



INVESTIGAÇÃO ANALÍTICO-NUMÉRICA DO MECANISMO DE
INSTABILIDADE LATERAL DOS ARAMES DAS ARMADURAS DE TRAÇÃO
DE DUTOS FLEXÍVEIS

Gabriel Mattos Gonzalez

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Luis Volnei Sudati Sagrilo

José Renato Mendes de Sousa

Rio de Janeiro
Outubro de 2018

INVESTIGAÇÃO ANALÍTICO-NUMÉRICA DO MECANISMO DE
INSTABILIDADE LATERAL DOS ARAMES DAS ARMADURAS DE TRAÇÃO
DE DUTOS FLEXÍVEIS

Gabriel Mattos Gonzalez

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:



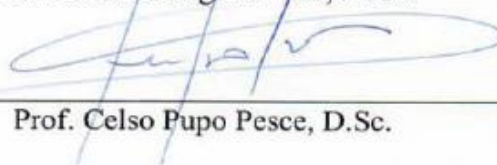
Prof. Luis Volnei Sudati Sagrilo, D.Sc.



Prof. José Renato Mendes de Sousa, D.Sc.



Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D.



Prof. Celso Pupo Pesce, D.Sc.



Dr. Carlos Alberto Duarte de Lemos, D.Sc.



Prof. Ricardo Valeriano Alves, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2018

Gonzalez, Gabriel Mattos

Investigação analítico-numérica do mecanismo de instabilidade lateral dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis/ Gabriel Mattos Gonzalez. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XX, 204 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Luis Volnei Sudati Sagrilo

José Renato Mendes de Sousa

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 145 – 154.

1. Dutos Flexíveis. 2. Elementos Finitos. 3. Instabilidade lateral de armadura de tração. I. Sagrilo, Luis Volnei Sudati, *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*“Quando se consegue formular uma lei geométrica,
realiza-se uma surpreendente inversão espiritual,
viva e suave como uma concepção;
a curiosidade é substituída pela esperança de criar.”*

- Gaston Bachelard

*“Só não há determinismo onde há o mistério.
Mas o que temos nós com isso?”*

- Oswald de Andrade

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Clara Thereza Mattos Gonzalez e Marco Vinicio Sosa Gonzalez, pelo incentivo perene e incondicional. Não só ao incentivo, mas também ao afeto, aos carinhos e até aos sermões, a cada dia mais escassos, vos agradeço. Sou imensamente grato à minha irmã, Raphaela Mattos Gonzalez, que, ao contrapor minhas certezas, instiga minha busca por melhor compreensão do mundo e colabora para formação de meu espírito científico.

Aos amigos do LACEO, presentes e ausentes, vós tornastes minha caminhada mais leve, repleta de mainéis que me serviram, e ainda servem, de esteio, obrigado. Agradeço por ter-lhes ao meu lado. Seus ensinamentos são valiosos, seja no campo técnico, ético ou profissional.

Aos amigos que me acompanham há anos, são vocês que tornam a vida possível. De resto, só há sobra. Em especial, ao grande amigo Oscar Maroquín Godoy, agradeço a amizade, a fé, o *chili* e os goles.

Ana Cristina, aos íntimos, Cris, tu mereces um parágrafo só teu. Agradeço-te pelos seus sorrisos matinais, bom-humor peculiar e pela presteza de mãe-leoa que zela pelos seus. Sou eternamente grato por poder chamar-te de amiga.

Aos professores e orientadores José Renato Mendes de Sousa e Luis Volnei Sudati Sagrilo, agradeço pela paciência e generosidade com que compartilharam, e continuam a partilhar, a gama extensa de conhecimentos técnicos. Agradeço-vos, também, pela amizade cultivada, pelas palavras de apoio e pela compreensão.

À FAPERJ (Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro) agradeço pelo auxílio financeiro através do programa Bolsista Nota 10.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

INVESTIGAÇÃO ANALÍTICO-NUMÉRICA DO MECANISMO DE
INSTABILIDADE LATERAL DOS ARAMES DAS ARMADURAS DE TRAÇÃO
DE DUTOS FLEXÍVEIS

Gabriel Mattos Gonzalez

Outubro/2018

Orientadores: Luis Volnei Sudati Sagrilo

José Renato Mendes de Sousa

Programa: Engenharia Civil

A flambagem lateral dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis é um fenômeno relativamente novo, data aproximadamente do fim da década de 1990. Tanto as abordagens experimentais quanto as abordagens teóricas, não parecem chegar a consensos quanto a: a influência do atrito, os modos de flambagem, o motivo das discrepâncias dos resultados experimentais de campo e de laboratório, etc. O presente trabalho objetiva o estudo sistemático da instabilidade lateral mediante a aplicação dos conceitos desenvolvidos pela Teoria da Estabilidade Elástica, proposta por Koiter em 1945. Propõe-se um elemento finito para a representação do comportamento mecânico dos arames da armadura de tração assentados sobre fundações elásticas, as quais têm por função representar as forças de atrito e as ações das camadas circundantes às armaduras. Buscou-se jogar luz sobre as principais incongruências mencionadas, bem como qualificar os pontos críticos e seus caminhos secundários. Além desse modelo numérico de investigação, é proposta uma formulação analítica, obtida por meio de regressão simbólica, realizada pelo software EUREQA®, a qual bem representasse a influência do atrito nas cargas críticas obtidas pelo modelo numérico.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ANALYTICAL-NUMERICAL INVESTIGATION OF THE MECHANISM OF
LATERAL INSTABILITY OF FLEXIBLE PIPES TENSILE ARMOR TENDONS

Gabriel Mattos Gonzalez

October/2018

Advisors: Luis Volnei Sudati Sagrilo

José Renato Mendes de Sousa

Department: Civil Engineering

The lateral buckling of the flexible pipes tensile armor wires is a relatively new phenomenon dating from the late 1990's. Both experimental and theoretical approaches do not seem to reach consensus on: the influence of friction, the modes of buckling, the reason for the discrepancies of the experimental results of field and laboratory, etc. The present work aims at the systematic study of lateral instability through the application of concepts developed by the Elastic Stability Theory, proposed by Koiter in 1945. A finite element is proposed for the representation of the mechanical behavior of tensile armor wires settled on elastic foundations, which has the function of representing the frictional forces and the actions of the pipe surrounding layers. It was tried to shed light on the main incongruities mentioned, as well as to qualify the critical points and their secondary paths. In addition to this numerical research model, it is proposed an analytical formulation, obtained by means of symbolic regression, performed by EUREQA® software, which well represents the influence of friction on the critical loads obtained by the numerical model.

ÍNDICE

CAPÍTULO I INTRODUÇÃO.....	1
I.1. APRESENTAÇÃO	1
I.2. MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	14
I.3. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	16
CAPÍTULO II REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	19
II.1. APRESENTAÇÃO	19
II.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
CAPÍTULO III MODELO DE VIGA CURVA PARA A ANÁLISE DE FLAMBAGEM LATERAL DAS ARMADURAS DE TRAÇÃO DE RISERS FLEXÍVEIS.....	33
III.1. APRESENTAÇÃO.....	33
III.2. RELAÇÕES GEOMÉTRICAS	34
III.3. MECÂNICA DE VIGAS ESPACIAIS NATURALMENTE CURVOS E TORCIDOS.....	37
III.3.1. Relações constitutivas.....	37
III.3.2. Relações cinemáticas.....	38
III.3.3. Equações de equilíbrio.....	40
III.4. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS	41
III.4.1. Elemento de viga espacial naturalmente curvo e torcido em fundações elásticas ..	42
III.4.2. Princípio dos trabalhos virtuais e energia potencial total	45
III.4.3. As matrizes de rigidez	52
III.4.4. A equação não-linear de equilíbrio e sua solução por métodos iterativos	55
III.4.5. Análise de instabilidade pelo MEF.....	60
III.4.6. Aproximações assintóticas	66
III.4.7. Solução numérica dos problemas de autovalor e de traçado do caminho de equilíbrio.....	70
CAPÍTULO IV ESTUDO DE CASOS	74
IV.1. APRESENTAÇÃO	74
IV.2. CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E GEOMÉTRICAS DOS DUTOS FLEXÍVEIS.....	75
IV.3. RESULTADOS	76

IV.3.1. Verificações preliminares.....	76
IV.3.2. Análise linearizada clássica, consistente e atualizada.....	89
IV.3.3. Modos de flambagem.....	97
IV.3.4. Condições de contorno.....	101
IV.3.5. Influência da curvatura do duto e das curvas limites.....	104
IV.3.6. Fundações elásticas: analogia ao atrito e à fita de alta resistência.....	113
CAPÍTULO V MODELO EMPÍRICO-ANALÍTICO PARA A ANÁLISE DE FLAMBAGEM LATERAL DAS ARMADURAS DE TRAÇÃO DE RISERS FLEXÍVEIS.....	121
V.1. APRESENTAÇÃO.....	121
V.2. ALGORITMOS GENÉTICOS E A REGRESSÃO SIMBÓLICA.....	122
V.3. MODELO EMPÍRICO-ANALÍTICO.....	125
V.4. RESULTADOS.....	129
V.4.1. Análise de sensibilidade do MEA.....	129
V.4.2. Análises paramétricas de flambagem lateral.....	132
CAPÍTULO VI COMENTÁRIOS FINAIS.....	138
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	145
ANEXO A PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE RIGIDEZ.....	155
APÊNDICE A NOÇÕES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL.....	157
A.1. INTRODUÇÃO.....	157
A.2. CURVAS PARAMÉTRICAS.....	158
A.3. SUPERFÍCIES REGULARES ESPACIAIS E O CASO ESPECIAL DO TORO.....	160
A.4. CURVAS CONTIDAS EM SUPERFÍCIES REGULARES.....	164
APÊNDICE B ATUALIZAÇÕES DAS CURVATURAS.....	170
APÊNDICE C MODELOS PARA FLAMBAGEM DE ARAMES DA ARMADURA DE TRAÇÃO.....	175
C.1. INTRODUÇÃO.....	175
C.2. MODELOS REPRODUZIDOS DA LITERATURA.....	176
C.2.1. Instabilidade lateral de arames: o modelo de Østergaard (2012).....	176
C.2.2. O modelo de Sousa (2005).....	181
C.3. ALGUNS RESULTADOS.....	187

APÊNDICE D VALIDAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CASO DE VIGAS RETAS.....	191
D.1. INTRODUÇÃO	191
D.2. VALIDAÇÃO.....	191
APÊNDICE E ESTUDO DAS CURVAS LIMITES	194
E.1. INTRODUÇÃO.....	194
E.2. A HIPÓTESE DAS CURVAS LIMITES	194
E.3. CURVA LOXODRÔMICAS E SUAS CURVATURAS	195
E.4. CURVAS GEODÉSICAS E SUAS CURVATURAS	200

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura I-1 – Duto flexível típico.</i>	2
<i>Figura I-2 – Algumas configurações comumente utilizadas com linhas flexíveis (Sævik, 1992).</i>	3
<i>Figura I-3 – Profundidade de utilização já qualificadas (azul) e de projeções futuras a serem conquistadas (laranja) de linhas flexíveis de diferentes diâmetros nominais (TECHNIP, 2016).</i>	4
<i>Figura I-4 - Representação esquemática das instabilidades em arames da armadura de tração:(a) radial e (b) lateral (Rizzo e Vaz, 2011).</i>	9
<i>Figura I-5 – Gaiola de passarinho ou Birdcaging. Detalhe de amostra dos testes de (a) Talgatti (2013) e (b) Braga & Kaleff (2004).</i>	10
<i>Figura I-6 - Falha por flambagem lateral (Braga & Kaleff, 2004).</i>	12
<i>Figura I-7 – Diferentes modos de flambagem lateral obtidos nos ensaios de Østergaard (2012).</i>	14
<i>Figura II-1 – Modos de flambagem obtidos nos experimentos realizados por Braga (2003) para as amostras: (a) 01; (b) 02; (c) 03; (d) 04; (e) 05; (f) 06; (g) 07; (h) 08; (i) 09; (j) 10; (k) 11; (l) 13; e (m) 14.</i>	21
<i>Figura III-1- (a) Geometria e parâmetros do toro e (b) detalhe das coordenadas locais dos tendões das armaduras de tração.</i>	35
<i>Figura III-2 – Elemento finito de viga curva de dez graus de liberdade assentado sobre fundações elásticas.</i>	44
<i>Figura III-3 – Coordenadas da seção transversal (x_N e x_B).</i>	49
<i>Figura III-4 – Equilíbrio incremental nos referenciais lagrangeanos total e atualizado.</i>	58
<i>Figura III-5 – Caminhos de equilíbrios.</i>	60
<i>Figura III-6 – Atualização do problema de autovalor.</i>	63
<i>Figura III-7 – Esquema do algoritmo usado para a solução do problema de autovalor não-linear.</i>	71
<i>Figura III-8 – Esquema do algoritmo de Newton-Raphson usado para a solução iterativa da equação de equilíbrio não-linear.</i>	72
<i>Figura III-9 – Algoritmo de Newton-Raphson e suas fases de predição e de correção.</i>	73
<i>Figura IV-1 – Influência do comprimento do arame ($S = n_p \cdot S_p$ na carga crítica (λ_{cr})).</i>	80
<i>Figura IV-2 – Algoritmo para a determinação do coeficiente de atrito.</i>	82
<i>Figura IV-3 – Comportamento histerético característico da flexão de dutos flexíveis: momento fletor (M) versus curvatura (κ).</i>	83

<i>Figura IV-4 – Analogia entre (a) o modelo de Féret et al. (1995) e (b) o modelo proposto por esta tese para a consideração do atrito lateral dos arames da armadura de tração.</i>	<i>85</i>
<i>Figura IV-5- Caminhos de equilíbrio fundamental e seus pontos críticos para os dutos (a) de 6”, (b) de 8”, (c) de 9,5” e (d) de 14” sob a hipótese das curvas loxodrômicas ($R = 103 \cdot r$).</i>	<i>93</i>
<i>Figura IV-6 – Modos de flambagem lateral e seus deslocamentos laterais: (a) primeiro modo; (b) segundo modo; (c) terceiro modo; (d) quarto modo; e (e) quinto modo.</i>	<i>100</i>
<i>Figura IV-7 – Influência da variação do comprimento do arame (número de passos, n_p, da armadura de tração) sob condições de contorno (a) bi-apoiada e (b) bi-engastada na capacidade de carga dos dutos estudado para o MVC e os modelos de Østergaard (2012) e de Sævik & Ji (2014)</i>	<i>104</i>
<i>Figura IV-8 – Modos de flambagem lateral e seus deslocamentos laterais para $R = 0$ e $R = 12m$: (a) primeiro modo; (b) segundo modo; (c) terceiro modo; (d) quarto modo; e (e) quinto modo.</i>	<i>112</i>
<i>Figura IV-9- Modos de flambagem lateral para $R = 12m$ considerando a curva loxodrômica: (a) primeiro modo; (b) segundo modo; (c) terceiro modo; (d) quarto modo; e (e) quinto modo.</i>	<i>112</i>
<i>Figura IV-10- Modos de flambagem lateral para $R = 12m$ considerando a curva geodésica: (a) primeiro modo; (b) segundo modo; (c) terceiro modo; (d) quarto modo; e (e) quinto modo.</i>	<i>113</i>
<i>Figura IV-11 – Influência do coeficiente de atrito na capacidade de carga do duto para coeficientes de atrito baixos ($\mu = 0 \dots 0,015$).</i>	<i>116</i>
<i>Figura IV-12 – Capacidade de carga para a variação do coeficiente de atrito ($\mu = 0 \dots 0,4$): comparação entre modelos teóricos [MVC, Vaz & Rizzo (2011) e Yang et al. (2015)].</i>	<i>118</i>
<i>Figura IV-13 – Influência do coeficiente de fricção na capacidade de carga.</i>	<i>120</i>
<i>Figura V-1 – Fluxograma de um algoritmo genético geral.</i>	<i>123</i>
<i>Figura V-2 – Comparação entre os casos propostos (MVC) e os resultados da equação proveniente da RS (MEA – Equação V-7).</i>	<i>130</i>
<i>Figura V-3 – Desvios entre as cargas críticas obtidas via MVC e MEA (Equação V-7) para os casos propostos.</i>	<i>130</i>
<i>Figura V-4 – Influência do ângulo de assentamento inicial do arame sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto.</i>	<i>133</i>
<i>Figura V-5 – Influência do raio médio do arame sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto.</i>	<i>133</i>
<i>Figura V-6 – Influência da largura da seção transversal do arame sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto.</i>	<i>134</i>
<i>Figura V-7 – Influência da altura da seção transversal do arame sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto.</i>	<i>134</i>

<i>Figura V-8 – Influência do coeficiente de atrito sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto para quatro ângulos de assentamentos: $\phi_0 = 22^\circ; 27^\circ; 30^\circ; 35^\circ$.</i>	135
<i>Figura VI-1 – Triedro de Frenet,</i>	160
<i>Figura VI-2 – Toro e suas coordenadas paramétricas: (a) vista isométrica e (b) vista do corte sobre o plano A-A'.</i>	161
<i>Figura VI-3 – Representações do(a) plano tangente, T_p, e das variáveis (b) ϕ, x_ν, x_θ e t,</i>	162
<i>Figura VI-4 – Triedro de Darboux, de Frenet e ângulo de rotação γ</i>	165
<i>Figura VI-5 – Curvatura normal,</i>	166
<i>Figura VI-6 – Curvas coordenadas, β_ν e η_θ,</i>	168
<i>Figura VI-7 – (a) Vista isométrica e (b) Vista frontal do modelo.</i>	181
<i>Figura VI-8 – Vista lateral dos arames assentados a $20^\circ, 30^\circ$ e 40°,</i>	184
<i>Figura VI-9 – Comparação dos resultados de um arame da armadura interna do duto de 6" sujeito à variação da curvatura: (a) $\kappa = (15m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $np=4$; (b) $\kappa = (10m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $np=4$; e (c) $\kappa = (0m)^{-1}$, $L_p=1,5m$ e $np=4$.</i>	188
<i>Figura VI-10 – Comparação dos resultados de um arame da armadura interna do duto de 6" sujeito à variação do comprimento do passo: (a) $\kappa = (15m)^{-1}$, $L_p=1,0m$ e $np=4$; (b) $\kappa = (15m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $np=4$; e (c) $\kappa = (15m)^{-1}$, $L_p=1,5m$ e $np=4$.</i>	189
<i>Figura VI-11 - Comparação dos resultados de um arame da armadura interna do duto de 6" sujeito à do número de passos analisados: (a) $\kappa = (15m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $np=1$; (b) $\kappa = (15m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $np=2$; e (c) $\kappa = (15m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $np=3$.</i>	190
<i>Figura VI-12 Colunas de Euler com as condições de contorno (a) engastada-engastada;(b) livre-engastada; (c) apoiada-engastada; (d) bi-apoiada.</i>	192
<i>Figura VI-13 – Curvas limites.</i>	195
<i>Figura VI-14 – Comparação entre resultados Sævik (1992), Østergaard (2012) e as formulações deduzidas (FD) para as variações de curvaturas ($\Delta\kappa_n$, $\Delta\kappa_g$ e $\Delta\tau_g$) de uma curva loxodrômica ao longo do comprimento de arco (s).</i>	198
<i>Figura VI-15 – Variação de curvaturas normal, geodésica e torção para os dutos de (a) 6", (b) 8", (c) 9,5" e (d) 14" e para a curva loxodrômica.</i>	199
<i>Figura VI-16 – Comparação entre resultados numéricos (RK) e empíricos (SR) para a variação de ϕ e θ de uma curva geodésica ao longo do comprimento de arco (s).</i>	202
<i>Figura VI-17 – Comparação entre resultados numéricos (RK) e empíricos (SR) para as variações de curvaturas ($\Delta\kappa_n$, $\Delta\kappa_g$ e $\Delta\tau_g$) ao longo do comprimento de arco (s).</i>	203
<i>Figura VI-18 – Variação de curvaturas normal, geodésica e torção para os dutos de (a) 6", (b) 8", (c) 9,5" e (d) 14" e para a curva geodésica.</i>	204

ÍNDICE DE TABELAS

<i>Tabela II-1 – Resumo dos resultados experimentais obtidos por Braga (2003).</i>	20
<i>Tabela II-2 – Resultados experimentais obtidos por Østergaard (2012).</i>	24
<i>Tabela IV-1- Características dos dutos flexíveis analisados.</i>	76
<i>Tabela IV-2 – Validação do comportamento axial dos diversos modelos gerados para o riser de 6”</i>	78
<i>Tabela IV-3 – Validação do comportamento axial dos diversos modelos gerados para o riser de 8”</i>	78
<i>Tabela IV-4 - Validação do comportamento axial dos diversos modelos gerados para o riser de 9.5”</i>	78
<i>Tabela IV-5 – Validação do comportamento axial dos diversos modelos gerados para o jumper de 14”</i> .79	
<i>Tabela IV-6 – Carga crítica de flambagem lateral linear, consistente e atualizada para os dutos estudados sem curvatura† e sem atrito.</i>	90
<i>Tabela IV-7 – Carga crítica de flambagem lateral para os cinco primeiros modos de cada um dos dutos estudados sem curvatura.</i>	97
<i>Tabela IV-8 – Carga crítica de flambagem lateral do riser de 6” quando variado o número de passos para as condições de contorno: (a) bi-apoiados; (b) engastado-apoiado; (c) engastado-livre; e (d) bi-engastado.</i>	101
<i>Tabela IV-9 – Carga crítica de flambagem lateral do riser de 8” quando variado o número de passos para as condições de contorno: (a) bi-apoiados; (b) engastado-apoiado; (c) engastado-livre; e (d) engastado-engastado.</i>	102
<i>Tabela IV-10 – Carga crítica de flambagem lateral do riser de 9.5” quando variado o número de passos para as condições de contorno: (a) bi-apoiados; (b) engastado-apoiado; (c) engastado-livre; e (d) engastado-engastado.</i>	102
<i>Tabela IV-11 – Carga crítica de flambagem lateral do jumper de 14” quando variado o número de passos para as condições de contorno: (a) bi-apoiados; (b) engastado-apoiado; (c) engastado-livre; e (d) engastado-engastado.</i>	102
<i>Tabela IV-12 – Carga crítica de flambagem para os quatro dutos estudados considerando o duto reto ou fletido (R=12m), segundo as curvas geodésica e loxodrômica.</i>	107
<i>Tabela IV-13 – Carga crítica de flambagem lateral para os cinco primeiros modos de cada um dos dutos estudados com $R = 12m$ para as curvas (a) loxodrômica e (b) geodésica.</i>	109
<i>Tabela IV-14 – Carga crítica de flambagem lateral (MVC) para valores diversos de rigidezes da fundação elástica na direção binormal (k_B).</i>	114
<i>Tabela IV-15 – Carga crítica de flambagem lateral (MVC) para valores diversos de rigidezes da fundação elástica na direção normal (k_N).</i>	114
<i>Tabela V-1 – Características dos dutos usados como entrada no EUREQA®.</i>	126

<i>Tabela V-2 – Estudo de sensibilidade das variáveis na determinação da carga crítica (Equação V-7)..</i>	<i>131</i>
<i>Tabela D-1 Comparação analítica e numérica para as cargas de Euler.....</i>	<i>193</i>
<i>Tabela D-2 – Comparação dos resultados numéricos (MVC) e analíticos (Equação D-2) para a viga assentada sobre fundação elástica de 1kN/m².....</i>	<i>193</i>
<i>Tabela E-1 – Limites máximo e mínimo dos parâmetros utilizados nos casos de treino.</i>	<i>201</i>

LISTA DE VARIÁVEIS

Variáveis Romanas

A – Área da seção transversal do arame

A_c – Área de contato entre os arames e a camada circundante

A_N, A_B – Área efetiva de cisalhamento

$C_\sigma, C_\sigma^{car}, C_\sigma^{pre}, C_\sigma^{ft}, C_\sigma^{pl}$ – Módulo de elasticidade dos arames da armadura de tração, da carcaça intertravada, da armadura de pressão, da fita de alta resistência e das camadas plásticas

C_τ – Módulo de elasticidade transversal

D, Γ, J – Constantes de torção

E, F, G – Primeiras formas fundamentais de uma dada superfície nas direções principais e cruzadas

F_f – Fator de preenchimento da camada de armadura

h – Altura da seção transversal

I_N, I_B – Segundo momento de área na direção normal e binormal

I_p, II_p – Primeira e segunda forma fundamental de uma dada superfície

k_N, k_B – Rigidezes das fundações elásticas nas direções normal e binormal

k_a, k_r, k_{mol} – Rigidezes axial e radial dos dutos e rigidez equivalente da mola

$L, L_e, \Delta L$ – Comprimento total do duto, comprimento efetivo de flambagem da coluna e variação do comprimento do duto

M_t, M_N, M_B – Momento resultante na direção tangencial, normal e binormal do arame

m_t, m_N, m_B – Momento distribuídos na direção tangencial, normal e binormal do arame

n_{ar} – Número de arames

n_p – Número de passos da armadura

n_{dv} – Número de divisões do modelo numérico

P, P_{mol} – Força na direção axial do duto e força na direção do eixo da mola

P_{ef}, P_Z – Força na direção axial do duto efetiva e real.

P_{cr}, P_{cr}^* – Capacidade de carga do duto e das armaduras internas à flambagem

P_t, P_N, P_B – Forças resultantes na direção tangencial, normal e binormal do arame

p_t, p_N, p_B – Força distribuídas na direção tangencial, normal e binormal do arame

$\Delta p, p_{ext}, p_{int}$ – Diferencial de pressão de contato e pressão externa e interna
 q_f – Forças de atrito ao longo do arame
 R – Raio de curvatura do toro
 $r, r_{car}, r_{pre}, r_{ft}, r_{pl}$ – Raio médio de assentamento dos arames da armadura de tração, da carcaça intertravada, da armadura de pressão, da fita de alta resistência e das camadas plásticas;
 s – Comprimento de arco
 S, S_p – Comprimento total e de um passo do arame
 $t_{car}, t_{pre}, t_{kev}, t_{pl}$ – Espessuras da carcaça intertravada, da armadura de pressão, da fita de alta resistência e das camadas plásticas
 T_p – Plano tangente de uma superfície
 u_t, u_N, u_B – deslocamentos na direção tangencial, normal e binormal do arame
 \mathcal{U} – Energia de Deformação
 \mathcal{V} – Potencial das Cargas
 x_N, x_B – coordenadas da seção transversal na direção normal e binormal
 $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}, x_n^{(i)}$ – Dados de entrada do *software* EUREQA®
 $X_{hélice}, Y_{hélice}, Z_{hélice}$ – Coordenadas da hélice cilíndrica
 $X_{modelo}, Y_{modelo}, Z_{modelo}$ – Coordenadas da geodésica do toro
 y_i – Valores alvo do *software* EUREQA®
 w – Largura da seção transversal
 $[A]$ – Matriz de áreas das seções transversais
 $[B]$ – Matriz de compatibilidade cinemática do elemento genérico;
 $[D]$ – Matriz constitutiva do material
 $[I]$ – Matriz de segundos momentos de área;
 $[K_M], [K_W], [K_G]$ – Matrizes de rigidez linear, de contribuição da fundação elástica e de rigidez geométrica
 $[K_1], [K_2], [K_{NL}]$ – Matrizes de rigidez não-lineares
 $[K_T], [K_S]$ – Matriz de rigidez tangente e de rigidez secante
 $[L]$ – Matriz de operadores diferenciais de um elemento genérico
 $\{F\}$ – Vetor de cargas externas unitário
 $\{m\}$ – Vetor de momentos distribuídos externos

$\{\mathbf{M}\}$ – Vetor de momentos internos

$\{\mathbf{P}\}$ – Vetor de forças internas

$\{\mathbf{p}\}$ – Vetor de forças distribuídas externas

$\{\mathbf{t}\}, \{\mathbf{N}\}, \{\mathbf{B}\}$ – Vetores tangente, normal e binormal componentes do triedro de Darboux

$\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}^E\}, \{\Delta\mathbf{u}\}$ – Vetor de deslocamentos nodais, campo de deslocamentos, deslocamentos em ponto de equilíbrio conhecido e deslocamento incremental

Variáveis Gregas

α – Parâmetro de aproximação assintótica

$\beta_t, \beta_N, \beta_B$ – Rotações nas direções tangente, normal e binormal do arame

γ – Ângulo de rotação entre o triedro de Frenet e de Darboux

$\varepsilon_t, \varepsilon_N, \varepsilon_B$ – Deformações nas direções tangente, normal e binormal do arame

Θ_{giro} – Ângulo de giro proveniente do deslocamento transversal da curva geodésica

θ, θ_{RS} – Coordenada angular radial do toro e sua expressão para a curva geodésica

κ – Menor curvatura do toro

$\kappa_n, \kappa_g, \tau_g$ – Curvaturas normal, geodésica e torsão geodésica de uma curva

$\lambda, \lambda^E, \Delta\lambda$ – Parâmetro de carga, carga em um ponto de equilíbrio conhecido e incremento de carga

λ_{cr} – Carga crítica do arame

μ – Coeficiente de atrito

ν – Coeficiente de Poisson

Ξ – Fator de correção para a capacidade de carga do duto

ξ – Coordenada de comprimento adimensional do elemento finito

Π – Energia Potencial Total

σ_u^{ft} – Tensão última da fita de alta resistência

σ_{cr}^E – Tensão crítica de flambagem radial elástica

σ_{ar} – Tensão no arame

v – Coordenada angular axial do toro

ϕ, ϕ_0, ϕ_{RS} – Ângulo de assentamento, ângulo de assentamento inicial e sua expressão para curva geodésica

φ – Rotação axial dos dutos flexíveis

ψ – Função de empenamento de St. Venant

$\omega_t, \omega_N, \omega_B$ – Curvaturas nas direções tangente, normal e binormal dos arames

$[\boldsymbol{\epsilon}]$ – Tensor de deformação de Green

$[\boldsymbol{\kappa}]$ – Matriz de curvatura de Darboux

$[\boldsymbol{\sigma}], [\boldsymbol{\sigma}_0]$ – Tensor de tensões e estado inicial de tensões

$[\boldsymbol{\Phi}]$ – Matriz de forma do elemento de viga curva e torcida;

$[\boldsymbol{\Omega}]$ – Matriz de compatibilidade cinemática do elemento de viga curva e torcida

$\{\boldsymbol{\alpha}\}$ – Curva paramétrica sobre o toro

$\{\boldsymbol{\beta}\}$ – Vetor de ângulos de rotação

$\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ – Vetor de deformações

$\{\boldsymbol{\epsilon}_0\}, \{\boldsymbol{\epsilon}_1\}, \{\boldsymbol{\epsilon}_2\}$ – estado inicial de deformação, parcela linear e quadrática do tensor de deformação de Green

$\{\boldsymbol{\tau}\}$ – Tração de superfície;

$\{\boldsymbol{\Psi}\}$ – Taxa de variação de deslocamento

$\{\boldsymbol{\omega}\}$ – Vetor de curvaturas dos arames

NOMENCLATURA

- API – *American Petroleum Institute*
- AFNOR – Associação Francesa de Normatização
- DIP – *Deep Immersion Performance*
- EPT – Energia Potencial Total
- EMQ – Erro Médio Quadrático
- IFPEN – *Institut Français du Pétrole et Energies Nouvelles*
- MEA – Modelo Empírico-Analítico
- MEF – Método dos Elementos Finitos
- MVC – Modelo de Viga Curva
- MVC_{Loxodrômica} – Modelo de Viga Curva para a curva Loxodrômica
- MVC_{Geodésica} – Modelo de Viga Curva para a curva Loxodrômica
- PTV – Principio dos Trabalhos Virtuais
- PEEPT – Principio da Estacionaridade da Energia Potencial Total
- PVC – Problema de Valor de Contorno
- RS – Regressão Simbólica
- RK – Runge-Kutta
- RLA – Referencial Lagrangeano Atualizado
- RLT – Referencial Lagrangeano Total
- SPA – Sistemas de Produção Antecipada
- TCAC – Técnica de comprimento de arco constante
- TEE – Teoria da Estabilidade Elástica
- TDP – *Touch Down Point*
- TDZ – *Touch Down Zone*
- TP – Técnica da Perturbação

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1. Apresentação

O início da utilização de dutos flexíveis no Brasil remete ao final da década de 1970 com o advento do Sistema de Produção Antecipado (SPA) e a busca por petróleo em áreas *offshore* com lâminas d'água maiores que 100 m. Uma das configurações mais recorrentes em um SPA consiste em plataformas flutuantes ligadas ao sistema de completação molhado por intermédio de dutos flexíveis (Figura I-1). A alternativa utilizada para a exploração de petróleo em áreas *offshore* era, até então, composta por unidades de produção fixas com sistemas de completação seca¹ e dutos rígidos que ligavam o poço à plataforma. No entanto, com a descoberta de reservas em lâminas d'água cada vez mais profundas, essa alternativa deixou de ser vantajosa. Para quantificar o uso de linhas flexíveis no país, apenas o navio Sunrise 2000, que opera exclusivamente em águas brasileiras desde 1995, e é de propriedade da TECHNIP, companhia que detêm cerca de 60% do mercado nacional de linhas flexíveis, já lançou mais de 2.500km dessas linhas (TECHNIP, 2016). Ainda de acordo com essa

¹ Completação seca é dada em oposição à completação molhada. Enquanto para esta, a completação molhada, a cabeça de poço é localizada no leito marinho; naquela, completação seca, a cabeça de poço situa-se sobre a unidade de produção ou em solo terrestre.

companhia, mais de 10.000km de suas linhas já foram instalados ao redor do mundo (TECHNIP, 2016).

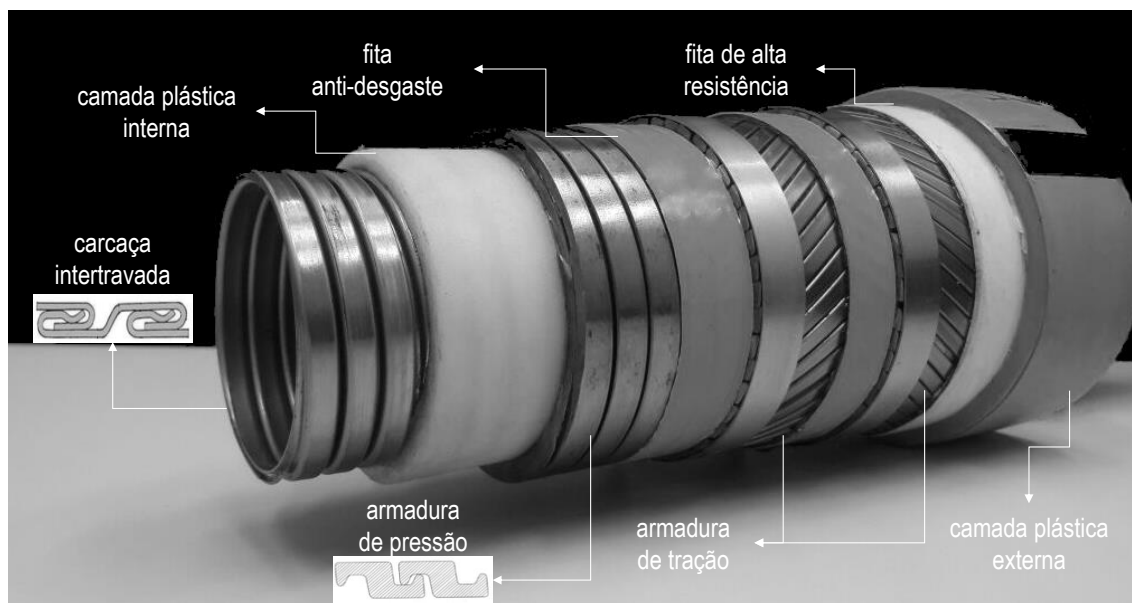


Figura I-1 – Duto flexível típico.

Os dutos flexíveis podem ser utilizados na indústria de óleo e gás formando linhas flexíveis denominadas *flowlines*, *jumpers* ou *risers*, de produção ou de serviço. Destacam-se as funções de transporte de óleo (oleodutos), gás (gasodutos) e injeção de água ou gás (*gas lift*) (API SP 17J, 2014). *Risers* flexíveis utilizados em aplicações dinâmicas comumente assumem uma das configurações ilustradas na Figura I-2. A escolha da configuração a ser adotada depende das condições ambientais locais, da unidade flutuante e de seus movimentos, da lâmina d'água, da quantidade de dutos utilizados, da organização dos *risers* no leito marinho e do custo. Apesar de algumas configurações serem mais indicadas para situações específicas, normalmente a escolha da configuração conta com a experiência e a avaliação técnica dos engenheiros responsáveis (de Sousa, 2005).

Atualmente, a TECHNIP (2016) disponibiliza linhas de 2" a 20" de diâmetro nominal. A Figura I-3 indica quais risers, separados por seus diâmetros, apresentam-se qualificados atualmente para operar (azul) em cada lâmina d'água e a projeção da companhia francesa para o futuro (laranja).

