gráfico  $u$  com tamanho de amostra variável não são constantes.

*Exemplo 3.2* O processo de montagem de determinado equipamento tem estado sob controle, apresentando uma média de 3,2 defeitos por unidade arbitrária de produção. Com a finalidade de verificar se o processo continua sob controle, todos os serviços realizados em 8 dias foram inspecionados, anotando-se, para cada dia, o total de defeitos e o número de unidades produzidas. Os valores observados, bem como os resultados necessários para a determinação dos limites de controle estão indicados na Tabela 3.1.

TABELA 3.1

Determinação dos Limites de Controle para o Exemplo 3.2.

Dias	1	2	3	4	5	6	7	8	Totais
Números de defeituosos ( $c_i$ )	12	14	13	15	11	29	20	10	124
Unidades produzidas ( $k_i$ )	4,3	4,4	4,0	4,9	4,1	4,2	4,2	1,9	32,2
$u_i = c_i/k_i$	2,8	3,2	3,2	3,1	2,7	6,9	4,8	5,3	-
$3\sigma_{u_i} = 3(3,2/k_i)^{1/2}$	2,6	2,6	2,7	2,4	2,7	2,6	2,6	3,9	-
LIC = $3,2 - 3\sigma_{u_i}$	0,6	0,6	0,5	0,8	0,5	0,6	0,6	0,0	-
LSC = $3,2 + 3\sigma_{u_i}$	5,8	5,8	5,9	5,6	5,9	5,8	5,8	7,1	-

Observa-se que o número de defeituosos por unidade produzida no sexto dia encontra-se acima do limite superior de controle. Isto é uma indicação de que provavelmente alguma causa específica deve ter afetado o processo naquele dia. Sendo a causa identificada, as observações referentes àquele dia devem ser desprezadas. Isto sendo feito, não haverá mais evidência de falta de controle do processo.

### 3.3.3. Gráfico para Defeitos Categorizados

Ficou subentendido, na análise do gráfico c, que consideramos todos os possíveis defeitos com importâncias iguais. Na prática

tica, em algumas situações, os defeitos são classificados por categorias de importância,  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , atribuindo-se um "peso"  $p_i$  à categoria  $i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ). Os eventuais defeitos observados numa unidade de inspeção são então ponderados pelos pesos obtendo-se o *demérito* da unidade, denotado por  $D$ , e definido por

$$D = \sum_{i=1}^k n_i p_i \quad (3.3.4.)$$

onde  $n_i$  denota o número observado de defeitos da categoria  $i$ .

Um gráfico de controle para  $D$  é então obtido da mesma forma que o gráfico  $c$ , e terá limites de controle dados por

$$\bar{D} \pm 3\bar{D}^{1/2} \quad (3.3.5.)$$

onde  $\bar{D}$  denota o número médio de deméritos por unidade inspecionada, obtido através da inspeção de pelo menos 20 unidades.

*Exemplo 3.3.* Uma oficina mecânica inspecionou 20 serviços do mesmo tipo, dentre os serviços que realizou numa semana, classificando as falhas nos serviços em categorias de defeitos variando de "triviais" a "desastrosas". Com os pesos adotados para cada categoria de defeito, foram obtidos os seguintes deméritos:

Serviço	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Demérito	3	0	7	5	3	2	4	2	1	16	0	8	3	4	1	1	3	2	6	4

Com base nestas informações, pode-se concluir que os serviços que estão sendo realizados na oficina estão sob controle?

*Solução.* O número médio de deméritos por serviços é  $\bar{D}=75/20=3,75$ , originando limites de controle localizados em  $3,75 \pm 3(3,75)^{1/2}$ . Tem-se então LIC=0 e LSC=9,56. O gráfico de controle correspondente está indicado na Figura 3.3.

O gráfico indica que muito provavelmente alguma causa específica deve ter afetado o serviço número 10. Sendo identificada esta causa, e sendo ela removida do processo, não teremos evidência de falta de controle nos serviços da oficina. Os limites de controle revisados poderão ser então determinados e usados para o acompanhamento de futuros serviços.

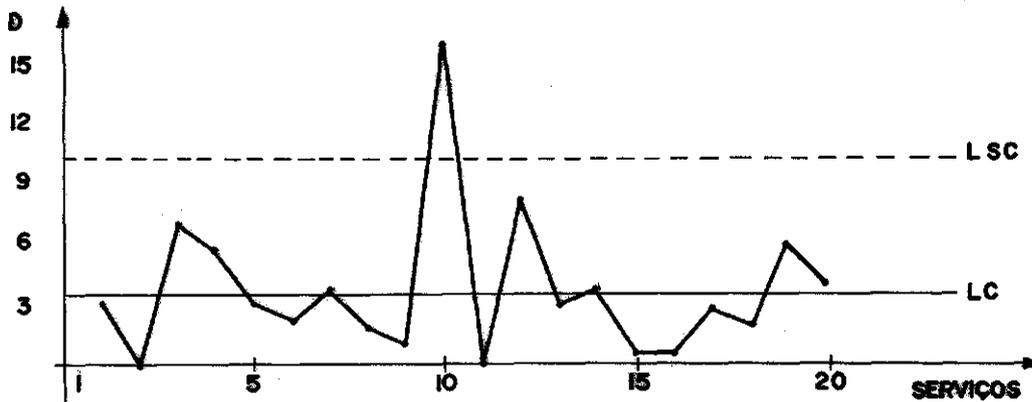


Figura 3.3. Gráfico de controle para o Exemplo 3.3.

### Exercícios

- 3.1 Se um processo produtivo origina 1% de itens defeituosos e se uma amostra de 100 itens não revelou nenhum item defeituoso, vo cê pode concluir que o processo melhorou? Explique.
- 3.2 Um processo produtivo, operando sob controle, apresenta uma fração defeituosa média igual a 0,04. Suponha que a média do processo muda, bruscamente, para 0,06. Qual a probabilidade que um gráfico de controle revele esta mudança: a) na primeira amostra após a ocorrência, b) na primeira ou na segunda amostra após a ocorrência, spondo:
- 1) que o gráfico é operado com amostras de tamanho 600,
  - 2) que o gráfico é operado com amostras de tamanho 300.

- 3.3 A fração defeituosa média de um processo produtivo operando sob controle é 0,06. Deseja-se estabelecer um gráfico de controle que forneça uma probabilidade aproximada de 50% de detectar, na primeira amostra após a ocorrência, a mudança na média do processo para 0,09. Qual deve ser o tamanho da amostra? E se a mudança for para 0,08?
- 3.4 25 amostras consecutivas de tamanho 400 originaram os seguintes números de itens defeituosos: 18, 9, 12, 16, 18, 8, 14, 14, 15, 18, 13, 10, 14, 23, 18, 16, 12, 16, 10, 1, 0, 5, 11, 10. Você pode concluir que o processo está operando sob controle? Suponha que são identificadas as causas responsáveis por eventuais pontos localizados fora dos limites de controle do gráfico. Se a fração defeituosa do processo é 0,05, qual a probabilidade de obter um ponto dentro dos limites de controle?
- 3.5 Uma clínica dentária efetuou a inspeção de obturações efetuadas por seus dentistas durante 20 semanas consecutivas. Os números de obturações inspecionadas foram 10, 11, 16, 15, 15, 11, 12, 16, 12, 13, 19, 10, 13, 16, 9, 10, 11, 10, 9 e 10 e os números de obturações defeituosas foram 1, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 0 e 2, respectivamente. Estabeleça um gráfico de controle e analise o processo.
- 3.6 Numa plantação de algodão, o nível médio de infestação de pragas é de 2% das plantas. O controle da infestação é processado através de um gráfico de controle da seguinte forma: semanalmente,  $n$  plantas são escolhidas ao acaso e são inspecionadas. Se for observada uma infestação superior a 5%, a infestação é considerada fora de controle e a plantação é pulverizada com inseticida.
- a) Supondo que a infestação se distribui aleatoriamente nas plantas, qual a probabilidade que uma infestação que afeta 6% das plantas seja detectada na 1.<sup>a</sup> amostra tomada após a sua ocorrência?

- b) Sob as hipóteses em (a), em média quantas amostras serão ne  
cessárias para detectar uma infestação que atinge 6% das  
plantas?

## 4. GRÁFICOS DE CONTROLE POR VARIÁVEIS

### 4.1. Introdução

No capítulo precedente, os dois principais gráficos de controle por atributos foram considerados. Aqueles gráficos são de utilização bastante simples, e têm a grande vantagem de poderem ser aplicados para controlar, simultaneamente, mais de uma característica qualitativa. Os gráficos por variáveis, que veremos neste capítulo, têm a vantagem de requererem tamanhos de amostras bem menores que os requeridos pelos gráficos por atributos, porém têm a desvantagem de só permitirem o controle de uma única característica qualitativa de cada vez. Se mais de uma característica deve ser controlada, será necessário aplicar um gráfico para cada uma delas.

Evidentemente, numa situação real, não será possível controlar todas as variáveis envolvidas num processo. Para fins de controle, devem ser escolhidas aquelas variáveis que fornecem as maiores possibilidades de redução ou prevenção de custos, isto é, devem ser controladas aquelas variáveis que causam rejeição ou retificação do produto envolvendo custos substanciais.

Cuidados especiais devem ser tomados em relação à obtenção dos valores amostrais. Tais valores serão influenciados pelas variações nas medições bem como pelas variações na qualidade da característica sendo medida. É fundamental que a variabilidade natural das medições não seja acrescida por erros de medições ou de registro dos valores medidos. Para diminuir as chances de erros, devem ser fornecidas instruções detalhadas sobre os instrumentos de medida e sobre o correto uso dos mesmos. Igualmente, deve ser elaborado um formulário próprio para o registro dos valores amostrais. Tal formulário deve conter informações para identificar o item e a característica que está sendo medida, a unidade de medida, o responsável pela medição e a data de produção do item inspecionado. É de fundamental importância o registro de informações sobre mudanças no

processo, tais como alterações de operadores e de matéria-prima, regulagem de máquina, etc. Informações deste tipo serão de grande utilidade na procura de causas identificáveis de variação na qualidade.

Como foi explicitado no Capítulo 2, é de vital importância que as observações para a obtenção e operação de um gráfico sejam fornecidas por subgrupos homogêneos de observações, com a maior possibilidade de variação *entre* os subgrupos. Cuidados especiais devem ser tomados para a manutenção da ordem de produção. Especialmente se o objetivo principal do gráfico é detectar alterações no processo, um subgrupo deve ser constituído por itens produzidos em sucessão. O primeiro grupo deve ser formado por itens produzidos o mais próximo possível do tempo  $t_1$ , o próximo grupo formado por itens produzidos o mais próximo possível do tempo  $t_2$ , e assim sucessivamente.

Na inspeção por variáveis, com vistas a selecionar subgrupos de itens de forma a minimizar as chances de ocorrerem variações *dentro* dos subgrupos, estes são geralmente constituídos por um número reduzido de elementos, usualmente entre 4 e 10, sendo 5 o valor mais freqüentemente adotado.

Não existe regra geral para a determinação da freqüência dos subgrupos. Logo no início do uso de um gráfico de controle para analisar um processo, as amostras são geralmente selecionadas com grande freqüência. Posteriormente, após a identificação e remoção das possíveis causas identificáveis de variação da qualidade, para a manutenção do processo sob controle, as amostras podem ser selecionadas com menor freqüência.

Como na inspeção por atributos, alguns estudos teóricos foram desenvolvidos visando determinar o tamanho da amostra e a freqüência da amostragem para um gráfico por variáveis. Estes estudos levam em consideração a incidência de variações não aleatórias no processo, os custos de inspeção, os custos envolvidos na detecção

de causas identificáveis de variação na qualidade, bem como os custos de não detecção. Nesta linha, e com base em um modelo econômico proposto por Duncan (1956), Chiu e Wetherill (1974) apresentam um procedimento relativamente simples para o estabelecimento de um gráfico específico para o controle da média de um processo produtivo. Como relatado em Duncan (1974), a conclusão geral é que um tamanho de amostra da ordem de 4 a 5 é próximo do valor ótimo quando as causas identificáveis de variação na qualidade provocam uma mudança na média do processo pelo menos igual a dois desvios padrão. Para a detecção de mudanças da ordem de um desvio padrão, amostras de tamanhos 15 a 20 são mais econômicas que amostras de tamanhos 4 a 5. Também, se uma mudança na média do processo causa uma taxa de perda elevada, relativamente ao custo de inspeção, é preferível tomar amostras pequenas com grande frequência do que tomar amostras grandes com menor frequência. Por exemplo, quando a taxa de perdas é elevada, é preferível tomar amostras de tamanho 4 ou 5 a cada 15 minutos do que amostras de tamanho 16 ou 20 a cada hora.

As características mais importantes de um processo produtivo, no controle por variáveis, são a média e a dispersão natural do processo. Mudanças significativas na média e/ou na dispersão ou variabilidade de um processo produtivo podem originar alterações significativas na fração defeituosa. Por esta razão, no controle por variáveis, a média e a dispersão do processo devem ser controladas simultaneamente. Isto é geralmente conseguido usando o gráfico  $\bar{X}$ , para o controle da média, e o gráfico R, para o controle da variabilidade. Quando usados em conjunto, estes gráficos constituem um procedimento razoavelmente eficiente para o controle de um processo.

#### 4.2. Gráficos $\bar{X}$ e R

Um gráfico  $\bar{X}$  apresenta as variações observadas nas médias de amostras selecionadas de um processo produtivo, e tem a finalidade de controlar a média  $\bar{X}$  do processo. Um gráfico R apresenta as variações observadas nas amplitudes das amostras, onde a amplitude é definida pela diferença entre o maior e o menor valor amostral, e

tem a finalidade de controlar a variabilidade do processo.

Selecionadas  $k$  (da ordem de 20 a 25) amostras de tamanho  $n$  de um processo produtivo, sejam  $\bar{X}_i$  e  $R_i$  respectivamente a média amostral e a amplitude amostral para a  $i$ -ésima amostra ( $i=1,2,\dots,n$ ). A linha central do gráfico  $\bar{X}$  será a média das médias, isto é, será  $\bar{\bar{X}} = (1/k) \sum \bar{X}_i$ , e os limites de controle serão localizados em  $\bar{\bar{X}} \pm 3\sigma_{\bar{X}}$ , ou seja, serão localizados em

$$\bar{\bar{X}} \pm 3\sigma' n^{-1/2}, \quad (4.2.1.)$$

onde  $\sigma'$  denota o desvio padrão do processo. Portanto, para a determinação dos limites de controle para um gráfico  $\bar{X}$ , necessário se faz estimar o desvio padrão  $\sigma'$  do processo. A estimativa de  $\sigma'$  não deve ser feita através do procedimento usual, isto é, através do desvio padrão amostral baseado na totalidade das observações. Se isto fosse feito, a estimativa seria afetada pelas variações entre as médias dos subgrupos, não sendo portanto uma medida adequada para detectar variações extremas nestas médias. A estimativa de  $\sigma'$  deve ser computada com base apenas nas variações dentro dos subgrupos. Se o processo estiver sob controle em relação à variabilidade, a estimativa de  $\sigma'$  pode ser obtida em função da média  $\bar{R}$  das amplitudes. Desta forma, um gráfico  $\bar{X}$  só deve ser estabelecido após conseguir o controle do processo em relação à variabilidade.

Se a distribuição de probabilidade da característica  $X$  pode ser suposta *normal*, os limites de controle para o gráfico  $R$  podem ser obtidos através da *amplitude relativa* definida por  $W=R/\sigma'$ . Para amostras provenientes de uma distribuição normal, a média e o desvio padrão da variável  $W$ , denotado por  $d_2$  e  $d_3$ , respectivamente, estão tabelados em função do tamanho  $n$  da amostra, como indicado na Tabela III no Apêndice, adaptada de Duncan (1974). Assim sendo, para  $n=5$  tem-se que  $d_2=E(W)=2,326$  e  $d_3=\sigma'_W=0,864$ .

Da relação  $R=W\sigma'$  tem-se que  $E(R)=d_2\sigma'$  e  $\sigma'_R=d_3\sigma'$ , e se

$E(R)$  é estimado através da média  $\bar{R}$  das amostras, obtêm-se para estimativa de  $\sigma'$ :

$$\hat{\sigma}' = \bar{R}/d_2. \quad (4.2.2.)$$

Substituindo esta estimativa na expressão (4.2.1) os limites de controle para o gráfico  $\bar{X}$  são escritos

$$\bar{X} \pm 3\bar{R}/(d_2 n^{1/2}).$$

Denotando  $3/(d_2 n^{1/2})$  por  $A_2$ , constante também registrada na Tabela III, os limites para o gráfico  $\bar{X}$  são dados por

$$\bar{X} \pm A_2 \bar{R}. \quad (4.2.3.)$$

Os limites de controle para o gráfico R serão localizados em  $\bar{R} \pm 3\sigma'_R = \bar{R} \pm 3d_3\sigma'$ . Estimando  $\sigma'$  como em (4.2.2), obtêm-se os limites  $\bar{R} \pm 3d_3\bar{R}/d_2 = (1 \pm 3d_3/d_2) \bar{R}$ .

É norma tradicional em controle de qualidade denotar  $1+3d_3/d_2$  por  $D_4$  e  $1-3d_3/d_2$  por  $D_3$ . Estas constantes estão também registradas na Tabela III. Com esta notação, os limites de controle para o gráfico R são

$$LIC = D_3 \bar{R} \quad \text{e} \quad LSC = D_4 \bar{R}. \quad (4.2.4.)$$

Deve ter ficado claro que para o controle da variabilidade (e indiretamente da média) de um processo, a característica qualitativa tem que ter distribuição normal. Nas aplicações de controle de qualidade, esta restrição não é demasiadamente séria, uma vez que características qualitativas medidas em escala contínua têm, em geral, distribuição normal ou aproximadamente normal. Se os gráficos de controle vão ser estabelecidos para um processo novo, do qual não se tem informações prévias, antes de procurar estabelecer os gráficos deve ser aplicado um teste de normalidade para a característica de interesse. Eventualmente pode ser necessário efetuar uma transformação na variável, visando a normalidade.

Em algumas situações práticas, o nível médio bem como a variabilidade do processo podem ser especificados, ou por experiências prévias com processos semelhantes, ou porque aqueles valores são determinados por condições específicas do processo, como por exemplo o ajustamento de máquinas. Sendo  $\bar{X}''$  e  $\sigma''$  os valores especificados para a média e o desvio padrão do processo, respectivamente, os limites de controle para o gráfico  $\bar{X}$  serão dados por

$$\bar{X}'' \pm 3\sigma'' n^{-1/2} = \bar{X} \pm A\sigma'' \quad (4.2.5.)$$

Os limites de controle para o gráfico R serão dados por  $\bar{R} \pm 3\sigma_R$ . Porém, sendo  $\sigma''$  o desvio padrão do processo, segue-se que  $R = W\sigma''$ , resultando que  $\bar{R} = E(R) = d_2\sigma''$  e  $\sigma_R = d_3\sigma''$ . Portanto os limites de controle para a gráfico R são dados por

$$\begin{aligned} LIC &= (d_2 - 3d_3)\sigma'' = D_1\sigma'' \\ LSC &= (d_2 + 3d_3)\sigma'' = D_2\sigma''. \end{aligned} \quad (4.2.6.)$$

Valores das constantes A,  $D_1$  e  $D_2$  estão também registradas na Tabela III, no Apêndice.

*Exemplo 4.1* Suponha que 24 amostras de tamanho 5 foram selecionadas de um processo produtivo, para o controle de uma característica X suposta normalmente distribuída. Medidos, para cada amostra e em determinada unidade, os valores de X, obteve-se as médias e amplitudes amostrais indicadas na Tabela 4.1. Estabelecer os gráficos para o controle do processo.

TABELA 4.1

Médias e Amplitudes de Amostras de Tamanho 5

Amostra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{X}$	10,7	11,0	11,9	13,1	11,9	14,3	11,7	10,7	12,0	13,7	9,8	13,0
R	4,0	3,5	7,5	3,5	4,5	5,0	6,0	5,5	4,0	6,0	3,5	3,0
Amostra	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\bar{X}$	11,7	9,6	12,0	11,9	11,7	11,1	10,0	11,0	12,8	9,7	9,9	10,1
R	6,0	8,0	4,5	7,5	4,0	7,5	3,5	5,0	3,5	6,0	3,5	6,0

*Solução:* A média das médias e a média das amplitudes são, respectivamente,  $\bar{\bar{X}}=275,3/24=11,47$  e  $\bar{R}=121/24=5,04$ . Consultando a Tabela III, no Apêndice, para  $n=5$ , obtêm-se  $D_3=0$  e  $D_4=2,115$ . De acordo com a (4.2.4), os limites para o gráfico R são  $LIC=0$  e  $LSC=(2,115)(5,04)=10,66$ .

