



INFLUÊNCIA DO PADRÃO DE RADIAÇÃO NA INVERSÃO DA FORMA COMPLETA DA ONDA BASEADA NOS MÉTODOS DO GRADIENTE

Adna Grazielly Paz de Vasconcelos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Luiz Landau

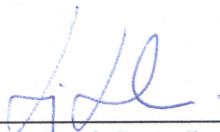
Rio de Janeiro
Março de 2018

INFLUÊNCIA DO PADRÃO DE RADIAÇÃO NA INVERSÃO DA FORMA
COMPLETA DA ONDA BASEADA NOS MÉTODOS DO GRADIENTE

Adna Grazielly Paz de Vasconcelos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
CIVIL.

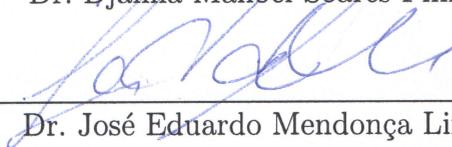
Examinada por:



Prof. Luiz Landau, D.Sc.



Dr. Djalma Manoel Soares Filho, D.Sc.



Dr. José Eduardo Mendonça Lira, D.Sc.



Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.



Dr. Luiz Alberto Santos, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MARÇO DE 2018

Vasconcelos, Adna Grazielly Paz de

Influência do padrão de radiação na inversão da forma completa da onda baseada nos métodos do gradiente/Adna Grazielly Paz de Vasconcelos. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XIV, 94 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Luiz Landau

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 71 – 80.

1. *Full-waveform inversion*. 2. Padrão de radiação. 3. Derivadas de Fréchet. I. Landau, Luiz. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*Gratidão àqueles que se fizeram
mestres no meu caminho, seja
na vida pessoal ou acadêmica.*

Agradecimentos

É nesta hora que nos damos conta de que vencemos mais uma etapa e que a batalha ainda continua, com uma maior e mais forte esperança. Ofereço toda minha gratidão a Deus por sua infalível proteção concedida ao longo de toda esta trajetória, e por ter me dado forças para nunca desistir de lutar em meio aos desafios.

À minha família, de sangue e de coração, que, quando orgulhosos das minhas conquistas e esperançosos no meu potencial, se fizeram motivo para que eu desse mais um passo. Em especial à minha mãe, Socorro Paz, pela sua incansável luta para educar e proteger e por seu esforço em superar a distância e estar sempre presente, assim como meu irmão Lucas Paz. Ao meu pai e avô, Gabriel Ferreira, por me acolher como filha, amar-me até o final da sua missão e por deixar-me a educação como maior herança.

Meus sinceros agradecimentos aos meus orientadores. Ao Professor Luiz Landau, pelo acolhimento, e ao Doutor Djalma Soares, por ter confiado a mim o dever de empenhar-me no desenvolvimento de suas ideias brilhantes. Não esquecendo do Professor César Nogueira e família, pela contribuição na minha formação.

Aos antigos, e sempre presentes, amigos que fiz durante a graduação, em especial à Jeniffer Martins, com quem dividi bons e maus momentos sempre repletos de palavras amigas, e Marianna Dantas, que esteve sempre por perto neste último ano. A todos os amigos que fiz durante o curso de mestrado, em especial à Halina Salles, Alex Duarte e Leonardo Mendonça, pelas boas energias, alegrias compartilhadas e, sobretudo, por não me permitir sentir-me sozinha.

À Luana Nobre pela amizade construída e cultivada diariamente e ao Carlos Henrique por todo carinho e atenção e pelas discussões apaixonantes, diga-se de passagem, que me engrandecem como profissional. Às flores Alyne Duarte, Carol Dias e Lizianne Medeiros e ao Inácio Borges, por tornar o dia-a-dia mais leve e sempre cheio de ternura e alegria. Aos colegas Bruno Silva e Charlan Dellon, pelo companheirismo e pela valiosa participação no meu aprendizado e no desenvolvimento deste trabalho.

Grata pelas colaborações dos membros da banca examinadora.

A toda a equipe do Lab2M, pela infraestrutura e companheirismo diário, e à CAPES pelo financiamento à pesquisa.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

INFLUÊNCIA DO PADRÃO DE RADIAÇÃO NA INVERSÃO DA FORMA COMPLETA DA ONDA BASEADA NOS MÉTODOS DO GRADIENTE

Adna Grazielly Paz de Vasconcelos

Março/2018

Orientador: Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

A recuperação de múltiplas classes de parâmetros através da inversão da forma completa da onda (*full-waveform inversion* – FWI) apresenta problemas associados ao desbalanceamento das direções de atualização do gradiente do funcional objetivo, em virtude de interferências entre respostas oriundas de diferentes classes de parâmetros. A análise das derivadas de Fréchet e do padrão de radiação de cada classe de parâmetros apresenta-se como alternativa ao alto custo computacional da Hessiana. O objetivo deste trabalho é avaliar a sensibilidade da inversão FWI por meio da análise da distribuição de amplitudes de campos espalhados em função do ângulo de espalhamento, para modelos elásticos homogêneos e acústicos não homogêneos, baseados no Marmousi 2D. Os resultados mostraram que, para modelos heterogêneos, os padrões de radiação diferem consideravelmente daqueles descritos na literatura para modelos homogêneos. O padrão de radiação é função da parametrização em questão e do modelo de fundo e, por este motivo, é reiteradamente modificado durante o processo de inversão. Assim como o padrão de radiação, as amplitudes das derivadas de Fréchet para os modelos heterogêneos não exibem a mesma distribuição apresentada por modelos homogêneos. Dessa forma, conclui-se que os padrões de radiação e as respectivas derivadas de Fréchet, quando avaliados em modelos não homogêneos, podem auxiliar na definição de estratégias de processamento ao longo da inversão multiparamétrica. Com isso, é possível quantificar a sensibilidade do dado observado a diferentes propriedades físicas, reduzindo a interferência entre as respostas e favorecendo a iluminação nas regiões de interesse econômico.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

INFLUENCE OF THE RADIATION PATTERN ON THE FULL-WAVEFORM INVERSION APPLYING GRADIENT-BASED METHODS

Adna Grazielly Paz de Vasconcelos

March/2018

Advisor: Luiz Landau

Department: Civil Engineering

The recovery of multiple classes of parameters through full-waveform inversion (FWI) presents problems related with unbalanced update directions of the misfit functional gradient, due to crosstalk between different classes of parameters. The analysis of Fréchet derivatives and radiation pattern of each parameter class is presented as an alternative to the Hessian due to its high computational cost. This work aims to evaluate the sensitivity of FWI by analyzing the amplitude distribution of scattered fields as a function of the scattering angle, for elastic homogeneous and acoustic non-homogeneous models. The results showed that, for non-homogeneous models, the radiation patterns differ considerably from those presented in the literature for homogeneous models. The radiation pattern depends on the parameterization and background model, then it is repeatedly modified during inversion. Analogous to the radiation pattern, the amplitudes of the Fréchet derivatives for non-homogeneous models do not exhibit the same distribution observed for homogeneous models. As a consequence, the radiation patterns and their Fréchet derivatives, when evaluated in non-homogeneous models, could support the definition of a suitable data-driven workflow for multiparameter FWI. Thus, it is possible to measure the sensitivity of the observed data to different physical properties, reducing the crosstalk between parameters and improving the subsurface illumination in target area.

Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	5
1.2 Estrutura da dissertação	6
2 O Método Sísmico	8
2.1 Método Sísmico de Reflexão	12
2.1.1 Aquisição	12
2.1.2 Processamento	12
2.1.3 Interpretação	16
3 Inversão da forma completa da onda	17
3.1 Formulação do Problema Direto	18
3.2 Formulação do Problema Inverso	19
3.3 Inversão FWI	22
3.3.1 Cálculo do funcional objetivo	25
3.3.2 Cálculo do gradiente e Hessiana	26
3.3.3 Inversão FWI como um problema de otimização	30
3.4 Inversão FWI monoparamétrica <i>versus</i> multiparamétrica	34
3.4.1 Formulação matemática da inversão multiparamétrica	38
4 Análise de sensibilidade	40
4.1 Derivadas de Fréchet	40
4.2 Aproximação de Born	42
4.3 Análise de sensibilidade	46
4.3.1 λ , μ e ρ	48
4.3.2 V_p , V_s e ρ	50

4.3.3	I_p, I_s e ρ	53
5	Resultados e Discussões	56
5.1	Modelagem da equação acústica	56
5.2	Inversão FWI acústica	58
6	Conclusões e Perspectivas	69
	Referências Bibliográficas	71
A	Derivadas de Fréchet para o caso acústico	81
A.1	Equação acústica	81
A.2	Dedução das derivadas de Fréchet	81
A.2.1	K e ρ	81
A.2.2	V_p	83
B	Derivadas de Fréchet para o caso elástico	85
B.1	Equação da elastodinâmica	85
B.2	Dedução das derivadas de Fréchet	86
B.2.1	μ, λ e ρ	89
B.2.2	V_p, V_s e ρ	90
B.2.3	I_p, I_s e ρ	92

Lista de Figuras

2.1	Precisão de atributos sísmicos obtidos a partir de medidas tomadas em superfície em função do número de onda. Adaptado de: CLAERBOUT (1984).	13
3.1	Fluxograma que descreve a aplicação de (a) problemas diretos e (b) inversos para a modelagem sísmica. Em (a) tem-se o processo de obtenção do sismograma a partir de um modelo geológico conhecido e em (b) tem-se o processo de estimativa do modelo geológico a partir do sismograma. Adaptado de: MANTILHA (2002).	21
3.2	Esquema de salto de ciclo em inversão FWI. A linha sólida representa o dado observado de período T em um funo do tempo. A linha tracejada superior representa o dado modelado fora de fase, com atraso de tempo superior a meio período ($T/2$). A linha tracejada inferior representa o dado modelado em fase, com atraso de tempo inferior a meio período ($T/2$). Adaptado de: VIRIEUX e OPERTO (2009).	24
3.3	Ilustração do método multiescala aplicado para um problema não linear. O quadro (a) ilustra um funcional objetivo unidimensional e os quadros (b) e (c) ilustram o mesmo funcional objetivo em comprimentos de escala decrescentes. O método multiescala aplicado a um funcional de escala mais curta, tal como o quadro (c), consegue encontrar o mínimo local apenas quando encontra-se próximo ao modelo inicial, enquanto quando aplicado a um funcional de escala mais longa, tal como o quadro (a), consegue encontrar o mínimo global independentemente do modelo inicial. Adaptado de: BUNKS <i>et al.</i> (1995).	25
3.4	(a) Modelo real e (b) modelo inicial utilizando para cálculo do gradiente.	28
3.5	Sismogramas (sem onda direta) dos modelos: (a) real e (b) inicial e (c) resíduo.	29
3.6	Gradiente da primeira iteração calculado pelo método adjunto, para um tiro no centro do modelo.	29

4.1	Modelo verdadeiro \mathbf{m} , obtido a partir do modelo Hess original.	43
4.2	Modelos (a) de velocidade de fundo \mathbf{m}_0 e (b) de refletividade $\Delta\mathbf{m}$, obtidos a partir do modelo verdadeiro.	44
4.3	Campos (a) de fundo \mathbf{u}_0 e (b) espalhado \mathbf{u}_{sct} , propagando-se no modelo de velocidades de fundo \mathbf{m}_0	44
4.4	Esquema de espalhamentos simples e múltiplos. Adaptado de: OPERTO (2012).	45
4.5	Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação para uma perturbação de 1% nas classes de parâmetros: (a) λ (em azul), (b) μ (em vermelho) e (c) ρ (em verde), respectivamente.	49
4.6	Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet, em superfície, para uma variação de 1% para as classes de parâmetros λ , μ e ρ	49
4.7	Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação para uma perturbação de 10% nas classes de parâmetros: (a) V_p (em azul), (b) V_s (em vermelho) e (c) ρ (em verde), respectivamente.	51
4.8	Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet, em superfície, para uma variação de 1% para as classes de parâmetros V_p , V_s e ρ	52
4.9	Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação para uma perturbação de 10% nas classes de parâmetros: (a) I_p (em azul), (b) I_s (em vermelho) e (c) ρ (em verde), respectivamente.	54
4.10	Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet, em superfície, para uma variação de 1% para as classes de parâmetros I_p , I_s e ρ	55
5.1	Modelo real de velocidades, baseado no Marmousi 2D, utilizado para modelagem do dado sintético.	57
5.2	Modelo inicial de velocidades suavizado, baseado no Marmousi 2D, utilizado na inversão.	58
5.3	Comparação entre os sismogramas do modelo real e inicial, para um tiro no ponto central da superfície de aquisição, em função do afastamento fonte-receptor.	59
5.4	Comparação entre os sismogramas do modelo real e intermediário, para um tiro no ponto central da superfície de aquisição, em função do afastamento fonte-receptor.	60
5.5	Comparação entre os sismogramas do modelo real e final, para um tiro no ponto central da superfície de aquisição, em função do afastamento fonte-receptor.	61
5.6	Modelo de velocidades intermediário estimado pela inversão acústica, para frequência de corte de 14Hz.	61

5.7	Modelo de velocidades final estimado pela inversão acústica, para frequência de corte de 30Hz, com indicação das seções dos perfis de velocidade vertical (A-A') e horizontal (B-B').	62
5.8	Perfil de velocidades ao longo da seção vertical (A-A') definida na Figura 5.7, que atravessa a região do reservatório, com profundidade indicada pela linha tracejada.	62
5.9	Perfil de velocidades ao longo da seção horizontal (B-B') definida na Figura 5.7, que atravessa a região do reservatório, com extensão horizontal delimitada pela linha tracejada.	63
5.10	Ilustração do esquema de particionamento dos modelos. Em (a) e (b) são apresentados as Partes 1 e 2 do modelo real de velocidades, com indicação do ponto espalhador de cada modelo resultante, posicionado no ponto central do modelo e representado por uma estrela preta. . .	63
5.11	Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação do campo espalhado para uma perturbação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde) e inicial (em vermelho) - (a) Parte 1 e (b) Parte 2.	64
5.12	Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação do campo espalhado para uma perturbação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde) e intermediário (frequência de corte de 14 Hz) (em amarelo) - (a) Parte 1 e (b) Parte 2.	65
5.13	Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação do campo espalhado para uma perturbação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde) e final (frequência de corte de 30 Hz) (em azul) - (a) Parte 1 e (b) Parte 2.	65
5.14	Derivada de Fréchet do campo de pressão para uma perturbação de 10% na velocidade compressional do modelo de velocidades inicial: (a) Parte 1 e (b) Parte 2.	66
5.15	Derivada de Fréchet do campo de pressão para uma perturbação de 10% na velocidade compressional do modelo de velocidades intermediário (frequência de corte de 14 Hz): (a) Parte 1 e (b) Parte 2.	66
5.16	Derivada de Fréchet do campo de pressão para uma perturbação de 10% na velocidade compressional do modelo de velocidades final (frequência de corte de 30 Hz): (a) Parte 1 e (b) Parte 2.	67

5.17 Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet do campo de pressão, registrada em superfície, para uma variação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde), inicial (em vermelho), intermediário (em amarelo) e final (em azul) - Parte 1.	68
5.18 Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet do campo de pressão, registrada em superfície, para uma variação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde), inicial (em vermelho), intermediário (em amarelo) e final (em azul) - Parte 2.	68

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros da modelagem acústica.	58
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Desde a antiguidade, o petróleo vem sendo utilizado por diversas civilizações como matéria-prima para construção civil, quando era empregado em pavimentação de estradas e construção de pirâmides, para impermeabilização de embarcações, para fins bélicos e até mesmo religiosos, para embalsamar os mortos no antigo Egito (THOMAS, 2001).

Ao passar dos séculos, o petróleo encontrou aplicações nos mais variados campos, tornando-se um insumo vital, atuando como principal fonte de energia nos dias atuais e como matéria-prima para indústria civil, farmacêutica, têxtil e inúmeras outras. Com isso, a busca por hidrocarbonetos, anteriormente encontrado em exsudações naturais e em pequenas quantidades, aumentou consideravelmente, demandando o aperfeiçoamento das tecnologias de exploração.

A geofísica de exploração é uma ciência que busca fornecer informações sobre as propriedades físicas da subsuperfície da Terra, a partir de campos naturais ou campos gerados artificialmente (KEAREY *et al.*, 2002). Muitos dos métodos de exploração geofísica, desenvolvidos durante o último século, baseiam-se na interpretação de ondas sísmicas, que percorrem a subsuperfície e retornam carregando informações sobre as propriedades físicas da Terra (MÉTIVIER *et al.*, 2013).

Dentre os levantamentos geofísicos empregados na indústria do petróleo, o método sísmico destaca-se pela sua eficiência em reproduzir a geologia de subsuperfície (TELFORD *et al.*, 1990). Por meio do processamento de dados registrados em superfície, os levantamentos sísmicos tem por objetivo fornecer mapas das propriedades da subsuperfície, permitindo localizar e caracterizar os reservatórios de hidrocarbonetos (SHERIFF e GELDART, 1995).

Através de propriedades físicas obtidas a partir da prospecção sísmica, a caracterização de reservatórios busca identificar jazidas de hidrocarbonetos e sua respectiva litologia, saturação e pressão de fluidos, razão gás-óleo, propriedades geomecânicas, dentre outras (WANG, 2001). Os mapas de distribuição de

propriedades, bem como perfis de poço, dados geoquímicos e testes de pressão, são posteriormente utilizados na construção do modelo geológico do reservatório para testes de simulação de escoamento de fluidos. As simulações colaboram para monitoramento da produção, otimização da distribuição de poços produtores e injetores e previsão de comportamento de escoamento multifásico. Em consequência disto, pode-se estimar a viabilidade econômica do campo e reduzir os riscos exploratórios.

O método sísmico, assim como outros levantamentos geofísicos, caracteriza-se por ser um problema inverso, no qual busca-se determinar as propriedades físicas da subsuperfície através dos dados registrados ao longo de uma superfície de observação. Por meio do processamento dos dados sísmicos, constroem-se mapas de propriedades físicas que contribuem para interpretação da geologia de subsuperfície.

Inicialmente, a exploração comercial de campos de jazidas era realizada empregando tecnologias mais simples no que se refere à aquisição e processamento dos dados. Um breve histórico pode ser encontrado em SHERIFF e GELDART (1995). O aumento da demanda por hidrocarbonetos acarretou na escassez das reservas associados a condições geológicas favoráveis, tais como jazidas localizadas próximo à superfície e que apresentavam exsudações naturais. Como consequência, o progresso da prospecção sísmica foi impulsionado a fim de se explorar formações geológicas de mais alta complexidade e atender às demandas da indústria.

As reservas do pré-sal brasileiro, descobertas no último século, atestam a aplicabilidade do método sísmico para descoberta de reservas geologicamente complexas, tal como a Bacia de Santos, localizada sob camadas de rochas que atingem 4 quilômetros de espessura, atingindo lâminas de água de cerca de 3 quilômetros (MOHRIAK *et al.*, 2008). Acima dos alvos exploratórios, encontram-se corpos salinos de cerca de 2 quilômetros de espessura, que provocam ruídos de grande amplitude e baixa frequência e dificultam o imageamento das regiões próximas ao corpo de sal (LIU *et al.*, 2011).

Em suma, o aumento da complexidade das reservas, assim como o aperfeiçoamento das tecnologias de aquisição sísmica e das ferramentas computacionais, permitiram o desenvolvimento de novas metodologias de imageamento sísmico (VIRIEUX e OPERTO, 2009). As técnicas de imageamento mais refinadas, por sua vez, acabaram por demandar modelos de velocidades de alta resolução.

Em relação ao fluxo de processamento convencional¹ de dados sísmicos, as técnicas extensamente empregadas para análise de velocidades pré-empilhamento admitem aproximações, tais como o traço de raios, que não são capazes de

¹O processamento convencional descrito por YILMAZ (2001) envolve as seguintes etapas: deconvolução do sinal, análise de velocidade, empilhamento e migração.

reproduzir o fenômeno de propagação de ondas em meios complexos (MACEDO, 2014). Para áreas que apresentam fortes contrastes laterais de velocidade, superfícies refletoras inclinadas, bem como intrusões salinas, tal qual as formações do pré-sal, as metodologias de análise de velocidade baseadas na família de ponto médio comum (*common midpoint* – CMP), mostram-se ineficientes (SANTOS, 2013).

Dentre as metodologias de análise de velocidade mais recentes, a inversão da forma completa da onda (*full-waveform inversion* – FWI) vem se destacando em relação às demais em virtude da sua alta capacidade de imagear estruturas complexas, fornecer modelos de maior resolução e recuperar inúmeras propriedades físicas do meio. Enquanto as técnicas de imageamento convencionais fornecem apenas uma imagem qualitativa das interfaces das estruturas geológicas, a inversão FWI permite interpretar quantitativamente as propriedades de camadas (MÉTIVIER *et al.*, 2013), possibilitando a utilização do próprio modelo como uma ferramenta para interpretação da geologia local (SANTOS, 2013).

A inversão FWI vem se sobressaindo pelo fato de reproduzir a aquisição de forma mais realista, empregando a equação completa da onda, além de utilizar todo conteúdo de informações do traço sísmico, tal como amplitude e tempo de trânsito (VIRIEUX *et al.*, 2014). Por meio da minimização do erro entre os dados observados e modelados, a inversão FWI tem o poder de fornecer imagens mais precisas da subsuperfície, quando comparada à tomografia de tempo de trânsito (*traveltime tomography* – TTT), por exemplo (MÉTIVIER *et al.*, 2013; PLESSIX e CAO, 2011).

De acordo com VIRIEUX e OPERTO (2009), a grande vantagem da inversão FWI frente às outras metodologias de análise de velocidades está no fato de incluir todos os modos de ondas registrados no processo de otimização, proporcionando um alto desempenho para áreas de geologia complexa. Todavia, atreladas ao alto desempenho dessa técnica, existem algumas desvantagens: o alto custo computacional envolvido na solução do problema inverso, o mau condicionamento e a não linearidade inerentes ao problema e proporcionais à quantidade de parâmetros envolvidos, dentre outros.

Em virtude da inviabilidade da solução exata do problema inverso, este caracteriza-se por ser um problema de otimização local, baseado no emprego do gradiente de um funcional objetivo. O cálculo do gradiente enfrenta problemas relacionados à alta demanda computacional, em função da quantidade de modelagens necessárias para cálculo de cada um dos componentes da derivadas de Fréchet.

Em função disso, o cálculo dos componentes da matriz sensibilidade é evitado empregando a formulação do método adjunto, desenvolvida para calcular eficientemente o gradiente de um funcional em relação modelo de parâmetros.

LAILLY (1983) e TARANTOLA (1984) foram os precursores da aplicação do método adjunto à inversão da forma completa da onda e PLESSIX (2006) apresentou uma revisão da técnica para calcular o gradiente de um funcional objetivo no âmbito da geofísica. De acordo com o método adjunto, o gradiente é dado, basicamente, pela correlação cruzada entre os campos de pressão incidente e residual retropropagado.

Esta abordagem evita o cálculo explícito das componentes da matriz sensibilidade, entretanto, as derivadas de Fréchet são ingredientes essenciais na avaliação da sensibilidade do dado sísmico à cada uma das classes de parâmetros que caracterizam o meio e, por conseguinte, são fundamentais quando se trata da convergência do problema.

Em termos sísmicos, para alguns casos a Terra não é adequadamente descrita apenas pelas velocidades compressoriais, desta forma é preciso incorporar quanto mais detalhes for possível, acarretando um aumento na não linearidade do problema e, conseqüentemente, no custo computacional da solução. Segundo TARANTOLA (1986) e OPERTO *et al.* (2013), a não linearidade da inversão FWI decorre, essencialmente, da interferência no campo de ondas causada pela perturbação de diferentes classes de parâmetros.

Uma forma de contornar o desbalanceamento entre as respostas sísmicas de cada classe de parâmetros, consiste em empregar a matriz Hessiana na solução iterativa do problema. VIRIEUX e OPERTO (2009) e CARNEIRO *et al.* (2017) destacaram que a Hessiana assegura que as direções de atualização de diferentes classes de parâmetros sejam adequadamente escaladas, mantendo as unidades físicas de cada classe e garantindo a convergência do algoritmo.

Ao empregar a formulação de Newton, a solução do problema inverso requer o cálculo da inversa da Hessiana para obtenção de bons resultados, sobretudo quando são incorporadas múltiplas classes de parâmetros. Todavia, a construção explícita da matriz Hessiana e sua inversa, para problemas de grande porte, ultrapassa a capacidade computacional atual e, por isso, o seu cálculo é evitado. Uma das alternativas empregadas para quantificar a sensibilidade de diferentes classes de parâmetros baseia-se no estudo dos padrões de espalhamento da onda difratada por cada uma das classes de parâmetros envolvidas no processo e, conseqüentemente, das derivadas de Fréchet.

A derivada de Fréchet representa uma medida da sensibilidade da inversão sísmica em relação à cada conjunto de propriedades físicas e pode ser interpretada como a resposta do campo de onda decorrente da perturbação do parâmetro do modelo. Sob esse ponto de vista, as componentes da derivada de Fréchet equivalem às amplitudes do campo de onda espalhado, registradas em superfície. Tais amplitudes são funções do ângulo de espalhamento e à essa relação dá-se o nome de padrão de radiação. O padrão de radiação do campo difratado fornece um indicativo

da direção de propagação preferencial da energia espalhada por determinada classe de parâmetro.

A sensibilidade da inversão sísmica pode ser estimada através dos padrões de espalhamento de cada classe de parâmetro, proporcionando uma visão da resposta dos campos de onda secundários em função da perturbação do modelo. Dessa forma, as derivadas de Fréchet, que representam o registro do campo espalhado em superfície, são relevantes na avaliação da eficiência da parametrização adotada e, também, na definição da geometria de aquisição (PLESSIX e CAO, 2011).

Ainda que apresente-se como opção para avaliação da sensibilidade da inversão da forma completa da onda, os padrões de radiação apresentados na literatura são construídos levando-se em conta modelos homogêneos. Por este motivo, os estudos já desenvolvidos podem não se aplicar a casos reais, representados por modelos com grandes contrastes de propriedades. Além disso, os modelos vão sendo constantemente atualizados ao longo do processo de minimização, para melhor se ajustarem aos dados observados. Sabendo-se que a distribuição de energia ao longo da inversão varia em função do modelo de fundo, estudar tal distribuição, no sentido de favorecer a iluminação de áreas de interesse, é de vital importância para inversão da forma completa da onda.

1.1 Objetivos

Diante da crescente necessidade de se construir modelos cada vez mais robustos e determinar não só as propriedades acústicas do meio, a inversão FWI vem ganhando destaque por sua eficiência em recuperar massa específica, propriedades elásticas e anisotrópicas, extremamente úteis para caracterização litológica e de fluidos de reservatórios petrolíferos.

A desvantagem da introdução de múltiplas propriedades no processo de inversão consiste no alto custo computacional da solução do problema direto e, para dados reais, no cálculo impraticável da inversa da matriz Hessiana, vital para o balanceamento das direções de atualização de algoritmos de inversão baseados no gradiente. Diante do exposto, o foco principal deste trabalho é estudar a sensibilidade da inversão FWI baseada nos métodos que utilizam o gradiente de um funcional objetivo para obtenção de modelos de propriedades físicas da subsuperfície a partir de dados sísmicos, evitando o cálculo exaustivo da matriz Hessiana.

A análise da sensibilidade do campo de ondas incidente foi feita empregando as aproximações de Born de primeira ordem, isto é, atribuindo o surgimento de espalhamentos, ou campos secundários, à heterogeneidades nos modelos de propriedades físicas. Os campos secundários gerados por cada classe de parâmetros possuem um comportamento de espalhamento próprio e tal comportamento tem

influência direta sob o particionamento da energia difratada devido a alteração do parâmetro.

Através do estudo dos padrões de radiação de campos espalhados e, via de regra, das derivadas de Fréchet, buscou-se avaliar qualitativa e quantitativamente, a sensibilidade da inversão da forma completa da onda baseada nos métodos do gradiente, para três diferentes parametrizações do caso elástico isotrópico bidimensional em modelos homogêneos

Por fim, este trabalho também tem como objetivo implementar a inversão FWI acústica e avaliar a evolução da distribuição de energia frente à alteração do modelo de velocidades compressoriais baseado no modelo Marmousi 2D durante o processo de inversão. O objetivo é avaliar a variação do comportamento da frente de onda espalhada ao longo do processo de minimização em virtude da atualização do modelo de velocidades compressional, e, conseqüentemente, das amplitudes das derivadas de Fréchet registradas em superfície.

Com isso, busca-se quantificar o direcionamento da energia para diferentes escalas de detalhe e diferentes modelos de fundo. Através desta metodologia, será possível ter um maior controle sobre as estratégias de processamento que se desejam adotar ao longo da inversão, para mitigar os efeitos da interferência entre respostas de diferentes parâmetros e maximizar a cobertura das regiões de interesse.

1.2 Estrutura da dissertação

Este trabalho está organizado em seis capítulos, apresentando, de modo geral, uma das dificuldades enfrentadas no processo de inversão da forma completa da onda e uma das alternativas para reduzir os efeitos da não linearidade da inversão FWI.

No presente capítulo encontra-se uma breve introdução do processo de imageamento da subsuperfície da Terra através do emprego de ondas sísmicas, além dos objetivos do trabalho e a estrutura da dissertação.

O Capítulo 2 apresenta, de forma resumida, os fundamentos do levantamento sísmico, largamente empregado na exploração de hidrocarbonetos. Estão descritos alguns aspectos gerais da aquisição, processamento e interpretação dos dados sísmicos. A problemática central da dissertação, relacionada ao imageamento sísmico, está levantada na Seção 2.1.2, onde são apresentados os principais desafios e alternativas encontrados na recuperação de modelos de propriedades físicas que caracterizam a subsuperfície da Terra.

No Capítulo 3 estão revisados alguns dos conceitos teóricos referentes à solução da inversão FWI. Nesta ordem, encontram-se as formulações matemáticas dos problemas direto e inverso, nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente, e na Seção 3.3

encontra-se listada a sequência de metodologias adotadas para solução da inversão FWI, vista como um problema de otimização local, baseada no gradiente de um funcional objetivo. Por fim, na Seção 3.4 apresentam-se os desafios da inversão multiparamétrica, suportados pela formulação matemática.

Por mais que o cálculo explícito das derivadas de Fréchet sejam evitados, as mesmas são tidas como elementos essenciais no processo de inversão FWI. As derivadas de Fréchet são sinais referentes à estruturas geológicas que ainda não foram incluídas no modelo e que atuam como fontes virtuais dos campos espalhados. Diante disso, na Seção 4.1 estão apresentados os conceitos de fonte virtual e seu papel no cálculo das derivadas de Fréchet. As aproximações de Born de primeira ordem, adotadas para linearização do problema, estão descritas na Seção 4.2. Com o objetivo de se avaliar o comportamento da energia difratada por três diferentes combinações de propriedades físicas utilizadas para caracterizar meios elásticos isotrópicos, apresentam-se, ao final do Capítulo 4, os comportamentos de espalhamento do campo de onda incidente para cada umas das sete diferentes classes de parâmetros.

No Capítulo 5 estão apresentados os resultados da inversão acústica do modelo Marmousi 2D. Os modelos inicial, intermediário (modelo final para frequência de corte de 14 Hz) e final (modelo final para frequência de corte de 30 Hz) do processo iterativo foram segmentados em dois, cada um, onde cada fração do modelo representará um cenário de geologia em particular.

Os modelos obtidos foram utilizados para acompanhamento da evolução do padrão de espalhamento de energia, em virtude de uma pequena perturbação no modelos de velocidades compressoriais. Os resultados mostram um caráter de difração do campo de ondas e direcionamento de energia de naturezas diferentes daquelas apresentadas por modelos homogêneos e tomadas como referência para inversão multiparamétrica.

Com isso, pôde-se apresentar no Capítulo 6 as conclusões sobre as estratégias de processamento de dados sísmicos adotadas para mitigar os efeitos da não linearidade do problema, quando da inclusão de múltiplas classes de parâmetros no processo. Também foi proposta uma avaliação contínua do direcionamento da energia difratada buscando, com isso, otimizar a configuração de aquisição e maximizar a captação de energia.

A formulação matemática para dedução das expressões numéricas das derivadas de Fréchet, para duas parametrizações do caso acústico e para três parametrizações do caso elástico isotrópico, foram deixadas para os Apêndices A e B, nesta ordem. Tais expressões serviram de base para obtenção dos padrões de radiação apresentados nos Capítulos 5 e 4, respectivamente.

Capítulo 2

O Método Sísmico

Os primeiros passos para configuração da indústria moderna do petróleo foram dados pelo Coronel Drake, em 1859, quando foi perfurado o primeiro poço de petróleo nos Estados Unidos, no estado da Pensilvânia, com uma profundidade de apenas 21 metros (THOMAS, 2001). O desenvolvimento da indústria automobilística no século XX aumentou a demanda por combustíveis fósseis e estabeleceu definitivamente a relevância do setor petrolífero.