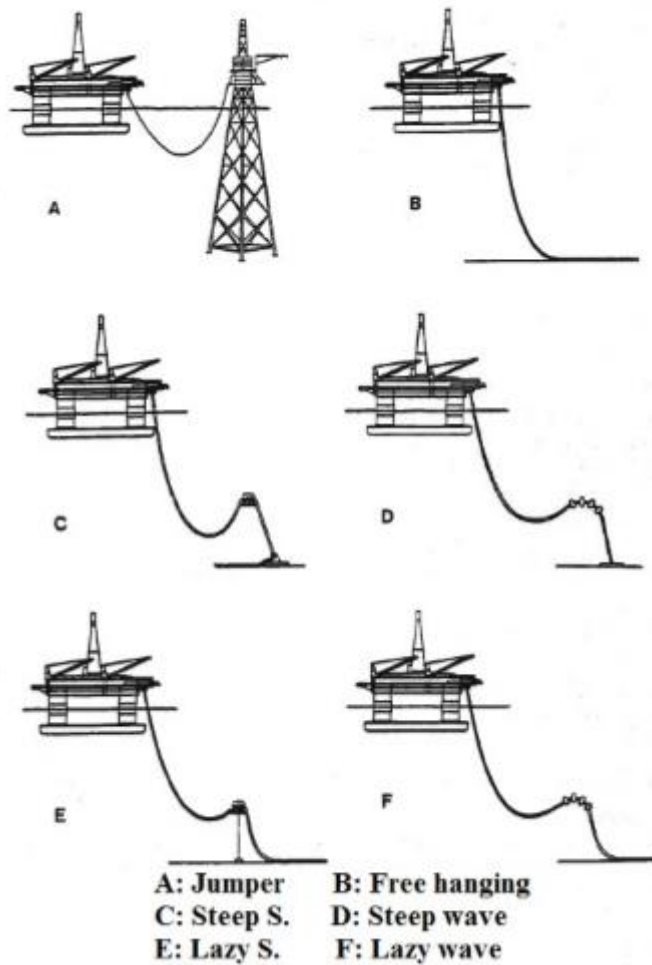


Figura I-2 – Algumas configurações comumente utilizadas com linhas flexíveis (Sævik, 1992).

O conceito inerente aos dutos flexíveis é a combinação de alta rigidez e resistência axiais com baixa rigidez à flexão. Esse comportamento aparentemente dicotômico é atingido por sua estrutura compósita, que é dada por uma combinação de diferentes camadas, poliméricas e metálicas. As principais vantagens dos dutos flexíveis frente aos rígidos são: a pré-fabricação; o fácil transporte, que advém da possibilidade de grandes comprimentos serem armazenados em carretéis; a facilidade na instalação, desinstalação e reinstalação em outros campos de produção; além da complacência característica dessas estruturas, em outras palavras, as linhas flexíveis são estruturas capazes de absorver os grandes deslocamentos impostos pelas unidades flutuantes às quais estão conectadas (Barltrop, 1998).

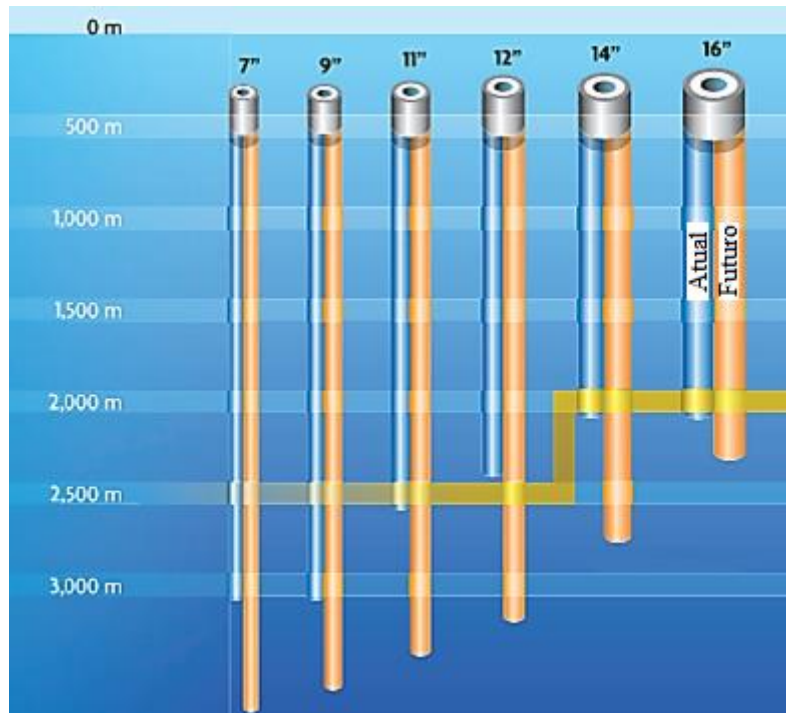


Figura I-3 – Profundidade de utilização já qualificadas (azul) e de projeções futuras a serem conquistadas (laranja) de linhas flexíveis de diferentes diâmetros nominais (TECHNIP, 2016).

Existem basicamente duas categorias de dutos flexíveis, que são divididas de acordo com a interação entre suas camadas. Quando as camadas são aderidas umas às outras pela vulcanização de um elastômero típico, os dutos são chamados de dutos de camadas aderentes; quando, às camadas, é possibilitada a movimentação relativa, os dutos são conhecidos por dutos de camadas não aderentes. O presente trabalho tem como objeto de estudo apenas esta última classe dos dutos flexíveis.

A Figura I-1 ilustra as camadas de um duto flexível típico. Nessa figura, duas regiões devem ser destacadas, o *bore* e o anular. O anular é a região localizada entre a parede externa da camada plástica interna até a parede interna da camada plástica externa, ao passo que o *bore* é a região interna delimitada pela camada plástica interna, isto é, a região por onde o fluido escoar no duto. Os dutos flexíveis podem operar sob duas condições de anular, denominadas alagada e seca. A condição de anular seco ocorre, geralmente, quando a camada plástica externa se encontra intacta e não se nota a presença de líquidos nesses espaços. Já o alagamento do anular pode ocorrer tanto devido à danificação da camada plástica externa, que permite a entrada do fluido

externo no interior do anular, quanto devido à permeação de vapor d'água e sua posterior condensação.

A seguir, as principais camadas de um duto flexível típico serão descritas, quanto às suas funcionalidades, características e materiais.

A **carcaça intertravada** (ver Figura I-1) é usualmente a camada mais interna e obrigatória, caso o fluido interno carregue gás. Caso essa camada esteja presente, o duto é do tipo *rough bore* e, em caso contrário, *smooth bore*. Essa camada é construída a partir do dobramento a frio de uma fita de aço gerando, assim, o perfil ilustrado na Figura I-1. O aço empregado deve possuir boa resistência à corrosão² em presença de água e hidrocarbonetos (API RP 17B, 2014). Vale ressaltar que a escolha do tipo de aço a ser utilizado está diretamente relacionada à composição química do fluido interno e à intensidade das solicitações a serem resistidas pelos dutos.

As principais funções desta camada envolvem: a prevenção do colapso da estrutura devido à pressão externa; a prevenção do colapso do duto devido à queda abrupta da pressão interna; e a imposição de resistência à abrasão, causada por partículas existentes no fluido transportado. Além dessas funções, é necessário que a carcaça intertravada não incremente a rigidez à flexão desses dutos, o que é obtido pela sua forma construtiva, onde uma fita de aço é intertravada com pequenas folgas e, posteriormente, assentadas helicoidalmente com um alto ângulo de assentamento (próximo de 90 graus).

A **armadura de pressão**³ nem sempre está presente nos dutos flexíveis. Essa camada é produzida a partir de arames trefilados, os quais, normalmente em par, são assentados sobre o duto em formato de uma espiral de pequeno passo. O material empregado é o aço carbono, mais comumente os de médio ou alto teor de carbono⁴,

² Os aços mais comumente utilizados para a carcaça intertravada são: os aços inoxidáveis austeníticos (AISI 304, 304L, 316 e 316L), os inoxidáveis Duplex (UNS S31803) e os aços-liga com alto teor de níquel (N08825)

³ A seção transversal dos arames que compõe essa armadura pode assumir várias formas padronizadas. Dentre elas, a de uso mais recorrente recebe o nome de espiral zeta, devido à seu formato, que assume o aspecto de um Z.

⁴ A variação do teor de carbono nesses aços pode torná-los mais ou menos adequados a determinados ambientes e funções. Por exemplo, um maior teor de carbono está, geralmente, associado a uma maior

como os aços FM 15 e FM 35, especificados pela Associação Francesa de Normatização (AFNOR) (Berge, et al., 1992).

A principal função dessa camada é fornecer resistência aos esforços radiais experimentados pelo duto, sejam externos ou internos. Com essa camada, garante-se resistência adicional à carcaça quando o duto está sujeito à pressão externa com o anular seco. Vale ressaltar que o alto ângulo de assentamento adotado nessas camadas assegura pouca ou quase nenhuma contribuição às rigidezes axiais e à rigidez de flexão desses dutos. As folgas existentes entre os arames devem ser controladas a fim de evitar o travamento da camada e limitar a extrusão das camadas plásticas adjacentes (Witz & Burke, 1995).

As **armaduras de tração** são compostas por um número par de camadas, geralmente duas ou quatro⁵, enroladas contra-helicoidalmente, o que visa minimizar a torção quando o duto é solicitado axialmente. Cada camada é composta por arames metálicos – normalmente, entre 40 e 60 arames – de seções transversais aproximadamente retangulares e conformados diretamente sobre a camada que lhes dão suporte. O material que as constituem é o aço com alto teor de carbono, tais como os aços FM 60 e FM 72, especificado pela AFNOR (Berge et al, 1992), devido às altas tensões experimentadas.

O ângulo de assentamento desses arames é, de maneira geral, menor do que os apresentados pelas armaduras de pressão e carcaça intertravada, entre 25° e 55°. É ainda o ângulo da hélice formada pelos arames dessas camadas que garantirá o balanço entre rigidez axial e radial do duto. Quanto menor o ângulo, maior a contribuição à rigidez axial; e, quanto maior o ângulo, maior será o incremento da rigidez radial do duto.

No que segue, resta especificar as **camadas poliméricas** presentes nos dutos flexíveis. Normalmente, a mais interna é chamada **camada plástica interna**, a qual é superposta à carcaça intertravada. Já a mais externa, a **camada plástica externa**, cujas

resistência mecânica, porém, também, a uma menor resistência à corrosão e menor ductilidade (Chiaverini, 1986).

⁵ Recentemente, com a exploração em lâminas d'água cada vez mais profundas, as estruturas com dois pares de armaduras de tração vêm sendo bastante utilizadas na região de conexão com a unidade de produção. Isso, pois essas estruturas garantem maior resistência axial e, conseqüentemente, podem suportar as maiores cargas referentes a seus pesos próprios.

principais atribuições são garantir a estanqueidade do anular, evitando o contato das camadas do duto com o fluido interno e com a água do mar, respectivamente. Essas camadas são fabricadas pela extrusão⁶ de materiais termoplásticos.

No intermédio do anular não é comum a existência de camadas plásticas estanques. Todavia, **fitas anti-desgaste** e **fitas de alta resistência** são empregadas com frequência. A primeira tem o objetivo de reduzir o desgaste entre as camadas adjacentes e é empregada, especialmente, em *risers* sujeitos a ações dinâmicas. Já as fitas de alta resistência são usualmente aplicadas acima da armadura de tração externa e têm papel essencialmente estrutural. Essas fitas buscam evitar o deslocamento radial excessivo dos arames das armaduras de tração quando o duto sofre compressão axial real.

Atualmente, no Brasil, grande parte das áreas de exploração *offshore* se localizam em águas profundas ou ultra-profundas e, conseqüentemente, os dutos flexíveis estão sujeitos a carregamentos ambientais mais severos, tanto em operação quanto em instalação. Ademais, apesar de numerosos e valiosos esforços para a compreensão do comportamento mecânico dessas estruturas complexas, alguns mecanismos de falha ainda não são completamente compreendidos.

Define-se a falha de um duto flexível, de acordo com a API RP 17B (2014), como a perda da capacidade do duto de transportar o fluido interno de maneira segura. Desse modo, os dutos flexíveis devem ser projetados para suportar carregamentos funcionais (peso próprio, movimentos das unidades flutuantes, etc.), ambientais (ação proveniente das ondas, correntes, dentre outras) e acidentais (efeitos adicionais causados, por exemplo, pela ruptura de uma linha de ancoragem da unidade flutuante) sem que o transporte do fluido interno seja posto em risco. Conforme já visto, cada camada do duto flexível é responsável por uma função diferente e, portanto, os modos de falha de cada uma dessas camadas são também distintos. Neste trabalho, apenas as falhas referentes às armaduras de tração são relatadas.

⁶ As camadas plásticas internas são extrudadas diretamente sobre a carcaça, para o caso dos dutos *Rough Bore*, ou sobre suportes que posteriormente são removidos, formando assim tubos plásticos, para o caso de dutos *Smooth Bore*.

Os principais modos de falha experimentados pelas armaduras de tração envolvem as rupturas de seus arames por fadiga ou por solicitações extremas de tração, de torção ou de pressão interna (*burst*), além da flambagem⁷ radial ou lateral dos arames, as quais são objeto de estudo desta tese. A API RP 17B (2014) faz recomendações para se evitar essas falhas, que vão desde o aumento da espessura ou a troca do material utilizado nos arames, a fim de se evitar as falhas por fadiga, ao acréscimo de camadas adicionais de armaduras de tração, para a prevenção das falhas por solicitações extremas. É possível ainda impedir as falhas da armadura de tração mediante a escolha de configurações alternativas para os *risers*.

Sobre a flambagem dos arames das armaduras de tração, pode-se dizer que tal mecanismo de falha está associado à presença de efeitos compressivos reais. Os conceitos de **compressão efetiva** e **compressão real**⁸ se originam do equacionamento dinâmico-estrutural do problema de tubos cilíndricos verticais e uniformes submetidos a pressões interna e externa, compressão e carregamentos laterais (Sousa, 2005).

Segundo Lyons *et al.* (1994), partindo da equação diferencial que governa esse problema, têm-se as parcelas, dadas pela Equação I-1, que estão diretamente relacionadas à curvatura do duto. Essas parcelas são dependentes da pressão interna, da pressão externa e das áreas externas e internas da seção transversal do duto. O agrupamento dessas parcelas é denominado de tração (ou compressão) efetiva, N_{ef} .

$$P_{ef}(Z) = P_z(Z) + p_{ext}(Z) \cdot A_{ext} - p_{int}(Z) \cdot A_{int} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{I-1} \end{array}$$

Ainda de acordo com Lyons *et al.* (1994), esforços (tração ou compressão) efetivos influenciam o comportamento à flexão de dutos submersos e, desse modo, a ocorrência de compressão efetiva está associada, conforme exposto por Fyrileiv e

⁷ É interessante ressaltar que aqui se abdica do rigor teórico que envolve a utilização do termo flambagem, o qual é vinculado à brusca mudança de configuração advinda, normalmente, da instabilidade de estruturas perfeitas. Adiante, na Seção III.4.5. uma descrição mais detalhada desse termo é apresentada (ver Nota de Rodapé 32).

⁸ Lyon *et al.* (1994) e Mciver e Olson (1981) interpretam os efeitos efetivos como de cunho exclusivamente matemático. Outros, entretanto, garantem que à compressão efetiva seja atribuída uma interpretação física, como Young e Fowlers (1978) e Sparks (1984). Apesar de essa discussão ser de grande interesse e importância, este trabalho não dará maior foco a ela.

Collberg (2005), a uma diminuição na rigidez à flexão aparente do duto⁹ e a sua flambagem global. A flambagem global, por sua vez, não implica necessariamente a falha de um duto flexível, mas o desenvolvimento de regiões com pequenos raios de curvatura que podem ser admitidos ou não pelo duto. Por outro lado, os esforços reais (N_z) correspondem aos esforços axiais que atuam na seção do duto que, no caso de um duto flexível, são distribuídos entre suas camadas. Desse modo, a compressão real está ligada à possível perda de estabilidade das camadas do duto flexível e, em particular, dos arames das armaduras de tração.

No que diz respeito às falhas por flambagem dos arames da armadura de tração, essas se dividem em radial, Figura I-4 (a), ou em lateral, Figura I-4 (b), ou seja, classificam-se quanto à direção em que os arames irão se deslocar após perderem a estabilidade.

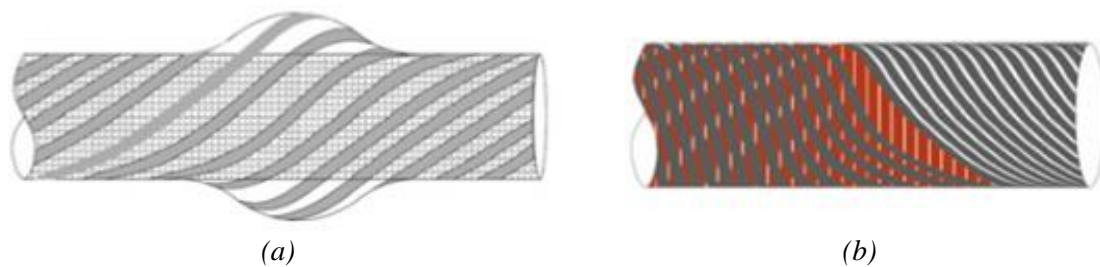


Figura I-4 - Representação esquemática das instabilidades em arames da armadura de tração:(a) radial e (b) lateral (Rizzo e Vaz, 2011).

A **flambagem radial** dos arames das armaduras de tração é comumente referida por *gaiola de passarinho* (Figura I-5). Uma das primeiras ocorrências de flambagem dos arames de tração relatadas na literatura técnica deu-se no final da década de 1980 e refere-se a esse tipo de falha (Bectarte & Courtarel, 2004). Sabe-se que a flambagem radial é normalmente associada a aplicações em águas profundas, onde a ocorrência de compressão axial real é passível de ocorrência. Esse fenômeno pode, além da típica configuração de gaiola de passarinho, aparecer sob a forma de

⁹ Apesar de a compressão efetiva ser uma das grandezas que controlam o comportamento de flexão dos dutos, os cálculos de tensões em suas paredes apenas levam em consideração os esforços reais. Fyrileiv e Collberg (2005) comparam essa situação a de uma viga de concreto protendido, isto é, apesar dos reforços de aço estarem tracionados e o concreto comprimido, ao se integrar as tensões na seção transversal da viga, há de se encontrar uma resultante axial nula.

modos ligeiramente diferentes, conforme mostrado por Vaz & Rizzo (2011), os quais geram deformações na forma de “rugos” na direção normal do arame ao longo de seu comprimento.

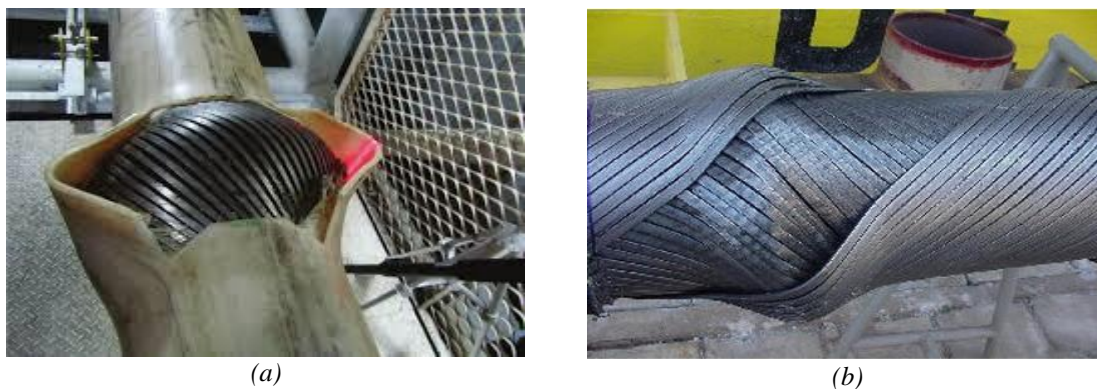


Figura I-5 – Gaiola de passarinho ou Birdcaging. Detalhe de amostra dos testes de (a) Talgatti (2013) e (b) Braga & Kaleff (2004).

Por um lado, o primeiro desses fenômenos, a gaiola de passarinho, não pode ser considerado estritamente uma falha por flambagem dos arames, pois está intimamente relacionado à falha das camadas poliméricas sobrepostas à armadura de tração mais externa, o que gera a perda de suporte radial dos arames permitindo suas expansões radiais. Configura-se, pois, na perda de estabilidade do duto como estrutura solidária, conforme discutido em Rabelo *et al.* (2014), por exemplo. Por outro lado, a flambagem em “rugos” realmente representa, segundo Vaz & Rizzo (2011) e Sævik & Thorsen (2012), a ocorrência de flambagem radial elástica das armaduras de tração dos dutos flexíveis, e pode mesmo ocorrer quando as camadas subjacentes às armaduras estejam intactas.

Para explicar mecanicamente o fenômeno, é imprescindível lembrar que as armaduras de tração, dadas suas formas helicoidais, apresentam um acoplamento entre as respostas axiais, de tração ou compressão e de momento de torção. Esse comportamento é responsável por desencadear tanto a gaiola de passarinho quanto a flambagem elástica desses arames. Quando as cargas de compressão são suficientemente elevadas a ponto de provocar um giro no sentido oposto ao ângulo de assentamento dos arames, os deslocamentos radiais expansivos ocorrem.

Geralmente, a falha por gaiola de passarinho ocorre com o anular alagado, pois a pressão externa, quando atua sobre a camada plástica, restringe o deslocamento radial da própria camada plástica e dos arames das armaduras de tração. A fita de alta resistência pode ser suficiente para prevenir a ocorrência deste tipo de instabilidade mesmo quando o anular se encontra alagado. Por isso, e pelo fato dessas fitas apresentarem tensões de ruptura muito superiores às das camadas plásticas, alguns fabricantes associam a instabilidade radial à ruptura das fitas de alta resistência utilizadas como reforço à compressão.

Já a flambagem elástica dos arames das armaduras de tração é observada quando, ao longo do comprimento do arame, deformações senoidais, no formato de “rugas”, na direção radial, são experimentadas. Esse mecanismo é comparado, por Sævik & Thorsen (2012), à flambagem de colunas retas assentadas em fundações elásticas. Sævik & Thorsen (2012) sugerem aproximar a ação da fita de alta resistência e das camadas plásticas externas por essas fundações elásticas. Nessa situação, as camadas sobrejacentes às armaduras de tração encontram-se intactas e, portanto, o anular seco.

Com intuito de evitar a ocorrência da instabilidade radial, algumas medidas podem ser tomadas. A mais eficiente delas seria evitar uma configuração em que compressões reais excessivamente altas sejam experimentadas pelo *riser*. Porém, quando tais configurações não são possíveis ou, ainda, em conjunto com essa medida, fitas de alta resistência podem ser utilizadas sobre a armadura de tração mais externa (Bectarte & Courtarel, 2004). Poder-se-ia, também, modificar as características dos arames das armaduras de tração, seja pelo aumento de seu ângulo de assentamento ou espessura dos arames seja pelo acréscimo de um par adicional de armaduras de tração (API RP 17B, 2014). Cabe ainda destacar que é possível que carregamentos de torção também despertem as falhas por flambagem radial bem como imperfeições na camada plástica externa (Rabelo, et al., 2014). Associa-se ainda o aumento da espessura da camada plástica externa com a possibilidade de mitigação desse fenômeno (Rabelo, et al., 2014).

Já a **flambagem lateral** dos arames das armaduras de tração foi primeiramente observada pela Petrobras em 1997 durante a instalação de *risers* flexíveis para o poço

três de Marlim Sul, que se encontra a profundidade de 1709m. A flambagem lateral ocorre quando se conjuga alta compressão axial real, ciclos de flexão e, adicionalmente, imposição de restrição ao movimento radial, quer por ação da fita de alta resistência quer por pressão externa suficientemente elevada. Nessa situação, os arames da armadura de tração interna são forçados a mover-se sobre a superfície de apoio ou, como usualmente referido, lateralmente, o que pode resultar na instabilidade ilustrada na Figura I-6.

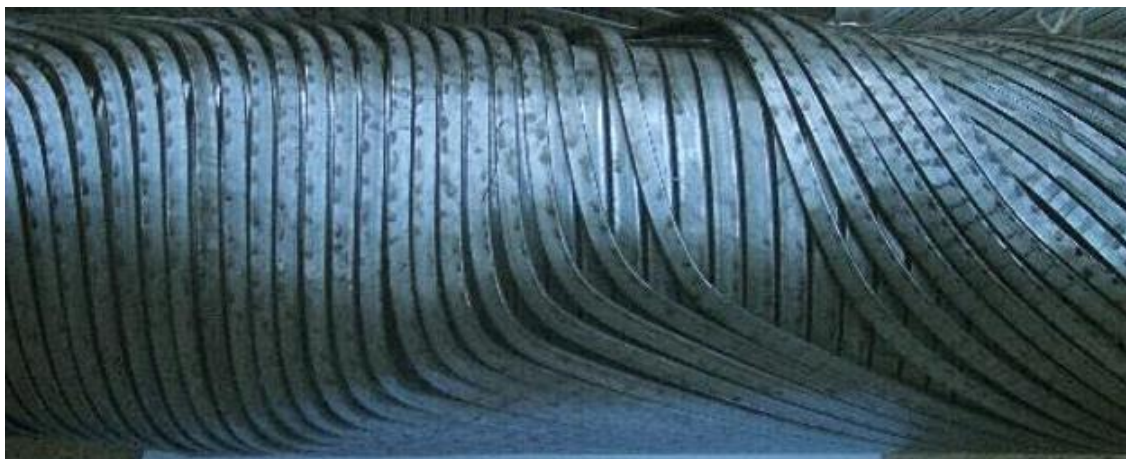


Figura I-6 - Falha por flambagem lateral (Braga & Kaleff, 2004).

Seja pela dificuldade de observação, seja pelas condições mais peculiares que levam à sua ocorrência, esse tipo de falha só pôde ser reproduzido *in loco* a partir dos chamados de DIP¹⁰ *tests* (*Deep Immersion Performance test*). Esses testes foram inicialmente executados com o objetivo de melhor compreender o que tinha ocorrido com os dois dutos que apresentaram modos não-convencionais de flambagem em 1997 e, posteriormente, tornaram-se obrigatórios na qualificação de linhas flexíveis pela Petrobras (Custódio, et al., 2007). Desde então, a *American Petroleum Institute* (API) propõe, para se evitar a ocorrência da flambagem dos arames das armaduras de tração, que a máxima compressão axial real suportada pelos dutos¹¹ seja menor ou igual àquela

¹⁰ Os testes do tipo DIP são conduzidos *offshore* utilizando longas amostras de *risers* flexíveis, as quais são lançadas de navios e submetidas às movimentações de topo da embarcação, à pressão externa e à curvaturas cíclicas na região do TDP (*Touch Down Point*), isto é, ponto em que a linha flexível toca o leito marinho. Além do monitoramento durante o teste, os dutos são posteriormente submetidos à dissecação para a observação mais profunda do ocorrido.

¹¹ A esse valor máximo, que pode levar em conta outros critérios, como, por exemplo, o valor da carga crítica de flambagem elástica, este trabalho denomina capacidade de carga dos dutos flexíveis.

que imprima espaçamentos radiais entre as armaduras de tração e o substrato do duto não maior que a metade da espessura dos arames dessas armaduras (API SP 17J, 2014).

É comum, também, a tentativa de reproduzir o mecanismo de flambagem lateral no ambiente controlado dos laboratórios, mediante ensaios mecânicos que conjugam cargas cíclicas de flexão e compressão impostas por atuadores hidráulicos. Braga & Kaleff (2004) e Østergaard (2012) apresentam experimentos com esse tipo de abordagem. Os ensaios podem ser conduzidos também em câmaras hiperbáricas, como nos ensaios realizados por Bectarte & Courtarel (2004) e Secher *et al.* (2011), nas quais a pressão externa é diretamente imposta aos dutos estudados. Nessa condição, ainda, atuadores hidráulicos impõem as cargas de flexão.

Quando a instabilidade é atingida, o movimento lateral dos arames não é mais simétrico e, ao final de cada ciclo de flexão, suas posições não são totalmente recuperadas, quando comparada à do ciclo anterior. Esse efeito aumenta em cada ciclo de flexão e pode conduzir à falha global do duto flexível (Secher, et al., 2011).

É ressaltado por Vaz & Rizzo (2011) que a flambagem lateral pode acontecer tanto na situação de anular seco, na qual as forças de fricção a serem vencidas são altas, e, conseqüentemente, a flambagem tende a ser elasto-plástica; quanto na situação de anular alagado, na qual o alívio das pressões de contato entre camadas, dado a presença de líquido em seus interstícios, reduz drasticamente as forças de fricção e, pois, possibilita que o fenômeno de instabilidade se dê sob o regime elástico. Outro ponto importante diz respeito à detecção. A deflexão dos arames em instabilidade lateral não acarreta grandes mudanças geométricas nos dutos, nem em seu comprimento nem em seu diâmetro

Finalmente, com o intuito de prevenir a flambagem lateral dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis, seus fabricantes vêm modificando algumas características dessas estruturas tais como a razão de aspecto da seção, as dimensões e ângulos de assentamentos dos arames das armaduras de tração, as propriedades físicas e/ou geométricas das fitas de alta resistência, dentre outras (Sousa, 2005).

I.2. Motivação e objetivos

Diversos estudos concernentes à modelagem numérica, analítica e experimental já foram publicados sobre o fenômeno de flambagem dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis, como será discutido no CAPÍTULO II desta tese. Não obstante, ainda há bastante espaço para discussão, investigação e entendimento dos fenômenos que levam à instabilidade dos arames de armaduras de tração, especialmente no que tange o entendimento do fenômeno de flambagem lateral, tema basal da investigação tomada por esta tese.

Algumas das dúvidas teóricas que pairam sobre a comunidade científica acerca da flambagem lateral dos arames das armaduras de tração concernem aos modos de instabilidade (Figura I-7), à diferença entre estabilidade elástica e desorganização dos arames devido aos ciclos de flexão, à influência do atrito e da configuração inicial do arame na carga de instabilidade, à discrepância entre os valores teóricos e os experimentais, etc.



Figura I-7 – Diferentes modos de flambagem lateral obtidos nos ensaios de Østergaard (2012).

Com o intuito de contribuir para o debate científico, o presente trabalho carrega consigo o desafio de compreensão e de representação do mecanismo de flambagem lateral elástica dos arames das armaduras de tração, tanto pela utilização de modelos pré-existentes quanto pela compreensão dos resultados disponíveis na literatura técnica e pela proposta de uma nova abordagem. A abordagem proposta nesta tese consiste em utilizar os conceitos da Teoria da Estabilidade Elástica (TEE), proposta por Koiter (1945), adaptada a sistemas discretos¹² – no caso, o Método dos Elementos Finitos (MEF) – para estudar o mecanismo de flambagem lateral elástica dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis.

Fez-se necessária, então, a proposição de um elemento finito de viga naturalmente curvo e torcido, calcado nas equações de equilíbrio descritas por Love (1906), acrescida de restrições cinemáticas que adequem a mecânica desses elementos finitos à dos arames das armaduras de tração, conforme propõe Sævik (1992). Além dessas restrições, assume-se esse elemento assentado sobre fundações elásticas, as quais têm por função representar as interações entre os arames e as demais camadas.

Mediante a TEE, três formulações para a análise da instabilidade são derivadas (as análises de flambagem clássica, consistente e atualizada, ver Seção III.4.5.), bem como as equações de equilíbrio não-linear (Seção III.4.4.). Essas são resolvidas para melhor compreensão da flambagem lateral dos arames das armaduras de tração, no que concerne, entre outras considerações, aos modos de flambagem e às influências do atrito entre camadas e da curvatura inicial do duto na determinação da carga crítica.

É proposta do trabalho, além da formulação de elementos finitos, uma expressão analítica para a determinação da carga crítica de flambagem lateral. A expressão derivada parte da expressão apresentada por Sævik & Ji (2014) e a expande para o caso de um arame da armadura de tração estar sob a ação de forças de fricção. Essa expressão é obtida empiricamente, baseada na resposta numérica de 39 amostras de dutos flexíveis, considerando diferentes coeficientes de atrito entre as camadas. Diz-se que a expressão é obtida empiricamente, porque emprega algoritmos genéticos,

¹² Por sistema, entende-se uma parte do universo físico ou uma quantidade específica de matéria identificada para seu estudo. Se forem necessários infinitos parâmetros para descrever uma dada posição instantânea do sistema, este receberá o nome de contínuo. Caso contrário, ou seja, caso um número finito de parâmetros sejam suficientes para descrever a dada posição, o sistema é dito discreto.

através do *software* EUREQA®, para aproximar as respostas fornecidas pelo MEF. Esse *software* utiliza a técnica de Regressão Simbólica (RS) para adequar uma expressão numérica, baseada em blocos matemáticos pré-definidos e dependente dos dados de entrada (*input*), aos dados de saída (*output* ou parâmetro alvo).

Não como escopo principal, também foram reproduzidos os modelos de Østergaard (2012)¹³ e o de Sousa (2005). Esses modelos servem como ferramentas de melhor compreensão e verificação dos resultados obtidos pelas abordagens tomadas neste trabalho. Por suscites, esses modelos não são apresentados no corpo desta tese, mas no APÊNDICE C.

Por fim, os resultados de ambos os modelos (numérico e analítico) são, sempre que possível, comparados a resultados publicados na literatura técnica, sejam estes gerados por testes experimentais sejam por modelos teóricos.

I.3. Organização do texto

Esse trabalho foi organizado em seis capítulos, dos quais os três primeiros apresentam informações teóricas indispensáveis para o melhor entendimento do modelo numérico. O capítulo seguinte é responsável pela apresentação das análises realizadas, seguido de um capítulo dedicado à apresentação da formulação analítica proposta e suas concepções teóricas. Por fim, alguns comentários e sugestões de trabalhos futuros são apresentados. Há ainda uma série de Apêndices e Anexos, que visam esclarecer outros pontos deste trabalho.

No CAPÍTULO II, uma breve revisão bibliográfica é apresentada como tentativa de reunir, sem se pretender à exaustão, trabalhos científicos que abordam, teórica ou experimentalmente, o mecanismo de flambagem dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis. Apesar da flambagem radial também ser destacada, vale

¹³ É importante ressaltar que a tese de Østergaard (2012) abarca toda a série de artigos produzida pelo autor nos anos de 2011 e 2012 sobre a mecânica dos arames de armaduras de tração e sobre a flambagem lateral desses mesmos. Todos esses artigos estão devidamente citados na referência bibliográfica, mas, por simplicidade, no corpo desta tese apenas far-se-á referência à tese.

ressaltar que maior ênfase será dada àqueles trabalhos que tiveram como foco o estudo da flambagem lateral.

O CAPÍTULO III é responsável pela apresentação das metodologias propostas nesta tese para analisar a flambagem lateral das armaduras de tração de dutos flexíveis. Nesse capítulo, são apresentadas as relações geométricas da curva sobre uma superfície, a mecânica de vigas naturalmente curvas, as restrições cinemáticas de adequação à mecânica dos arames das armaduras de tração, os detalhes da modelagem em elementos finitos e a descrição do modelo empírico-analítico.

No CAPÍTULO IV, em sua fase inicial, são apresentados exemplos que comprovam a aplicabilidade do elemento ao caso de dutos flexíveis. Posteriormente, quatro dutos (diâmetros nominais de 6”, 8”, 9,5” e 14”) foram escolhidos para a realização de estudos de caso voltados para a análise da flambagem lateral de suas armaduras de tração. A escolha desses dutos se deu devido à disponibilidade de resultados numéricos e experimentais na literatura técnica. Foram analisadas as diferenças entre as formulações propostas, a influência dos modos de flambagem, das curvaturas iniciais, das rigidezes das fundações elásticas, do comprimento do modelo e das condições de contorno.

Já o CAPÍTULO V tem por objetivo a apresentação da expressão analítica capaz de estimar, de maneira mais simples e direta do que as análises de elementos finitos, as cargas críticas de flambagem lateral. Essa expressão apresenta a novidade de considerar os efeitos de atrito. São utilizados algoritmos genéticos, mais precisamente a técnica de RS, que, a partir de uma série de resultados (429 casos) das análises de elementos finitos, encontram padrões escondidos entre os dados de entrada – características físicas e geométricas dos dutos flexíveis – e os dados de saída – o valor da carga crítica, calculada pelo método descrito no CAPÍTULO III. O *software* EUREQA® foi utilizado e a expressão obtida foi estudada mediante análises de sensibilidade e adequação de sua representatividade aos dados de treino, bem como por uma análise paramétrica que permite verificar a influência dos principais parâmetros (ângulo de assentamento, raio médio da armadura, altura e largura da base da seção transversal do arame e coeficiente de atrito) na magnitude das cargas críticas, tanto do arame individualmente quanto do duto.

No CAPÍTULO VI, as principais conclusões são tecidas e, sugestões para trabalhos futuros, traçadas.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

II.1. Apresentação

Neste capítulo, os principais trabalhos referentes ao fenômeno de instabilidade de armaduras de tração de dutos flexíveis serão sucintamente relatados. Para tal, primeiro serão apresentados os trabalhos que abordaram o problema experimentalmente e, em seguida, aqueles que propõem modelos teóricos para predição do referido fenômeno.