Os valores observados das amplitudes R estão indicados na Figura 4.1. Nenhum valor se encontra fora dos limites de controle, nem se observa um comportamento não aleatório dos valores, indicando que não existe evidência de que o processo esteja fora de controle em relação à variabilidade. Pode-se então estabelecer os limites de controle para o gráfico  $\bar{X}$  que, de acordo com a expressão em (4.2.3), e sendo  $A_2=0,577$  (ver Tabela III), são dados por  $11,47 \pm (0,577)(5,04)$ . Portanto os limites para o gráfico  $\bar{X}$  serão  $LIC=8,56$  e  $LSC=14,38$ . As médias amostrais  $\bar{X}$  estão indicadas na Figura 4.2. Não se observa pontos fora dos limites de controle e a disposição dos pontos no gráfico não revela um comportamento não aleatório (a análise de seqüências não se faz necessária, visto que o dado mais suspeito é uma seqüência decrescente de tamanho 4, o que para um total de 24 pontos é perfeitamente aceitável). Dadas as configurações dos gráficos  $\bar{X}$  e R, conclui-se que não existe evidência de descontrole nem na média, nem na variabilidade do processo. Os limites de controle obtidos podem portanto ser prolongados para o acompanhamento futuro do processo.

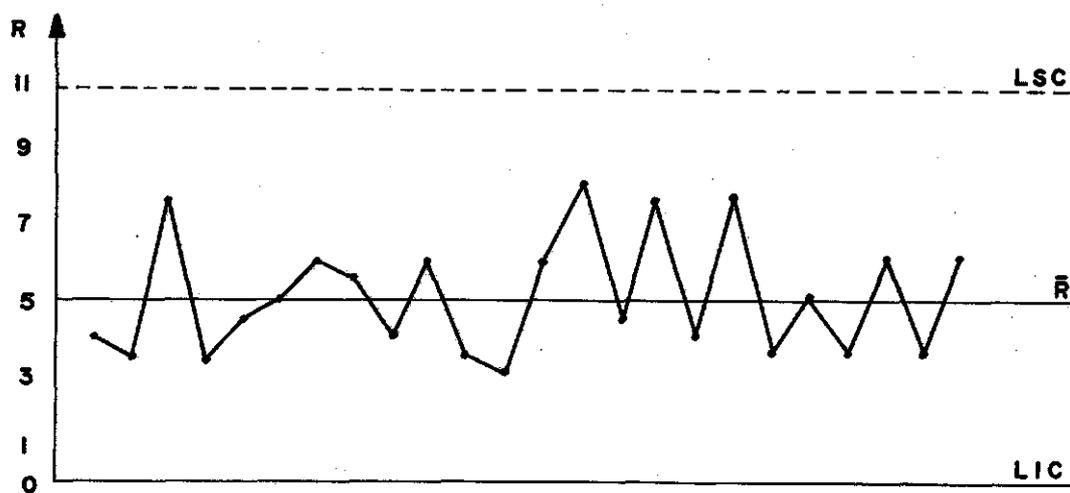


Figura 4.1. Gráfico R para o Exemplo 4.1

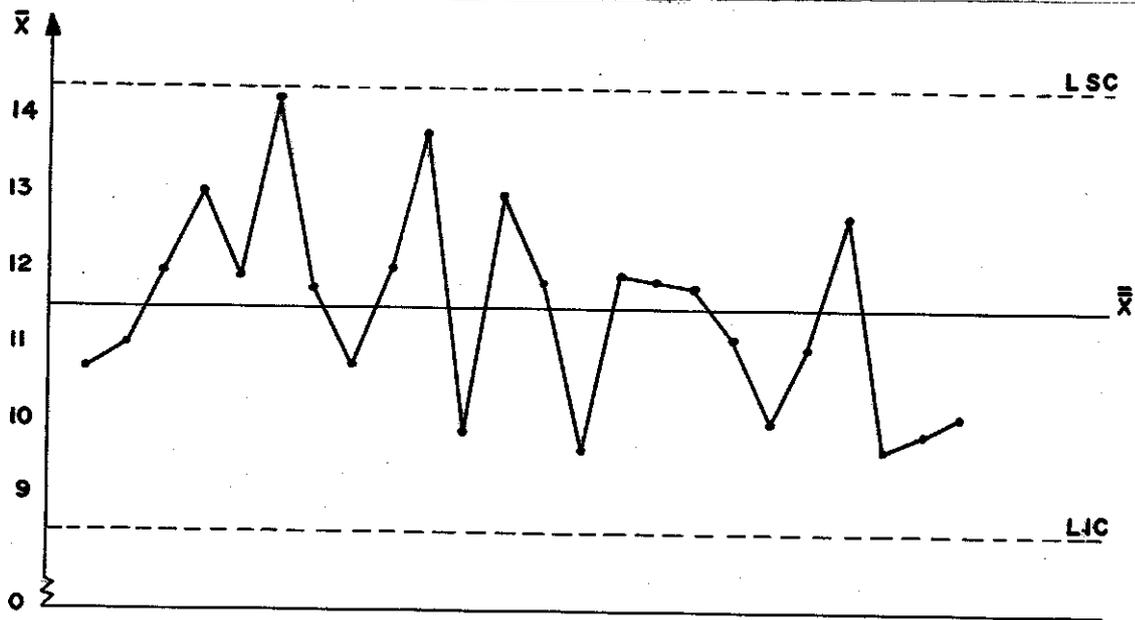


Figura 4.2. Gráfico  $\bar{X}$  para o Exemplo 4.1

Como deve ter ficado claro, na construção dos gráficos de controle por variáveis, o gráfico R é construído em primeiro lugar, uma vez que ele fornece a estimativa da variabilidade do processo, a qual é usada para a construção do gráfico  $\bar{X}$ . Evidentemente, esta estimativa só deve ser usada quando o processo estiver sob controle em relação à variabilidade. Na apresentação dos gráficos, eles devem ser representados numa mesma folha de papel, um debaixo do outro e com uma perfeita correspondência entre os valores observados para uma mesma amostra. Isto visa facilitar a análise dos valores observados num e noutro gráfico. Nas aplicações, o gráfico R é usualmente apresentado depois do gráfico  $\bar{X}$ .

Nas revisões dos gráficos  $\bar{X}$  e R, que devem ser efetuadas sempre que forem observados pontos fora dos limites de controle, deve-se ter sempre em mente que uma causa que justifique um ponto fora dos limites de controle provavelmente afetou todo o subgrupo, e portanto todos os elementos que compõem o subgrupo estão fora de

controle. Dessa forma, se um ponto no gráfico  $\bar{X}(R)$  resulta fora dos limites, e sendo identificada a causa que o justifique, este ponto deve ser eliminado para a revisão do gráfico. Porém, eliminar o ponto significa eliminar o subgrupo que o originou e portanto também o gráfico  $R(\bar{X})$  deve ser revisado, com a eliminação do ponto correspondente àquele subgrupo, mesmo que originariamente ele estivesse situado entre os limites de controle. Este procedimento só não é adotado em situações muito especiais, quando for muito claro que uma causa que provoca um ponto fora dos limites no gráfico  $\bar{X}$ , por exemplo, não afeta a variabilidade do processo. Numa situação como esta, o ponto correspondente no gráfico  $R$  não seria eliminado.

É recomendável, nas aplicações, suplementar os gráficos  $\bar{X}$  e  $R$  com um gráfico para valores da característica sendo controlada, registrando, para cada subgrupo, os valores observados da característica. Um tal gráfico pode ser muito útil na busca das causas identificáveis de variação na qualidade, uma vez que ele permite identificar os elementos amostrais responsáveis pela localização de um ponto fora dos limites de controle, quer no gráfico  $\bar{X}$ , quer no gráfico  $R$ . Além disso, num gráfico de valores da característica, é possível traçar os limites de especificação (o que não pode ser feito num gráfico  $\bar{X}$ , por ser um gráfico de médias), o que permite avaliar o desempenho do processo em relação às especificações.

#### 4.3. Curva Característica

Quando o processo produtivo está sob controle, resultando numa característica  $X$  normalmente distribuída, é possível obter a curva característica para o gráfico  $R$ , independente da média do processo, como segue.

Considere um gráfico  $R$  indicando um processo sob controle, com um desvio padrão estimado por  $\sigma_1' = \bar{R}/d_2$ . Se o desvio padrão passa de  $\sigma_1'$  para  $\sigma_2'$ , a curva característica fornecerá a probabilidade de não detectar esta alteração com base em uma amostra. Isto é, a cur

va fornecerá a probabilidade

$$P_{\sigma_2'} = P(LIC \leq R \leq LSC | \sigma_2') = P(LIC/\sigma_2' \leq R/\sigma_2' \leq LSC/\sigma_2'),$$

que poderia ser escrita

$$P_{\sigma_2'} = P(W \leq LSC/\sigma_2') - P(W \leq LIC/\sigma_2'), \quad (4.3.1.)$$

onde  $W$  denota a amplitude relativa definida na seção anterior e onde  $LSC$  e  $LIC$  são os limites superior e inferior de controle dados pelo gráfico  $R$ . Probabilidades do tipo  $P(W \leq \omega) = \alpha$  estão tabeladas, em função de  $n$ , para alguns valores de  $\alpha$ . Vide por exemplo a Tabela D1, em Duncan(1974, p.948). Duncan também fornece, na página 443, a Figura 21.6 que permite determinar a curva característica para o gráfico  $R$  em função de  $\lambda = \sigma_2'/\sigma_1'$ . Através daquela figura tem-se que se o desvio padrão de um processo duplicar, será de 60% a probabilidade de não detectar aquela alteração com uma única amostra, se o gráfico é estabelecido com base em amostras de tamanho 5.

Como ilustração, vamos determinar um ponto da curva característica do gráfico  $R$  estabelecido no Exemplo 4.1. Os limites de controle foram  $LFC=0$  e  $LSC=10,66$ , para amostras de tamanho 5. Uma vez que o processo está sob controle em relação à variabilidade, a estimativa do desvio padrão do processo é  $\sigma' = \bar{R}/d_2 = 5,04/2,326 = 2,167$ . Suponha que o desvio padrão se elevou para 2,76. A probabilidade de não detectar esta variação será

$P(W \leq 10,66/2,76) = P(W \leq 3,86) = 0,95$ , através da Tabela D1 acima referenciada.

Genericamente, a probabilidade de um ponto cair dentro dos limites de controle num gráfico  $\bar{X}$  dependerá da média  $\bar{X}'$  e do desvio padrão  $\sigma'$  do processo. Dessa forma, as probabilidades de não detectar mudanças na média do processo devem ser representadas por uma superfície e não por uma curva (característica). No caso particular no qual  $\sigma'$  se mantém constante, uma curva característica para o gráfico  $\bar{X}$  é facilmente obtida, como segue. Se a média passa de  $\bar{X}'$ , para  $\bar{X}''$  e  $\sigma'$  permanece constante, a probabilidade de não detectar a

mudança é simplesmente

$$P(\text{LIC} \leq \bar{X} \leq \text{LSC} | \bar{X}'') = \Phi(n^{1/2}(\text{LSC} - \bar{X}'')/\sigma') - \Phi(n^{1/2}(\text{LIC} - \bar{X}'')/\sigma'). \quad (4.3.2.)$$

#### 4.4. Gráficos para Amostras Grandes

Para subgrupos formados por amostras relativamente grandes ( $n > 10$ ), a amplitude  $R$  perde sua eficiência na estimativa do desvio padrão populacional  $\sigma'$ . Recomenda-se, nestes casos, estimar  $\sigma'$  através da média dos desvios padrão amostrais, em vez de fazê-lo através da amplitude média,  $\bar{R}$ .

Para uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , proveniente de uma distribuição normal de desvio padrão  $\sigma'$ , é sabido que

$$E(s) = c_4 \sigma' \text{ e } V(s) = (1 - c_4^2) \sigma'^2, \text{ onde } s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1) \text{ e onde } c_4 = (2/(n-1))^{1/2} \Gamma(n/2) / \Gamma(n-1/2).$$

Sendo disponíveis os desvios padrão  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , calculados para  $k$  subgrupos amostrais de tamanhos  $n$ , sabemos que  $\bar{s} = \sum s_i / k$  é uma estimativa não tendenciosa de  $E(s)$ . Portanto, uma estimativa para  $\sigma'$  e  $\hat{\sigma}' = \bar{s} / c_4$ , e uma estimativa não tendenciosa para  $\sigma'_s = \sigma' (1 - c_4^2)^{1/2}$  é dada por  $\hat{\sigma}'_s = (1 - c_4^2)^{1/2} \bar{s} / c_4$ . Um gráfico de controle para o desvio padrão, denominado *gráfico s*, pode ser então estabelecido, tendo linha central  $\bar{s}$  e limites de controle dados por

$$\bar{s} \pm 3(1 - c_4^2)^{1/2} \bar{s} / c_4 = (1 \pm 3(1 - c_4^2)^{1/2} / c_4) \bar{s}. \quad (4.4.1.)$$

É usual denotar-se  $1 - 3(1 - c_4^2)^{1/2} / c_4$  por  $B_3$  e  $1 + 3(1 - c_4^2)^{1/2} / c_4$  por  $B_4$ , e estas constantes estão registradas na Tabela III.

Se o gráfico  $s$  não apresentar evidências de descontrole do processo, a estimativa de  $\sigma'$  pode ser então usada para estabelecer os limites de controle para o gráfico  $\bar{X}$ . Usando a estimativa de  $\sigma'$  em (4.2.1.), os limites de controle para o gráfico  $\bar{X}$  serão dados

por

$$\bar{\bar{X}} \pm 3/(c_4 n^{1/2}) \bar{s} = \bar{\bar{X}} \pm A_3 \bar{s}, \quad (4.4.2.)$$

onde  $A_3 = 3/(c_4 n^{1/2})$  é uma constante também registrada na Tabela III.

#### 4.5. Capacitação do Processo

Após obter o processo sob controle em relação à média e à variabilidade, através dos gráficos  $\bar{X}$  e R, ou  $\bar{X}$  e s, é possível efetuar uma análise do processo para ver se ele atende às especificações e se não atende, estimar o percentual de defeituosos. Admitindo que a característica sob controle tenha distribuição normal, uma boa especificação deve ter o valor nominal coincidente com a linha central do gráfico  $\bar{X}$  e uma tolerância bilateral da forma  $\bar{X} \pm k\sigma_x$ . Para  $k=3$  a proporção de defeituosos do processo será 0,27%.

Para uma especificação genérica do tipo  $L < X < U$ , e sendo os gráficos estabelecidos a partir de um número razoavelmente grande de subgrupos, a média e o desvio padrão do processo são estimados através de  $\bar{\bar{X}}$  e  $\bar{R}/d_2$  ou  $\bar{s}/c_4$ , conforme a variabilidade seja controlada através do gráfico R ou do gráfico s. Sendo o processo normalmente distribuído, a proporção de itens defeituosos produzidos pelo mesmo é estimada por

$$p = P(X < L) + P(X > U) = \Phi((L - \hat{\bar{X}}')/\hat{\sigma}') + \Phi((\hat{\bar{X}}' - U)/\hat{\sigma}'). \quad (4.5.1.)$$

Para um dado valor de  $\sigma'$ , esta proporção será mínima, denotada por  $p_0$ , quando  $\bar{X}' = (U+L)/2$ , e quanto menor for a relação  $(U-L)/\sigma'$ , maior será o valor de  $p_0$ . Se  $(U-L)/\sigma' < 6$ , não será possível reduzir  $p_0$  a zero. Numa situação como esta, duas linhas de ação podem ser adotadas, com vistas a diminuir o valor de  $p_0$ : (a) tentar reduzir a variabilidade do processo ou (b) analisar as especificações para ver se elas não foram fixadas de uma forma demasiadamente rigorosa.

Se  $6 < (U-L)/\sigma' < 10$ , os gráficos de controle devem ser adotados e eventualmente o valor de  $p_0$  poderá ser reduzido a zero.

Para valores maiores de  $(U-L)/\sigma'$ , pode não haver muito sentido em estabelecer um gráfico  $\bar{X}$  usual. Se isto for feito, variações na média do processo que originam pontos fora dos limites de controle indicarão falta de controle do processo, com eventual suspensão do mesmo para a busca das causas identificáveis. Entretanto, devido à grande amplitude das especificações, comparada com a dispersão do processo, aquelas variações na média poderão não ser suficientes para produzir itens defeituosos, isto é, itens que não atendem às especificações. Portanto, a menos que as especificações sejam modificadas, parece ser mais natural admitir uma variação na média do processo num certo intervalo  $(A, B)$ , onde  $L < A < LIC$  e  $LSC < B < U$ , como ilustrado na Figura 4.3.

Distribuição de  $X$       Distribuição de  $\bar{X}$

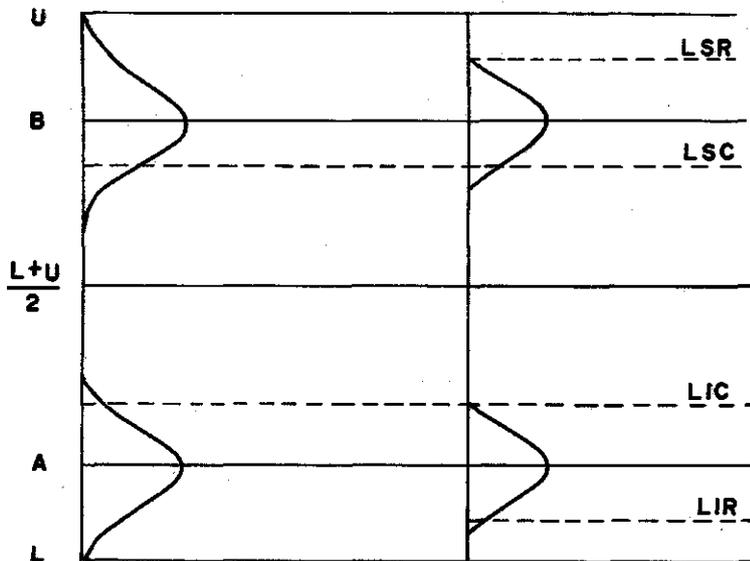


Figura 4.3 Limites de rejeição.

O problema que se coloca agora consiste na determinação dos novos limites de controle para  $\bar{X}$ , denominados *limites de controle modificados* ou *limites de rejeição* que apresentarão evidências amostrais que a média do processo está acima de B ou abaixo de A. Isto é possível se  $\sigma'$  é conhecido e constante e se a distribuição da característica X é normal.

A Figura 4.3 ilustra a determinação desses limites. Para tal, suponha que a média do processo esteja localizada na mais alta posição aceitável, isto é localizada em  $B=U-3\sigma'$ . Nesta condição, num gráfico  $\bar{X}$  com subgrupos amostrais de tamanho n, o limite superior de controle (modificado) ou limite superior de rejeição, denotado por LSR, será então dado por  $LSR=B+3\sigma'n^{-1/2} = U-(3-3n^{-1/2})\sigma'$ . Denotando  $3-3n^{-1/2}$  por V, tem-se então que

$$LSR=U-V\sigma'. \quad (4.5.2.)$$

Analogamente, obtém-se que o limite inferior de rejeição, denotado por LIR, é dado por

$$LIR=L+V\sigma'. \quad (4.5.3.)$$

Existem argumentos ponderáveis contra os limites modificados de controle. O principal é que este procedimento admite variações na média do processo, implicando em descontrole do processo, enquanto que o gráfico estabelecido com os limites usuais está fundamentado no controle do processo. Neste gráfico, um ponto situado entre os limites é uma evidência de que o processo está sob controle. No gráfico com limites modificados não se tem evidência de controle ou não do processo, através da observação de um ou mais pontos dentro ou fora dos limites. Note que é possível, inclusive, que a média do processo se situe acima de B (ou abaixo de A) sem que nenhuma ação seja tomada.

Outra objeção ao procedimento é que se ele depende fortemente da hipótese de normalidade da característica qualitativa, sen

do muito sensível a esta hipótese, visto que depende de probabilidades nas caudas da distribuição.