Apesar da tendência mundial de substituição de combustíveis não renováveis por fontes de energia renováveis, *Statistical Review of World Energy* produzida pela *British Petroleum*–BP (2017) apontou os combustíveis fósseis como sendo a principal fonte da matriz energética mundial em 2016. Nesse cenário, o petróleo representa cerca de um terço de toda a energia consumida, seguido pelo carvão mineral e gás natural.

Além do destaque na parte energética, os hidrocarbonetos, em geral, têm grande participação nas indústrias civil, cosmética, farmacêutica, têxtil e até mesmo alimentícia, bem como são empregados na produção de lubrificantes, solventes, produtos de higiene, entre outros.

Em virtude da ampla utilização do petróleo ao longo das últimas décadas, os esforços concentram-se no aprimoramento de tecnologias ligadas ao setor petrolífero, com o objetivo de atender à crescente demanda por derivados de hidrocarbonetos. Para tanto, a geofísica de exploração faz uso de campos naturais ou de campos gerados artificialmente para obter informações a respeito das propriedades físicas da Terra, a fim de prospectar possíveis jazidas de hidrocarbonetos (KEAREY *et al.*, 2002).

De acordo com TELFORD *et al.* (1990), os chamados métodos potenciais fazem uso dos campos naturais das formações rochosas e, baseados em variações não induzidas nas propriedades físicas, buscam indicativos de anomalias associadas a feições geológicas de interesse econômico. Enquanto isso, os métodos baseados em campos artificiais requerem a geração de tais campos para detecção de anomalias.

A geofísica de exploração envolve o registro de medidas diretamente influenciadas pela distribuição de propriedades físicas da Terra em subsuperfície. Tais medições podem ser realizadas de forma direta ou indireta. Uma vez que temos acesso ao meio, podemos quantificar diretamente as propriedades físicas. Todavia, os levantamentos geofísicos objetivam o processo inverso, ou seja, inferir as propriedades a partir da interpretação de medidas indiretas tomadas em superfície para os casos em que a avaliação direta apresenta um alto custo-benefício.

Uma forma de avaliar diretamente as características das rochas se dá através da perfuração de poços, adquirindo informações de caráter local a alto custo. Em contrapartida, KEAREY *et al.* (2002) destacou o método sísmico como ferramenta de longo alcance para estimativa indireta das propriedades de subsuperfície, utilizando campos de ondas gerados artificialmente.

Por esta razão, a prospecção sísmica vem sendo um método de exploração largamente utilizado para busca de recursos naturais e minerais (TELFORD *et al.*, 1990). A integração de levantamentos geofísicos, geológicos, geoquímicos, petrofísicos, dentre outros, permite identificar estrutura e distribuição dos tipos de rochas (SHERIFF e GELDART, 1995). Com isso, é possível identificar feições geológicas características de uma bacia sedimentar e estimar, na região compreendida pela bacia, o local mais adequado para locação de um poço, reduzindo custos e riscos de acidentes.

As primeiras informações de ondas sísmicas registradas em superfície encontraram aplicação no campo da sismologia. Baseada principalmente no tempo de trânsito de ondas sísmicas naturais, a sismologia é a ciência responsável pelo estudo das camadas internas da Terra, suas propriedades físicas e composição. No início do século XX, passou-se a adotar a metodologia para sondagem de jazidas, utilizando, no entanto, ondas geradas artificialmente para predição das propriedades do meio rochoso (TELFORD *et al.*, 1990). Desde então, o método sísmico configura-se como principal ferramenta de exploração geofísica, em virtude da sua enorme gama de aplicações (KEAREY *et al.*, 2002).

Além da fase exploratória, os levantamentos sísmicos vm sendo executados também na fase de produção, com a finalidade de monitorar as atividades e planejar o gerenciamento dos reservatórios. A sísmica 4D vem se mostrando como aplicação chave para fins de monitoramento, na qual a aquisição é reproduzida sob configurações similares, permitindo que as mudanças na saturação de fluidos sejam mapeadas em função do tempo de produção de um campo.

A sísmica 4D tem se tornado uma ferramenta vital para o gerenciamento de reservatórios e está em crescente uso, em particular para monitoramento de campos maduros, onde a maximização da taxa de recuperação é economicamente importante (RAKNES *et al.*, 2014). Além disto, LUMLEY (2001) destacou que o mapeamento

de falhas e fraturas desenvolvidas em um reservatório ao longo da produção permite otimizar as instalações de produção e configurações geométricas dos poços em sistemas de escoamento complexo.

Através da emissão de ondas por meio de uma fonte sísmica, o levantamento sísmico tem como propósito determinar, de maneira indireta, as propriedades físicas das rochas em subsuperfície. Ao propagar-se em um meio composto por materiais distintos, as ondas sofrem reflexão, difração, refração, transmissão e conversão e quando retornam a superfície causam uma perturbação no movimento das partículas. Instrumentos sensíveis a tal movimento são distribuídos ao longo da superfície com objetivo de registrar o tempo de trânsito e a amplitude das ondas refletidas e difratadas.

Cada um dos métodos geofísicos é sensível à uma propriedade física ou a um conjunto delas. O dado sísmico, por sua vez, apresenta sensibilidade à massa específica, aos módulos elásticos e anelásticos, que são funções de outras propriedades físicas da rocha. No decorrer do texto utilizaremos o termo densidade para fazer nos referir à massa específica de um material pois, no contexto geofísico, esse termo é comumente utilizado em substituição à quantidade de massa por unidade de volume de um material. Ao considerar a Terra como um meio elástico e isotrópico, podemos descrevê-la a partir da densidade, do módulo volumétrico e do módulo de cisalhamento, por exemplo.

O módulo de volumétrico K , também denominado módulo de incompressibilidade, descreve a resistência de um material a deformar-se elasticamente em todas as direções quando submetido à pressão hidrostática. Descrito em função dos parâmetros de Lamé, o módulo volumétrico segue a relação abaixo:

$$K = \lambda + \frac{2\mu}{3}, \quad (2.1)$$

onde λ e μ representam os parâmetros de Lamé.

O primeiro parâmetro de Lamé λ , isoladamente, não tem significado físico próprio, todavia, sendo função da incompressibilidade volumétrica e do módulo de rigidez, traduz a resistência do meio a alteração de volume. O segundo parâmetro de Lamé μ , por sua vez, representa o módulo de cisalhamento, ou módulo de rigidez, que implica a resistência de um material à distorção, sem alteração de volume, sob a aplicação de uma tensão cisalhante.

O princípio de um processamento sísmico convencional consiste em estimar as velocidades do meio e, a partir dos registros em superfície, posicionar corretamente as interfaces refletoras através da migração. O produto final do processamento convencional consiste em seções ou volumes migrados, em tempo ou profundidade, que representam um mapa da distribuição do contraste de impedâncias do meio ou

de refletividades.

A impedância I é dada pelo produto entre a velocidade do meio e sua densidade. A refletividade R , por sua vez, é função do contraste de impedâncias da rocha. Ao propagar-se, a onda sofre reflexão nas interfaces de camadas com propriedades físicas diferentes e a amplitude da reflexão é função da variação de impedância entre dois meios. A refletividade está relacionada às impedâncias do meio e quantifica a energia refletida na interface a partir da seguinte equação:

$$R = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} = \frac{(\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1)}{(\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1)}, \quad (2.2)$$

onde I_1 é o coeficiente de impedância da camada superior e I_2 é o coeficiente de impedância da camada inferior, considerando incidência de uma frente de onda plana normal à uma interface de camadas planas horizontais.

A partir dos parâmetros elásticos descritos na Equação 2.1, as velocidades de propagação das ondas sísmicas obedecem as seguintes relações:

$$V_p = \sqrt{\frac{K + (4/3)\mu}{\rho}}, \quad (2.3a)$$

e

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (2.3b)$$

onde V_p representa a velocidade de propagação de ondas compressoriais, ou longitudinais, V_s representa a velocidade de propagação das ondas cisalhantes, ou transversais, e ρ representa a densidade do meio.

As ondas compressoriais propagam-se por deformação uniaxial na mesma direção de propagação da onda e são denominadas ondas primárias, pois tem as maiores velocidades e, portanto, são registradas primeiro. Em contrapartida, as ondas cisalhantes propagam-se por deformação cisalhante em direção perpendicular a direção de propagação da onda e, por este motivo, apenas propagam-se em meios sólidos.

No meio rochoso, as velocidades sísmicas estão associadas a composição mineralógica, textura, grau de compactação, porosidade, pressão de poros, saturação de fluidos das rochas, dentre outras propriedades. Portanto, a construção de um modelo de velocidades que represente o modelo geológico em subsuperfície é fundamental para o processamento dos dados, do mesmo modo que fornecem uma indicação sobre as propriedades petrofísicas e, conseqüentemente, sobre sua litologia (KEAREY *et al.*, 2002).

Diante da necessidade de se determinar as propriedades de subsuperfície, o método sísmico vem sendo largamente empregado na indústria do petróleo, nas fases

de exploração e produção, destacando-se como principal ferramenta exploratória.

2.1 Método Sísmico de Reflexão

Segundo YILMAZ (2001), o método sísmico de reflexão pode ser estruturado em três macro etapas, resumidamente descritas a seguir. São elas: aquisição, processamento e interpretação.

2.1.1 Aquisição

Na etapa de aquisição dos dados, uma grande variedade de fontes artificiais pode ser empregada para geração das ondas sísmicas que percorrem a área de interesse, cada uma com sua particularidade, sobretudo, em relação ao ambiente de aquisição. No entanto, KEAREY *et al.* (2002) destaca que todas os tipos de fontes devem cumprir alguns requisitos mínimos que viabilizam o levantamento dos dados, alguns deles são: nível de energia suficiente para atingir altas frequências² e cobrir a região de interesse, repetibilidade do sinal e segurança durante a sua emissão.

Ao percorrer a subsuperfície, o campo de ondas proveniente da fonte sísmica sofre reflexão, difração, refração, transmissão e conversão em decorrência de descontinuidades nas propriedades físicas do meio rochoso, tais como variações na impedância, oriundas de mudança de litologia ou de fluido saturante, por exemplo. Tais eventos retornam à superfície e são convertidas em sinais elétricos por meio de um receptor. Cada receptor grava, durante o tempo estabelecido para aquisição, a amplitude e o tempo de trânsito a uma taxa de amostragem pré-definida.

Os receptores são dispositivos sensíveis ao movimento das partículas do meio e registram o movimento sob a forma de um traço sísmico. Ao conjunto de traços registrados pelos receptores referente a um tiro dá-se o nome de sismograma. A partir de então, os dados demandam um processamento de forma que os sinais sejam convertidos em modelos de propriedades físicas de subsuperfície, tais como velocidades, refletividades e impedâncias.

2.1.2 Processamento

Em geral, o processamento sísmico convencional consiste nas seguintes etapas básicas: pré-processamento, filtragem, análise de velocidade, correção NMO (*normal-moveout*), empilhamento e migração (YILMAZ, 2001). O objetivo fundamental do processamento é interpretar o sinal como função da distribuição das propriedades em subsuperfície, gerando modelos de propriedades, em tempo ou profundidade, que representem a geologia de subsuperfície.

²Conteúdo de frequência dominante de aproximadamente 30 Hz.

Com relação à fase de processamento, destaca-se a importância da etapa de análise de velocidades, na qual são obtidos os modelos de velocidades para dar seguimento ao processamento convencional. Uma vez que o sucesso das etapas que se seguem está sujeito à precisão dos modelos de velocidades obtidos, é imprescindível empregar metodologias que forneçam modelos confiáveis, sobretudo para áreas de geologia complexa.

Segundo CLAERBOUT (1984), a precisão dos modelos de velocidades obtidos na fase de processamento tem estreita relação com espectro de frequência aplicado, tal como descrito na Figura 2.1. A falta de informação de qualidade no intervalo de frequências intermediária (2 – 10 Hz) pode ser atribuída a dois fatores principais, são eles: a limitação de cobertura e limitação da banda de frequência na aquisição sísmica (JANNANE *et al.*, 1989).

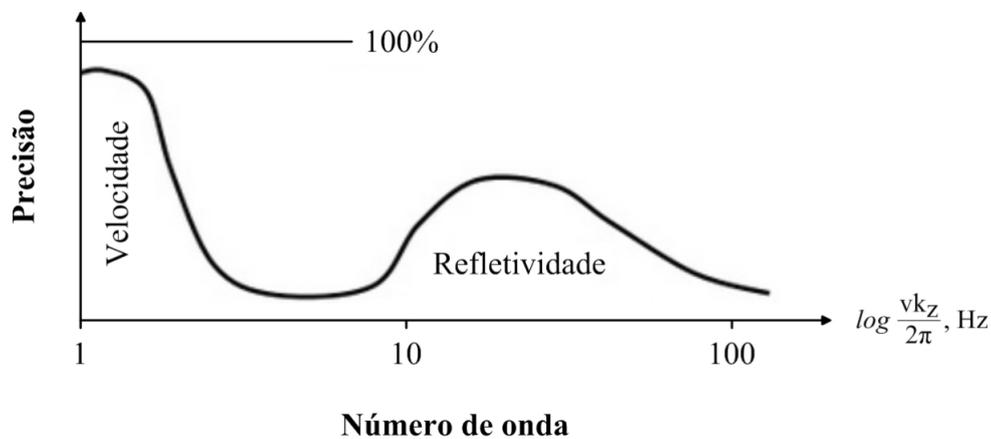


Figura 2.1: Precisão de atributos sísmicos obtidos a partir de medidas tomadas em superfície em função do número de onda. Adaptado de: CLAERBOUT (1984).

De um modo geral, MÉTIVIER *et al.* (2011) descreve o imageamento sísmico convencional em duas etapas, baseadas na escala de trabalho. A maior escala caracteriza-se por ser um problema altamente não linear, que fornece um macromodelo de velocidades a partir de atributos cinemáticos, ou seja, dos tempos de trânsito. O problema seguinte consiste em construir o modelo de refletividade, baseando-se nos atributos dinâmicos, ou seja, nas amplitudes.

Sob o ponto de vista do conceito de imageamento sequencial descrito por BIONDI e ALMOMIN (2014), as componentes cinemáticas de baixa frequência fornecem modelos suaves de velocidade através, por exemplo, da tomografia de tempo de trânsito que serão usados como dado de entrada para a migração. A migração, por sua vez, traduz as informações de amplitude, decorrentes da variação de impedância entre duas camadas, sob a forma de um modelo de refletividade.

A migração sísmica fornece uma imagem das interfaces refletoras, colapsando os eventos de reflexões e difrações presentes nos sismogramas nas suas corretas

posições (YILMAZ, 2001). No entanto, o sucesso da migração depende fortemente do modelo de velocidades gerado na fase anterior, uma vez que este é responsável por determinar a velocidade sísmica das camadas geológicas percorridas pelas ondas sísmicas e posicionar corretamente os refletores.

De acordo com MÉTIVIER *et al.* (2013), esta estratégia de imageamento geralmente é eficiente para alvos geológicos relativamente simples em ambientes de águas rasas, desde que o modelo de velocidades de fundo seja representativo. Como consequência, a migração pode apresentar um desempenho limitado para imageamento de estruturas complexas como domos de sal, zonas do pré-sal, zonas de dobramentos e contrafortes, mostrando-se incapaz de focar corretamente a energia das ondas sísmicas e fornecendo uma imagem incorreta da subsuperfície (VIRIEUX e OPERTO, 2009).

Além disso, segundo MÉTIVIER *et al.* (2013), esse fluxo de trabalho em dois passos apenas fornece a macroestrutura da subsuperfície. No entanto, uma estimativa quantitativa e de alta resolução dos parâmetros físicos de subsuperfície é de grande utilidade quando se deseja inferir atributos petrofísicos, por exemplo. Vale salientar também que, nesse contexto, o modelo de velocidades suave não tem resolução suficiente para ser utilizado para interpretação, funcionando apenas como entrada para algoritmos de migração, que fornecerão o produto final do processamento convencional, o mapa de refletividades da subsuperfície.

Os modelos de velocidades suaves obtidos através do processamento convencional são utilizados como entrada para inversão FWI que, por sua vez, fornece um modelo de velocidades mais preciso. Os produtos da inversão FWI não só fornecem um mapa de distribuição das refletividades das camadas da subsuperfície, através da migração, em tempo ou profundidade, como também permitem interpretá-los de forma direta.

Grande parte das técnicas de processamento e imageamento sísmico desenvolvidas estão fundamentadas na análise dos tempos de trânsito, desprezando os efeitos da amplitude no entendimento do meio (RAKNES *et al.*, 2014). Todavia, as amplitudes podem ser utilizadas para obtenção de informações relacionadas aos coeficientes de reflexão entre as camadas rochosas, bem como podem ser tomadas como indicadores de alterações das propriedades do meio (DI BARTOLO, 2010).

A amplitude do dado sísmico está diretamente vinculada à variação de impedância do meio e assumir a velocidade das ondas compressãois como sendo o único parâmetro dominante resulta na modelagem incorreta de amplitudes sísmicas. Dessa forma, a densidade passa a ser uma propriedade de grande relevância para o processamento dos dados.

De acordo com PAN *et al.* (2017), a presença de anomalias na densidade é indispensável para caracterização de reservatórios, todavia a inclusão da densidade

no processamento de dados sísmicos continua a apresentar desafios. A inclusão de mais uma classe de parâmetros agrava o mau condicionamento do problema inverso que, para o caso da densidade, é predominantemente causado pela fraca sensibilidade aos tempos de trânsito, além da forte contaminação do sinal em virtude das respostas atreladas à variação das velocidades compressoriais do meio.

Diante da importância de se obter modelos de propriedades precisos para as etapas posteriores do processamento e, com isso, mapear propriedades das camadas e não mais apenas das interfaces, surgem metodologias de análise de velocidades mais complexas, que se propõem a maximizar o uso do espectro de frequências intermediário do dado, tal qual a inversão da forma completa da onda.

Além disso, embora a interpretação geológica tradicional esteja baseada nos modelos de velocidade compressional, para caracterização de reservatórios e fluidos é fundamental descrever detalhadamente a densidade (PRIEUX *et al.*, 2013), bem como as propriedades elásticas do meio (SHI *et al.*, 2007), propriedades obtidas através da inversão multiparamétrica.

Além da necessidade de se avaliar um maior número de propriedades, as reservas de geologia relativamente simples, com variações suaves de propriedades físicas em relação às encontradas no pré-sal da Bacia de Santos, se tornaram mais escassas. Com isso, as metodologias baseadas no traçado de raios, como a migração Kirchhoff, foram tornando-se obsoletas e ineficientes na detecção das jazidas de geologia mais complexas (MACEDO, 2014).

Ainda segundo MACEDO (2014), o avanço das tecnologias de aquisição proporcionaram uma melhor iluminação da subsuperfície e, em conjunto com a evolução da capacidade computacional das últimas décadas, permitiram o desenvolvimento de metodologias baseadas na equação completa da onda. Em virtude do aprimoramento das técnicas de imageamento, nota-se uma maior necessidade de modelos de entrada mais precisos.

Dentre as metodologias de análise de velocidades, a inversão FWI destaca-se por fornecer imagens de alta resolução do meio baseada no uso de todo o conteúdo de informações presente nos traços sísmicos (VIRIEUX *et al.*, 2014). Ao levar em conta todos os modos de onda (transmitidas, refletidas, refratadas, múltiplas etc.) e toda a informação do dado sísmico (amplitude e tempo de trânsito), a inversão FWI destaca-se pela sua capacidade de determinar a velocidade com mais precisão, como também recuperar outras propriedades do meio, tais como densidade e impedância.

Atualmente, a inversão FWI apenas é eficiente na recuperação das velocidades compressoriais do meio. Todavia, com a crescente necessidade de se incorporar parâmetros elásticos, densidade e outras propriedades, a inversão multiparamétrica vem ganhando destaque. Os modelos de propriedades obtidos podem servir diretamente para interpretação sísmica, como também podem atuar como dado de

entrada para *softwares* de simulação de escoamento de fluidos e acompanhamento da produção, através da sísmica 4D.

No contexto do processamento sísmico convencional, o modelo de velocidades obtido por técnicas tais como tomografia de tempo de trânsito, não atinge um nível de detalhamento a ponto de poderem ser interpretados. A inversão FWI, além de melhorar a acurácia dos modelo de velocidades compressoriais, é capaz de fornecer outras propriedades, tais como velocidades cisalhantes, densidade, dentre outros, que podem ser diretamente interpretados.

2.1.3 Interpretação

Embora na fase de processamento já se tenha uma interpretação preliminar dos dados, o que conhecemos tradicionalmente por interpretação sísmica envolve a delimitação de camadas em uma seção migrada, definindo a geologia estrutural da área (YILMAZ, 2001).

A interpretação sísmica normalmente é feita em conjunto com outros levantamentos, especialmente levantamentos geológicos e perfis de poço, e a confiabilidade da interpretação está associada à propriedade física em avaliação, à qualidade dos dados, dentre outros (JOHNSTON *et al.*, 2010). Ainda segundo JOHNSTON *et al.* (2010), a interpretação conjunta dos dados geofísicos dá suporte para estimativa do tipo de fluido, volume de hidrocarbonetos *in-place*, ambiente deposicional, estratigrafia e estimativa da pressão de poros.

Ao interpretar um produto da aquisição sísmica, objetiva-se identificar indicadores de hidrocarbonetos, que possam ser traduzidos por meio de variações abruptas na amplitude, polaridade e outros atributos dos mapas de refletividade obtidos no processamento convencional, através da migração (JOHNSTON *et al.*, 2010). A inversão FWI, por sua vez, tem o poder de fornecer modelos de propriedades de alta resolução passíveis de serem interpretados diretamente.

O desenvolvimento de poderosas ferramentas de visualização de dados torna factível a interpretação de uma série de atributos, permitindo extrair informações da seção migrada sobre as mais diversas propriedades da rocha, como ambiente deposicional, saturação de fluidos e assim por diante. Pode-se entender por atributo sísmico toda informação contida no traço sísmico, como amplitude, fase e frequência, que tem o potencial de distinguir estruturas geológicas de dimensão menor do que a resolução da sísmica, como fraturas e finas camadas (RIAZI e CLARKSON, 2016).

Capítulo 3

Inversão da forma completa da onda

A solução de problemas inversos aplicados à geofísica sempre foi um tópico considerado primordial no entendimento das propriedades físicas de subsuperfície (FICHTNER, 2011). No âmbito das geociências, os primeiros problemas inversos tiveram relação com a temática da sismologia, quando notou-se que o fenômeno de propagação de ondas em subsuperfície estava associado à teoria da elasticidade. A partir de então passou-se a relacionar perturbações na velocidade de ondas sísmicas a variações nas propriedades do material rochoso (FICHTNER, 2011).

Como apontado anteriormente, para alguns casos a Terra não é precisamente descrita apenas pela velocidade das ondas sísmicas compressionais, recaindo na necessidade de inversão de parâmetros elásticos, coeficientes de atenuação, propriedades anisotrópicas, dentre outros. Além da enorme demanda computacional associada a problemas de grande porte, um dos maiores desafios da inversão FWI consiste na definição de estratégias de inversão que mitiguem os problemas de não linearidade e mau condicionamento, intrínsecos à inversão sísmica. Tais problemas crescem proporcionalmente à medida que múltiplas propriedades são incorporadas na solução do problema direto e, conseqüentemente, do problema inverso.

Neste capítulo alguns dos aspectos teóricos da inversão FWI serão discutidos: a solução do problema direto, o problema inverso em questão e a metodologia empregada para solucioná-lo. Após uma breve explanação a cerca da teoria, serão discutidos alguns dos desafios relacionados à inversão multiparamétrica.

3.1 Formulação do Problema Direto

Dado um sistema físico, modelos matemáticos baseados em leis físicas reproduzem o comportamento de tal sistema gerando dados calculados sinteticamente. Em outras palavras, o problema direto permite calcular a resposta \mathbf{d}_{cal} de um modelo \mathbf{m} , ou seja, o conjunto de parâmetros que caracterizam o sistema, por meio da modelagem:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}) = \mathbf{d}_{cal}, \quad (3.1)$$

onde \mathbf{G} representa o operador de modelagem direta, que relaciona os parâmetros do modelo e o dado calculado.

Tratando-se do método sísmico, o modelo de parâmetros representa propriedades físicas das rochas em subsuperfície, como parâmetros elásticos e anelásticos, densidade, anisotropia e impedância, e os dados calculados são representados por sismogramas sintéticos que podem ser obtidos utilizando métodos numéricos, tais como diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno, dentre outros (MRINAL, 2006). O operador de modelagem direta simula a propagação das ondas em subsuperfície e o registro do retorno das mesmas, reproduzindo a mesma configuração de aquisição dos dados obtidos em campo.

O fenômeno de propagação está fundamentado em dois princípios físicos: a segunda Lei de Newton, ou conservação da quantidade de movimento, e a equação de continuidade (CLAERBOUT, 1984). Há uma série de formulações empregadas para reproduzir a propagação de ondas em subsuperfície, desde a mais simples, que considera o meio acústico, com densidade constante, até as formulações mais complexas, que incluem anisotropia e atenuação.

KELLY *et al.* (1976) apresentou um sistema de equações de segunda ordem para descrever a propagação de ondas P , ou compressionais, e S , ou cisalhantes, aproximando as derivadas parciais das equações diferenciais, solucionadas para valores discretos de um domínio finito. Uma vasta gama de métodos numéricos, empregada para modelar a propagação de ondas, pode ser encontrada em DURRAN (1999). Dentre eles, o método das diferenças finitas (MDF) ainda é o mais empregado na geofísica em virtude da sua eficiência e fácil implementação (ALFORD *et al.*, 1974; CARCIONE *et al.*, 2002; LEVANDER, 1988; VIRIEUX, 1986; WANG *et al.*, 2014; YAO *et al.*, 2018a).

Neste trabalho, duas das formulações da equação da onda serão trabalhadas, ambas no domínio do tempo, discretizadas espacialmente considerando a direção horizontal no sentido positivo do eixo x e a direção vertical com crescimento da profundidade no sentido negativo do eixo z .

A propagação de ondas em meios elásticos pode ser descrita em termos das componentes do vetor velocidade e das componentes do tensor de tensão

(VIRIEUX, 1984) ou ainda em termos das componentes do vetor deslocamento e das componentes do tensor de tensão (LEVANDER, 1988) das partículas, por exemplo. Para o caso descrito no Capítulo 4, adotou-se a formulação proposta por VIRIEUX (1984), apresentada a seguir:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x, \quad (3.2a)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z, \quad (3.2b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (3.2c)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (3.2d)$$

e

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad (3.2e)$$

onde v_x e v_z representam os campos de velocidades das partículas do meio rochoso nas direções de propagação horizontal e vertical, respectivamente, τ_{xx} e τ_{zz} representam os campos de tensões normais, τ_{xz} representa o campo de tensão cisalhante e f_x e f_z correspondem aos campos de densidade volumétrica de forças externas nas direções horizontal e vertical, respectivamente.

Para solução do problema inverso no Capítulo 5, levamos em conta um meio mais simples: acústico e com densidade constante. Desta forma, o problema direto associado a modelagem sísmica acústica, obedece a seguinte equação diferencial parcial de segunda ordem:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta(x - x_s) \delta(z - z_s) s(t), \quad (3.3)$$

onde $v(x, z)$ representa a velocidade de ondas compressionais, $u(x, z)$ representa o campo de pressão incidente, dada a inserção de uma fonte sísmica pontual $s(x_s, z_s)$ e δ representa a função delta de Dirac.

3.2 Formulação do Problema Inverso

Muitos problemas da engenharia são solucionados através da modelagem direta, uma vez que é possível determinar diretamente os parâmetros necessários para então reproduzir o comportamento do sistema e avaliar os ajustes necessários. Em contrapartida, o mesmo procedimento não pode ser feito quando se trata da

subsuperfície, logo que os sistemas não são economicamente acessíveis para medição direta de suas propriedades (MANTILHA, 2002).

Visto isso, o problema inverso surge como solução para recuperar modelos de parâmetros que forneçam uma resposta ao modelo matemático o mais próximo possível daquela observada em campo. A princípio, consiste em encontrar o modelo \mathbf{m} a partir do dado observado \mathbf{d}_{obs} , empregando o operador inverso \mathbf{G}^{-1} :

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{d}_{obs}). \quad (3.4)$$

A Figura 3.1 exemplifica uma modelagem sísmica direta e o problema inverso associado. Em relação à modelagem, apresentada na Figura 3.1(a), o primeiro painel representa um modelo de propriedades físicas de um pacote sedimentar, em função da profundidade. O segundo e terceiro painéis ilustram, nesta ordem, os perfis de impedância e refletividade do modelo geológico em questão, que estabelecem a fração de energia refletida assim como a amplitude do sinal. A *wavelet* convolvida com o perfil de refletividade fornece os simogramas sintéticos apresentados no último painel. O problema inverso, representado pela Figura 3.1(b), caracteriza o processo de recuperação do modelo partindo dos dados observados e de um modelo inicial que contemple as informações de baixa frequência do dado sísmico, ou seja, os atributos cinemáticos.

Em virtude da complexidade atrelada ao fenômeno de propagação de ondas em meios rochosos, o cálculo da solução analítica do operador de modelagem, bem como do seu inverso é inviável. Além disso, a não linearidade do operador em relação ao modelo de parâmetros impossibilita a obtenção do operador inverso. Diante disso, a inversão sísmica recai em um problema de otimização local de um funcional objetivo.

No contexto da geofísica, a solução do problema inverso pode ser fundamentada no ajuste, por meio de um processo iterativo, entre os dados obtidos em campo e aqueles obtido através da modelagem direta, minimizando um funcional objetivo. A Tomografia de Tempo de Trânsito e a Inversão AVO (*amplitude-variation-with-offset*) são exemplos de estratégias baseadas em inversão comumente empregadas para mapear a distribuição das propriedades físicas da Terra a partir de dados sísmicos. A vantagem da inversão da forma completa da onda encontra-se na capacidade de recuperar detalhes de alta resolução dos modelos de propriedades físicas, em virtude da utilização da equação completa da onda.

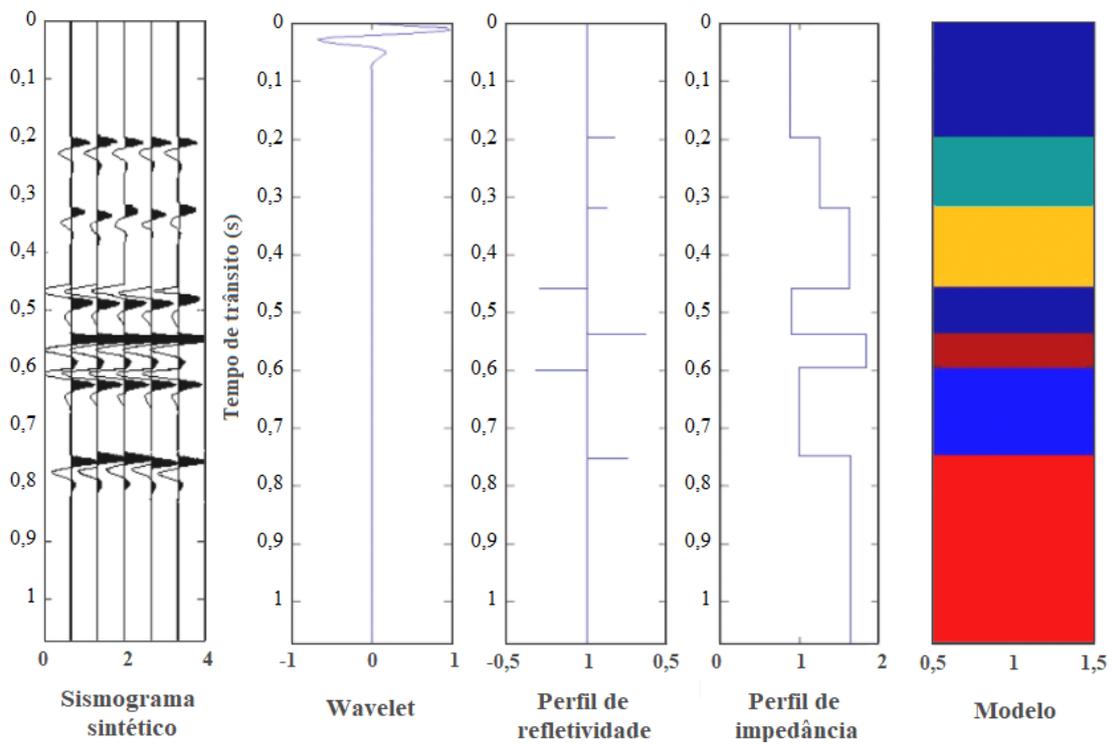
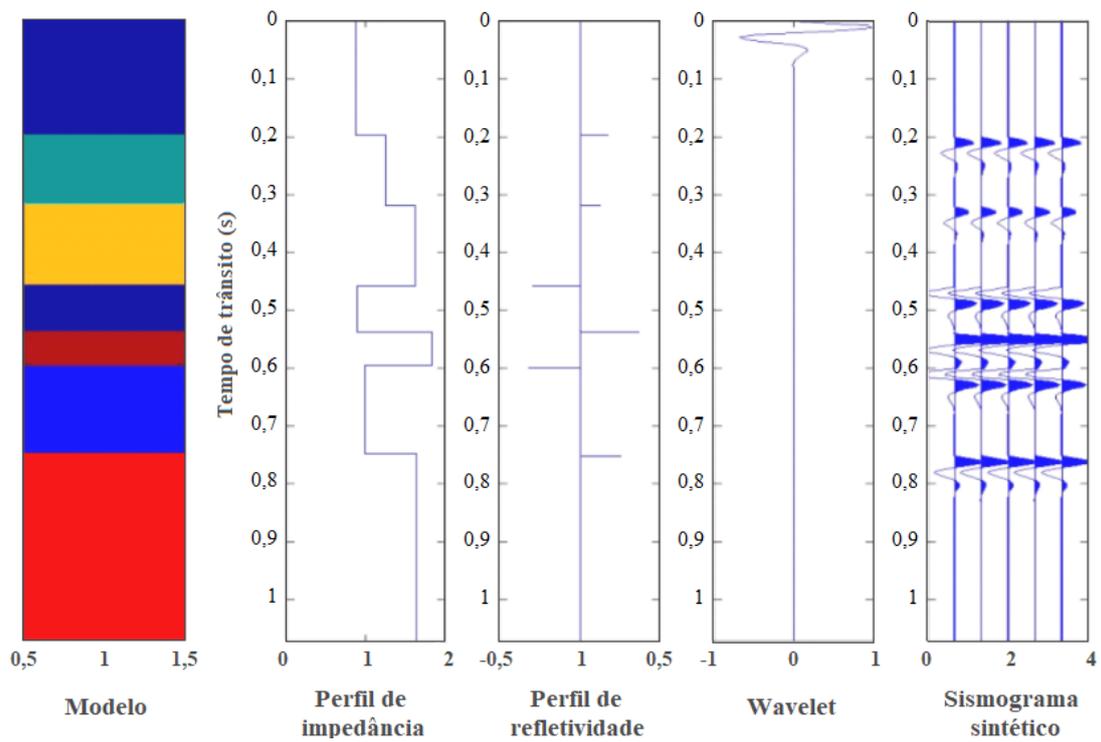


Figura 3.1: Fluxograma que descreve a aplicação de (a) problemas diretos e (b) inversos para a modelagem sísmica. Em (a) tem-se o processo de obtenção do sismograma a partir de um modelo geológico conhecido e em (b) tem-se o processo de estimativa do modelo geológico a partir do sismograma. Adaptado de: MANTILHA (2002).