II.2. Revisão bibliográfica

Braga (2003) desenvolveu, em sua tese de doutoramento, quinze testes experimentais destrutivos em dois tipos de *risers* (nomeados tipos A e B) e um de *flowline* (tipo A) de 4". Dentre os ensaios propostos estavam os de amortecimento (2 ensaios), os de compressão monotônica (3 ensaios) e cíclica (2 ensaios) e os de flexo-compressão (8 ensaios). As cargas compressivas monotônicas e cíclicas foram impostas por meio de uma taxa de deslocamento prescrita em um atuador hidráulico. Os ensaios flexo-compressivos cíclicos também utilizaram atuadores hidráulicos. Os resultados, reunidos na Tabela II-1, foram apresentados na forma de uma descrição minuciosa do

ocorrido durante os ensaios, os quais indicaram significativa perda de resistência na estrutura quando essa era submetida a ciclos de flexão.

Tabela II-1 – Resumo dos resultados experimentais obtidos por Braga (2003).

	Amostras															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Ensaio:	AA	FC	FC	FC	FC	FC	FC	FC	FC	FC	CM	CM	CM	NA	CC	CC
Tipo de duto:	A	B	C	C	B	B	C	C	B	A	B	C	A	B	C	
Capa externa:	NA	EA	ER	ER	EL	EL	IN	EL	E	E	EA	EL	NA	E	EL	
Armadura interna:	NA	MI	FL	FL	FR	FS	FL	FL	FS	FL	GP	FR	NA	GP	FL	
Armadura externa:	NA	MI	OE	EL	IN	FE	IN	IN	IN	OE	GP	FS	NA	GP	OE	
Fita reforço:	NA	DS	IN	IN	DS	DS	IN	IN	DS	NA	RO	IN	NA	RO	RO	
Carga crítica (kN):	NA	175*	241*	241*	175*	175*	241*	241*	175*	352	430	282	NA	NA	NA	

Legenda:

AA – AMORTECIMENTO;

CC – COMPRESSÃO CICLÍCA

CM – COMPRESSÃO MONOTÔNICA;

DB – DESGASTE BRANDO.

DS – DESGASTE SEVERO;

E – ESTUFADA;

EA – ACENTUADAMENTE ESTUFADA;

EL – LIGEIRAMENTE ESTUFADA;

ER – ENRUGAMENTO;

FC – FLEXO-COMPRESSÃO;

FE – DESORGANIZADAS E ESTUFADAS;

FL – FLAMBAGEM LATERAL;

FR – ARMES FROUXOS, DESORGANIZADOS;

FS – FISH-SCALING;

GP – GAIOLA DE PASSARINHO;

IN – INTACTA;

MI – MODO MISTO GAIOLA E LATERAL;

NA – NÃO APLICÁVEL;

OE – ORGANIZADAS E ESTÁVEIS;

OF – ORGANIZADA E FROUXA;

*As cargas críticas nos ensaios flexíveis são mantidas constantes ao passo que apenas a curvatura do duto é variada.

A perda de resistência foi atribuída, mesmo que sem uma corroboração do fato, à deterioração da fita de alta resistência aplicada acima das armaduras de tração, em alguns casos, e, em outros, à deformação plástica dos arames da armadura interna, o que caracterizou a flambagem lateral desses. Foi ainda detectada, nos arames das armaduras internas, a “frouxidão” dos arames como modo característico de flambagem lateral, o que foi chamado de desorganização dos arames. A Figura II-1 ilustra as camadas que sofreram instabilidade nos ensaios relatados e seus modos para cada uma das amostras mencionadas. Parâmetros relevantes dos ensaios não foram divulgados, como, por exemplo, o número de passos utilizados ou o raio médio de assentamento das armaduras, o que dificulta a reprodução dos testes e comparação de seus resultados.

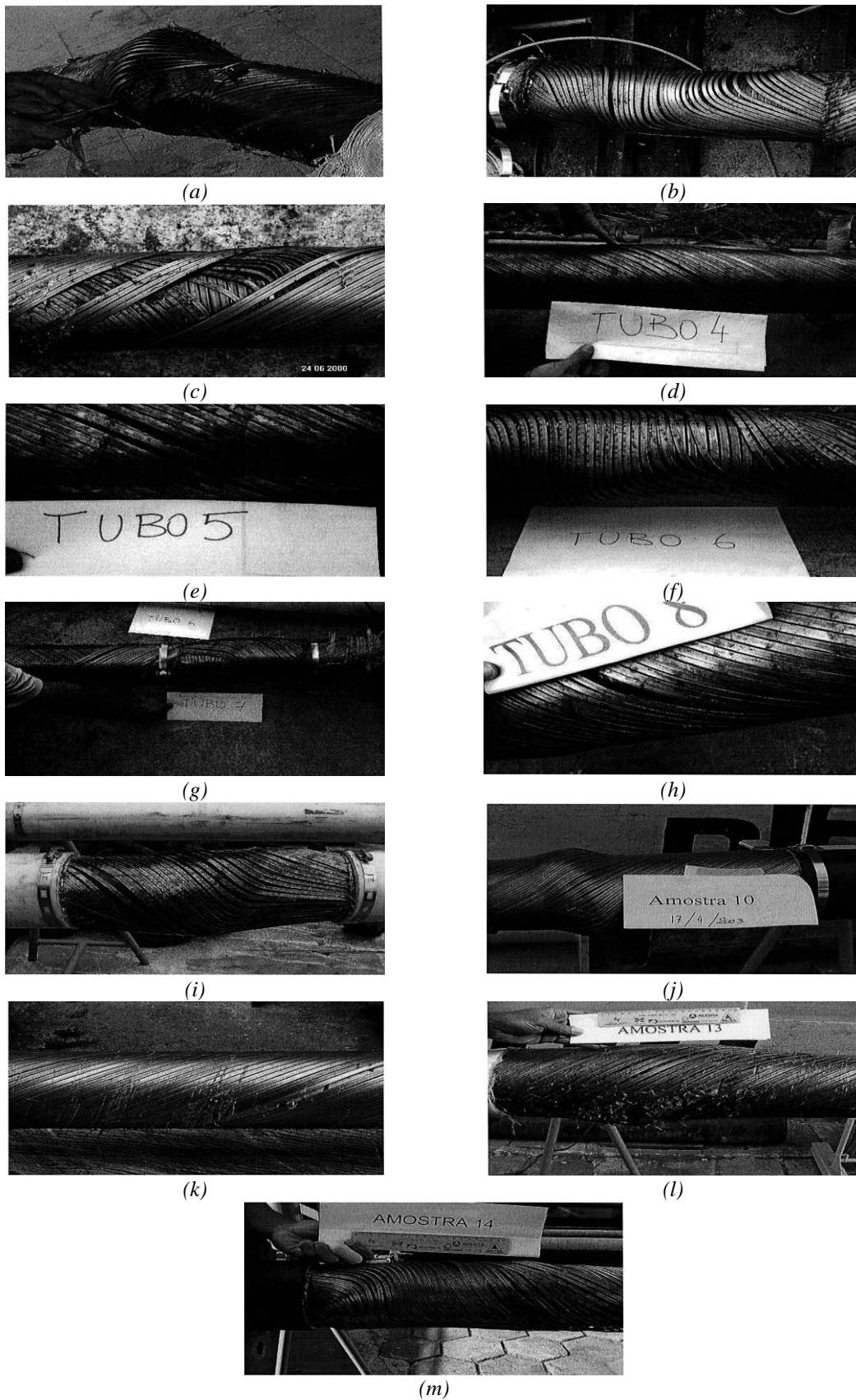


Figura II-1 – Modos de flambagem obtidos nos experimentos realizados por Braga (2003) para as amostras: (a) 01; (b) 02; (c) 03; (d) 04; (e) 05; (f) 06; (g) 07; (h) 08; (i) 09; (j) 10; (k) 11; (l) 13; e (m) 14.

Bectarte & Courtarel (2004) concretizaram uma série de experimentos com o objetivo de reproduzir o fenômeno da instabilidade lateral. Os experimentos foram divididos em testes mecânicos, fora e dentro de câmeras hiperbáricas, e em testes de campo, do tipo DIP. Em especial, observou-se a influência do estado do anular, seco ou alagado, sobre o modo de falha da estrutura. Infelizmente, não foram divulgadas as características das amostras e as cargas utilizadas, dentre outros dados importantes para a reprodutibilidade do estudo. Ressaltam, ainda, a semelhança com o problema de flambagem de uma coluna reta; a dependência do mecanismo de flambagem em relação à rigidez à flexão da seção transversal do arame; a influência “estabilizadora” dos efeitos de fricção, na qual maiores forças de atrito, como no caso de anular seco, acarretam maiores capacidades de carga; e a influência desestabilizadora dos efeitos das curvaturas cíclicas.

Braga & Kaleff (2004) foram os primeiros a afirmar que a flambagem lateral poderia ser detectada em laboratório com cargas menores do que as associadas à pressão hidrostática em campo. Além das dificuldades relacionadas à obtenção de informações nos testes DIP, o método de determinação da carga compressiva que levaria à flambagem lateral é também assinalado como razão da baixa correlação dos resultados apresentados. Nesse trabalho, 4 risers e 4 jumpers foram testados à flambagem lateral. Ressalta-se a menção da conexão entre tal mecanismo com a “degradação progressiva da resistência [do duto] devido à flexão cíclica” (Braga & Kaleff, 2004), a qual é, por sua vez, atribuída ao aumento das curvaturas laterais e, conseqüentemente, responsável pelo desencadeamento da desorganização dos arames. É enfatizado que os *risers*, devido à presença das fitas anti-desgaste, são menos susceptíveis a essa degradação oriunda dos ciclos de flexão. Tal fato indica a importância dos efeitos não-conservativos¹⁴ do atrito na desorganização das armaduras de tração.

Tan *et al.* (2006) descreveram superficialmente testes DIP e laboratoriais realizados pela *Wellstream* para a qualificação de dutos flexíveis. Os resultados dos testes foram comparados aos de um modelo analítico desenvolvido pelos autores, que se

¹⁴ Os efeitos não-conservativos são oriundos de forças não derivadas de alguma das energias potenciais do sistema. Essas forças, comumente, não dependem unicamente da sua posição de aplicação e possuem caráter dissipativo, isto é, contribuem para o decréscimo de energia do sistema. Exemplos de forças não conservativas são: as de atrito, as plásticas e as viscosas, as quais não podem ser derivadas de um potencial.

baseava na energia de deformação para prever o comportamento dos arames da armadura de tração durante e após a instabilidade lateral. Concluiu-se que o modelo era capaz de estimar as características básicas dos arames na instabilidade lateral e radial. No entanto, tanto o modelo quanto os testes não foram apresentados de forma detalhada, carecendo de informações.

Secher *et al.* (2011) apresentaram uma série de testes realizados pela TECHNIP a fim de qualificar dutos flexíveis em águas ultra-profundas, dando continuidade a pesquisas anteriores desenvolvidas pela empresa. A instabilidade lateral foi constatada tanto no teste DIP quanto nos testes em câmara hiperbárica. A viabilidade do uso dos dutos flexíveis em profundidades de até 3000m foi comprovada no estudo, indicando a efetividade das soluções técnicas implementadas com foco neste novo cenário de operação. Os testes mecânicos nas câmaras hiperbáricas adotaram comprimentos mínimos iguais a duas vezes o comprimento do passo da armadura interna. A pressão externa foi aplicada incrementalmente e, para cada aumento no incremento da pressão, foram aplicados 800 ciclos de flexão. Resultados consistentes foram encontrados entre os testes DIP e os testes mecânicos, realizado no interior da câmara hiperbárica, especialmente para um duto de 11". Por fim, é destacado pelos autores que os testes mecânicos apresentam cargas críticas equivalentes ou mais conservadoras que as obtidas em testes de campo.

De Sousa *et al.* (2012) apresentaram estudo numérico e dois testes de bancadas para um duto flexível de 4" sujeito à compressão axial. O primeiro dos experimentos buscou caracterizar mecanicamente o material da fita de alta resistência, ao passo que o segundo avaliou o comportamento do duto quando sujeito à cargas monotônicas de compressão axial. Os resultados numéricos e experimentais foram comparados e apresentaram-se bastante correlatos. Em ambos, os dutos falharam, sem a ocorrência de deformações plásticas, por gaiola de passarinho. Os arames das armaduras de tração apresentaram deformações elásticas advindas do acréscimo das solicitações por momentos em suas direções binormais, ou seja, momentos que advém de variações na curvatura normal. A representação do mecanismo pelo modelo numérico foi corroborada pelo resultado do experimento, o que garantiu a aplicabilidade da ferramenta computacional à predição do mecanismo estudado. Mormente, dos resultados numéricos, permitiu-se concluir que o critério apresentado pela API (2014)

levou a cargas críticas entre 29% e 43% menores que as estimadas, numérica ou experimentalmente.

Østergaard (2012) testou, experimentalmente, mediante a aplicação de cargas compressivas e ciclos de flexão, oito exemplares de dutos flexíveis, quatro dutos de 6”, dois de 8” e dois de 14”. O experimento, cujos resultados encontram-se reproduzidos na Tabela II-2, envolveu a reconstrução da situação de anular alagado, o controle da curvatura e da compressão máxima aplicada. Não foi feito uso de câmara hiperbárica nos experimentos. Assim, as condições necessárias para a reprodução da flambagem lateral nas armaduras de tração de dutos flexíveis foram impostas.

Tabela II-2 – Resultados experimentais obtidos por Østergaard (2012).

<i>Duto</i>	<i>Amostra</i>	<i>Caso</i>	<i>Ciclos de flexão</i>	<i>Compressão (kN)</i>	<i>Raio de curvatura</i>	<i>Estado final</i>	<i>Ângulo de torção (°)</i>
<i>Riser de 6”</i>	1	I	204	265	11	Falha	45
	2	I	800	80	11	Integro	< 1
		II	392	210	11	Falha	45
	3	I	1200	160	11	Integro	3
		II	151	265	8	Falha	45
<i>Jumper de 14”</i>	1	I	6000	277	18 a 24	Integro	< 1
		II	1200	269	7 a 9	Integro	6,5
		III	1200	411	9 a 11	Falha	27
	2	I	18	950	12	Falha	10
		II	1200	950	12	Falha	17
<i>Riser de 8”</i>	1	I	1200	700	12	Falha	27
	2	II	1200	300	12	Integro	< 1
		III	2400	400	12	Integro	15

Foram atribuídas como consequências da falha por flambagem: a torção na extremidade solicitada, o encolhimento do duto e pequenas mudanças na circunferência do duto. Algumas observações obtidas ao realizar os experimentos foram interessantes, como: a baixa correlação entre os resultados dos testes DIP e os testes mecânicos, que

ocorre em alguns casos e para a qual ainda não há uma explicação consolidada; e a atribuição da instabilidade lateral a um processo elástico, pois, a dissecação dos dutos testados, para a maioria dos casos, não levou a verificação de deformações plásticas, ou seja, os arames, após o teste, haviam retornado a uma configuração próxima à original.

A respeito dos modelos de previsão, Custódio (2005), em sua tese de doutorado, propôs o desenvolvimento de um modelo analítico através da Técnica da Perturbação (TP) de Poincaré para a estimativa da carga de instabilidade dos arames da armadura de tração de dutos flexíveis sob a ação de compressão axial. Sua formulação analítica foi posta à prova frente aos resultados experimentais referentes aos experimentos de compressão simples apresentados por Braga (2003). Apesar das estimativas analíticas não terem apresentado grande grau de correlação com os valores experimentais, em especial quando as fitas de alta resistência receberam solicitação excessiva, o modelo analítico apresenta um potencial de utilização bastante vasto, segundo o autor. Além disso, pode-se justificar a diferença entre os resultados comparados à modelagem estimada do material da fita, cujas características físicas e mecânicas não foram bem especificadas por Braga (2003).

Sousa (2005) desenvolveu um trabalho numérico exaustivo, baseado no MEF, com o intuito de caracterizar o comportamento mecânico de dutos flexíveis de camadas não aderentes. Parte desse trabalho se dedica à representação da instabilidade de arames da armadura de tração dos dutos flexíveis. O modelo proposto considera que cada arame se comporta de modo independente, ou seja, não há interação entre eles permitindo modelá-los individualmente. Desse modo, a contribuição de toda a armadura é a soma da contribuição de cada arame. O modelo, segundo o autor, foi capaz de reproduzir tanto o mecanismo de falha por flambagem lateral quanto por flambagem radial. Não foram considerados os efeitos do atrito entre camadas, o que melhor representa o estado de anular alagado. Foi realizado, também, um estudo paramétrico, considerando a variação das condições de contorno, do ângulo de assentamento, das dimensões da seção dos arames, dos tipos de fitas de reforços diferentes e dos diâmetros nominais. Esse modelo foi reproduzido para fins comparativos e será mais detalhado no APÊNDICE C.

Vaz & Rizzo (2011) desenvolveram um modelo em elementos finitos, apenas com elementos de viga tridimensional e de mola, capaz de representar os diferentes modos de falha por instabilidade da armadura de tração. As maiores diferenças deste modelo para o modelo apresentado por Sousa (2005) é a consideração do par de armaduras na análise e dos efeitos provocados pela fricção, ou seja, não é necessário que o anular esteja alagado para realizar tais predições. Foi realizado um estudo paramétrico com relação à pressão externa que age sobre o duto e o coeficiente de atrito empregado.

Tanto a instabilidade radial quanto a lateral foram analisadas nesse trabalho e dois modos foram atribuídos a cada um desses mecanismos. No primeiro modo de instabilidade lateral, os arames encontram-se livres para girar de forma independente, devido à pressão de contato insuficiente para restringir o movimento entre eles. No segundo modo, os arames dependem uns dos outros para atingir suas configurações finais, instabilizando conjuntamente. Já para a instabilidade radial, o primeiro modo é caracterizado pela típica falha por gaiola de passarinho e os valores obtidos para carga crítica são equivalentes ao valor de ruptura da fita de reforço à compressão. No segundo modo, os arames devem flambar antes do rompimento da fita com aparência de pequenas “rugos”, a qual é associada à flambagem de vigas em fundação elástica. Os resultados obtidos mostram-se altamente dependentes dos parâmetros da fita de alta resistência, do coeficiente de atrito entre os arames e da pressão externa.

Østergaard (2012) desenvolveu um modelo para a previsão da configuração deformada dos arames sob tração e flexão com base em conceitos físicos, utilizando as equações de equilíbrio de forças e momentos, e em conceitos da geometria diferencial. O arame foi modelado individualmente como uma curva disposta sobre a superfície de um toro, cujo raio de curvatura define a região do duto flexível a ser analisada. Verificou-se que os arames buscam um estado de equilíbrio de curvatura geodésica nula. Trabalhos seguintes foram realizados considerando variações em relação ao modelo original, como, por exemplo, a presença de cargas distribuídas transversalmente representando os efeitos de fricção sobre os arames da armadura de tração e a consideração de pequenas imperfeições iniciais na configuração geométrica inicial desses arames. Esse modelo foi reproduzido para fins comparativos e também será mais detalhado no APÊNDICE C.

Sævik & Thorsen (2012) estudaram tanto a falha por instabilidade radial como por instabilidade lateral dos arames de armaduras de tração por meio da proposta de expressões analíticas para cada um dos problemas. Os autores consideraram que, no caso da flambagem lateral das armaduras de tração, o papel desempenhado pela fricção é significativo para o comportamento do arame e não deve ser desprezado. Quanto à instabilidade radial, dois modos foram levados em consideração: o primeiro está associado à falha da fita de alta resistência e o segundo, à flambagem radial elástica dos arames quando essa mesma fita se encontra intacta. Expressões analíticas foram propostas para a determinação da instabilidade lateral (Equação II-1), para o rompimento da fita de alta resistência (Equação II-2) e para a flambagem radial elástica dos arames das armaduras de tração (Equação II-3).

A instabilidade lateral do arame é, segundo os autores, altamente dependente de parâmetros referentes ao estado de fricção e a expressão analítica que determina a tensão crítica¹⁵ de ocorrência desse fenômeno foi proposta a partir da equação de equilíbrio de forças na direção lateral, assumindo que apenas o atrito e a força axial de compressão induzida pela pressão hidrostática atuam sobre os arames. No entanto, os resultados do modelo analítico mostraram-se discrepantes em relação aos resultados obtidos pela formulação de elementos finitos, modificada de Sævik (2011). Os resultados confirmaram mais uma vez a dificuldade de previsão desse modo de falha. Na Equação II-1, σ_{cr}^E representa a tensão crítica de flambagem elástica; A , a área da seção transversal; C_σ , o módulo de elasticidade; I_B , o segundo momento de área na direção binormal do arame; L , o comprimento total do arame; l , o comprimento onde o deslizamento é possível; e θ , a coordenada angular do arame, conforme descrito¹⁶.

$$\sigma_{cr}^E = \frac{\pi^2 \cdot C_\sigma \cdot I_B}{A \cdot \left[0,5 \cdot l \cdot \left(1 + \frac{l}{L}\right)\right]^2} \quad \text{Equação II-1}$$

¹⁵ Das tensões críticas, pode-se obter a carga crítica multiplicando-as pela área da seção transversal do arame, pelo número de arames e pelo cosseno do ângulo de assentamento desses arames.

¹⁶ A orientação da coordenada angular é descrita no CAPÍTULO III, mais precisamente pela Figura III-1 (a).

onde:

$$l = L \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \text{sen}^{-1}[\text{sen}(\theta)] \right\}$$

Os resultados obtidos para a instabilidade radial, por outro lado, correlacionaram-se bem com aqueles obtidos pela formulação numérica de elementos finitos, também apresentada no artigo. Ao considerar o primeiro modo de instabilidade radial, os autores assumem que as fitas de alta resistência são as únicas responsáveis pelo impedimento do deslocamento radial dos arames das armaduras de tração, logo a tensão última da fita, solicitada pelo contato da armadura de tração, é quem rege o comportamento de tal mecanismo. A Equação I-2 expressa a tensão de ruptura da fita de alta resistência, σ_u^{ft} , em relação à tensão axial do arame, σ_{ar} . Ainda nessa equação, n_{ar} representa o número de arames; ϕ_0 , o ângulo de assentamento; r_{ft} , o raio médio da fita de alta resistência; e t_{ft} , a espessura dessa mesma fita.

$$\sigma_u^{ft} = \frac{n_{ar} \cdot A \cdot \sigma_{ar}}{t_{ft}} \cdot \frac{\cos(\phi_0) \cdot \tan^2(\phi_0)}{2 \cdot \pi \cdot r_{ft}} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{II-2} \end{array}$$

A Equação II-3 apresenta a tensão axial no arame ao assumir que o modo de flambagem elástica desse arame, u , é dado por uma superposição de senos $u = u_0 \text{sen}\left(\frac{m\pi s}{L}\right)$. Na Equação II-3, I_N representa o segundo momento de área na direção normal e $\frac{m}{L}$, o número de ondas por comprimento do duto. A tensão crítica de flambagem (σ_{cr}) é dada pelo mínimo valor da Equação II-3 em relação ao número de comprimentos de ondas por comprimento do duto.

$$\sigma_{cr} = \frac{\left[\pi^2 C_\sigma \cdot I_N \cdot \left(\frac{m}{L}\right)^2 + \frac{2C_\sigma \cdot t_{ft}}{\pi r} \cdot \cos(\phi_0) \cdot \left(\frac{L}{m}\right)^2 \right]}{A} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{II-3} \end{array}$$

Mais recentemente, Sævik & Li (2013) exploraram o mecanismo de instabilidade de dutos flexíveis em diferentes lâminas d'água em situação de anular seco ou alagado, a partir de um modelo de elementos finitos que considerava o regime plástico dos arames da armadura de tração e o atrito entre a armadura de tração externa

e a fita polimérica sobreposta. A capacidade preditiva do modelo proposto foi validada em relação aos resultados fornecidos pelo trabalho numérico, em elementos finitos, e experimentais de Sousa *et al.* (2012) para o duto de 4” previamente mencionado.

Talgatti (2013) desenvolveu um estudo numérico-experimental a fim de melhor caracterizar o mecanismo de instabilidade radial. Foram realizados testes experimentais nos quais um *riser* de 6” foi submetido, com e sem defeitos na fita de alta resistência, à compressão monotônica. O defeito na fita (corte em um pequeno trecho) foi imposto em laboratório de modo a garantir maior controle e a reprodutibilidade do experimento numericamente. O estudo tentou produzir, como resposta, as dimensões do defeito na fita de alta resistência do duto que, submetido a cargas compressivas, levariam à geração da gaiola de passarinho e, por consequência, à perda de rigidez do duto. O modelo numérico baseado em elementos finitos apresentou resultados bastante similares aos obtidos nos experimentos. Como conclusão, a partir do modelo numérico, será possível dimensionar a relação do tamanho do defeito inicial na fita de alta resistência e o surgimento da gaiola de passarinho, o que confere um alto poder preditivo ao modelo.

Sævik & Ji (2014) propuseram uma expressão analítica mediante o desenvolvimento das equações diferenciais representativas ao fenômeno de instabilidade lateral de arames da armadura de tração de dutos flexíveis. Os resultados foram comparados com ensaios experimentais apresentados por Østergaard (2012) para dutos de 6”, 8” e 14”, bem como com os resultados de sua formulação diferencial e com modelos de elemento finitos primeiramente apresentados por Nygård (2012). Os resultados, tanto os analíticos de Sævik & Ji (2014) quanto os numéricos de Østergaard (2012), para a carga de flambagem, mostraram-se bastante conservadores quando comparados aos resultados experimentais. Essa discrepância é atribuída à não consideração do atrito entre as camadas, o que foi tomado como premissa para o desenvolvimento das duas formulações mencionadas. A formulação analítica proposta pelos autores é apresentada na Equação II-4, onde P_{cr} é a carga de compressão axial necessária para a flambagem dos arames do duto; C_τ , o módulo de elasticidade transversal; e J , a constante de torção.

$$P_{cr} = \frac{n_{ar} \cdot \text{sen}^2(2 \cdot \phi_0) \cdot \cos(\phi_0)}{4 \cdot r^2} \cdot \left[C_\sigma \cdot I_N + 4 \cdot C_\sigma \cdot I_B - C_\tau \cdot J \cdot \frac{\cos(2 \cdot \phi_0)}{\cos^2(\phi_0)} \right]$$

Equação II-4

Caleyron *et al.* (2014) apresentaram um modelo em elementos finitos para a reprodução do comportamento mecânico de dutos flexíveis de camadas não aderentes desenvolvido no IFPEN, o *Institut Français du Pétrole et Energies Nouvelles*. Esse modelo foi denominado de 3D-Periódico, pois, além de poder ser utilizado para diversos propósitos, tira vantagem da periodicidade, tanto dos carregamentos quanto da geometria, encontrada nessas estruturas, o que reduz drasticamente o tempo computacional dispendido. Um dos casos de estudo apresentado teve como objetivo a representação do fenômeno de flambagem lateral, o qual, segundo os autores, é regido pelo comportamento do contato lateral entre arames adjacentes. Ao contato entre arames adjacentes, é atribuída a estabilização dos deslocamentos transversais iniciais que levam à instabilidade. Essa conclusão vai de encontro às premissas adotadas pelos demais modelos para a predição do fenômeno de instabilidade lateral, que desprezam esse efeito. Mormente, o modelo considera a plasticidade dos arames de armaduras de tração e permite, com isso, não apenas a determinação da carga crítica de flambagem, mas do processo de evolução até a falha do duto.

De Paiva & Vaz (2017) propuseram uma equação empírica para determinação da carga crítica à flambagem lateral de um arame da armadura de tração dada por:

$$P_{cr} = \frac{n_{ar} \cdot \cos(\phi_0)}{r^2} \cdot [C_\sigma \cdot I_n \cdot (0.152 + 0.219\phi_0) + C_\sigma \cdot I_b \cdot (-1.68 + 5.79\phi_0) + C_\tau \cdot J \cdot (0.228 - 2.14\phi_0)]$$

Equação II-5

Na obtenção dessa equação, utilizou-se a técnica de RS, apresentada em maiores detalhes por Schmidt & Lipson (2009). Basicamente, esta técnica utiliza algoritmos genéticos que buscam combinar expressões analíticas fechadas com o fim de aproximar uma série de dados fornecidos. Um total de 29 dutos flexíveis com diferentes diâmetros,

ângulos de assentamento e seções transversais das armaduras de tração foram analisados quanto à flambagem lateral por meio da solução numérica proposta por Østergaard (2012). Devido, principalmente, à ausência de representação do mecanismo de atrito entre as camadas, o resultado da expressão empírica (Equação II-5) é considerado conservador, bem como a expressão fornecida por Sævik & Ji (2014). Contudo, a expressão empírica possui menor desvio (cerca de 5%) com relação aos resultados numéricos do que a Equação II-4, que fornece cargas críticas aproximadamente 12% menores do que os resultados numéricos. É necessário ressaltar que as respostas foram comparadas diretamente com os 29 casos de treino do algoritmo genético, não sendo mencionada, pelos autores, a utilização de casos diferentes dos de treino para a validação da resposta.

Caleyron *et al.* (2017) apresentaram o modelo, utilizado pela companhia francesa TECHNIP, para a determinação das tensões nas armaduras de tração de *risers* flexíveis de camadas não aderentes, o qual é baseado em condições periódicas e na hipótese de que todos os arames de uma mesma camada apresentam o mesmo comportamento cinemático. O modelo consta de um sistema de equações diferenciais resolvidas por diferenças finitas, o qual advém de uma antiga linha de pesquisa que remonta a trabalhos como o de Féret & Bournazel (1987), Féret *et al.* (1995) e Leroy & Estrier (2001).

Todos esses trabalhos objetivavam a modelagem do comportamento mecânico dos arames de tração quando submetidos a ciclos de flexão. A principal diferença entre esses trabalhos refere-se à posição extrema do arame quando o duto é fletido. O trabalho mais antigo (Féret & Bournazel, 1987), por exemplo, parte da premissa que o arame deve atingir, em sua posição final, a geodésica do toro. O segundo trabalho mencionado (Féret, *et al.*, 1995) permite com que, mediante o uso de uma expressão empírica, a posição final do arame se enquadre entre as duas curvas tidas como limites¹⁷. Já o terceiro (Leroy & Estrier, 2001) admite a ocorrência de deslizamento na direção lateral do arame, para o qual o modelo de fricção de Coulomb é quem ditará a posição final

¹⁷ No estudo de flexão de flexíveis, é comum tratar as curvas geodésicas e loxodrômicas por curvas limites, pois enquanto a primeira representaria o arame livre para se deslocar lateralmente, a segunda representaria o arame com esse deslocamento impedido. Adiante, ambos os conceitos, geodésica e loxodrômica, serão mais bem detalhados.

desse arame. Caleyron *et al.* (2017), por sua vez, estendem o estudo apresentado em Caleyron *et al.* (2014) com o objetivo de prever a desorganização lateral dos arames das armaduras de flexão e validam seus resultados com uma série de experimentos de bancada. Os autores concluíram, por meio dos testes e das análises realizadas, que a consideração do contato lateral entre os arames da mesma camada é um ponto chave na representação do fenômeno de flambagem lateral dos arames de armadura de tração.

Li *et al.* (2018) apresentam um modelo analítico de predição da carga que leva à flambagem lateral. A formulação proposta é resultante da simplificação do sistema de equações referido por Østergaard (2012) para o caso de dutos com eixo reto. Utilizou-se, ainda, da TP para a obtenção de uma expressão analítica simplificada que permite a validação de diversos modos de flambagem. A expressão analítica, assim como a proposta por Sævik & Ji (2014), desconsidera os efeitos de fricção representando apenas, e talvez conservadoramente, a situação em que o anular encontra-se alagado.

Pode-se observar, por meio do exposto, que os estudos sobre a instabilidade de dutos flexíveis apresentam diversas dificuldades, incongruências e áreas a serem mais bem compreendidas. Ademais, não é de conhecimento do autor a aplicação de modelos clássicos de estabilidade estrutural, conforme generalizado por Koiter (1945), acerca dos dutos flexíveis. A alta complexidade dos modelos, conforme detalha Caleyron *et al.* (2017), é de extrema importância para a correta modelagem do comportamento estrutural dos arames das armaduras de tração. Contudo, devido à mesma complexidade relatada, é possível que outros fenômenos, como a perda de energia devido à fricção do arame e suas camadas adjacentes, responsáveis por acarretar a desorganização dos arames da armadura de tração, sejam encarados como flambagem elástica dos arames, quando, na verdade, não o são. Com o intuito de avaliar o mecanismo de flambagem lateral elástica dos arames da armadura de tração de acordo com a TEE, o presente trabalho foi proposto.

CAPÍTULO III

MODELO DE VIGA CURVA PARA A ANÁLISE DE FLAMBAGEM LATERAL DAS ARMADURAS DE TRAÇÃO DE *RISERS* FLEXÍVEIS

III.1. Apresentação

Este capítulo tem como objetivo central a apresentação das metodologias desenvolvidas neste trabalho para avaliação do mecanismo de flambagem lateral dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis. Para tanto, se faz necessária a apresentação de alguns conceitos básicos que envolvem: a descrição matemática de uma curva sobre a superfície de um toro, mediante definições da geometria diferencial; as relações constitutivas e cinemáticas para uma viga espacial naturalmente curva e torcida, considerando-a composta de um material linearmente elástico; e, por fim, as formulações de equilíbrio dessa viga.

Através dessa descrição, é possível apresentar a derivação das metodologias utilizadas para estudar o desencadeamento do fenômeno de flambagem lateral. Em primeiro lugar, vale ressaltar que, de acordo com Vaz & Rizzo (2011) e Yang *et al.* (2015), o atrito lateral entre os arames das armaduras de tração e as camadas adjacentes exercem significativa influência no nível da carga crítica obtida pelas análises numéricas. Estes resultados podem ser corroborados pelos resultados experimentais

apresentados por Braga (2003), nos quais amostras semelhantes apresentam cargas críticas, e até mesmo modos críticos, bastante diferentes (ver Figura II-1). Os resultados de Østergaard (2012) também seguem o mesmo padrão (Figura I-7), mas o autor, porém, não atribui importância ao efeito de atrito do arame.

Dessa forma, é proposta, neste trabalho, a apresentação de um modelo de elementos finitos para realização de análise de flambagem linear clássica, consistente e atualizada, dos arames das armaduras de tração. Esse modelo é baseado na mecânica de vigas espaciais naturalmente curvas e torcidas, assentadas sobre um toro. Os efeitos de contato são considerados *ad-hoc* por meio de fundações elásticas, as quais objetivam simplificar a simulação dos efeitos do atrito entre as camadas¹⁸ e a rigidez das camadas circundantes.

A seguir, os conceitos teóricos necessários ao entendimento da mecânica dos arames de armaduras de tração serão apresentados.