Talvez o argumento mais contundente contra os limites modificados, como estabelecidos, é o fato deles serem localizados *além* das posições limites para a média do processo.

Hill (1956) ponderou que os limites modificados devem ser estabelecidos de tal forma que se a média do processo atinge as posições A ou B na Figura 4.3, deveria haver uma probabilidade de apenas 5% de *não* ser tomada nenhuma ação. Isto significa colocar os limites modificados em posições internas a A e B distanciadas delas por  $1,645\sigma'n^{-1/2}$ . A amplitude desses limites modificados seria então  $(U-L)-2(3+1,645n^{-1/2})\sigma'$ . Se esses limites resultam ser internos aos limites usuais isto é, se sua amplitude é menor do que  $6\sigma'n^{-1/2}$ , os limites usuais devem ser adotados.

Portanto, a condição para a adoção dos limites usuais é que

$$(U-L)-2(3+1,645n^{-1/2})\sigma' < 6\sigma'n^{-1/2} \quad (4.5.4.)$$

ou seja, que

$$(U-L)/\sigma' < 6+9,29n^{-1/2}. \quad (4.5.5.)$$

## Exercícios

- 4.1 40 amostras de 5 caixas de determinado cereal foram pesadas, originando  $\Sigma \bar{X}_i = 1223,42g$  e  $\Sigma s_i = 4,11g$ . Determinar os limites de controle dos gráficos para controlar a média e a variabilidade do peso das caixas produzidas pelo processo. Que suposições de vem ser feitas para validar os resultados obtidos?
- 4.2 Para estabelecer os gráficos  $\bar{X}$  e R para controlar determinada característica qualitativa X, 20 subgrupos de tamanho 4 foram inspecionados obtendo-se  $\Sigma \bar{X}_i = 41,283$  e  $\Sigma R_i = 0,28$ .
- a) Determine os limites de controle para os gráficos.
- b) Suponha que X deva atender às especificações  $2,05 \pm 0,02$  e suponha que o processo está operando sob controle. Se X se gue uma distribuição normal, as especificações podem ser atendidas? Você pode sugerir algo para melhorar os resultados?
- c) Suponha o gráfico  $\bar{X}$  com os limites estabelecidos em (a) e suponha as hipóteses formuladas em (b). Se a média do processo passa para 2,06, qual a probabilidade que o gráfico acuse esta mudança na 1.<sup>a</sup> amostra tomada após a sua ocorrência. E na 1.<sup>a</sup> ou na 2.<sup>a</sup> amostra?
- 4.3 Os dados a seguir foram obtidos de 20 subgrupos de 5 itens produzidos por uma mesma máquina e um mesmo operador

Subgrupo	$\bar{X}$	R	Subgrupo	$\bar{X}$	R
1	177,6	23	11	179,8	9
2	176,6	8	12	176,4	8
3	178,4	22	13	178,4	7
4	176,6	12	14	178,2	4
5	177,0	7	15	180,6	6
6	179,4	8	16	179,6	6
7	178,6	15	17	177,8	10
8	179,6	6	18	178,4	9
9	178,8	7	19	181,6	7
10	178,2	12	20	177,6	10

- a) Estabelecer os gráficos  $\bar{X}$  e R.
  - b) O que você conclui em relação ao controle do processo?
  - c) Suponha que as especificações sejam  $171 \pm 11$  e que tem um item com valor inferior a 160 tenha um custo muito maior que um item com valor superior a 182. Por esta razão deseja-se reduzir a um mínimo a produção de itens com valores pequenos, sem aumentar muito a produção de itens com valores grandes. Se a média do processo pode ser facilmente alterada através de um ajuste na máquina, sem alterar a variabilidade, que ajuste você sugeriria e que limites de controle você recomendaria para o acompanhamento do processo?
4. Para 25 amostras de tamanho 6, tomadas de um processo produtivo sob controle obteve-se uma amplitude média igual a 0,04kg.
- a) Obter os limites de controle necessários para o acompanhamento do processo.
  - b) Se (apenas) a média do processo sofre um acréscimo de 0,01kg, qual a probabilidade de detectar esta mudança antes da 5.<sup>a</sup> amostra tomada após a alteração?

## 5. INSPEÇÃO DE QUALIDADE

### 5.1. Introdução

Como mencionado no Capítulo 1, a inspeção de qualidade constitui uma parte importante do Controle Estatístico de Qualidade. Neste e nos próximos Capítulos, os principais aspectos da inspeção de qualidade serão considerados.

Num processo produtivo, a inspeção de qualidade pode ser efetuada em diferentes estágios, tais como na recepção da matéria-prima, em diversos pontos do desenvolvimento do processo e na verificação do produto final. Embora possa ser viável, em muitas situações, inspecionar todo o material (inspeção completa), a inspeção é geralmente efetuada através de amostragem. Existem duas razões básicas para isto: em primeiro lugar, os custos de uma inspeção completa podem ser demasiadamente elevados; em segundo lugar, uma inspeção completa pode originar resultados ruins, especialmente quando o processo de inspeção é monótono e muitos itens têm que ser inspecionados. É evidente que no caso da inspeção ser destrutiva a efetuada por amostragem é a única possibilidade.

Os planos de inspeção por amostragem, desenvolvidos para efetuar a inspeção de qualidade, podem ser classificados, de acordo com as diferentes situações de inspeção, em:

(a) *Inspeção de lotes ou inspeção de produção contínua.* Na inspeção de lotes, os itens são naturalmente agrupados em lotes e qualquer decisão é tomada em relação ao lote e não em relação aos itens individualmente. Assim, uma caixa contendo 100 lâmpadas (o lote) pode ser aceita ou rejeitada em função dos resultados da inspeção de, por exemplo, 8 lâmpadas (a amostra) selecionadas da caixa. Na inspeção de produção contínua, o produto inspecionado não é naturalmente agrupado em lotes, sendo geralmente constituído por pequenos itens produzidos continuamente, como

lâminas de barbear, ou produto indivisível, como fio de nylon. Em muitas situações de produção contínua, os itens produzidos são agrupados em lotes para fins de inspeção apenas.

- (b) *Inspeção para aceitação ou inspeção retificadora.* Se as decisões em relação aos lotes de itens apresentados para inspeção são *aceitar* ou *rejeitar*, a inspeção é denominada inspeção para aceitação. Na inspeção retificadora, os lotes não aceitos pas sam por uma inspeção completa, com a substituição (ou retificação) dos itens defeituosos por itens bons. Note que na inspeção retificadora, a qualidade final de um lote aceito será, em geral, melhor que a qualidade do lote quando submetido à inspeção, enquanto que na inspeção para a aceitação, aquelas qualida des são rigorosamente iguais, uma vez que os lotes aceitos se rão aceitos com todos os itens defeituosos que porventura conti verem, inclusive aqueles encontrados na amostra.

Quanto ao número de amostras selecionadas por lote, os planos de inspeção para aceitação são classificados em:

- (a) *Planos de amostragem simples.* Quando uma única amostra é sele cionada por lote.
- (b) *Planos de amostragem dupla.* Quando até duas amostras podem ser selecionadas por lote. A segunda amostra é selecionada quando a primeira não fornecer informação suficiente para classificar o lote como aceitável ou não. Sendo a segunda amostra utiliza da, a decisão é tomada com base nas informações fornecidas pe las duas amostras.
- (c) *Planos de amostragem múltipla.* Quando mais de duas amostras (geralmente até sete) podem ser selecionadas para sentenciar um lote. Nestes planos, até o penúltimo estágio, existe a possibi lidade de não decidir, sendo portanto necessária uma amostra adicional. No último estágio uma decisão final é atingida.

(d) *Planos de amostragem seqüencial.* Neste tipo de plano, os itens de um lote são selecionados, um de cada vez, e após a inspeção de um item é tomada uma dentre as seguintes decisões: aceitar o lote, rejeitar o lote, ou selecionar um novo item. A principal característica deste tipo de plano é que o tamanho da amostra não é fixado previamente, sendo função dos resultados da inspeção. Devido a esta característica, os planos seqüenciais não são muitos utilizados na prática, embora eles sejam os planos que, em média, requerem o menor número de inspeções por lote.

Neste trabalho serão abordados alguns dos principais tipos de planos de inspeção para aceitação de lotes, tanto para a inspeção por atributos quanto para a inspeção por variáveis.

Deve ficar bem claro para o leitor que o objetivo principal dos planos de aceitação não é estimar a qualidade dos lotes inspecionados, mas sim fornecer uma regra para sentenciar aqueles lotes. Quando aplicado a uma série de lotes, um plano de aceitação indicará a aceitação de uns lotes e a rejeição de outros. Se todos os lotes forem rigorosamente da mesma qualidade, os lotes aceitos não serão melhores que os lotes rejeitados. Entretanto, se as qualidades dos lotes forem variáveis, um plano de aceitação tenderá a aceitar lotes bons mais freqüentemente que lotes ruins. Numa situação como esta, a inspeção por amostragem eleva a qualidade do produto aceito.

Indiretamente, a inspeção de qualidade pode elevar a qualidade da produção, através dos efeitos indiretos oriundos da rejeição de lotes. Naturalmente, um produtor que tenha seu produto constantemente rejeitado tomará providências no sentido de melhorar a produção, sob pena de perder o cliente.

## 5.2. Conceitos Básicos

Na análise de um plano de inspeção por amostragem, a

curva característica desempenha um papel preponderante. Dois tipos básicos de curva característica são considerados, a saber:

- (a) Curva do tipo A. Assim denominada quando a amostragem é efetuada em um lote isolado ou individual. A curva do tipo A fornece então a probabilidade de aceitar um lote em função da qualidade do lote.
- (b) Curva do tipo B. Quando a amostragem é efetuada no processo que produziu o lote. A curva característica do tipo B fornece a probabilidade de aceitar um lote em função da qualidade do processo. Em outras palavras, a curva característica do tipo B fornece a proporção de lotes que serão aceitos, em termos da qualidade do processo.

Na inspeção por atributos, estes tipos de curva característica resultam dos modelos probabilísticos apropriados para as suas determinações. Na amostragem de um lote, o modelo adequado é o modelo hipergeométrico, enquanto que na amostragem de um processo (que pode ser considerado um lote de tamanho infinito), o modelo adequado é o modelo binomial. Quando o lote é grande, comparativamente à amostra (pelo menos 10 vezes o tamanho da amostra), o modelo hipergeométrico pode ser aproximado pelo modelo binomial e portanto a curva do tipo A será aproximadamente igual à do tipo B.

Em geral, um plano de amostragem é estabelecido visando, na medida do possível, atender aos interesses do produtor e do consumidor, uma vez que esses interesses não são incompatíveis. Certamente nenhum produtor desejaria ter lotes bons rejeitados pelo consumidor e nenhum consumidor desejaria aceitar lotes ruins. Entretanto, a aceitação de lotes ruins, por parte do consumidor, também não é de interesse do produtor, visto que isto pode causar insatisfação no consumidor.

Em geral, associados aos interesses do produtor e do consumidor, são definidos os seguintes elementos num plano de inspeção

por amostragem;

- (a) *Nível de qualidade do produtor (NQP)*. É um nível de qualidade que deveria ser aceito na maioria das vezes.
- (b) *Risco do produtor (RP)*. É o risco de ser rejeitado um produto de qualidade igual ao NQP. Este risco é mais comumente denotado por  $\alpha$ .
- (c) *Nível de qualidade do consumidor (NQC)*. É um nível de qualidade que deveria ser rejeitado na maioria das vezes.
- (d) *Risco do consumidor (RC)*. É o risco de ser aceito um produto de qualidade igual ao NQC. Este risco é mais comumente denotado por  $\beta$ .

Os quatro elementos acima definidos especificam dois pontos da curva característica do plano, como ilustrado na Figura 5.1.

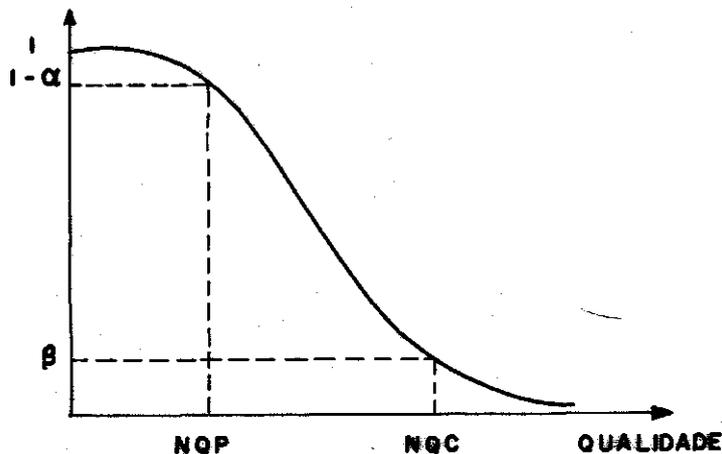


Figura 5.1 Curva Característica

Um critério bastante usado para a determinação de um plano de inspeção por amostragem consiste na fixação dos dois pontos acima mencionados. Os parâmetros que definem o plano são então de-

terminados de forma que a curva característica do plano passe por aqueles pontos. Nos capítulos posteriores teremos oportunidade de aplicar este critério.

A escolha dos níveis de qualidade, a partir dos quais um plano será obtido, deve sempre ser feita considerando a habilidade do produtor para atender àqueles níveis, às necessidades reais do consumidor e também às conseqüências econômicas em termos de tamanho da amostra. Portanto os níveis de qualidade devem ser determinados de forma que o plano de inspeção obtido seja um compromisso entre custo e eficiência, no interesse tanto do produtor quanto do consumidor. Parece então natural que a inspeção de qualidade não pode ser efetuada sem informações sobre controle de produção. Um gráfico de controle bem elaborado pode ser instrumento muito útil para a escolha dos níveis de qualidade para a determinação de um plano de inspeção por amostragem.

## 6. INSPEÇÃO POR ATRIBUTOS

Neste capítulo vamos considerar a inspeção para aceitação de lotes, onde os itens que os compõem são classificados como aceitáveis (ou perfeitos) ou não aceitáveis (ou defeituosos) e onde a fração defeituosa  $p$  é considerada como a característica de interesse.

### 6.1. Plano de Amostragem Simples

Num plano de amostragem simples, uma amostra de  $n$  itens é selecionada de um lote contendo  $N$  itens, e é verificado o número  $d$  de itens defeituosos contidos na amostra. Se  $d \leq c$ , onde  $c$  é um número denominado *número de aceitação*, o lote é aceito e se  $d > c$  o lote é rejeitado. Portanto, um plano de amostragem simples para atributos é caracterizado por um par  $(n, c)$  de parâmetros.

Antes de discutirmos a obtenção de um plano, vamos analisar alguns aspectos de interesse dos mesmos.

Para uma fração defeituosa  $p$ , a probabilidade de aceitar um lote será dada por

$$P_a = P(d \leq c) = \sum_{d=0}^c \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d} \quad (6.1.1.)$$

ou por

$$P_a = \sum_{d=0}^c \frac{\binom{Np}{d} \binom{N-Np}{n-d}}{\binom{N}{n}}, \quad NP \text{ inteiro}, \quad (6.1.2.)$$

respectivamente para curvas características do tipo B e do tipo A. Observa-se que apenas no caso da curva característica do tipo A (assim mesmo para  $n$  muito menor do que  $N$ ) o tamanho do lote exerce influência na probabilidade de aceitação. A Tabela 6.1 apresenta as probabilidades de aceitação calculadas usando a expressão em (6.1.2) para o plano definido por  $n=10$  e  $c=1$ , para diferentes tama

nhos (finitos) de lotes.

TABELA 6.1

Probabilidade de Aceitação (n=10, c=1)				
p	N=20	N=60	N=100	N=∞
0,05	1,000	0,931	0,923	0,914
0,10	0,763	0,741	0,738	0,736
0,15	0,500	0,533	0,538	0,544
0,20	0,291	0,354	0,363	0,376
0,25	0,152	0,219	0,229	0,244
0,30	0,070	0,126	0,136	0,149
0,35	0,029	0,067	0,075	0,086
0,40	0,010	0,033	0,039	0,046

Observa-se, da Tabela 6.1, que as probabilidades apresentam variações substanciais apenas para os casos em que  $n/N=1/2$  e  $n/N=1/6$ . Para  $n/N \leq 0,10$ , as probabilidades diferirão muito pouco para diferentes valores de N. Observa-se, também, que as probabilidades aproximadas calculadas pela binomial ( $N=\infty$ ) são bem próximas das probabilidades exatas, para  $n/N=0,10$ . Para valores menores dessa fração, as aproximações são melhores.

Os elementos que caracterizam um plano de amostragem, isto é, n e c, são os elementos preponderantes para a curva característica de um plano. Entretanto, planos que apresentam uma relação constante para  $c/n$  não são equivalentes, como ilustrado na Tabela 6.2 que apresenta as probabilidades de aceitação, calculadas pela distribuição binomial para diferentes planos apresentando  $c/n=0,1$ .

TABELA 6.2

Probabilidades de Aceitação pela Binomial,  $c/n=0,1$ 

p	n=10, c=1	n=20, c=2	n=40, c=4
0,05	0,914	0,925	0,952
0,10	0,736	0,677	0,629
0,15	0,544	0,405	0,263
0,20	0,376	0,206	0,076
0,25	0,244	0,091	0,016
0,30	0,149	0,035	0,003
0,35	0,086	0,012	-
0,040	0,046	0,004	-

Observa-se, da Tabela 6.2, que o plano ( $n=40, c=4$ ) apresenta, em relação aos demais planos, uma proteção muito maior contra a aceitação de lotes inferiores, bem como uma maior proteção contra a rejeição de lotes bons.

Uma prática inadequada em planos de inspeção por amostragem consiste em tomar a amostra como uma porcentagem do lote, geralmente 5, 10 ou 20%, associada com o número de aceitação  $c=0$ . Um plano com estas características beneficia grandemente lotes pequenos, em detrimento de lotes grandes. Para fins de ilustração, se  $p=4\%$ , as probabilidades de aceitação para planos com  $n=0,1N$  são 0,81, se  $N=50$ , 0,66 se  $N=100$ , 0,42 se  $N=200$  e apenas cerca de 2%, se  $N=1000$ . Estes resultados indicam que com planos assim definidos, lotes grandes têm menores chances de aceitação do que lotes pequenos. Um produtor, sabendo que o consumidor adota esta prática, aumentará as chances de que o seu produto seja aceito, simplesmente fornecendo-o em lotes pequenos.

#### 6.1.1. Determinação de um Plano

Um plano de amostragem simples para a fração defeituosa

pode ser facilmente determinado fixando-se dois pontos da curva característica, por exemplo os pontos  $(NQP, 1-\alpha)$  e  $(NQP, \beta)$ . Vamos de notar os pontos fixados por  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$ . Para uma curva característica do tipo B ou do tipo A e lote grande, os parâmetros  $n$  e  $c$  que definem o plano são obtidos como as soluções mais próximas das seguintes inequações:

$$\sum_{d=0}^c \binom{n}{d} p_1^d (1-p_1)^{n-d} \geq 1-\alpha \quad (6.1.3.)$$

$$\sum_{d=0}^c \binom{n}{d} p_2^d (1-p_2)^{n-d} \leq \beta$$

Dispendo-se de uma tabela extensa da função de distribuição da distribuição binomial é possível, por tentativa, determinar os inteiros  $n$  e  $c$  que satisfaçam às desigualdades em (6.1.3). O procedimento é descrito a seguir.

Para um dado valor de  $c$ , denotemos por  $n_s$  o maior valor de  $n$  tal que a primeira desigualdade é satisfeita para  $n \leq n_s$ . Analogamente, denotemos por  $n_i$  o menor valor de  $n$  tal que a segunda desigualdade é satisfeita para  $n \geq n_i$ . Se  $n_i \leq n_s$ , todo  $n$  tal que  $n_i \leq n \leq n_s$  será solução e o plano (com menor tamanho de amostra) é então definido por  $(n_i, c)$ . Se  $n_i > n_s$  não existe solução para aquele valor de  $c$ , e um novo valor deve ser tentado. Em geral inicia-se a busca com  $c=0$ , aumentando-se o valor até encontrar uma solução. Observa-se, consultando uma tabela da distribuição binomial, que aumentando  $c$ ,  $n_i$  e  $n_s$  aumentam, porém com  $n_s$  aumentando mais rapidamente que  $n_i$ . Isto implica que, se existe solução para um determinado valor de  $c$ , também existe solução para valores superiores a  $c$ , e se não existe solução para um dado valor de  $c$ , também não existe para valores menores do que  $c$ .