3.3 Inversão FWI

Na década de 80, LAILLY (1983) e TARANTOLA (1984) deram um passo primordial em busca da solução da inversão FWI quando conseguiram relacionar o problema inverso à Migração Reversa no Tempo (*reverse-time migration* – RTM). Partindo disso, demonstraram que o gradiente do funcional objetivo pode ser dado pela correlação dos campos de onda incidente e residual retropropagado, princípio da migração RTM.

TARANTOLA (1986) e MORA (1987) avançaram com aplicações em dados sintéticos, invertendo parâmetros elásticos sob uma abordagem não linear. Contudo, JANNANE *et al.* (1989) mostraram, numericamente, que os comprimentos de onda intermediários não podem ser resolvidos por dados de reflexão.

Nos anos 90, destacaram-se estudos da inversão da forma completa da onda no domínio da frequência. PRATT e WORTHINGTON (1990) tomaram proveito das aquisições de longos *offsets*³, possibilitando um aumento na confiabilidade dos dados e na cobertura dos comprimentos de onda intermediários. PRATT *et al.* (1998) passaram a adotar uma abordagem matricial e desenvolveram métodos para computação eficiente da Hessiana, proporcionando uma maior taxa de convergência do problema.

RAVAUT *et al.* (2004) apresentaram a primeira aplicação do FWI para um ambiente terrestre de geologia complexa, utilizando dados reais de longos *offsets* de aquisição. Em seguida, OPERTO *et al.* (2006) mostraram a primeira aplicação do FWI no domínio da frequência para dados reais de aquisição OBS (*ocean-bottom-seismometer*). No mesmo ano, PLESSIX (2006) publicou uma revisão do método do estado adjunto para cálculo do gradiente, para os domínios do tempo e da frequência. SIRGUE *et al.* (2009) mostraram as primeiras aplicações do FWI acústico no campo de Valhall, para dados reais 3D de aquisição OBC (*ocean-bottom cable*), aumentando a resolução do método, embora o conteúdo de baixas frequências fosse dominante.

De acordo com FICHTNER e TRAMPERT (2011), a inversão FWI continua ganhando popularidade em virtude de dois aspectos: os rápidos avanços em computação de alto desempenho e a crescente necessidade de recuperar imagens de subsuperfície mais acuradas. O desenvolvimento das ferramentas computacionais tornaram o método FWI mais popular, mas resolver numericamente as equações viscoelásticas ainda é um desafio. Segundo PLESSIX *et al.* (2013), embora tais formulações representem o meio de forma mais exata, os algoritmos atuais ainda fazem aproximações que supõem a Terra como um meio acústico.

³Termo empregado para denominar a distância horizontal entre a fonte e o receptor.

Apesar da complexidade atrelada ao problema da inversão FWI, esta técnica vem apresentando avanços consideráveis, colocando-se como uma das mais promissoras metodologias empregadas na construção de modelos da Terra de alta resolução. A obtenção dos parâmetros que governam a propagação das ondas no meio rochoso é indispensável para a etapa de processamento e posterior interpretação do dado sísmico.

O principal diferencial da inversão FWI está na solução do problema direto, onde emprega-se a equação completa da onda. Sob esse ponto de vista, é possível reproduzir o fenômeno de propagação das ondas com maior precisão e incluir uma maior variedade de fenômenos no processo de otimização, tais como: ondas transmitidas, refratadas, múltiplas, dentre outras (TARANTOLA, 1984; VIRIEUX e OPERTO, 2009).

Ainda que se destaque pelo seu potencial, a inversão FWI enfrenta desafios em virtude da complexidade da modelagem da equação completa da onda, sobretudo para casos mais realísticos. A inversão elástica fornece resultados mais precisos, como apontado por RAKNES *et al.* (2014), dada a possibilidade de diferenciar a resposta das ondas refratadas e convertidas. Por outro lado, resolver o problema direto requer a solução de um maior número de equações diferenciais, bem como demanda malhas mais refinadas para lidar com os curtos comprimentos das ondas cisalhantes (OPERTO *et al.*, 2013).

Um dos problemas enfrentados no esquema de otimização local é o salto de ciclo, ou seja, o ajuste do dado com defasagem de um ciclo da onda. Isso acontece quando a chegada da onda do dado calculado está defasada, em relação à onda do dado observado, a uma distância superior a meio período ($T/2$). Isso acarreta em uma atualização errônea do modelo, uma vez que o evento referente ao tempo n foi ajustado ao tempo $n + 1$, ou vice-versa (BUNKS *et al.*, 1995).

Na Figura 3.2, a linha contínua representa o dado observado e a linha tracejada superior representa um sismograma modelado com um atraso de tempo superior a meio período. Nesse caso, o ajuste ocorrerá entre o $n + 1$ ciclo do sismograma modelado e o n ciclo do sismograma observado, levando a uma atualização equivocada do modelo. Para o sismograma modelado representado na linha inferior, o processo de ajuste das curvas se dará de modo correto, uma vez que a defasagem entre os ciclos é inferior a meio período.

De acordo com BUNKS *et al.* (1995), uma forma de atenuar os saltos de ciclo é fazer uso de diferentes estratégias de processamento dos dados observados, decompondo os dados de acordo com a escala e diminuindo as chances de convergência para mínimos locais. Uma das técnicas adotadas tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência é a abordagem multiescala, que incorpora progressivamente os dados de alta frequência e, conseqüentemente, de menores

comprimentos de onda.

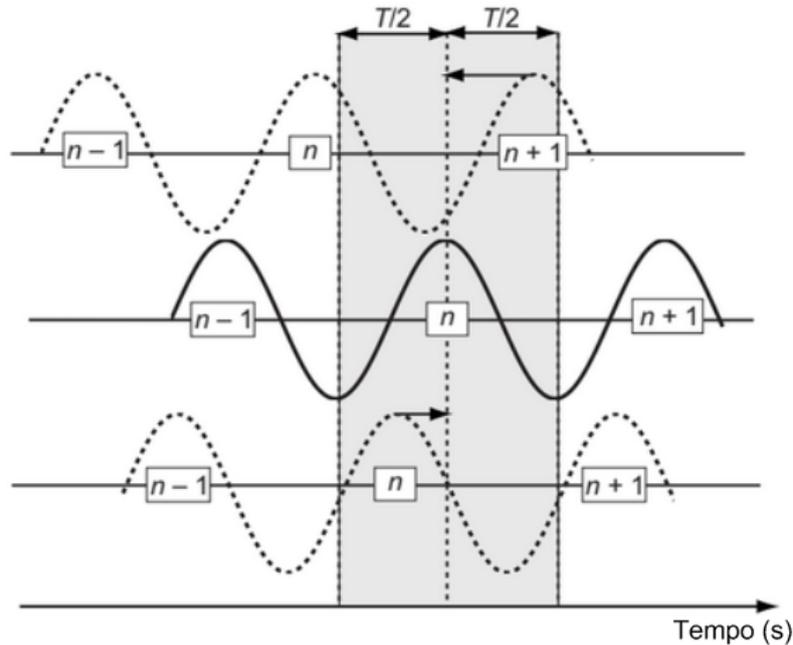


Figura 3.2: Esquema de salto de ciclo em inversão FWI. A linha sólida representa o dado observado de período T em um funo do tempo. A linha tracejada superior representa o dado modelado fora de fase, com atraso de tempo superior a meio período ($T/2$). A linha tracejada inferior representa o dado modelado em fase, com atraso de tempo inferior a meio período ($T/2$). Adaptado de: VIRIEUX e OPERTO (2009).

Os dados de baixa frequência carregam informações sobre as estruturas de maior porte e o funcional objetivo apresenta menor sensibilidade a problemas de salto de ciclo. Para menores frequências e modelos contendo estruturas de maior escala, o funcional objetivo apresenta uma menor quantidade de mínimos locais, mínimos estes suficientemente espaçados uns dos outros. Ao longo do processo iterativo, a função aproxima-se da vizinhança do mínimo global, refinando recursivamente o modelo anteriormente obtido, usando-o como uma solução inicial para comprimentos de onda progressivamente menores (BUNKS *et al.*, 1995).

O primeiro painel da Figura 3.3 ilustra um funcional objetivo unidimensional e os painéis seguintes ilustram o mesmo funcional objetivo para maiores frequência e, por conseguinte, em comprimentos de onda decrescentes. Segundo BUNKS *et al.* (1995), métodos baseados no uso do gradiente aplicados em escala mais longas, tal qual o painel (a), conseguem encontrar o mínimo global independentemente do ponto de partida, enquanto o mesmo método aplicado a funções de maior frequência, tais como o painel (c), é passível de encontrar o mínimo global apenas quando o modelo inicial encontra-se próximo ao mínimo global.

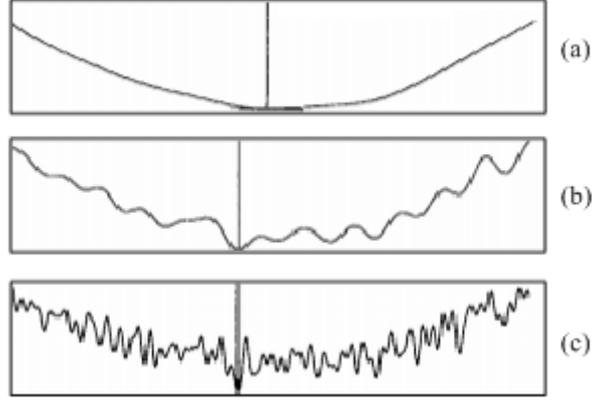


Figura 3.3: Ilustração do método multiescala aplicado para um problema não linear. O quadro (a) ilustra um funcional objetivo unidimensional e os quadros (b) e (c) ilustram o mesmo funcional objetivo em comprimentos de escala decrescentes. O método multiescala aplicado a um funcional de escala mais curta, tal como o quadro (c), consegue encontrar o mínimo local apenas quando encontra-se próximo ao modelo inicial, enquanto quando aplicado a um funcional de escala mais longa, tal como o quadro (a), consegue encontrar o mínimo global independentemente do modelo inicial. Adaptado de: BUNKS *et al.* (1995).

3.3.1 Cálculo do funcional objetivo

O funcional objetivo é um dos principais ingredientes da inversão FWI e deve englobar o máximo de informações possível sobre os dados, apesar das limitações físicas do problema (FICHTNER, 2011).

Uma vez que o cálculo exato do operador inverso é impraticável, a inversão FWI é formulada como um problema de otimização local, baseada no gradiente da aproximação de um funcional objetivo, empregado para mensurar o erro, entre os dados calculados e observados. A solução do problema direto consiste em encontrar um modelo \mathbf{m} , para o qual os dados calculados $\mathbf{d}_{cal}(\mathbf{m}, t)$ melhor se ajustem àqueles observados em campo.

Através do funcional objetivo, $E(\mathbf{m})$, o resultado da modelagem direta é comparado ao dado observado. Normalmente emprega-se a norma L_2 do resíduo $\Delta d(\mathbf{m}, t)$ entre o dado sísmico calculado $d_{cal}(\mathbf{m}, t)$ e o dado registrado em uma superfície de aquisição $\mathbf{d}_{obs}(t)$. Embora exista uma série de funcionais objetivo, como apresentadas em TEJERO *et al.* (2015), o ajuste das curvas por mínimos quadrados é a metodologia mais comum na inversão sísmica, pois permite explorar informações sobre a amplitude, além do usual tempo de trânsito das ondas sísmicas (VIRIEUX e OPERTO, 2009). O funcional objetivo pode ser representado pela Equação 3.5:

$$E(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \int_0^{Tr} \sum_{i=1}^{Nr} \left(d_{cal}^{(i)}(\mathbf{m}, t) - d_{obs}^{(i)}(t) \right)^2 dt, \quad (3.5)$$

onde o erro é calculado a partir do somatório dos quadrados das diferenças entre as

amplitudes do campo de onda calculado e observado, para cada um dos Nr traços do sismograma, tempo a tempo, onde Nr corresponde ao número de receptores.

3.3.2 Cálculo do gradiente e Hessiana

A derivada de primeira ordem do funcional objetivo representa o seu gradiente, um dos ingredientes primordiais para a construção de um algoritmo de otimização local. Seja um modelo de parâmetros \mathbf{m} de dimensão N , o gradiente do funcional objetivo pode ser representado, matematicamente, por um vetor coluna de ordem N , que aponta para direção de máximo crescimento do funcional. Portanto, a fim de minimizar o funcional objetivo basta calcular o negativo do gradiente (NOCEDAL e WRIGHT, 2006). A l -ésima componente do vetor gradiente é a derivada do funcional objetivo em relação ao parâmetro m_l do modelo \mathbf{m} , obtida da seguinte forma:

$$\frac{\partial E(\mathbf{m})}{\partial m_l} = \int_0^{Tr} \sum_{i=1}^{Nr} \left[\frac{\partial d_{cal}^{(i)}(\mathbf{m}, t)}{\partial m_l} \left(d_{cal}^{(i)}(\mathbf{m}, t) - d_{obs}^{(i)}(t) \right) \right] dt. \quad (3.6)$$

Na forma matricial compacta tem-se:

$$\nabla \mathbf{E} = \mathbf{J}^T \Delta \mathbf{d}, \quad (3.7)$$

onde $\nabla \mathbf{E}$ representa o vetor gradiente, composto pelas derivadas de primeira ordem do funcional objetivo em relação a cada parâmetro do modelo, \mathbf{J}^T representa a transposta da matriz Jacobiana \mathbf{J} , ou matriz de sensibilidade, de dimensão $N \times Nr$, onde Nr , corresponde ao número de receptores da aquisição sísmica, e $\Delta \mathbf{d}$ representa o resíduo, vetor coluna de dimensão Nr .

Os componentes da matriz Jacobiana são dados por:

$$J_{ik} = \frac{\partial d_{cal_i}}{\partial m_k}, \quad i = 1, 2, \dots, Nr; k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.8)$$

Sendo uma matriz de dimensão $N \times Nr$, cada linha da matriz de sensibilidade está associada a um ponto do modelo, representando as derivadas de Fréchet de cada parâmetro, e cada coluna está associada à posição de um receptor. Dessa forma, o elemento J_{ik} representa a variação do campo de onda, provocada pela perturbação do i -ésimo ponto do modelo registrada no k -ésimo receptor.

A derivada de Fréchet carrega informações sobre a sensibilidade do campo de ondas, em virtude da variação de um dos parâmetros do modelo. A rigor, cada linha da matriz sensibilidade é composta pelas Nr derivadas parciais do campo de pressão, para cada um dos Nr receptores, em virtude da perturbação de um dos N parâmetros do modelo. Ao passo que as colunas da matriz Jacobiana, descrevem

a derivada parcial do campo, para um receptor, em virtude da perturbação dos N parâmetros do modelo.

A matriz sensibilidade pode ser construída, explicitamente, a partir da modelagem do campo, dada uma variação no modelo \mathbf{m}_0 . Para tanto, faz-se necessário realizar duas modelagens para cada um dos N pontos dos modelos, para cada tiro, uma para o modelo inicial e outra para o modelo perturbado. Segundo VIRIEUX e OPERTO (2009), esse formalismo traduz o significado físico e esclarece o cálculo de cada um dos componentes do gradiente, todavia, sob o ponto de vista computacional, é inviável realizar duas modelagens para cada um dos N parâmetros do modelo, para cada tiro.

Em contrapartida, emprega-se o método do estado adjunto para um cálculo mais eficiente do gradiente, evitando o cálculo direto das derivadas parciais. CHAVENT (1974) introduziu o conceito de estado adjunto aplicado à teoria do problema inverso para o cálculo da derivada de um funcional sem a necessidade do cálculo explícito das derivadas de Fréchet. De acordo com PLESSIX (2006), o método adjunto é eficiente no cálculo do gradiente de um funcional, quando o gradiente é função dos parâmetros do modelo, através das variáveis de estado do problema.

Valendo-se do método adjunto, o gradiente de uma classe de parâmetros é construído a partir da correlação entre o campo adjunto e a derivada temporal segunda do campo de pressão (PLESSIX, 2006). Para tanto são necessários dois passos, são eles: uma modelagem direta do campo incidente e uma modelagem reversa do operador adjunto, que tem como fonte o resíduo entre o dado observado e calculado, injetado reversamente no tempo. O resíduo retropropagado representa a parte do sinal que não é levada em consideração pelo modelo atual (TARANTOLA, 1984). Em analogia à migração RTM, o campo direto e o reverso devem chegar ao mesmo tempo na posição do ponto responsável pela geração do sinal difratado.

O cálculo do l -ésimo elemento do vetor gradiente do modelo de velocidades compressoriais \mathbf{v} , pelo método adjunto, no domínio do tempo, é dado por:

$$\frac{\partial E(\mathbf{v})}{\partial v_l} = -\frac{2}{v_l^3} \int_0^{Tr} u^\dagger \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt, \quad (3.9)$$

onde v_l representa o parâmetro velocidade de propagação de ondas compressoriais na posição l , u e u^\dagger representam, respectivamente, o campo de pressão incidente e o campo de pressão adjunto, no instante t , e Tr é o tempo total de registro. O campo de pressão adjunto pode ser obtido a partir da solução da equação seguinte, tendo o resíduo como fonte:

$$\nabla^2 u^\dagger - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u^\dagger}{\partial t^2} = \delta(x - x_s) \delta(z - z_s) \Delta d(t). \quad (3.10)$$

Considere uma aquisição realizada no modelo descrito pela Figura 3.4(a), um modelo homogêneo de velocidade compressional $V_p = 3000$ m/s e duas anomalias com valor de velocidade 10% superior ao modelo de fundo, o qual chamaremos de modelo real. O cálculo do gradiente empregando o método adjunto trará as informações sobre o modelo real, a partir do modelo inicial, dado pela Figura 3.4(b), do qual uma das anomalias foi retirada.

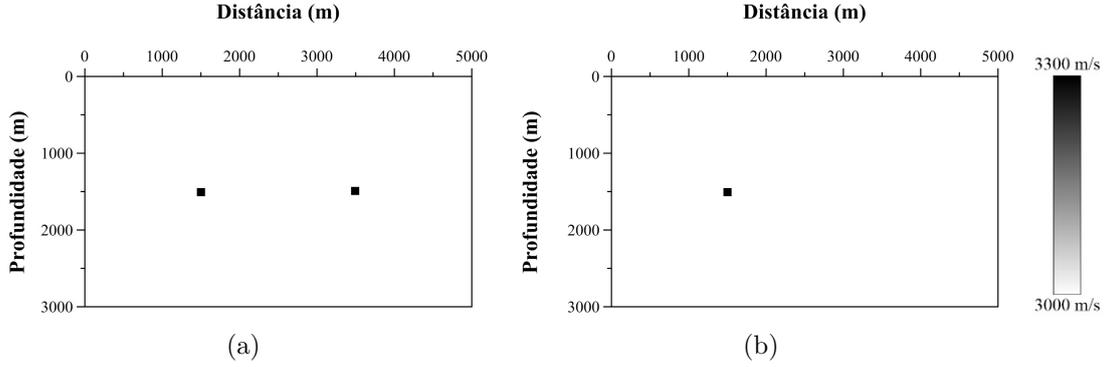


Figura 3.4: (a) Modelo real e (b) modelo inicial utilizando para cálculo do gradiente.

Na Figura 3.5 estão apresentados os sismogramas do modelo real (Figura 3.5(a)), do modelo inicial (Figura 3.5(b)) e o resíduo (Figura 3.5(c)) entre eles, para um tiro no ponto central. A onda direta foi retirada para facilitar a visualização das difrações que, em geral, apresentam amplitudes algumas ordens de grandeza inferiores à amplitude da onda direta. Em analogia à inversão FWI, o dado observado $\mathbf{d}_{obs}(t)$ está representado pela Figura 3.5(a), no qual estão presentes as duas difrações associadas às anomalias de velocidade do modelo real. A Figura 3.5(b) representa o dado calculado $\mathbf{d}_{cal}(\mathbf{m}, t)$ a partir do modelo inicial, onde há apenas uma difração correspondente à anomalia remanescente do modelo real. E a Figura 3.5(c), por sua vez, representa o resíduo, sismograma obtido a partir da diferença entre o dado observado e calculado, representando a parte que falta no modelo inicial.

Como descrito acima, o gradiente será nulo nos pontos onde o modelo em questão está em conformidade com o modelo real e nos pontos onde os modelos não coincidem, a correlação entre os campos direto e reverso será diferente de zero e representa a direção de atualização do modelo analisado. Na Figura 3.6 temos o gradiente construído a partir da correlação entre os campos direto e adjunto.

Consideremos agora a derivada do gradiente em relação ao parâmetro k , ou seja, a derivada de segunda ordem do funcional objetivo, como descrito na equação abaixo:

$$\frac{\partial^2 E(\mathbf{m})}{\partial m_k \partial m_l} = \int_0^{Tr} \sum_{i=1}^{Nr} \left\{ \frac{\partial}{\partial m_k} \left[\frac{\partial d_{cal}^{(i)}(\mathbf{m}, t)}{\partial m_l} \left(d_{cal}^{(i)}(\mathbf{m}, t) - d_{obs}^{(i)}(t) \right) \right] \right\} dt, \quad (3.11)$$

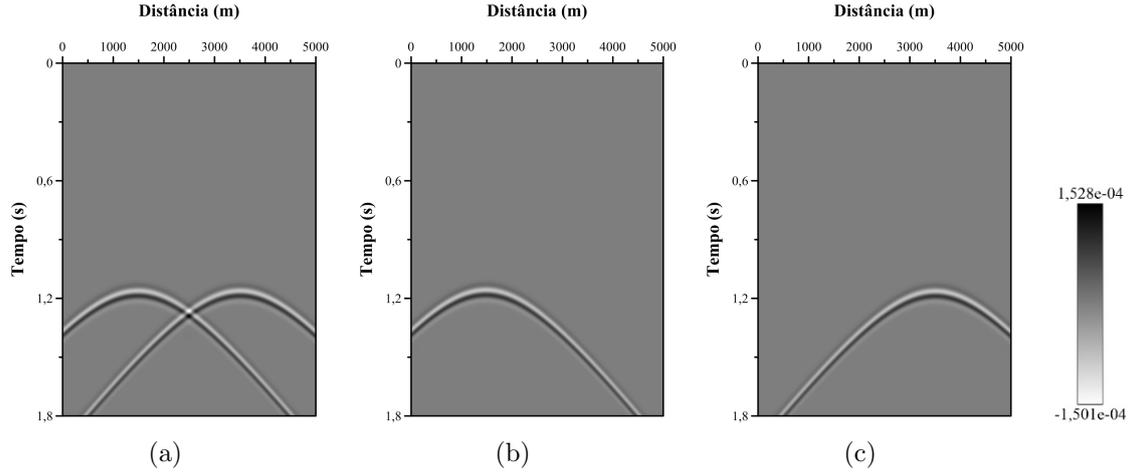


Figura 3.5: Sismogramas (sem onda direta) dos modelos: (a) real e (b) inicial e (c) resíduo.

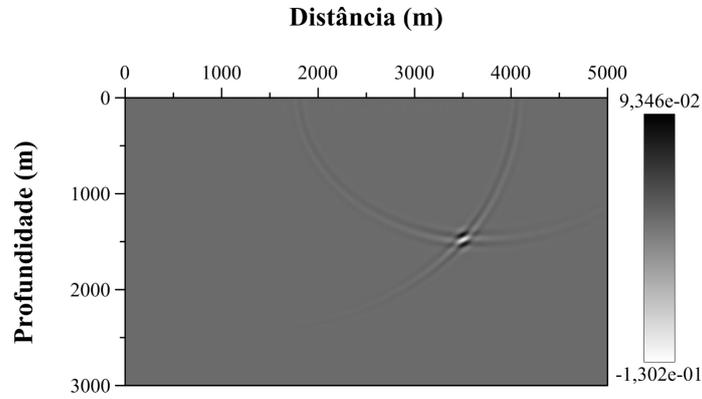


Figura 3.6: Gradiente da primeira iteração calculado pelo método adjunto, para um tiro no centro do modelo.

de forma que os componentes da matriz Hessiana \mathbf{H} são dados por:

$$H_{kl}(\mathbf{m}) = \int_0^{Tr} \sum_{i=1}^{Nr} \left[\frac{\partial d_{cal}^{(i)}(\mathbf{m}, t)}{\partial m_k} \frac{\partial d_{cal}^{(i)}(\mathbf{m}, t)}{\partial m_l} + \frac{\partial^2 d_{cal}^{(i)}(\mathbf{m}, t)}{\partial m_k \partial m_l} \left(d_{cal}^{(i)}(\mathbf{m}, t) - d_{obs}^{(i)}(t) \right) \right] dt. \quad (3.12)$$

Na forma matricial compacta, tem-se:

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{m}} \Delta \mathbf{d}, \quad (3.13)$$

equivalente a:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{R}. \quad (3.14)$$

O primeiro termo da soma corresponde a Hessiana aproximada, dada por:

$$\mathbf{H}_a = \mathbf{J}^T \mathbf{J}, \quad (3.15)$$

onde, no domínio do tempo, cada elemento da matriz Hessiana aproximada é dado pela correlação cruzada entre as derivadas parciais do campo de onda, considerando o deslocamento nulo entre os tempos dos campos (PRATT *et al.*, 1998).

Uma vez que as derivadas parciais quantificam a magnitude da perturbação do campo de pressão, o elemento $H_{a_{kl}}$ representa a perturbação no campo de pressão do ponto k em virtude da modificação no parâmetro do ponto l , e vice-versa. De tal forma, a diagonal da matriz Hessiana aproximada, onde $k = l$, representa a perturbação do campo de pressão dada uma modificação do parâmetro no mesmo ponto, referindo-se, dessa forma, à autocorrelação cruzada entre as derivadas parciais do campo de onda, considerando o deslocamento nulo entre os tempos dos campos.

Os elementos fora da diagonal da Hessiana aproximada são calculados pela correlação entre as derivadas parciais do campo de onda associados a perturbação de dois diferentes parâmetros do modelo (VIRIEUX e OPERTO, 2009). Em teoria, segundo PRATT *et al.* (1998), os elementos fora da diagonal não teriam correlação para altas frequências, todavia, em virtude da limitação da banda de frequência da aquisição sísmica, há correlação das derivadas para pontos relativamente próximos. Em suma, a inversa da Hessiana aproximada é uma matriz diagonal dominante, responsável pela ponderação do vetor gradiente, que contribui para atenuar os efeitos de iluminação incompleta do alvo e a falta de resolução devido a banda de frequências limitada (PRATT *et al.*, 1998).

Já o segundo termo é denominado Hessiana residual, e tem seu cálculo desprezado para problemas lineares, em virtude do alto custo computacional da derivada da matriz Jacobiana:

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial m} \Delta \mathbf{d}. \quad (3.16)$$

A matriz Hessiana contém informações relacionadas à escala de cada uma das classes de parâmetros. Com isso, a Hessiana aproximada inversa atenua os efeitos da não linearidade na resolução dos modelos recuperados, definindo a curvatura e convexidade do funcional objetivo e aumentando a taxa de convergência da otimização para problemas não lineares (FICHTNER e TRAMPERT, 2011; MÉTIVIER *et al.*, 2013). Todavia, para problemas de grande porte, o cálculo e armazenamento dos termos da matriz Hessiana, bem como o cálculo da sua inversa torna-se impraticável do ponto de vista computacional.

3.3.3 Inversão FWI como um problema de otimização

No que diz respeito ao esquema de otimização empregado na inversão FWI, temos dois tipos: os métodos de otimização global e os métodos de otimização local. A otimização global, também conhecida como abordagem estocástica, permite encontrar o mínimo global realizando buscas em todo o espaço do modelo evitando,

assim, a convergência para mínimos locais. Todavia, a busca em todo o espaço do modelo torna-se impraticável para a maioria dos problemas geofísicos de grande porte, sobretudo em aquisições 3D, diante da grande dimensão do modelo e da capacidade computacional requerida para o processamento dos dados adquiridos (PLESSIX *et al.*, 2013).

Diante disso, utilizam-se métodos de otimização local, ou abordagens determinísticas, baseados no gradiente do funcional objetivo. O grande problema da abordagem local é a possibilidade de convergência para uma solução local, o que requer um modelo inicial suficientemente próximo ao modelo real, onde encontra-se o mínimo global do funcional objetivo. O modelo inicial geralmente é obtido mediante emprego de técnicas de análise de velocidade de menor complexidade.

a) Método de Newton

Seja o modelo \mathbf{m} na vizinhança do modelo inicial \mathbf{m}_0 , para o qual:

$$E(\mathbf{m}) \leq E(\mathbf{m}_0), \quad (3.17)$$

para minimização do funcional objetivo, podemos expandir a função descrita acima em uma série de Taylor em torno do modelo inicial \mathbf{m}_0 e tomá-la por uma função quadrática, desprezando os termos acima de 2ª ordem:

$$E(\mathbf{m}) \approx E(\mathbf{m}_0) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial E(\mathbf{m}_0)}{\partial m_j} \Delta m_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 E(\mathbf{m}_0)}{\partial m_j \partial m_k} \Delta m_j \Delta m_k. \quad (3.18)$$

Assumindo a aproximação do funcional objetivo continuamente diferenciável e derivando parcialmente em relação ao parâmetro m_l do modelo, o mínimo local da função quadrática, em torno de \mathbf{m}_0 , encontra-se no ponto em que a primeira derivada parcial da função é igual a zero:

$$\frac{\partial E(\mathbf{m})}{\partial m_l} = \frac{\partial E(\mathbf{m}_0)}{\partial m_l} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 E(\mathbf{m}_0)}{\partial m_l \partial m_j} \Delta m_j. \quad (3.19)$$

Resultando na seguinte equação generalizada de atualização linear do modelo de parâmetros, dada por:

$$\nabla \mathbf{E} + \mathbf{H} \Delta \mathbf{m} = 0, \quad (3.20)$$

onde $\nabla \mathbf{E}$ e \mathbf{H} são definidos pelas Equações 3.6 e 3.11, respectivamente.

Sendo \mathbf{H} uma matriz invertível, a solução iterativa do problema tem a forma:

$$\mathbf{H}^{-1} \nabla \mathbf{E} + \Delta \mathbf{m} = 0, \quad (3.21)$$

o mesmo que:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \mathbf{H}_k^{-1} \nabla \mathbf{E}_k, \quad (3.22)$$

onde o índice k indica a iteração atual e $k + 1$ a iteração futura.

A matriz Hessiana corrige os efeitos de iluminação incompleta do alvo e é responsável pela recuperação das corretas amplitudes do gradiente devido a banda de frequências limitada (PRATT *et al.*, 1998). Para problemas lineares quadráticos e próximos à solução, ou seja, próximos ao mínimo global, o método de Newton tende a convergir em apenas uma iteração. Entretanto, para problemas inversos não lineares de grande porte, a solução requer um grande número de iterações para convergir até o mínimo.