III.2. Relações geométricas

Devido às dimensões das armaduras de tração, mais precisamente a esbelteza de cada um dos arames, e à alta rigidez radial imposta pelas camadas mais internas, como a carcaça intertravada e a armadura de pressão, essas estruturas podem ser descritas matematicamente por curvas helicoidais assentadas sobre um cilindro. É desejável ainda que os efeitos de flexão, os quais, conforme notam autores como Bectarte & Courtarel (2004) e Braga & Kaleff (2004), contribuem para o desencadeamento do mecanismo de flambagem lateral, estejam representados na descrição matemática das curvas utilizadas para modelar os arames. É, portanto, bastante comum que os arames sejam descritos como curvas assentadas sobre um toro. A superfície de um toro, Figura III-1, é uma

¹⁸ Duas observações merecem realce, a dizer: em primeiro lugar, as forças de atrito e as forças geradas pelas bases elásticas são de naturezas distintas, enquanto a primeira é de carácter não-conservativo, a segunda, por sua vez, tem carácter conservativo. Apesar da questionabilidade teórica da aproximação sugerida, crê-se que a proposta tenha validade *ad-hoc* sobre a representação da restrição lateral imposta pelo atrito. Acrescenta-se ainda que toda informação a respeito da desorganização do arame, com adoção dessa simplificação, é perdida, uma vez que essa advém do carácter não-conservativo do atrito; em segundo lugar, essa técnica é escolhida, pois as contribuições da fundação elástica incidem, de maneira direta e simplificada, sobre a matriz de rigidez do elemento, o que permite com que os problemas de autovalor, característico do estudo de flambagem de estruturas, sejam resolvidos sem maiores percalços.

superfície regular e representa a generalização de uma superfície cilíndrica admitindo-a susceptível a um raio de curvatura constante (R). O embasamento matemático sobre superfícies regulares e sobre o caso específico do toro estão descritas no ANEXO A.3. Uma dentre as possíveis parametrizações dos toros é dada pela Equação III-1

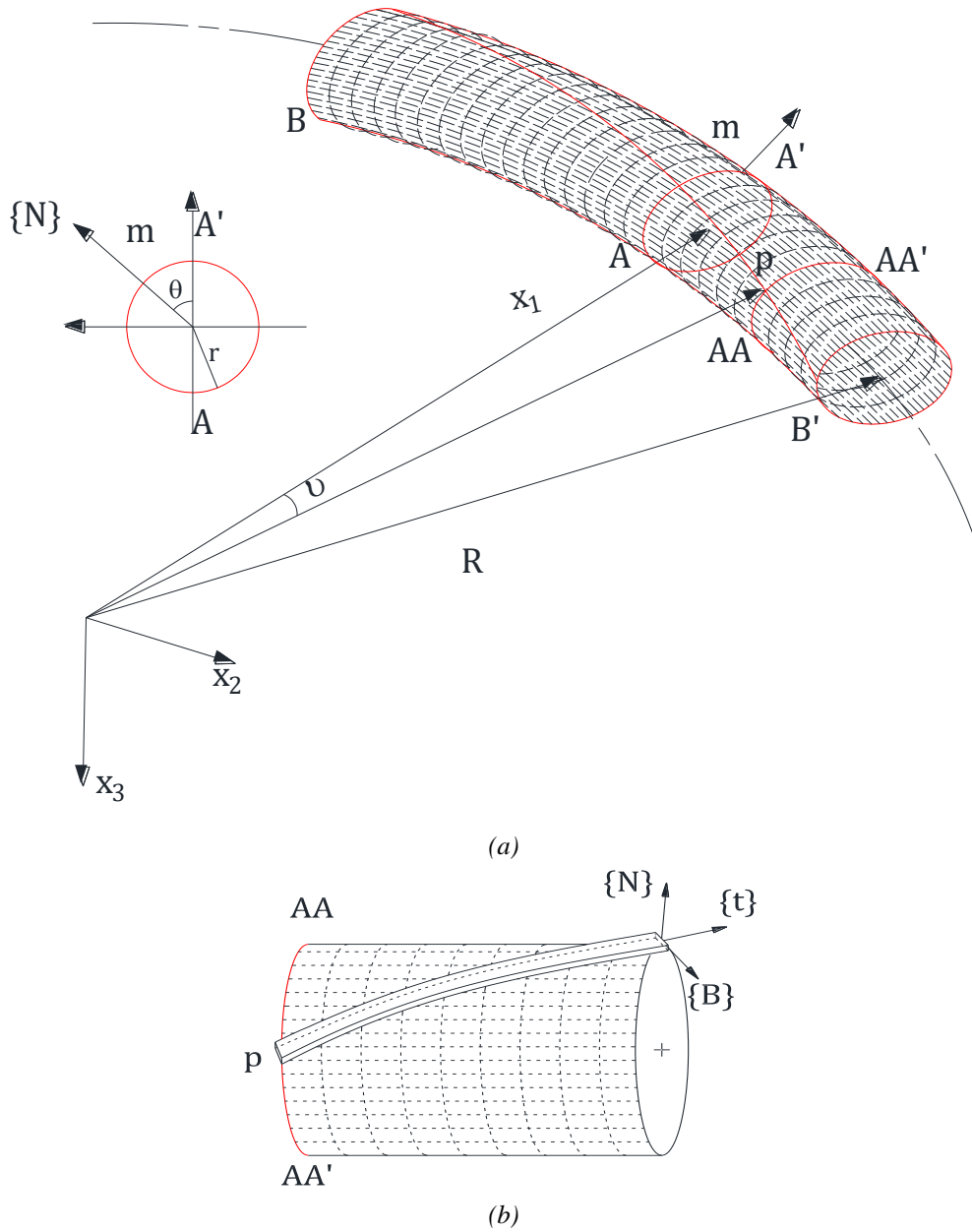


Figura III-1- (a) Geometria e parâmetros do toro e (b) detalhe das coordenadas locais dos tendões das armaduras de tração.

$$\{\mathbf{x}\} = \begin{cases} x_1(\theta, v) \\ x_2(\theta, v) \\ x_3(\theta, v) \end{cases} = \begin{cases} [R + r \cos(\theta)] \cos(v) \\ [R + r \cos(\theta)] \sin(v) \\ r \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-1} \end{array}$$

onde θ e v são parâmetros angulares radiais e longitudinais; R e r são os raios maior e menor do toro, respectivamente, conforme pode ser observado na Figura III-1.

É possível definir uma curva assentada sobre essa superfície caso se tenha definido os eixos de Darboux-Ribaucourt – $[\mathbf{d}] = [\{\mathbf{t}\}, \{\mathbf{N}\}, \{\mathbf{B}\}]^T$ (ver Figura III-1(b)), onde: $\{\mathbf{t}\}$ é o vetor tangente unitário; $\{\mathbf{N}\}$ é o vetor normal da superfície do toro; e $\{\mathbf{B}\}$ é o vetor binormal associado a $\{\mathbf{t}\}$ e $\{\mathbf{N}\}$ (Leroy & Estrier, 2001). Vale dizer que o vetor binormal, por consistência matemática, deve respeitar a regra da mão direita em relação aos outros dois vetores que compõe esse triedro. Esse triedro representa a rotação do triedro de Frenet-Serret, em relação à tangente da curva, de um ângulo γ (ver a Seção A.4.) que a normal da curva se distancia da normal da superfície (do Carmo, 1976).

Para obter o comportamento cinemático da curva, deve-se determinar como o triedro de Darboux-Ribaucourt varia ao longo do comprimento de arco (s) da mesma. Essa relação, dada pela Equação III-2, é conhecida como fórmulas de Bonnet-Kovalevski (Nutbourne & Martin, 1988) e sua derivação pode ser acompanhada passo a passo no ANEXO A.

$$[\mathbf{d}]_{,s} = [\boldsymbol{\kappa}] \cdot [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_n & \kappa_g \\ -\kappa_n & 0 & -\tau_g \\ -\kappa_g & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{\mathbf{t}\} \\ \{\mathbf{N}\} \\ \{\mathbf{B}\} \end{bmatrix}^{19} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-2} \end{array}$$

Na Equação III-2, κ_n e κ_g são, respectivamente, as curvaturas normais e geodésicas e τ_g é a torsão geodésica da curva (Nutbourne & Martin, 1988). Deve-se ressaltar que esses parâmetros são tomados em relação à curva central do arame. De

¹⁹ Ao longo deste trabalho, derivadas parciais ou totais, em relação a uma variável x_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, de uma função genérica $\{F(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ vetorial serão representadas por $\{F\}_{,x_i} = \frac{\partial\{F\}}{\partial x_i}$. Quando se tratar da derivada de alguma projeção específica, as derivadas serão apresentadas na forma de frações, i.e. $\frac{\partial\{F\}}{\partial x_i}$.

posse da equação da curva, os triedros, seja o de Frenet-Serret seja o Darboux-Ribaucourt, são facilmente obtidos, conforme descrito no ANEXO A.

A determinação das curvaturas não é, contudo, tão direta quanto à dos triedros. Por meio da expansão da formulação de Darboux-Ribaucourt, é possível determinar relações entre os componentes do triedro e suas variações que fornecem os valores das componentes de curvatura. Para qualquer curva assentada sobre um toro, Leroy & Estrier (2001) fornecem as seguintes expressões para cada uma das componentes de curvaturas e torção:

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \{\mathbf{t}\}_{,s} \cdot \{\mathbf{N}\} = \{r + [R + r \cdot \cos(\theta)] \cdot v_{,\theta}^2 \cdot \cos(\theta)\} \cdot \theta_{,s}^2 \\ \kappa_g &= \{\mathbf{t}\}_{,s} \cdot \{\mathbf{B}\} \\ &= \{2 \cdot r^2 \cdot v_{,\theta} \cdot \sin(\theta) + [R \cdot v_{,\theta}^3 \cdot \sin(\theta) - r \cdot v_{,\theta\theta}] \\ &\quad \cdot [R + r \cdot \cos(\theta)]\} \cdot \theta_{,s}^3 \\ \tau_g &= \{\mathbf{B}\}_{,s} \cdot \{\mathbf{N}\} = R \cdot v_{,\theta} \cdot \theta_{,s}^2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-3} \end{array}$$

III.3. Mecânica de vigas espaciais naturalmente curvas e torcidas

Esta seção se baseia no trabalho de Love (1906). Seu objetivo central é apresentar as relações cinemáticas entre deformações e deslocamentos, as equações constitutivas que regem o comportamento dos materiais das armaduras de tração; e, por fim, as equações de equilíbrio que governam a mecânica de vigas espaciais naturalmente curvas e torcidas. São ainda apresentadas restrições cinemáticas impostas a essas vigas a fim de compatibilizar seus comportamentos mecânicos com o dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis.

III.3.1. Relações constitutivas

A estabilidade elástica de arames de armaduras de tração é o foco deste trabalho, porque os materiais das armaduras de tração, conforme pode ser observado no CAPÍTULO I, são compostos de aços, muitas vezes, de alta resistência, logo se espera que a flambagem lateral ocorra dentro do limite elástico. Ademais, esse mecanismo

pode ser entendido como o antecessor da instabilidade elasto-plástica, que levaria o duto à falha e que deve ser evitado. Justifica-se com isso a consideração do caráter linear elástico dos materiais utilizada neste trabalho.

Para um material elástico, as forças $\{\mathbf{P}\}$ e momentos $\{\mathbf{M}\}$ internos relacionam-se com as variáveis cinemáticas mediante as relações constitutivas, apresentadas pelas Equação III-4 e pela Equação III-5:

$$\{\mathbf{P}\} = C_\sigma \cdot [\mathbf{A}] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

*Equação
III-4*

$$\{\mathbf{M}\} = C_\sigma \cdot [\mathbf{I}] \cdot \{\boldsymbol{\omega}\}$$

*Equação
III-5*

onde $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{I}]$ são dadas por:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_N}{2(\nu + 1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_B}{2(\nu + 1)} \end{bmatrix}$$

*Equação
III-6*

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \frac{J}{2(\nu + 1)} & 0 & 0 \\ 0 & I_N & 0 \\ 0 & 0 & I_B \end{bmatrix}$$

Na Equação III-6, A_N e A_B são as áreas efetivas de cisalhamento²⁰ em cada uma das direções respectivas.

III.3.2. Relações cinemáticas

Relações cinemáticas compreendem as relações entre deformações e deslocamentos para um dado meio contínuo. Para uma viga naturalmente curva e

²⁰ Segundo Timoshenko (1979), para seções transversais retangulares, as áreas efetivas de cisalhamento podem ser admitidas como 83,33% da área da seção transversal.

torcida, Love (1906) fornece as expressões que relacionam as deformações $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ e os deslocamentos $\{\mathbf{u}\}$, bem como entre as curvaturas $\{\boldsymbol{\omega}\}$ e os ângulos de rotação $\{\boldsymbol{\beta}\}$. As Equação III-7 e Equação III-8 ilustram essas relações

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \{\mathbf{u}\}_{,s} + [\boldsymbol{\kappa}] \cdot \{\mathbf{u}\} + [\mathcal{M}] \cdot \{\boldsymbol{\beta}\}$$

*Equação
III-7*

$$\{\boldsymbol{\omega}\} = \{\boldsymbol{\beta}\}_{,s} + [\boldsymbol{\kappa}] \cdot \{\boldsymbol{\beta}\}$$

*Equação
III-8*

onde $[\boldsymbol{\kappa}]$ é a matriz de curvatura de Darboux, definida de acordo com a Equação III-2; cada um dos vetores $\{\cdot\}$ apresentam suas componentes distribuídas nas direções principais das coordenadas naturais do sistema local da viga curva, a dizer, $\{\cdot\}^T = \{t \quad N \quad B\}$ onde os pontos correspondem aos vetores considerados; e $[\mathcal{M}]$ é a matriz dada pela Equação III-9.

$$[\mathcal{M}] = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Equação
III-9*

É importante ainda inserir algumas restrições cinemáticas para que os comportamentos mecânicos dessas vigas estejam de acordo com esperado de um arame da armadura de tração dos dutos flexíveis.

Uma primeira restrição deve ser imposta à rotação axial desses arames. Neste trabalho, utiliza-se da hipótese proposta por Sævik (1992) para restringir os arames de sofrerem do fenômeno conhecido como ‘*fish-scaling*’, no qual os arames entram em contato lateral uns com os outros e se sobrepõem. Esse fenômeno invalida a hipótese de modelagem de um único arame como representante de todo o conjunto. Segundo Sævik (1992), a rotação axial do tendão, β_t , deve ser restrita ao deslocamento do arame ao longo dos eixos curvilíneos binormal e tangencial, o que é expresso pela Equação III-10.

Ademais, como as dimensões das seções transversais dos tendões são bastantes pequenas quando comparadas aos seus comprimentos, é possível adotar a hipótese de Euler-Bernoulli para vigas esbeltas, a qual despreza os efeitos cisalhantes das vigas e, portanto, os ângulos de rotações β_N e β_B podem ser descritos pela Equação III-11:

$$\beta_t = \tau_g \cdot u_t - \kappa_t \cdot u_B$$

*Equação
III-10*

$$\beta_N = -\varepsilon_B$$

Equação

$$\beta_B = \varepsilon_N$$

III-11

III.3.3. Equações de equilíbrio

De acordo com Love (1906), as equações de equilíbrio de uma viga naturalmente curva e torcida podem ser divididas em dois grupos, as equações de equilíbrio de forças, ou seja, as equações que regem os movimentos translacionais da viga (Equação III-12); e as de equilíbrio de momentos, isto é, as que governam os movimentos rotacionais da viga (Equação III-13). Ambos os grupos de equações são descritos de acordo com as coordenadas naturais da viga curva e são apresentadas aqui em sua forma vetorial e expandida.

$$\{\mathbf{P}\}_{,s} + [\boldsymbol{\kappa}] \cdot \{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{p}\} = \mathbf{0} \quad \therefore$$

$$\frac{dP_t}{ds} + \kappa_n P_N + \kappa_g P_B + p_t = 0$$

$$\frac{dP_N}{ds} - \kappa_n P_t - \tau_g P_B + p_N = 0$$

*Equação
III-12*

$$\frac{dP_B}{ds} + \kappa_g P_t - \tau_g P_N + p_B = 0$$

$$\{\mathbf{M}\}_{,s} + [\boldsymbol{\kappa}] \cdot \{\mathbf{P}\} + [\mathcal{M}] \cdot \{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{m}\} = \mathbf{0} \quad \therefore$$

$$\frac{dM_t}{ds} - \kappa_n M_N - \kappa_g M_B + m_t = 0$$

$$\frac{dM_N}{ds} + \kappa_n M_t + \tau_g M_B - P_B + m_N = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-13} \end{array}$$

$$\frac{dM_B}{ds} + \kappa_g M_t - \tau_g M_N + P_N + m_B = 0$$

onde $\{\mathbf{P}\}$ representa o vetor de esforços internos e $\{\mathbf{M}\}$ o vetor de momentos internos de uma seção típica de uma viga; $\{\mathbf{p}\}$ e $\{\mathbf{m}\}$ são os vetores de forças e momentos externos distribuídos, respectivamente. Os componentes desses vetores, conforme demonstrado pela Equação III-12 e Equação III-13, são descritos no sistema de coordenadas locais da viga, i. e., $[\cdot]^T = [\cdot_t \quad \cdot_N \quad \cdot_B]$.

III.4. Modelo de elementos finitos

O MEF consiste em uma técnica numérica para aproximar soluções de problemas de valores de contorno de equações diferenciais parciais, como as equações de equilíbrio apresentadas para a viga curva e as demais equações diferenciais oriundas de diversos campos da mecânica do contínuo (Bathe, 2006). Esse método tem, por princípio geral, a subdivisão de um domínio em partes de maior simplicidade.

As unidades dessas subdivisões são comumente chamadas de elementos finitos ou simplesmente elementos (Bathe, 2006). Para a representação de problemas físicos usualmente encontrados em engenharia, diversos tipos de elementos (estruturais, de contato, de ligação, etc.) foram desenvolvidos ao longo dos anos e encontram-se implementados nos mais diversos pacotes comerciais, como ABAQUS®, ANSYS® e ADINA®. Entretanto, como os dutos flexíveis são estruturas complexas, elementos que representem adequadamente seu comportamento mecânico podem ser derivados diretamente de suas descrições de equilíbrio, conforme fez Sævik (1992).

Dito isso, vale acrescentar que esta seção tem por objetivo central a descrição de um elemento finito que represente a mecânica dos arames de tração dos dutos

flexíveis. Ao considerar a mecânica de vigas naturalmente curvas assentadas sobre o toro e sobre fundações elásticas (Seção III.3.), espera-se obter: a redução do número de elementos utilizados na captura da perda de estabilidade, quando comparado à utilização de elementos de vigas espaciais em contato com superfícies, conforme proposto por Vaz & Rizzo (2011) e Yang *et al.* (2015); a eliminação da mudança de coordenadas de elemento a elemento; a avaliação dos efeitos de contato entre os elementos e o duto, isto é, a representação, ainda que simplificada, dos efeitos de fricção; e, por fim, a possibilidade de realização de análises de flambagem linear e atualizada dessas estruturas.

III.4.1. Elemento de viga espacial naturalmente curvo e torcido em fundações elásticas

Elementos finitos de vigas espaciais naturalmente curvas não são uma abordagem essencialmente nova, como pode ser verificado nos trabalhos de Tabarrok & Xiong (1989), Banan *et al.* (1990), Tabarrok & Xiong (1992) e Sævik (1992), por exemplo.

Tabarrok & Xiong (1989) não apresentam propriamente a descrição de elementos para vigas espaciais, mas utiliza conceitos da teoria clássica do método do ponto de equilíbrio adjacente, como explicam Brush & Almroth (1975), para determinar as equações de instabilidade dessas vigas com aplicação a arcos e hélices. Uma possível solução dessas equações, de acordo com os autores, se dá por meio do MEF, o que foi realizado posteriormente em Tabarrok & Xiong (1992).

Banan *et al.* (1990) utilizam o MEF para propor uma solução ao mesmo problema. No entanto, Banan *et al.* (1990) consideram a presença de possíveis interações de contato através de fundações elásticas. Apenas o caso de um arco plano sobre fundações elásticas é estudado. O elemento apresentado contém doze graus de liberdade²¹ e, em conjunto com a técnica de estabilidade linear, permite a investigação das cargas críticas e seus modos de instabilidade.

²¹ Graus de liberdade devem ser compreendidos como o número de parâmetros necessários para descrever uma dada configuração de um sistema estrutural.

Tabarrok & Xiong (1992) utilizam das equações derivadas no trabalho anteriormente mencionado, de 1989, para propor um elemento de viga espacial curva e torcida para o problema de flambagem dos mesmos. É proposto um esquema iterativo que tem por objetivo aproximar o comportamento pré-crítico do ponto limite da estrutura. Mais uma vez, os resultados são pautados sobre o estudo de hélices e arcos espaciais e a aproximação, que leva em consideração os efeitos da atualização do referencial, apresentam resultados mais próximos dos dados experimentais do que os obtidos simplesmente pela análise clássica de autovalor.

Sævik (1992), todavia, foi um dos primeiros a aplicar esses elementos à análise mecânica de arames das armaduras de tração de dutos flexíveis. O elemento proposto por Sævik (1992), e posteriormente modificado em (2011), toma das premissas de que o elemento de viga é assentado sobre um toro e só pode deslizar sobre essa superfície. Esse elemento possui oito graus de liberdade e utiliza de funções de interpolações cúbicas e lineares para a aproximação do comportamento da viga. Ademais, Sævik (1992) utiliza o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para a derivação das matrizes de rigidez tangentes e de tensões iniciais, processo bastante comum para formulação de elementos finitos.

Já o elemento finito proposto nesta tese conta com cinco graus de liberdade por nó e dois nós por elemento. Os graus de liberdades são as translações nas três direções principais do elemento e as rotações nas direções normal e binormal. Para melhor captar o fenômeno de instabilidade dos tendões das armaduras de tração, o grau de liberdade de rotação na direção normal, desprezado por Sævik (1992), foi considerado. Utilizaram-se, também, fundações elásticas que permitem a representação simplificada da contribuição do atrito e da ação das camadas circundantes e, finalmente, os nós intermediários, empregados por Sævik (1992), foram desprezados. Como o intuito deste trabalho é o estudo da estabilidade desses arames, pautado nos conhecimentos expostos pela TEE (Koiter, 1945), optou-se por utilizar o estudo do funcional da Energia Potencial Total (EPT) para a derivação das matrizes de rigidez. A Figura III-2 ilustra o elemento proposto, seus graus de liberdade e as fundações elásticas.

Em elementos finitos, o campo de deslocamentos $\{\mathbf{u}(\xi)\}$ de um elemento deve ser expresso em termos dos deslocamentos nodais $\{\mathbf{u}\}$ e das matrizes de forma, $[\Phi(\xi)]$, que organizam as funções de interpolação, de acordo com a Equação III-14.

$$\{\mathbf{u}(\xi)\} = [\Phi(\xi)] \cdot \{\mathbf{u}\}$$

Equação

III-14

onde ξ representa a coordenada de comprimento adimensional do elemento ($\xi(s) = \frac{s}{l_s}$, onde l_s é o comprimento total do elemento). A dimensão do campo de deslocamentos, dos deslocamentos nodais e da matriz de forma são, respectivamente, 3×1 , 10×1 e 3×10 . A seguir, pode-se observar a matriz de forma e suas funções de interpolação, baseadas nos polinômios de Hermite e ilustradas pela Equação III-15 (Zienkiwicz, 1977).

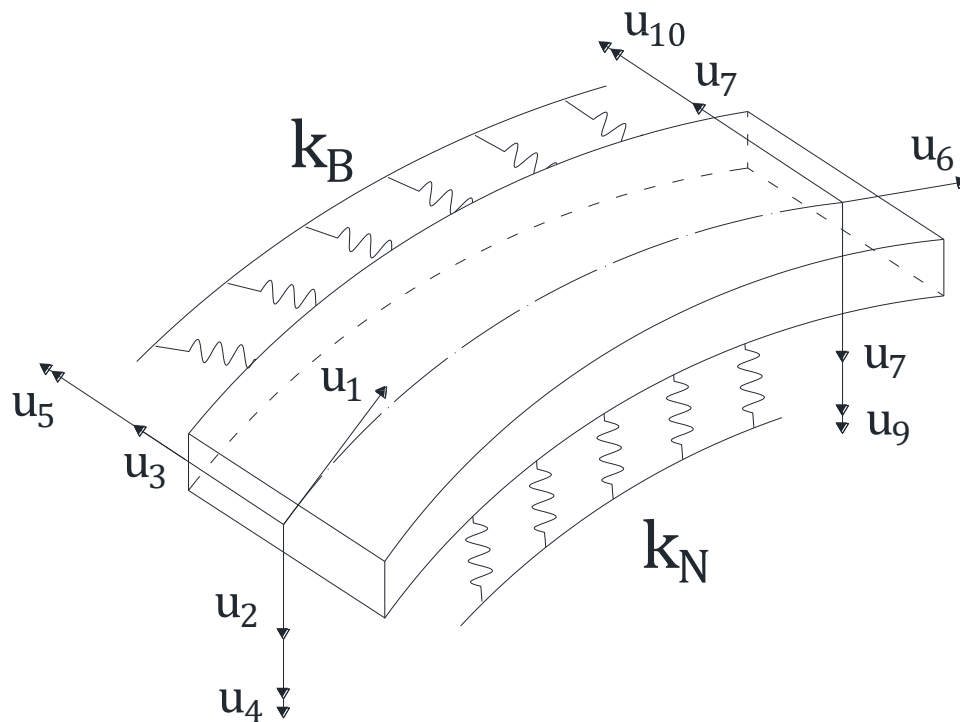


Figura III-2 – Elemento finito de viga curva de dez graus de liberdade assentado sobre fundações elásticas.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} f_1(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1(\xi) & 0 & 0 & f_3(\xi) & 0 & f_2(\xi) & 0 & 0 & f_4(\xi) \\ 0 & 0 & f_1(\xi) & f_3(\xi) & 0 & 0 & 0 & f_2(\xi) & f_4(\xi) & 0 \end{bmatrix}$$

onde:

Equação

III-15

$$f_1(\xi) = 1 - 3 \cdot \xi^2 + 2 \cdot \xi^3$$

$$f_2(\xi) = \xi^2 \cdot (3 - 2 \cdot \xi)$$

$$f_3(\xi) = \xi \cdot (\xi - 1)^2 \cdot l_s$$

$$f_4(\xi) = \xi^2 \cdot (\xi - 1) \cdot l_s$$

Vale dizer que, aos deslocamentos axiais, polinômios cúbicos são utilizados como funções de interpolação diferentemente das funções lineares usualmente aplicadas para elementos de viga espaciais²². Essa prática garante melhor representação do comportamento mecânico dos arames das armaduras de tração que apresentam elevado acoplamento entre deformações axiais e deslocamentos transversais (Sævik, 1992). Apesar de utilizar da mesma premissa que Sævik (1992), os polinômios adotados para esse grau de liberdade diferem. No trabalho de Sævik (1992), foram utilizados polinômios cúbicos que majoram ainda mais os efeitos desse acoplamento, o qual não se mostrou eficaz para o problema estudado.

III.4.2. Princípio dos trabalhos virtuais e energia potencial total

É possível determinar as deformações dos elementos finitos em função dos deslocamentos nodais mediante a consideração da matriz de forma a e das relações cinemáticas, reescritas na Equação III-16 para cada um dos i -ésimos elementos, isto é, reescrita em sua forma discreta.

²² Exceto no APÊNDICE D, onde para a validação adequada do elemento, realizada mediante a aplicação da flambagem linear de vigas planas, a utilização de polinômios lineares para o deslocamento axial se faz necessária.

$$\begin{aligned}\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^i &= \{\delta\mathbf{u}\}_{,s}^i + [\boldsymbol{\kappa}]^i \cdot \{\delta\mathbf{u}\}^i + [\mathbf{J}] \cdot \{\delta\boldsymbol{\beta}\}^i \\ \{\delta\boldsymbol{\omega}\}^i &= \{\delta\boldsymbol{\beta}\}_{,s}^i + [\boldsymbol{\kappa}]^i \cdot \{\delta\boldsymbol{\beta}\}^i\end{aligned}\tag{Equação III-16}$$

Pode-se, mediante a expansão da equação anterior, Equação III-16, definir os termos de compatibilidade cinemática para o caso estudado. Esses termos, $[\boldsymbol{\Omega}]$, são derivados a partir das considerações expostas pelas Equação III-14 e Equação III-15 e traduzem as relações entre deslocamentos e deformações para sistemas discretos. Na Equação III-17, a matriz de forma (Equação III-15) é separada em três vetores, os quais dão origem aos vetores que constituem a matriz de compatibilidade $[\boldsymbol{\Omega}]$, mediante o descrito nas relações cinemáticas, explicitadas na Seção III.3.2. Cada um dos vetores da matriz de compatibilidade, ao ser multiplicado pelo vetor de deslocamentos nodais, $\{\mathbf{u}\}$, retorna as deformações em cada uma das direções para um dado elemento i^{23} .

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} &= \{\boldsymbol{\Phi}^{(1)}\}_{,s} - \kappa_n \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\} - \kappa_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\} \\ \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} &= \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\}_{,s} + \kappa_n \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(1)}\} + \tau_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\} \\ \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} &= \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\}_{,s} + \kappa_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(1)}\} - \tau_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\} \\ \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_t}\} &= \kappa_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\}_{,s} - \tau_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(1)}\}_{,s} - (\kappa_t - \kappa_n) \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\}_{,s} - \tau_g \kappa_n \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\} \\ &\quad - \tau_g \kappa_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\} \\ \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_n}\} &= -\{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\}_{,ss} - \kappa_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(1)}\}_{,s} + 2\tau_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\}_{,s} + (\tau_g^2 - \kappa_t \kappa_n) \\ &\quad \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\} \\ \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_b}\} &= \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\}_{,ss} + \kappa_n \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(1)}\}_{,s} - 2\tau_g \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\}_{,s} - \tau_g^2 \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\} - \kappa_t \kappa_g \\ &\quad \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\}\end{aligned}\tag{Equação III-17}$$

Os operadores $\{\boldsymbol{\Omega}\}$ são chamados de operadores de compatibilidade cinemática e são análogos ao operador $\{\mathbf{B}\}$, dado pela aplicação da matriz operadora diferencial,

²³ Daqui em diante, o sobrescrito i , que se refere a um elemento específico, será suprimido por fins de simplicidade.

usualmente nomeada pela letra $[\mathbf{L}]^{24}$, sobre a matriz de forma $[\Phi]$. Desse modo, em análises lineares no MEF, a matriz de rigidez do elemento i , $[\mathbf{K}^i]$, pode ser definida conforme mostra a Equação III-18

$$[\mathbf{K}^i] = \int_V (\{\mathbf{B}\}^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot \{\mathbf{B}\}) dV \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-18} \end{array}$$

onde $[\mathbf{D}]$ é a matriz de relações constitutivas do material.

É muito comum, no MEF, o uso de princípios variacionais, como é o caso do PTV²⁵, para a derivação das matrizes de rigidez do sistema estudado (Bathe, 2006). O PTV atesta que, para um corpo em equilíbrio submetido a um campo de deslocamentos virtuais, o trabalho virtual externo deverá ser igual ao trabalho virtual interno (Garcia, 2007). Ao excluir a contribuição das forças de volume, o PTV pode ser escrito de acordo com a Equação III-19.

$$\int_V [\boldsymbol{\sigma}]: \delta[\boldsymbol{\epsilon}] dV + \int_V [\boldsymbol{\sigma}_0]: \delta[\boldsymbol{\epsilon}] dV - \int_S \{\boldsymbol{\tau}\}: \delta\{\mathbf{u}\} dS \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-19} \end{array}$$

onde $[\boldsymbol{\sigma}]$ é o tensor de tensões, $[\boldsymbol{\sigma}_0]$ é o estado de tensão inicial, $\{\boldsymbol{\tau}\}$ é a tração sobre a área, $\delta\{\mathbf{u}\}$ o campo de deslocamentos virtuais e $\delta[\boldsymbol{\epsilon}]$ é o tensor de deformação virtual de Green desprezando os termos de segunda ordem que não aportam significância para o problema do equilíbrio (Equação III-22²⁶).

No entanto, como a TEE (Koiter, 1945) foi desenvolvida sobre a análise do EPT e como o PTV não fornece, de imediato, informações sobre a estabilidade das estruturas (Alves, 1995), as formulações de elementos finitos baseados na formulação da EPT serão apresentadas.

²⁴ Sucintamente, a matriz operadora de derivação ou matriz operadora diferencial deve satisfazer as relações cinemáticas, isto é, garantir que $\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{u}\}$.

²⁵ As parcelas virtuais, neste trabalho, são representadas pelo termo δ que precede o referido termo. Essas parcelas devem ser entendidas por parcelas não existentes, mas compatíveis com as vinculações do sistema e em respeito à continuidade interna do sólido analisado.

²⁶ Nessa equação, as contribuições de segunda ordem, relevantes ao estudo da estabilidade, são consideradas.

A partir da energia de deformação dos sistemas, as formulações matriciais para as rigidezes podem ser obtidas, as quais, diferentemente das análises lineares em que a energia de deformação é constituída apenas por um funcional quadrático, são derivadas de funcionais de ordem igual ou menor que a quarta.

A energia de deformação total, \mathcal{U} , de um elemento i , sofrendo uma deformação total $[\epsilon]$, pode ser dada por:

$$\mathcal{U} = \int_V [\sigma]: [\epsilon] dV \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-20} \end{array}$$

onde o tensor de deformação total de Green, $[\epsilon]$, pode ser dividido em três parcelas: referente ao estado inicial de deformação $\{\epsilon_0\}$; às parcelas lineares do tensor $\{\epsilon_1\}$ e às parcelas quadráticas do mesmo, $\{\epsilon_2\}$, de acordo com o exposto pela Equação III-21:

$$[\epsilon] = \{\epsilon_0\} + \{\epsilon_1\} + \{\epsilon_2\} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-21} \end{array}$$

Huang (1973) apresentou o tensor de Green com termos truncados até a segunda ordem para uma viga naturalmente curva. Sævik (1992), por sua vez, adaptou o tensor proposto por Huang (1973) ao tensor de Green para uma viga curva, torcida e assentada sobre a superfície de um toro. Este tensor é aqui transcrito, pela Equação III-22, com suas partes lineares, $\{\epsilon_1\}$, e não-lineares, $\{\epsilon_2\}$, separadas e desconsideradas as parcelas quadráticas das rotações²⁷:

$$\begin{aligned} \{\epsilon_1\} &= [\epsilon_t + x_B \cdot \omega_N - x_N \cdot \omega_B + \tau_g \cdot \omega_t \cdot (x_B \cdot \psi_{,x_N} - x_N \cdot \psi_{,x_B})] \\ \{\epsilon_2\} &= \frac{1}{2} \cdot [\epsilon_t^2 + \epsilon_N^2 + \epsilon_B^2] \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-22} \end{array}$$

²⁷ Essas parcelas foram desconsideradas, pois, ao levá-las em conta, as propriedades das matrizes de rigidezes (ANEXO A) não se sustentam. Admite-se que maior averiguação quanto a isso mereça ser feita.

onde x_N e x_B são as coordenadas da seção transversal, tendo como origem o centroide da seção, nas direções normal e binormal, e ψ é a função de empenamento de St. Venant. Essas coordenadas variam de $(-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2})$ e $(-\frac{w}{2}, +\frac{w}{2})$, respectivamente, conforme ilustra a Figura III-3. Os parâmetros h e w são apresentados na mesma figura e representam a altura e a largura da seção transversal.

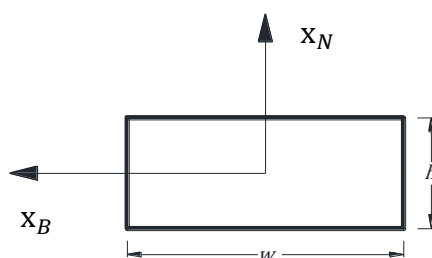


Figura III-3 – Coordenadas da seção transversal (x_N e x_B).

As expressões obtidas para o tensor de Green têm como premissas o caso específico de uma viga longa de seção bissimétrica esbelta (quando suas dimensões são consideradas pequenas ao compará-las a suas curvaturas). São ainda consideradas a invariância do volume e as restrições impostas ao cisalhamento propostas por Euler (Equação III-11). Essas premissas são compatíveis com as utilizadas por Sævik (1992).

Dessa forma, em acordo com o exposto por Koiter (1945) e posteriormente expandido para análises de elementos finitos por autores como Haftka *et al.* (1971) e Antonini (1986), a energia de deformação total da estrutura estudada apresenta termos dependentes da parcela de deformação inicial, da parcela linear, da parcela quadrática e de seus cruzamentos, como pode ser visto na Equação III-23.

É mediante essas relações, Equação III-24, que se podem determinar as matrizes de rigidez das vigas espaciais naturalmente curvas e torcidas, apresentadas e mais detalhadamente descritas na seção seguinte (Seção III.4.3.).

O potencial das cargas \mathcal{V} em um elemento finito, para o caso especial onde apenas atuem forças conservativas e onde as forças de massa e de superfície possam ser desprezadas, pode ser expresso mediante um parâmetro único λ . Nesse caso, pode-se escrever o potencial das cargas conforme a Equação III-25:

$$u^i = u_{00}^i + u_{01}^i + u_{02}^i + u_{11}^i + u_{12}^i + u_{22}^i$$

*Equação
III-23*

onde:

$$u_{00}^i = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_0\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon_0\} dV$$

$$u_{01}^i = \frac{1}{2} \int_V (\{\epsilon_0\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon_1\} + \{\epsilon_1\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon_0\}) dV$$

$$u_{02}^i = \frac{1}{2} \int_V (\{\epsilon_0\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon_2\} + \{\epsilon_2\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon_0\}) dV$$

*Equação
III-24*

$$u_{11}^i = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_1\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon_1\} dV$$

$$u_{12}^i = \frac{1}{2} \int_V (\{\epsilon_1\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon_2\} + \{\epsilon_2\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon_1\}) dV$$

$$u_{22}^i = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon_2\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon_2\} dV$$

$$v^i = -\lambda_T \cdot \{\mathbf{F}^i\}^T \cdot \{\mathbf{u}_T^i\}$$

*Equação
III-25*

onde:

$$\lambda_T = \lambda_0 + \lambda$$

$$\{\mathbf{u}_T^i\} = \{\mathbf{u}_0^i\} + \{\mathbf{u}^i\}$$

*Equação
III-26*

A EPT da estrutura é representada pelo potencial das cargas mais a energia potencial de deformação. A EPT pode, então, ser escrita de acordo com o exposto na Equação III-27, desde que desprezados os termos independentes dos deslocamentos. Esta última consideração pode ser feita, pois esse estudo utiliza as variações desse funcional com relação aos campos de deslocamentos. Nestas variações, os termos

independentes dos campos de deslocamentos desaparecem, logo não serão apresentados nas deduções que seguem.

$$\begin{aligned} \Pi^i = \mathcal{U}^i + \mathcal{V}^i \approx \{\mathbf{u}^i\}^T & \\ \cdot \left\{ \left[\frac{1}{2} \cdot ([\mathbf{K}_G^i] + [\mathbf{K}_0^i]) + \frac{1}{6} \cdot [\mathbf{K}_1^i(\{\mathbf{u}^i\})] + \frac{1}{24} \right. \right. & \text{Equação} \\ & \text{III-27} \\ \left. \left. \cdot [\mathbf{K}_2^i(\{\mathbf{u}^i\}, \{\mathbf{u}^i\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}^i\} - \lambda \cdot \{\mathbf{F}^i\} \right\} & \end{aligned}$$

onde $[\mathbf{K}_0^i]$ ²⁸, $[\mathbf{K}_1^i]$, $[\mathbf{K}_2^i]$ e $[\mathbf{K}_G^i]$ são as matrizes de rigidez que conformam o comportamento estrutural do elemento i . De acordo com Alves (1995) e Levold (1990), a consideração dos termos quadráticos no tensor de Green permite a derivação de matrizes de rigidez não-lineares, isto é, dependentes do deslocamento incremental em primeira e/ou em segunda ordem ($[\mathbf{K}_1^i]$ e $[\mathbf{K}_2^i]$, respectivamente). Essas matrizes são obtidas mediante o cruzamento dos termos quadráticos com os lineares e dos quadráticos com eles mesmos, respectivamente, na inserção do tensor de Green completo na Equação III-24.