*Exemplo 6.1.* Seja determinar um plano de amostragem simples sendo fixados os pontos  $(0,05; 0,95)$  e  $(0,20; 0,10)$  da curva característica.

*Solução.* Fixemos  $c=0$ . Consultando uma tabela da distribuição binomial, a primeira desigualdade em (6.1.3) fornece  $n_s=1$  e a segunda fornece  $n_i=11$ . Como  $n_i > n_s$ , não existe solução para  $c=0$ . Como a diferença entre  $n_i$  e  $n_s$  é grande, tentemos  $c=2$ . Para  $c=2$  obtêm-se  $n_s=16$  e  $n_i=25$  e ainda não obtemos solução. Para  $c=3$  obtêm-se  $n_s=28$  e  $n_i=32$ . Finalmente, para  $c=4$  obtêm-se  $n_s=40$  e  $n_i=38$ . Portanto, o plano que tem curva característica passando pelos pontos fixados, e que apresenta o menor tamanho de amostra é definido por  $n=38$  e  $c=4$ .

Uma solução aproximada para a determinação de um plano de amostragem simples pode ser obtida substituindo as distribuições binomiais em (6.1.3) pelas correspondentes distribuições de Poisson. Aquelas desigualdades são então escritas como segue:

$$\sum_{d=0}^c e^{-np_1} (np_1)^d / d! \geq 1 - \alpha \quad (6.1.4.)$$

$$\sum_{d=0}^c e^{-np_2} (np_2)^d / d! \leq \beta.$$

Usando a igualdade  $\sum_{d=0}^c e^{-m} m^d / d! = P(X > 2m)$ , onde  $X$  é uma variável aleatória qui-quadrado com  $f=2c+2$  graus de liberdade, as desigualdades em (6.1.4) são equivalentes a

$$\begin{aligned} P(X > 2np_1) &\geq 1 - \alpha \\ P(X > 2np_2) &\leq \beta. \end{aligned} \quad (6.1.5.)$$

Se denotamos por  $X_{\alpha, f}$  o número tal que  $P(X < X_{\alpha, f}) = \alpha$ , estas desigualdades ficam

$$\begin{aligned} 2np_1 &\leq X_{1-\alpha, f} \\ 2np_2 &\geq X_{1-\beta, f} \end{aligned} \quad (6.1.6.)$$

das quais se conclui que

$$X_{1-\beta, f} / (2p_2) \leq n \leq X_{\alpha, f} / (2p_1). \quad (6.1.7.)$$

Consultando uma tabela da distribuição qui-quadrado podemos determinar, por tentativa, o menor valor de  $c$  para o qual a desigualdade (6.1.7) possa ser atendida. Então, o plano procurado, que apresenta o menor tamanho de amostra, será dado por aquele valor de  $c$  e por  $n$  igual ao menor inteiro maior ou igual a  $X_{1-\beta, f} / (2p_2)$ . Este valor de  $n$  dá prioridade ao atendimento do risco  $\beta$  do consumidor, em detrimento do risco do produtor. Se for desejado dar prioridade ao risco do produtor, o valor de  $n$  deve ser tomado como o maior inteiro menor ou igual a  $X_{\alpha, f} / (2p_1)$ .

Para fins de ilustração, consideremos novamente o Exemplo 6.1, no qual foram fixados os pontos (0,05; 0,95) e (0,20; 0,10). A Tabela 6.3 apresenta os valores necessários para a determinação do plano.

TABELA 6.3

Valores para a Obtenção de um Plano para Exemplo 6.1

$c$	$X_{1-\beta, f}$	$X_{\alpha, f}$	$X_{1-\beta} / (2p_2)$	$X_{\alpha} / (2p_1)$
0	4,61	0,103	11,53	1,03
1	7,78	0,711	19,45	7,11
3	13,36	2,73	33,40	27,30
4	15,99	3,94	39,98	39,40
5	18,55	5,23	46,38	52,30

Verifica-se da Tabela 6.3, que o menor valor de  $c$  para o qual a desigualdade em (6.1.7) é satisfeita é  $c=5$ , para o qual o menor valor de  $n$  é 47. Isto é, o plano seria definido por  $(n=47, c=5)$ . Um plano que daria prioridade ao risco  $\alpha$  do produtor seria definido por  $(n=52, c=5)$ .

Observa-se, ainda da Tabela 6.3, que  $c=4$  praticamente satisfaz a desigualdade em (6.1.7). Portanto, uma solução bastante boa seria dada por  $(n=40, c=4)$ .

Tabelas especiais foram construídas para a obtenção simples de um plano satisfazendo às desigualdades em (6.1.6). Para valores de  $n$  e  $c$  que satisfaçam aquelas desigualdades, porém vistas como igualdades, tem-se que  $R = X_{1-\beta, f} / X_{\alpha, f} = p_2 / p_1$ . Para fixados valores de  $\alpha$  e  $\beta$  pode-se calcular, para  $c=0, 1, 2, \dots$ , os valores de  $X_{1-\beta, f} / X_{\alpha, f}$ . O valor de  $c$  para o qual este quociente coincidir com  $p_2 / p_1$  definirá o número de aceitação do plano. Para este valor de  $c$ , o tamanho da amostra será então dado por  $n = X_{\alpha, f} / (2p_1)$ , se prioridade for dada ao risco do produtor, ou por  $n = X_{1-\beta, f} / (2p_2)$ , se prioridade for dada ao risco do consumidor.

A Tabela IV no apêndice, reproduzida de Cameron (1974), fornece, para as diversas combinações de  $\alpha=0,05$  e  $\alpha=0,01$ , com  $\beta=0,05$ ,  $\beta=0,10$ , e em função de  $c$ , valores de  $R$  (lá denotados por  $p_2/p_1$ ) e de  $np_1$ . Para a obtenção de um plano usando aquela tabela procura-se, para os valores  $\alpha$  e  $\beta$  fixados, o valor de  $R$  mais próximo de  $p_2/p_1$ . Na linha que contém o valor de  $R$  lê-se o valor de  $c$  e de  $np_1$ , o qual fornece o valor de  $n$ . Note que o plano assim obtido dá prioridade ao risco do produtor, o que é um procedimento conservativo, uma vez que origina o maior valor de  $n$ .

Vamos retornar à ilustração anterior, porém usando a Tabela IV. Da coluna para  $\alpha=0,05$  e  $\beta=0,10$  obtemos  $R=p_2/p_1=4,057$  como o valor mais próximo do valor desejado. Para este valor de  $R$  tem-se que  $c=4$  e  $np_1=1,97$ . Como  $p_1=0,05$ , tem-se que  $n=40$ . O plano aproximado é então definido por  $n=40$  e  $c=4$ , como havíamos obtido.

Geralmente ocorre que a razão desejada  $R$  encontra-se entre dois valores tabelados. Isto significa que não existe um plano que satisfaça exatamente os valores  $\alpha$  e  $\beta$  fixados. Uma decisão deve ser então tomada entre adotar um plano mais severo (correspondendo ao menor dentre os dois valores de  $c$ ) ou um plano menos severo.

Sendo escolhido o valor de  $c$ , o valor de  $n$  é determinado através do valor  $np_1$  correspondente, e o valor de  $\beta$  deve ser então calculado através da distribuição de Poisson, isto é, avaliando o 19 membro da 2.<sup>a</sup> desigualdade em (6.1.4).

Para a inspeção de lotes pequenos, o plano é obtido através de equações correspondentes àquelas em (6.1.3), porém escritas em termos da distribuição hipergeométrica, como em (6.1.2). Dispondo-se de uma Tabela daquela distribuição, uma solução exata pode ser obtida procedendo-se como no caso da distribuição binomial. Soluções aproximadas podem ser obtidas aproximando-se a distribuição da hipergeométrica calculada em  $c$ , isto é,

a soma  $\sum_{d=0}^c \frac{\binom{M}{d} \binom{N-M}{n-d}}{\binom{N}{n}}$ , pode ser aproximada por:

$$a) \quad \sum_{d=0}^c \binom{n}{d} \left(\frac{M}{N}\right)^d \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-d}, \text{ se } n/N \leq 0,1 \text{ } M > n \text{ e } N > 50.$$

$$b) \quad \sum_{d=0}^c \binom{M}{d} \left(\frac{n}{N}\right)^d \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{M-d}, \text{ se } M/N \leq 0,1 \text{ } M < n \text{ e } N > 50.$$

Encerramos esta seção com três comentários. O primeiro se refere aos pontos  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$  que devem ser fixados para a determinação do plano pelos procedimentos expostos. A escolha da aqueles pontos não é, em geral, simples e uma determinada escolha pode originar um plano com um tamanho de amostra demasiadamente grande. Se isto ocorre numa situação prática, uma nova escolha deve ser feita até que se chegue a um valor aceitável para  $n$ . Por outro lado, uma vez obtido o plano, sua curva característica deve ser determinada a fim de avaliar as probabilidades de aceitar produtos ruins e de rejeitar produtos bons. Estas probabilidades podem ser reduzidas, porém às custas de aumentar o tamanho da amostra, o que implica em aumentar os custos da amostragem. Portanto, na determinação prática de um plano de inspeção por amostragem, tem-se que procurar um ponto de equilíbrio entre os custos da amostragem e os custos de

decisões erradas.

O segundo comentário é na realidade uma crítica ao procedimento para a determinação de um plano com base na fixação de dois pontos da curva característica. Como vimos, a menos que os lotes sejam muito pequenos, os planos são independentes dos tamanhos dos lotes. Como consequência, as probabilidades de decisões erradas não diminuem com o aumento dos tamanhos dos lotes, o que deveria ocorrer uma vez que os custos de decisões erradas aumentam.

Finalmente, convém registrar que a determinação de um plano de inspeção por amostragem com curva característica passando pelos pontos  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$  é inteiramente equivalente ao estabelecimento de um teste estatístico para as hipóteses  $H_0: p=p_1$  e  $H_1: p_2 > p_1$ , com potência  $\alpha$  quando  $p=p_1$  e  $1-\beta$  quando  $p=p_2$ .

## 6.2 Plano de Amostragem Dupla

Como foi comentado na seção anterior, a inspeção por amostragem simples pode, em algumas situações, requerer um tamanho de amostras demasiadamente grande. Não sendo desejável redefinir os pontos fixados para a determinação do plano, uma possibilidade para reduzir o esforço de inspeção por lote consiste na consideração de plano por amostragem dupla, múltipla ou seqüencial. Nestes planos, o número médio de itens inspecionados por lote é, em geral, menor do que o tamanho da amostra do plano equivalente de amostragem simples, onde com planos equivalentes estamos nos referindo a planos que apresentam curvas características aproximadamente iguais.

Num plano de amostragem dupla (para atributos), uma amostra aleatória de tamanho  $n_1$  é selecionada do lote, sendo verificado o número  $d_1$  de itens defeituosos. Se  $d_1 \leq c_1$  o lote é aceito se  $d_1 > c_2$ , onde  $c_2 > c_1$ , o lote é rejeitado, e se  $c_1 < d_1 \leq c_2$  uma nova amostra aleatória de tamanho  $n_2$  é selecionada, sendo verificado o núme-

ro  $d_2$  de itens defeituosos. O lote é então aceito se  $d \leq c_2$ , onde  $d = d_1 + d_2$ , e é rejeitado no caso contrário.

Assim definido, um plano de amostragem dupla é caracterizado pelos parâmetros  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $c_1$  e  $c_2$ . Para facilitar a obtenção do plano e também para torná-lo operacionalmente mais simples, é comum tomar  $n_2$  como um múltiplo de  $n_1$ , em geral  $n_2 = n_1$  ou  $n_2 = 2n_1$ .

Na aplicação de um plano de amostragem dupla, uma maior redução do número de itens inspecionados por lote pode ser obtida *truncando* a segunda amostra, isto é, interrompendo a inspeção da segunda amostra tão logo seja  $d > c_2$ . A primeira amostra não é, em geral, truncada para que se possa dispor de uma estimativa da qualidade do material submetido à inspeção.

Uma vez que através de um plano de amostragem dupla um lote pode ser aceito ou rejeitado, no primeiro estágio, isto é, com base na primeira amostra, ou no segundo estágio, isto é, com base nas amostras combinadas, a obtenção da curva característica é um tanto mais complicada do que no caso de planos de amostragem simples. A probabilidade de aceitar um lote pode ser escrita:

$$P_a = P(A_1) + P(A_2) \quad (6.2.1.)$$

onde  $P(A_i)$ ,  $i=1,2$ , denota a probabilidade de aceitar no estágio  $i$ . De acordo com a caracterização e operação de um plano, tem-se que

$$P(A_1) = P(d_1 \leq c_1 | n_1) \quad (6.2.2.)$$

$$P(A_2) = \sum_{k=c_1+1}^{c_2} P(d_1 = k | n_1) P(d_2 \leq c_2 - k | n_2). \quad (6.2.3.)$$

As probabilidades que aparecem nas expressões acima serão calculadas através do modelo binomial (ou, aproximadamente, pelo modelo de Poisson) para curva característica do tipo B, ou do tipo A porém para lotes grandes, ou pelo modelo hipergeométrico (ou, aproximada-

mente, pelo modelo binomial) para curva característica do tipo A.

Calculando-se  $P_a$  para diversos valores da fração defeituosa  $p$ , e representando-se os pontos  $(p, P_a)$  num gráfico, obtém-se a curva característica do plano.

Associada a um plano de amostragem dupla, tem também interesse a probabilidade de rejeitar um lote no primeiro estágio. Denotando esta probabilidade por  $P(R_1)$ , tem-se que

$$P(R_1) = P(d_1 > c_2 | n_1). \quad (6.2.4.)$$

Então, a probabilidade  $P_1$  de sentenciar um lote no primeiro estágio é dada por

$$P_1 = P(A_1) + P(R_1). \quad (6.2.5.)$$

Como deve ter ficado claro na descrição de um plano de amostragem dupla, o número de peças inspecionadas por lote será  $n_1$ , se uma decisão for tomada no primeiro estágio, ou será  $n_1 + n_2$ , no caso contrário e sem truncamento da segunda amostra. Portanto, o número médio de peças inspecionadas por lote, denotado por ASN, é dado por

$$ASN = n_1 P_1 + (n_1 + n_2) (1 - P_1) = n_1 + n_2 (1 - P_1). \quad (6.2.6.)$$

É claro que ASN dependerá da fração defeituosa  $p$ . Um gráfico representando os valores de ASN como função de  $p$  definirá a curva ASN.

A Figura 6.1 ilustra as formas gerais das curvas ASN, para um plano de amostragem dupla e para o plano equivalente de amostragem simples. Observa-se que enquanto o valor ASN para o plano de amostragem simples é constante ( $ASN = n$ ), aquele valor pode ser substancialmente menor para o plano de amostragem dupla, especialmente para níveis muito bons ou muito ruins de qualidade. Para níveis intermediários de qualidade, e adoção de um plano de amostragem du

pla pode ser anti-econômica.

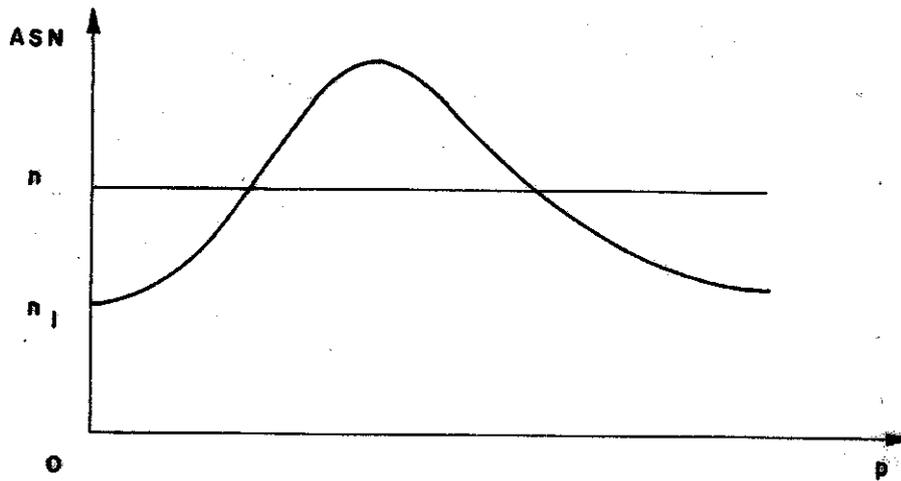


Figura 6.1 Curvas ASN para planos simples e duplo

É claro que uma maior redução do número de itens inspecionados por lote pode ser obtida com o truncamento da segunda amostra. Para esta situação, a curva ASN não será aqui apresentada e pode ser vista em Burr (1957).

#### 6.2.1 Determinação de um Plano

Como foi visto no caso da amostragem simples, vamos apresentar uma forma para a obtenção de um plano de amostragem dupla que tenha curva característica passando pelos pontos  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$ . Uma vez que a fixação de dois pontos da curva característica não é suficiente para a determinação de um plano, que depende de quatro parâmetros, é usual impor também a condição  $n_2 = kn_1$ , para  $k$  fixado.

A obtenção exata do plano, trabalhando com os modelos binomial ou hipergeométrico é bastante complicada. Para curva característica do tipo B ou do tipo A, porém para lotes grandes, e para fração defeituosa  $p$  suficientemente pequena, a distribuição binomial pode ser aproximada pela distribuição de Poisson. Sendo  $n_2 = kn_1$ ,

para valores fixados de  $c_1$  e  $c_2$ , a probabilidade de aceitar um lote será função apenas do produto  $n_1 p$  (parâmetro da Poisson). Este fato é a base para a construção de tabelas semelhantes à Tabela 6.3 para a obtenção de planos de amostragem dupla, com base em  $R=p_2/p_1$ . Tabelas para  $\alpha=0,05$  e  $\beta=0,10$ , para  $n_2=2n_1$  e também para  $n_2=n_1$ , podem ser vistas em Duncan (1974, p. 188 e 189). Aquelas tabelas também fornecem elementos para a determinação do valor ASN calculado para  $p=p_{0,95}$ .

*Exemplo 6.2* Vamos obter um plano de amostragem dupla, a ser aplicado na inspeção de lotes grandes, e tal que tenha curva característica passando pelos pontos (0,05; 0,95) e (0,20; 0,10).  
*Solução.* Temos  $R=p_2/p_1=4$ . Se fixamos  $n_2=2n_1$ , da Tabela 8.2 do Duncan obtemos que para  $R=4,19$  (valor mais próximo), o plano deve ter  $c_1=1$  e  $c_2=5$ . A Tabela também fornece  $n_1 p_1=0,96$ ,  $n_1 p_2=4,02$  e  $ASN/n_1=1,498$  para  $p=p_{0,95}$ . Se procurarmos atender o risco do produtor devemos tomar  $n_1=0,96/0,05=19$  e portanto  $n_2=38$ . O valor da curva ASN para  $p=p_{0,95}$  será  $ASN=19(1,498)=28,5$ . Vimos, na solução aproximada do Exemplo 6.1, que o plano de amostragem simples com curva característica passando pelos mesmos pontos fixados é dado por  $n=40$  e  $c=4$ . Observa-se então que o plano equivalente de amostragem dupla, por exemplo o plano definido por  $n_1=19$ ,  $n_2=38$ ,  $c_1=1$  e  $c_2=5$ , pode propiciar, em média, uma redução de mais de 28,7% no número de itens inspecionados por lote, se a fração defeituosa do produto é no máximo igual a 0,05.

### 6.3. Plano de Amostragem Múltipla

Um plano de amostragem múltipla é uma extensão natural dos planos de amostragem dupla, sendo constituído, em geral, de sete estágios. Para facilitar a operação dos planos, os tamanhos das amostras são iguais para todos os estágios. Em geral, para estágio  $i$  são definidos o número de aceitação  $c_i$  e o número de rejeição  $r_i$ , onde  $c_i \leq r_i$ . Denotando por  $d_i$  o número de itens defeituosos encontrados no estágio  $i$  e por  $D$  o número total de itens defeituosos em

contrados até o estágio  $k$ , isto é  $D = \sum_{i=1}^k d_i$ , as seguintes decisões são tomadas no estágio  $k$ :

Aceitar o lote se  $D \leq c_k$ , rejeitar o lote se  $D \geq r_k$ , tomar uma nova amostra se  $c_k < D < r_k$ .