Apesar dos benefícios em destaque do uso da Hessiana, para problemas de grande porte o cálculo e armazenamento dos termos da matriz Hessiana, bem como sua inversão estão atrelados a um alto custo computacional. A construção explícita da inversa da matriz Hessiana ultrapassa a capacidade computacional atualmente disponível, levando a adoção de algumas simplificações.

MULDER e PLESSIX (2004) contornaram o problema do cálculo da Hessiana, aproximando-a por sua diagonal principal. O método Gauss-Newton leva em consideração apenas a Hessiana aproximada, excluindo o termo residual não linear \mathbf{R} e, em adição, aplicam-se técnicas de regularizações para estabilizar a não linearidade (PRATT *et al.*, 1998).

Uma aproximação eficiente da Hessiana aproximada é a diagonal da pseudo-Hessiana, proposta por SHIN *et al.* (2001), que contribui para preservação da amplitude para a migração RTM pré-empilhamento. Os métodos quasi-Newton fazem aproximações da matriz Hessiana a cada iteração e, ao contrário do método de Newton, nenhuma derivada de segunda ordem é calculada explicitamente e são obtidas através de sucessivas iterações.

Por fim, uma abordagem mais simples aproxima a Hessiana por uma matriz identidade, resultando no esquema de atualização para o modelo corrente mais geral, apresentando-se como abaixo:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k, \quad (3.23)$$

onde α_k representa um fator escalar positivo, denominado comprimento do passo, que indica o quanto se deve andar na direção de busca \mathbf{p}_k a fim de reduzir o valor do funcional objetivo.

b) Comprimento do passo

O comprimento do passo para problemas não lineares pode ser calculado pela minimização da função unidimensional:

$$\chi(\alpha) = E(\mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k), \quad (3.24)$$

de forma que:

$$E(\mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k) < E(\mathbf{m}_k). \quad (3.25)$$

A primeira estimativa do comprimento do passo pode ser definida a partir da razão entre a máxima atualização do modelo permitida ($\Delta \mathbf{m}$) e o máximo valor absoluto do gradiente. Esta estratégia garante que o comprimento do passo seja positivo, mantendo a direção de decréscimo do funcional objetivo, além de estabelecer uma variação máxima ao modelo na primeira iteração.

A solução do problema de otimização na definição do passo não é trivial e, para tanto, podem ser adotadas estratégias de buscas em linha, a fim de encontrar um ponto de mínimo da função que satisfaça condições pré-estabelecidas, como as descritas por WOLFE (1969). Através do algoritmo *backtracking*, descrito por NOCEDAL e WRIGHT (2006), o comprimento do passo é reduzido a um fator η ($0 < \eta < 1$) até que a condição de decréscimo seja atingida ou até que o número máximo de buscas seja realizado.

De acordo com ZHOU *et al.* (2006), informações de iterações prévias são valiosas e também podem ser adotadas para determinação do tamanho do passo. Para tanto, emprega-se uma estratégia de região de confiança (*trust-region*) para definir um novo passo a cada iteração a partir da adaptação de duas formulações propostas por BARZILAI e BORWEIN (1988).

c) Direção de atualização

O vetor \mathbf{p}_k indica a direção de atualização do modelo que varia de acordo com o algoritmo empregado. Para o método de máxima descida (*Steepest Descent Method*), o vetor \mathbf{p}_k corresponde ao negativo do gradiente do funcional objetivo e tem convergência linear:

$$\mathbf{p}_k = -\nabla E_{(\mathbf{m}_k)}. \quad (3.26)$$

Visando contornar a baixa taxa de convergência do método de máxima descida e evitar direções de busca recorrentes, pode-se utilizar os gradientes conjugados, onde o vetor \mathbf{p}_k é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{p}_k = -\nabla E_{(\mathbf{m}_k)} + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}, \quad (3.27)$$

onde o β_k representa um escalar que assegura a ortogonalidade dos vetores e garante uma convergência mais rápida em uma quantidade de iterações menor ou igual ao número de parâmetros do modelo, em virtude do uso de informações das direções de busca anteriores.

3.4 Inversão FWI monoparamétrica *versus* multiparamétrica

Utilizaremos o termo parâmetro, ao longo do texto, referindo-se à propriedade física de cada um dos N pontos do domínio estudado. No tocante à classe de parâmetros, define-se como o conjunto de N parâmetros que descrevem uma mesma propriedade física. Tomemos duas propriedades físicas da rocha, sejam elas: velocidade e densidade. Dessa forma, quando nos referimos a todos os valores de velocidade ou densidade de um mesmo domínio usaremos a denominação de classe de parâmetros, e para tratar de cada um dos valores de velocidade ou densidade de cada um dos N pontos do domínio, usaremos o termo parâmetro como referência.

Com os conceitos de problema direto e inverso esclarecidos nas seções anteriores, bem como a teoria matemática por trás de sua solução, discutiremos nesta seção a inversão FWI sob a perspectiva multiparamétrica.

Em consequência da complexidade da simulação de uma aquisição sísmica, algumas simplificações na solução do problema são adotadas. A representação mais simples traduz a subsuperfície como um meio acústico, de densidade constante e isotrópico, caracterizado apenas pela velocidade de propagação de ondas compressionais.

De acordo com PRIEUX *et al.* (2013) e VIRIEUX e OPERTO (2009), tais simplificações reduzem a demanda computacional assim como mitigam a não linearidade intrínseca ao problema inverso. Tomando por base esta premissa, qualquer evento sísmico estaria relacionado a alteração na velocidade do meio. Entretanto, não é o que se observa, posto que uma camada de rocha pode apresentar a mesma velocidade e provocar reflexões do campo internamente à camada em decorrência de variações na densidade, por exemplo.

Dessa forma, a equação da onda acústica com densidade variável fornece uma melhor aproximação para descrever o fenômeno de propagação de ondas, em meios acústicos (PRZEBINDOWSKA *et al.*, 2012). Ao passo que os tempos de trânsito são afetados predominantemente pelas velocidades do meio, as amplitudes são função do contraste de impedância entre camadas, que nada mais é que o produto entre a velocidade e a densidade do material (KEAREY *et al.*, 2002).

Em razão disso, vários autores destacaram benefícios da inclusão da densidade

no processo de inversão de dados sísmicos (GUITTON, 2014; JEONG e MIN, 2012; PLESSIX *et al.*, 2013; PRZEBINDOWSKA *et al.*, 2012; QIN e LAMBARE, 2016). Como apontado por KUMAR *et al.* (2014), negligenciar a densidade nos cálculos do operador de modelagem pode acarretar uma atualização imprecisa dos modelos de velocidades, uma vez que variações provocadas pela densidade serão atribuídas à velocidade, sobretudo para curtos *offsets* (PRIEUX *et al.*, 2013).

Em seus estágios primários, a inversão FWI era desenvolvida tomando o meio como acústico, isotrópico e com densidade constante. O avanço das técnicas de aquisição, a exemplo da tecnologia OBS, bem como da capacidade de processamento, a exemplo da utilização de GPU e clusters, impulsionaram o desenvolvimento da inversão FWI multiparamétrica. Seu progresso permanece em andamento com objetivo de determinar diversas outras propriedades do meio com acurácia, tais como parâmetros anisotrópicos, coeficientes de atenuação, dentre outros.

Atualmente os esforços concentram-se em incorporar elasticidade e anisotropia aos algoritmos de inversão de dados sísmicos 3D reais (JEONG e MIN, 2012; VIRIEUX e OPERTO, 2009), em razão dos desafios enfrentados no processo: aumento da não linearidade e do mau condicionamento do problema. SEARS *et al.* (2008) destacaram que para a caracterização de um reservatório de hidrocarbonetos e sua geologia circundante, um modelo de propriedades elásticas é um produto mais proveitoso do que um modelo de refletividade, uma vez que os parâmetros elásticos podem fornecer um melhor indicativo de litologia, fluido e pressão de poros.

Ao introduzir um maior número de propriedades físicas na tentativa de reproduzir o fenômeno de maneira mais exata, acabamos requerendo um maior nível de detalhamento no processo de modelagem. Como consequência disso, a complexidade da modelagem cresce e, via de regra, a solução iterativa do problema inverso demanda um maior poder computacional.

Tomando por exemplo o caso elástico bidimensional descrito no Capítulo 4, será necessário armazenar dois painéis de memória para cada componente do vetor de velocidade, três painéis para cada componente do tensor de tensão e três painéis para as propriedades físicas em uso, velocidades compressional e cisalhante, além da densidade. No caso mais simples, descrito no Capítulo 5, apenas são necessários armazenar dois painéis de memória, um para velocidade compressional e um para o campo de pressão. Além disso, a modelagem elástica requer uma malha de espaçamento menor, em virtude dos menores comprimento de onda apresentados pelas velocidades cisalhantes, além do sistema elástico apresentar um maior número de equações a serem solucionadas.

De acordo com OPERTO *et al.* (2013), o aumento da não linearidade do problema também decorre da baixa iluminação da aquisição, deficiência de baixas frequências no dado sísmico, forte dependência do modelo inicial, simplificações na modelagem

direta e ruído. Com isso, o funcional objetivo apresenta inúmeros mínimos locais que dificultam a convergência para o mínimo global empregando técnicas de otimização determinística.

Incluir mais de uma propriedade no esquema de inversão permite uma avaliação mais detalhada das propriedades físicas da rocha, como saturação de fluidos, litologia, ambiente deposicional, dentre outros. Todavia, introduzir múltiplas classes de parâmetros no processo torna o problema ainda mais mal posto, uma vez que aumenta o número de parâmetros a serem determinados e, conseqüentemente, os graus de liberdade da solução do problema (BROSSIER *et al.*, 2009; JEONG *et al.*, 2013; TARANTOLA, 1986). Além disso, a parametrização escolhida desempenha papel fundamental no ajuste da sensibilidade do método em relação aos parâmetros a serem invertidos.

Uma vasta gama de classes de parâmetros pode ser usada para descrever as propriedades físicas que governam o fenômeno de propagação de ondas sísmicas. À combinação dessas propriedades, ou classes de parâmetros, dá-se o nome de parametrização (GHOLAMI *et al.*, 2013). Cada classe de parâmetro, isoladamente, apresenta uma resposta típica, que pode ser entendida como a perturbação na fase e/ou amplitude do campo de ondas, gerada pela modificação do parâmetro, enquanto os outros são mantidos constantes (PRIEUX *et al.*, 2013). Portanto, a resposta de uma classe de parâmetros é sempre função da parametrização em uso.

A parametrização é escolhida em função das propriedades que se deseja obter informação, e cada classe de parâmetros pode ser recuperada individualmente ou de forma simultânea, através de metodologias que conhecemos por inversão FWI monoparamétrica e multiparamétrica, nesta ordem (OPERTO *et al.*, 2013).

Como destacado por TARANTOLA (1986), a escolha do conjunto de classes de parâmetros levados em conta na inversão não é trivial e a convergência do problema está intrinsecamente ligada à parametrização em uso. Portanto, o grande desafio da inversão multiparamétrica consiste em distinguir os efeitos de cada classe de parâmetros na resposta sísmica, isto é, diferenciar o sinal impresso no dado sísmico referente a cada propriedade.

Sabe-se que a atualização de cada parâmetro ao longo do processo de otimização causará uma perturbação no campo de onda com energia e padrão de distribuição de energia próprios. Tal padrão de distribuição da energia difratada é função do ângulo de espalhamento do campo e, para diferentes parâmetros, podem se sobrepor em determinados intervalos de abertura. A depender do conjunto de parâmetros que se adota, as respostas de dois ou mais parâmetros podem se sobrepor, resultando em um maior grau de interferência.

À interferência entre o padrão de espalhamento de duas ou mais classes de parâmetros dá-se o nome de *crossstalk*. Os efeitos desta sobreposição nos sinais

difratados podem ser reduzidos com a incorporação da Hessiana no processo de otimização, que corrige o desbalanceamento entre as amplitudes das derivadas parciais do campo de onda e atenua os efeitos do *crosstalk*. Apesar de toda sua contribuição para o processo de otimização, seu cálculo implica em um grande custo computacional e por motivos já comentados nas seções anteriores, normalmente se usa apenas a sua diagonal, a Hessiana aproximada ou, ainda, assume-se que seja igual a matriz identidade.

Quando se trata da inversão de múltiplas classes de parâmetros, a escolha da parametrização irá indicar a resolução com a qual determinada classe de parâmetro pode ser reconstruída. Diante disso, a convergência dos algoritmos baseados no gradiente de um funcional objetivo está condicionada a uma análise mais detalhada dos padrões de radiação da energia difratada, no sentido de escolher um conjunto de classes de parâmetros que apresentem respostas singulares e definir estratégias de manipulação dos dados, de forma a priorizar a construção de uma determinada classe de parâmetros.

As diferentes classes de parâmetros podem ser reconstruídas simultaneamente ou de forma hierárquica, ou sequencial, ou ainda, de forma híbrida, quando uma classe é reconstruída isoladamente e, em seguida, uma combinação de classes é recuperada em conjunto. Em seu trabalho, PRIEUX *et al.* (2013) destacou que a definição da estratégia empregada é função da sensibilidade de cada classe de parâmetros e deve ser levada em conta para mitigar os efeitos de *crosstalk*, aumentando a convergência e melhorando o resultado final.

Ao considerar uma hierarquia no processo de inversão, busca-se inverter primeiramente a classe de parâmetros dominante, mantendo as outras com valores arbitrários fixos. Os dados registrados em determinados *offsets*, para os quais aquela classe de parâmetro exerce maior influência, devem ser incluídos prioritariamente no esquema. Em analogia a técnica multiescala, proposta por BUNKS *et al.* (1995), a inversão hierárquica prioriza reconstrução dos comprimentos de onda referentes à classe de parâmetro dominante, evitando assim incorporar comprimentos de ondas sensíveis a mais de uma classe de parâmetros.

Por outro lado, na inversão simultânea todas as classes de parâmetros são atualizadas ao mesmo tempo e, como descrito por PRIEUX *et al.* (2013), tal metodologia reduz artefatos relativos à estratégia hierárquica: a reconstrução da classe de parâmetros dominante, em isolado, pode contribuir para redução dos resíduos associados a classes de parâmetros secundárias e, com isso, prejudicar a inversão das classes secundárias.

Como apontado por WANG e DONG (2015), técnicas de normalização e a correta escolha do método de otimização também podem acelerar a convergência dos algoritmos de inversão, ajustando as ordens de grandeza de diferentes classes de

parâmetros.

3.4.1 Formulação matemática da inversão multiparamétrica

Consideremos uma inversão monoparamétrica, ou seja, de apenas uma propriedade ou classe de parâmetros, a velocidade de ondas compressoriais representada por v . Seja um modelo discreto, de N parâmetros, a equação de atualização do modelo de velocidades, segundo o método de Gauss-Newton, descrita na Equação 3.20, pode ser representada da seguinte forma:

$$\nabla \mathbf{E}_v + \mathbf{H}_{a_v} \Delta \mathbf{v} = 0, \quad (3.28)$$

onde o gradiente $\nabla \mathbf{E}_v$ é um vetor coluna de dimensão N , que indica a direção de atualização do modelo; a matriz Hessiana aproximada \mathbf{H}_{a_v} é uma matriz de dimensão $N \times N$, que indica a curvatura da atualização do modelo; e $\Delta \mathbf{v}$ é o vetor, de ordem N , que quantifica a variação do modelo de velocidades.

A Equação 3.28 ainda pode ser escrita em termos da matriz Jacobiana \mathbf{J}_v :

$$\nabla \mathbf{E}_v + \mathbf{J}_v^T \mathbf{J}_v \Delta \mathbf{v} = 0, \quad (3.29)$$

Consideremos agora um meio acústico descrito pela velocidade compressional v e pela densidade ρ , também de dimensão N . Dessa forma, temos uma inversão multiparamétrica, na qual a atualização do modelo é dada pelo sistema a seguir:

$$\begin{pmatrix} \nabla \mathbf{E}_v \\ \nabla \mathbf{E}_\rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{J}_v^T \\ \mathbf{J}_\rho^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_v & \mathbf{J}_\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \rho \end{pmatrix} = 0, \quad (3.30)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_v^T \\ \mathbf{J}_\rho^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_v & \mathbf{J}_\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_v^T \mathbf{J}_v & \mathbf{J}_v^T \mathbf{J}_\rho \\ \mathbf{J}_\rho^T \mathbf{J}_v & \mathbf{J}_\rho^T \mathbf{J}_\rho \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

representa a matriz Hessiana aproximada.

A matriz Hessiana aproximada é construída em $n \times n$ blocos, onde n é o número de classes de parâmetros envolvidos no processo de inversão e cada bloco é composto por $N \times N$ elementos. Os blocos da diagonal representam a correlação entre perturbações do campo, relativas a uma mesma classe de parâmetros, enquanto os blocos fora da diagonal representam a correlação entre perturbações causadas por classes de parâmetros distintas (MÉTIVIER *et al.*, 2015).

Para esse caso, a Hessiana aproximada apresenta-se como uma matriz composta por 2×2 blocos. Com relação aos blocos da diagonal, temos os elementos da diagonal representando a autocorrelação no deslocamento nulo entre os tempos dos campos espalhados pela mesma classe de parâmetros, na mesma posição do

modelo, enquanto os elementos fora da diagonal relacionam a sensibilidade do campo a variação da mesma classe de parâmetros em posições distintas (YANG *et al.*, 2016).

Os blocos fora da diagonal correspondem a correlação entre as matrizes de sensibilidade referentes a propriedades diferentes, refletindo os efeitos de *trade-off*, ou ambiguidade, entre as respostas de duas classes de parâmetros. Dessa forma, os elementos da diagonal estão associados à sensibilidade entre duas classes de parâmetros, para uma mesma posição do modelo, enquanto os elementos fora da diagonal estão associados à sensibilidade entre duas classes de parâmetros, em posições distintas (YANG *et al.*, 2016).

A Hessiana inversa reduz os efeitos de *trade-off* entre as duas classes de parâmetros e tende a corrigir a desproporção nas direções de atualização do gradiente, decorrente de iluminação incompleta, cobertura de aquisição limitada, propriedades físicas com unidades de medida e respostas de ordem de grandeza diferentes, dentre outros. Todavia, para problemas inversos em grande escala, o seu cálculo é impraticável e acaba sendo desprezado. Por esta razão, é indicado avaliar a influência do padrão de radiação na inversão da forma completa da onda baseada nos métodos do gradiente.

Capítulo 4

Análise de sensibilidade

Segundo VIRIEUX e OPERTO (2009), a avaliação da sensibilidade por meio dos padrões de radiação permite-nos quantificar o quão dissociadas estão as respostas de diferentes classes de parâmetros em função do ângulo de espalhamento, ou ainda do *offset*, e até que ponto elas podem ser reconstruídas de forma confiável durante a inversão. De acordo com OPERTO *et al.* (2013) as respostas de diferentes classes de parâmetros podem apresentar diferentes ordens de grandeza, que pode agravar o problema de mau condicionamento da inversão multiparamétrica, caso as direções de atualização dos parâmetros não estiverem adequadamente escaladas.

O estudo da sensibilidade da inversão da forma completa da onda permite avaliar a distribuição das amplitudes ao longo da frente de onda espalhada, bem como a fração de energia direcionada à superfície em função da posição dos receptores. Com isso é possível definir estratégias de processamento dos dados de forma a reduzir as interferências causadas por diferentes classes de parâmetros.

As seções a seguir apresentam os conceitos de sensibilidade do método sísmico e seus fundamentos. Para uma maior compreensão do tema, a seção 4.1 descreve o conceito de fonte virtual e seu papel no cálculo das derivadas de Fréchet. Na seção 4.2 será apresentada a formulação empregada para obtenção da fonte virtual, valendo-se da teoria da aproximação de Born de primeira ordem. Todos os conceitos apresentados serão relevantes para a exposição da análise de sensibilidade de três diferentes parametrizações, para o caso elástico isotrópico, enunciadas na seção 4.3.

4.1 Derivadas de Fréchet

A inversão FWI caracteriza-se por ser um problema de otimização local baseado no gradiente de um funcional objetivo e, por isto, o cálculo do gradiente é decisivo quando se trata da convergência do método, determinando a direção de atualização do modelo e conseqüente redução do erro entre os dados observados e calculados (MACEDO, 2014). O funcional objetivo a ser minimizado depende das chamadas

variáveis de estado que, por sua vez, são funções dos parâmetros do modelo. Diante disso, a construção do gradiente do funcional objetivo através do cálculo das derivadas de Fréchet é dispendiosa e, via de regra, contornada nos algoritmos de inversão.

Como comentado no Capítulo 3, a alternativa encontrada para o cálculo do gradiente do funcional objetivo está fundamentada na teoria do estado adjunto, evitando o cálculo exaustivo de cada um dos componentes da matriz sensibilidade. Porém, apesar de acarretar um grande custo à inversão, o cálculo das derivadas de Fréchet está no centro das atenções quando o assunto é avaliar a sensibilidade do método sísmico em relação a uma determinada parametrização.

As derivadas de Fréchet podem ser calculadas partindo-se de duas formulações. Sob o ponto de vista do cálculo explícito de cada um dos componentes da matriz sensibilidade, fazemos uso da teoria do cálculo diferencial para estimar as derivadas numéricas do campo de onda em cada ponto do modelo, dada a variação de uma das propriedades físicas deste mesmo ponto. Enquanto que, quando deseja-se calcular as derivadas implicitamente, pode-se empregar o conceito de fonte virtual, descrito a seguir.

Seja a equação de estado:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m})\mathbf{u} = \mathbf{s}, \quad (4.1)$$

onde o operador linear \mathbf{G} , no escopo da modelagem sísmica, é análogo às Equações 3.2 e 3.3; o campo de pressão \mathbf{u} representa a variável de estado, função não linear dos parâmetros do modelo \mathbf{m} ; e a fonte primária do campo de ondas está representada por \mathbf{s} .

A derivada parcial da Equação 4.1 em relação ao l -ésimo parâmetro do modelo fornece a expressão da derivada parcial do campo de ondas em relação ao parâmetro m_l , ou seja, a derivada de Fréchet:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m})}{\partial m_l} \right) \mathbf{u} = 0, \quad (4.2)$$

representada por $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l} \right)$.

Partindo da Equação 4.2, PRATT *et al.* (1998) apresentaram o conceito de fonte virtual para solução do campo espalhado:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l} \right) = \mathbf{f}_v^l, \quad (4.3)$$

onde \mathbf{f}_v^l corresponde a fonte virtual localizada no ponto l do modelo em questão, dada por:

$$\mathbf{f}_v^l = - \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m})}{\partial m_l} \right) \mathbf{u}. \quad (4.4)$$

A fonte virtual representa o campo de ondas emitido pela fonte primária \mathbf{s} e espalhado pelo ponto difrator m_l . A perturbação resultante no campo de ondas $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l}\right)$ corresponde à l -ésima componente da derivada de Fréchet, ou ainda, da matriz Jacobiana, que mede a sensibilidade do campo \mathbf{u} em relação ao parâmetro m_l .

Tomando por analogia o problema direto descrito na Equação 4.1, as derivadas parciais do campo de onda $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l}\right)$ podem ser obtidas solucionando a Equação 4.3, substituindo a fonte primária pela fonte virtual. A fonte virtual é dada pelo negativo do produto entre a derivada do operador \mathbf{G} em relação ao parâmetro em análise $\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m})}{\partial m_l}\right)$ e o campo de ondas incidente \mathbf{u} , como descrito na Equação 4.4.

A derivada do operador \mathbf{G} em relação ao parâmetro m_l é função da parametrização escolhida e, portanto, representa a sensibilidade dos dados ao parâmetro l do modelo de propriedades \mathbf{m} e controla o padrão de espalhamento do campo difratado, ou seja, determina a amplitude do campo em função do ângulo de espalhamento (PRATT *et al.*, 1998; PRIEUX *et al.*, 2013; VIRIEUX e OPERTO, 2009). O cálculo das derivadas parciais podem ser deduzidas empregando as aproximações de Born de primeira ordem (PRATT *et al.*, 1998; TARANTOLA, 1986; WU e AKI, 1985), apresentadas na próxima seção.

4.2 Aproximação de Born

Segundo o princípio de HUYGENS (1678), cada partícula de um meio no qual propagam-se ondas de corpo transmite o movimento às partículas circundantes e, por este motivo, cada partícula age como uma fonte pontual de novas frentes de ondas, as secundárias. Num instante de tempo posterior, a interferência construtiva das frentes de ondas secundárias, para um modelo homogêneo, resulta em apenas uma envoltória. Quando a propagação se dá em um meio heterogêneo, novas frentes de ondas surgem em virtude das diferentes interações da onda incidente com as heterogeneidades do meio (CHAPMAN, 2004).

A teoria do espalhamento proposta por BORN e OPPENHEIMER (1927), foi inicialmente aplicada à mecânica quântica com objetivo de simplificar o potencial energético do núcleo e dos elétrons de um átomo. A problemática básica da teoria do espalhamento está fundamentada na descrição do potencial de espalhamento de uma partícula do sistema. Desse modo, as aproximações de Born relacionam um espalhamento no campo de onda a uma pequena variação aplicada aos parâmetros do modelo.

Na temática do problema inverso, as aproximações de primeira ordem são tomadas em muitos problemas práticos, seja na exploração geofísica ou até mesmo, em imagens médicas, testes não destrutivos, dentre outras aplicações (BEYLKIN e

BURRIDGE, 1990).

A maioria dos métodos de aproximação adotada na modelagem geofísica está baseada na teoria dos raios assintóticos, através da qual alguns fenômenos não são descritos com precisão, sobretudo para regiões de geologia complexa (MACEDO, 2014). Em contrapartida, as aproximações de Born estendem a teoria dos raios assintóticos para modelagem de campos espalhados, provenientes de perturbações em um modelo de referência, ou seja, em heterogeneidades nas quais a teoria dos raios assintóticos não fornece boas soluções (CHAPMAN, 2004).

A linearização do problema inverso é alcançada atribuindo pequenas perturbações no campo a variações desconhecidas dos parâmetros do modelo de referência (BEYLKIN e BURRIDGE, 1990). Dessa forma, as aproximações de primeira ordem são usadas para estabelecer uma aproximação linear apropriada para problemas inversos não lineares (BEYLKIN e BURRIDGE, 1990; GUBERNATIS *et al.*, 1977; HUDSON e HERITAGE, 1981).

Consideremos o modelo ilustrado na Figura 4.1, adaptado a partir do *benchmark* desenvolvido pela HESS CORPORATION e disponibilizado pela *Society of Exploration Geophysicists* (SEG). O modelo representa uma estrutura geológica complexa, com dois reservatórios trapezados por um domo salino.

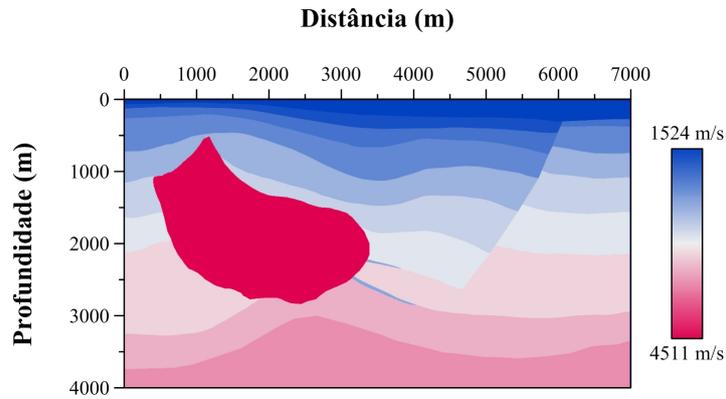


Figura 4.1: Modelo verdadeiro \mathbf{m} , obtido a partir do modelo Hess original.

Seja o modelo verdadeiro de velocidades, ilustrado na Figura 4.1, decomposto em um modelo de velocidades de fundo e um modelo de refletividades, ilustrado nas Figuras 4.2(a) e 4.2(b), respectivamente.

Para o modelo de velocidades de fundo \mathbf{m}_0 , a propagação do campo de fundo \mathbf{u}_0 , gerado pela fonte primária \mathbf{s} , é controlada pelo operador \mathbf{G} , satisfazendo:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_0)\mathbf{u}_0 = \mathbf{s}. \quad (4.5)$$

Seja uma pequena perturbação no modelo de fundo dada por $\Delta\mathbf{m}$. No modelo verdadeiro, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}$, propaga-se um novo campo de ondas, aqui denominado

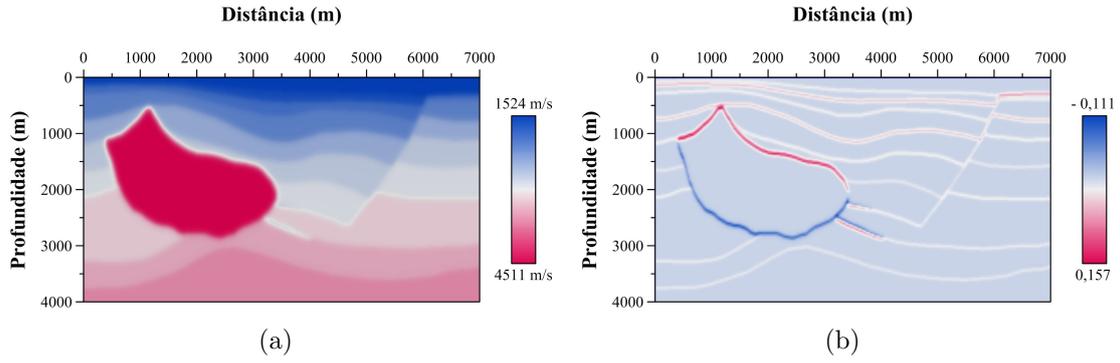


Figura 4.2: Modelos (a) de velocidade de fundo \mathbf{m}_0 e (b) de refletividade $\Delta\mathbf{m}$, obtidos a partir do modelo verdadeiro.

por campo de onda total. O campo total é dado pela soma do campo de fundo \mathbf{u}_0 e o campo espalhado \mathbf{u}_{sct} , proveniente da perturbação no modelo, e sua propagação satisfaz a seguinte equação:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m})\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{m})\mathbf{u}_0 + \mathbf{G}(\mathbf{m})\mathbf{u}_{sct} = \mathbf{s}. \quad (4.6)$$

Seja o campo de fundo dado por $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{sct}$, ilustrado pela Figura 4.3(a), sua propagação no modelo de velocidades de fundo \mathbf{m}_0 , regida pela Equação 4.5, agora obedece a seguinte equação:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{sct}) = \mathbf{s}. \quad (4.7)$$

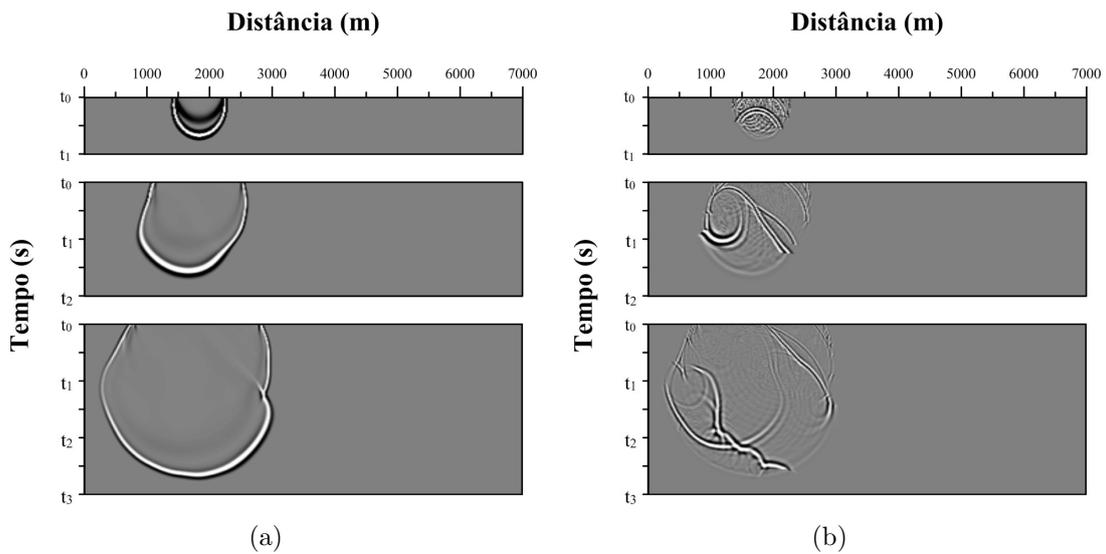


Figura 4.3: Campos (a) de fundo \mathbf{u}_0 e (b) espalhado \mathbf{u}_{sct} , propagando-se no modelo de velocidades de fundo \mathbf{m}_0 .