Para a descrição do comportamento pós-crítico de uma estrutura, deve-se levar em conta essas rigidezes com o efeito de se perderem características importantes de sua resposta mecânica, principalmente no caso de estruturas que se deformam significativamente antes de instabilizar.

No entanto, a norma API 17B (2014) prevê que os dutos flexíveis e, em particular, suas armaduras de tração, não devam trabalhar no regime pós-crítico. Assim, apenas o ponto crítico, seus modos associados e as características desses pontos serão investigados nesta tese, guardada a exceção do traçado de equilíbrio não-linear de maneira aproximada. Esta hipótese é corroborada pelos resultados de Caleyron *et al.* (2014), nos quais observou-se que o deslocamento transversal dos arames durante o estágio pós-crítico acarretaria o contato lateral dos arames vizinhos, o que invalidaria a

²⁸ Neste trabalho, a matriz $[\mathbf{K}_0]$ apresenta contribuições tanto das rigidezes internas dos elementos, chamada de matriz de rigidez tangente, para no caso de análises lineares, como das fundações elásticas. Logo, esta matriz pode ser definida por $[\mathbf{K}_0] = [\mathbf{K}_M] + [\mathbf{K}_W]$

hipótese de modelagem de um arame como representativo dos demais. Além disso, segundo esses autores, ao entrar em contato lateral, os arames garantem que o equilíbrio seja mais uma vez estabilizado e, conseqüentemente, a estrutura ganhe novamente rigidez axial, por exemplo.

III.4.3. As matrizes de rigidez

Mediante a análise das Equação III-23 e Equação III-24, podem-se obter as matrizes de rigidez de um elemento finito. Como a primeira equação da Equação III-24 (\mathcal{U}_{00}^i) é independente dos deslocamentos, porque ela corresponde ao valor da energia de deformação no mesmo referencial e posição inicial do equilíbrio conhecido, ela pode ser desprezada, tanto na consideração do equilíbrio e quanto no estudo da estabilidade da estrutura.

As parcelas restantes são, todas elas, dependentes dos deslocamentos. As parcelas da energia potencial de deformação \mathcal{U}_{01}^i , \mathcal{U}_{02}^i , \mathcal{U}_{11}^i , \mathcal{U}_{12}^i e \mathcal{U}_{22}^i são linear, quadrática (ambas \mathcal{U}_{02}^i e \mathcal{U}_{11}^i), cúbica e quártica em relação aos deslocamentos, respectivamente. \mathcal{U}_{02}^i e \mathcal{U}_{11}^i dão origem, respectivamente, as matrizes de tensões iniciais e de rigidez tangente, utilizadas nas análises não-lineares usuais em elementos finitos e obtidas pelo PTV. \mathcal{U}_{01}^i é a parcela associada às forças acumuladas até a dada configuração atual e \mathcal{U}_{12}^i e \mathcal{U}_{22}^i são as parcelas que conferem a não-linearidade geométrica ao problema, de acordo com Alves (1995) e Levold (1990).

Dada a hipótese de pequenas deformações, as matrizes de rigidez que caracterizam o problema são: $[\mathbf{K}_M]$, a matriz de rigidez utilizada nas análises lineares (Equação III-28); $[\mathbf{K}_W]$, a matriz de contribuição das fundações elásticas (Equação III-29); $[\mathbf{K}_G]$, a matriz de tensões iniciais (Equação III-30); e $[\mathbf{K}_1]$ e $[\mathbf{K}_2]$ as matrizes de rigidez dependentes dos deslocamentos em 1ª e 2ª ordem (Equação III-31 e Equação III-32), respectivamente. Essas matrizes podem ser obtidas mediante a combinação das equações contidas na Equação III-16 e daquelas que representam a energia de deformação dos elementos, Equação III-24, empregando o método de Galerkin (Bathe, 2006).

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_M] = & C_\sigma A \cdot \int_0^{l_s} \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} ds + C_\sigma D \tau_g \\
& \cdot \int_0^{l_s} (\{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_t}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_t}\}) ds + C_\tau J \\
& \cdot \int_0^{l_s} \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_t}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_t}\} ds + C_\sigma I_n \cdot \int_0^{l_s} \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_n}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_n}\} ds + C_\sigma I_b \\
& \cdot \int_0^{l_s} \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_b}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\omega_b}\} ds
\end{aligned}$$

Equação III-28

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_W] = & \int_0^{l_s} \left(k_t \{\boldsymbol{\Phi}^{(1)}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(1)}\} + k_n \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(2)}\} + k_b \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\}^T \right. \\
& \left. \cdot \{\boldsymbol{\Phi}^{(3)}\} \right) ds
\end{aligned}$$

Equação III-29

$$[\mathbf{K}_G] = \int_0^{l_s} (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}) ds$$

Equação III-30

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_1(\{\mathbf{Y}\})] = & C_\sigma A \\
& \cdot \int_0^{l_s} [\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \\
& \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \\
& \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \\
& + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \\
& \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}] ds
\end{aligned}$$

Equação III-31

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_2(\{\mathbf{Y}\}, \{\mathbf{Z}\})] &= C_\sigma A \cdot \\
&\cdot \int_0^{l_s} \{ [\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\}^T \\
&\cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \\
&\cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}] + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \\
&\cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \\
&\cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \\
&+ \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\}^T \\
&\cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \\
&\cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_t}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \\
&\cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \\
&+ \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}^T \\
&\cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \\
&\cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} + \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\}^T \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \cdot \{\mathbf{Y}\}) \cdot (\{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_b}\} \cdot \{\mathbf{Z}\}) \\
&\cdot \{\boldsymbol{\Omega}^{\varepsilon_n}\} \} ds
\end{aligned}$$

Equação
III-32

Nas Equação III-28 a Equação III-36, D , J e Γ são as constantes de torção dadas, respectivamente, pelas Equação III-33, Equação III-34 e Equação III-35 e ψ é a função de empenamento formulada por St. Venant, que é obtida pela resolução da equação diferencial de Laplace ($\nabla^2 \psi = 0$) (Thimoshenko & Goodier, 1979). Ainda de acordo com Thimoshenko & Goodier (1979), para o caso específico de seções retangulares, a função de empenamento é dada pela Equação III-36.

$$D = I_N + I_B - J$$

Equação
III-33

$$J = \iint_A (\psi_{,x_N} \cdot x_B - \psi_{,x_B} \cdot x_N + x_N \cdot x_N + x_B \cdot x_B) \cdot dA$$

Equação
III-34

$$\Gamma = \iint_A \psi^2 \cdot dA$$

*Equação
III-35*

$$\psi = -x_N \cdot x_B + h^2 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^3$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m}{(2 \cdot m + 1)^3} \right.$$

$$\cdot \left. \frac{\sinh\left(\frac{2 \cdot m + 1}{h} \cdot \pi \cdot x_B\right)}{\cosh\left(\frac{2 \cdot m + 1}{2 \cdot h} \cdot \pi \cdot w\right)} \cdot \text{sen}\left(\frac{2 \cdot m + 1}{h} \cdot \pi \cdot x_N\right) \right]$$

*Equação
III-36*

Como se pôde observar nas Equação III-31 e Equação III-32, as matrizes de rigidez $[\mathbf{K}_1]$ e $[\mathbf{K}_2]$ são funções dos vetores de deslocamento, $\{\mathbf{Y}\}$ e $\{\mathbf{Z}\}$. Para uma análise iterativa, esses vetores são obtidos, inicialmente, a partir do passo de carga anterior ao passo de carga analisado. A obtenção dos termos dessas matrizes, por fim, utiliza de esquemas de integração de Gauss de sexta ordem, os quais levam a soluções exatas da integração de polinômios até a décima primeira ordem.

III.4.4. A equação não-linear de equilíbrio e sua solução por métodos iterativos

Nos itens anteriores, foram apresentadas as matrizes de rigidez e o funcional discreto da EPT em termos dessas matrizes. Nesta seção, as variações desse funcional serão explicitadas mediante a expansão de seus termos em série de Taylor. É do estudo dessas variações que as metodologias de estudo da instabilidade de estruturas pelo MEF se tornam possíveis. É também dessas variações que a equação de equilíbrio não-linear pode ser derivada, por meio do Princípio da Estacionaridade da Energia Potencial Total (PEEPT) (Garcia, 2007).

Através da resolução do sistema de equações não-lineares resultantes pode-se traçar o caminho de equilíbrio de uma dada estrutura, ou seja, a representação gráfica da relação entre a variação da magnitude do carregamento e um certo grau de liberdade (λ x u) dos sistemas estruturais estudados. Esse caminho pode ser subdividido em fundamental ou primário, ou seja, aquele anterior a um ponto crítico, e pós-crítico ou secundário, que corresponde a um caminho posterior a um ponto crítico.

Tomando $\{\mathbf{u}^*\}$ como incrementos infinitesimais cinematicamente admissíveis, ou seja, uma perturbação ao campo de deslocamentos $\{\mathbf{u}\}$, pode-se escrever a variação total da energia potencial de acordo com a Equação III-37.

$$\delta\Pi = \Pi(\{\mathbf{u}\} + \{\mathbf{u}^*\}, \lambda) - \Pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda) \equiv \delta^{(1)}\Pi + \frac{1}{2!}\delta^{(2)}\Pi + \frac{1}{3!}\delta^{(3)}\Pi + \dots \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-37} \end{array}$$

onde as quatro primeiras variações da energia potencial, de acordo com Antonini (1986), podem ser dadas, em termos das perturbações $\{\mathbf{u}^*\}$, por:

$$\delta^{(1)}\Pi = \{\mathbf{u}^*\}^T \cdot \left\{ \left[([\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_0]) + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}\})] + \frac{1}{6} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}\} - \lambda \cdot \{\mathbf{F}\} \right\}$$

$$\delta^{(2)}\Pi = \{\mathbf{u}^*\}^T \cdot \left[([\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_S]) + [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}\})] + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}^*\} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-38} \end{array}$$

$$\delta^{(3)}\Pi = \{\mathbf{u}^*\}^T \cdot \left[[\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}^*\})] + [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}^*\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}^*\}$$

$$\delta^{(4)}\Pi = \{\mathbf{u}^*\}^T \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}^*\}, \{\mathbf{u}^*\})] \cdot \{\mathbf{u}^*\}$$

O PEEPT estabelece que sistemas solicitados por carregamentos conservadores em estado de equilíbrio estático, sob quaisquer deslocamentos $\{\mathbf{u}\}$ cinematicamente admissíveis, devem apresentar a variação da energia potencial total estacionária. A Equação III-39 simplifica este princípio ao desconsiderar a contribuição das parcelas de mais alta ordem dessa variação ($\delta^{(2)}\Pi$, $\delta^{(3)}\Pi$, $\delta^{(4)}\Pi$, ...).

$$\delta^{(1)}\Pi = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-39} \end{array}$$

Da Equação III-39, obtém-se a equação de equilíbrio não-linear para um sistema estrutural discretizado, dada pela Equação III-40, onde as incógnitas naturais do

problema são os deslocamentos $\{\mathbf{u}\}$ a serem calculados para um determinado incremento de carga λ .

$$\left[([\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_0]) + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}\})] + \frac{1}{6} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}\} = \lambda \cdot \{\mathbf{F}\} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-40} \end{array}$$

Vale ressaltar que as matrizes de rigidez podem ser divididas em dois grupos de acordo com suas dependências em relação ao deslocamento, isto é, matrizes não dependentes dos deslocamentos, $[\mathbf{K}_G]$ e $[\mathbf{K}_0]$, e matrizes dependentes, $[\mathbf{K}_1]$ e $[\mathbf{K}_2]$.

Na análise do contínuo não-linear, para determinar a evolução das propriedades do meio analisado iterativamente, é necessário tomar uma determinada descrição como referência. Em análises estruturais, o referencial lagrangeano, no qual se acompanha o movimento da partícula em relação ao seu ponto de origem, que pode ser atualizado ou não, é preferido em relação ao referencial euleriano, o qual se refere a um ponto fixo no espaço e se analisa os fluxos de matéria que por ele transcorrem (muito utilizados em problemas de escoamentos).

O referencial lagrangeano pode, pois, ser dividido em referencial lagrangeano total (RLT) e referencial lagrangeano atualizado (RLA). O RLT toma como ponto de referência para a realização de seus cálculos o sistema descarregado, enquanto o RLA considera cada ponto de equilíbrio calculado como ponto de referência para o cálculo do ponto seguinte. Desse modo, o RLT é uma particularização do RLA na qual o sistema referencial a geometria da estrutura não é atualizada a cada incremento de carga.

A formulação incremental do equilíbrio, supondo um ponto de equilíbrio conhecido $(\{\mathbf{u}^E\}, \lambda^E \cdot \{\mathbf{F}\})$ e a sujeição a um acréscimo de carregamento, $\Delta\lambda \cdot \{\mathbf{F}\}$, permite-nos calcular um novo ponto de equilíbrio, $(\{\mathbf{u}^E + \Delta\mathbf{u}\}, (\lambda^E + \Delta\lambda) \cdot \{\mathbf{F}\})$, o qual deve ser determinado pela solução da Equação III-41.

$$\left[([\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_0]) + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}^E + \Delta\mathbf{u}\})] + \frac{1}{6} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}^E + \Delta\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}^E + \Delta\mathbf{u}\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}^E + \Delta\mathbf{u}\} = (\lambda^E + \Delta\lambda) \cdot \{\mathbf{F}\} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-41} \end{array}$$

Essa formulação pode ser simplificada para:

$$[[\mathbf{K}_T^E] + [\mathbf{K}_{NL}^E]] \cdot \{\Delta \mathbf{u}\} = \Delta \lambda \cdot \{\mathbf{F}\}$$

Equação

III-42

onde $[\mathbf{K}_T^E]$ e $[\mathbf{K}_{NL}^E]$ são denominadas de matriz de rigidez tangente e matriz de rigidez não-linear, respectivamente. A Equação III-43 descreve ambas as matrizes. Vale ressaltar que o sobre escrito (*)^E refere-se ao ponto de equilíbrio ao qual o referencial de cálculo foi adotado. A Figura III-4 ilustra ambos os referenciais lagrangeanos bem como as contribuições das matrizes tangente ($[\mathbf{K}_T^E]$), não-linear ($[\mathbf{K}_{NL}^E]$) e secante ($[\mathbf{K}_S^E]$) na aproximação do caminho de equilíbrio.

$$[\mathbf{K}_T^E] = ([\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_0]) + [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}^E\})] + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}^E\}, \{\mathbf{u}^E\})]$$

Equação

III-43

$$[\mathbf{K}_{NL}^E] = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\Delta \mathbf{u}\})] + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\Delta \mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}^E\})] + \frac{1}{6} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\Delta \mathbf{u}\}, \{\Delta \mathbf{u}\})]$$

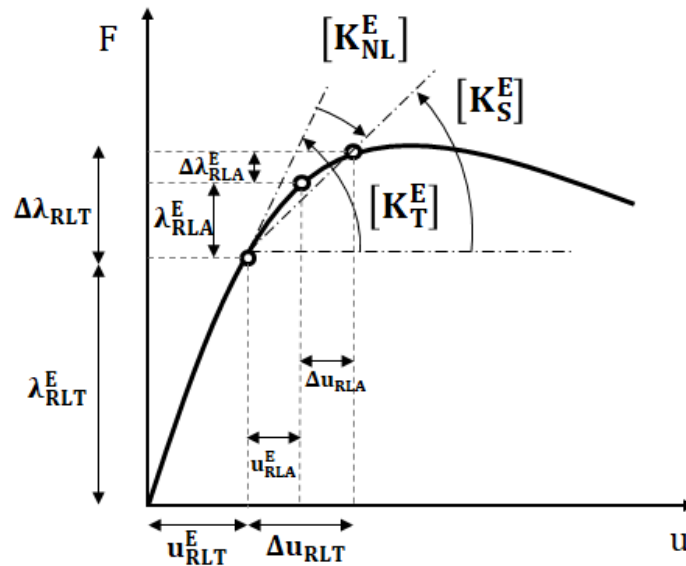


Figura III-4 – Equilíbrio incremental nos referenciais lagrangeanos total e atualizado.

Vale observar, como foi ressaltado por Alves (1995) e enfatizado na Seção III.4.5. , que a aproximação da carga crítica está diretamente associada à matriz de rigidez tangente do sistema discreto analisado. Ademais, o processo iterativo não permite a detecção dos caminhos secundários para o caso de pontos críticos do tipo

bifurcação, apenas para pontos limites, ou seja, aqueles representados por inflexões no traçado de equilíbrio fundamental ($\lambda \times u$) do sistema em relação ao carregamento²⁹.

O processo iterativo simples tende a ser bastante oneroso do ponto de vista computacional, pois, para a fidelidade da resposta, incrementos de cargas bastante pequenos são recomendados (Stark, 1979). Técnicas mais sofisticadas do que o processo meramente iterativo podem ser empregadas. Uma dessas técnicas consiste em associar algoritmos de Newton-Raphson à Técnica de Comprimento de Arco Constante (TCAC) (Crisfield, 1991).

Conforme ensina o trabalho de Alves (1995), para garantir maior acurácia da aproximação do traçado pós-crítico, são necessárias algumas considerações, como, por exemplo, a implementação da restrição imposta pela TCAC, além da exclusão dos movimentos de corpo rígido na fase de correção do algoritmo de Newton-Raphson e da consideração da contribuição média dos termos quadráticos das rotações nas matrizes de rigidez.

Entretanto, como o foco principal do trabalho não é o traçado do comportamento pós-crítico³⁰ dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis, mas sim o estudo quantitativo e qualitativo dos pontos de instabilidade, de suas cargas críticas e de seus modos associados, pode-se desprezar tais considerações sem maiores prejuízos para o entendimento do mecanismo de instabilidade lateral desses arames. Para resolver as equações não-lineares de equilíbrio, utilizou-se, portanto, o método de Newton-Raphson, devido a sua maior eficiência em relação à solução por iteração simples, associando-o ao RLA. O algoritmo desenvolvido para a solução desse problema pode ser visto na Seção III.4.7.

²⁹ Para melhor distinção dos pontos críticos ver Seção III.4.5. , (Koiter, 1945), (Alves, 1995) ou (Antonini, 1986).

³⁰ Vale ressaltar que Østergaard (2012) define em seus experimentos duas janelas de cargas, uma mais conservadora, que apenas leva em consideração o desencadeamento da instabilidade lateral dos arames – considerada para efeitos de comparação neste trabalho –, e outra menos conservadora, a qual é marcada pela falha do duto. Dada as deformações observadas, acredita-se que os efeitos da plasticidade são essenciais para a representação do comportamento pós-crítico, que vai da flambagem elástica à falha do duto, principalmente em arames que não utilizam aços de alta resistência, como foi o caso dos dutos de 6” estudado pelo dinamarquês. Ademais, deve-se levar em consideração, na região de equilíbrio pós-crítico o contato lateral entre os arames adjacentes (Caleyron, et al., 2017). Ambas as observações extrapolam os limites da formulação proposta.

III.4.5. Análise de instabilidade pelo MEF

O método do equilíbrio adjacente ou TP, apresentado em Brush & Almroth (1975), consiste em analisar como o equilíbrio de uma estrutura se porta na vizinhança de um ponto de equilíbrio conhecido. Essa análise consiste na busca por caminhos de equilíbrios³¹ adjacentes, pós-crítico ou secundário, ao caminho de equilíbrio fundamental, ou primário. A Figura III-5 ilustra os principais pontos e caminhos de equilíbrio de uma estrutura genérica.

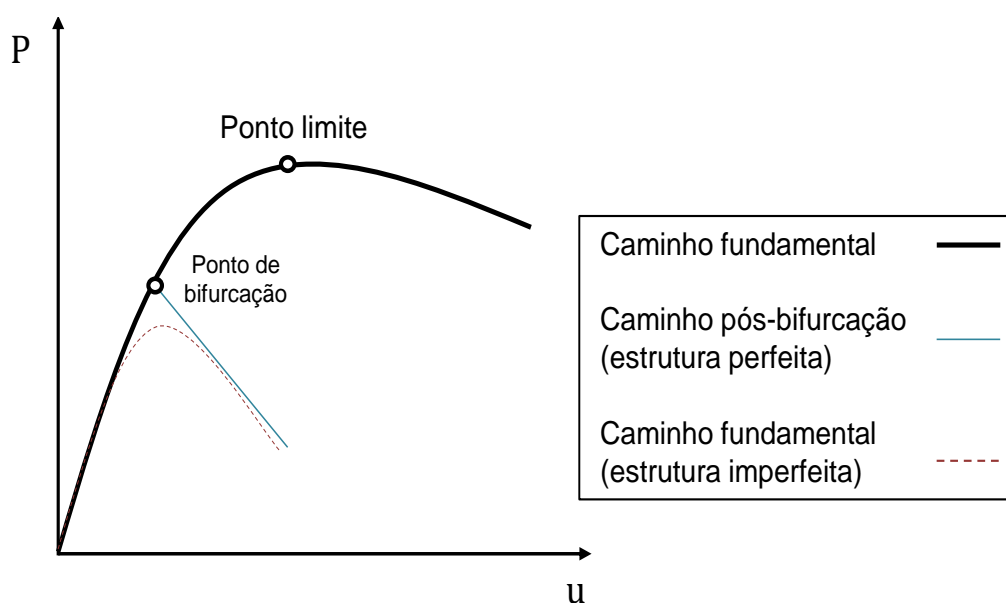


Figura III-5 – Caminhos de equilíbrios.

Caminhos secundários são aqueles que emergem de um ponto crítico, ao passo que o caminho fundamental é aquele traçado do início do carregamento à ocorrência de um ponto crítico. Ambos os pontos ressaltados na Figura III-5, o **ponto limite** e o **ponto de bifurcação**³², são conhecidos como pontos críticos. Os pontos limites estão

³¹ Por caminho de equilíbrio, deve-se entender a representação gráfica da variação da amplitude do carregamento em função de um determinado grau de liberdade da estrutura, escolhido a fim de caracterizar o comportamento estrutural analisado.

³² Nesse ponto, é interessante ressaltar que apenas devemos chamar de flambagem os fenômenos desencadeadores de pontos de bifurcação. Não se adotou estritamente tal rigor no corpo da tese, porque se buscou não contrariar a nomenclatura já consolidada pela indústria *offshore*, flambagem dos arames das armaduras de tração. Essa nomenclatura é erroneamente aplicada à perda de rigidez axial do duto flexível, oriunda de qualquer mudança de configuração dos arames das armaduras de tração. No entanto, tal mudança de configuração pode ser associada a fenômenos que não devem ser associados à flambagem, mas, como no caso da flambagem lateral, a atribuições de efeitos diversos, como: a desorganização dos

associados diretamente ao aumento progressivo dos deslocamentos, com maior ou menor não-linearidade, que seguem um modo de deformação específico presente desde o início do carregamento. Já os pontos de bifurcação, presentes em estruturas resistentes a carregamentos majoritariamente axiais, como é o caso da viga de Euler, estão associados a modificações súbitas e expressivas do modo de deformação; ou seja, modos alternativos de deformação, geralmente ortogonais aos modos fundamentais, são “ativados” à medida que o ponto de bifurcação é ultrapassado (Brush & Almroth, 1975).

Segundo Alves (1995), podem-se citar ao menos quatro técnicas numéricas para investigar o mecanismo de instabilidade de estruturas. Três são baseadas em análises não-lineares, ou seja, a **análise assintótica clássica** (Roorda & Chilver, 1970)³³; a **análise assintótica modal** (Carnoy, 1981)³⁴ e a **análise incremental** (Riks, 1979)³⁵; e uma se baseia na linearização das equações de instabilidade das estruturas, isto é, a **análise de autovalor** (Bathe, 2006).

Ressalta-se que a análise incremental, mais utilizada na determinação do caminho pós-crítico, não tem a capacidade de avaliar o mecanismo de flambagem sem a inserção de pequenas imperfeições à estrutura perfeita, seja na forma de forças ou momentos na estrutura ou de pequenas deformações iniciais em sua geometria, com exceção de estruturas que tenham seus modos críticos não-ortogonais aos seus modos fundamentais. Ambas as situações despertam determinados modos críticos da estrutura, que serão seguidos na evolução do caminho pós-crítico (Bathe, 2006).

Essa técnica é conhecida como **destruição dos pontos de bifurcação**, pois as deformações iniciais ou os carregamentos impostos acabam com a singularidade característica de um ponto de bifurcação e induzem a estrutura a percorrer determinado

arames proveniente dos efeitos dissipativos do atrito experimentado devido aos ciclos de flexão e a própria instabilidade advinda de arames que portam pequenas imperfeições iniciais em sua geometria.

³³ Utilizam-se séries de potências para determinar os deslocamentos e as cargas, alternadamente, como forma de aproximação dos caminhos de equilíbrio da estrutura. Tem baixo custo computacional, mas não captam zonas de forte não-linearidade (Alves, 1995).

³⁴ Empregam-se formas modais para aproximar os deslocamentos em processo semelhante ao método de Rayleigh-Ritz. De posse dos modos, o trabalho numérico se resume à solução de sistemas não-lineares. Tem como desvantagem a indeterminação de regra para definir os modos de maior impacto na resposta (Alves, 1995).

³⁵ Divide-se o carregamento total em passos de cargas e utilizam-se formulações não-lineares para a solução de cada passo, usualmente através da TCAC, tendo em conta a influência dos estados anteriores. Obtém-se uma solução mais precisa das equações, porém tem-se um custo computacional bastante elevado.

caminho de equilíbrio associado ao modo estimulado pelas deformações e/ou carregamentos impostos. Dessa forma, cria-se um caminho assintótico ao ponto de bifurcação ao qual o equilíbrio secundário tende a seguir, conforme ilustra a Figura III-5 (Alves, 1995).

As análises assintóticas e de autovalor, apesar de suas deficiências, são as únicas que possibilitam o estudo de estruturas perfeitas (Antonini, 1986). O foco deste trabalho é nas análises de autovalores, pois, apesar de se limitarem as informações referentes às cargas e seus modos críticos associados, não é de conhecimento do autor nenhum trabalho que aborde tal tema para os arames das armaduras de tração de dutos flexíveis. Apesar da ênfase dada às análises de autovalor, será necessária a apresentação de conceitos básicos das análises assintóticas e incrementais, as quais foram utilizadas como ferramentas complementares ao estudo da instabilidade das armaduras de tração.

As análises de autovalores podem ser divididas em três tipos:

- as **análises clássicas**³⁶ de autovalores, que consistem na solução “computacionalmente econômica” da Equação III-44 (Zienkiwicz, 1977) e fornecem bons resultados para estruturas de comportamento majoritariamente extensional, isto é, com pouca influência da ação dos momentos fletores no seu comportamento fundamental;

$$\{[K_0] + \lambda_i \cdot [K_G]\} \cdot \{u^*\}_i = 0$$

Equação

III-44

- as **análises de autovalores consistentes**, que propiciam maior acurácia da matriz de rigidez geométrica, principalmente, no que tange a contribuição da flexão;
- e as **análises de autovalores atualizadas**, ilustrada pela Figura III-8, que visam a corrigir a deformação da estrutura através de incrementos de cargas sucessivos, únicos ou de aproximações do caminho de equilíbrio assintótico.

³⁶ As análises clássicas de autovalores buscam o ponto no qual seja possível a ocorrência de deslocamentos sem que haja incremento na carga aplicada sobre a estrutura, ou seja, a estrutura, nessa situação, apresentaria perda total de sua rigidez. Essa análise, contudo, não permite que seja afirmado nada sobre a estabilidade do equilíbrio da estrutura, pois essa perda de rigidez refere-se a deslocamentos infinitesimais em torno de um ponto da estrutura (Alves, 1995).

As análises atualizadas tendem a aproximar melhor a carga crítica para estruturas que apresentam deslocamentos pré-flambagem significativos (Tabarrok & Xiong, 1989) e influências moderadas a grandes dos efeitos de flexão em seu comportamento estrutural (Antonini, 1986).

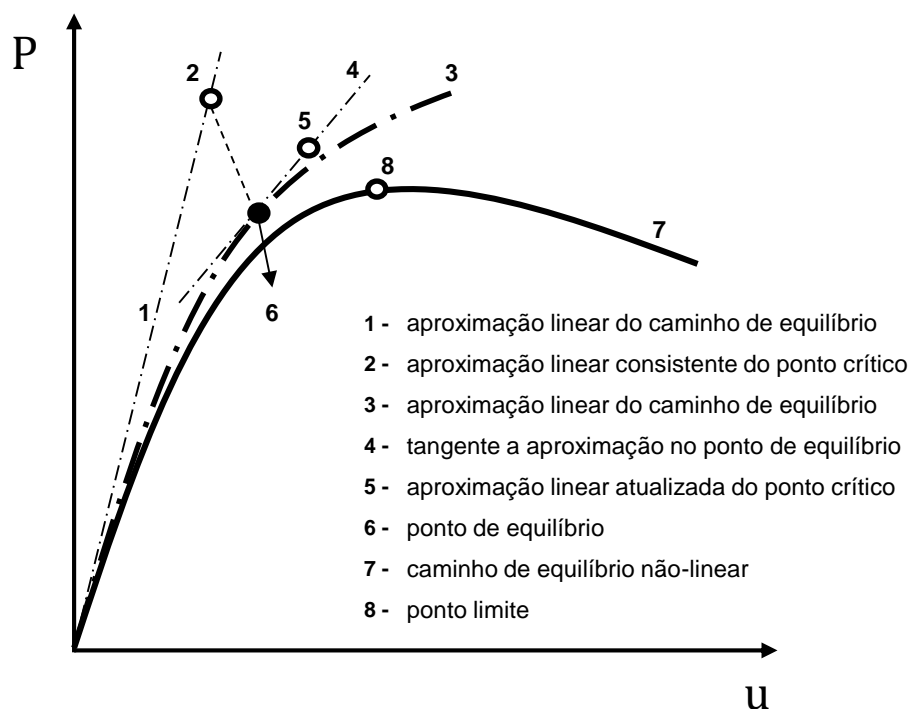


Figura III-6 – Atualização do problema de autovalor.

Para a dedução da formulação consistente e da atualizada, é necessário trabalhar segundo os critérios da TEE (Koiter, 1945) na qual se estuda o equilíbrio e a estabilidade mediante análises das variações da energia potencial total do sistema. Essa metodologia permite determinar, além dos pontos críticos, seus tipos e natureza³⁷, assim como a natureza dos caminhos secundários. A EPT de um sistema genérico, formulada para elementos finitos, em uma dada configuração $\{\mathbf{u}\}$, é apresentada pela Equação III-45.

³⁷ Quando se refere à natureza de um ponto crítico e/ou de um caminho de equilíbrio, refere-se à sua estabilidade, ou seja, se estável ou instável.

$$\Pi(\{\mathbf{u}\}) = \{\mathbf{u}\}^T \cdot \left\{ \left[\frac{1}{2} \cdot ([\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_0]) + \frac{1}{6} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}\})] + \frac{1}{24} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}\} - \lambda \cdot [\mathbf{F}] \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-45} \end{array}$$

Para determinar se um sistema tem equilíbrio estável ou instável, pode-se lançar mão do **teorema de Lagrange**³⁸, que descreve o equilíbrio estável de um sistema como aquele que apresenta um mínimo relativo no funcional de energia potencial total quando comparado a todas as energias potenciais totais de configurações vizinhas cinematicamente admissíveis (Koiter, 1945).

Por conseguinte, as informações referentes à estabilidade do equilíbrio são obtidas pelo estudo da segunda variação da energia potencial total. Caso $\delta^{(2)}\Pi$ (Equação III-45) seja positiva, tem-se definido um equilíbrio estável; caso seja negativa, um equilíbrio instável. A condição de estado de equilíbrio crítico é buscada no limiar entre essas posições antagônicas, ou seja, quando a segunda variação da energia potencial for nula, como demonstra a Equação III-46.

$$\delta^{(2)}\Pi \equiv 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-46} \end{array}$$

Dessa forma, tem-se:

$$\delta^{(2)}\Pi \equiv \{\mathbf{u}^*\}^T \cdot \left[([\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_0]) + [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}\})] + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{u}\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}^*\} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-47} \end{array}$$

$$\delta^{(2)}\Pi \equiv \{\mathbf{u}^*\}^T \cdot [\mathbf{K}_T^E] \cdot \{\mathbf{u}^*\} = 0$$

³⁸ Tal teorema atesta que “em um estado de equilíbrio estático no qual a EPT é um mínimo local isolado é necessariamente estável”.

De posse de um ponto de equilíbrio genérico ($\{\mathbf{u}^E\}, \lambda^E$), é possível definir a forma quadrática da matriz de rigidez tangente, $[\mathbf{K}_T^E]$, e a taxa de variação de deslocamento nesse ponto, $\{\Psi\}$, que representa o modo fundamental de deslocamentos pré-críticos, de acordo com a Equação III-48.

$$\{\Psi\} = [\mathbf{K}_T^E]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}\} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-48} \end{array}$$

Utilizando a taxa de deslocamento dada pela Equação III-48, estimam-se os deslocamentos obtidos por um nível de carga λ , conforme ilustra a Equação III-49.

$$\{\mathbf{u}\} \cong \{\mathbf{u}^E\} + (\lambda - \lambda^E) \cdot \{\Psi\} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-49} \end{array}$$

Conforme demonstrou Antonini (1986), o problema não-linear de autovalor característico dos sistemas estruturais por elementos finitos é obtido ao substituir as aproximações dos deslocamentos (Equação III-49) na equação de equilíbrio crítico (Equação III-47), dado pela Equação III-50.

$$\left[[\mathbf{K}_T^E] + (\lambda - \lambda^E) \cdot ([\mathbf{K}_1(\{\Psi\})] + [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}^E\}, \{\Psi\})]) + \frac{(\lambda - \lambda^E)^2}{2} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\Psi\}, \{\Psi\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}^*\} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-50} \end{array}$$

Essa equação pode ainda ser linearizada ao se desconsiderar os termos não-lineares de carga. Obtém-se, assim, a expressão que origina o problema de autovalor atualizado:

$$[[\mathbf{K}_T^E] + \Lambda \cdot ([\mathbf{K}_1(\{\Psi\})] + [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}^E\}, \{\Psi\})])] \cdot \{\mathbf{u}^*\} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-51} \end{array}$$

onde $\Lambda = (\lambda - \lambda^E)$ e $\{\mathbf{u}^E\}$ representa um ponto de equilíbrio conhecido, o qual deve ser estimado levando em consideração o caminho de equilíbrio não-linear do sistema analisado, seja mediante a resolução iterativa das equações não-lineares de equilíbrio, o que torna o problema bastante oneroso, seja mediante a utilização de técnicas que permitam aproximar o caminho de equilíbrio fundamental, como é o caso das aproximações assintóticas descritas na Seção III.4.6. .

Alves (1995) observa que duas simplificações são aplicadas ao problema: a primeira relacionada ao truncamento da parcela não-linear, dada na passagem da Equação III-50 para a Equação III-51, e a linearização dos deslocamentos apresentada na Equação III-49. Ademais, pode-se ainda, para o caso de baixas não-linearidades do comportamento pré-crítico, adotar uma simplificação adicional ao não se considerar a atualização de referencial no problema. Para esse caso específico, pode-se adotar o ponto de equilíbrio conhecido, $\{\mathbf{u}^E\}$, como a origem dos deslocamentos, ou seja, adotar $\{\mathbf{u}^E\} = 0$. Dessa forma, a parcela correspondente à matriz $[\mathbf{K}_2]$ se anula e recai-se na Equação III-52, chamada de problema de autovalor consistente por Alves (1995) e Antonini (1986).

$$\left[[\mathbf{K}_T^E] + \lambda \cdot [\mathbf{K}_1(\{\Psi\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}^*\} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-52} \end{array}$$

III.4.6. Aproximações assintóticas

As análises de autovalor apresentadas apenas fornecem as cargas críticas e seus modos associados. Não possibilitam, pois, que se extraiam nenhuma informação adicional sobre a estabilidade dos estados críticos e pós-críticos dos sistemas estudados ou mesmo sobre o tipo de ponto crítico obtido. A aplicação de técnicas frontais, ou seja, técnicas iterativas para a resolução do sistema não-linear das equações de equilíbrio, tampouco garantem o acesso a tais informações, uma vez que, por exemplo, tais técnicas não são capazes de captar pontos de bifurcação.