Nos planos de amostragem múltipla, no último estágio tem-se que  $r_i = c_i + 1$ , para garantir que uma decisão seja tomada *no máximo* no último estágio. Alguns planos não apresentam número de aceitação para os primeiros estágios. Isto significa que nenhum lote pode ser *aceito* naqueles estágios.

Um plano de amostragem múltipla pode ser, por exemplo, de finida como segue:

Estágio (i)	1	2	3	4	5	6	7
$n_i$	15	15	15	15	15	15	15
$c_i$	*	0	1	2	4	4	5
$r_i$	2	3	4	5	6	6	6

Segundo este plano, nenhum lote poderá ser aceito no primeiro estágio, podendo ser rejeitado se forem observados 2 ou mais itens defeituosos na amostra de tamanho 15. Um lote poderá ser aceito no segundo estágio (após inspecionar 30 itens) se  $D = d_1 + d_2 = 0$ , e será rejeitado se  $D \geq 3$ . Se  $0 < D < 3$ , nenhuma decisão pode ser tomada e uma nova amostra deve ser selecionada.

A obtenção da curva característica de um plano de amostragem múltipla é um procedimento bastante trabalhoso, uma vez que, em geral, um lote pode ser aceito em qualquer estágio. A probabilidade de aceitar um lote no estágio  $k$  será dada pela soma das probabilidades de não decidir em nenhum dos estágios anteriores e aceitar no estágio  $k$ . Duncan (1974) sugere uma disposição tabular para facilitar o cálculo das probabilidades de aceitação. Uma vez calculadas as probabilidades  $P_i (i=1, 2, \dots, 7)$  de decidir no estágio  $i$ , o número

médio de itens inspecionados por lote será:

$$ASN = n_1 P_1 + (n_1 + n_2) P_2 + \dots + (n_1 + n_2 + \dots + n_7) P_7 \quad (6.3.1.)$$

Sendo fixados os pontos  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$  da curva característica do tipo B, ou do tipo A para lotes grandes, um plano de amostragem múltipla pode ser obtido através de tabelas especialmente construídas em termos de  $R = p_2/p_1$ , como foi feito para os planos de amostragem dupla. Para o caso particular no qual  $\alpha = 0,05$  e  $\beta = 0,10$ , a Tabela 9.1 que aparece em Duncan (1974) pode ser usada.

Como ilustração, vamos obter um plano de amostragem múltipla fixando, como no Exemplo 6.2, os pontos  $(0,05; 0,95)$  e  $(0,20; 0,10)$  da curva característica. A Tabela 9.1 fornece, para  $R = 4,02$ , os seguintes números de aceitação e de rejeição:

$c_i$	*	1	2	3	4	6	7
$r_i$	3	4	5	6	6	8	8

A Tabela também fornece  $n_i p_1 = 0,47$ ,  $n_i p_2 = 1,89$  e  $ASN/n_i = 2,38$ , para  $p = p_1$ . O tamanho da amostra para cada estágio será então  $n_i = 0,47/p_1 \approx 10$  e o valor ASN, para  $p = p_1$ , será  $ASN(p_1) = 23,8$ . Note que no Exemplo 6.2, o plano duplo equivalente, obtido atendendo o risco do produtor, originou  $ASN(p_1) = 28,5$ . Portanto, cerca de 20% de economia de inspeção em relação ao plano duplo pode ser obtida com o plano de amostragem múltipla.

Para obtenção de planos equivalentes simples, duplos e múltiplos; em função de  $R = p_2/p_1$ , o leitor pode também consultar as tabelas de Schilling e Johnson (1980).

#### 6.4. Plano de Amostragem Sequencial

Vimos que os planos de amostragem dupla e múltipla podem originar, em relação aos planos simples, uma redução no número de

itens inspecionados por lote. Uma redução mais substancial pode ser obtida com os planos de amostragem seqüencial. Nestes planos, os itens a serem inspecionados são selecionados individualmente, e o número de itens a inspecionar é determinado pelos resultados amostrais, não sendo, portanto, determinado *a priori*. Inspecionado um item, as seguintes decisões podem ser tomadas: aceitar o lote, rejeitar o lote, ou selecionar novo item.

O plano seqüencial mais difundido foi o desenvolvido por Abraham Wald, durante a 2.<sup>a</sup> Guerra Mundial. Neste tipo de plano, determina-se as fronteiras das regiões de decisão em função dos pontos  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$  da curva característica. Para a determinação daquelas fronteiras, Wald trabalhou com a *razão de probabilidade seqüencial* (SPR), definida por:

$$\text{SPR} = \frac{\text{probabilidade do resultado acumulado dado que } p=p_2}{\text{probabilidade do resultado acumulado dado que } p=p_1},$$

e converteu aquelas fronteiras em termos de fronteiras para o número acumulado de defeitos,  $D_n$ , após a inspeção de  $n$  itens.

Um plano seqüencial é caracterizado pelos parâmetros  $h_A$ ,  $h_R$  e  $s$ , que definem as seguintes fronteiras para as regiões de decisão:

$$\begin{aligned} A_n &= h_A + s_n && \text{(fronteira para aceitação)} \\ R_n &= h_R + sn && \text{(fronteira para rejeição)}. \end{aligned} \quad (6.4.1.)$$

para a definição dos parâmetros, definamos:

$$U = \ln\{(1-\alpha)/\beta\}, \quad V = \ln\{(1-\beta)/\alpha\}, \quad X = \ln(p_2/p_1) \quad \text{e} \quad Y = \ln\{(1-p_1)/(1-p_2)\}.$$

Então os parâmetros do plano são dados por (Wald, 1947):

$$h_A = U/(X+Y), \quad h_R = V/(X+Y) \quad \text{e} \quad s = Y/(X+Y). \quad (6.4.2.)$$

Se, após inspecionados  $n$  itens, for  $D_n < A_n$  o lote é acei-

to, se for  $D_n > R_n$  o lote é rejeitado e em caso contrário um novo item é selecionado.

O procedimento seqüencial pode ser operado graficamente, representando-se o número acumulado de defeitos  $D_n$  contra  $n$ . As equações em (6.4.1) representam duas retas paralelas que definem as regiões de decisão, e aquelas retas podem ser traçadas no gráfico, como na Figura 6.2 que ilustra o desenvolvimento de um plano, terminando com a rejeição do lote na inspeção do 37º item.

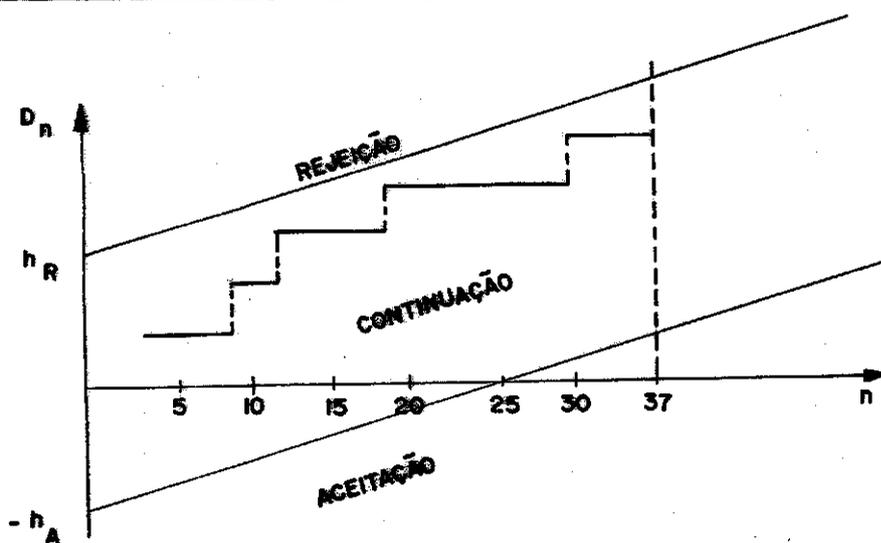


Figura 6.2 Procedimento gráfico para inspeção seqüencial

Note que, como o coeficiente linear da reta de aceitação é negativo, um plano seqüencial exige um número mínimo de inspeções prévias à aceitação do lote. Este número é dado por  $A_n > 0$ , que implica em  $n > h_A/s$ . Da mesma forma, porém menos restritamente, o menor valor de  $n$  que permite rejeição de um lote é dado por  $n > h_R/(1-s)$ .

Uma outra forma para a operação de um plano seqüencial consiste na construção de uma tabela contendo, para cada valor de  $n$ , os valores  $A_n$  e  $R_n$  aproximados para os inteiros mais próximos,  $A_n$

sendo aproximado para valores inferiores e  $R_n$  para valores superiores.

A Tabela 6.4 ilustra o procedimento tabular para um plano definido por  $h_A=1,994$ ,  $h_R=2,560$ ,  $s=0,088$  e registra os valores hipotéticos para o número  $d$  de defeituosos observados. Aqueles valores foram utilizados no procedimento gráfico ilustrado na Figura 6.2.

TABELA 6.4

## Desenvolvimento Tabular de um Plano Seqüencial

$n$	$A_n$	$d$	$D_n$	$R_n$
1	*	0	0	**
2	*	0	0	**
3	*	1	1	3
4	*	0	1	3
5	*	0	1	3
6	*	0	1	4
7	*	0	1	4
8	*	1	2	4
⋮				
11	*	1	3	4
⋮				
17	*	0	3	5
18	*	1	4	5
⋮				
22	*	0	4	5
23	0	0	4	5
⋮				
28	0	0	4	6
29	0	1	5	6
⋮				
34	1	0	5	6
⋮				
36	1	0	5	6
37	1	1	6	6

\* Aceitação impossível

\*\* Rejeição impossível

6.4.1 Curva Característica e Curva ASN

Uma vez obtidos os parâmetros que caracterizam um plano seqüencial, sua curva característica pode ser traçada a partir dos seguintes pontos, facilmente determinados:

$$\begin{array}{cccccc}
 p & 0 & p_1 & s & p_2 & 1 \\
 P_a & 1 & 1-\alpha & h_R/(h_A+h_R) & \beta & 0
 \end{array}
 \tag{6.4.3.}$$

Outros pontos da curva característica podem ser obtidos através da fórmula (8.5) de Duncan (1974, p.194).

A curva ASN para um plano seqüencial também pode ser obtida em função dos parâmetros que o caracterizam. Os seguintes resultados são obtidos:

$$\begin{array}{ll}
 p & \text{ASN} \\
 0 & h_A/s \\
 p_1 & \frac{(1-\alpha)h_A - \alpha h_R}{s - p_1} \\
 s & \frac{h_A h_R}{s(1-s)} \\
 p_2 & \frac{(1-\beta)h_R - \beta h_A}{p_2 - s} \\
 1 & h_R/(1-s)
 \end{array}
 \tag{6.4.4.}$$

Para a determinação de outros pontos da curva ASN, a fórmula (8.7) de Duncan (1974, p. 194) deve ser usada.

*Exemplo 6.3.* Seja a obtenção de um plano de amostragem seqüencial a ser aplicado a grandes lotes, sendo fixados os pontos  $(0,05; 0,95)$  e  $(0,20; 0,10)$  da curva característica.

*Solução.* Determinemos inicialmente os constantes  $U$ ,  $V$ ,  $X$  e  $Y$ . Temos que

$$U = \ln(0,95/0,10) = 2,251, \quad V = \ln(0,90/0,05) = 2,890,$$

$$X = \ln(0,20/0,05) = 1,386 \quad \text{e} \quad Y = \ln(0,95/0,80) = 0,172.$$

Os parâmetros que caracterizam o plano, definidos pelas equações (6.4.2), são então

$$h_A = 1,445, \quad h_R = 1,855 \quad \text{e} \quad s = 0,110.$$

Portanto, sendo inspecionados  $n$  itens do lote, ele será aceito se

$$D_n \leq -1,445 + 0,11n$$

e será rejeitado se

$$D_n \geq 1,885 + 0,11n,$$

onde  $D_n$  representa o número acumulado de defeitos. Para  $p=p_1$ , o valor de ASN, dado pela (6.4.4) será igual a 21,33.

É interessante comparar o valor ASN obtido no Exemplo 6.3 com os correspondentes valores obtidos nos exemplos anteriores. Aqueles valores, para os planos simples, duplo e múltiplo foram 38, 28,5 e 23,8, respectivamente. O plano seqüencial foi então o que originou o menor valor para  $ASN(p_1)$ . Wald provou que o plano seqüencial, dentre os planos equivalentes por atributos, é o que apresenta os menores valores de ASN tanto para  $p=p_1$  quanto para  $p=p_2$ . Para  $p_1 < p < p_2$ , os valores ASN do plano seqüencial são geralmente menores do que os valores dos planos equivalentes, porém podem ser maiores.

Como foi mencionado no capítulo anterior, a maior desvantagem prática do plano seqüencial é que não é possível determinar a priori o número máximo de itens a inspecionar por lote. Este detalhe, que pode desagradar a alguns produtores, aliado ao fato de que a administração de um plano seqüencial é mais complicada do que a dos demais planos (especialmente simples e duplos) faz com que os planos seqüenciais não sejam muito utilizados. A menos que as inspeções sejam muito onerosas, um plano de amostragem dupla (com truncamento da segunda amostra) é, em geral, mais econômico do que o plano seqüencial equivalente.

Como foi ilustrado no Exemplo 6.3, a obtenção de um plano seqüencial é muito simples, especialmente se se dispõe de uma calculadora com a função  $\ln x$ . Para facilitar, a obtenção dos planos seqüenciais, tabelas especiais foram construídas fornecendo os valores  $h_A$ ,  $h_R$  e  $s$ , em função de  $p_1$  e  $p_2$  para alguns valores de  $\alpha$  e de  $\beta$ . Duncan (1974, p.973) apresenta uma tabela para o caso  $\alpha=0,05$  e  $\beta=0,10$ , para algumas combinações de  $p_1$  e  $p_2$ . Na notação de Duncan,  $h_A$  é denotado por  $h_1$  e  $h_R$  por  $h_2$ . A tabela também fornece os valores ASN para os cinco pontos especificados em (6.4.4).

## 6.5 Esquema de Inspeção por Atributos

Nas seções anteriores, os principais tipos de planos de inspeção por atributos foram introduzidos, e foi visto como obter um plano específico atendendo a determinados requisitos. Durante a 2.<sup>a</sup> Guerra Mundial foi desenvolvido um esquema geral de inspeção através do estabelecimento de uma ampla estratégia, especificando as formas de utilização dos planos de inspeção, de modo a se conseguir um nível de proteção que não é atingido por um plano individual. Este esquema, conhecido como MIL-STD-105D, que deu origem à norma internacional ISO 2859, está incluído no sistema AQL (Acceptable Quality Level) ou NQA (Nível de Qualidade Aceitável), em Português. Este sistema é aplicável a uma seqüência de lotes e os planos especificam um limite superior para a qualidade, o NQA, que deve ser atendido pe

lo produtor, a fim de que não ocorra um número excessivo de lotes rejeitados. O sistema garante a aceitação freqüente de lotes quando o nível de qualidade atende ao NQA e a rejeição freqüente no caso contrário. Isto é conseguido através de um procedimento de mudanças entre os planos contidos no sistema.

Os planos contidos na norma ISO 2859 são indexados com respeito a uma série de valores para NQA, variando de 0,01% a 10%, para a inspeção da fração defeituosa, além de 10 NQA's adicionais para a inspeção do número de defeitos por unidade. O sistema inclui também diversos *níveis de inspeção*, que determinam a relação entre tamanho da amostra e tamanho do lote. O nível II é aplicável para uma inspeção regular, o nível I é aplicável quando se exige uma discriminação menor e o nível III para uma maior discriminação.

Uma vez especificado o valor de NQA e o nível de inspeção, e para um determinado tamanho de lote, o sistema fornece um plano de *inspeção normal*, que deve ser adotado enquanto o produtor estiver fornecendo produto que atenda ao NQA. Se houver evidência que o nível de qualidade piorou, de acordo com um critério estabelecido na norma, o sistema recomenda a mudança de inspeção para um plano de *inspeção rigorosa*. Existe também a possibilidade de passar da inspeção normal para um plano de *inspeção reduzida*, quando houver evidência que o produto sendo inspecionado é de muito boa qualidade. Desta forma, a norma fornece planos para inspeção normal, para inspeção rigorosa e para inspeção reduzida. As mudanças entre estes planos é que garante o nível de proteção fornecido pelo sistema.

O procedimento para as mudanças entre os planos é fundamental para o sistema, e tem a finalidade de pressionar o produtor a tomar ações corretivas quando a qualidade cai abaixo do nível estabelecido. Por outro lado, o procedimento também oferece vantagens, em termos de tamanhos reduzidos de amostras, quando melhora a qualidade do produto.

O sistema MIL-STD-105D, ou ISO 2859, foi projetado para

ser aplicado a uma seqüência de lotes, quando é então possível efetuar as mudanças entre os planos de inspeção rigorosa, normal e se vera, de acordo com os resultados fornecidos pelas inspeções dos lo tes precedentes. O sistema não é aplicável a lotes individuais, sem o uso das regras de mudanças, uma vez que isto origina uma proteção demasiadamente baixa. Para o produtor, o nível de qualidade é espe ci ficado em termos do NQA, enquanto que a proteção do consumidor é conseguida pelas regras de mudança que levam à adoção de planos de inspeção rigorosa quando a qualidade se deteriora.

A norma ISO 2859 fornece planos de amostragem simples, dupla e múltipla, determinados de forma que para um dado NQA eles tenham aproximadamente a mesma curva característica. Devido ao fa to de ser possível escolher entre estes 3 tipos de planos, as ta be las não fornecem de imediato os tamanhos das amostras, mas sim le tras-código. Uma letra-código, com o tipo de plano a ser usado, de terminará o tamanho da amostra (ou amostras) e o(s) número(s) de a ce itação. Para os planos que admitem mais de um estágio, as am os tras são todas do mesmo tamanho. Os tamanhos das amostras não são uma proporção constante dos tamanhos dos lotes e para pequenos lo tes a proporção é muito maior que para lotes grandes. Por outro la do, como o tamanho da amostra aumenta com o tamanho do lote, a pr obabilidade de rejeitar lotes com nível de qualidade compatível com o NQA é menor para lotes grandes do que para lotes pequenos. Por ta nto, o sistema proporciona economia de inspeção e maior ga rantia para o produtor, através da inspeção de lotes grandes.

A seleção de um plano do sistema é muito simples: (a) com o tamanho do lote e com o nível de inspeção desejado, lê-se na ta be la I da Norma a letra-código. (b) Com o valor NQA fixado e a letra-código determinada, lê-se da tabela correspondente ao tipo de plano desejado (simples, duplo ou múltiplo) e ao rigor de inspeção re que rido (normal, reduzida ou rigorosa) o tamanho da amostra (ou amostras) e o (s) número (s) de aceitação.

Devido ao grande volume, as tabelas do esquema MIL-STD-105D não serão aqui reproduzidas. Algumas daquelas tabelas podem ser en

contradas em muitos textos, como no livro do Duncan, por exemplo. O esquema foi traduzido, constituindo a Norma Brasileira NBR 5426 - Planos de Amostragem e Procedimentos na Inspeção por Atributos (MIL-STD-105D) - publicada pela Associação Brasileira de Normas Técnicas, em Dez. 77.

Para fins de ilustração, considere a inspeção de lotes de tamanho 2000, tendo sido fixado o NQA igual a 1,5%. A Tabela I da Norma fornece, para lotes de tamanhos compreendidos entre 1201 e 3200 e para o nível II de inspeção, a letra-código k. Para esta letra-código, a Tabela II-A (Plano de amostragem simples para inspeção normal) fornece o tamanho da amostra  $n=125$  e, para  $AQL=1,5$ , o número de aceitação  $c=5$ . Se for decidido usar um plano de amostragem dupla, a Tabela III-A fornece  $n_1=n_2=80$ ,  $c_1=2$  e  $c_2=6$ . Se um plano de amostragem múltipla for desejado, ainda para inspeção normal, a Tabela IV-A fornece  $n_1=n_2=\dots=n_7=32$ , os números de aceitação\*, 1, 2, 3, 5, 7, 9 e os seguintes números de rejeição: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, onde \* significa que não pode haver aceitação no primeiro estágio.