Subtraindo as Equações 4.6 e 4.7, temos a expressão que rege a propagação do

campo espalhado \mathbf{u}_{sct} , no modelo de velocidades de fundo \mathbf{m}_0 , ilustrado na Figura 4.3(b):

$$\mathbf{G}(\mathbf{m})\mathbf{u} - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0)\mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{m}_0)\mathbf{u}_{sct} = 0. \quad (4.8)$$

Sendo o modelo verdadeiro separado em um modelo de fundo \mathbf{m}_0 , ou de referência, e uma perturbação $\Delta\mathbf{m}$, ao empregar as aproximações de Born, o campo espalhado \mathbf{u}_{sct} é obtido em termos da solução no modelo de fundo:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_0)\mathbf{u}_{sct} = -(\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0))\mathbf{u}, \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{sct}$, resultando em:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_0)\mathbf{u}_{sct} = -(\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0))(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{sct}), \quad (4.10)$$

ou ainda:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_0)\mathbf{u}_{sct} = -(\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0))\mathbf{u}_0 - (\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0))\mathbf{u}_{sct}, \quad (4.11)$$

onde a fonte primária foi substituída por uma fonte virtual, correspondente ao lado direito da Equação 4.11.

Isto implica que a solução do campo espalhado \mathbf{u}_{sct} é composta por espalhamentos simples ou de primeira ordem, representados por $(\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0))\mathbf{u}_0$, e por espalhamentos múltiplos ou segunda ordem, dados por $(\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0))\mathbf{u}_{sct}$, esquematizados na Figura 4.4.

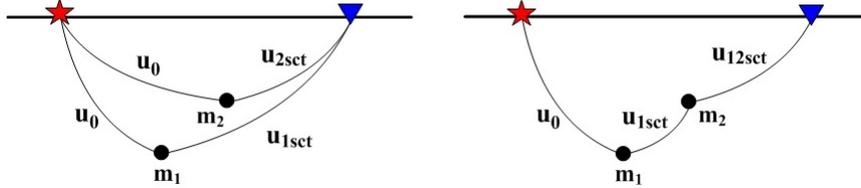


Figura 4.4: Esquema de espalhamentos simples e múltiplos. Adaptado de: OPERTO (2012).

Desprezando o termo de segunda ordem do lado direito da Equação 4.11, temos a aproximação de primeira ordem para o campo espalhado, supondo $\mathbf{u}_0 \gg \mathbf{u}_{sct}$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_0)\mathbf{u}_{sct} \approx -(\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0))\mathbf{u}_0, \quad (4.12)$$

sob a qual baseia-se a construção do gradiente do funcional objetivo para inversão FWI.

Consideremos, para Equação 4.12, que uma perturbação pontual do modelo, dada apenas no l -ésimo ponto, cause um espalhamento \mathbf{u}_{sct} no campo de fundo,

que pode ser visto como a derivada parcial do campo em virtude da variação na propriedade $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l}\right)$. Por sua vez, o operador $(\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0))$, obtido em função da variação do modelo, pode ser reescrito como $\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m})}{\partial m_l}\right)$ e controla a propagação do campo de acordo com:

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_0) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l}\right) \approx - \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m})}{\partial m_l}\right) \mathbf{u}_0, \quad (4.13)$$

resultando em uma aproximação linear para as derivadas de Fréchet, conforme descritas na Equação 4.2.

O operador $\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m})}{\partial m_l}\right)$ controla a geometria de espalhamento do campo de ondas secundário, dessa forma, a fonte virtual determina o particionamento da energia da frente de onda e a direção preferencial de propagação do campo difratado por cada classe de parâmetro, para determinada combinação de propriedades. Na seção seguinte será apresentada a característica geométrica dos padrões de radiação, bem como o direcionamento da energia será quantificado.

4.3 Análise de sensibilidade

De acordo com TARANTOLA (1986), as parametrizações empregadas para descrever a Terra, embora teoricamente sejam equivalentes, se não forem adequadamente escolhidas de acordo com a sua sensibilidade, não contribuem para a convergência dos algoritmos de inversão. Portanto, é indispensável examinar a sensibilidade do campo de ondas sísmicas à cada classe de parâmetros, para uma combinação em particular. Dessa forma, uma boa escolha fornece diferentes padrões de espalhamento do campo para cada classe de parâmetro, facilitando a identificação da resposta característica de cada uma delas (TARANTOLA, 1986; WU e AKI, 1985).

Como descrito por PRIEUX *et al.* (2013), uma perturbação pontual de um dos parâmetros do modelo controla a amplitude do campo espalhado, em função do ângulo de espalhamento. Ao comportamento de difração do campo em função do ângulo dá-se o nome de padrão de radiação. Uma vez que o ângulo de dispersão está estreitamente relacionado com os comprimentos de ondas (GHOLAMI *et al.*, 2013; JANNANE *et al.*, 1989; PRATT e WORTHINGTON, 1990; SIRGUE e PRATT, 2004), o padrão de radiação sugere a viabilidade da construção de determinada classe de parâmetro através da inversão FWI, em função do *offset* do campo de ondas registrado (GHOLAMI *et al.*, 2013; PRIEUX *et al.*, 2013), assim como reduz o mau condicionamento do problema inverso (WU e AKI, 1985).

O campo espalhado em consequência da variação de um dos parâmetros corresponde à derivada parcial do campo em relação ao parâmetro em questão.

O padrão de radiação pode ser interpretado, fisicamente, como uma medida da sensibilidade do campo de ondas à determinada propriedade física, levando-se em conta a parametrização escolhida (GHOLAMI *et al.*, 2013).

Segundo TARANTOLA (1986), para descrever a Terra como um meio perfeitamente elástico e isotrópico, três classes de parâmetros são necessárias: duas propriedades elásticas em conjunto com a densidade do meio. Em seu trabalho, foi demonstrado que a escolha das classes de parâmetros envolvidas no processo de otimização não é trivial. Diante disso, para acelerar a convergência dos algoritmos de inversão, é preciso escolher classes de parâmetros que apresentem comportamentos dissociados.

Nesta seção serão descritas as três parametrizações abordadas por TARANTOLA (1986), para o caso de análise de sensibilidade de meios elásticos isotrópicos para inversão FWI. A primeira parametrização é referente aos parâmetros de Lamé e densidade, a segunda parametrização refere-se às velocidades de propagação de ondas compressional e cisalhante e densidade do meio e a terceira envolve as impedâncias compressional e cisalhante, em conjunto com a densidade.

Os padrões de radiação de cada uma das parametrizações mencionadas acima, foram estimados numericamente por meio da modelagem 2D da equação elástica isotrópica no domínio do tempo. Utilizou-se um esquema de diferenças finitas para solucionar o sistema de equações de primeira ordem descrito na Equação 3.2, o qual calcula o campo de onda em termos das velocidades das partículas e das tensões. Para tanto, uma malha intercalada padrão, com precisão de 2ª ordem no tempo e 4ª ordem no espaço, foi adotada.

Para avaliação dos padrões de espalhamento do campo, utilizaram-se modelos de fundo bidimensionais homogêneos, com uma malha de 600×600. Para o esquema de diferenças finitas utilizados na modelagem do campo, adotou-se um espaçamento regular de 10 metros nas direções horizontal e vertical, intervalo de passo de tempo de 0,001 segundos e tempo total de registro de 2 segundos.

Para atenuação das reflexões geradas nos limites do modelo utilizou-se 50 pontos nas bordas absorptivas propostas por CERJAN *et al.* (1985) e as condições de contorno de REYNOLDS (1978) foram adotadas em todas as extremidades do modelo.

A modelagem foi feita para um único tiro, posicionado na parte central da superfície superior do modelo, a uma profundidade de 30 metros, e os receptores foram posicionados em todos os pontos da superfície de aquisição na mesma profundidade do tiro. A fonte utilizada é a Ricker (RICKER, 1953), com uma frequência de corte de 50 Hz⁴.

Partindo da Equação 4.2, calculamos as derivadas parciais de cada uma das

⁴Frequência dominante de aproximadamente 7 Hz.

classes de parâmetros, ou seja, a perturbação do campo de onda resultante de uma variação de 1% da propriedade no ponto central da malha (300,300), enquanto os valores das outras duas propriedades eram mantidos no valor inicial.

Para se avaliar qualitativamente o comportamento dos campos de ondas espalhados, todas as frentes de onda dos campos de tensão foram plotadas considerando a sua máxima amplitude (Figuras 4.5, 4.7 e 4.9). Para cada um dos campos, a máxima amplitude da frente de onda foi medida e plotada em função do ângulo de espalhamento sobre o instantâneo da frente de onda, representando os padrões de radiação para cada classe de parâmetros.

A contagem do ângulo de espalhamento é feita considerando incidência de uma frente de onda normal a uma interface horizontal. Dessa forma, os baixos ângulos de espalhamento estão relacionados aos dados de reflexão registrados em curtos *offsets*, enquanto dados de reflexão e refração registrados nos longos *offsets* estão relacionados aos altos ângulos de espalhamento.

Para uma avaliação quantitativa da sensibilidade de cada parâmetro, as máximas amplitudes das derivadas de Fréchet foram registradas e ilustradas em função do posição do receptor, excluindo os 50 pontos (500 metros) das bordas absorptivas (Figuras 4.6, 4.8 e 4.10). Todas as amplitudes foram normalizadas em relação a máxima amplitude observada, que corresponde a derivada de Fréchet em relação à velocidade compressional, para combinação de velocidades e densidade.

4.3.1 λ , μ e ρ

A primeira parametrização avaliada trata-se do conjunto dos dois parâmetros de Lamé, λ e μ , que caracterizam meios elásticos isotrópicos em conjunto com a densidade ρ . Os parâmetros de Lamé são funções das velocidades de propagação de ondas sísmicas, através das seguinte relações:

$$\lambda = \rho V_p^2 - 2\rho V_s^2 \quad (4.14a)$$

e

$$\mu = \rho V_s^2, \quad (4.14b)$$

onde λ corresponde ao primeiro parâmetro de Lamé, relacionado com o módulo volumétrico e com o módulo de rigidez através da Equação 2.1 e expressa a razão tensão-deformação quando da aplicação de pressão hidrostática. O segundo parâmetro de Lamé, ou módulo de rigidez, representado por μ , representa a resistência à deformação cisalhante, dada a aplicação de uma força cisalhante.

Cada uma das classes de parâmetros apontada, ao sofrer modificação, apresenta uma resposta de padrão característico, no sentido de exibir diferentes distribuições

de energia na frente de onda em função do ângulo de espalhamento. Os padrões de radiação para λ , μ e ρ estão apresentados na Figura 4.5.

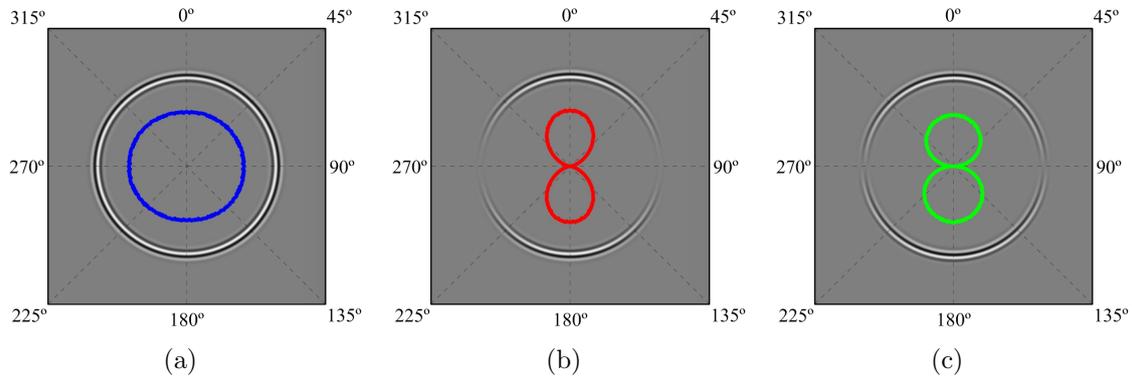


Figura 4.5: Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação para uma perturbação de 1% nas classes de parâmetros: (a) λ (em azul), (b) μ (em vermelho) e (c) ρ (em verde), respectivamente.

De acordo com os padrões de radiação ilustrados, o primeiro parâmetro de Lamé comporta-se de forma homogênea, difratando uma frente de onda de mesma amplitude para todos os ângulos de espalhamento. Já o padrão de radiação para densidade e para o segundo parâmetro de Lamé direcionam a maior parte da energia difratada para os curtos *offsets* e uma menor quantidade de energia para os longos *offsets*.

As amplitudes das derivadas de Fréchet, registradas em superfície, traduzem a máxima energia espalhada por cada classe de parâmetro em análise. A Figura 4.6 mostra a distribuição da máxima amplitude normalizada, registrada em superfície, em função do *offset*.

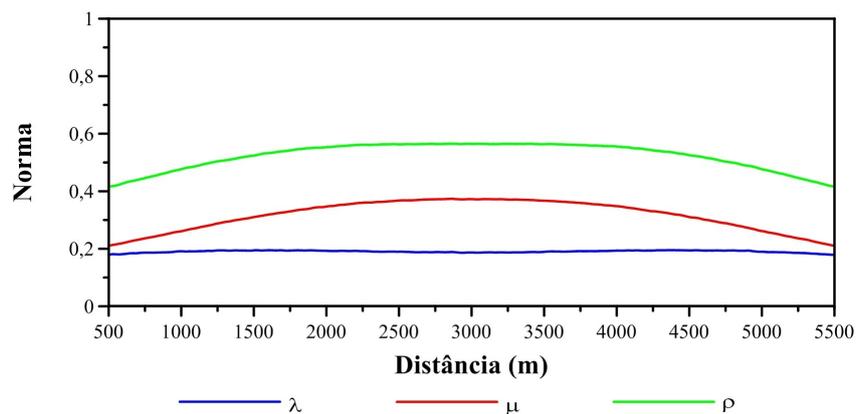


Figura 4.6: Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet, em superfície, para uma variação de 1% para as classes de parâmetros λ , μ e ρ .

A distribuição da energia difratada pelo primeiro parâmetro de Lamé indica uma chegada de energia praticamente constante ao longo de todos os *offsets*.

Apesar da frente de onda apresentar a mesma amplitude para todos os ângulos de espalhamento, ainda é possível notar um ligeiro decaimento nas amplitudes em direção às extremidades do modelo por conta da perda de amplitude causada pelo espalhamento geométrico da energia, efeito da divergência esférica. Todavia, apesar de apresentar um comportamento mais estável, a perturbação no primeiro parâmetro de Lamé transmite a menor quantidade de energia em relação aos outros parâmetros.

No que se refere ao segundo parâmetro de Lamé e à densidade, há um maior decréscimo da energia em função do *offset*, em razão do decaimento na amplitude da frente de onda ao longo do crescimento do ângulo de abertura do espalhamento. No entanto, o segundo parâmetro de Lamé apresenta uma maior amplitude, quando comparado ao primeiro parâmetro. A densidade, por sua vez, é o parâmetro dominante, em termos de energia direcionada aos receptores.

Embora a densidade mostre-se como classe de parâmetro dominante para este conjunto, não é o que se observa em modelos mais complexos. CHOI *et al.* (2008) mostraram, para o caso do modelo Marmousi 2D, bons resultados para inversão elástica de densidade e parâmetros de Lamé no domínio da frequência, entretanto, empregando frequências impraticáveis para casos reais (0,125 Hz).

JEONG e MIN (2012) propuseram uma estratégia de inversão híbrida, no domínio de frequência. Os parâmetros de Lamé foram priorizados em detrimento da densidade, e foram estimados com a densidade fixa. Em seguida, os parâmetros de Lamé e a densidade são atualizados simultaneamente, obtendo modelos mais acurados.

De acordo com (PAN *et al.*, 2017), a densidade é um parâmetro fundamental para caracterização de reservatórios, todavia é evitada na inversão em virtude do seu mau condicionamento, possivelmente causado pela fraca sensibilidade aos tempos de trânsito e fortes contaminações por sinais oriundos dos parâmetros elásticos. Segundo MACEDO (2014), em se tratando de meios acústicos ou elásticos, reconstruir a densidade ainda é um desafio e, por este motivo, normalmente a mesma é estimada utilizando relações empíricas ou atribui-se um valor constante (PRZEBINDOWSKA *et al.*, 2012).

4.3.2 V_p , V_s e ρ

Outra parametrização comumente empregada para descrever a subsuperfície consiste no conjunto de velocidades de propagação de ondas de corpo e densidade do meio. As velocidades de propagação de ondas de corpo estão relacionadas às propriedades elásticas do meio rochoso segundo a Equação 2.3.

No método sísmico, as ondas de corpo transmitem energia da fonte sísmica para o meio rochoso através do movimento das partículas. Segundo KEAREY *et al.* (2002),

a maioria dos levantamentos sísmicos leva em consideração apenas a velocidade compressional por questões de simplificação no levantamento e, conseqüentemente, no processamento dos dados adquiridos. Todavia, as velocidades de ondas compressonais, em isolado, não são bons indicadores de litologia (KEAREY *et al.*, 2002).

O registro das ondas cisalhantes em ambiente marinho é comprometido em virtude da necessidade de uma tecnologia de aquisição mais sofisticada para registrar as componentes do movimento transmitido ao meio, bom como é demandado um maior esforço computacional para o processamento dos dados (KEAREY *et al.*, 2002). Entretanto, a razão V_p/V_s , bem como a densidade, são importantes para identificação litológica e para caracterização de reservatórios de hidrocarbonetos.

Na literatura são apresentadas algumas relações empíricas entre as velocidades sísmicas e a densidade das rochas (BROCHER, 2005; CASTAGNA *et al.*, 1993; GARDNER *et al.*, 1974; WANG, 2001). As relações empíricas estão baseadas em hipóteses a respeito da litologia, fluido saturante e pressão de poros, dentre outras suposições, o que não se aplica às formações sedimentares em sua totalidade, recaindo na necessidade de inclusão da densidade no processo de inversão.

Diante da importância desse conjunto de propriedades a sensibilidade de cada uma das três classes de parâmetros foi avaliada. Os padrões de radiação para V_p , V_s e ρ estão apresentados na Figura 4.7.

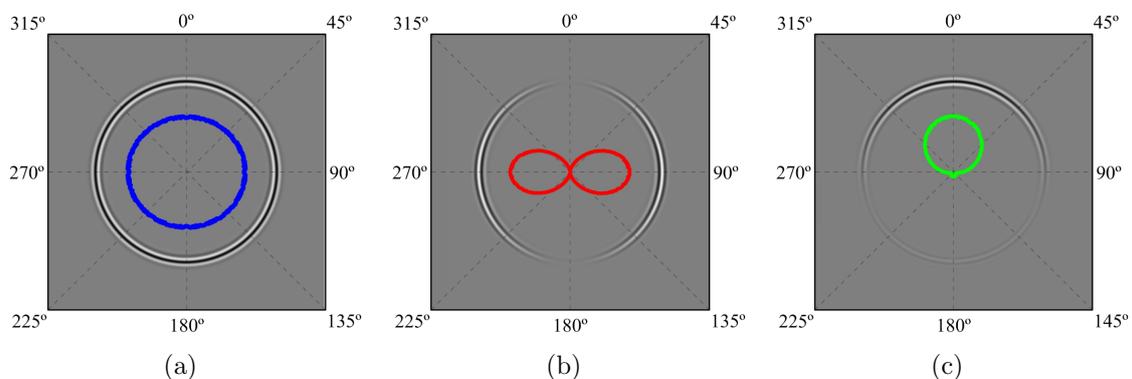


Figura 4.7: Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação para uma perturbação de 10% nas classes de parâmetros: (a) V_p (em azul), (b) V_s (em vermelho) e (c) ρ (em verde), respectivamente.

Para este conjunto de propriedades, a velocidade compressional mostrou-se como classe de parâmetro dominante, apresentando um padrão de espalhamento isotrópico, com uma frente de onda de mesma amplitude para todos os ângulos de espalhamento.

As velocidades de ondas cisalhantes, por sua vez, direcionam energia apenas lateralmente e, por esta razão a recuperação de modelos de velocidade compressional

prevalece em detrimento da velocidade cisalhante, especialmente quando utilizam-se apenas *offsets* curtos.

Para este conjunto de propriedades, a densidade direciona praticamente toda energia para os curtos *offsets* e tal comportamento, semelhante àquele exibido pela velocidade compressional reforça a problemática de *crosstalk* entre as duas classes de parâmetros, sobretudo para curtos *offsets*.

As amplitudes das derivadas de Fréchet, registradas em superfície, traduzem a máxima energia espalhada pela classe de parâmetro em análise. A Figura 4.8 mostra a distribuição da máxima amplitude normalizada, registrada em superfície, em função do *offset*.

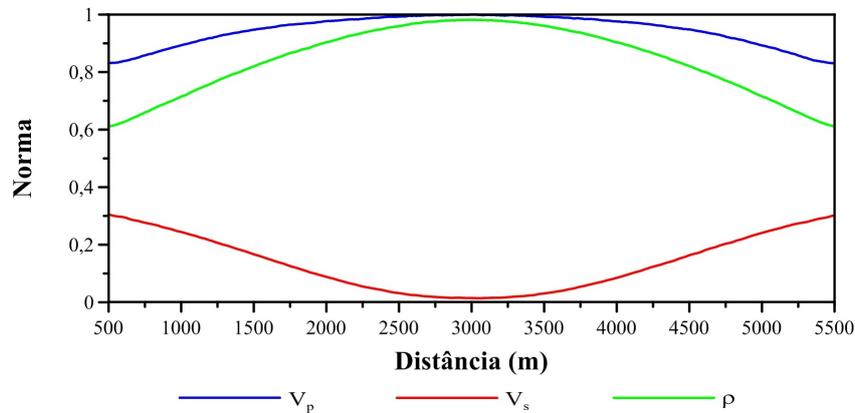


Figura 4.8: Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet, em superfície, para uma variação de 1% para as classes de parâmetros V_p , V_s e ρ .

A distribuição de amplitudes para velocidade compressional segue um padrão regular ao longo de todos os *offsets*, indicando uma chegada de energia praticamente uniforme ao longo de toda superfície. Assim como apresentado para o primeiro parâmetro de Lamé, o ligeiro decaimento da energia em direção às extremidades do modelo deriva dos efeitos de divergência esférica. Similarmente aos casos apresentados na literatura, a velocidade compressional apresenta-se como sendo a classe de parâmetros dominante (TARANTOLA, 1986; VIRIEUX e OPERTO, 2009; YANG *et al.*, 2016).

Em relação à velocidade cisalhante, ao contrário das outras propriedades, nota-se um crescimento da energia em direção às extremidades. Esse crescimento das amplitudes registradas em superfície decorre do crescimento das amplitudes da frente de ondas do campo espalhado com o aumento do ângulo de espalhamento.

A densidade, por sua vez, direciona a maior parte da energia aos curtos *offsets* e o rápido decaimento da energia registrada em superfície decorre da redução da amplitude do campo espalhado dado o aumento do ângulo de espalhamento. Em virtude das energias espalhadas pela velocidade compressional e densidade serem direcionadas, predominantemente para os curtos *offsets*, a reconstrução da

velocidade compressional é priorizada em detrimento da densidade buscando-se mitigar os efeitos de *crosstalk* entre as duas classes de parâmetros.

Apesar da densidade direcionar a maior parte da energia para os curtos *offsets*, causando *crosstalk* com a velocidade compressional e dificultar a convergência dos algoritmos de inversão, ainda é uma propriedade imprescindível para caracterização de reservatórios. Todavia, em virtude do seu mau condicionamento e alta não linearidade, a densidade é desprezada nos algoritmos de inversão na maioria das vezes, para qual adotam-se valores fixos.

Sabendo-se que a inversão FWI é sensível não só aos tempos de trânsito, como também às amplitudes, sob as quais a densidade exerce forte controle, PLESSIX *et al.* (2013) também destacaram a contribuição da densidade no reconhecimento dos efeitos de cada classe de parâmetro na alteração das amplitudes.

Em seu trabalho, PRIEUX *et al.* (2013) adotaram uma abordagem hierárquica, para qual a velocidade compressional se mostra dominante e é priorizada no processo, sendo reconstruída sem adoção de qualquer pré-condicionamento. Só após obter um modelo de velocidades preciso, no que se refere aos tempos de trânsito, é possível realizar uma inversão simultânea para todas as classes de parâmetros.

TARANTOLA (1986) e SEARS *et al.* (2008) demonstraram que as classes de propriedades puramente acústicas são dominantes na inversão FWI e, portanto, recomenda-se um processo de inversão hierárquica: reconstruindo a velocidade compressional, seguida pela velocidade cisalhante e, por fim, a densidade.

De acordo com SEARS *et al.* (2008), a velocidade das ondas cisalhantes é considerada uma classe de parâmetro secundária, especialmente em ambientes marinhos, onde a faixa de sedimentos não consolidados no fundo oceânico é um obstáculo à propagação e conseqüente registro das ondas cisalhantes. Dessa forma, desde que haja pouca conversão de ondas *S-P* no fundo oceânico, as velocidades de ondas compressionais fornecem bons resultados.

Com isso, a reconstrução de modelos de densidade confiáveis ainda mostra-se um tópico desafiador no contexto da inversão FWI (JEONG e MIN, 2012; QIN e LAMBARE, 2016; VIRIEUX e OPERTO, 2009), especialmente por conta do *crosstalk* entre as respostas das classes de parâmetros acústicos e a densidade, principalmente para curtos *offsets* (PAN *et al.*, 2017; QIN e LAMBARE, 2016; YANG *et al.*, 2016).

4.3.3 I_p , I_s e ρ

Outra propriedade física avaliada através do método sísmico é a impedância I , dada pelo produto entre a velocidade do meio e sua densidade. Desta forma, a impedância caracteriza a propriedade da camada, e não da interface, tal como

as amplitudes do dado sísmico (SANCEVERO *et al.*, 2006). Em razão disto, SANCEVERO *et al.* (2006) destacaram a impedância como sendo uma poderosa ferramenta no processo de caracterização de reservatórios, funcionando como entrada para geração de modelos de fácies e propriedades físicas das rochas. Ao propagar-se, a onda sofre reflexão nas interfaces de camadas com propriedades físicas diferentes e a amplitude da reflexão é função da variação de impedância entre dois meios.

Para esta combinação de propriedades, a impedância P , similarmente a velocidade compressional, também apresenta padrão de espalhamento isotrópico, com frente de onda de mesma amplitude para toda a abertura. O comportamento da impedância S é equivalente àquele apresentado pela velocidade de ondas cisalhantes, direcionando energia de forma simétrica para as laterais do modelo. A densidade, por sua vez, direciona, quase que em sua totalidade, a energia difratada para as partes mais profundas do modelo. As distribuições de amplitude em função do ângulo de espalhamento, para este conjunto de propriedades, estão ilustradas na Figura 4.9(a).

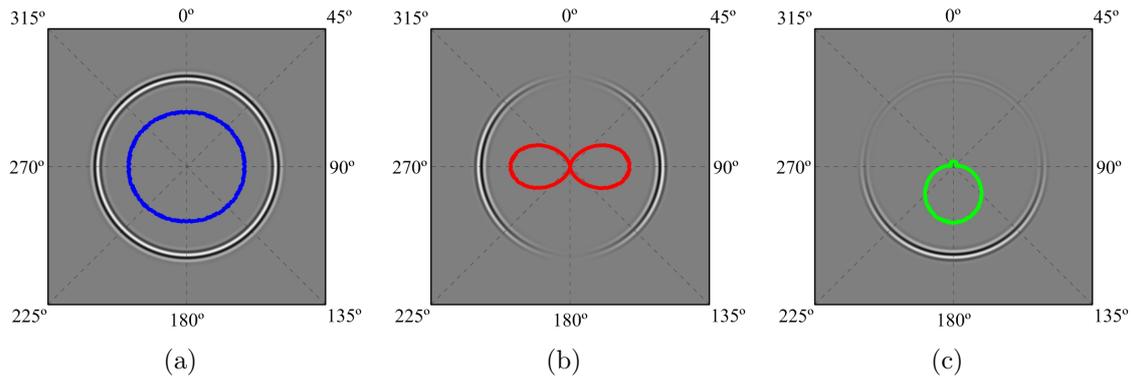


Figura 4.9: Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação para uma perturbação de 10% nas classes de parâmetros: (a) I_p (em azul), (b) I_s (em vermelho) e (c) ρ (em verde), respectivamente.

Assim como discutido para as outras parametrizações, o padrão de espalhamento provocado pela perturbação de cada uma das classes de parâmetros tem influência direta sobre a quantidade de energia registrada em superfície, ilustradas na Figura 4.10. Para este conjunto, o parâmetro dominante é a impedância P , enquanto a variação da impedância S direciona energia predominantemente para os longos *offsets* e a densidade direciona a menor fração de energia para curtos *offsets*.

Assim como para os outros dois conjuntos, a distribuição de amplitudes para impedância P segue um padrão regular ao longo de todos os *offsets*, com um ligeiro decaimento associado à divergência esférica do campo de onda.

Em relação a impedância S , assim como para a velocidade de ondas cisalhantes, há um pequeno decaimento de energia em direção aos curtos *offsets*, direcionando a energia para longos *offsets*. Por este motivo, a construção da impedância

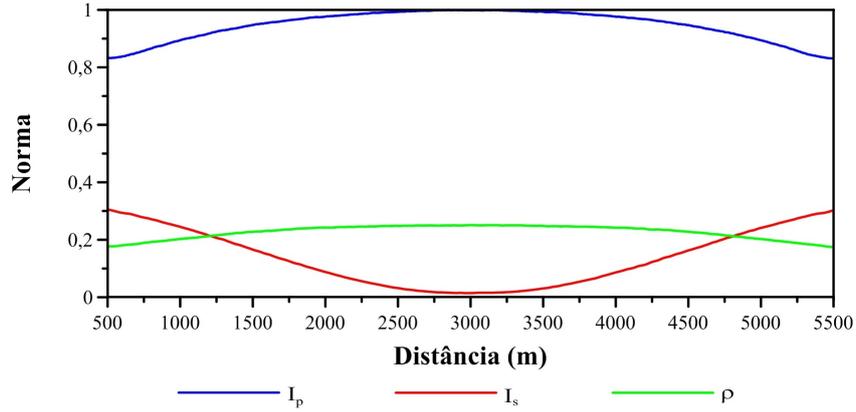


Figura 4.10: Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet, em superfície, para uma variação de 1% para as classes de parâmetros I_p , I_s e ρ .

P é priorizada em detrimento da impedância cisalhante, especialmente quando utilizam-se apenas *offsets* curtos.

Em termos de energia, a perturbação na densidade direciona a maior quantidade de energia para as partes mais profundas do modelo.

PRIEUX *et al.* (2013) avaliou o desempenho da inversão FWI visco-acústica, no domínio da frequência para reconstruir a velocidade compressional, densidade, impedância e fator de qualidade, a partir das componentes do hidrofone, de dados sintéticos do campo de Valhall, no Mar do Norte. Ao contrário da ideia amplamente difundida, a reconstrução da velocidade compressional e densidade, em conjunto, foneceu um bom modelo de velocidades assim como permitiu a estimativa da impedância a partir dos modelos de velocidades e densidades. Os efeitos de *crosstalk* foram satisfatoriamente removidos pela multiplicação de velocidade compressional e densidade, para construção do modelo de impedância P .

PEREIRA-DIAS *et al.* (2017) obtiveram bons resultados para migração RTM por mínimos quadrados, no domínio da imagem, para imageamento de impedâncias P e S de dois modelos sintéticos. Desprezando os efeitos da densidade, uma vez que suas respostas são direcionadas para longos *offsets*, foi possível reduzir os efeitos de *crosstalk* entre os parâmetros utilizando o conceito de fontes virtuais.

Por fim, YAO *et al.* (2018b) propuseram uma parametrização da equação acústica com densidade variável, em termos de V_p e I_p , para inversão da impedância P em três passos, são eles: obtenção de um modelo inicial de velocidades, a partir de tomografia de tempo de trânsito; inversão para V_p na parametrização V_p e ρ , atualizando o modelo de densidades através da relação de GARDNER *et al.* (1974); e, por fim, inversão para o modelo de impedância P , mantendo o mesmo modelo de velocidades. (YAO *et al.*, 2018b) observaram que os resultados são melhores para dados de curtos *offsets* e que o contraste de impedância é função, predominantemente, do contraste de densidades.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Neste capítulo serão apresentadas a modelagem e inversão FWI acústica isotrópica com densidade constante, para o modelo Marmousi 2D. Os resultados da inversão são avaliados através de dois perfis de velocidade, vertical e horizontal, extraídos em seções que atravessam o reservatório.

Com o intuito de avaliar a variação da sensibilidade do campo de ondas incidente ao longo da inversão, modelos correspondentes a três diferentes etapas do processo iterativo foram adotados como modelo de fundo para cálculo do campo espalhado e respectivo padrão de radiação. Aplicou-se uma variação de 10% da velocidade compressional para cada um dos diferentes modelos e a perturbação causada no campo de ondas incidente foi registrada em superfície, representando as derivadas de Fréchet.

São apresentados os instantâneos dos campos de ondas difratados em decorrência da inclusão de um ponto espalhador, bem como as amplitudes do campo em função do ângulo de espalhamento. Por fim, as normas das amplitudes registradas em superfície são apresentadas a fim de se analisar a variação da distribuição de energia direcionada à superfície em função da posição do receptor, para cada modelo.

5.1 Modelagem da equação acústica

O dado sintético foi obtido através da modelagem 2D da equação acústica isotrópica de segunda ordem, no domínio do tempo. Para tanto, foi implementado um esquema de diferenças finitas com precisão de 2ª ordem no tempo e 4ª ordem no espaço.