Koiter (1945), ao sistematizar a TEE, emprega a TP sobre os funcionais de energia potencial total para analisar a estabilidade de sistemas contínuos. O método de Koiter (1945) foi posteriormente adaptado para sua utilização em elementos finitos em

diversos trabalhos, como em Haftka *et al.* (1971) ou em Batista *et al.* (1991). Com o intuito de investigar as qualidades dos estados críticos, a TP deve ser utilizada. Em sistemas discretos, aproximações assintóticas do caminho fundamental e pós-crítico de uma estrutura a partir de um ponto de equilíbrio dado podem ser determinadas mediante a aplicação de tal técnica. Ademais, caso o ponto analisado seja um ponto crítico, informações sobre sua estabilidade e seu tipo (bifurcação ou limite) podem ser obtidas, conforme ressalta Antonini (1986).

A TP consiste em analisar a vizinhança de estados de equilíbrio conhecidos ($\{\mathbf{u}^E\}, \lambda^E$) através de incrementos cinematicamente admissíveis ao campo dos deslocamentos e de carga (Brush & Almroth, 1975). Pode-se, portanto, escrever tais campos em função de um parâmetro qualquer, α , que defina adequadamente o avanço ao longo do caminho fundamental, e dos campos de deslocamentos aproximados e suas cargas correspondentes, obtidos pelo PEEPT, conforme a Equação III-53.

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}^E\} + \alpha \cdot \{\mathbf{u}_1\} + \alpha^2 \cdot \{\mathbf{u}_2\} + \alpha^3 \cdot \{\mathbf{u}_3\} \dots = \{\mathbf{u}^E\} + \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \{\mathbf{u}_i\} \quad \text{Equação III-53}$$

$$\lambda = \lambda^E + \alpha \cdot \lambda_1 + \alpha^2 \cdot \lambda_2 + \alpha^3 \cdot \lambda_3 + \dots = \lambda^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \lambda_i$$

Dessa forma, substituindo as aproximações, apresentadas na Equação III-53, na equação de equilíbrio (Equação III-40) e anulando as parcelas em equilíbrio, têm-se:

$$\left\{ ([\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_0]) + \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{K}_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \{\mathbf{u}_i\} \right) \right] + \frac{1}{6} \cdot \left[\mathbf{K}_2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \{\mathbf{u}_i\}, \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \{\mathbf{u}_i\} \right) \right] \right\} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \{\mathbf{u}_i\} = \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \lambda_i \cdot \{\mathbf{F}\} \quad \text{Equação III-54}$$

Observando as propriedades das matrizes de rigidez descritas nos trabalhos de Antonini (1986) e, posteriormente, de Alves (1995), aqui reproduzidas no ANEXO A, pode-se reescrever, tendo em vista a sistematização do problema, após certa reordenação algébrica, a equação de equilíbrio para os parâmetros de carga λ_i e para os campos de deslocamentos $\{\mathbf{u}_i\}$ na forma assintótica, como:

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \left\{ ([\mathbf{K}_G] + [\mathbf{K}_0]) \cdot \{\mathbf{u}_i\} - \lambda_i \cdot \{\mathbf{F}\} + \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}_j\})] + \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^{j-1} [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}_k\}, \{\mathbf{u}_{j-k}\})] \right] \cdot \{\mathbf{u}_{i-j}\} \right\} = \mathbf{0} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-55} \end{array}$$

Pode-se separar, de acordo com a potência do fator α , a Equação III-55 em equações individuais que devem ser satisfeitas uma a uma. Essas equações formam um sistema de equações indeterminado, o qual necessita de uma condição de ortogonalidade adicional (Equação III-56) para ser resolvido, conforme aponta Alves (1995) e destaca a própria TP.

$$\{\mathbf{u}_i\}^T \cdot [\mathbf{K}_0] \cdot \{\mathbf{u}_i\} = \mathbf{0} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-56} \end{array}$$

Na forma matricial, após a adoção de uma condição de partida ($\lambda_1 = 1$), o que garante o conhecimento da primeira aproximação dos deslocamentos ($\{\mathbf{u}_1\} = \{\Psi\}$, ver Equação III-48) e da aplicação do método da eliminação de Gauss, que triangulariza o sistema de equações, tal sistema pode ser escrito de acordo com a Equação III-57.

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_0] & -\{\mathbf{F}\} \\ \mathbf{0} & \{\mathbf{u}_i\}^T \cdot \{\mathbf{F}\} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_i\} \\ \lambda_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{K}_j^*] \cdot \{\mathbf{u}_{i-j}\} \\ \{\mathbf{u}_i\}^T \cdot \sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{K}_j^*] \cdot \{\mathbf{u}_{i-j}\} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{III-57} \end{array}$$

onde

$$[\mathbf{K}_1^*] = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}_1\})]$$

$$[\mathbf{K}_2^*] = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}_2\})] + \frac{1}{6} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_1\})]$$

$$[\mathbf{K}_3^*] = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}_3\})] + \frac{1}{6} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{u}_1\})] + \frac{1}{6} \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_2\})]$$

*Equação
III-58*

⋮

$$[\mathbf{K}_j^*] = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{u}_j\})] + \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{j-1} [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{u}_k\}, \{\mathbf{u}_{j-k}\})]$$

Desse sistema, obtêm-se as expressões gerais que caracterizam os termos de carga e os campos de deslocamentos que conformam a aproximação assintótica do caminho de equilíbrio, dada pela Equação III-59.

$$\lambda_i = \frac{\{\mathbf{u}_1\}^T \cdot (\sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{K}_j^*] \cdot \{\mathbf{u}_{i-j}\})}{\{\mathbf{u}_1\}^T \cdot \{\mathbf{F}\}}$$

Equação

$$\{\mathbf{u}_i\} = [\mathbf{K}_0]^{-1} \cdot \left(\lambda_i \cdot \{\mathbf{F}\} - \sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{K}_j^*] \cdot \{\mathbf{u}_{i-j}\} \right)$$

III-59

Substituindo os termos encontrados para λ_i e $\{\mathbf{u}_i\}$ na Equação III-53, acham-se as aproximações assintóticas do equilíbrio. Logo, da aproximação assintótica, pode-se estimar pontos de equilíbrios não-lineares assintóticos $(\{\mathbf{u}^E\}, \lambda^E)$, de acordo com o exposto pela Equação III-53 ou pela Equação III-60, a qual pode ser reintroduzida no problema de autovalor atualizado para evitar a necessidade da resolução numérica das equações de equilíbrio não-lineares.

$$(\{\mathbf{u}^E\}, \lambda^E) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \{\mathbf{u}_i\}, \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \lambda_i \right)$$

Equação

III-60

Para se obter informações sobre o ponto crítico, deve-se resolver a análise de autovalor consistente (Equação III-52), da qual os modos, $\{\mathbf{u}^*\}$, e as cargas críticas, λ_{cr} , são obtidos. Uma aproximação linear dos deslocamentos ($\{\mathbf{u}_i^{TL}\}$) é obtida fazendo:

$$\lambda_{cr} = \alpha \quad \text{Equação}$$

$$\{\mathbf{u}_i^{TL}\} = \alpha \cdot \{\mathbf{u}_1\} \quad \text{III-61}$$

Com isso feito, calculam-se os parâmetros de carga e deslocamento de primeira e segunda ordem pelas resoluções da Equação III-59. Caso o primeiro coeficiente da aproximação assintótica de carga do caminho secundário seja diferente de zero ou igual a zero, mas com o segundo coeficiente negativo, tem-se que o ponto crítico apresenta equilíbrio instável; caso o primeiro coeficiente seja nulo e o segundo seja positivo, tem-se que o ponto crítico apresenta equilíbrio estável (Koiter, 1945).

III.4.7. Solução numérica dos problemas de autovalor e de traçado do caminho de equilíbrio

Para obtenção das cargas e dos modos críticos de flambagem lateral de dutos flexíveis de maneira consistente, deve-se resolver iterativamente a Equação III-51. Utiliza-se, na atualização das matrizes de rigidez, as variações de curvaturas calculadas a cada passo por meio do RLA, descritas no APÊNDICE B. Essa técnica é comumente empregada na análise não-linear de estruturas e possibilita, no problema de autovalores atualizado, melhor aproximação de carga crítica de estruturas que apresentem deslocamentos significativos durante o equilíbrio fundamental.

Os passos do processo iterativos são exemplificados no fluxograma da Figura III-7. Processo iterativo semelhante ao apresentado nesta tese foi proposto por Tabarrok & Xiong (1992), o qual buscava analisar a flambagem de vigas naturalmente curvas. Três considerações devem ainda ser feitas acerca do algoritmo proposto pelo fluxograma da Figura III-7 a fim de elucidar os passos tomados; são elas:

- i. O método utilizado para resolver o problema de autovalor (*Passos 1 e 3*) é chamado de método de decomposição ortogonal QZ (Golub & Loan, 1996), o qual é eficiente no tratamento de matrizes simétricas;

- ii. O critério de convergência utilizado (*Passo 4*) é baseado exclusivamente na relevância à engenharia das cargas obtidas, isto é, a comparação entre a carga crítica da i -ésima iteração, em relação à carga crítica obtida na iteração anterior, deve ser inferior a uma pequena porcentagem (por volta de 1%).
- iii. Alternativamente à resolução numérica, em cada incremento de carga, da solução de equilíbrio (Equação III-42), pode-se aproximar o traçado de equilíbrio pela aproximação assintótica (Equação III-59), o que desonera computacionalmente o problema.

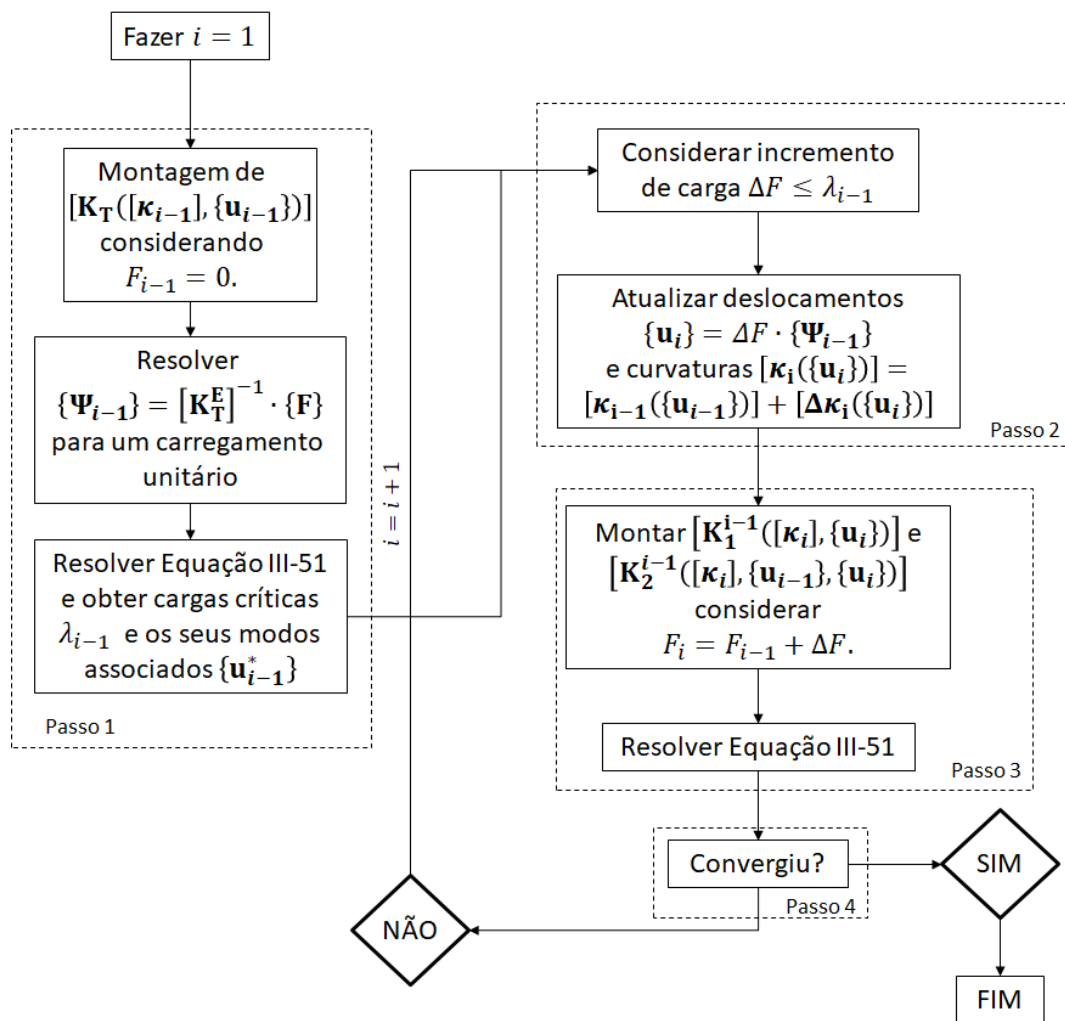


Figura III-7 – Esquema do algoritmo usado para a solução do problema de autovalor não-linear.

Para a obtenção do traçado de equilíbrio fundamental não-linear, foi utilizada a o método numérico de Newton-Raphson. Stark (1979) define esse método como uma aproximação dos valores reais de funções contínuas ou diferenciais mediante o uso de

sucessivas retas tangentes em cada ponto e para a determinação do ponto seguinte. O algoritmo proposto pode ser dividido em duas fases: a de predição e a de correção. No caso específico do problema analisado, a tentativa inicial de estimar soluções parte da matriz tangente, $[K_T]$, de um ponto de equilíbrio conhecido $(\lambda^E, \{u^E\})$. Já a fase de correção, lança mão da matriz de rigidez secante, $[K_S]$, para calcular o resíduo obtido pela matriz tangente e, posteriormente, corrigir tal matriz e refazer os cálculos de maneira iterativa com o objetivo de manter a norma do resíduo dentro da tolerância especificada. Todos os métodos foram implementados em ambiente MATLAB® (MATLAB, 2017)

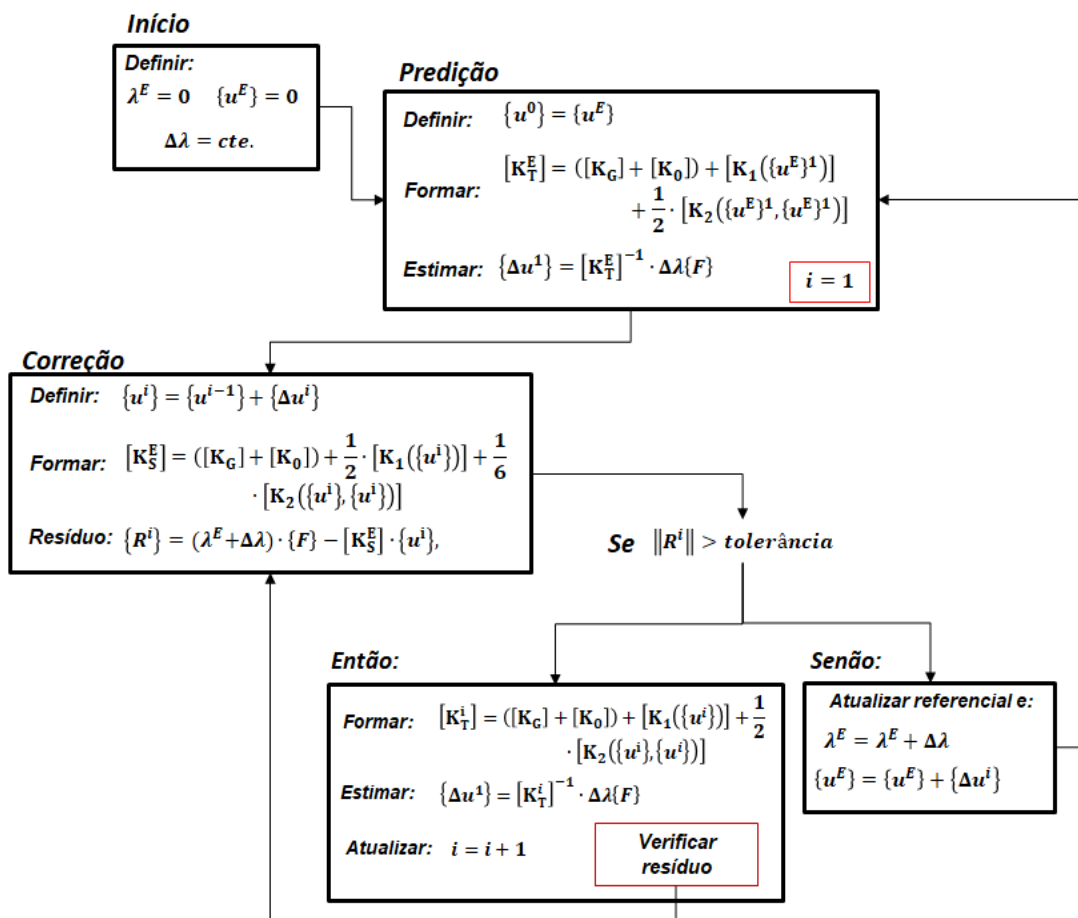


Figura III-8 – Esquema do algoritmo de Newton-Raphson usado para a solução iterativa da equação de equilíbrio não-linear.

A seguir, a Figura III-9 é apresentada com o intuito de elucidar o algoritmo utilizado, mediante a visualização gráfica dos significados matemáticos das fases de predição e de correção presentes no algoritmo de Newton-Raphson para um traçado de equilíbrio genérico.

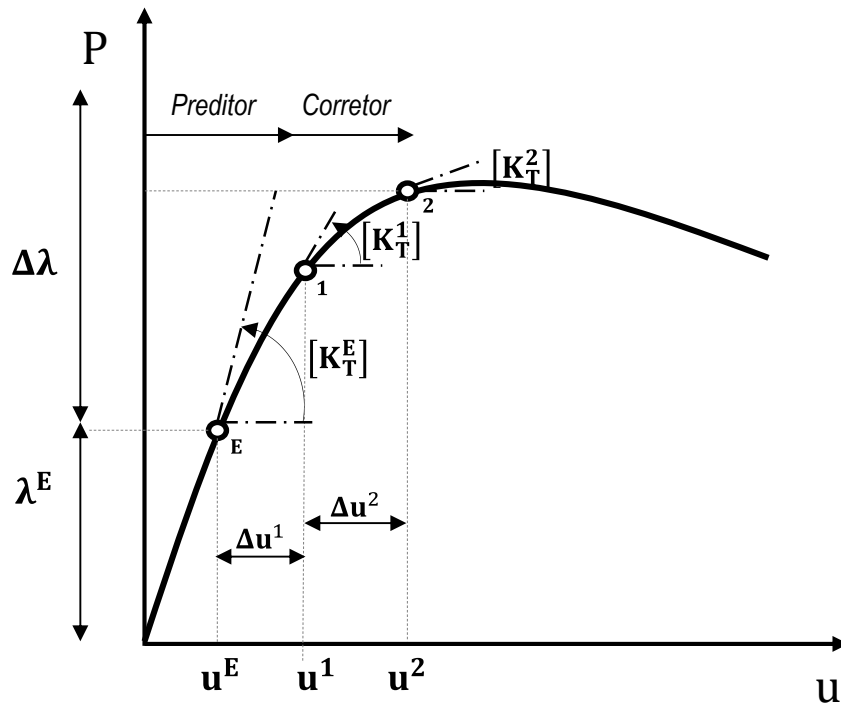


Figura III-9 – Algoritmo de Newton-Raphson e suas fases de predição e de correção.

CAPÍTULO IV

ESTUDO DE CASOS

IV.1. Apresentação

Neste capítulo, quatro *risers* flexíveis, com 6”, 8”, 9,5” e 14” de diâmetro nominal, são analisados, através das metodologias propostas no capítulo anterior, quanto à flambagem lateral de seus arames das armaduras de tração. A escolha desses dutos foi tomada porque essas estruturas foram analisadas por diversos autores, tanto teórica quanto experimentalmente.

Antes de entrar no estudo de instabilidade será feita a apresentação das características físicas e geométricas dos dutos analisados, das condições de contorno utilizadas e das características de malha do modelo de elementos finitos. Um estudo de validação do comportamento do modelo de elementos finitos será apresentado, no qual os resultados numéricos e os obtidos através da expressão analítica proposta por Féret & Bournazel (1987) são comparados. Essa comparação visará validar os modelos quanto ao comportamento mecânico axial à tração e à torção, mas principalmente ao acoplamento entre esses mecanismos.

Tendo atendido o comportamento característico de acoplamento tração-torção dos arames das armaduras de tração, passa-se ao estudo da instabilidade lateral elástica

dos arames das estruturas citadas. Nesse estudo, objetivou-se aventar os métodos de análises propostos, caracterizar os pontos de instabilidade, debater a influência do atrito, das condições de contorno, das curvaturas iniciais e dos modos de flambagem sobre a instabilidade lateral.

IV.2. Características físicas e geométricas dos dutos flexíveis

Nesta tese, foram utilizados quatro dutos flexíveis para a averiguação do modelo numérico apresentado. As principais características físicas e geométricas desses dutos encontram-se na Tabela IV-1.

O modelo numérico, que deste ponto em diante passará a ser referido por MVC (Modelo de Viga Curva), foi estudado com uma discretização igual a 40 elementos por passo da armadura, o que nos dá, para modelos completos, com 5 ou 4 passos, um número de elementos igual a 200 ou 160. Quanto às condições de contorno, quando não referidas ao contrário, os arames serão considerados bi-engastados.

Vale dizer que as análises variam quanto ao tempo dispendido. Caso se escolha resolver o problema de autovalor atualizado sem as aproximações assintóticas, o tempo de análise varia entre 5 e 8 min, dependendo da tolerância determinada. Caso as aproximações assintóticas sejam usadas para aproximar o caminho de equilíbrio fundamental não-linear, o tempo de análise cai para aproximadamente 2 minutos. Já as análises lineares e consistentes, são resolvidas em menos de 1 min cada.

A solução iterativa depende do número de passos de carga escolhidos. Para essa escolha, deve-se atentar para a otimização entre o tempo de análise e a acurácia dos resultados. Sugere-se que o incremento de carga seja maior no início da análise, onde se espera o comportamento aproximadamente linear, e diminua gradativamente à medida que os resultados das matrizes de rigidez tangente e secante produzam respostas discrepantes, ou seja, à medida que o comportamento não-linear se acentua.

Tabela IV-1- Características dos dutos flexíveis analisados.

Camada (material)	Dutos Flexíveis			
	6" riser	8" riser	9,5" riser	14" jumper
Armadura interna (aço carbono)	$r = 99,0\text{mm}$	$r = 135,5\text{mm};$	$r = 149,7\text{mm};$	$r = 219,0\text{mm};$
	$w = 10,0\text{mm}$	$w = 12,5\text{mm};$	$w = 10,0\text{mm};$	$w = 15,0\text{mm};$
	$h = 3,0\text{mm}$	$h = 5,0\text{mm};$	$h = 3,0\text{mm};$	$h = 4,0\text{mm};$
	$\phi_0 = 26,2^\circ$	$\phi_0 = 30^\circ;$	$\phi_0 = 30,0^\circ;$	$\phi_0 = 31,5^\circ;$
	$n_{ar} = 52$	$n_{ar} = 54$	$n_{ar} = 74$	$n_{ar} = 70$
Armadura externa (aço carbono)	$r = 103,0\text{mm};$	$r = 142,0\text{mm};$	$r = 152,7\text{mm};$	$r = 224,0\text{mm};$
	$w = 10,0\text{mm};$	$w = 12,5\text{mm};$	$w = 10,0\text{mm};$	$w = 15,0\text{mm};$
	$h = 3,0\text{mm};$	$h = 5,0\text{mm};$	$h = 3,0\text{mm};$	$h = 4,0\text{mm};$
	$\phi_0 = -26,2^\circ;$	$\phi_0 = -30,3^\circ;$	$\phi_0 = -30,0^\circ;$	$\phi_0 = -31,0^\circ;$
	$n_{ar} = 54$	$n_{ar} = 56$	$n_{ar} = 74$	$n_{ar} = 72$
Fita de alta resistência (fibra de aramida)	$h = 1,5\text{mm};$	$h = 1,5\text{mm};$	$h = 2,4\text{mm};$	$h = 1,5\text{mm};$
	$\phi_0 = 83,5^\circ$	$\phi_0 = 88,4^\circ$	$\phi_0 = -$	$\phi_0 = -84,4^\circ$
	$C_\sigma = 27\text{GPa}$	$C_\sigma = 27\text{GPa}$	$C_\sigma = 50\text{GPa}$	$C_\sigma = 27\text{GPa}$
	$\nu = 0,42$	$\nu = 0,42$	$\nu = 0,42$	$\nu = 0,42$
	$\sigma_u = 400\text{MPa}$	$\sigma_u = 400\text{MPa}$	$\sigma_u = 261\text{MPa}$	$\sigma_u = 400\text{MPa}$

IV.3. Resultados

IV.3.1. Verificações preliminares

IV.3.1.1. Comportamento axial e efeito de acoplamento dos arames

Antes de aplicar os modelos descritos no CAPÍTULO III na investigação da instabilidade dos arames das armaduras de tração, é interessante verificar se esses modelos são capazes de representar mecanicamente os arames das armaduras de tração. Para tal, é trazida a formulação analítica de Féret & Bournazel (1987), amplamente

difundida na literatura técnica, que permite captar o efeito de acoplamento tração-torção, mediante a correlação entre a força axial, P , e os deslocamentos e rotações axiais, respectivamente ΔL e $\Delta\phi$, de um arame da armadura de tração de dutos flexíveis. A expressão analítica de Féret & Bournazel (1987) é dada pela Equação IV-1, a qual desconsidera as deformações radiais, isto é, supõem-se os arames assentados sobre um cilindro radialmente rígido.

$$P = C_{\sigma} \cdot A \cdot \cos(\phi_0) \cdot \left[\cos^2(\phi_0) \cdot \frac{\Delta L}{L} + r \cdot \sin(\phi_0) \cdot \cos(\phi_0) \cdot \frac{\Delta\phi}{L} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-1} \end{array}$$

Para o MVC, a força axial resultante P é calculada através da relação entre a força tangencial, P_t , e a força binormal, P_B – dada pela Equação IV-2. Tanto a força tangencial quanto a força binormal são obtidas por meio da resolução da multiplicação da inversa da matriz de rigidez tangente ($[K_T]$) multiplicada pelo vetor de cargas global ($\{F_G\}$), explicitados no CAPÍTULO III (ver Equação III-48). Com esses resultados é possível calcular a força axial equivalente pela mesma relação proposta pela Equação IV-2.

$$P = P_t \cdot \cos(\phi_0) + P_B \cdot \sin(\phi_0) \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-2} \end{array}$$

As Tabela IV-2, Tabela IV-3, Tabela IV-4 e Tabela IV-5 apresentam os valores obtidos para a verificação do comportamento axial do modelo de elementos finitos apresentado por este trabalho frente aos resultados da expressão analítica fornecida por Féret & Bournazel (1987) para um arame da armadura de tração interna de cada um dos dutos apresentados. Dessa forma, os resultados ilustrados pela Tabela IV-2 são referentes ao duto de 6”, ao passo que as Tabela IV-3, Tabela IV-4 e Tabela IV-5 apresentam os resultados referentes aos dutos de 8”, 9,5” e 14”, respectivamente.

Pela análise dos resultados apresentados pelas Tabela IV-2, Tabela IV-3, Tabela IV-4 e Tabela IV-5, pode-se concluir que a representação do comportamento axial, e, conseqüentemente, do acoplamento tração-torção, foi realizada adequadamente.

Os desvios com relação à formulação de Féret & Bournazel (1987) variam entre 1,4% e -1,1%, valores dos casos com maiores divergências.

Tabela IV-2 – Validação do comportamento axial dos diversos modelos gerados para o riser de 6”

$\Delta L/L$	$\Delta\phi/L$	Força Axial Resultante (kN)	
		Féret & Bournazel (1987)	MVC
0,001	0,00	4,55	4,55
0,000	$\pi/180$	8,50	8,50
0,001	$-\pi/180$	-0,60	-0,61
Desvios*:		–	0,0%
		–	-0,0%
		–	-1,1%

Tabela IV-3 – Validação do comportamento axial dos diversos modelos gerados para o riser de 8”.

$\Delta L/L$	$\Delta\phi/L$	Força Axial Resultante (kN)	
		Féret & Bournazel (1987)	MVC
0,001	0,00	8,52	8,53
0,000	$\pi/180$	20,44	20,44
0,001	$-\pi/180$	-3,39	-3,37
Desvios*:		-	-0,1%
		-	-0,0%
		-	0,6%

Tabela IV-4 - Validação do comportamento axial dos diversos modelos gerados para o riser de 9.5”.

$\Delta L/L$	$\Delta\phi/L$	Força Axial Resultante (kN)	
		Féret & Bournazel (1987)	MVC
0,001	0,00	4,09	4,09
0,000	$\pi/180$	10,33	10,32
0,001	$-\pi/180$	-2,14	-2,12
Desvios*:		-	-0,0%
		-	0,1%
		-	0,9%

Tabela IV-5 – Validação do comportamento axial dos diversos modelos gerados para o jumper de 14”.

$\Delta L/L$	$\Delta\phi/L$	Força Axial Resultante (kN)	
		Féret & Bournazel (1987)	MVC
0,001	0,00	7,81	7,81
0,000	$\pi/180$	26,31	26,23
0,001	$-\pi/180$	-10,69	-10,54
Desvios*:		-	-0,1%
		-	0,3%
		-	1,4%

É possível, agora, passar à análise de instabilidade dos arames das armaduras de tração. Essas análises têm como objetivo central a comparação dos resultados obtidos pelo modelo numérico com dados e modelos obtidos da literatura técnica, a fim de verificar sua aplicabilidade.

IV.3.1.2. Influência do comprimento do arame na carga crítica

Uma verificação adicional concerne à sensibilidade da carga crítica calculada para cada arame em relação ao comprimento total considerado. Vários autores, como Østergaard (2012), Gonzalez *et al.* (2017) e Sousa (2005), apresentaram estudos que chegam a conclusões similares, a dizer: a necessidade de representação de pelo menos quatro passos lineares do arame da armadura de tração considerada para se obter uma carga crítica representativa do fenômeno de flambagem lateral.

Isso se dá, pois as condições de contorno exercem influência na resposta à instabilidade da estrutura para comprimentos menores do que o referido, o que não deve ocorrer no campo uma vez que os dutos flexíveis apresentam extensões bastantes mais longas que os quatro passos mencionados. Mesmo se considerarmos apenas a região de máxima curvatura, chamada usualmente de *Touchdown Zone* (TDZ), esse comprimento mínimo (4 passos da armadura interna) tende a ser excedido.

A Figura IV-1 apresenta a comparação entre os resultados apresentados em Østergaard (2012), a extensão da formulação apresentada na Equação IV-3, que visa acrescentar a parcela referente à influência do comprimento, e os resultados obtidos

pelo MVC para apenas um arame da armadura interna do duto de 6”, o qual se mostra bastante convergente com os demais resultados obtidos dos modelos da literatura técnica.

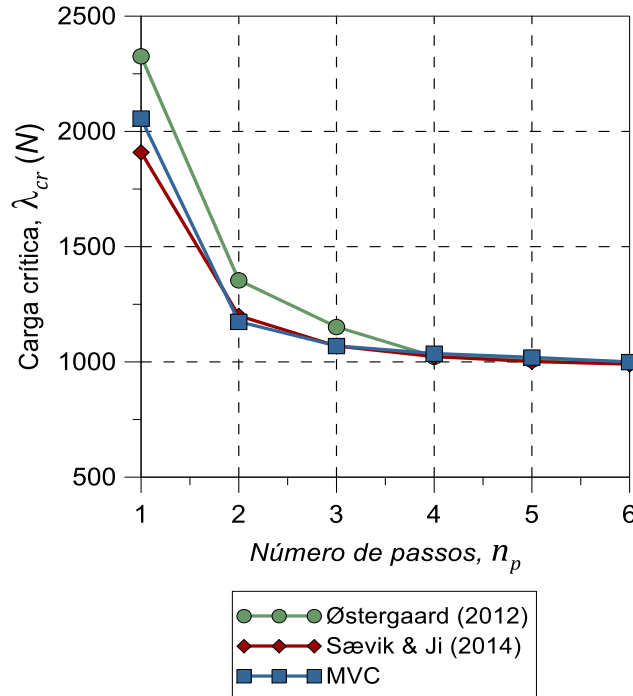


Figura IV-1 – Influência do comprimento do arame ($S = n_p \cdot S_p$) na carga crítica (λ_{cr}).

$$P_{cr} = n_{ar} \cdot \cos(\phi_0) \cdot \left\{ \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot C_\sigma \cdot I_N}{S^2} + \frac{\text{sen}^2(2 \cdot \phi_0)}{4 \cdot r^2} \cdot \left[C_\sigma \cdot I_N + 4 \cdot C_\sigma \cdot I_B - C_\tau \cdot J \cdot \frac{\cos(2 \cdot \phi_0)}{\cos^2(\phi_0)} \right] \right\} \quad \begin{matrix} \text{Equação} \\ \text{IV-3} \end{matrix}$$

IV.3.1.3. Verificação da adequação do modelo de atrito

Faz-se necessário validar a hipótese do uso de fundações elásticas para simularem os efeitos do atrito entre os arames das armaduras de tração e as camadas circundantes. As forças de atrito são comumente descritas como dependentes da velocidade de aplicação. Tal fato impossibilita aplicação dessas forças nas análises clássicas de flambagem, ou seja, nas análises baseadas na determinação de autovalores (ver Seção III.4.5.). Söderberg & Björklun (2008), contudo, propõe um modelo

bastante mais simples em que os efeitos das forças de atrito distribuídas ao longo do comprimento da estrutura, q_f , podem ser simulados por fundações elásticas homogêneas de rigidez constante igual à k_B .

$$q_f = k_B \cdot u_B$$

Equação
IV-4

onde u_B é o deslocamento máximo ao longo da direção binormal.

Se a lei de fricção de Coulomb, que vale para atrito seco, for assumida, tem-se que a força de atrito por unidade de comprimento pode ser escrita em função do coeficiente de atrito, μ , e da pressão normal de contato entre os arames das armaduras de tração e suas camadas circundantes, de acordo com.

$$q_f = \mu \cdot p_N$$

Equação
IV-5

Como a pressão normal de contato depende do carregamento axissimétrico agindo sobre o duto, neste trabalho, presume-se que compressões reais induzem unicamente tensões normais nos arames das armaduras de tração, o que se crê válido, ao menos, até o limite da linearidade do comportamento mecânico. De acordo com Larsen *et al.* (2014), a pressão normal de contato pode ser relacionada com o carregamento axial mediante a consideração da curvatura normal, como mostra a Equação IV-6.

$$p_N = \lambda \cdot \kappa_n$$

Equação
IV-6

Combinando as equações anteriores (Equação IV-5 e Equação IV-6), o coeficiente de atrito pode ser escrito como:

$$\mu = \frac{k_B \cdot u_B}{\lambda \cdot \kappa_n}$$

Equação
IV-7

Dada uma determinada rigidez da fundação elástica, é possível determinar, mediante o uso da Equação IV-7, o coeficiente de atrito equivalente. Contudo, o deslocamento na direção binormal não é conhecido. Assume-se, nesse ponto, que o deslocamento binormal a ser considerado deva ser igual àquele resultante de uma análise linear estática de compressão. Dessa forma, a equação anterior pode ser reescrita em termos da matriz de rigidez tangente do modelo, $[\mathbf{K}_T]$.

$$\mu = \frac{k_B \cdot ([\mathbf{K}_T]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_G\})_B}{\kappa_n} \quad \text{Equação IV-8}$$

Por fim, o procedimento relatado foi implementado no programa MATLAB® mediante o algoritmo proposto pela Figura IV-2 para, após definido um coeficiente de atrito alvo e um valor de tolerância, a realização de cálculos iterativos, que ao variar as rigidezes das bases elásticas, permitem a determinação do coeficiente de atrito equivalente para quando as forças não-conservativas de atrito são aproximadas pelas forças conservativas proveniente das bases elásticas.

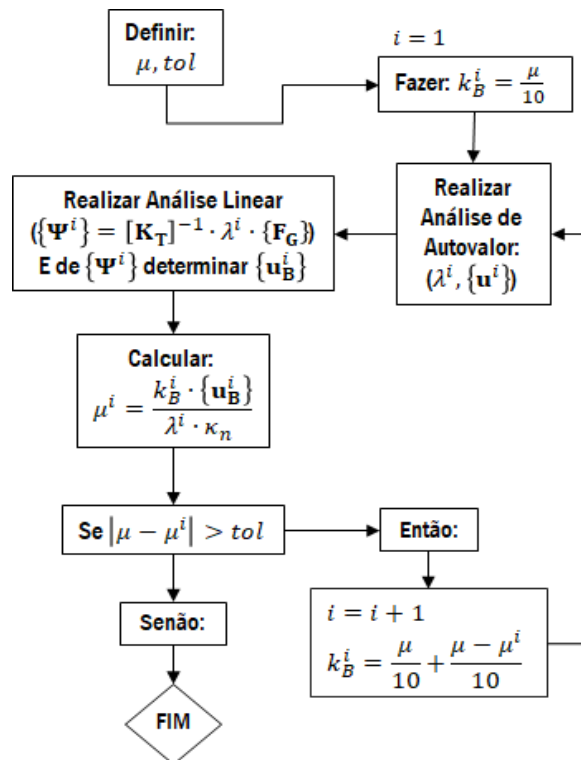


Figura IV-2 – Algoritmo para a determinação do coeficiente de atrito.