### Exercícios

6.1 Uma seqüência de lotes grandes provenientes de um processo produtivo deverá ser inspecionada por atributos, a fim de se decidir pela aceitação ou não dos lotes. Deseja-se que o plano seja tal que a fração defeituosa for 0,01, os lotes tenham 95% de probabilidade de serem aceitos e se for 0,05 aquela probabilidade seja 0,05 apenas.

a) Obtenha os melhores planos de amostragem simples e seqüencial

b) Se o custo de inspeção por item for cr\$ 10,00 e se houver um custo fixo de inspeção igual a cr\$ 5.000,00 por lote, se a inspeção for efetuada através de um plano simples e um custo fixo de cr\$ 6.000,00 por lote, se a inspeção for efetuada através de um plano seqüencial, que planos você recomen

daria se a fração defeituosa de processo for próxima de

1) 0,01?

2) 0,03?

6.2 Estabeleça as formas gráfica e tabular para a aplicação do plano seqüencial obtido no exercício anterior. Se a inspeção de um lote originou o 18º o 27º e o 40º itens defeituosos, que decisão você tomaria?

6.3 Considere o plano de inspeção que consiste em inspecionar 10% dos lotes e aceitá-los se no máximo 2% da amostra for defeituosa

1) Se um lote tem  $N$  itens dos quais  $M$  são defeituosos, qual a probabilidade aproximada de aceitá-lo para

a)  $N=1000$  e  $M=40$ ?

b)  $N=2000$  e  $M=80$ ?

c)  $N=5000$  e  $M=200$ ?

2) Se 0,04 é a fração defeituosa correspondente ao risco do consumidor, o que você pode dizer sobre a proteção dada pelo plano considerado?

6.4 Obtenha um plano de inspeção por amostragem seqüencial por atributos que tenha curva característica passando pelos pontos (0,02; 0,95) e (0,08; 0,10).

a) Um inspetor testa 40 unidades e não encontra nenhum item defeituoso. O que ele deve fazer? Que decisão ele deveria tomar se a 10.<sup>a</sup>, a 18.<sup>a</sup> e a 23.<sup>a</sup> unidades inspecionadas foram defeituosas?

b) Trace a curva característica e a curva ASN para o plano considerado.

c) Para aproximadamente que valores da fração defeituosa o plano seqüencial proporcionaria, em média, economia no número

de unidades inspecionadas por lote, comparativamente ao plano de amostragem simples equivalente?

- 6.5 Consultando as tabelas do sistema MIL-STD-105D (algumas são reproduzidas em Duncan), determine os planos por amostragem simples, dupla e múltipla, para inspeção normal e rigorosa, para inspecionar lotes de tamanho 2000, sendo fixado o AQL em 1,5%. Trace, num mesmo gráfico, as curvas características dos planos de amostragem simples (inspeção normal e rigorosa).

## 7. INSPEÇÃO POR VARIÁVEIS

### 7.1. Introdução

Neste capítulo vamos considerar a inspeção para aceitação de lotes, onde os itens que os compõem são classificados como aceitáveis ou não aceitáveis de acordo com o *valor* de uma característica qualitativa  $X$  medida numa escala contínua. Um item inspecionado pode ser considerado aceitável se  $X \geq L$  (ou  $X \leq U$ ) ou se  $L \leq X \leq U$ , onde  $L$  e  $U$  são constantes arbitrárias denominadas *limites de especificação*. No primeiro caso tem-se *especificação unilateral* e no segundo caso tem-se *especificação bilateral*.

Um plano de inspeção por variáveis pode ser estabelecido para controlar a fração  $p$  de itens que não satisfazem às especificações, isto é, para controlar a fração de itens defeituosos. Numa situação como esta, um plano de inspeção por variáveis pode ser usado em lugar de um plano de inspeção por atributos. As principais vantagens e desvantagens de um tal procedimento são listadas a seguir:

- a) A inspeção por variáveis fornece mais informação sobre a qualidade do material inspecionado, isto porque além de classificar um item como não aceitável, a inspeção por variáveis fornece uma medida do grau de imperfeição do item, o que não é fornecido pela inspeção por atributos.
- b) Como consequência do que acabamos de mencionar, um plano de inspeção por variáveis requer um tamanho de amostra menor do que o tamanho da amostra do plano equivalente de inspeção por atributos, isto é, do plano por atributos que apresenta aproximadamente a mesma curva característica.
- c) Por exigir uma avaliação precisa do valor da característica  $X$ , a inspeção por variáveis é, por item inspecionado, mais cara do que a inspeção por atributos. Entretanto, a redução

no tamanho da amostra pode compensar esta diferença, favorecendo a inspeção por variáveis.

- d) Se um item que ser inspecionado para mais de uma característica qualitativa, um único plano por atributos pode ser aplicado, enquanto que a inspeção por variáveis exigiria a aplicação de um plano para cada característica.
- e) A inspeção por variáveis requer o conhecimento da distribuição de probabilidades da característica qualitativa de interesse, enquanto que a inspeção por atributos pode ser efetuada sem o conhecimento daquela distribuição.

Numa situação prática, quando houver possibilidade de aplicar um plano de inspeção por atributos ou por variáveis, as vantagens e desvantagens acima relacionadas devem ser analisadas a fim de que seja feita a escolha mais adequada entre inspeção por atributos e inspeção por variáveis.

## 7.2. Controle da Fração Defeituosa com Especificação Unilateral

Nesta seção vamos considerar os planos de inspeção para uma característica  $X$  normalmente distribuída com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , o que denotaremos por  $X: N(\mu, \sigma^2)$ . Vamos considerar também uma especificação unilateral inferior, isto é, vamos considerar um item inspecionado como sendo aceitável se  $X > L$ . Devido à simetria da distribuição normal, poderíamos considerar, indistintamente, uma especificação superior. Consideraremos, separadamente, os casos  $\sigma^2$  conhecido e  $\sigma^2$  desconhecida. A primeira situação não é muito realista em muitas situações práticas, porém permite obter, de forma simples, um plano de inspeção por variáveis, facilitando a extensão para o caso da variância ser desconhecida.

## 7.2.1 Variância Conhecida

Suponha a característica qualitativa  $X:N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  conhecida, e suponha um limite inferior  $L$  de especificação para  $X$ . Para um lote proveniente de um processo produtivo sob controle, a fração de itens defeituosos, isto é, de itens que não atendem à especificação, é:

$$p = P(X < L) = \Phi\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right). \quad (7.2.1.)$$

Observa-se que  $p$  varia inversamente com  $\mu$ . Isto é,  $p$  diminui à medida que  $\mu$  aumenta, e vice-versa. Portanto, um critério para a aceitação de um lote pode ser estabelecido como segue: tomar uma amostra aleatória de  $n'$  itens do lote, calcular a média amostral  $\bar{X}$  e aceitar o lote para valores grandes de  $\bar{X}$ . Este critério pode ser escrito: aceitar um lote se

$$\bar{X} \geq L + k'\sigma, \quad (7.2.2.)$$

onde  $k' > 0$  é uma constante a ser determinada. Para um limite superior  $U$  de especificação o lote seria aceito se  $\bar{X} \leq U - k'\sigma$ . Segundo este critério, um plano de inspeção será definido por um par  $(n', k')$ ,  $n'$  inteiro positivo e  $k'$  real positivo.

para um plano definido por  $(n', k')$ , a probabilidade de aceitar um lote proveniente de um processo que origina uma fração de defeituosa  $p$  é dada por

$$P_p = P(\bar{X} \geq L + k'\sigma) = \Phi\left(n'^{1/2}(\mu - L - k'\sigma)/\sigma\right).$$

Porém, de (7.2.1) tem-se que para uma fração defeituosa  $p$ , a média  $\mu$  é dada por

$$\mu = L + Z_p \sigma, \quad (7.2.3.)$$

onde  $Z_p$  é tal que  $\Phi(Z_p) = 1-p$ . Substituindo  $\mu$  em  $P_p$  obtém-se

$$P_p = \Phi (n'^{1/2} (Z_p - k')), \tag{7.2.4.}$$

A determinação de  $P_p$  para diversos valores de  $p$  determinará a curva característica do plano.

A obtenção de um plano  $(n', k')$  com curva característica passando pelos pontos  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$  é conseguida resolvendo-se as equações

$$\Phi (n'^{1/2} (Z_1 - k')) = 1-\alpha$$

e

$$\Phi (n'^{1/2} (Z_2 - k')) = \beta,$$

onde  $Z_i = Z_{p_i}$  ( $i=1,2$ ). Portanto,  $n'$  e  $k'$  são as soluções de

$$n'^{1/2} (Z_1 - k') = Z_\alpha$$

e

$n'^{1/2} (Z_2 - k') = -Z_\beta$ . Resolvendo-se estas equações obtém-se

$$n' = \{(Z_\alpha + Z_\beta)/(Z_2 - Z_1)\}^2 \tag{7.2.5.}$$

e

$$k' = (Z_1 Z_\beta + Z_2 Z_\alpha)/(Z_\alpha + Z_\beta). \tag{7.2.6.}$$

Se o resultado da equação (7.2.5) não for inteiro, o valor de  $n'$  deve ser aproximado para o inteiro imediatamente superior.

*Exemplo 7.1.* Seja determinar um plano de inspeção para  $X; N(\mu, 100)$ , sendo fixados os pontos  $(0,05; 0,95)$  e  $(0,20; 0,10)$  da curva característica. Se a amostra seleccionada de um lote originou

$\bar{X} = 218,1$  o lote deve ser aceito ou rejeitado, se for  $L = 200$ ?

*Solução.* Temos que  $Z_{\alpha} = Z_{0,05} = Z_1 = 1,645$ ,  $Z_{\beta} = Z_{0,10} =$   
 $= 1,282$  e  $Z_2 = Z_{0,20} = 0,842$ . Então:

$$n' = \{(1,645 + 1,282)/(0,842 - 1,645)\}^2 = 13,3 \approx 14.$$

$$k' = (2,1089 + 1,3851)/(1,645 + 1,282) = 1,194.$$

Sendo  $L=200$ , o lote será aceito se  $\bar{X} \geq 200 + 10(1,194) = 211,94$ . Se a amostra originou  $\bar{X} = 218,1$ , o lote deverá ser aceito.

Neste ponto é conveniente comparar os tamanhos das amostras obtidas nos Exemplos 6.1 e 7.1 para comprovar que a inspeção por variáveis requer um tamanho de amostra, 14 no caso, bem menor do que o tamanho da amostra (38) do plano equivalente por atributos.

O critério de decisão especificado em (7.2.2) é denominado procedimento 1 na norma internacional MIL-STD-414, que contém planos de inspeção por variáveis. Um procedimento alternativo, denominado Procedimento 2, consiste em *estimar* a fração defeituosa  $p$  e aceitar o lote se a estimativa  $\hat{p}$  for menor ou igual a  $M'$  onde  $0 < M' < 1$ . Segundo este procedimento, um plano é caracterizado pelo par  $(n', M')$ .

Um estimador de  $p$  poderia ser obtido substituindo  $\mu$  por  $\bar{X}$  em (7.2.1). Entretanto, um tal estimador seria tendencioso. Pode-se provar que um estimador não-tendencioso de  $p$ , e de variância mínima, é dado por

$$\hat{P} = \Phi(v(L - \bar{X})/\sigma), \quad (7.2.7.)$$

onde

$$v = (n'/(n' - 1))^{1/2}. \quad (7.2.8.)$$

Segundo o Procedimento 2, uma amostra de tamanho  $n'$  é selecionada de um lote e é determinada a estimativa  $\hat{p}$  de  $p$ . O lote é então aceito se  $\hat{p} \leq M'$ , sendo rejeitado no caso contrário.

É fácil verificar que os Procedimentos 1 e 2 são inteiramente equivalentes se for

$$M' = \Phi(-vk'). \quad (7.2.9.)$$

Como ilustração, para o Exemplo 7.1 teríamos  $v = (14/13)^{1/2} = 1,0377$  e portanto  $M' = \Phi(-(1,0377)(1,194)) = \Phi(-1,24) = 0,1075$ . Como a amostra originou  $\bar{X} = 218,1$  a estimativa de  $p$  é  $\hat{p} = \Phi(1,0377(-1,81)) = \Phi(-1,88) = 0,0301$ . Uma vez que  $\hat{p} < M'$ , o lote deve ser aceito, como havia sido concluído com o procedimento 1.

### 7.2.2 Variância Desconhecida

Vamos supor agora  $X: N(\mu, \sigma^2)$ , porém com  $\sigma^2$  desconhecida, e suponha que  $X$  deva satisfazer a um limite inferior  $L$  de especificação. Uma vez que  $\sigma$  não é conhecido, o critério de decisão em (7.2.2) não pode ser adotado. Entretanto, se estimamos  $\sigma^2$  através da variância amostral  $s^2$ , para uma amostra de tamanho  $n$ , um critério de decisão pode ser aceitar um lote se

$$\bar{X} \geq L + ks \quad (\text{ou } \bar{X} - ks \geq L), \quad (7.2.10.)$$

onde  $k$  é uma constante a ser determinada. Um plano de inspeção será então definido por um par  $(n, k)$ ,  $n$  inteiro positivo e  $k$  real positivo.

Para um plano de inspeção definido por  $(n, k)$ , a probabilidade de aceitar um lote com fração defeituosa  $p$  será dada por

$$\begin{aligned} P_p &= P(\bar{X} \geq L + ks) = P\left\{n^{1/2}(\bar{X} - \mu)/\sigma \geq n^{1/2}(L + ks - \mu)/\sigma\right\} \\ &= P\left\{n^{1/2}(\bar{X} - \mu)/\sigma + n^{1/2}(\mu - L)/\sigma \geq n^{1/2}ks/\sigma\right\}. \end{aligned}$$

Ou seja, tem-se que

$$P_p = P\{\sigma(Z + \delta)/s \geq n^{1/2}k\} = P\{T_{n-1, \delta} \geq n^{1/2}k\}, \quad (7.2.11.)$$

onde  $Z = n^{1/2}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ ,  $\delta = n^{1/2}(\mu - L)/\sigma = n^{1/2}Z_p$ , e onde  $T_{n-1, \delta}$  denota uma variável aleatória com distribuição t não central com (n-1) graus de liberdade e coeficientes  $\delta$  de não-centralidade.

Para a determinação de um plano com curva característica passando pelos pontos  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$ , n e k seriam obtidos como solução de

$$P(T_{n-1, \delta_1} \geq n^{1/2}k) = 1-\alpha$$

e

$$P(T_{n-1, \delta_2} \geq n^{1/2}k) = \beta,$$

onde  $\delta_i = n^{1/2}Z_{p_i}$ ,  $i=1,2$ . Para algumas combinações de  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , existem tabelas que permitem determinar n e k que satisfaçam às desigualdades anteriores.

Soluções aproximadas para n e k podem ser obtidas supondo que  $\bar{X} - ks$  tem distribuição aproximadamente normal com média  $\mu - k\sigma$  e variância  $(1 + k^2/2)\sigma^2/n$ , que é uma aproximação razoável se n não é muito pequeno. Com esta aproximação, a probabilidade de aceitar um lote proveniente de um processo com fração defeituosa p pode ser escrita:

$$P_p = P(\bar{X} - ks \geq L) \approx \Phi\{n^{1/2}(Z_p - k)/(1 + k^2/2)^{1/2}\}. \quad (7.2.12.)$$

Portanto, um plano (n, k) com curva característica passando aproximadamente pelos pontos  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$  é obtido resolvendo as equações

$$n^{1/2}(Z_{p_1} - k)/(1 + k^2/2) = Z_\alpha$$

e

$$n^{1/2} (z_2 - k)/(1 + k^2/2) = -z_\beta, \text{ onde } z_i = z_{p_i}, i=1,2.$$

Resolvendo em n e k obtêm-se:

$$n = (1 + k^2/2) \left\{ (z_\alpha + z_\beta) / (z_1 - z_2) \right\}^2 = (1 + k^2/2)n' \quad (7.2.13.)$$

e

$$k = (z_1 z_\beta + z_2 z_\alpha) / (z_\alpha + z_\beta) = k' \quad (7.2.14.)$$

Note que o desconhecimento de  $\sigma$  faz com que o tamanho da amostra seja acrescido do fator  $(1 + k^2/2)$  em relação à amostra do plano para  $\sigma$  conhecido, enquanto que a constante k coincide com a constante do plano para  $\sigma$  conhecido.

*Exemplo 7.2* Vamos retornar ao Exemplo 7.1, porém supondo que a variância não seja conhecida, e que a amostra originou uma variância amostral igual a 98,46. Qual deve ser o plano e que decisão deve ser adotada em relação ao lote?

*Solução.* Vimos, no Exemplo 7.1, que o plano para variância conhecida é definido por  $n'=14$  e  $k'=1,194$ . Como estamos supondo  $\sigma^2$  desconhecida, o plano será dado por

$$k=k'=1,194 \text{ e } n=(1 + (1,194)^2/2)14 \approx 24.$$

Se a amostra originou  $\bar{X} = 218,1$  e  $s^2=98,46$ , temos que  $\bar{X} - ks=206,25 > 200 = L$ , e portanto o lote deve ser aceito, de acordo com o critério em (7.2.10).

Uma outra solução aproximada, introduzida por Hamaker (1979), fornece resultados ligeiramente melhores que aqueles estabelecidos em (7.2.13) e (7.2.14). Estes resultados são obtidos impondo que, pa

ra uma amostra de tamanho  $n$ ,  $\bar{X} - ks$  tenha a mesma média e a mesma variância que  $\bar{X} - k'\sigma$ , para uma amostra de tamanho  $n'$ . Igualando as médias e variâncias de  $\bar{X} - ks$  e de  $\bar{X} - k'\sigma$ , para amostras de tamanhos  $n$  e  $n'$ , respectivamente, obtém-se, aproximadamente:

$$k = k'(4n - 4)/(4n - 5) \quad (7.2.15.)$$

e

$$n = n'(1 + k^2/2). \quad (7.2.16.)$$

Segundo a aproximação de Hamaker, um plano é obtido como se segue:

- a) Supondo  $\sigma$  conhecido, determinar  $n'$  e  $k'$  de (7.2.5) e (7.2.6).
- b) Supondo  $k=k'$ , calcular  $n$  através de (7.2.16)
- c) Com este valor de  $n$ , calcular  $k$  usando a (7.2.15)
- d) Com este valor de  $k$ , recalcular  $n$ .
- e) Reiterar o procedimento até atingir a convergência de  $k$ .

Como ilustração, para o Exemplo anterior tínhamos  $n' = 14$  e  $k' = 1,194$ . O primeiro valor de  $n$  seria então  $n = 24$ , como antes. Para este valor de  $n$ ,  $k = (1,194) 92/91 = 1,207$ . Com este valor para  $k$  obtemos  $n = 14 (1 + (1,207)^2/2) \approx 25$ . Reiterando, obtemos  $k = (1,194) 96/95 = 1,207$ , que coincide com o valor anteriormente obtido. O plano seria então definido por  $n=25$  e  $k=1,207$ . Pode ser verificado que esta solução é mais próxima da solução exata que seria obtida trabalhando-se com a tabela da distribuição  $t$  não-central.

Como para o caso da variância conhecida, a decisão entre aceitar e rejeitar um lote pode ser tomada em função da estimativa da fração de itens que não satisfazem às especificações. Este é o

Procedimento 2, na nomenclatura da norma internacional MIL-STD 414. Segundo este procedimento, um lote é aceito se  $\hat{p} \leq M$ , sendo rejeitado no caso contrário, onde  $0 < M < 1$ , e onde  $\hat{p}$  é uma estimativa de  $p = P(X < L)$ .

Pode ser provado que um estimador não-tendencioso de  $p$ , e de variância mínima, é dado por

$$\hat{p} = P(W \leq 1/2 - \theta(\bar{X} - L)/2s), \quad (7.2.17.)$$

onde  $\theta = n^{1/2}/(n-1)$  e onde  $W$  é uma variável aleatória beta com parâmetros  $n/2-1$  e  $n/2-1$ , o que denotaremos por  $W: \beta(n/2-1, n/2-1)$ .

É fácil verificar que os Procedimentos 1 (que consiste em decidir em termos de  $\bar{X}$  e  $s$ ) e 2 são inteiramente equivalentes se for

$$k = (1 - 2\beta_M)/\theta, \quad (7.2.18.)$$

onde  $\beta_M$  é tal que  $P(W \leq \beta_M) = M$ .