O modelo sintético utilizado para obtenção dos sismogramas foi o Marmousi 2D, baseado na geologia da Bacia de Cuanza e criado pelo Instituto Francês de Petróleo, em 1988, para reproduzir a aquisição de dados sísmicos complexos e que requeriam técnicas de processamento avançadas (VERSTEEG, 1994).

Utilizando o pacote *Seismic Unix*, desenvolvido pelo *Center for Wave Phenomena - Colorado School of Mines*, o modelo original, de dimensão 2301×751 , foi redimensionado para uma malha de 767×251 pontos, com espaçamentos horizontal e vertical de 10 metros, resultando em um modelo de 7670 metros na horizontal e 2510 metros na vertical. O modelo real de velocidades compressoriais está ilustrado na Figura 5.1 e a modelagem foi realizada assumindo densidade constante ($\rho = 1000 \text{ g/cm}^3$) para o meio.

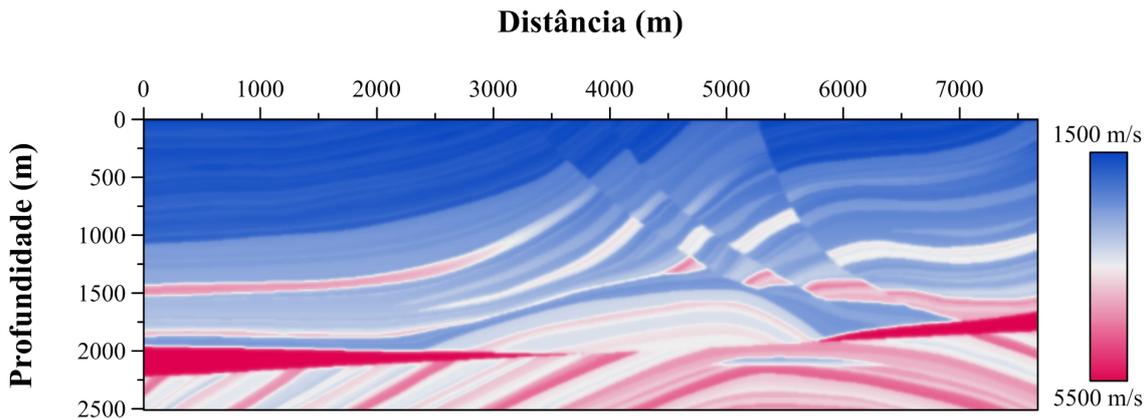


Figura 5.1: Modelo real de velocidades, baseado no Marmousi 2D, utilizado para modelagem do dado sintético.

Para modelagem da aquisição sísmica, assumimos a Terra como um meio finito em virtude da limitação computacional. A restrição da dimensão do modelo ocasiona reflexões indesejadas em suas bordas, que se sobrepõem aos eventos de interesse. Para evitar o surgimento de tais artefatos, implementou-se o esquema de bordas de absorção, proposto por CERJAN *et al.* (1985) e adotou-se de condições de contorno não-reflexivas, proposta por REYNOLDS (1978).

Para aquisição foi utilizada a configuração fonte-receptor do tipo lança simétrica (KEAREY *et al.*, 2002) foi adotada para aquisição, empregando a fonte Ricker (RICKER, 1953) num total de 76 tiros com espaçamento constante de 100 metros, a uma profundidade de 30 metros. Os 767 receptores foram posicionados a cada 10 metros a uma profundidade de 30 metros.

Para inversão dos dados utilizando a técnica de multiescala, os sismogramas sintéticos foram gerados por banda de frequência, partindo da frequência de corte de 2Hz até a frequência de corte de 30Hz, com um intervalo de 4Hz.

Os parâmetros referentes à geometria de aquisição e à solução numérica da modelagem estão apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros da modelagem acústica.

Parâmetros da modelagem	
Número de pontos do modelo	767×251
Número de pontos das bordas de absorção	50 pontos
Espaçamento da malha	10 m
Passo de tempo	0,36 ms
Número de passos de tempo total	8333
Tempo total da modelagem	3 s
Número de tiros	76
Espaçamento entre tiros	100 m
Profundidade dos tiros	30 m
Número de receptores	767
Espaçamento entre receptores	10 m
Profundidade dos receptores	30 m
Frequência de corte	30 Hz

5.2 Inversão FWI acústica

O modelo inicial, ilustrado na Figura 5.2, foi obtido a partir do Marmousi 2D, suavizado em 50 pontos nas direções horizontal e vertical, utilizando o pacote *Seismic Unix*.

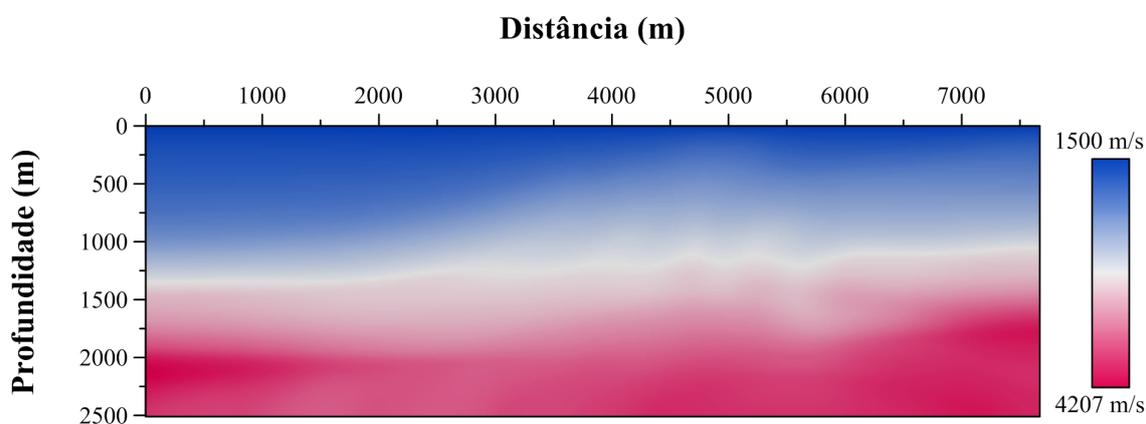


Figura 5.2: Modelo inicial de velocidades suavizado, baseado no Marmousi 2D, utilizado na inversão.

Para modelagem do dado calculado, foram empregadas as mesmas condições adotadas para modelagem do dado observado, assim como descrito na Tabela 5.1, e não foram adicionados ruídos nos dados sintéticos. Com o intuito de aumentar a robustez da inversão, a estratégia multiescala proposta por BUNKS *et al.* (1995) foi utilizada para evitar saltos de ciclo. As amplitudes do dado calculado foram normalizadas para cálculo do resíduo, segundo o que foi descrito por SANTOS (2013). O cálculo do gradiente foi baseado na variação do método de gradientes conjugados, proposta por POLAK e RIBIÈRE (1969), para o qual a direção

de atualização do modelo é obtida a partir da combinação linear de gradientes de iterações anteriores. Adotou-se a parametrização do gradiente da velocidade compressional em função da vagarosidade do campo de ondas, segundo CARNEIRO *et al.* (2017). A determinação do tamanho do passo foi baseada em iterações prévias, como descrito por ZHOU *et al.* (2006) e empregou-se a primeira condição de Wolfe para garantir o decréscimo suficiente do funcional objetivo (NOCEDAL e WRIGHT, 2006).

Neste trabalho, a inversão FWI foi implementada no domínio do tempo utilizando a técnica de multiescala, partindo da frequência de corte inicial de 2 Hz até a frequência de corte máxima de 30 Hz, num incremento de 4 Hz. Para cada banda de frequência foram realizadas no máximo 20 iterações, tomando como critério de parada adicional uma mínima atualização do modelo de 25 *m/s*. Nas Figuras 5.3, 5.4 e 5.5 são apresentadas a evolução do ajuste entre os dados observados e modelados, considerando o mesmo intervalo de amplitudes, para um registro de 2 segundos referente a um tiro no ponto central da superfície de aquisição, com frequência de corte de 60 Hz.

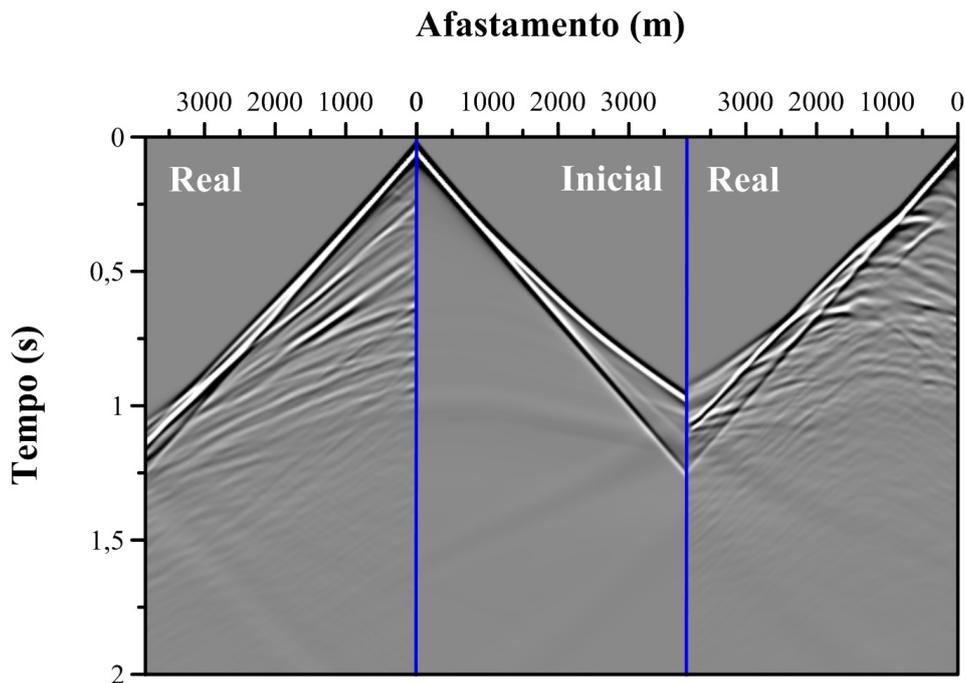


Figura 5.3: Comparação entre os sismogramas do modelo real e inicial, para um tiro no ponto central da superfície de aquisição, em função do afastamento fonte-receptor.

Ao longo do processo de inversão, é possível observar que os sismogramas vão apresentando novas reflexões e difrações a medida que atualizamos o modelo e aumentamos a frequência de corte. Todos os eventos ausentes do sismograma do modelo inicial, em relação ao modelo real, ilustrados na Figura 5.3, são sinais relativos a estruturas que ainda não foram incorporadas ao modelo. As

reflexões e difrações constituem o resíduo, cujo sinal é retropropagado no tempo e correlacionado com o campo incidente para construção do gradiente, empregando o método adjunto, de acordo com a Equação 3.9. Dessa forma, a correlação entre os campos será não nula nos pontos onde o modelo difere do modelo real e, ao longo das iterações, o modelo será atualizado de forma que o sismograma aproxime-se daquele observado, como ilustrado na Figura 5.4. Ao final do processo iterativo, o sismograma do dado calculado apresenta a grande maioria dos eventos contidos no dado observado, como pode ser observado na Figura 5.5.

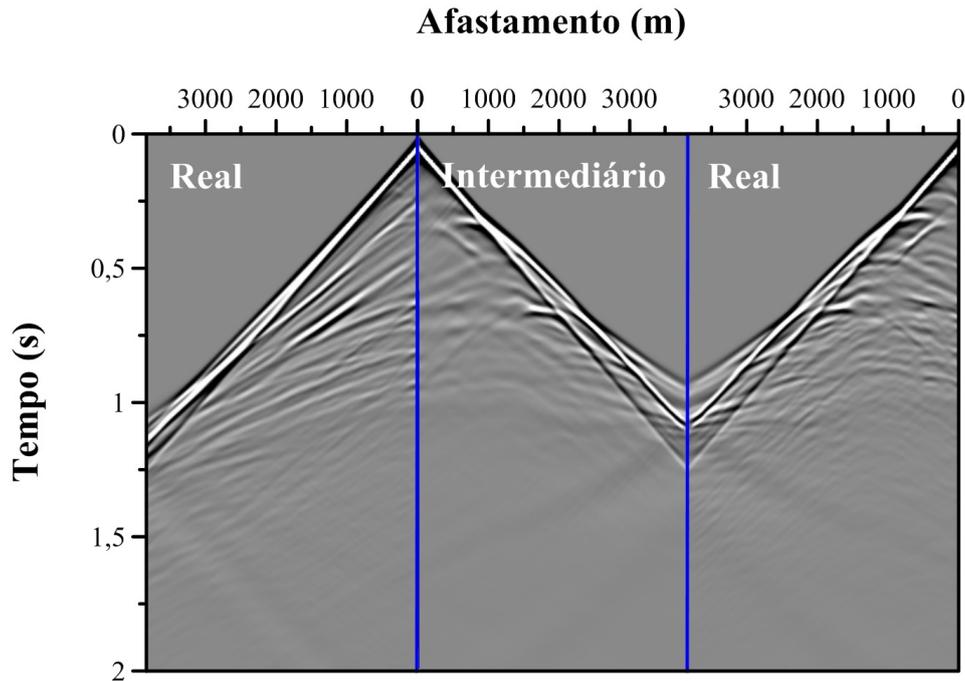


Figura 5.4: Comparação entre os sismogramas do modelo real e intermediário, para um tiro no ponto central da superfície de aquisição, em função do afastamento fonte-receptor.

A Figura 5.6 corresponde ao modelo de velocidades final obtido para frequência de corte de 14Hz, denominado por modelo intermediário, e a Figura 5.7 corresponde ao modelo de velocidades final, para frequência de corte de 30Hz, com indicação das seções vertical (**A-A'**) e horizontal (**B-B'**), onde serão realizadas as leituras dos perfis de velocidades.

Para avaliar o resultado final do primeiro caso de inversão, são apresentados nas Figuras 5.8 e 5.9 os perfis de velocidades para os modelos real, inicial e final em duas seções que atravessam a região do reservatório, indicadas pela linha cinza tracejada. A Figura 5.8 apresenta o perfil de velocidades da seção vertical (**A-A'**), extraído na posição 5400 metros, e a Figura 5.9 apresenta o perfil de velocidades da seção horizontal (**B-B'**), extraído a uma profundidade de 2100 metros.

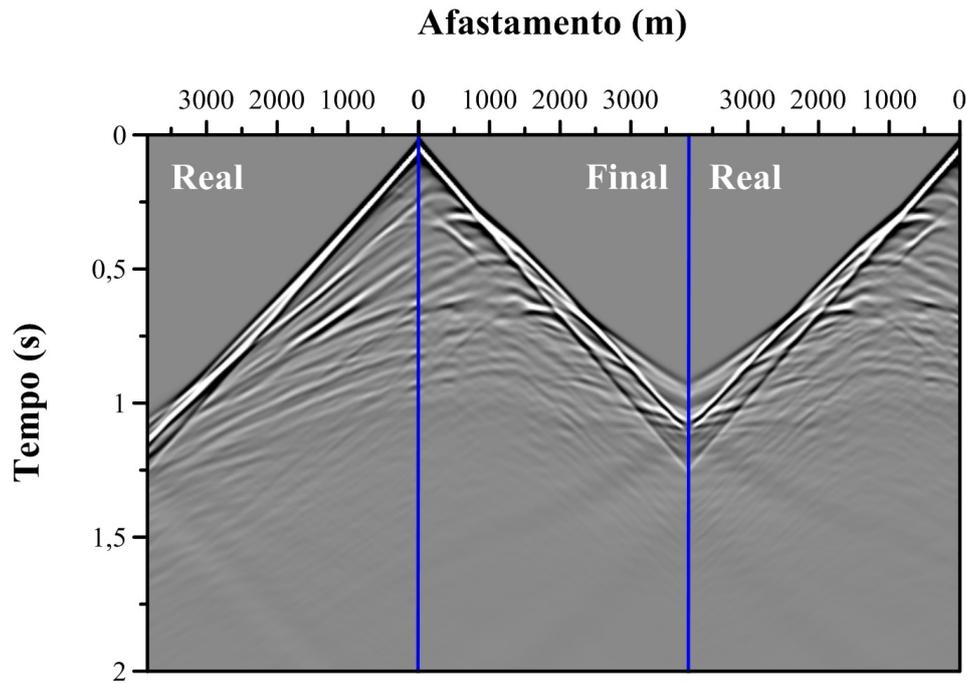


Figura 5.5: Comparação entre os sismogramas do modelo real e final, para um tiro no ponto central da superfície de aquisição, em função do afastamento fonte-receptor.

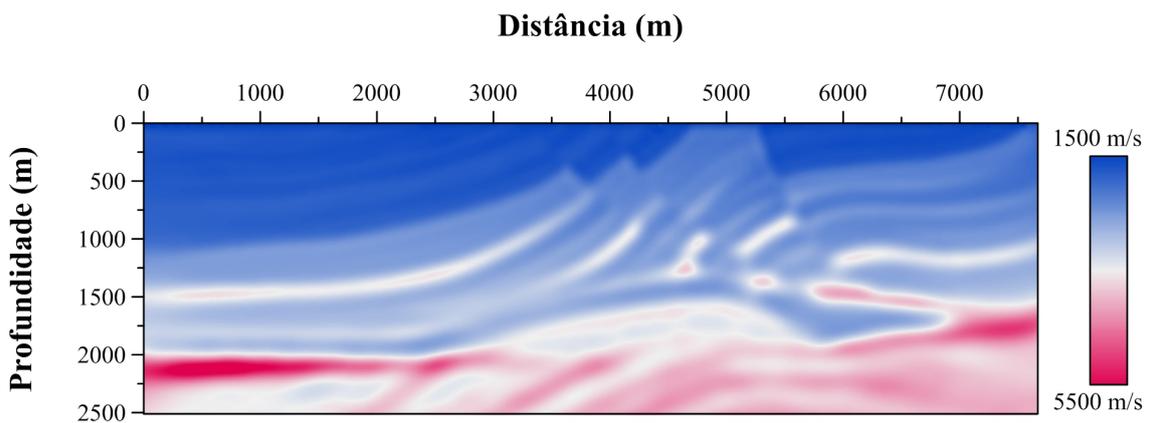


Figura 5.6: Modelo de velocidades intermediário estimado pela inversão acústica, para frequência de corte de 14Hz.

Pode-se afirmar que, ao longo da inversão, o modelo se aproxima do modelo real, até mesmo nas regiões mais profundas, onde a iluminação sísmica é limitada. Com relação ao perfil de velocidades extraído ao longo da seção vertical (**A-A'**), ilustrado na Figura 5.8, o modelo intermediário já apresenta-se próximo ao modelo final na parte mais rasa do modelo e, a medida que aumentamos a frequência de corte, o modelo vai sendo ajustado na região de interesse, resultando em um modelo próximo ao modelo real. O perfil de velocidades extraído ao longo da seção horizontal (**B-B'**), a uma profundidade de 2100 metros, também mostrou resultados satisfatórios, ajustando o modelo final na região do reservatório e até mesmo nas extremidades da área avaliada.

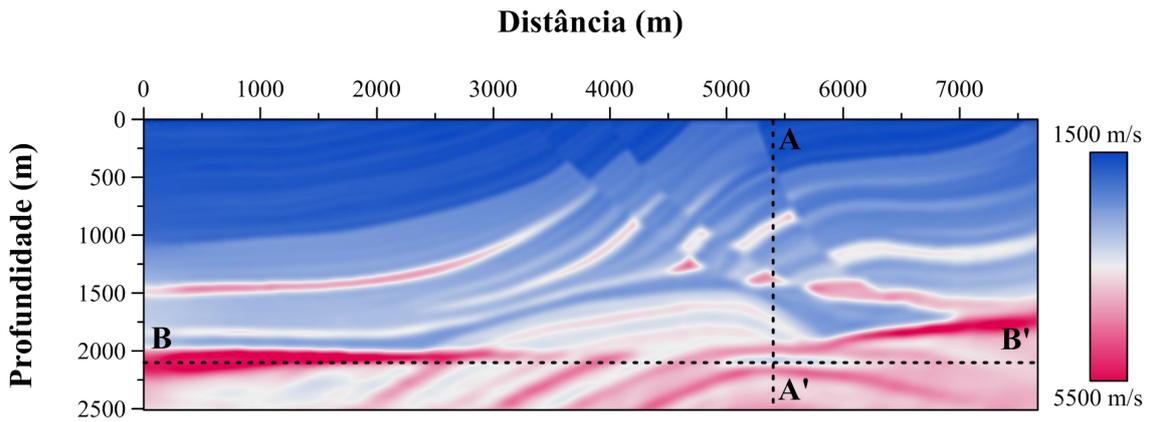


Figura 5.7: Modelo de velocidades final estimado pela inversão acústica, para frequência de corte de 30Hz, com indicação das seções dos perfis de velocidade vertical (**A-A'**) e horizontal (**B-B'**).

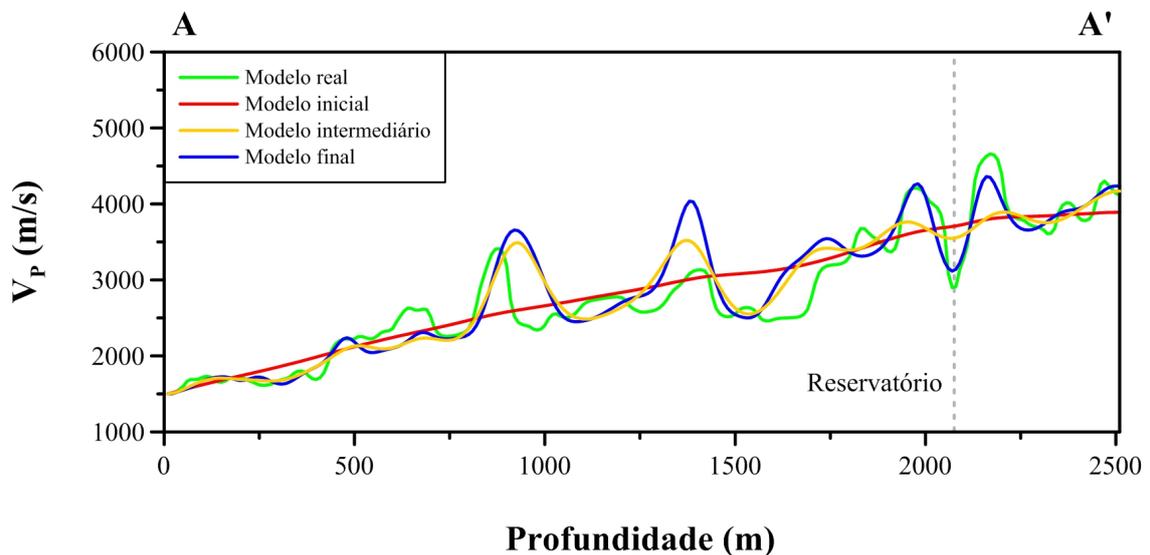


Figura 5.8: Perfil de velocidades ao longo da seção vertical (**A-A'**) definida na Figura 5.7, que atravessa a região do reservatório, com profundidade indicada pela linha tracejada.

Todas as análises de sensibilidade descritas no Capítulo 4 foram realizadas considerando modelos de fundo homogêneos, perturbando apenas um parâmetro, enquanto os outros eram mantidos fixos. Para casos reais, é evidente que o fenômeno de difração, ou espalhamento, da onda não apresenta o mesmo comportamento. Nesse cenário, foi proposta a avaliação da sensibilidade da velocidade compressional para modelos de fundo não homogêneos.

Com o objetivo de apresentar a mudança no padrão de radiação também em função da geologia, os modelos inicial, intermediário e final foram particionados, na horizontal, em dois modelos de 383×251 pontos cada. Assim como para os modelos originais, os espaçamentos horizontal e vertical permanecem sendo de 10 metros, resultando em dois modelos, de 3830 metros na horizontal e 2510 metros na vertical cada.

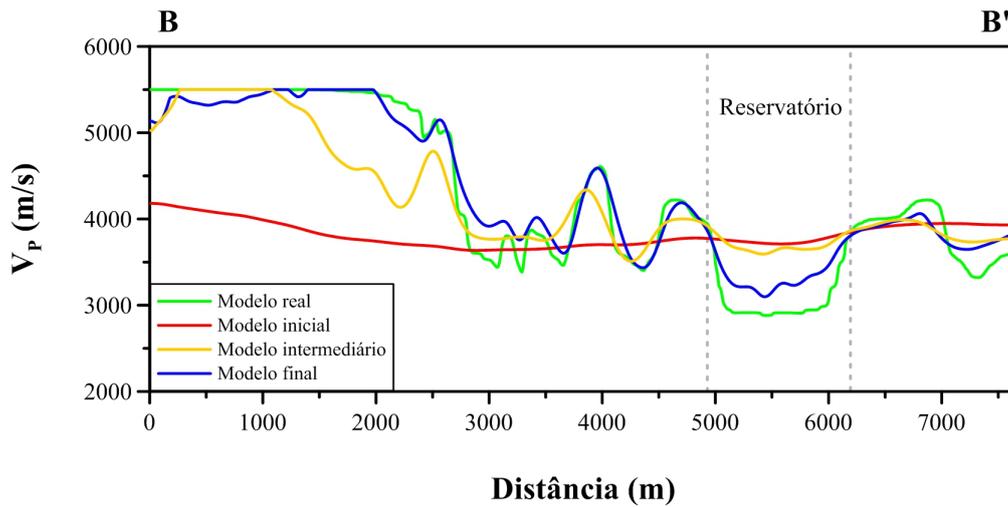


Figura 5.9: Perfil de velocidades ao longo da seção horizontal (**B-B'**) definida na Figura 5.7, que atravessa a região do reservatório, com extensão horizontal delimitada pela linha tracejada.

Na Figura 5.10 estão ilustrados os dois modelos resultantes obtidos a partir do modelo real, os quais representam dois cenários hipotéticos: a Parte 1, ilustrada na Figura 5.10(a), representa uma geologia relativamente simples acima da fonte, composta por camadas com inclinação suave; no entanto, a Parte 2, ilustrada na Figura 5.10(b), representa uma geologia de maior complexidade, com falhas, dobramentos e grandes variações verticais de velocidade também acima da fonte. O ponto espalhador de cada modelo resultante, indicado por uma estrela, está posicionado no ponto central do modelo, a 1920 metros na horizontal a uma profundidade de 1250 metros.

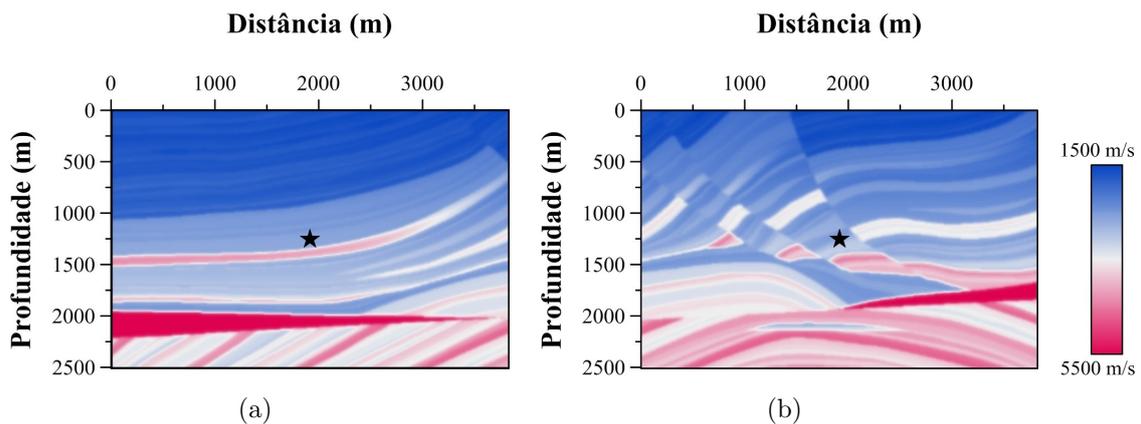


Figura 5.10: Ilustração do esquema de particionamento dos modelos. Em (a) e (b) são apresentados as Partes 1 e 2 do modelo real de velocidades, com indicação do ponto espalhador de cada modelo resultante, posicionado no ponto central do modelo e representado por uma estrela preta.

Tendo como propósito apresentar os padrões de espalhamento de V_p para

casos mais próximos da realidade, os seis modelos resultantes foram utilizados como modelos de fundo para avaliação da evolução do padrão de radiação ao longo da inversão. Para tanto, aplicamos uma variação de 10% na velocidade compressional do ponto espalhador dos seis modelos obtidos a partir dos modelos inicial, intermediário e final e registramos as perturbações causadas no campo de ondas no instante de tempo $t = 0,75$ segundos, para um tiro posicionado a 30 metros de profundidade no ponto central da superfície dos modelos particionados. A distribuição dos receptores foi mantida idêntica à modelagem.

O campo de ondas espalhado, devido à perturbação dos modelos, bem como o respectivo padrão de radiação, estão apresentados nas Figuras 5.11, 5.12 e 5.13. Para fins de comparação com o padrão apresentado na literatura, também apresenta-se o padrão de radiação para modelos homogêneos, destacado em verde, o qual apresenta valor constante para todos os ângulos de espalhamento.

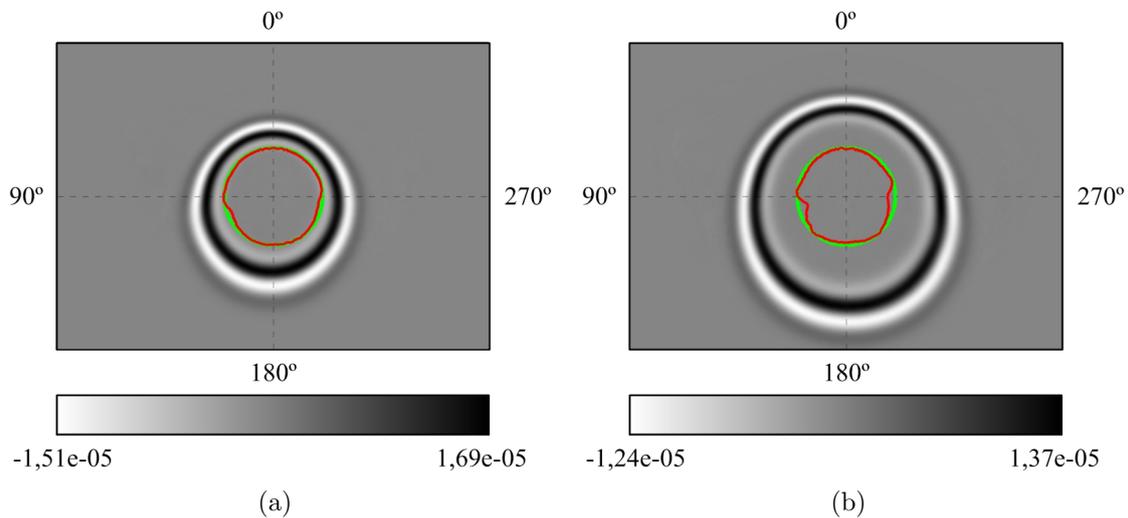


Figura 5.11: Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação do campo espalhado para uma perturbação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde) e inicial (em vermelho) - (a) Parte 1 e (b) Parte 2.

O comportamento do campo espalhado para modelos suaves, apresentados em vermelho na Figura 5.11, é similar àquele exibido por modelos homogêneos. Dessa forma, os estágios iniciais da inversão podem tomar como base a sensibilidade descrita para modelos homogêneos. O mesmo não se observa com um modelo de mais alta resolução, tal qual os modelos intermediário e final.

Tomando como referência o modelo obtido para frequência de corte de 14Hz, observa-se uma considerável diferença entre os padrões de espalhamentos apresentados para as partes 1 e 2, como pode ser visto em amarelo na Figura 5.12. Ao comparar as amplitudes do campo espalhado, em decorrência de uma mesma perturbação na propriedade, percebe-se que a geologia do modelo de fundo é dominante no controle do particionamento da energia difratada. O mesmo resultado

pode ser observado para o modelo final da inversão, com padrão apresentado em azul na Figura 5.13.