Para verificar esse procedimento, utilizou-se o trabalho de Féret *et al.* (1995), no qual se modela o comportamento histerético à flexão de dutos flexíveis de camadas não aderentes (Figura IV-3). Os carregamentos axissimétricos geram pressões de contato entre as camadas. Desse modo, para pequenas curvaturas, o deslizamento relativo dos arames é prevenido pelas forças de atrito inicialmente mobilizadas o que confere uma elevada rigidez à flexão inicial ao duto. Com o crescimento das curvaturas, no entanto, essas forças de atrito são progressivamente superadas permitindo, então, o deslizamento relativo das camadas o que diminui significativamente a rigidez à flexão do duto. Quando o carregamento é revertido, o comportamento histerético indicado esquematicamente na Figura IV-3 é obtido.

Em Féret *et al.* (1995), a restrição ao movimento lateral é imposta de maneira similar à adotada nesta tese, isto é, os efeitos do atrito entre as armaduras são considerados por meio de uma força distribuída ao longo do comprimento de cada arame igual a $q = 0,65N/mm$. Essa força restringe o movimento dos arames no primeiro trecho linear (rigidez à flexão EI_{ns}) da curva apresentada na Figura IV-3. Em Merino *et al.* (2010), procurou-se representar o atrito entre as camadas de um duto flexível submetido a cargas combinadas de tração e torção. Utilizando a lei de atrito de Coulomb, encontraram-se coeficientes de atrito (μ) entre 0,07 e 0,30 com a necessidade de também se considerar uma tensão inicial de adesão entre as armaduras de tração.

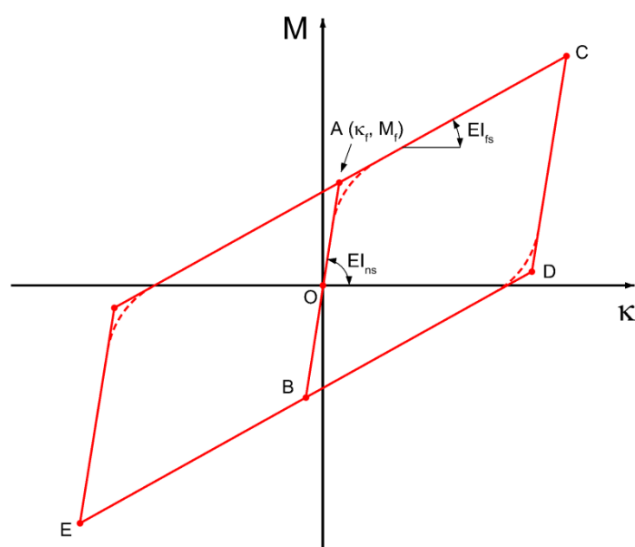


Figura IV-3 – Comportamento histerético característico da flexão de dutos flexíveis: momento fletor (M) versus curvatura (κ).

Sævik (1992) também realiza experimentos para a determinação de coeficientes de fricção, os quais resultam em diferentes valores de coeficientes de atrito para diferentes situações. Os valores extremos encontrados acontecem para velocidade de escorregamento nula (coeficiente de atrito igual a 0,30) ou no caso em que se tem o contato lubrificado (coeficiente de atrito igual a 0,01). No entanto, Sævik (1992) sugere adotar valores de 0,05 e 0,10 entre as armaduras interna e externa e entre a armadura interna e o substrato do duto, respectivamente. Nos modelos numéricos apresentados na literatura técnica com objetivo de representar o comportamento à flexão das armaduras de tração, os valores de referência para o coeficiente de atrito são variados, porém os mais usuais giram em torno de 0,10 – 0,15³⁹.

Reproduzindo o exemplo estudado por Féret *et al.* (1995) ($r = 100mm$; $\phi_0 = 35^\circ$; $C_\sigma = 200GPa$; $h = 3mm$; $w = 9mm$; $P_t = 3600N$), desconsiderando a flexão e fazendo o esforço de tração de $P_t = 3600N$ tomar o valor de λ na formulação proposta, o MVC apresenta um coeficiente de atrito de aproximadamente $\mu = 0,055$ ($k_B = 0,87MPa$). Esse coeficiente pode ser obtido também rearranjando a Equação IV-7 levando à Equação IV-9 a seguir.

$$\mu = \frac{k_B \cdot u_B}{\lambda \cdot \kappa_n} = \frac{q \cdot r}{P_t \cdot \text{sen}^2(\phi_0)} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-9} \end{array}$$

Outra forma de verificar esses resultados e, conseqüentemente, a metodologia proposta, lança mão das expressões fornecidas por Féret & Bournazel (1989) para calcular a diferença entre as pressões de contato sobre uma mesma camada gerada pelo carregamento de tração, P_t . Esse diferencial de pressão é dado pela Equação IV-10.

$$\Delta p = \frac{n_{ar} \cdot P_t \cdot \tan^2(\phi_0)}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-10} \end{array}$$

³⁹ Vale ressaltar que esses coeficientes são adotados para estudar os dutos flexíveis sob condições normais, ou seja, com o anular seco. A flambagem lateral, entretanto, é comumente encontrada nas condições de anular alagado, onde se espera que as forças de atrito apareçam minoradas.

Considerando a analogia apresentada na Figura IV-4, pode-se estimar a força normal de contato por:

$$p_N = \Delta p \cdot w$$

Equação
IV-11

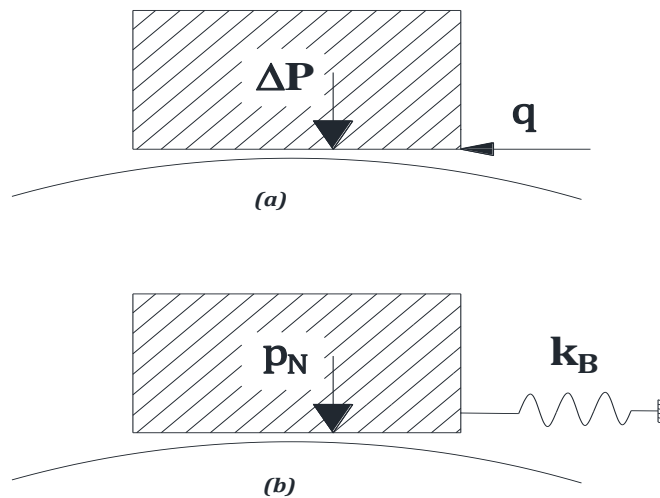


Figura IV-4 – Analogia entre (a) o modelo de Féret *et al.* (1995) e (b) o modelo proposto por esta tese para a consideração do atrito lateral dos arames da armadura de tração.

O coeficiente de atrito é calculado, portanto, utilizando a lei de atrito de Coulomb:

$$\mu = \frac{q}{p_N}$$

Equação
IV-12

No uso da Equação IV-10, é necessário observar que Féret *et al.* (1995) não indicam o número de arames das armaduras de tração do duto estudado. No entanto, pode-se empregar a expressão proposta em Larsen *et al.* (2014) para o cálculo do número de arames n_{ar} em uma armadura de tração:

$$n_{ar} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos(\phi_0) \cdot F_f}{w}$$

Equação
IV-13

onde F_f é o fator de preenchimento da camada, que representa a porcentagem da seção transversal da camada efetivamente preenchida pelos arames das armaduras de tração. Larsen *et al.* (2014) sugerem F_f no entorno de 0,90 para dutos flexíveis de camadas não aderentes e, nesse caso, a armadura de tração do duto estudado possuiria 51 arames. Como esse dado é uma incerteza, é interessante considerar limites, um inferior e outro superior, para os coeficientes de preenchimento do duto e analisar os resultados. Foram permitidos, portanto, um desvio, sobre o número de arames de referência (51 arames), igual a 3 arames, para mais ou para menos.

De acordo com o exposto, os coeficientes de atrito foram de: 0,051, quando a armadura de tração possui 51 arames e coeficiente de preenchimento de aproximadamente 0,90; 0,054, quando o número de arames é igual a 48 com o fator de preenchimento igual, nesse caso, a 0,84; e 0,048, quando o número de arames é igual a 54 com fator de preenchimento igual a 0,95.

Tais resultados sugerem que o procedimento apresentado se mostra bastante eficiente. Os desvios em relação ao valor estimado pelo MVC não passaram de 13% para as condições mais desfavoráveis consideradas ($n_{ar} = 54$).

IV.3.1.4. Estimativa da capacidade de carga de um duto flexível

Conforme ressaltado por Østergaard (2012) sobre seus experimentos, a perda de rigidez axial dos arames das armaduras de tração, devido à perda de estabilidade dos mesmos, tende a ocorrer na mais interna dentre as camadas que compõe os pares de armaduras de tração. É, pois, de vital importância, graças à premissa de que os arames de uma mesma camada devem ser mecanicamente homólogos, determinar a carga crítica de um único arame, λ_{cr}^{in} , que compõe essa camada mais interna. Uma forma direta, mas não conservadora, de determinar a capacidade de carga de um duto flexível P_{cr}^* , é considerar que a ação das camadas circundantes, as fitas e as demais camadas poliméricas externas às armaduras de tração, configuram rigidezes radiais muito altas ao ponto de ser factível considerá-las mecanicamente rígidas.

Nessa situação, ambas as camadas experimentam aproximadamente o mesmo nível de carga, logo a capacidade de carga de um duto flexível pode ser determinada

pela simples multiplicação do número de arames total dos dutos pela carga crítica obtida para um único arame (Equação IV-14). Considerar a ação radial das camadas como rígida é uma justa premissa para as camadas que sustentam internamente o duto, devido à alta rigidez radial imposta pela carcaça e pela armadura de pressão, porém a mesma não se sustenta para as camadas poliméricas externas.

$$P_{cr}^* = \sum_{i=1}^{n_t} n_{ar_i} \cdot \lambda_{cr}^{in} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-14} \end{array}$$

É importante ressaltar que o que se chama nesta tese de λ_{cr} é equivalente ao menor autovalor, λ_1 , obtido pelos problemas de autovalor, seja o linear (Equação III-44), o consistente (Equação III-52) ou o atualizado (Equação III-51), projetados na direção longitudinal do duto flexível, de acordo com a Equação IV-15.

$$\lambda_{cr} = \cos(\phi) \cdot \lambda_1 \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-15} \end{array}$$

Para a obtenção de valores mais realistas para a capacidade de carga do duto flexível, sua flexibilidade radial deve ser levada em consideração. Isto pode ser feito mediante mudanças na descrição matemática do problema ou mediante uma correção que leve em conta a contração/expansão radial dessas camadas. Nesta tese, optou-se pela correção da rigidez radial das camadas. A correção mencionada se baseia nas formulações axissimétricas propostas por Féret & Bournazel (1987), bem como na definição da rigidez radial do duto, k_r . Østergaard (2012) escreve que, para relações axissimétricas elásticas lineares, pode-se constatar a seguinte relação:

$$P = k_a \cdot \frac{\Delta L}{L} = -k_r \cdot \frac{\Delta r}{r} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-16} \end{array}$$

onde P é a força axial agindo sobre o duto; k_a , a rigidez axial; $\frac{\Delta L}{L}$, o alongamento; k_r , a rigidez radial; e $\frac{\Delta r}{r}$, a expansão/contração radial do duto flexível.

Por meio das formulações desenvolvidas para tubos de paredes delgadas, a rigidez radial do duto flexível, que é diferente à expansão e à contração, pode ser estimada, para expansão, por:

$$k_r = r \sum_{i=1}^{n_{pl}} \left(\frac{C_{\sigma_i} \cdot A_{c_i} \cdot t_{pl_i}}{r_{pl_i}^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-17} \end{array}$$

onde n_{pl} é o número de camadas poliméricas assentadas sobre a camada de armadura de tração externa; A_c é a área de contato com os arames; C_σ é o módulo de elasticidade do material que compõe a camada considerada; t_{pl} é a espessura da camada; e r_{pl} é o raio médio da camada.

Ademais, o alongamento necessário para desencadear o mecanismo de flambagem lateral, considerando o comportamento dos arames como linear e elástico até o valor da carga crítica, pode ser estimado diretamente pela Equação IV-18.

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{P_{cr}^*}{C_\sigma A \cdot \cos^3(\phi)} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-18} \end{array}$$

De Féret & Bournazel (1987), as equações de equilíbrio para as forças axiais agindo sobre os arames das armaduras de tração podem ser escritas na forma:

$$P = \sum_{i=1}^{n_t} n_{ar_i} \cdot C_{\sigma_i} \cdot \left[\cos^2(\phi_i) \cdot \frac{\Delta L}{L} + \sin^2(\phi_i) \cdot \frac{\Delta r}{r_i} \right] \cdot A_i \cdot \cos(\phi_i) \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-19} \end{array}$$

A partir das expressões expostas, é possível escrever um fator de correção que permita considerar a influência da flexibilidade radial na distribuição das forças axiais dos arames das armaduras tração sujeitos a um mesmo deslocamento longitudinal. A Equação IV-20 explicita tal fator.

$$\Xi = \frac{1}{\left\{1 + \frac{1}{k_r} \cdot \sum_{i=1}^{n_{pl}} [n_{wi} \cdot C_{\sigma_i} \cdot A_i \cdot \cos(\phi_i) \cdot \text{sen}^2(\phi_i)]\right\}} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-20} \end{array}$$

Finalmente, a capacidade de carga, P_{cr} , que um duto flexível pode suportar até sofrer a instabilização lateral elástica de seus arames da armadura interna é dada pela Equação IV-21:

$$P_{cr} = \Xi \cdot P_{cr}^* \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-21} \end{array}$$

IV.3.2. Análises linearizada clássica, consistente e atualizada.

Esta seção tem por objetivo a comparação entre as três aproximações apresentadas na Seção III.4.5. , isto é, as análises clássicas de autovalor (Equação III-44), o problema de autovalor consistente (Equação III-52) e o de autovalor atualizado (Equação III-51) para o caso de instabilidade lateral de dutos flexíveis. Os quatro dutos apresentados na Seção IV.2. servem de objetos de estudo.

Segundo Antonini (1986), análises clássicas de autovalores podem ser utilizadas em estruturas que possuem comportamento pré-crítico majoritariamente extensional; análises consistentes de autovalores podem ser aplicadas no estudo de estruturas como as do primeiro caso e, também, em estruturas cuja resposta é afetada significativamente por deslocamentos à flexão; já as análises com autovalores atualizados podem ser aplicadas a estruturas com as características daquelas descritas para os dois métodos citados e em estruturas que apresentem não-linearidades significativas em seu comportamento pré-crítico.

Em suma, a análise atualizada, além de prover maior acurácia para os casos de maior não-linearidade do caminho pré-crítico, deve abarcar todas as situações anteriores. Portanto, para estruturas com caminho pré-crítico linear e baixa influência dos efeitos de flexão, espera-se que os resultados da análise atualizada, da análise consistente e da análise clássica de autovalor sejam bastante próximos. A Tabela IV-6 apresenta a comparação entre os valores de carregamentos críticos para cada uma dessas formulações.

Tabela IV-6 – Carga crítica de flambagem lateral linear, consistente e atualizada para os dutos estudados sem curvatura[†] e sem atrito.

Método	Dutos Flexíveis			
	6" riser	8" riser	9,5" riser	14" jumper
Linear Clássica	296,7kN	627,0kN	206,1kN	493,9kN
Linear Consistente	136,4kN	391,0kN	110,0kN	283,4kN
Linear Atualizada	100,6kN	237,6kN	72,5kN	143,1kN
Análise iterativa*	132,5kN	380,8kN	103,6kN	275,0kN

[†] As análises iterativas consideram pequenos raios de curvatura iniciais com os arames modelados sob a premissa de curvas loxodrômicas.

*As cargas apresentadas pelas análises iterativas, diferentemente das análises de autovalor que fornecem pontos de bifurcação, são referentes a pontos limites.

Tendo em vista as discrepâncias nos valores referentes às cargas críticas calculadas pelos três métodos propostos, duas considerações iniciais devem ser feitas, a dizer:

- Conforme ressaltado por Antonini (1986), estruturas onde o comportamento de flexão contribui significativamente para a rigidez do sistema devem ser analisadas mediante o emprego da análise de autovalor consistente. Em um primeiro momento, pensou-se ser esse o caso para os arames das armaduras de flexão, dadas suas curvaturas iniciais.
- Para as estruturas que foram ensaiadas experimentalmente por Østergaard (2012), isto é, os dutos de 6", de 8" e de 14", ambos os métodos, consistente e atualizado, apresentaram valores dentro da janela de cargas fornecidas pelos experimentos (ver Tabela IV-12), porém os valores do método não-linear atualizado apresentam valores mais conservadores.

Para verificar as abordagens sugeridas, vale resolver as equações de equilíbrio não-lineares apresentadas na Seção III.4.4. Na Figura IV-5 (a)-(d), o caminho de equilíbrio não-linear é traçado para cada uma das estruturas estudadas, de acordo com o exposto na Seção III.4.7.

É importante observar que os traçados não-lineares apresentados foram obtidos considerando grandes raios de curvatura no duto ($R \cong 10^3 \cdot r$) sob a hipótese de curvas loxodrômicas⁴⁰ do toro, uma vez que esta impõe curvaturas iniciais, ainda que pequenas, na direção binormal do arame. Isso foi feito, porque curvas geodésicas, como é o caso da hélice reta, não apresentam curvaturas nessa direção.

As curvaturas geodésicas atuam, pois, como imperfeições iniciais que despertam o modo de deformação do equilíbrio pós-crítico, conhecidos na literatura técnica como flambagem lateral dos arames de armadura de tração. Dessa forma, caso não se considere o raio de curvatura, os pontos limites não são detectados pela simples resolução das equações de equilíbrio, conforme mostrado nos traçados da Figura IV-5 pelas linhas pontilhadas.

De acordo com o notado pelo comportamento do equilíbrio não-linear da estrutura, algumas observações merecem ser traçadas. Em primeiro lugar, vale ressaltar que, aparentemente, os tipos de pontos críticos captados pelas análises linearizadas de autovalor e pela análise incremental são distintos, sendo os primeiros referentes a pontos de bifurcação e os segundos a pontos limites, conforme discutido na Seção III.4.5.

A Tabela IV-6 indica que as cargas obtidas através da análise de autovalores clássica são superiores àquelas calculadas pelas análises incrementais (de 55 a 112%). Quando comparados às análises consistentes, porém, os valores estimados nas análises incrementais foram levemente inferiores (de 2 a 6%). Já as análises atualizadas captam cargas críticas consideravelmente inferiores em todos os casos, isto é, de 24 a 48% do valor das cargas dos pontos limites. Esses valores estão indicados nos gráficos como pontos de bifurcação.

A diferença de magnitude entre o ponto de bifurcação e o ponto limite pode ser atribuída à captação de um ponto de bifurcação não estimulado pela imperfeição gerada na direção binormal e oriunda da consideração das curvaturas loxodrômicas iniciais. Essas imperfeições representam um modo distinto do modo captado pela análise

⁴⁰ Para maiores detalhes sobre curvas loxodrômicas, curvas geodésicas e suas curvaturas ver APÊNDICE E e para a influência dessas curvas sobre a flambagem lateral ver Seção IV.3.5.

atualizada de autovalor. Desse modo, é constatado que os modos excitados na análise iterativa e nas análises de autovalor são distintos. Enquanto o modo obtido pelas análises de autovalor se aproxima de uma senóide de meia onda, as análises iterativas recaem em modos que se assemelham às curvaturas geodésicas (função seno com periodicidade igual ao número de passo), apresentadas na Seção IV.3.5. , dado a curvatura binormal, por simplicidade, poder ser aproximada pela segunda derivada do deslocamento binormal.

É interessante, ainda, ressaltar que o traçado do caminho fundamental pela resolução iterativa das equações de equilíbrio não-lineares não capta os pontos de bifurcação. Essas análises, as de bifurcação, apresentaram resultados próximos daqueles dados pelas diversas expressões analíticas e modelos numéricos teóricos já descritos na literatura, como é o caso da Equação II-4, da Equação II-5 e dos modelos numéricos teóricos apresentados por Vaz & Rizzo (2011), por Østergaard (2012) e por Yang *et al.* (2015) (as cargas críticas referentes a alguns desses modelos podem ser visto na Tabela IV-12). Já as análises iterativas, não. Os resultados dessas últimas ficaram, para os três dutos estudados experimentalmente por Østergaard (2012) (dutos de 6”, 8” e de 14”), próximos aos limites superiores das janelas de cargas obtidas nos ensaios mecânicos realizados pelo autor (ver Tabela IV-12), o que sugere a influência de modos distintos de flambagem lateral possam ocorrer, seja devido às posições iniciais dos arames (ver Seção IV.3.5.), seja devido à ação do atrito (ver Seção IV.3.6.).

É possível ainda remeter aqui ao trabalho de Østergaard (2012) para comentar sobre o método de “destruição” dos pontos de bifurcações. Esse método consiste em inserir imperfeições iniciais, ou carregamentos de pequenas magnitudes, que estimulem os modos de flambagem da estrutura. Østergaard (2012) insere tais imperfeições diretamente nas curvaturas geodésicas dos arames. As imperfeições consideradas assumem a forma de um somatório de funções senoidais, o que garante a presença da função seno de meia onda, correspondente ao modo de flambagem lateral fundamental obtido pela análise de autovalor. Vale ressaltar que o procedimento adotado por Østergaard (2012), bem como as análises iterativas realizadas nesta tese, garantem que o caminho fundamental da estrutura apresente um ponto limite e não pontos de bifurcação.

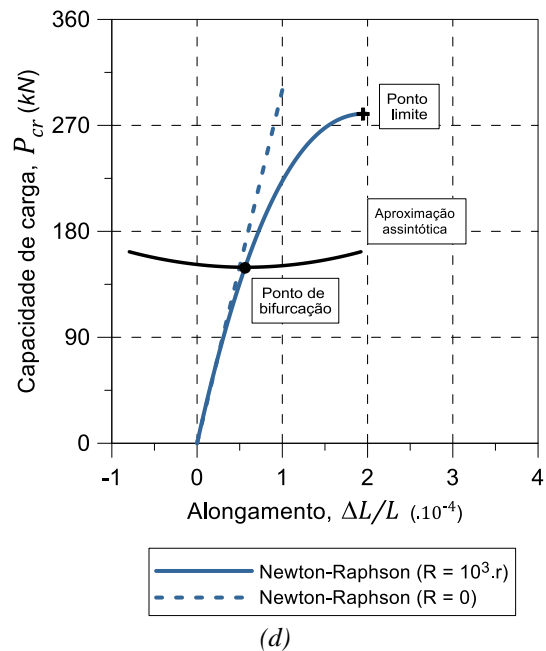
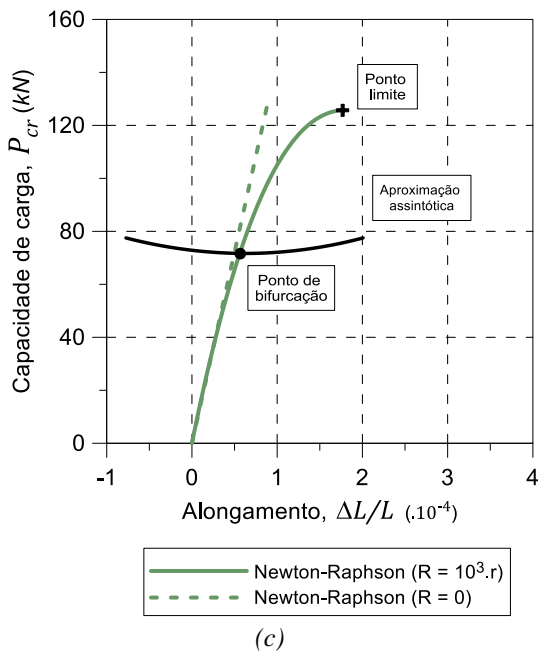
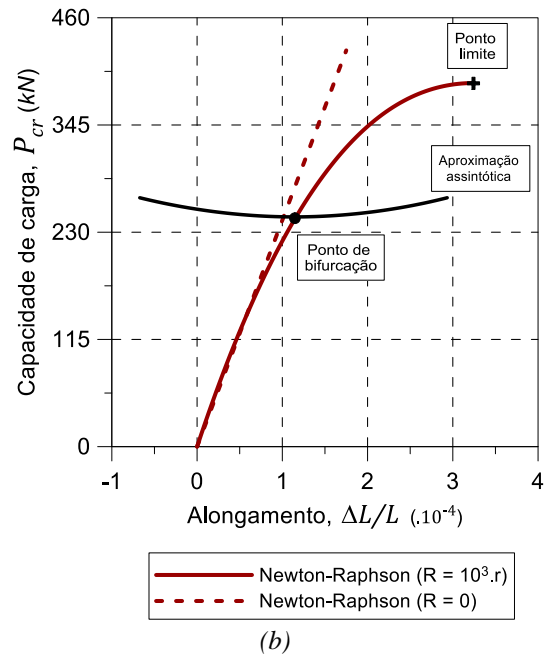
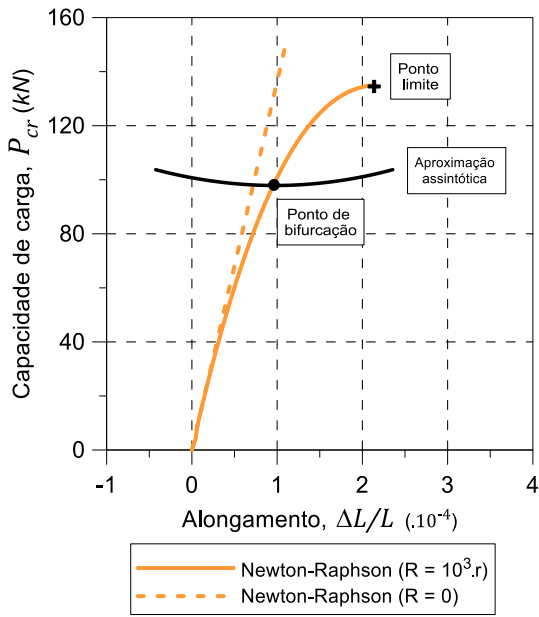


Figura IV-5- Caminhos de equilíbrio fundamental e seus pontos críticos para os dutos (a) de 6", (b) de 8", (c) de 9,5" e (d) de 14" sob a hipótese das curvas loxodrômicas ($R = 10^3 \cdot r$).

Outras analogias a problemas difundidos de estabilidade podem ser traçadas para explicar o mecanismo estudado. Por um lado, pode-se remeter à situação encontrada para os pontos de bifurcação de cilindros de paredes delgadas sob influência

de esforços axiais⁴¹, que apresentam trechos de seus caminhos secundários instáveis. Por outro, os resultados das análises incrementais também podem ser interpretados através dos conceitos e aprendizados empíricos desenvolvidos a partir do estudo da instabilidade de estruturas imperfeitas, os quais nos atestam que outros modos, que não o primeiro, podem ser estimulados de acordo com as imperfeições iniciais consideradas nas estruturas.

O último caso já foi relatado para o traçado de equilíbrio dos arames de dutos flexíveis, ou seja, as curvaturas loxodrômicas iniciais não despertam o modo encontrado pela análise atualizada. Deve-se ressaltar também que imperfeições iniciais não afetam significativamente as cargas limite teóricas de todas as estruturas, mas apenas daquelas que apresentam caminhos pós-críticos instáveis, como ressalta Koiter (1945).

Segundo Brush & Almroth (1975), a inclinação do traçado de equilíbrio pós-crítico fornece um forte indício da instabilidade desse estado. Ainda de acordo com esses autores, caso a estrutura apresente ganho de rigidez em seu caminho de equilíbrio pós-crítico, isto é, possui segunda derivada positiva, pode-se inferir que o ponto crítico apresenta equilíbrio estável. A flambagem abrupta e o consequente colapso pós-crítico de uma estrutura estão associados à contínua perda de rigidez da estrutura em seu caminho secundário, o qual, por sua vez, pode ser associado à instabilidade do ponto crítico calculado (Brush & Almroth, 1975).

Além disso, Brush & Almroth (1975) destacam que a flambagem abrupta está associada às estruturas que possuem modos pré e pós-críticos ortogonais entre si, como é o caso destacado do estudo de cascas cilíndricas delgadas e perfeitas sob carregamento axial, que tem modo pré-crítico axissimétrico e pós-crítico assimétrico (Koiter, 1945). Outro caso de estruturas com caminho pós-crítico instável é o dos arcos rasos, os quais apresentam uma súbita mudança de configuração ao flambar, usualmente conhecida por *snap-through* ou salto dinâmico.

⁴¹ Brush & Almroth (1975) destacam que as análises teóricas linearizadas e os resultados experimentais para o problema mencionado apresentam significantes discrepâncias, sejam relativas às medições experimentais realizadas por Flugge (1932), por Lundquist (1933) ou por Donnell (1933). Essas discrepâncias levaram ao estudo do caminho não-linear de equilíbrio, o qual, pela inserção do trabalho de Koiter (1945), ficou demonstrado que estruturas que apresentam caminhos de equilíbrio secundários são sensíveis às imperfeições iniciais. Sobre a influência de imperfeições iniciais nos arames das armaduras, mais será discutido na Seção III.3.5.

Uma maneira eficiente de se captarem esses traçados de equilíbrio instáveis em elementos finitos é a utilização da TCAC, não considerada no algoritmo de Newton-Raphson proposto nesta tese, uma vez que o objetivo deste trabalho não compreendia o estudo do comportamento pós-crítico dessas estruturas, mas apenas a verificação de seus pontos de instabilidade. Porém, para caracterizar qualitativamente a instabilidade dos arames das armaduras de tração, outras técnicas podem ser empregadas. Resta, portanto, dizer a respeito da estabilidade do caminho secundário, tanto do que segue o ponto limite quanto o que emerge do ponto de bifurcação.

Em uma primeira análise, deve-se atentar para a ressalva feita por Bathe (2006), isto é, um dos motivos para a não convergência do algoritmo de Newton-Raphson é a instabilidade do traçado de equilíbrio, uma vez que essa instabilidade estaria associada à mudança brusca de inclinação deste traçado. Tal fato é notado para as regiões vizinhas do ponto limite, como mostram os caminhos de equilíbrio não-lineares das armaduras de tração apresentado pela Figura IV-5. Mesmo com esse indício, não se pode afirmar com certeza que as armaduras de tração devam também apresentar caminhos pós-críticos instáveis.

É mediante o estudo da segunda variação da energia potencial total (Equação III-38), na vizinhança do ponto crítico, que tal suposição pode ser confirmada. Ao analisar a segunda variação da EPT nessa vizinhança, chega-se à conclusão que o ponto crítico representa um ponto de máximo da energia potencial total, o que caracteriza a instabilidade do ponto crítico de tipo limite.

Outrossim, pode-se verificar tal premissa, de acordo com Felippa (1999), pelo estudo da matriz tangente do sistema ou da análise dos sinais dos autovalores obtidos. Felippa (1999) sugere que, ao escalonar essas matrizes, deve-se, a fim de garantir a estabilidade do ponto crítico analisado, obter uma matriz com todos os pivôs positivos. Caso contrário, têm-se um ponto crítico instável. De Bathe (2006), pode-se ainda acrescentar que o número de autovalores negativos equivale ao número de pivôs negativos da matriz escalonada, os quais correspondem a pontos de equilíbrio instáveis e podem ser compreendidos como o número de pontos críticos que foram ultrapassados. A vantagem da análise dos autovalores é que por meio dela pode-se também estimar se

os pontos apresentam equilíbrio neutro, isto é, aqueles que apresentam autovalores nulos (Bathe, 2006).

O método de decomposição utilizado nesta tese foi o método de eliminação de Gauss, o qual forneceu apenas pivô positivo para o ponto de bifurcação na matriz escalonada, isto é, acha-se um ponto de bifurcação que dá origem a um caminho de equilíbrio pós-crítico estável. Ao realizar o mesmo processo, para o ponto limite, o pivô que mais se aproxima da carga limite é negativo, o que indica a instabilidade deste ponto.

Koiter (1945) propõe ainda que através das aproximações assintóticas, descritas na Seção III.4.6. , aplicadas ao ponto de equilíbrio crítico, possa-se definir o comportamento do caminho assintótico na vizinhança do mesmo, o que extrapola a análise anterior. Segundo essa teoria, basta com que se calculem as aproximações assintóticas quadráticas no ponto crítico para definirmos a estabilidade do caminho secundário. Vale ressaltar que os coeficientes de carga linear e quadrático, para a análise da estabilidade da vizinhança de um ponto crítico, referem-se à terceira e à quarta variação da energia potencial. Caso o coeficiente linear (λ_1 da Equação III-53) seja diferente de zero, tem-se a emergência de um caminho pós-crítico instável, o que também ocorre caso tenha-se o coeficiente linear igual a zero e o coeficiente quadrático (λ_2 da Equação III-53) negativo. Ambos os casos diferem-se quanto a condição de simetria, ou seja, enquanto do primeiro espera-se um caminho assimétrico, do segundo espera-se um caminho simétrico. Ainda, caso o coeficiente linear seja nulo e o coeficiente quadrático positivo, tem-se um caminho secundário simétrico estável.

Para ambos os pontos críticos, limites e de bifurcação, de todas as estruturas, apresentados na Figura IV-5, os coeficientes lineares são nulos. Já os coeficientes quadráticos se mostram positivos, para os pontos de bifurcação, e negativos, para os pontos limites. Na Figura IV-5, podem-se ver as aproximações quadráticas para os caminhos secundários que emergem dos pontos de bifurcação (linha contínua preta). Essas aproximações são calculadas mediante os conceitos apresentados na Seção III.4.6. ao considerar o ponto de bifurcação como o ponto de equilíbrio conhecido.

Para detalhar mais precisamente o caminho pós-crítico, a TCAC deveria ser associada ao algoritmo de Newton-Raphson apresentado, como previamente

estabelecido. No entanto, o objetivo deste trabalho não compreende o traçado deste caminho, mas apenas a verificação da estabilidade dos arames das armaduras de tração, quantitativa e qualitativamente. Os métodos utilizados garantem ferramentas suficientemente eficazes de proporcionar informações adicionais relevantes às cargas, modos críticos, obtidos pela análise de autovalor, e até mesmo sobre a estabilidade do ponto crítico e de sua vizinhança, mediante a aplicação do método de Koiter (1945), o que cumpre com tal objetivo. Daqui em diante, apenas os resultados das análises atualizadas serão apresentados.

IV.3.3. Modos de flambagem

Em uma análise típica de autovalor, principalmente em estruturas complexas, o estudo dos modos de flambagem e de sua carga crítica associada é de extrema importância. Isso, pois é possível que a instabilidade, apesar de usualmente ser associada ao primeiro modo crítico, venha a ocorrer em outro. Dessa forma, para os quatro dutos apresentados na Seção IV.2. , são apresentadas suas cargas críticas (Tabela IV-7) e seus modos de instabilidade (Figura IV-6).

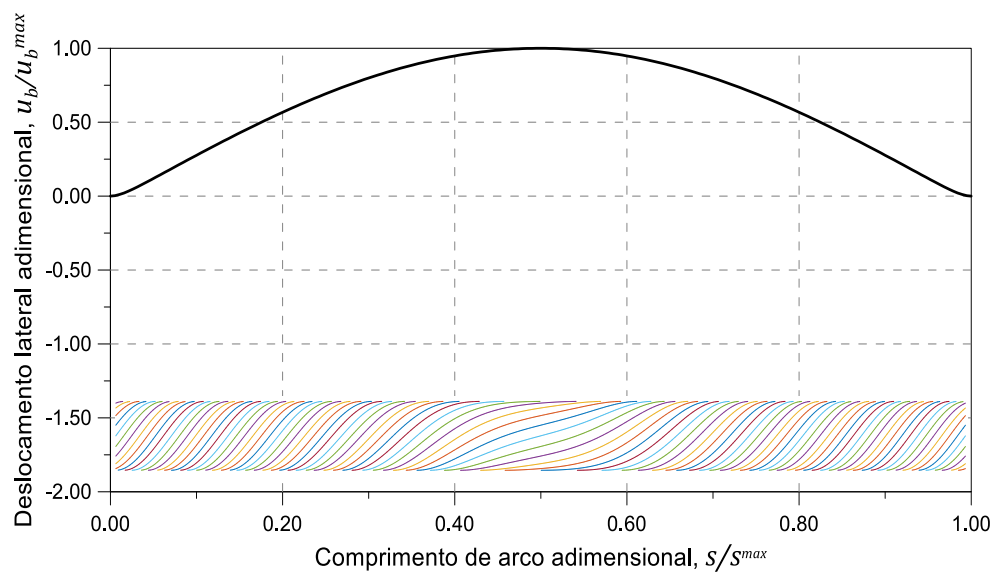
A magnitude das cargas críticas, quando comparadas à do modo fundamental, isto é, a do primeiro modo, variam de 6% (primeiro para o segundo modo do *riser* de 9,5”) até 114% (primeiro para o quinto modo do *riser* de 8”).