### 7.3. Controle da Fração Defeituosa com Especificação Bilateral

Nesta seção consideraremos os planos de inspeção para uma característica  $X: (\mu, \sigma^2)$  que têm por objetivo classificar lotes como aceitáveis ou não aceitáveis, em função da fração  $p$  de itens que não satisfaçam às especificações. Vamos considerar uma especificação inferior  $L$  e uma especificação superior  $U$ , e portanto a fração de itens defeituosos será dada por

$$p = P(X < L) + P(X > U) = \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu - U}{\sigma}\right) = p_L + p_U, \quad (7.3.1.)$$

onde  $p_L$  é a fração de itens defeituosos com  $X < L$  e  $p_U$  é a fração de itens defeituosos com  $X > U$ .

A equação (7.3.1) exprime uma relação entre  $p$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ , definindo uma superfície em  $R^3$ . Para um dado valor de  $p$ , o contorno de uma tal superfície é da forma indicada na Figura 7.1. Um par  $\sigma$ ,  $\mu$  correspondente a um ponto interior ao contorno indica um valor de  $p$  menor que o fixado e indica, portanto, que o processo é aceitável.

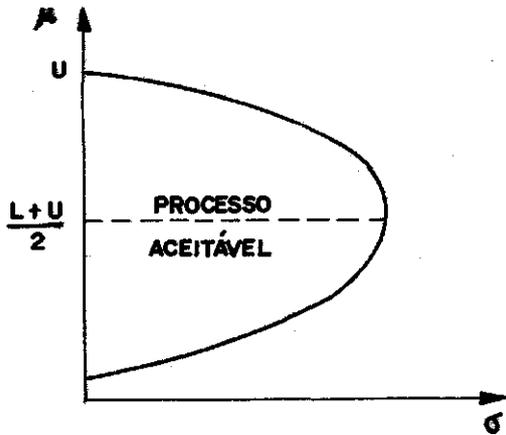


Figura 7.1 Curva para proporção constante de peças defeituosas

Lieberman e Resnikoff (1955), propuseram um critério de decisão que consiste em estimar, para cada lote, a proporção de itens defeituosos, e aceitar ou rejeitar o lote com base nessa estimativa. Segundo este critério, um plano de inspeção consiste em um tamanho amostra e em uma constante  $p^*$ , onde  $p^*$  é o valor máximo permitível para a estimativa de  $p$ . Selecionada a amostra de um lote, estimam-se as proporções  $p_L$  e  $p_U$ . Sejam  $\hat{p}_L$  e  $\hat{p}_U$  as estimativas respectivas. Se  $\hat{p} = \hat{p}_L + \hat{p}_U - p^*$ , o lote é aceito, sendo rejeitado no caso contrário. No que se segue, este critério será desenvolvido.

Como no caso da especificação unilateral, consideraremos separadamente os casos  $\sigma$  conhecido e  $\sigma$  desconhecido.

## 7.3.1 Variância Conhecida

Vamos supor que a variância da variável  $X$  é conhecida e constante para diferentes lotes, e que apenas a média  $\mu$  é desconhecida, podendo variar de lote para lote. Para  $L$  e  $U$  fixados, a fração  $p$  será mínima quando a média  $\mu$  coincidir com o ponto médio do intervalo de especificações, isto é, quando  $\mu = (L + U)/2$  (Vide Figura 7.2)

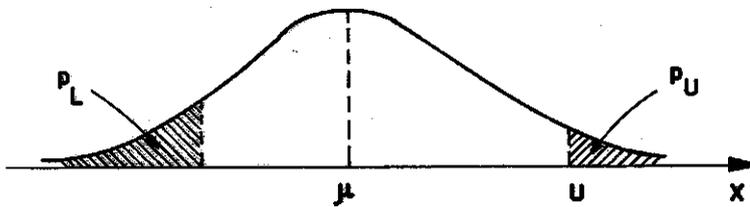


Figura 7.2. Fração defeituosa para especificação bilateral

A fração defeituosa mínima, que denotaremos por  $p_0$ , será então obtida de (7.3.1) fazendo  $\mu = (L + U)/2$ , originando

$$p_0 = 2\Phi\{(L - U)/2\sigma\} \quad (7.3.2.)$$

Se, para uma determinada característica  $X: N(\mu, \sigma^2)$ ,  $p_M$  for o maior valor da fração defeituosa que ainda é considerada aceitável, nenhum lote poderá ser aceito se for

$$\sigma > (U - L) / (2Z_{p_M/2}) = \sigma_M \quad (7.3.3.)$$

uma vez que estes valores de  $\sigma$  originariam  $p > p_M$ , qualquer que seja o valor da média  $\mu$ . Numa situação como esta, concluiríamos que o processo produtivo não satisfaz às especificações e a inspeção não tem sentido. Uma dentre as duas seguintes alternativas deveria ser adotada: melhorar o processo, diminuindo o valor de  $\sigma$ , ou ampliar as especificações.

Vamos supor que para um determinado processo produtivo o valor de  $\sigma$  seja tal que, para  $L$  e  $U$  fixados, se tenha  $p_0 < p_M$ , quando a inspeção deve então ser realizada. Consideremos inicialmente o caso no qual as especificações sejam tão amplas, comparadas com  $\sigma$ , que  $p_0 \approx 0$ ; isto é,  $\sigma$ ,  $L$  e  $U$  são tais que quando  $\mu = (L + U)/2$  se tenha  $\hat{p}_0 \approx 0$ . Numa situação como esta, um lote não apresentará alguns itens com  $X < L$  e outros com  $X > U$ . Em outras palavras, se um lote contiver itens defeituosos, ou todos eles não atendem ao limite inferior de especificação ou então não atendem ao limite superior. Portanto, a inspeção deverá ser efetuada através de um plano para especificação unilateral, porém sendo aplicado para o limite inferior e também para o limite superior. Desta forma, sendo o plano caracterizado pelo par  $(n', k')$  e sendo adotado o Procedimento 1, um lote inspecionado será aceito se os critérios de aceitação tanto para o limite inferior quanto para o limite superior forem atendidos, isto é, se  $L + k'\sigma \leq \bar{X} \leq U - k'\sigma$ . Se o procedimento 2 for adotado, devemos estimar as frações defeituosas  $p_L$  e  $p_U$  avaliando

$$\hat{p}_L = \Phi(v(L - \bar{X})/\sigma) \text{ e } \hat{p}_U = \Phi(v(\bar{X} - U)/\sigma). \quad (7.3.4.)$$

O lote será então aceito se  $\hat{p}_L \leq M'$  e  $\hat{p}_U \leq M'$ , onde  $M'$  é dado por (7.2.9)

Consideremos agora o caso no qual as especificações não são muito amplas, comparadas com  $\sigma$ , de forma que um lote pode apresentar alguns itens como  $X < L$  e outros com  $X > U$ , dependendo do valor da média  $\mu$ . Isto geralmente ocorrerá se  $(U - L) < 6\sigma$ . Numa situação como esta, é mais conveniente adotar o Procedimento 2, que consiste em decidir em função da estimativa da fração defeituosa. Uma vez que teremos  $p = p_L + p_U$ , o critério de decisão consistirá em aceitar um lote se

$$\hat{p} = \hat{p}_L + \hat{p}_U \leq p^*, \quad (7.3.5.)$$

onde  $p^*$  é uma constante tal que  $0 < p^* < 1$ , e onde  $\hat{p}_L$  e  $\hat{p}_U$  são as estimativas especificadas em (7.3.4).

O critério de aceitação em (7.3.5) deve, naturalmente, ser equivalente ao critério adotado para especificação unilateral, quando o valor de  $\mu$  for tal que  $p_L = 0$  ou  $p_U = 0$ . Dessa forma, se  $p_U = 0$ , o critério  $\hat{p} \leq p^*$  fica  $\hat{p}_L \leq p^*$ , ou seja

$$\Phi(v(L - \bar{X})/\sigma) \leq p^*, \quad (7.3.6.)$$

que pode ser escrito  $v(L - \bar{X})/\sigma \leq \Phi^{-1}(p^*) = Z_{p^*}$ . Então, o critério de aceitação pode ser escrito

$$\bar{X} \geq L + \sigma Z_{p^*}/v, \quad (7.3.7.)$$

que é o critério para especificação unilateral inferior, se tomamos

$$k' = Z_{p^*}/v, \quad (7.3.8.)$$

como pode ser visto comparando (7.3.7) com (7.2.2). Analogamente, se  $p_L = 0$ , o critério de aceitação  $\hat{p} \leq p^*$ , para especificação bilateral, pode ser escrito  $\bar{X} \leq U - k'\sigma$ , com  $k'$  dado por (7.3.8), que é o critério de aceitação para especificação unilateral superior.

Portanto, para obter um plano de inspeção para o caso no qual são fixados dois limites de especificação, obtêm-se inicialmente um plano considerando especificação unilateral, determinando-se  $n'$  e  $k'$  através de (7.2.5) e (7.2.6), respectivamente. A constante  $p^*$ , a ser usada no critério de decisão em (7.3.5), é então obtida de (7.3.8) que fornece

$$p^* = \Phi(-vk'). \quad (7.3.9)$$

#### 7.3.1.1. Procedimento Gráfico

A fim de facilitar a utilização de um plano de inspeção para especificação bilateral, especialmente para o caso  $\sigma$  desconhecido, que será visto na próxima seção, a norma britânica BS 6002, de 1979, transformou o Procedimento 2, acima descrito, num Procedimento gráfico. Este procedimento consiste na determinação de uma re

gião do plano real que determina a aceitação de um lote inspecionado se o ponto  $(\sigma, \bar{X})$  estiver nela contido, determinando a rejeição no caso contrário. A fronteira da região de aceitação, que define a curva de aceitação, é obtida como solução da equação  $\hat{p} = p^*$ . Como foi visto no item anterior, a região de aceitação estará contida entre as retas  $\bar{X} = L + k'\sigma$  e  $\bar{X} = U - k'\sigma$ , correspondentes aos casos  $p_U = 0$  e  $p_L = 0$ , respectivamente.

Para a obtenção da fronteira da região de aceitação correspondente aos valores  $\mu$  e  $\sigma$  tais que  $p_L > 0$  e  $p_U > 0$ , particione mos  $p^*$  em duas parcelas positivas  $p_1^*$  e  $p_2^*$ . Esta partição determinará um ponto  $(\sigma, \bar{X})$  na fronteira da região se  $\sigma$  e  $\bar{X}$  satisfizerem a equação:

$$\hat{p}_L + \hat{p}_U = p_1^* + p_2^*. \quad (7.3.10.)$$

Resolvendo as equações  $\hat{p}_L = p_1^*$  e  $\hat{p}_U = p_2^*$  obtêm-se

$$\sigma = v(U - L)/(Z_1 + Z_2) \text{ e } \bar{X} = (LZ_2 + UZ_1)/(Z_1 + Z_2), \quad (7.3.11.)$$

onde  $Z_i = Z_{p_i^*}$ ,  $i=1, 2$ . A partição simétrica, isto é, a partição na qual  $p_1^*$  é tomado como o valor  $p_2^*$  da partição anterior, determinará o mesmo valor de  $\sigma$  e um valor de  $\bar{X}$  que é simétrico ao anterior, em relação a  $(L + U)/2$ . Portanto, uma participação de  $p^*$  em duas partes determina dois pontos, simétricos em relação a  $\bar{X}=(L+U)/2$ , da fronteira da região de aceitação. Outras partições de  $p^*$  determinarão outros pontos, e uma curva contínua passando pelos pontos obtidos definirá a curva de aceitação para o plano. A particular partição definida por  $p_1^* = p_2^*/2$  determinará o ponto definido por  $\bar{X} = (L + U)/2$  e por

$$\sigma^* = v(U - L)/2Z_{p^*/2}, \quad (7.3.12.)$$

que é o maior valor possível de  $\sigma$  que admite aceitação de um lote para o valor  $p^*$  considerado.

Para um particular plano  $(n', k')$ , a forma geral da curva de aceitação obtida, como acabamos de descrever, é indicada na Figura 7.3, inteiramente coerente com a forma ilustrada na Figura 7.1.

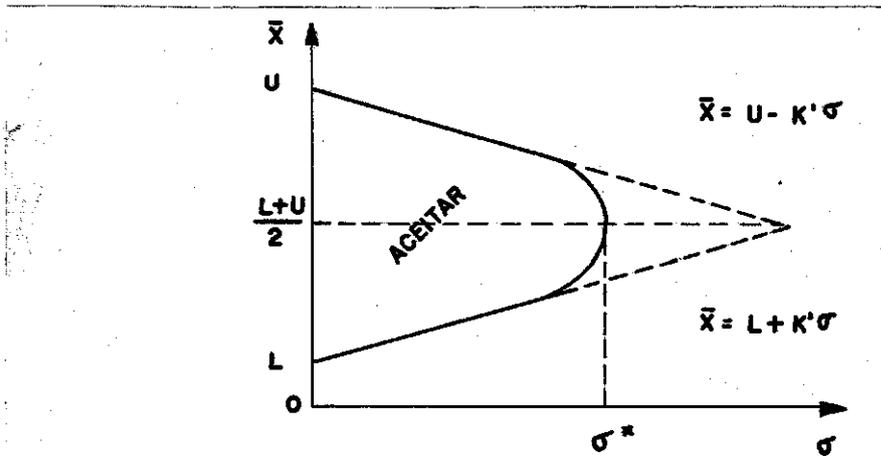


Figura 7.3 Curva de Aceitação

Curvas de aceitação com a forma genérica indicada na Figura 7.3, proposta na norma BS 6002, estão contidas na norma internacional ISO 3951, de 1981, que constitui a primeira revisão da norma MIL-STD-414. As curvas são fornecidas para todas as possíveis combinações de Letra-Código e AQL, usados na norma para especificar um plano.

Bravo (1980) mostrou que aquela forma para a curva de aceitação não é adequada, uma vez que ela permite a aceitação, com altas probabilidades, de lotes provenientes de processos que não satisfazem às especificações.

Como ilustrado, considere um plano de inspeção para  $X:N(u, 441)$  que deve satisfazer  $470 \leq X \leq 570$ . Suponha que o AQL seja fixado em 1% e que lotes com 4000 peças devam ser inspecionados. Para estas condições, a norma ISO 3951 recomenda, para inspeção normal, o plano definido por  $n' = 25$  e  $k' = 1,97$ . De (7.3.2) obtemos  $p_0 = 1,73\%$ ,

de (7.3.3), com  $p_M = AQL = 0,01$ , obtemos  $\sigma_M = 19,41$ , de (7.3.9) obtemos  $p^* = 2,22\%$  e de (7.3.12) obtemos  $\sigma^* = 22,28$ . Como temos  $\sigma = 21 > \sigma_M$ , as especificações não podem ser atendidas. Entretanto, como a curva de aceitação correspondente ao plano tem vértice em  $\sigma^* = 22,28 > 21$ , o particular lote poderá ser aceito se o plano de inspeção for utilizado. Vamos determinar a probabilidade de aceitação. Para  $\sigma = 21$  a curva de aceitação fornece o intervalo (512,4; 527,6) como sendo o intervalo de aceitação. Supondo que  $\mu = 520 = (L + U)/2$ , que é a situação para a qual  $p = p_0$ , a probabilidade de aceitar o lote será

$$P_a = P(512,4 \leq \bar{X} \leq 527,6 | \mu = 520, \sigma = 21) \approx 0,93.$$

Portanto, um lote proveniente de um processo produtivo que origina uma fração defeituosa pelo menos 73% acima do AQL poderá ser aceito com uma probabilidade aproximadamente igual a 93%, o que é deveras insatisfatório.

Resultados como o que ilustramos ocorrem simplesmente por que as curvas de aceitação contidas na norma ISO 3951 possuem  $\sigma^* > \sigma_{AQL}$ , onde  $\sigma_{AQL}$  é dado por (7.3.3), substituindo  $p_M$  por AQL, sendo portanto o maior valor possível de  $\sigma$  para a qual  $p_0 \leq AQL$ . Portanto, com aquelas curvas, lotes provenientes de um processo para o qual  $\sigma_{AQL} < \sigma < \sigma^*$  poderão ser aceitos, o que não deveria ocorrer.

Formas alternativas para a curva de aceitação foram então sugeridas e uma delas, que consiste simplesmente no truncamento da curva de aceitação para  $\sigma = \sigma_{AQL}$ , está sendo discutida por um Comitê da ISO, para substituir as curvas atualmente em uso. A forma geral da curva truncada está ilustrada na Figura 7.4, numa escala comum onde tem-se no eixo horizontal  $\sigma/(U - L)$  e no eixo vertical  $(\bar{X} - L)/(U - L)$ .

Uma vez que, na escala comum na qual as curvas são construídas,  $\sigma_{AQL}$  só depende do AQL, as curvas de aceitação que aparecem no padrão BS 6002 devem ser truncadas nos valores de  $\sigma_{AQL}$  for

necidos na Tabela 7.1.

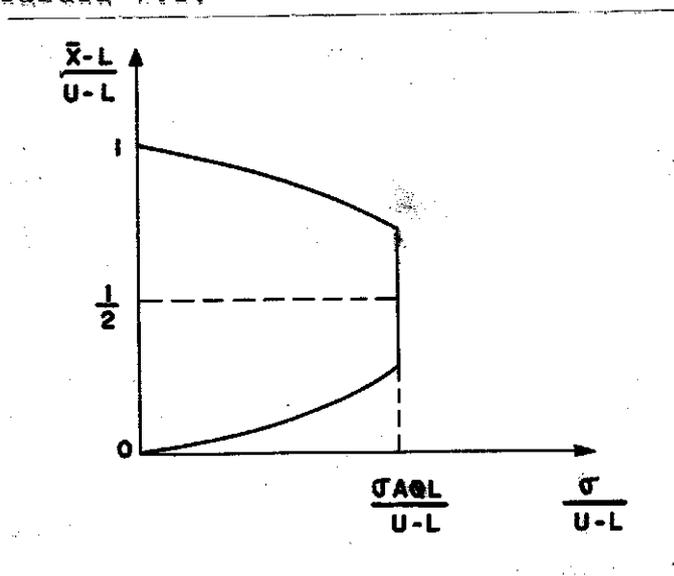


Figura 7.4 Curva truncada de aceitação

TABELA 7.1

Valores Máximos de  $\sigma$

AQL (%)	$\sigma_{AQL}$
0,040	0,1412
0,065	0,1466
0,100	0,1520
0,150	0,1575
0,250	0,1654
0,400	0,1737
0,650	0,1837
1,000	0,1941
1,500	0,2056
2,500	0,2231
4,000	0,2435
6,500	0,2710
10,000	0,3040
15,000	0,3473

Com uma curva truncada de aceitação, o procedimento para dois limites de especificação continua equivalente ao procedimento para um único limite, quando  $\sigma$  é relativamente pequeno. A vantagem adicional é que com uma tal curva, lotes provenientes de processos que

não satisfazem às especificações não podem ser aceitos.

Os efeitos do procedimento proposto sobre as probabilidades de aceitação de lotes foram analisados em Bravo (1983). Basicamente, em comparação com as curvas tradicionais de aceitação, as curvas truncadas produzem uma considerável redução nas probabilidades de aceitação de lotes provenientes de processos que apresentam uma proporção de peças defeituosas ligeiramente superior ao valor do AQL. Para proporção de peças defeituosas muito superiores ao AQL, as probabilidades de aceitação ficam bastante mais próximas das probabilidades de aceitação calculadas para o caso de um único limite de especificação.

### 7.3.2 Variância Desconhecida

Se a variância  $\sigma^2$  é desconhecida, o procedimento que consiste em decidir em termos da estimativa da fração de itens defeituosos é o mais adequado. Lieberman e Resnikoff (1955) provaram que um estimador não-tendencioso de  $p$ , e de variância mínima, para uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , é dado por

$$\hat{p} = P(W \leq \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} \frac{\bar{X}-L}{s}) + P(W \leq \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} \frac{U-\bar{X}}{s}) = \hat{p}_L + \hat{p}_U, \quad (7.3.13.)$$

onde  $\theta$  e  $W$  foram definidos em (7.2.17). Sendo  $\hat{p}_L$  e  $\hat{p}_U$  as estimativas de  $p_L$  e  $p_U$ , um lote será aceito se

$$\hat{p} = \hat{p}_L + \hat{p}_U \leq p^*, \quad (7.3.14.)$$

onde  $p^*$  é uma constante no intervalo  $(0,1)$ .