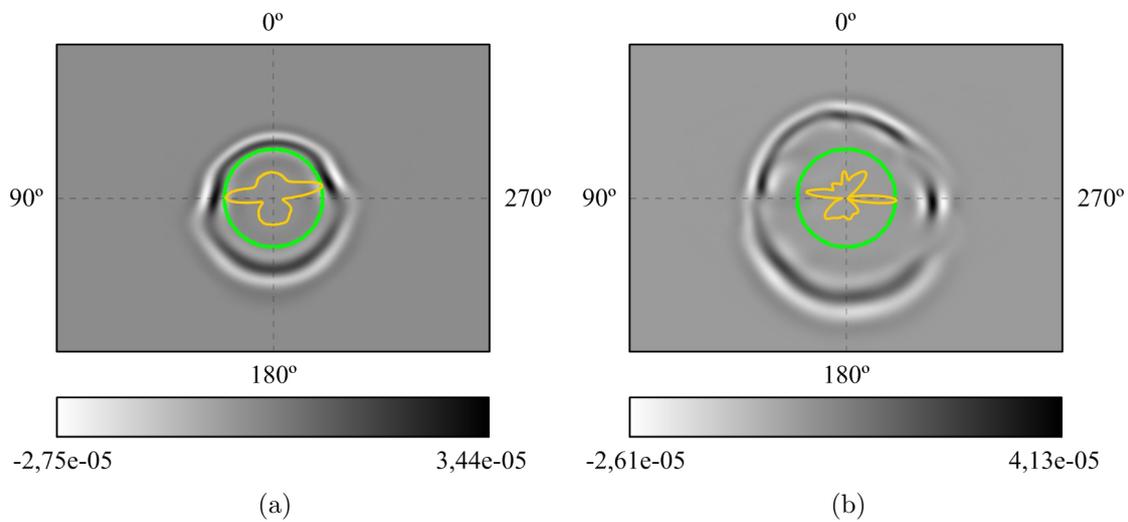


Figura 5.12: Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação do campo espalhado para uma perturbação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde) e intermediário (frequência de corte de 14 Hz) (em amarelo) - (a) Parte 1 e (b) Parte 2.

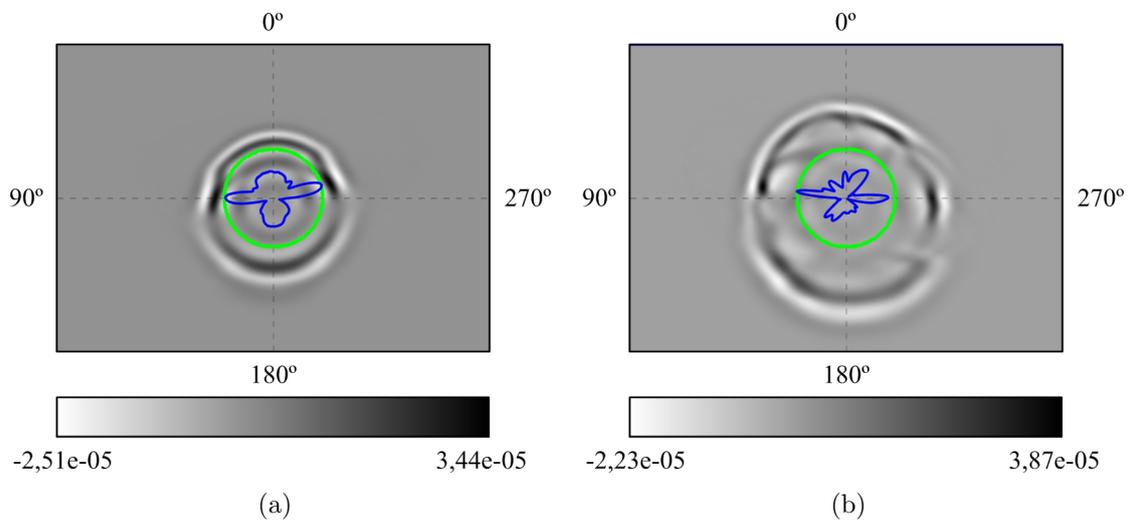


Figura 5.13: Painéis do instantâneo da frente de onda e respectivo padrão de radiação do campo espalhado para uma perturbação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde) e final (frequência de corte de 30 Hz) (em azul) - (a) Parte 1 e (b) Parte 2.

O registro para um tempo total de $t = 3$ segundos, em superfície, dos campos espalhados apresentados anteriormente, estão ilustrados nas Figuras 5.14, 5.15 e 5.16. Tal registro representa uma das linhas da matriz sensibilidade, relativa a posição do ponto espalhador no modelo (192,125).

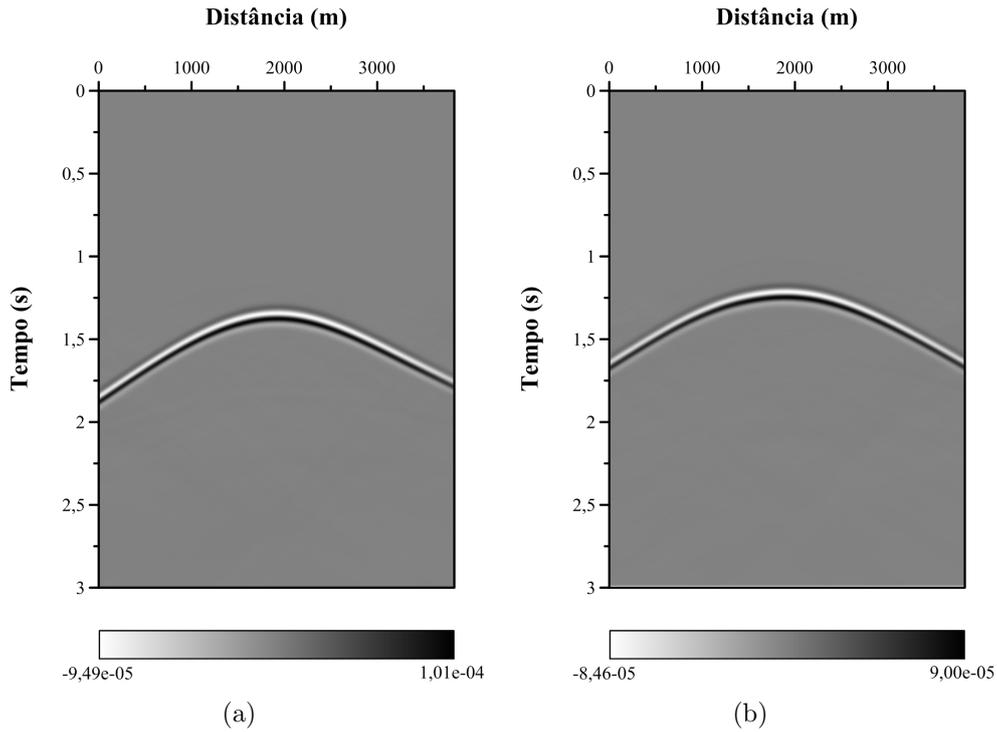


Figura 5.14: Derivada de Fréchet do campo de pressão para uma perturbação de 10% na velocidade compressional do modelo de velocidades inicial: (a) Parte 1 e (b) Parte 2.

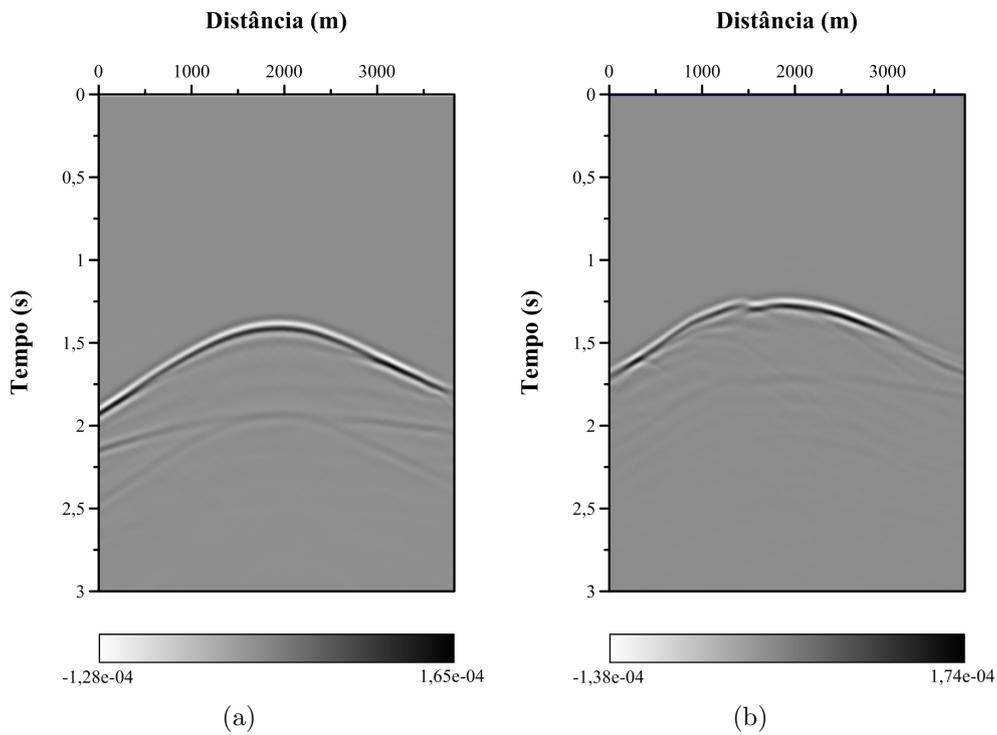


Figura 5.15: Derivada de Fréchet do campo de pressão para uma perturbação de 10% na velocidade compressional do modelo de velocidades intermediário (frequência de corte de 14 Hz): (a) Parte 1 e (b) Parte 2.

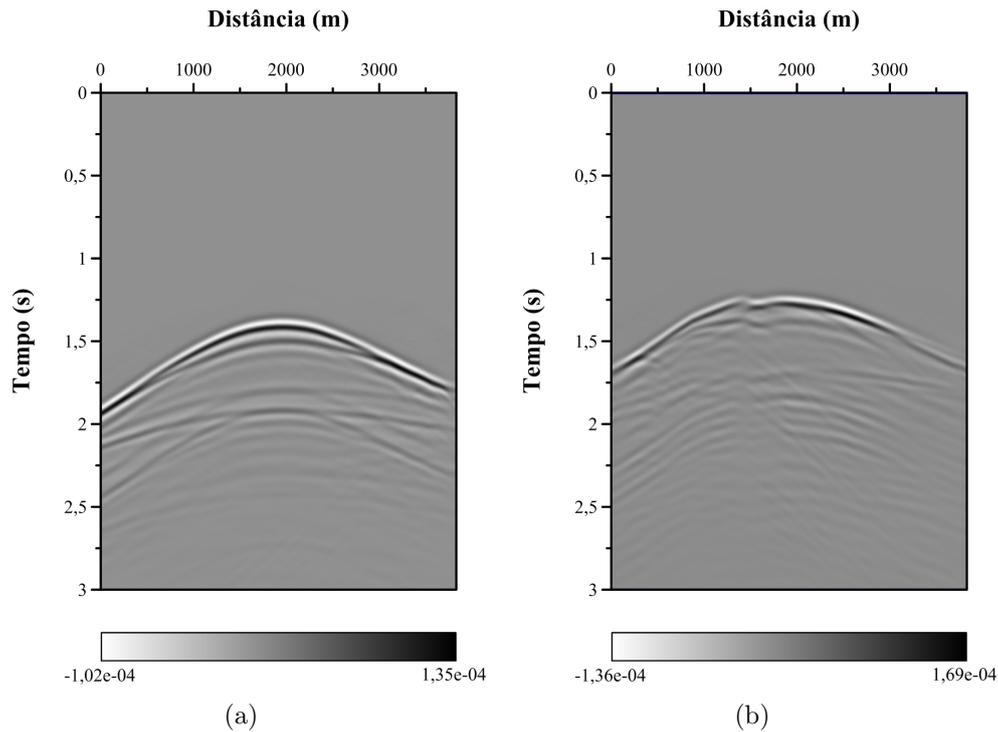


Figura 5.16: Derivada de Fréchet do campo de pressão para uma perturbação de 10% na velocidade compressional do modelo de velocidades final (frequência de corte de 30 Hz): (a) Parte 1 e (b) Parte 2.

Diante da comparação entre as derivadas de Fréchet dos campos de pressão, das partes 1 e 2 dos modelos em questão, nota-se uma grande diferença entre os sinais que representam geologias diferentes, em termos de complexidade da estrutura. Com relação à frequência de trabalho, observa-se que a quantidade de sinais aumenta à medida que estruturas de menor porte são incluídas no modelo.

Com o intuito de mensurar a energia registrada em superfície diante da variação pontual da velocidade compressional, as amplitudes das derivadas de Fréchet foram extraídas, em todos os pontos da superfície. Nas Figuras 5.17 e 5.18, estão apresentadas as amplitudes normalizadas para as Partes 1 e 2 dos modelos, respectivamente. Em verde está destacada a distribuição de energia para modelos homogêneos e para as demais curvas são atribuídas as mesmas cores dos padrões de radiação apresentados anteriormente.

Em se tratando de modelos de fundo suaves, tal qual a Parte 1 do modelo inicial, a quantidade de energia refletida à superfície é praticamente constante, assim como para modelos homogêneos, apresentando apenas um pequeno decaimento em direção às bordas. Ao longo do processo de ajuste do modelo, as maiores amplitudes observadas encontram-se nas extremidades do modelo, contrariamente ao que se observa em modelos homogêneos para os quais as amplitudes decaem em direção às bordas.

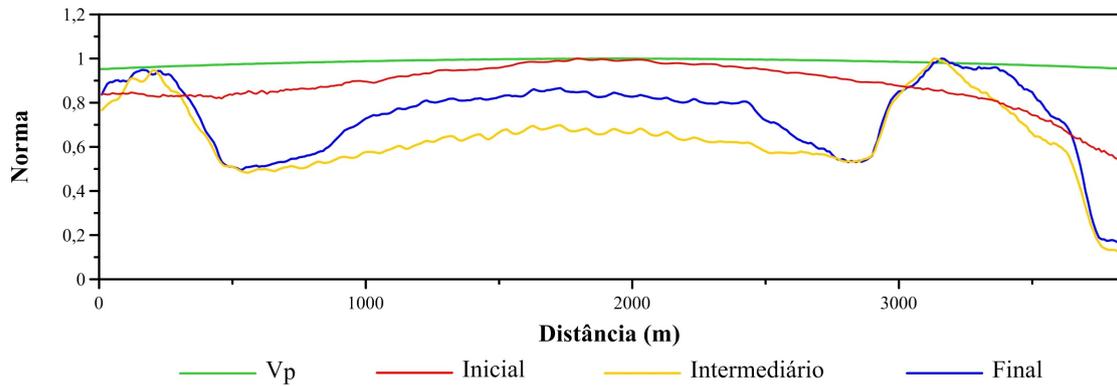


Figura 5.17: Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet do campo de pressão, registrada em superfície, para uma variação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde), inicial (em vermelho), intermediário (em amarelo) e final (em azul) - Parte 1.

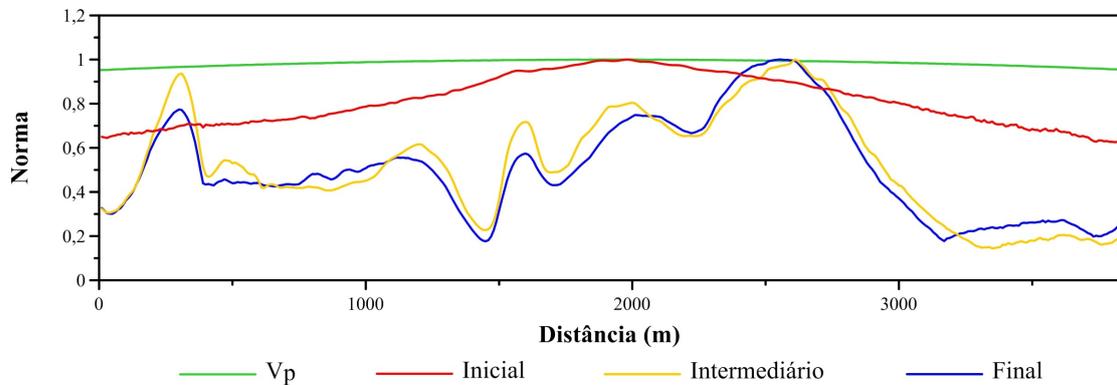


Figura 5.18: Norma da máxima amplitude da derivada de Fréchet do campo de pressão, registrada em superfície, para uma variação de 10% na velocidade compressional para modelos: homogêneos (em verde), inicial (em vermelho), intermediário (em amarelo) e final (em azul) - Parte 2.

Em compensação, para modelos de fundo aqui representando estruturas geológicas de maior complexidade, tal qual a Parte 2 de cada modelo, os resultados são diferentes. Até mesmo para modelos suaves, a amplitude do campo espalhado exhibe uma distribuição que mais se assemelha àquela apresentada para densidade, com um decaimento mais rápido em direção às extremidades do modelo. A variação da distribuição das amplitudes aumenta a medida em que aumentamos a frequência de corte e, conseqüentemente, a escala de detalhe do modelo. Para os modelos intermediário e final, a distribuição das amplitudes apresenta um comportamento completamente variável, em razão da complexidade geológica do modelo.

Em geral, pode-se observar que a distribuição das amplitudes normalizadas do campo espalhado para um modelo que melhor se aproxima da geologia de subsuperfície, diferem consideravelmente da distribuição de amplitudes para modelos homogêneos.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foi discutida a importância da inclusão de múltiplos parâmetros na inversão FWI para determinação das propriedades petrofísicas de reservatórios de hidrocarbonetos. Com base nisto, foram levantadas algumas das principais questões relacionadas à convergência da inversão FWI baseada nos métodos do gradiente, com base no padrão radiação de campos espalhados em virtude de heterogeneidades no modelo.

Através do estudo de padrões de radiação em diferentes modelos, mostrou-se que a melhoria da iluminação e a diminuição do desbalanceamento entre as diferentes classes de parâmetros pode ser obtida a partir da análise da distribuição da energia de campos espalhados.

No Capítulo 4 foram apresentados os comportamentos de difração de três diferentes parametrizações para modelos homogêneos. Pôde-se observar que a geometria dos campos de ondas difratados por cada classe de parâmetros é função da parametrização adotada e controla o particionamento de energia do campo espalhado. Dessa forma, a parametrização adotada no esquema de inversão multiparamétrica deve ser definida de acordo com os padrões de radiação de campos espalhados.

Com relação às amplitudes das derivadas de Fréchet, as mesmas fornecem um indicativo do direcionamento preferencial de energia aos receptores e, com isso, podem ser avaliadas de modo a contribuir para redução da interferência entre as respostas de diferentes classes de parâmetros. Com isso, busca-se reduzir a não linearidade do problema, através da redução dos efeitos de *crosstalk*, e aumentar a convergência dos algoritmos baseados no gradiente de um funcional objetivo.

Normalmente a metodologia adotada para análise de sensibilidade da inversão FWI fundamenta-se nos padrões de radiação das fontes virtuais avaliadas em modelos homogêneos. Todavia, isto pode não se aplicar a casos reais e, portanto, para avaliar a aplicabilidade dos padrões de radiação para cenários realísticos modelos heterogêneos foram utilizados como modelos de fundo para avaliar a

evolução do padrão de acordo com o modelo base, apresentados no Capítulo 5.

De acordo com os campos de onda difratados apresentados para modelos não homogêneos, pôde-se verificar que a distribuição de amplitudes da frente de onda espalhada é fortemente dependente do modelo de fundo, tanto em termos de escala de detalhe como em termos da estrutura geológica. Em se tratando de inversão multiescala, apenas podemos nos basear nos padrões de radiação extraídos de modelos homogêneos quando trabalhamos a baixas frequências e utilizamos modelos suaves, tal qual os modelos iniciais utilizados como entrada para inversão.

Em adição, foi observado que a localização dos pontos onde calculam-se as derivadas, bem como a evolução dos padrões no processo iterativo, são cruciais no sentido de determinar estratégias de inversão eficientes para metodologias baseadas no gradiente de um funcional objetivo. A adoção de técnicas de processamento hierárquico dos dados observados, portanto, deve ser acompanhada ao longo da inversão e, com isso, favorecer os alvos de maior interesse econômico.

De forma geral, conclui-se que a avaliação do padrão de radiação de campos difratados e as derivadas de Fréchet apresentam-se como alternativas viáveis ao cálculo impraticável da inversa da matriz Hessiana. Com isso, podem ser utilizados como ferramentas alternativas para correção do desbalanceamento das direções de atualização do gradiente do funcional objetivo da inversão multiparamétrica.

Além disso, para aumentar a taxa de convergência do problema, é importante realizar tais análises para cada um dos modelos em questão, uma vez que foi visto que o comportamento varia ao longo da inversão em função do modelo de fundo.

Este trabalho teve como produto um código de modelagem e inversão FWI para velocidade compressional, no domínio do tempo, para meios acústicos com densidade variável e, em extensão ao estudo desenvolvido, propõe-se, como trabalhos futuros:

- Adaptação do código para inversão FWI multiparamétrica, diante da importância da densidade para caracterização de reservatórios, exposta no Capítulo 2;
- Análise de sensibilidade do campo espalhado e das derivadas de Fréchet para meios com densidade variável;
- Adaptação do código para inversão FWI multiparamétrica sob diferentes parametrizações da equação da onda;
- Análise de sensibilidade para diferentes modelos geológicos.

Referências Bibliográficas

2017, *BP Statistical Review of World Energy.*, 66 ed. 49p.

ALFORD, R. M., KELLY, K. R., BOORE, D. M., 1974, “Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation.” *Geophysics*, v. 39, n. 6, pp. 834–842. doi: 10.1190/1.1440470.

BARZILAI, J., BORWEIN, J. M., 1988, “Two point step size gradient methods.” *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 8, pp. 141–148. doi: 10.1093/imanum/8.1.141.

BEYLKIN, G., BURRIDGE, R., 1990, “Linearized inverse scattering problems in acoustics and elasticity.” *Wave Motion*, v. 12, n. 1, pp. 15–52. doi: 10.1016/0165-2125(90)90017-X.

BIONDI, B., ALMOMIN, A., 2014, “Simultaneous inversion of full data bandwidth by tomographic full- waveform inversion.” *Geophysics*, v. 79, n. 3, pp. WA129–WA140. doi: 10.1190/geo2013-0340.1.

BORN, M., OPPENHEIMER, R., 1927, “Zur Quantentheorie der Molekeln.” *Annalen der Physik*, v. 389, n. 20, pp. 457–484. doi: 10.1002/andp.19273892002.

BROCHER, T. M., 2005, “Empirical relations between elastic wavespeeds and density in the Earth’s crust.” *Bulletin of the seismological Society of America*, v. 95, n. 6, pp. 2081–2092. doi: 10.1785/0120050077.

BROSSIER, R., OPERTO, S., VIRIEUX, J., 2009, “Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency- domain full-waveform inversion.” *Geophysics*, v. 74, n. 6, pp. WCC105–WCC118. doi: 10.1190/1.3215771.

BUNKS, C., SALECK, F. M., ZALESKI, S., et al., 1995, “Multiscale seismic waveform inversion.” *Geophysics*, v. 60, n. 5, pp. 1457–1473. doi: 10.1190/1.1443880.

- CARCIONE, J. M., HERMAN, G. C., TEN KROODE, A. P. E., 2002, “Seismic modeling.” *Geophysics*, v. 67, n. 4, pp. 1304–1325. doi: 10.1190/1.1500393.
- CARNEIRO, M. S. R., PEREIRA, B. P., SOARES FILHO, D. M., et al., 2017, “On the Scaling of the Update Direction for Multi-parameter Full Waveform Inversion: Applications to 2D Acoustic and Elastic Cases.” *Pure and Applied Geophysics*, v. 175, n. 1, pp. 217–241. doi: 10.1007/s00024-017-1677-9.
- CASTAGNA, J. P., SPRATT, R. S., GOINS, N. R., et al., 1993, “2. Petrophysics”. In: *Offset-Dependent Reflectivity—Theory and Practice of AVO Analysis*, v. 8, cap. 1, pp. 1–111, Society of Exploration Geophysicists. doi: 10.1190/1.9781560802624.ch2.
- CERJAN, C., KOSLOFF, D., RESHEF, M., 1985, “A Nonreflecting Boundary Condition for Discrete Acoustic and Elastic Wave Equations.” *Geophysics*, v. 50, n. 4, pp. 105–708. doi: 10.1190/1.1441945.
- CHAPMAN, C. H., 2004, *Fundamentals of Seismic Wave Propagation*. Cambridge, Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511616877. 608p.
- CHAVENT, G., 1974, “Identification of functional parameters in partial differential equations.” *In Joint Automatic Control Conference*, , n. 12, pp. 155–156. doi: 10.1109/JACC.1974.4170030.
- CHOI, Y., MIN, D. J., SHIN, C., 2008, “Twodimensional waveform inversion of multicomponent data in acousticelastic coupled media.” *Geophysical prospecting*, v. 56, n. 6, pp. 863–881. doi: 10.1111/j.1365-2478.2008.00735.x.
- CLAERBOUT, J. F., 1984, *Imaging the Earths Interior*. Stanford, Blackwell Scientific Publications, Inc. 398p.
- DI BARTOLO, L., 2010, *Modelagem Sísmica Anisotrópica Através do Método das Diferenças Finitas Utilizando Sistemas de Equações de Segunda Ordem*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Outubro.
- DURRAN, D. R., 1999, *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*. 1 ed. New York, Society of Petroleum Engineers. doi: 10.1007/978-1-4757-3081-4. 466p.

- FICHTNER, A., 2011, *Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*. New York, Society of Exploration Geophysicists. doi: 10.1007/978-3-642-15807-0. 343p.
- FICHTNER, A., TRAMPERT, J., 2011, “Hessian kernels of seismic data functionals based upon adjoint techniques.” *Geophysical Journal International*, v. 185, n. 2, pp. 775–798. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.04966.x.
- GARDNER, G., GARDNER, L., GREGORY, A., 1974, “Formation velocity and density the diagnostic basics for stratigraphic traps.” *Geophysics*, v. 39, n. 6, pp. 770–780. doi: 10.1190/1.1440465.
- GHOLAMI, Y., BROSSIER, R., OPERTO, S., et al., 2013, “Which parameterization is suitable for acoustic vertical transverse isotropic full waveform inversion? Part 1: Sensitivity and trade-off analysis.” *Geophysics*, v. 78, n. 2, pp. R81–R105. doi: 10.1190/geo2012-0204.1.
- GUBERNATIS, J. E., DOMANY, E., KRUMHANS�, J. A., et al., 1977, “The Born approximation in the theory of the scattering of elastic waves by flaws.” *Journal of Applied Physics*, v. 648, n. 7, pp. 2812–2819. doi: 10.1063/1.324142.
- GUITTON, A., 2014, “On the velocity-density ambiguity in acoustic full-waveform inversion.” *76th Annual International Conference and Exhibition, Extended Abstracts*, pp. We–E106–03. doi: 10.3997/2214-4609.20141082.
- HUDSON, J. A., HERITAGE, J. R., 1981, “The use of the Born approximation in seismic scattering problems.” *Geophysical Journal International*, v. 66, n. 1, pp. 221–240. doi: 10.1111/j.1365-246X.1981.tb05954.x.
- HUYGENS, C., 1678, *Traité de la Lumière*. Leyden, Elsevier Science. 201p.
- JANNANE, M., BEYDOUN, W., CRASE, E., et al., 1989, “Wavelengths of earth structures that can be resolved from seismic reflection data.” *Geophysics*, v. 54, n. 7, pp. 906–910. doi: 10.1190/1.1442719.
- JEONG, W., MIN, D. J., 2012, “Application of acoustic full waveform inversion for density estimation.” *82nd Annual International Meeting, Expanded Abstracts*, pp. 1–5. doi: 10.1190/segam2012-0196.1.
- JEONG, W., LEE, H. Y., MIN, D. J., 2013, “Full waveform inversion strategy for density in the frequency domain.” *Geophysical Journal International*, v. 188, n. 3, pp. 1221–1242. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05314.x.

- JOHNSTON, D. H., IQBAL, G., SATTER, A., et al., 2010, “2. The Supporting Technologies.” In: *Methods and Applications in Reservoir Geophysics*, v. 15, cap. 2, pp. 59–122, Society of Exploration Geophysicists. doi: 10.1190/1.9781560802174.ch2.
- KEAREY, P., BROOKS, M., HILL, I., 2002, *An Introduction of Geophysical Exploration*. 3 ed. Oxford, Wiley-Blackwell Science. 506p.
- KELLY, K. R., WARD, R. W., TREITEL, S., et al., 1976, “Synthetic seismograms: a finite-difference approach.” *Geophysics*, v. 41, n. 1, pp. 2–27. doi: 10.1190/1.1440605.
- KUMAR, R., BAI, B., HUANG, Y., 2014, “Using reflection data for full waveform inversion – A case study from Santos basin.” *76th Annual International Conference and Exhibition, Extended Abstracts*. doi: 10.3997/2214-4609.20141421.
- LAILLY, P., 1983, “The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations.” *Conference on Inverse Scattering, Theory and Application, Expanded Abstracts*, v. 67, n. 4, pp. 206–220.
- LEVANDER, A. R., 1988, “Fourth-order finite-difference *P*-*SV* seismograms.” *Geophysics*, v. 53, n. 11, pp. 1425–1436. doi: 10.1190/1.1442422.
- LIU, F., ZHANG, G., MORTON, S. A., et al., 2011, “An effective imaging condition for reverse-time migration using wavefield decomposition.” *Geophysics*, v. 76, n. 1, pp. S29–S39. doi: 10.1190/1.3533914.
- LUMLEY, D. E., 2001, “Time-lapse seismic reservoir monitoring.” *Geophysics*, v. 66, n. 1, pp. 50–53. doi: 10.1190/1.1444921.
- MACEDO, D. L., 2014, *Scattering-based decomposition of sensitivity kernels of acoustic full waveform inversion*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- MANTILHA, A. E., 2002, *Predicting petrophysical properties by simultaneous inversion of seismic and reservoir engineering data*. Tese de Doutorado, Universidade de Stanford, Stanford, Novembro.
- MÉTIVIER, L., LAILLY, P., DELPRAT-JANNAUD, F., et al., 2011, “A 2D nonlinear inversion of well-seismic data.” *Inverse Problems*, v. 27, n. 5, pp. 1–26. doi: 10.1088/0266-5611/27/5/055005.

- MÉTIVIER, L., BROSSIER, R., VIRIEUX, J., et al., 2013, “Full waveform inversion and the truncated Newton method.” *Journal on Scientific Computing*, v. 35, n. 2, pp. B401–B437. doi: 10.1137/120877854.
- MÉTIVIER, L., BROSSIER, R., OPERTO, S., et al., 2015, “Acoustic multi-parameter FWI for the reconstruction of P-wave velocity, density and attenuation: preconditioned truncated Newton approach.” *SEG Technical Program, Expanded Abstracts*, pp. 1198–1203. doi: 10.1190/segam2015-5875643.1.
- MOHRIAK, W., SZATMARI, P., ANJOS, S. M. C., 2008, *Sal: Geologia e Tectônica - Exemplos nas Bacias Brasileiras*. São Paulo, Editora Beca.
- MORA, P., 1987, “Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data.” *Geophysics*, v. 52, n. 9, pp. 1211–1228. doi: 10.1190/1.1442384.
- MRINAL, K. S., 2006, *Seismic Inversion*. Texas, Society of Petroleum Engineers. 120p.
- MULDER, W. A., PLESSIX, R.-E., 2004, “A comparison between one-way and two-way wave-equation migration.” *Geophysics*, v. 69, n. 6, pp. 1491–1504. doi: 10.1190/1.1836822.
- NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J., 2006, *Numerical Optimization*. New York, Springer. doi: 10.1007/978-0-387-40065-5. 664p.
- OPERTO, S., 2012, “Fundamentals of *Full Waveform Inversion* – FWI: training course.” 186 p.
- OPERTO, S., VIRIEUX, J., DESSA, J. X., et al., 2006, “Crustal seismic imaging from multifold ocean bottom seismometer data by frequency domain full waveform tomography: Application to the eastern Nankai trough.” *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 111, n. B9306, pp. 1–33. doi: 10.1029/2005JB003835.
- OPERTO, S., GHOLAMI, Y., PRIEUX, V., et al., 2013, “A guided tour of multiparameter full-waveform inversion with multicomponent data: From theory to practice.” *Geophysical Journal International*, v. 32, n. 9, pp. 1040–1054. doi: 10.1190/tle32091040.1.
- PAN, W., YUAN, Y., SIMONS, F., et al., 2017, “The Role of Density in Elastic Full-waveform Inversion.” *GeoConvention, Extended Abstracts*, pp. 1–5.

- PEREIRA-DIAS, B., BULCÃO, A., SOARES FILHO, D. M., et al., 2017, “Elastic least-squares reverse time migration in the image domain.” *Technical Program Expanded Abstracts*, pp. 4353–4357. doi: 10.1190/segam2017-17559590.1.
- PLESSIX, R. E., 2006, “A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications.” *Geophysical Journal International*, v. 167, n. 2, pp. 495–503. doi: 10.1111/j.1365-246X.2006.02978.x.
- PLESSIX, R. E., CAO, Q., 2011, “A parametrization study for surface seismic full waveform inversion in an acoustic vertical transversely isotropic medium.” *Geophysical Journal International*, v. 185, n. 1, pp. 539–556. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.04957.x.
- PLESSIX, R. E., MILCIK, P., RYNKA, H., et al., 2013, “Multiparameter full waveform inversion: Marine and land examples.” *The Leading Edge*, v. 32, n. 9, pp. 1030–1038. doi: 10.1190/tle32091030.1.
- POLAK, E., RIBIÈRE, G., 1969, “Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées.” *Revue Française d’Informatique et de Recherche Opérationnelle*, v. 16, pp. 35–43.
- PRATT, R. G., WORTHINGTON, M. H., 1990, “Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part I: acoustic wave-equation method.” *Geophysical Prospecting*, v. 38, n. 3, pp. 287–310. doi: 10.1111/j.1365-2478.1990.tb01846.x.
- PRATT, R. G., SHIM, C., HICKS, G. J., 1998, “Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion.” *Geophysical Journal International*, v. 133, n. 2, pp. 341–362. doi: 10.1046/j.1365-246X.1998.00498.x.
- PRIEUX, V., BROSSIER, R., OPERTO, S., et al., 2013, “Multiparameter full waveform inversion of multicomponent ocean-bottom- cable data from the Valhall field. Part 1: imaging compressional wave speed, density and attenuation.” *Geophysical Journal International*, v. 194, n. 3, pp. 1640–1664. doi: 10.1093/gji/ggt177.
- PRZEBINDOWSKA, A., KURZMANN, A., KÖHN, D., et al., 2012, “The role of density in acoustic full waveform inversion of marine reflection seismics.” *Annual Wave Inversion Technology Consortium Meeting*, v. 11, pp. 261–276.

- QIN, B., LAMBARE, G., 2016, “Joint inversion of velocity and density in preserved-amplitude full- waveform inversion.” *Technical Program Expanded Abstracts*, pp. 1325–1330. doi: 10.1190/segam2016-13841611.1.
- RAKNES, E. B., WEIBULL, W., ARNSTEN, B., 2014, “Elastic velocity analysis and time-lapse full-waveform inversion.” *The Leading Edge*, v. 33, n. 9, pp. 1000–1002, 1004, 1006. doi: 10.1190/tle33091000.1.
- RAVAUT, C., OPERTO, S., IMPROTA, L., et al., 2004, “Multi-scale imaging of complex structures from multi-fold wide-aperture seismic data by frequency-domain full-wavefield inversions: Application to a thrust belt.” *Geophysical Journal International*, v. 159, n. 3, pp. 1032–1056. doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02442.x.
- REYNOLDS, A. C., 1978, “Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems.” *Geophysics*, v. 43, n. 6, pp. 1099–1110. doi: 10.1190/1.1440881.
- RIAZI, N., CLARKSON, C. R., 2016, “The importance of seismic attributes in reservoir characterization and inter-well connectivity studies of tight oil reservoirs”, *GeoConvention: Optimizing Resources, Extended Abstracts*, pp. 1–6.
- RICKER, N., 1953, “The form and laws of propagation of seismic wavelets.” *Geophysics*, v. 18, n. 1, pp. 10–40. doi: 10.1190/1.1437843.
- SANCEVERO, S. S., REMACRE, A. Z., PORTUGAL, R. D. S., 2006, “O papel da inversão para a impedância acústica no processo de caracterização sísmica de reservatórios.” *Revista Brasileira de Geofísica*, v. 24, n. 4, pp. 495–512. doi: 10.1590/S0102-261X2006000400004.
- SANTOS, A. W. G., 2013, *Inversão de forma de onda aplicada à análise de velocidades sísmicas utilizando uma abordagem multiescala*. Tese de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Novembro.
- SEARS, T., SINGH, S., BARTON, P., 2008, “Elastic full waveform inversion of multi-component OBC seismic data.” *Geophysical Prospecting*, v. 56, n. 6, pp. 843–862. doi: 10.1111/j.1365-2478.2008.00692.x.
- SHERIFF, R. E., GELDART, L. P., 1995, *Exploration seismology*. 2 ed. Cambridge, Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139168359. 592p.

- SHI, Y., ZHAO, W., CAO, H., 2007, “Nonlinear process control of wave-equation inversion and its application in the detection of gas.” *Geophysics*, v. 72, n. 1, pp. 9–18. doi: 10.1190/1.2399450.
- SHIN, C., JANG, S., MIN, D.-J., 2001, “Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory.” *Geophysical Prospecting*, v. 49, n. 5, pp. 592–606. doi: 10.1046/j.1365-2478.2001.00279.
- SIRGUE, L., PRATT, R. G., 2004, “Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies.” *Geophysics*, v. 69, n. 1, pp. 231–248. doi: 10.1190/1.16493915.
- SIRGUE, L., BARKVED, O. I., VAN GESTEL, J. P., et al., 2009, “3D waveform inversion on Valhall wide-azimuth OBC.” *71st Annual International Conference and Exhibition, Extended Abstracts*. doi: 10.3997/2214-4609.201400395.
- SOARES FILHO, D. M., 2017a, “Notas de aula: Fundamentos Teóricos da Inversão FWI III: A Inversão Acústica Multi-Paramétrica no Domínio do Tempo”, 259 p.
- SOARES FILHO, D. M., 2017b, “Notas de aula: Fundamentos Teóricos da Inversão FWI IV: A Inversão Elástica dos Campos de Velocidades e Densidade no Domínio do Tempo.” 259 p.
- TARANTOLA, A., 1984, “Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation.” *Geophysics*, v. 49, n. 8, pp. 1259–1266. doi: 10.1190/1.1441754.
- TARANTOLA, A., 1986, “A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data.” *Geophysics*, v. 51, n. 10, pp. 1893–1903. doi: 10.1190/1.1442046.
- TEJERO, C. E. J., DAGNINO, D., SALLARÈS, V., et al., 2015, “Comparative study of objective functions to overcome noise and bandwidth limitations in full waveform inversion.” *Geophysical Journal International*, v. 203, n. 1, pp. 632–645. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.04957.x.
- TELFORD, W. M., GELDART, L. P., SHERIFF, R. E., 1990, *Applied geophysics*. 2 ed. Cambridge, Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139167932. 770p.
- THOMAS, J. E., 2001, *Fundamentos da Engenharia de Petróleo*. 2 ed. Rio de Janeiro, Editora Interciência. 271p.

- VERSTEEG, R., 1994, “The Marmousi experience: Velocity model determination on a synthetic complex data set.” *The Leading Edge*, v. 13, n. 9, pp. 927–936. doi: 10.1190/1.1437051.
- VIRIEUX, J., 1984, “*SH*-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite- difference method.” *Geophysics*, v. 49, n. 11, pp. 1933–1942. doi: 10.1071/EG984265a.
- VIRIEUX, J., 1986, “*P-SV* wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite- difference method.” *Geophysics*, v. 51, n. 4, pp. 889–901. doi: 10.1190/1.1442147.
- VIRIEUX, J., OPERTO, S., 2009, “An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics.” *Geophysics*, v. 74, n. 6, pp. WCC1–WCC26. doi: 10.1190/1.3238367.
- VIRIEUX, J., ASNAASHARI, A., BROSSIER, R., et al., 2014, “An introduction to full waveform inversion.” In: *Encyclopedia of Exploration Geophysics*, cap. 6, pp. R1–1–R1–40, Society of Exploration Geophysicists. doi: 10.1190/1.9781560803027.entry6.
- WANG, Y., DONG, L. D., 2015, “Multiparameter Full Waveform Inversion for acoustic VTI media using the truncated Newton method.” *Chinese Journal of Geophysics*, v. 58, n. 5, pp. 530–543. doi: 10.1002/cjg2.20193.
- WANG, Y., LIANG, W., NASHED, Z., et al., 2014, “Seismic modeling by optimizing regularized staggered-grid finite-difference operators using a time-space-domain dispersion-relationship-preserving method.” *Geophysics*, v. 79, n. 5, pp. 277–285. doi: 10.1190/geo2014-0078.1.
- WANG, Z. Z., 2001, “Fundamentals of Seismic Rock Physics.” *Geophysics*, v. 66, n. 2, pp. 398–412. doi: 10.1190/1.1444931.
- WOLFE, P., 1969, “Convergence conditions for ascent methods.” *Journal on Optimization*, v. 11, n. 2, pp. 226–235. doi: 10.1137/0801001.
- WU, R., AKI, K., 1985, “Scattering characteristics of elastic waves by an elastic heterogeneity.” *Geophysics*, v. 50, n. 4, pp. 582–595. doi: 10.1190/1.1441934.
- YANG, J., LIU, Y., DONG, L., 2016, “Simultaneous estimation of velocity and density in acoustic multiparameter full-waveform inversion using an improved scattering- integral approach.” *Geophysics*, v. 81, n. 6, pp. R399–R415. doi: 10.1190/geo2015-0707.1.

- YAO, G., DA SILVA, N. V., DEBENS, H. A., et al., 2018a, “Accurate seabed modeling using finite difference methods.” *Computational Geosciences*, v. 22, n. 2, pp. 469–484. doi: 10.1007/s10596-017-9705-5.
- YAO, G., DA SILVA, N. V., WU, D., 2018b, “Sensitivity analyses of acoustic impedance inversion with full-waveform inversion.” *Journal of Geophysics and Engineering*, v. 15, n. 2, pp. 461–477. doi: 10.1088/1742-2140/aaa980.
- YILMAZ, O., 2001, In: *Seismic Data Analysis: Processing, inversion, and interpretation of seismic data.*, 2 ed., Tulsa, Society of Exploration Geophysicists. doi: 10.1190/1.9781560801580.
- ZHOU, B., GAO, L., DAI, Y. H., 2006, “Gradient Methods with Adaptive Step-Sizes.” *Computational Optimization and Applications*, v. 35, n. 1, pp. 69–86. doi: 10.1007/s10589-006-6446-0.

Apêndice A

Derivadas de Fréchet para o caso acústico

Neste apêndice serão demonstradas as deduções das expressões dos elementos da matriz sensibilidade para inversão FWI acústica (SOARES FILHO, 2017a).

A.1 Equação acústica

A equação de segunda ordem que rege a propagação de ondas em um meio acústico, com densidade variável, encontra-se descrita abaixo:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) f(t), \quad (\text{A.1})$$

onde u representa o campo de pressão hidrostática, ρ representa a densidade do meio, s representa a fonte sísmica pontual, \mathbf{r} representa o vetor posição e K representa o módulo volumétrico.

A.2 Dedução das derivadas de Fréchet

A.2.1 K e ρ

Consideremos uma pequena perturbação nas propriedades do modelo de fundo, dada por:

$$K = K_0 + \delta K, \quad (\text{A.2a})$$

e

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad (\text{A.2b})$$

a propagação do campo de onda total $u = u_0 + \delta u$ satisfaz a seguinte equação:

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho_0 + \delta \rho} \nabla u \right] - \frac{1}{K_0 + \delta K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) f(t). \quad (\text{A.3})$$

Expandindo os termos do módulo volumétrico e densidade e desprezando os termos superiores à segunda ordem, tem-se:

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{\delta \rho}{\rho_0^2} \right) \nabla (u_0 + \delta u) \right] - \left(\frac{1}{K_0} - \frac{\delta K}{K_0^2} \right) \frac{\partial^2 (u_0 + \delta u)}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) f(t), \quad (\text{A.4a})$$

ou ainda

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla u_0 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \delta u \right) - \frac{1}{K_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{1}{K_0} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) f(t) + f_v, \quad (\text{A.4b})$$

onde f_v representa a fonte virtual decorrente da perturbação do modelo de fundo, dada por:

$$f_v = \nabla \cdot \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0^2} \nabla u_0 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0^2} \nabla \delta u \right) - \frac{\delta K}{K_0^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\delta K}{K_0^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2}, \quad (\text{A.5})$$

onde o segundo e o quarto termo estão associados a espalhamentos múltiplos e, de acordo com a primeira aproximação de Born, aqui adotada, serão desprezados.

Para obtenção da equação que rege o campo espalhado δu , basta subtraírmos o campo de fundo, regido pela Equação A.1, da expressão que controla a propagação do campo total, Equação A.4b, resultando em:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \delta u \right) - \frac{1}{K_0} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0^2} \nabla u_0 \right) - \frac{\delta K}{K_0^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (\text{A.6})$$

onde a fonte virtual passa a ser representada pelos dois últimos termos.

A solução do campo espalhado é então dada por:

$$\begin{aligned} \delta u(\mathbf{r}, t) = & \int_V g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left[\nabla \cdot \left(\frac{\delta \rho(\mathbf{r}')}{\rho_0^2(\mathbf{r}')} \nabla u_0(\mathbf{r}', t) \right) \right] dV(\mathbf{r}') \\ & - \int_V g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\frac{\delta K(\mathbf{r}')}{K_0^2(\mathbf{r}')} \frac{\partial^2 u_0(\mathbf{r}')}{\partial t^2} \right) dV(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde $g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0)$ é a função de Green para uma fonte impulsiva em \mathbf{r}' .

Portanto, as derivadas de Fréchet no ponto \mathbf{r}' , em relação ao módulo volumétrico e densidade, são obtidas a partir das seguintes expressões:

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial K(\mathbf{r}')} = -\frac{1}{K_0^2(\mathbf{r}')} g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2}(\mathbf{r}', t), \quad (\text{A.8a})$$

e

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} = -\frac{1}{\rho_0^2(\mathbf{r}')} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}'; 0) * \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{r}', t). \quad (\text{A.8b})$$

A.2.2 V_p

Seja o módulo volumétrico, para um meio acústico, função da velocidade de acordo com:

$$K = v^2 \rho, \quad (\text{A.9})$$

adotando densidade constante ($\rho = 1 \text{ kg/m}^3$), a Equação A.1 é simplificada e a propagação de ondas é função apenas das velocidades de ondas compressoriais segundo:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) f(t), \quad (\text{A.10})$$

onde u representa o campo de pressão hidrostática, ρ representa a densidade do meio, s representa a fonte sísmica pontual, \mathbf{r} representa o vetor posição e v representa a velocidade de propagação de ondas compressoriais.

Consideremos uma pequena perturbação nas propriedades do modelo de fundo, dada por:

$$v = v_0 + \delta v, \quad (\text{A.11})$$

a propagação do campo de onda total $u = u_0 + \delta u$ satisfaz a seguinte equação:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{(v_0 + \delta v)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) f(t). \quad (\text{A.12})$$

Expandindo os termos da velocidade compressional e desprezando os termos superiores à segunda ordem, tem-se:

$$\nabla^2(u_0 + \delta u) - \left(\frac{1}{v_0^2} - \frac{2\delta v}{v_0^3} \right) \frac{\partial^2(u_0 + \delta u)}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) f(t), \quad (\text{A.13a})$$

ou ainda

$$\nabla^2 u_0 + \nabla^2 \delta u - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) f(t) + f_v, \quad (\text{A.13b})$$

onde f_v representa a fonte virtual decorrente da perturbação do modelo de fundo, dada por:

$$f_v = -\frac{2\delta v}{v_0^3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{2\delta v}{v_0^3} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2}, \quad (\text{A.14})$$

onde o segundo termo está associado a espalhamentos múltiplos e, de acordo com a primeira aproximação de Born, aqui adotada, será desprezado.

Para obtenção da equação que rege o campo espalhado δu , basta subtraírmos o

campo de fundo, regido pela Equação A.10, da expressão que controla a propagação do campo total, Equação A.13b, resultando em:

$$\nabla^2 \delta u - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} = -\frac{2\delta v}{v_0^3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (\text{A.15})$$

onde a fonte virtual passa a ser representada pelo lado direito da equação.

Dessa forma, a solução do campo espalhado é dada por:

$$\delta u(\mathbf{r}, t) = -\frac{2}{v_0^3(\mathbf{r}')} \int_V g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial^2 u_0(\mathbf{r}')}{\partial t^2} \delta v(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'), \quad (\text{A.16})$$

onde $g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0)$ é a função de Green para uma fonte impulsiva em \mathbf{r}' .

Portanto, a derivada de Fréchet no ponto \mathbf{r}' , em relação à velocidade compressional é dada por:

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial v(\mathbf{r}')} = -\frac{2}{v_0^3(\mathbf{r}')} g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2}(\mathbf{r}', t). \quad (\text{A.17})$$

Apêndice B

Derivadas de Fréchet para o caso elástico

Neste apêndice serão demonstradas as deduções das expressões dos elementos da matriz sensibilidade para inversão FWI elástica (SOARES FILHO, 2017b).

B.1 Equação da elastodinâmica

Consideremos um meio elástico anisotrópico bidimensional tal como descrito por VIRIEUX (1984). As equações que regem a propagação de ondas em tal meio é dada pelo sistema hiperbólico de equações de segunda ordem descrito abaixo:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad (\text{B.1a})$$

e

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (\text{B.1b})$$

onde ρ representa a densidade do meio, u_i representa o campo de deslocamentos das partículas, τ_{ij} representa o campo de tensões, c_{ijkl} representa o tensor de propriedade elásticas e f_i corresponde ao campo de densidade volumétrica de forças externas, representando a fonte pontual do campo de ondas, com condições de contorno e iniciais dadas, respectivamente por:

$$\tau_{ij} n_j = \Gamma_i, \quad (\text{B.2a})$$

e

$$u_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = 0, t < 0, \quad (\text{B.2b})$$

onde Γ_i equivale ao campo de tensões aplicado à superfície do modelo, n_j representa o vetor normal a superfície de contorno e \mathbf{r} representa a posição e t corresponde ao

tempo.

B.2 Dedução das derivadas de Fréchet

Consideremos uma pequena perturbação nas propriedades do modelo de fundo, dada por:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad (\text{B.3a})$$

e

$$c_{ijkl} = c_{ijkl_0} + \delta c_{ijkl}, \quad (\text{B.3b})$$

a propagação do campo de onda total $u_i = u_{i_0} + \delta u_i$ satisfaz a seguinte equação:

$$(\rho_0 + \delta\rho) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{i_0} + \delta u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(c_{ijkl_0} + \delta c_{ijkl}) \frac{\partial}{\partial x_l} (u_{i_0} + \delta u_i) \right] + f_i, \quad (\text{B.4a})$$

ou ainda:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 \delta u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl_0} \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl_0} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} \right) + f_i + f_{v_i}, \quad (\text{B.4b})$$

onde f_{v_i} representa a fonte virtual decorrente da perturbação do modelo de fundo, dada por:

$$f_{v_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta c_{ijkl} \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta c_{ijkl} \frac{\partial \delta u_{k_0}}{\partial x_l} \right) - \delta\rho \frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial t^2} - \delta\rho \frac{\partial^2 \delta u_{i_0}}{\partial t^2}, \quad (\text{B.5})$$

onde o segundo e o quarto termo estão associados a espalhamentos múltiplos e, de acordo com a primeira aproximação de Born, aqui adotada, serão desprezados.

Para obtenção da equação que rege o campo espalhado δu_{i_0} , basta subtraírmos o campo de fundo, regido pela Equação B.1a, da expressão que controla a propagação do campo total, Equação B.4b, resultando em:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl_0} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta c_{ijkl} \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l} \right) - \delta\rho \frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial t^2}, \quad (\text{B.6})$$

onde a fonte virtual passa a ser representada pelos dois últimos termos.

Sejam as condições de contorno do modelo perturbado representadas por:

$$(c_{ijkl_0} + \delta c_{ijkl}) \frac{\partial (u_{k_0} + \delta u_k)}{\partial x_l} n_j = \Gamma_i, \quad (\text{B.7a})$$

e

$$c_{ijkl_0} \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l} n_j + c_{ijkl_0} \frac{\partial \delta u_{k_0}}{\partial x_l} n_j + \delta c_{ijkl} \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l} n_j + \delta c_{ijkl} \frac{\partial \delta u_{k_0}}{\partial x_l} n_j = \Gamma_i. \quad (\text{B.7b})$$

Para obtenção da condição de contorno do campo espalhado δu_{i_0} , basta subtraírmos o campo de fundo, regido pela Equação B.2a, da expressão que controla a propagação do campo total, Equação B.7b, resultando em:

$$c_{ijkl_0} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} n_j = - \left(\delta c_{ijkl} \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l} n_j + \delta c_{ijkl} \frac{\partial \delta u_{k_0}}{\partial x_l} n_j \right) = \Delta \Gamma_i, \quad (\text{B.8})$$

onde o segundo termo após a igualdade é considerado nulo para aproximação de primeira ordem, com condições iniciais descritas abaixo:

$$\delta u_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \delta u_i}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = 0, t < 0. \quad (\text{B.9})$$

A solução do campo espalhado é então dada por:

$$\begin{aligned} \delta u_i(\mathbf{r}, t) &= \int_V g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * f_{v_n}(\mathbf{r}', t) dV(\mathbf{r}') \\ &+ \iint_S g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \Delta \Gamma_n(\mathbf{r}', t) dS(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde $g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0)$ é a função de Green para uma fonte impulsiva em \mathbf{r}' , f_{v_n} é a fonte virtual e $\Delta \Gamma_n$ é o campo de tensões aplicado na superfície em virtude da perturbação do modelo, todos na direção n , ou seja:

$$\rho \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl_0} \frac{\partial g_{kn}}{\partial x_l} \right) + \delta_{in} \delta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{B.11})$$

com condições de contorno e iniciais dadas por:

$$c_{ijkl_0} \frac{\partial g_{kn}}{\partial x_l} n_j = 0, \quad (\text{B.12a})$$

e

$$\delta g_{in}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial g_{in}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = 0, t < 0, \quad (\text{B.12b})$$

Portanto, a solução do campo resulta em:

$$\begin{aligned} \delta u_i(\mathbf{r}, t) &= \int_V g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) \right] dV(\mathbf{r}') \\ &- \int_V g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta \rho(\mathbf{r}') \frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial t^2}(\mathbf{r}', t) \right) dV(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

$$- \iint_S g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) n_j dS(\mathbf{r}'). \quad (\text{B.13})$$

De acordo com a regra da derivada do produto de duas funções, o primeiro termo da solução equivale a:

$$\begin{aligned} & \int_V g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) \right] dV(\mathbf{r}') = \\ & \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) \right] dV(\mathbf{r}') \\ & - \int_V \frac{\partial g_{in}}{\partial x_j}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) dV(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

E, de acordo com o Teorema de Gauss, o terceiro termo, que representa a condição de contorno na superfície, pode ser representada em termos do volume, de acordo com a equação abaixo:

$$\begin{aligned} & \iint_S g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) n_j dS(\mathbf{r}') = \\ & \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) \right] dV(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Substituindo as Equações B.14 e B.15 na solução do campo, representada pela Equação B.13, temos:

$$\begin{aligned} \delta u_i(\mathbf{r}, t) &= \iint_S g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) n_j dS(\mathbf{r}') \\ & - \int_V \frac{\partial g_{in}}{\partial x_j}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) dV(\mathbf{r}') \\ & - \int_V g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta \rho(\mathbf{r}') \frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial t^2}(\mathbf{r}', t) \right) dV(\mathbf{r}') \\ & - \iint_S g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\delta c_{njkl}(\mathbf{r}') \frac{\partial u_{k_0}}{\partial x_l}(\mathbf{r}', t) \right) n_j dS(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

As derivadas de Fréchet para o ponto \mathbf{r}' , em relação a ρ e c_{ijkl} , são então obtidas a partir das seguintes expressões:

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} = -g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial^2 u_{i_0}}{\partial t^2}(\mathbf{r}', t), \quad (\text{B.17a})$$

e

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial c_{ijkl}(\mathbf{r}')} = -\frac{\partial g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0)}{\partial x_j} * \frac{\partial u_{k0}(\mathbf{r}', t)}{\partial x_l}. \quad (\text{B.17b})$$

B.2.1 μ, λ e ρ

Para o caso isotrópico, o tensor de propriedades elásticas é função dos parâmetros de Lamé, de acordo com:

$$\delta c_{ijkl}(\mathbf{r}') = \delta \lambda(\mathbf{r}') \delta_{nj} \delta_{kl} + \delta \mu(\mathbf{r}') (\delta_{nk} \delta_{jl} + \delta_{nl} \delta_{jk}). \quad (\text{B.18})$$

Portanto, a solução do campo espalhado $\delta u_i(\mathbf{r}, t)$ obedece:

$$\begin{aligned} \delta u_i(\mathbf{r}, t) = & - \int_V g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial^2 u_n(\mathbf{r}', t)}{\partial t^2} \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\ & - \int_V \frac{\partial g_{in}}{\partial x_j}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial u_k(\mathbf{r}', t)}{\partial x_l} \delta \lambda(\mathbf{r}') \delta_{nj} \delta_{kl} dV(\mathbf{r}') \\ & - \int_V \frac{\partial g_{in}}{\partial x_j}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial u_k(\mathbf{r}', t)}{\partial x_l} \delta \mu(\mathbf{r}') (\delta_{nk} \delta_{jl} + \delta_{nl} \delta_{jk}) dV(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \delta u_i(\mathbf{r}, t) = & - \int_V g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial^2 u_n(\mathbf{r}', t)}{\partial t^2} \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\ & - \int_V \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial u_k(\mathbf{r}', t)}{\partial x_k} \delta \lambda(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\ & - \int_V \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \left(\frac{\partial u_k(\mathbf{r}', t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{r}', t)}{\partial x_k} \right) \delta \mu(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

onde:

$$\frac{\partial u_k(\mathbf{r}', t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{r}', t)}{\partial x_k} = 2\varepsilon_{kj}(\mathbf{r}', t). \quad (\text{B.21})$$

Portanto, as derivadas de Fréchet no ponto \mathbf{r}' , em relação aos parâmetros de Lamé, são obtidas a partir das seguintes expressões:

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} = - \int_V g_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial^2 u_n(\mathbf{r}', t)}{\partial t^2} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}'), \quad (\text{B.22a})$$

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} = - \int_V \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * \frac{\partial u_k(\mathbf{r}', t)}{\partial x_k} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}'), \quad (\text{B.22b})$$

e

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} = - \int_V \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) * 2\varepsilon_{kj}(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}'). \quad (\text{B.22c})$$

B.2.2 V_p , V_s e ρ

Sejam as velocidades compressional V_p e cisalhante V_s função dos parâmetros de Lamé, de acordo com as expressões abaixo descritas:

$$V_p = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}, \quad (\text{B.23a})$$

e

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (\text{B.23b})$$

Rearranjando as equações acima, temos os parâmetros de Lamé em função das velocidades, como representado abaixo:

$$\mu = \rho V_s^2, \quad (\text{B.24a})$$

e

$$\lambda = \rho V_p^2 - 2\rho V_s^2. \quad (\text{B.24b})$$

Uma perturbação infinitesimal nos parâmetros de Lamé são expressas em função da variação de V_p e V_s como expresso abaixo:

$$\delta\mu = 2\rho V_s \delta V_s + V_s^2 \delta\rho, \quad (\text{B.25a})$$

e

$$\delta\lambda = 2\rho V_p \delta V_p + (V_p^2 - 2V_s^2) \delta\rho - 4\rho V_s \delta V_s. \quad (\text{B.25b})$$

Seja a solução do campo espalhado, em termos dos parâmetros de Lamé e densidade dada por:

$$\begin{aligned} \delta u_i(\mathbf{r}, t) = & \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') + \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \delta \lambda(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\ & + \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} \delta \mu(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

uma vez substituindo $\delta\lambda$ e $\delta\mu$ na Equação B.26, temos o campo espalhado δu em

termos das velocidades e densidade:

$$\begin{aligned}
\delta u_i(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} [2\rho V_p \delta V_p + (V_p^2 - 2V_s^2) \delta \rho - 4\rho V_s \delta V_s] (\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} [2\rho V_s \delta V_s + V_s^2 \delta \rho] (\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'), \tag{B.27}
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\delta u_i(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} (2\rho V_p) (\mathbf{r}') \delta V_p(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} + (V_p^2 - 2V_s^2) (\mathbf{r}') \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&- \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} (4\rho V_s) (\mathbf{r}') \delta V_s(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} (2\rho V_s) (\mathbf{r}') \delta V_s(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} V_s^2(\mathbf{r}') \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'). \tag{B.28}
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos em função das variações $\delta \rho$, $\delta \mu$ e $\delta \lambda$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta u_i(\mathbf{r}, t) &= \int_V \left[\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} + (V_p^2(\mathbf{r}') - 2V_s^2(\mathbf{r}')) \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} + V_s^2(\mathbf{r}') \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} \right] \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V 2\rho(\mathbf{r}') V_p(\mathbf{r}') \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \delta V_p(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V 2\rho(\mathbf{r}') V_s(\mathbf{r}') \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} - 2 \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \right) \delta V_s(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'). \tag{B.29}
\end{aligned}$$

Pelo mesmo princípio pelo qual obtemos as derivadas dos parâmetros de Lamé, as derivadas de Fréchet com respeito às velocidades e densidade resultam em:

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} = \int_V \left[\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} + (V_p^2(\mathbf{r}') - 2V_s^2(\mathbf{r}')) \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \right] \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}')$$

$$+ \left[V_s^2(\mathbf{r}') \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} \right] \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}'), \quad (\text{B.30a})$$

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial V_p(\mathbf{r}')} = \int_V 2\rho(\mathbf{r}') V_p(\mathbf{r}') \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}'), \quad (\text{B.30b})$$

e

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial V_s(\mathbf{r}')} = \int_V 2\rho(\mathbf{r}') V_s(\mathbf{r}') \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} - 2 \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \right) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}'), \quad (\text{B.30c})$$

onde $\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')}$, $\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')}$ e $\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')}$, são as derivadas de Fréchet com relação aos parâmetros de Lamé, tal como nas expressões B.23.

B.2.3 I_p , I_s e ρ

Sejam as impedâncias compressional I_p e cisalhante I_s função dos parâmetros de Lamé, de acordo com as expressões abaixo descritas:

$$I_p = \rho V_p, \quad (\text{B.31a})$$

e

$$I_s = \rho V_s. \quad (\text{B.31b})$$

Rearranjando as equações acima, temos os parâmetros de Lamé em função das velocidades, como deduzido abaixo:

$$\mu = \frac{1}{\rho} I_s^2, \quad (\text{B.32a})$$

e

$$\lambda = \frac{1}{\rho} (I_p^2 - 2I_s^2). \quad (\text{B.32b})$$

Uma perturbação infinitesimal nos parâmetros de Lamé são traduzidas da seguinte forma:

$$\delta\mu = \frac{2}{\rho} I_s \delta I_s - \frac{I_s^2}{\rho^2} \delta\rho, \quad (\text{B.33a})$$

e

$$\delta\lambda = -\frac{1}{\rho} (I_p^2 - 2I_s^2) + \frac{2}{\rho} I_p \delta I_p - \frac{4}{\rho} I_s \delta I_s. \quad (\text{B.33b})$$

Uma vez substituindo $\delta\lambda$ e $\delta\mu$ na Equação B.26, temos o campo espalhado δu

em termos das impedâncias e densidade:

$$\begin{aligned}
\delta u_i(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \left[-\frac{1}{\rho^2} (I_p^2 - 2I_s^2) \delta \rho + \frac{2}{\rho} I_p \delta I_p - \frac{4}{\rho} \rho I_s \delta V_s \right] (\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} \left[\frac{2}{\rho} I_s \delta I_s + \frac{I_s^2}{\rho^2} \delta \rho \right] (\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'), \tag{B.34}
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\delta u_i(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \left[\frac{1}{\rho^2} (2I_s^2 - I_p^2) \right] \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} (2\rho I_p) (\mathbf{r}') \delta I_p(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&- \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \left(\frac{4}{\rho} I_s \right) (\mathbf{r}') \delta I_s(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} \left(\frac{2}{\rho} I_s \right) (\mathbf{r}') \delta I_s(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&- \int_V \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} \left(\frac{I_s^2}{\rho^2} \right) (\mathbf{r}') \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'). \tag{B.35}
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos em função das variações $\delta \rho$, $\delta \mu$ e $\delta \lambda$, temos:

$$\begin{aligned}
\delta u_i(\mathbf{r}, t) &= \int_V \left[\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} + \frac{1}{\rho^2} (2I_s^2(\mathbf{r}') - I_p^2(\mathbf{r}')) \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} - \frac{I_s^2(\mathbf{r}')}{\rho^2(\mathbf{r}')} \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} \right] \delta \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{2}{\rho(\mathbf{r}')} I_p(\mathbf{r}') \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \delta I_p(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \\
&+ \int_V \frac{2}{\rho(\mathbf{r}')} I_s(\mathbf{r}') \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} - 2 \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \right) \delta I_s(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'). \tag{B.36}
\end{aligned}$$

Pelo mesmo princípio pelo qual obtemos as derivadas dos parâmetros de Lamé, as derivadas de Fréchet com respeito às impedâncias e densidade resultam em:

$$\frac{\delta u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} = \int_V \left[\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')} + \frac{1}{\rho^2} (2I_s^2(\mathbf{r}') - I_p^2(\mathbf{r}')) \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \right] \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}')$$

$$- \left[\frac{I_s^2(\mathbf{r}')}{\rho^2(\mathbf{r}')} \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} \right] \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}'), \quad (\text{B.37a})$$

$$\frac{\delta u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial I_p(\mathbf{r}')} = \int_V \frac{2}{\rho(\mathbf{r}')} I_p(\mathbf{r}') \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}'), \quad (\text{B.37b})$$

e

$$\frac{\delta u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial I_s(\mathbf{r}')} = \int_V \frac{2}{\rho(\mathbf{r}')} I_s(\mathbf{r}') \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')} - 2 \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')} \right) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}'), \quad (\text{B.37c})$$

onde $\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \rho(\mathbf{r}')}$, $\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \lambda(\mathbf{r}')}$ e $\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mu(\mathbf{r}')}$, são as derivadas de Fréchet com relação aos parâmetros de Lamé, tal como nas expressões B.23.