Procedendo como foi feito no caso da variância conhecida, pode ser visto que se  $p_U = 0$ , o critério de aceitação acima consiste em aceitar um lote se

$$\bar{X} \leq L + s \cdot (1 - 2\beta_{p^*}) / \theta, \quad (7.3.15.)$$

onde  $\beta_{p^*}$  foi definido em (7.2.18). Este critério nada mais é do que o critério para especificação unilateral inferior se tomamos

$$k = (1 - 2\beta_{p^*})/\theta, \quad (7.3.16.)$$

como pode ser visto comparando (7.3.15) com (7.2.10). Analogamente, se  $p_L = 0$ , o critério de aceitação em (7.3.14) consiste em aceitar um lote se  $\bar{X} \leq U - ks$ , com  $k$  dado por (7.3.16), que é o critério de aceitação para especificação unilateral superior.

Como no caso da variância conhecida, um plano para especificação bilateral é obtido determinando inicialmente o plano para especificação unilateral, isto é, determinando  $n$  e  $k$ . A constante  $p^*$  a ser usada no critério em (7.3.14), para especificação bilateral é então obtida de (7.3.16), isto é, deve satisfazer a seguinte relação:

$$\beta_{p^*} = (1 - \theta k)/2. \quad (7.3.17.)$$

#### 7.3.2.1. Procedimento Gráfico

Como no caso da variância conhecida, um procedimento gráfico facilita a aplicação de um plano para especificação bilateral. No presente caso, o procedimento gráfico será ainda mais útil, uma vez que um lote será aceito dependendo dos valores de  $s$  e  $\bar{X}$ , e não apenas de  $\bar{X}$  como no caso anterior.

A fronteira da região de aceitação, isto é, a curva de aceitação no plano  $(s, \bar{X})$  é obtida resolvendo a equação  $\hat{p} = p^*$ , onde  $\hat{p}$  é a estimativa de  $p$  e é obtida avaliando o segundo membro de (7.3.13). Através do critério de aceitação em (7.3.15) e do correspondente critério de aceitação para especificação unilateral superior, concluímos que a região de aceitação estará contida entre as retas  $\bar{X} = L + ks$  e  $\bar{X} = U - ks$ , que correspondem aos casos  $p_U = 0$  e  $p_L = 0$ .

respectivamente.

Para a obtenção da curva de aceitação quando  $p_U > 0$  e  $p_L > 0$ , particionamos  $p^*$  em duas parcelas positivas,  $p_1^*$  e  $p_2^*$  e resolvemos as equações

$$p(W \leq 1/2 - \theta(\bar{X} - L)/2s) = p_1^*$$

e

(7.3.18.)

$$p(W \leq 1/2 - \theta(U - \bar{X})/2s) = p_2^*,$$

cuja solução fornece

$$s = \theta(U - L)/(2 - \beta_1 - \beta_2)$$

(7.3.19.)

e

$$\bar{X} = (L(1 - 2\beta_2) + U(1 - 2\beta_1))/(2(1 - \beta_1 - \beta_2)),$$

(7.3.20.)

onde  $\beta_i = \beta_{p_i^*}$ ,  $i=1,2$ . O ponto  $(s, \bar{X})$  definirá um ponto da curva de aceitação, e o ponto simétrico em relação a  $\bar{X}=(L+U)/2$ , que seria obtido com a partição simétrica, definirá outro ponto da curva de aceitação. Outras partições de  $p^*$  determinarão outros pontos, e uma curva contínua passando por um número razoável de pontos obtidos da forma que acabamos de escrever, definirá a curva de aceitação para o plano. Para a particular partição definida por  $p^* = p_1^* = p_2^*$ , teremos  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_{p^*/2}$ , originando  $\bar{X} = (L+U)/2$  e

$$s = \theta(U-L)/(2(1 - 2\beta_{p^*/2})) = \text{MSD, digamos.}$$

(7.3.21.)

Este é o maior valor possível de  $s$  que admite aceitação de um lote para o valor  $p^*$  considerado.

Para um particular plano caracterizado por  $(n, k)$ , a forma geral da curva de aceitação é idêntica àquela ilustrada na Figura 7.3, onde  $\sigma$  deve ser substituído por  $s$ ,  $\sigma^*$  por MSD e  $k'$  por  $k$ . Curvas de aceitação daquela forma estão incluídas na norma ISO 3951, porém traçadas numa escala comum com o eixo horizontal em termos de  $s/(U-L)$  e o vertical em termos de  $(\bar{X}-L)/(U-L)$ .

#### 7.4 Sistema de Inspeção por Variáveis

Como no caso da inspeção por atributos, foi também desenvolvido, durante a 2.<sup>a</sup> Guerra Mundial, um sistema de inspeção por variáveis denominado MIL-STD-414 e publicado em 1957. Este sistema foi traduzido para o Português, sendo denominado Norma Brasileira NBR 5429-Planos de Amostragem e Procedimento na Inspeção por Variáveis (MIL-STD-414).

O sistema de inspeção por variáveis só contém planos de amostragem simples, tanto para a especificação unilateral como para a especificação bilateral. O sistema foi desenvolvido nos mesmos moldes do sistema de inspeção por atributos, tendo o AQL como o elemento básico para a determinação de um plano. Em termos do tamanho do lote, e para cinco níveis gerais de inspeção, são fornecidas as letras-código que juntamente com AQL especificam o tamanho da amostra e a constante de aceitação, para os procedimentos 1 e 2. A fim de fornecer garantias ao consumidor, um sistema de "regras de mudanças" prevê a passagem da inspeção "normal" para a inspeção "rigorosa", quando existe evidências de que a qualidade dos lotes se deteriorou. Com isto o sistema visa pressionar o produtor a fim de que ele procure elevar o nível de qualidade do seu produto. As regras recomendam também a mudança da inspeção "normal" para uma inspeção "reduzida", quando houver evidência de que o produto sendo inspecionado apresenta um elevado nível de qualidade.

Bravo e Wetherill (1980) compararam os planos por variáveis do sistema MIL-STD-414 com os planos por atributos do sistema MIL-STD-105D e mostraram que, em algumas situações, os planos por variáveis deixam muito a desejar, especialmente porque o risco do produtor pode ser substancialmente maior do que o risco para o plano correspondente por atributos.

A primeira revisão sistemática do sistema MIL-STD-414 foi efetuada na Inglaterra, culminando com a norma Britânica BS 6002, que

foi adotada pela International Standards Organization como uma norma internacional, a ISO 3951. Além de procurar corrigir muitas das deficiências dos planos por variáveis, aquela norma inclui um procedimento gráfico para a aplicação de um plano para o caso da especificação bilateral. Infelizmente, como foi visto na seção 7.2, o procedimento gráfico para o caso da variância conhecida não é muito adequado, e está sendo revisado. Acreditamos que num futuro não muito distante, o sistema de inspeção por variáveis será novamente revisado, devendo incluir as curvas truncadas e também os planos de inspeção por amostragem dupla. Planos de inspeção por amostragem dupla para variáveis estão sendo atualmente pesquisados e constituem uma das prioridades de um Comitê da ISO.

#### 7.5. Outros Tipos de Planos

A inspeção por variáveis para o controle da fração defeituosa de um processo produtivo pode também ser efetuada através de um plano de amostragem seqüencial, especialmente quando houver interesse em reduzir o número de itens inspecionados por lote. Um plano seqüencial por variáveis é desenvolvido de forma análoga aos planos seqüenciais por atributos, apresentados no Capítulo anterior. Toda a teoria necessária para a obtenção e operação de um plano pode ser encontrada em Wald (1947).

Planos de aceitação para variáveis normais, visando controlar a média ou a variabilidade de um processo produtivo (e não a fração defeituosa) foram também desenvolvidos. Os resultados são equivalentes aos resultados bastante conhecidos sobre testes de hipóteses sobre a média e sobre o desvio padrão (ou variância) de uma distribuição normal. Alguns resultados são apresentados em Duncan (1974, Cap. 15).

## Exercícios

- 7.1 Suponha que a porcentagem de cálcio em um certo produto, fornecido em lotes, seja uma variável aleatória normalmente distribuída com desvio padrão 0,1%, o produto sendo considerado aceitável se apresentar menos de 2,1% de cálcio. Determine o plano de inspeção que tenha curva característica passando pelos pontos (0,01; 0,95) e (0,05; 0,05).
- Se a amostra de um lote originou uma média amostral igual a 2,08%, o lote deve ser aceito ou rejeitado? Responda adotando os procedimentos 1 e 2 para decisão.
  - Compare, em termos do número de unidades a inspecionar por lote, o plano atual com aqueles obtidos no Exercício 6.1.
- 7.2 Determine o plano para o exercício anterior, supondo que a variância do processo não seja conhecida.
- Se a amostra originou uma média igual a 2,08% e um desvio padrão igual a 0,1%, o lote deve ser aceito ou rejeitado ?
  - Se a fração defeituosa do processo é 0,03, qual a probabilidade aproximada de aceitar um lote?
- 7.3 Suponha que o produto considerado no exercício 7.1 seja considerado aceitável se a porcentagem de cálcio estiver compreendida entre 1,8% e 2,2%.
- Qual a fração defeituosa mínima que o processo pode produzir?
  - Como você procederia para inspecionar um lote, usando um plano equivalente àquele obtido no exercício 7.1?
  - Se a amostra originou  $\bar{X} = 2,08\%$  você aceitaria ou não o lote?
  - Qual a estimativa da fração defeituosa do processo, para o valor de  $\bar{X}$  considerado no item anterior?
  - Obtenha a curva de aceitação para adotar um procedimento gráfico de inspeção, supondo que o maior valor aceitável para a fração defeituosa do processo é 6%.

APÊNDICE

TABELAS

TABELA I

Tabela para testar a aleatoriedade de pontos em uma seqüência de alternativas (a probabilidade do número de seqüências ser menor ou igual aos números indicados é 0,05). r e s indicam os números de pontos de cada classe, sendo  $r \leq s$ .

r \ s	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	16	18	19	20
6	3														
7	4	4													
8	4	4	5												
9	4	5	5	6											
10	5	5	6	6	6										
11	5	5	6	6	7	7									
12	5	6	6	7	7	8	8								
13	5	6	6	7	8	8	9	9							
14	5	6	7	7	8	8	9	9	10	10					
15	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11					
16	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	11				
17	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	12	12			
18	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13		
19	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	13	14	14	
20	6	7	8	9	9	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15

Fonte: Annals of Mathematical Statistics, vol. XIV (1946).

TABELA II

Valores limites para comprimentos de seqüências crescentes e decrescentes em uma série de  $n$  números.

$n$	seq.	Probabilidade de uma seq. maior ou igual	Seqüência	Probabilidade de uma seq. maior ou igual
4	4	0.0028	4	0.0028
5	5	0.0004	4	0.0165
6	5	0.0028	4	0.0301
7	6	0.0004	4	0.0435
8	6	0.0007	4	0.0567
9	6	0.0011	5	0.0099
10	6	0.0014	5	0.0122
11	6	0.0018	5	0.0146
12	6	0.0021	5	0.0169
13	6	0.0025	5	0.0193
14	6	0.0028	5	0.0216
15	6	0.0032	5	0.0239
20	7	0.0006	5	0.0355
40	7	0.0015	6	0.0118
60	7	0.0023	6	0.0186
80	7	0.0032	6	0.0254
100	8	0.0005	6	0.0322
200	8	0.0010	7	0.0085
500	8	0.0024	7	0.0215

Fonte: Annals of Mathematical Statistics, Vol. XVII (1946)

Fatores para Construção de Gráficos de Controle

n	A	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	c <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	d <sub>2</sub>	1/d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.575
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.115
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.205	5.203	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.387	5.307	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.546	5.394	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.812	5.534	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.924	5.592	0.284	1.716
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.026	5.646	0.308	1.692
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.762	1.121	5.693	0.329	1.671
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.755	1.207	5.737	0.348	1.652
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.749	1.285	5.779	0.364	1.636
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.743	1.359	5.817	0.379	1.621
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.738	1.426	5.854	0.392	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.733	1.490	5.888	0.404	1.596
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.548	5.922	0.414	1.586
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.606	5.950	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.452	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.709	1.804	6.058	0.459	1.541
> 25	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	.....	.....	*	**	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

\*  $1 - \frac{3}{\sqrt{2n}}$

\*\*  $1 + \frac{3}{\sqrt{2n}}$

TABELA IV

TABELA IV. Valores para a determinação de um plano de amostragem simples por atributos com curva característica passando pelos pontos  $(p_1, 1-\alpha)$  e  $(p_2, \beta)$ .

c	Valores de $p_2/p_1$ para:			$np_1$	c	Valores de $p_2/p_1$ para:			$np_1$
	$\alpha = .05$ $\beta = .10$	$\alpha = .05$ $\beta = .05$	$\alpha = .05$ $\beta = .01$			$\alpha = .01$ $\beta = .10$	$\alpha = .01$ $\beta = .05$	$\alpha = .01$ $\beta = .01$	
0	44.890	58.404	89.781	.052	0	229.105	298.073	458.210	.010
1	10.946	13.349	18.681	.355	1	26.184	31.933	44.686	.149
2	6.509	7.699	10.280	.818	2	12.206	14.439	19.278	.436
3	4.890	5.675	7.352	1.366	3	8.115	9.418	12.202	.823
4	4.057	4.646	5.890	1.970	4	6.249	7.156	9.072	1.279
5	3.549	4.023	5.017	2.613	5	5.195	5.889	7.343	1.785
6	3.206	3.604	4.435	3.286	6	4.520	5.082	6.253	2.330
7	2.957	3.303	4.019	3.981	7	4.050	4.524	5.506	2.906
8	2.768	3.074	3.707	4.695	8	3.705	4.115	4.962	3.507
9	2.618	2.895	3.462	5.462	9	3.440	5.803	4.548	4.130
10	2.497	2.750	3.265	6.169	10	3.229	3.555	4.222	4.771
11	2.397	2.630	3.104	6.924	11	3.058	3.354	3.959	5.428
12	2.312	2.528	2.968	7.690	12	2.915	3.188	3.742	6.099
13	2.240	2.442	2.852	8.464	13	2.795	3.047	3.559	6.782
14	2.177	2.367	2.752	9.246	14	2.692	2.927	3.403	7.477
15	2.122	2.302	2.665	10.035	15	2.603	2.823	3.269	8.181
16	2.073	2.244	2.588	10.831	16	2.524	2.732	3.151	8.895
17	2.029	2.192	2.520	11.633	17	2.455	2.652	3.048	9.616
18	1.990	2.145	2.458	12.442	18	2.393	2.580	2.956	10.346
19	1.954	2.103	2.403	13.254	19	2.337	2.516	2.874	11.082
20	1.922	2.065	2.352	14.072	20	2.287	2.458	2.799	11.825
21	1.892	2.030	2.307	14.894	21	2.241	2.405	2.733	12.574
22	1.865	1.999	2.265	15.719	22	2.200	2.357	2.671	13.329
23	1.840	1.969	2.226	16.548	23	2.162	2.313	2.615	14.088
24	1.817	1.942	2.191	17.382	24	2.126	2.272	2.564	14.853
25	1.795	1.917	2.158	18.218	25	2.094	2.235	2.516	15.623
26	1.775	1.893	2.127	19.058	26	2.064	2.200	2.472	16.397
27	1.757	1.871	2.098	19.900	27	2.035	2.168	2.431	17.175
28	1.739	1.850	2.071	20.746	28	2.009	2.138	2.393	17.957
29	1.723	1.831	2.046	21.594	29	1.985	2.110	2.358	18.742
30	1.707	1.813	2.023	22.444	30	1.962	2.083	2.324	19.532
31	1.692	1.796	2.001	23.298	31	1.940	2.059	2.293	20.324
32	1.679	1.780	1.980	24.152	32	1.920	2.035	2.264	21.120
33	1.665	1.764	1.960	25.010	33	1.900	2.013	2.236	21.919
34	1.653	1.750	1.941	25.870	34	1.882	1.992	2.210	22.721
35	1.641	1.736	1.923	26.731	35	1.865	1.973	2.185	23.525
36	1.630	1.723	1.906	27.594	36	1.848	1.954	2.162	24.333
37	1.619	1.710	1.890	28.460	37	1.833	1.936	2.139	25.143
38	1.609	1.698	1.875	29.327	38	1.818	1.920	2.118	25.955
39	1.599	1.687	1.860	30.196	39	1.804	1.903	2.098	26.770
40	1.590	1.676	1.846	31.066	40	1.790	1.887	2.079	27.587
41	1.581	1.666	1.833	31.938	41	1.777	1.873	2.060	27.406
42	1.572	1.656	1.820	32.812	42	1.765	1.859	2.043	29.228
43	1.564	1.646	1.807	33.686	43	1.753	1.845	2.026	30.051
44	1.556	1.637	1.796	34.563	44	1.742	1.832	2.010	30.877
45	1.548	1.628	1.784	35.441	45	1.731	1.820	1.994	31.704
46	1.541	1.619	1.773	36.320	46	1.720	1.808	1.980	32.534
47	1.534	1.611	1.763	37.200	47	1.710	1.796	1.965	33.365
48	1.527	1.603	1.752	38.082	48	1.701	1.785	1.952	34.198
49	1.521	1.596	1.743	38.965	49	1.691	1.775	1.938	35.032

BIBLIOGRAFIA

- BRAVO, P.C. Sampling inspection by variables with know variance. Bulletin in Applied Statistics, 7, : 203-22, 1980.
- \_\_\_\_\_. Sampling plans by variables with double specification limits. In: WORKSHOP ON STATISTICAL QUALITY CONTROL, 2. University of Kent at Canterbury, 1983.
- \_\_\_\_\_ & WETHERILL, G.B. The matching of sampling plans and the design of double sampling plans. Journal of Research Statistics Society, A, 143, p. 49-67.
- BURR, I.W. Average sample number under curtailed or truncated sampling. Ind. Quality Control, p. 5-7. Feb. 1957.
- CAMERON, J.M. Tables for constructing and for computing the operating characteristics of single - sampling plans. Quality Progress, 7, (9): 17-9, 1974.
- CHIU, W.K. Economic design of attribute control charts. Technometrics, 17, : 81-7, 1975.
- \_\_\_\_\_ & Wetherill, G.B. A simplified science for the economic design of  $\bar{X}$ -charts. Journal of Quality Technology, 6, : 63- 9 , 1974.
- DODGE, H.F. & ROMIG, H.G. Sampling inspection tables, single and double sampling. 2.ed. New York, J.Wiley, 1959.
- DUNCAN, A.J. The economic design of p-charts to mantain current control of a process: some numerical results. Technometrics, 20, : 235-43, 1978.

- \_\_\_\_\_. The economic design of  $\bar{X}$ -charts used to maintain current control of a process. Journal of American Statistics Association, 51, : 228-42, 1956.
- \_\_\_\_\_. Quality control and industrial statistics, 4<sup>ed</sup>. Homewood, Il., R.D. Irwin, 1974.
- FEIGENBAUM, A.V. Total quality control. New York , McGraw Hill, 1961.
- GRANT, E.L. Statistical quality control. 3.ed. New York, McGraw-Hill, 1964.
- GUENTHER, W.C. Sampling inspection in statistical quality control. high Wycombe C. Griffin, 1977.
- HAMAKER, H.C. Acceptance sampling for percent de defective by variables and by attributes. Journal of Quality Technology. 11 : 139-48, 1979.
- HILL, I.D. Modified control limits. Applied Statistics, 5 : 12-9, 1956.
- JURAN, J.M. Quality control handbook, 3.ed. New York, McGraw-Hill, 1974.
- \_\_\_\_\_ & GRYNA, F.M. Quality planning and analysis. New York , McGraw Hill, 1970.
- LIEBERMAN, G.J. & RESNIKOFF, G.J. Sampling plans for inspection by variables. Journal of American Statistics Association, 50 : 457-516, 1955.
- LOURENÇO FILHO, R.C.B. Controle estatístico de qualidade. Rio de Janeiro. Ao Livro Técnico S.A., 1964.

PALMER, C.F. Controle total de qualidade  
cher, 1974.

E. Blu-

SCHILLING, E.G; & JOHNSON, L.I. Tables for the construction of mat  
ched single, double and multiple sampling plans with application  
to MIL-STD-105D. Journal of Quality Technology, 12 : 220-9 ,  
1980.

WALD, A. Sequential analysis. , J. Wiley, 1947.

WETHERILL, G.B. Sampling inspection and quality control. 2.ed.  
Chapman and Hall, 1977.