Tabela IV-7 – Carga crítica de flambagem lateral para os cinco primeiros modos de cada um dos dutos estudados sem curvatura.

Modo de flambagem	Dutos flexíveis			
	6” riser	8” riser	9,5” riser	14” jumper
1°	100,6kN	237,6kN	72,5kN	143,1kN
2°	110,6kN	251,7kN	79,6kN	164,7kN
3°	130,5kN	279,3kN	87,8kN	178,7kN
4°	168,8kN	323,0kN	100,8kN	200,5kN
5°	226,3kN	367,9kN	120,6kN	232,8kN

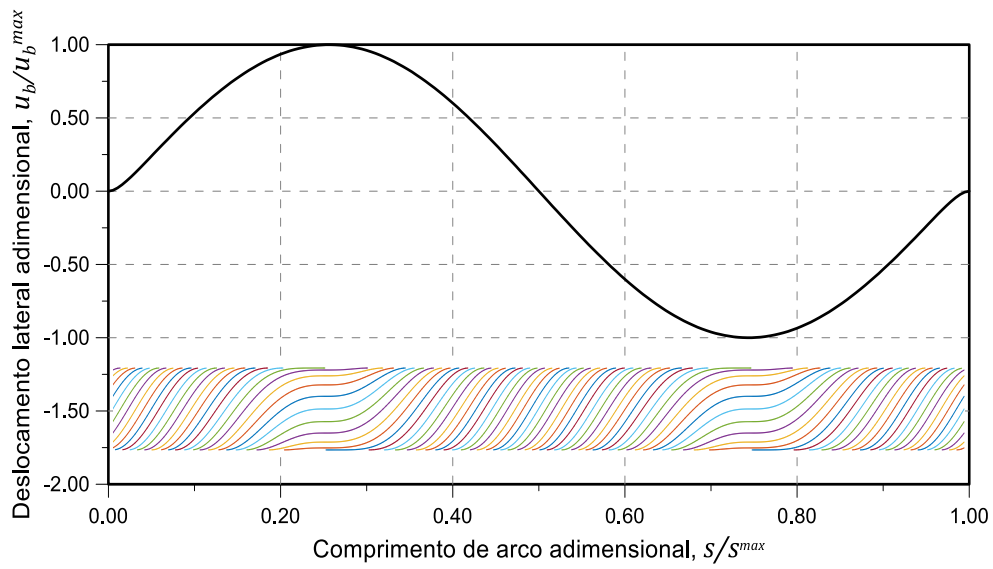
Por um lado, a proximidade das cargas críticas obtidas, principalmente entre primeiro e segundo modos, indicam que pequenas restrições laterais podem influir significativamente no modo de instabilidade dos arames das armaduras de tração. Por outro lado, é crível que, caso não atue qualquer restrição lateral nos arames, o modo de instabilidade ocorrido seja o primeiro. O primeiro modo apresenta forma semelhante à função senoidal adotada por Sævik & Ji (2014) como modo de instabilidade. No entanto, é necessário ressaltar que o modo de flambagem utilizado por Sævik & Ji (2014) parte da premissa que as condições de contorno adotadas sejam equivalentes às de uma estrutura bi-apoiada.

Vale notar que as condições de apoio adotadas por Sævik & Ji (2014) não são equivalentes às adotadas pelo modelo de Østergaard (2012), o qual considera que ambas as extremidades dos arames estão sujeitos a engastes perfeitos. A investigação da influência das condições de contorno na resposta da instabilidade dessa estrutura é analisada na Seção IV.3.4. Nesta tese, quando não referido o contrário, as condições de contorno utilizadas foram equivalentes à condição bi-engastada.

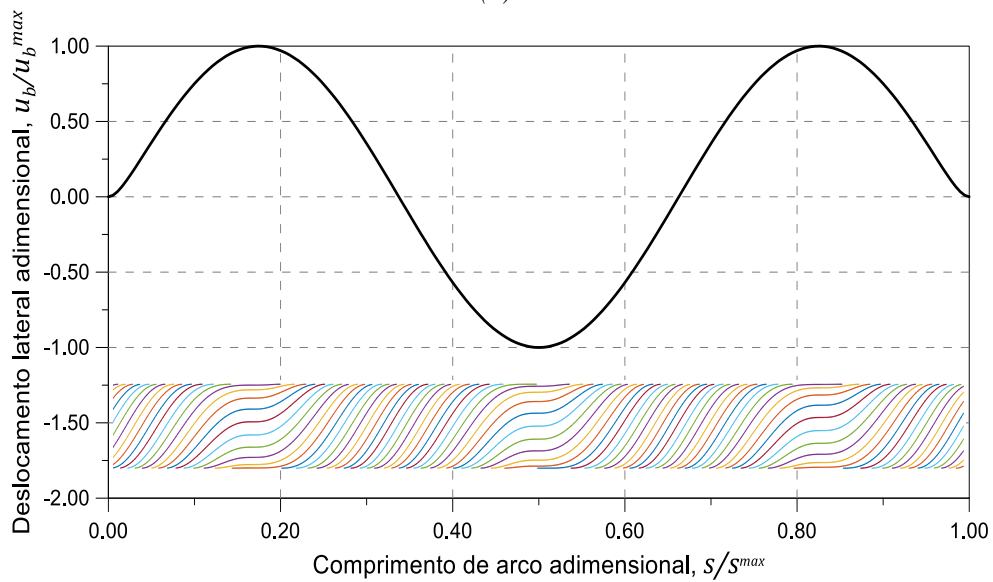


(a)

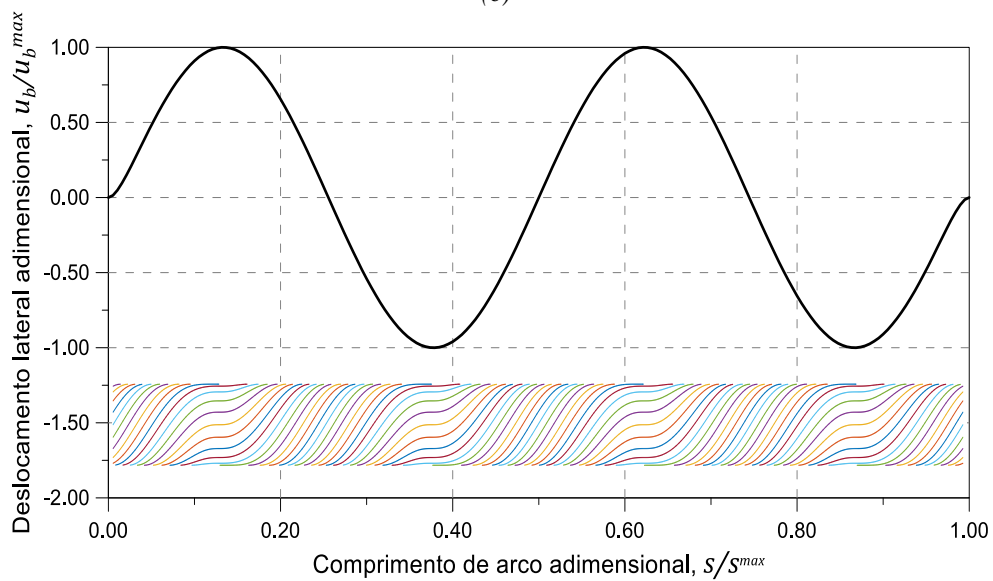
(Figura IV-6, continua na página seguinte)



(b)

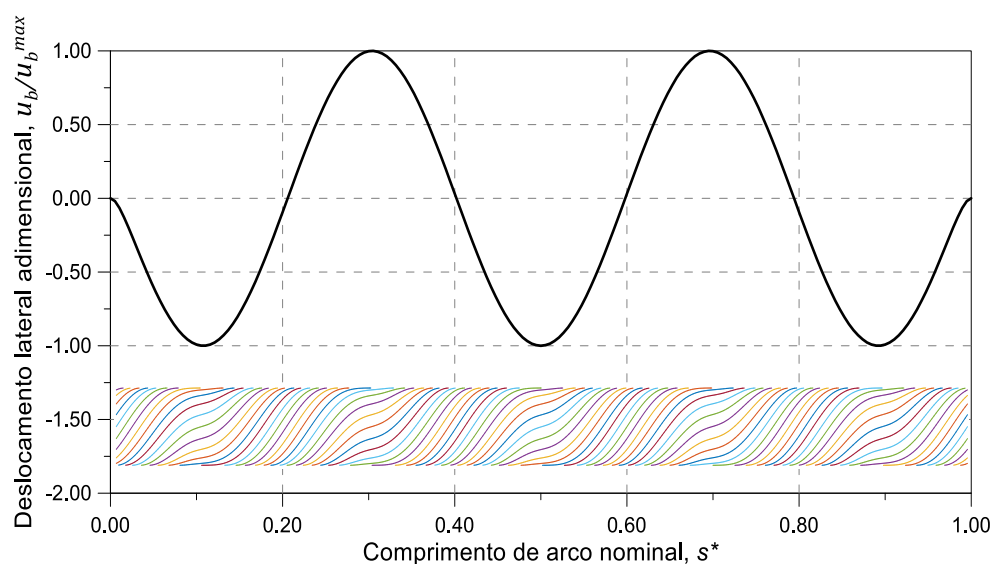


(c)



(d)

(Figura IV-6, continua na página seguinte)



(e)

Figura IV-6 – Modos de flambagem lateral e seus deslocamentos laterais: (a) primeiro modo; (b) segundo modo; (c) terceiro modo; (d) quarto modo; e (e) quinto modo.

Pode-se observar, ainda, da análise dos resultados apresentados na Tabela IV-7, que as cargas críticas associadas ao primeiro e segundo modos mostram-se, em magnitude, bastante próximas para todos os dutos. Tal fato pode ser interpretado como o surgimento de estados instáveis, seja crítico, seja pós-crítico. Os estados críticos não coadunam com essa hipótese, uma vez que da análise da matriz tangente escalonada, nenhum pivô negativo é encontrado. Logo, os cinco primeiros modos apresentados tem equilíbrio crítico estável. A análise assintótica dos caminhos secundários, segundo Koiter (1945), entretanto, fornece, para os quatro dutos, indicativos da emergência de caminhos secundários instáveis para o segundo e para o terceiro modo de flambagem, pois o coeficiente linear obtido, apesar de nulo, é acompanhado de coeficiente quadrático negativo.

Finalmente, deve-se atentar para a possibilidade desses modos, devido à proximidade de suas cargas críticas, serem modos acoplados. Supple (1996) indica que esse problema é encontrado em sistemas com cargas críticas, de modos consecutivos, coincidentes ou bastante próximas, conforme ocorre em vigas retas, bi-engastadas, comprimidas e apoiadas em duas fundações elásticas com rigidezes diferentes, em cascas esféricas sob pressão externa ou em placas longas comprimidas em suas extremidades (Chilver, 1969). Supple (1996) ressalta, também, que essa característica pode levar a pontos de bifurcação e mudança do caminho secundário. Devido à

profundidade do tema, essas considerações apenas são levantadas no campo das possibilidades; não serão, pois, investigadas mais a fundo.

IV.3.4. Condições de contorno

A grande maioria dos estudos relacionados ao objeto desta tese desconsidera a influência das condições de contorno sem apresentar maiores justificativas quanto à adoção da condição escolhida, usualmente a bi-engastada. Assim, esta seção estuda o impacto das condições de contorno na carga crítica para a flambagem lateral dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis. Para tanto, utiliza-se o modelo numérico descrito e analisam-se todos os quatro dutos submetidos às condições de contorno bi-apoiada, engastada-apoiada, engastada-livre e bi-engastada. Investiga-se, ainda, a influência dessas condições com o aumento do comprimento do modelo ($n_p = 1 \dots 5$).

Os resultados indicam que o comprimento do modelo tende a dirimir a influência das condições de contorno no valor da carga crítica calculada. É ainda notado que a hipótese de comprimento equivalente, usual na determinação das cargas críticas das colunas de Euler sob diferentes condições de contorno (ver APÊNDICE D), as quais poderiam ser utilizadas para adequar a expressão numérica de Sævik & Ji (2014) à condição de bi-engaste, não se sustentam nos resultados obtidos.

Tabela IV-8 – Carga crítica de flambagem lateral do riser de 6” quando variado o número de passos para as condições de contorno: (a) bi-apoiados; (b) engastado-apoiado; (c) engastado-livre; e (d) bi-engastado.

n_p	6” riser			
	(a)	(b)	(c)	(d)
1	182,4kN	197,5kN	39,4kN	208,9kN
2	117,3kN	118,8kN	38,8kN	119,5kN
3	106,5kN	107,6kN	38,2kN	108,9kN
4	103,3kN	103,4kN	37,6kN	103,5kN
5	100,6kN	100,6kN	36,9kN	100,6kN

Tabela IV-9 – Carga crítica de flambagem lateral do riser de 8” quando variado o número de passos para as condições de contorno: (a) bi-apoiados; (b) engastado-apoiado; (c) engastado-livre; e (d) engastado-engastado.

n_p	8” riser			
	(a)	(b)	(c)	(d)
1	438,7kN	446,8kN	114,9kN	467,3kN
2	271,4kN	272,7kN	113,1kN	274,5kN
3	248,4kN	248,5kN	111,3kN	249,1kN
4	241,3kN	241,6kN	109,6kN	241,9kN
5	237,5kN	237,5kN	107,9kN	237,6kN

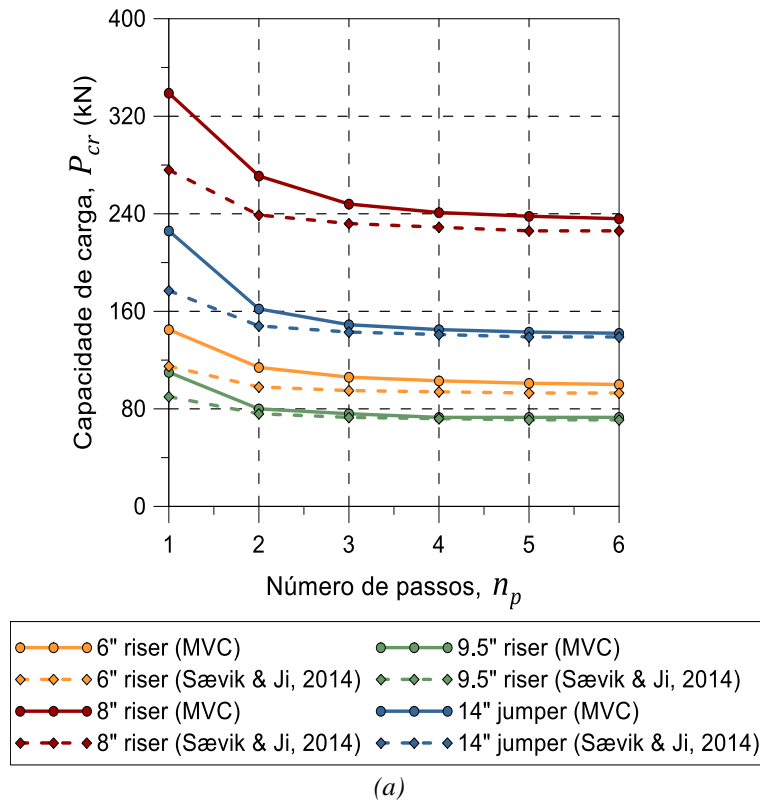
Tabela IV-10 – Carga crítica de flambagem lateral do riser de 9,5” quando variado o número de passos para as condições de contorno: (a) bi-apoiados; (b) engastado-apoiado; (c) engastado-livre; e (d) engastado-engastado.

n_p	9,5” riser			
	(a)	(b)	(c)	(d)
1	135,2kN	143,8kN	26,3kN	143,8kN
2	80,0kN	86,1kN	25,9kN	81,1kN
3	75,6kN	78,9kN	25,5kN	76,5kN
4	72,6kN	76,5kN	25,1kN	72,8kN
5	72,5kN	72,5kN	24,7kN	72,5kN

Tabela IV-11 – Carga crítica de flambagem lateral do jumper de 14” quando variado o número de passos para as condições de contorno: (a) bi-apoiados; (b) engastado-apoiado; (c) engastado-livre; e (d) engastado-engastado.

n_p	14” jumper			
	(a)	(b)	(c)	(d)
1	256,1kN	265,1kN	44,1kN	272,8kN
2	162,0kN	162,1kN	43,3kN	163,4kN
3	149,3kN	149,4kN	42,6kN	149,6kN
4	145,0kN	145,1kN	41,9kN	145,2kN
5	143,0kN	143,0kN	41,1kN	143,1kN

A Figura IV-7 (a) e a Figura IV-7 (b) ilustram as comparações entre os resultados obtidos com os modelos de viga curva e com os respectivos modelos mencionados para os casos de arames bi-engastados e bi-apoiados. Como se pode ver, todos os modelos apresentaram comportamentos qualitativamente equivalentes. Quanto aos valores observados, o MVC apresenta resultados menos conservadores do que a equação derivada por Sævik & Ji (2014), mas mais conservadores do que os resultados do modelo de Østergaard (2012)⁴². Para a situação da viga bi-apoiada, os desvios entre a expressão analítica de Sævik & Ji (2014) e o MVC apresentam-se entre 10 e 18% para modelos com apenas um passo. Esses desvios caem progressivamente, até que, para arames com 6 passos, observam-se desvios menores que 2%. Os desvios em relação ao modelo de Østergaard (2012), para o caso do arame bi-engastado, variam de 5 – 17 %, quando considerado apenas um passo, e de 1 a 3%, para o número de passos igual a seis.



(Figura IV-7) Figura IV-6, continua na página seguinte)

⁴² Ambos os modelos, a equação de Sævik e Ji (2014) e as equações diferenciais apresentadas por Østergaard (2012), foram implementadas no software MATLAB®. No item C.2.1. do APÊNDICE C, maiores detalhes são fornecidos sobre as equações diferenciais e sua implementação numérica. Alguns resultados publicados por Østergaard (2012) foram reproduzidos nesse apêndice, os quais ilustram que a implementação foi realizada de maneira correta.

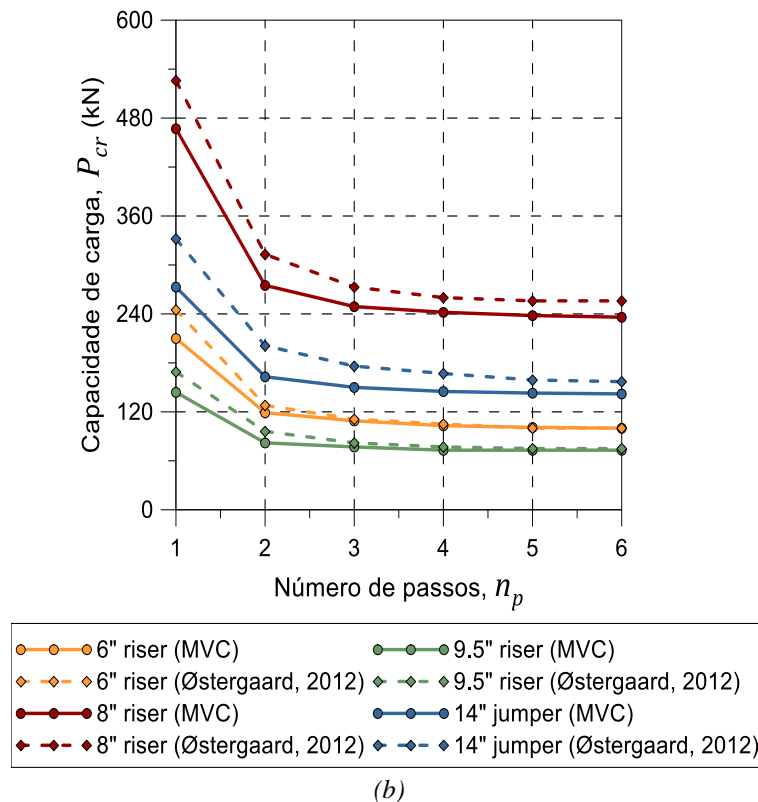


Figura IV-7 – Influência da variação do comprimento do arame (número de passos, n_p , da armadura de tração) sob condições de contorno (a) bi-apoiada e (b) bi-engastada na capacidade de carga dos dutos estudado para o MVC e os modelos de Østergaard (2012) e de Sævik & Ji (2014).

IV.3.5. Influência da curvatura do duto e das curvas limites

Outra questão que tange o comportamento à flambagem lateral dos arames de armaduras de tração de dutos flexíveis concerne a influência da flexão do duto nesse fenômeno. Neste trabalho, essa influência não é analisada dinamicamente, como é próprio do mecanismo de flambagem lateral em campo, mas as contribuições das diferentes curvaturas são impostas diretamente às matrizes de rigidez dos elementos das armaduras de tração, apresentadas na Seção III.4.3.

Considera-se, pois, que os arames ao serem fletidos acomodam-se entre as curvas nomeadas como curvas limites, isto é, a geodésica e a loxodrômica. Essas curvas representam situações extremas nas quais o arame é totalmente livre ou totalmente restringido quanto a seu deslocamento lateral, respectivamente, quando o duto é fletido. Tal premissa simplifica o problema e permite avaliar, para os dois extremos, a influência da flexão do duto, ou seja, da posição inicial do arame sobre a carga crítica da

estrutura. Os valores obtidos são apresentados em comparação com os resultados obtidos na literatura técnica para os quatro dutos caracterizados na Seção IV.2.

Antes de apresentar os resultados, é interessante notar que as curvaturas calculadas para as curvas geodésicas e loxodrômicas são distintas e podem ser obtidas das expressões dadas pela Equação III-3, mediante processos diversos. Para o caso das curvas geodésicas, que são descritas por do Carmo (1976) como curvas de velocidades constantes com curvatura geodésica nula, no trabalho de Gonzalez *et al.* (2018), foram obtidas expressões simplificadas, Equação IV-23⁴³, que satisfizessem as equações diferenciais características dessas curvas por meio de RS. Essas expressões são utilizadas diretamente nas fórmulas das curvaturas⁴⁴ para curvas sobre superfícies (Equação IV-24), apresentadas por do Carmo (1976).

$$\kappa_g = \frac{\kappa \cdot \text{sen}(\theta_{RS})}{1 + r \cdot \kappa \cdot \text{cos}(\theta_{RS})} \text{cos}(\phi_{RS}) + \phi_{RS,s}$$

$$\tau_g = \left[\frac{\kappa \cdot \text{cos}(\theta_{RS})}{1 + r \cdot \kappa \cdot \text{cos}(\theta_{RS})} - \frac{1}{r} \right] \cdot \text{sen}(\phi_{RS}) \cdot \text{cos}(\phi_{RS}) \quad \text{Equação IV-22}$$

$$\kappa_n = -\frac{\kappa \cdot \text{cos}(\theta_{RS})}{1 + r \cdot \kappa \cdot \text{cos}(\theta_{RS})} \cdot \text{cos}^2(\phi_{RS}) + -\frac{1}{r} \cdot \text{sen}^2(\phi_{RS})$$

onde:

$$\phi_{RS} = \phi_0 + \frac{r}{R \cdot \tan(\phi_0)} \cdot \text{cos} \left[\frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right] - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \tan(\phi_0)} \cdot \text{cos} \left[2 \cdot \frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right] \quad \text{Equação IV-23}$$

$$\theta_{RS} = \frac{\text{sen}[\phi_{SR}]}{r} \cdot s$$

⁴³ Para maiores detalhes sobre o procedimento adotado, ver APÊNDICE E.

⁴⁴ Maiores comentários acerca dessas formulações são traçados no APÊNDICE A.

Para o caso das curvas loxodrômicas, ou seja, curvas que interceptam todos os meridianos horizontais da superfície com o ângulo constante ($\phi_0 = cte$), pode-se simplificar as fórmulas apresentadas acima (Equação IV-22) e obter, assim, as curvaturas características de tais curvas. A Equação IV-24 traz as curvaturas e a torção geodésica para a curva loxodrômica de um toro.

$$\kappa_g = \frac{\kappa \cdot \text{sen} \left[\frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right]}{1 + r \cdot \kappa \cdot \cos \left[\frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right]} \cos(\phi_0)$$

$$\tau_g = \left\{ \frac{\kappa \cdot \cos \left[\frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right]}{1 + r \cdot \kappa \cdot \cos \left[\frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right]} - \frac{1}{r} \right\} \cdot \text{sen}(\phi_0) \cdot \cos(\phi_0) \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-24} \end{array}$$

$$\kappa_n = - \frac{\kappa \cdot \cos \left[\frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right]}{1 + r \cdot \kappa \cdot \cos \left[\frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right]} \cdot \cos^2(\phi_0) + - \frac{1}{r} \cdot \text{sen}^2(\phi_0)$$

Tendo visto as diferenças das formulações das curvas limites, especialmente no que tange a curvatura na direção binormal, resta agora apresentar a influência dessas curvaturas no cálculo das cargas críticas de flambagem lateral dos mesmos. A Tabela IV-12 apresenta esses valores para um raio de curvatura igual a 12 m.

Além dos valores calculados pelo modelo numérico apresentado (MVC), foram apresentados os valores obtidos experimentalmente por Østergaard (2012), bem como os valores calculados por seu modelo teórico e os valores calculados pela Equação II-4 (Sævik & Ji, 2014), os quais não levam em consideração a flexão do duto. Os valores obtidos pelo modelo numérico foram apresentados em três categorias, para o duto reto (MVC), para as curvas geodésicas (MVC_{Geodésica}) e para as curvas loxodrômicas (MVC_{Loxodrômica}).

Tabela IV-12 – Carga crítica de flambagem para os quatro dutos estudados considerando o duto reto ou fletido ($R=12m$), segundo as curvas geodésica e loxodrômica.

Modelo	Dutos Flexíveis			
	6" riser	8" riser	9,5" riser	14" jumper
Equação II-4 ⁽¹⁾	93kN	226kN	71kN	139kN
MVC	100,6kN	237,6kN	72,5kN	143,1kN
MVC _{Geodésica}	115,1kN	256,7kN	83,2kN	157,5kN
MVC _{Loxodrômica}	97,8kN	226,8kN	71,9kN	141,2kN
Teórico	100,0kN ⁽²⁾	256,0kN ⁽²⁾	70,0kN ^{(3),(4)}	157,0kN ⁽²⁾
Experimental	80,0 – 160,0kN ⁽²⁾	300,0 – 400,0kN ⁽²⁾	NA	269,0 – 277,0kN ^{(3)*}

⁽¹⁾ (Sævik & Ji, 2014); ⁽²⁾ (Østergaard, 2012); ⁽³⁾ (Vaz & Rizzo, 2011) e ⁽⁴⁾ (de Sousa, 2005),

*Este valor, segundo Østergaard (2012), não pode ser diretamente comparado com os demais, pois não foi obtido, como nos casos dos dutos de 6" e 8", a um raio de curvatura constante, mas durante os ciclos de flexão.

Os resultados apresentados na Tabela IV-12 apresentam-se, de maneira geral, coerentes com os demais resultados retirados da literatura técnica. Para os dutos retos, os resultados obtidos pelo MVC mostram-se de 2% a 8% superiores àqueles calculados pela Equação II-4 (Sævik & Ji, 2014). Além disso, como a capacidade de carga obtida pelo modelo teórico de Østergaard (2012) não é sensível à influência da curvatura do duto, pode-se comparar os resultados obtidos por esse modelo com aqueles estimados pelo MVC. Nesse caso, as cargas previstas pelo MVC são de 0% a 9% inferiores àquelas calculadas com o modelo de Østergaard (2012).

Ao analisar os resultados dos dutos inicialmente fletidos, é interessante notar que aqueles analisados sob a hipótese da curva geodésica apresentam capacidades de carga maiores do que aqueles que se apoiaram na hipótese da curva loxodrômica, porém ainda compatíveis com os resultados experimentais (Østergaard, 2012). Dessa forma, é possível conceber, que na prática, esses resultados sejam interpretados como janelas de capacidades de carga admissíveis, onde as curvas loxodrômicas fornecem os limites inferiores e as geodésicas, os superiores. Os desvios entre esses limites enquadram-se na faixa de 11% e 18%. Quando comparados frente aos resultados dos modelos teóricos,

têm-se, para a hipótese das curvas geodésicas, desvios entre 0% e 24% e, para a hipótese das curvas loxodrômicas, entre 0% e 12%.

A diferença entre cargas críticas das curvas limites deve ser atribuída à influência das curvaturas na formação das matrizes de rigidez. Outra diferença relevante concerne às curvaturas na direção binormal, ou curvaturas geodésicas, presentes nas curvas loxodrômicas, mas não nas geodésicas. Essas curvaturas podem ser interpretadas analogamente à inserção de imperfeições geométricas em estruturas perfeitas, processo que destrói os pontos de bifurcação e os torna pontos limites. Mormente, nota-se que, para curvas geodésicas, ao atribuir toda a curvatura dos arames à direção normal do mesmo, outros modos de flambagem podem ser despertados, principalmente modos acoplados. Isso, pois o ‘estímulo’ dado à flambagem ocorre em direção ortogonal à direção em que se espera a flambagem. Ademais, as restrições cinemáticas impostas na Seção III.3.2. devem dificultar deslocamentos normais que destaquem os arames da superfície do toro. Supõe-se, portanto, que essas curvaturas normais, bem como a inserção de curvaturas na direção binormal, que, por sua vez, tendem a provocar pontos críticos mais baixos, justifiquem o comportamento encontrado.

Essas inferências podem ainda ser corroboradas ao analisar o comportamento não-linear obtido no traçado do caminho de equilíbrio sob a hipótese loxodrômica e geodésica (ver Figura IV-5). Enquanto a curva loxodrômica apresenta a perda de rigidez axial, atribuída à influência da “imperfeição geométrica”, representada pela curvatura geodésica, a curva da hélice apresenta comportamento linear, visto que essa curva não apresenta curvatura na direção binormal.

Esses resultados, de forma geral, vão de encontro direto à premissa obtida por Østergaard (2012) de que a curvatura do duto não influi na resposta à flambagem lateral dos arames. Porém, deve-se ressaltar que o modelo de Østergaard (2012) não utiliza das premissas das curvas limites, adotadas pelo modelo numérico apresentado nesta tese, mas permite que as curvaturas variem livremente com a tensão e com a flexão dos dutos. De Østergaard (2012), ainda, é notado que, quando os dutos são puramente fletidos, suas curvaturas apresentam-se entre os valores das curvaturas da curva loxodrômica e geodésica, sendo mais próximas da primeira. À medida que os arames, inicialmente fletidos, são tracionados, essas curvaturas aproximam-se das curvaturas

geodésicas. O oposto é notado quando os arames são fletidos e comprimidos, isto é, suas curvaturas tendem ainda mais para as curvaturas loxodrômicas.

Vale ainda dizer que a hipótese de que a curvatura do duto, quando o arame segue o caminho de uma curva loxodrômica, diminui a capacidade de carga suportada⁴⁵ pelo duto é corroborada pelos resultados de Sævik & Thorsen (2012), no qual o modelo de elementos finitos adota essa mesma curva limite como caminho seguido pelos arames quando os dutos são fletidos. No referido trabalho, ainda é notado que o aumento da curvatura dos dutos (menores raios de curvatura) acarreta menores capacidades de carga dos dutos (Sævik & Thorsen, 2012).

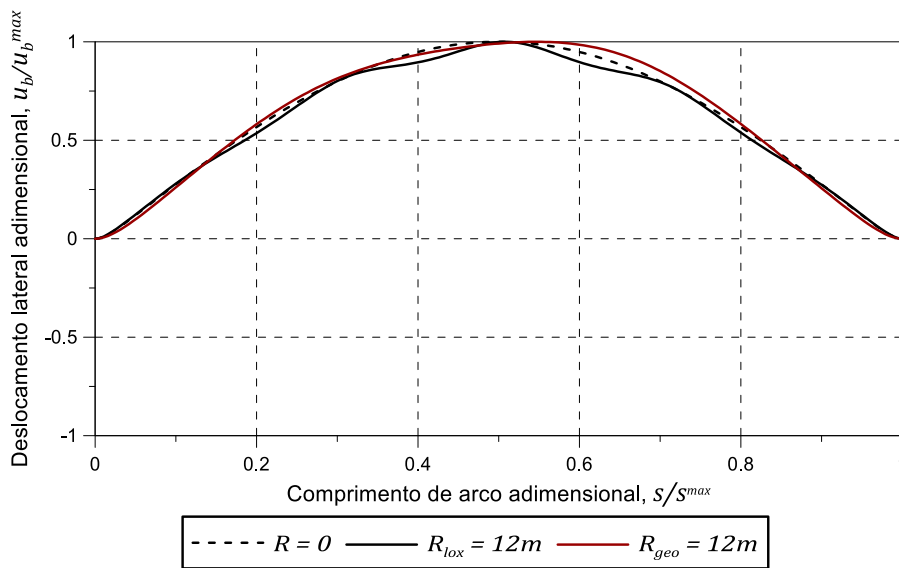
Os modos de instabilidade, quando considerados os efeitos de flexão, são ligeiramente distintos dos modos apresentados anteriormente para o duto reto (Seção 0). As curvas limites, ainda, apresentam modos críticos que são diferentes entre si, como pode ser visto na Figura IV-8. A Tabela IV-13 apresenta as cargas críticas associadas aos seus respectivos modos quando se consideram os efeitos de flexão segundo as curvas (a) loxodrômica e (b) geodésica. Já as Figura IV-9 e Figura IV-10 ilustram os cinco primeiros modos para um duto genérico com os arames inicialmente sobre a curva loxodrômica e geodésica, respectivamente.

Tabela IV-13 – Carga crítica de flambagem lateral para os cinco primeiros modos de cada um dos dutos estudados com $R = 12m$ para as curvas (a) loxodrômica e (b) geodésica.

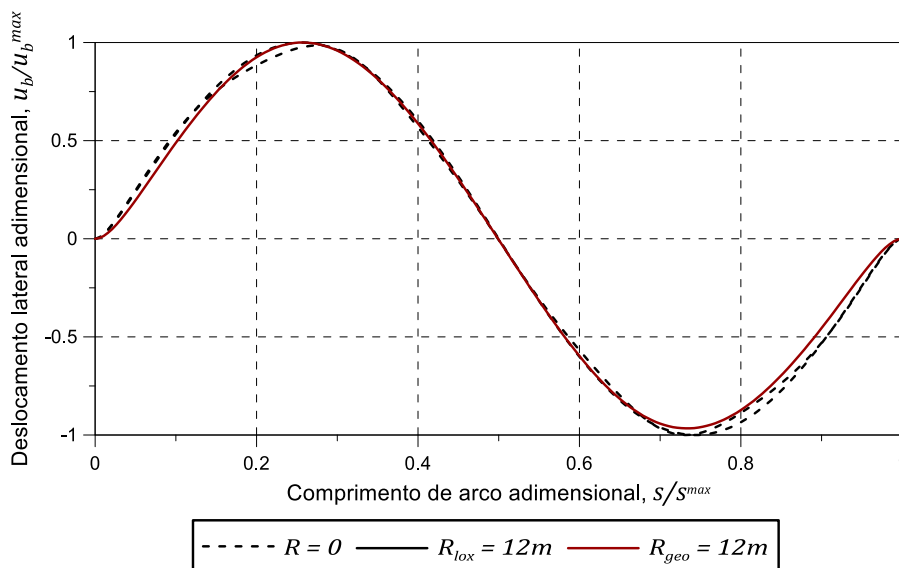
Modo de flambagem	Dutos Flexíveis							
	6" riser		8" riser		9,5" riser		14" jumper	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
1°	97,8kN	115,1kN	226,8kN	256,7kN	71,9kN	83,2kN	141,2kN	157,2kN
2°	115,2kN	192,8kN	249,9kN	370,8kN	77,6kN	125,5kN	160,7kN	253,6kN
3°	135,1kN	347,8kN	275,1kN	755,9kN	85,4kN	248,1kN	171,2kN	502,3kN
4°	162,8kN	348,6kN	323,0kN	756,3kN	98,8kN	248,2kN	198,0kN	502,7kN
5°	218,4kN	366,8kN	360,1kN	786,8kN	119,9kN	261,9kN	227,4kN	503,8kN

⁴⁵ A geodésica, obtida pela resolução das equações de Euler-Lagrange, é, por própria definição, a curva de menor energia de deformação, isto é, aquela que satisfaz ao princípio da mínima ação ou o PEEPT.

Enfim, os resultados das cargas críticas, bem como seus modos associados, são bastante distintos, especialmente para modos mais alto do que o segundo. Tal fato indica que a posição inicial dos arames, mesmo que aparentemente próximas umas as outras (loxodrômicas às geodésicas e vice-versa), aportam significância relevante à resposta da estrutura à flambagem lateral. Pode-se especular, visto as grandes amplitudes das janelas de cargas experimentais obtidas por Østergaard (2012), que as posições dos arames, quando o duto é fletido, estejam a contribuir para esses resultados, bem como a influência do efeito do atrito lateral, que será investigado na próxima seção.

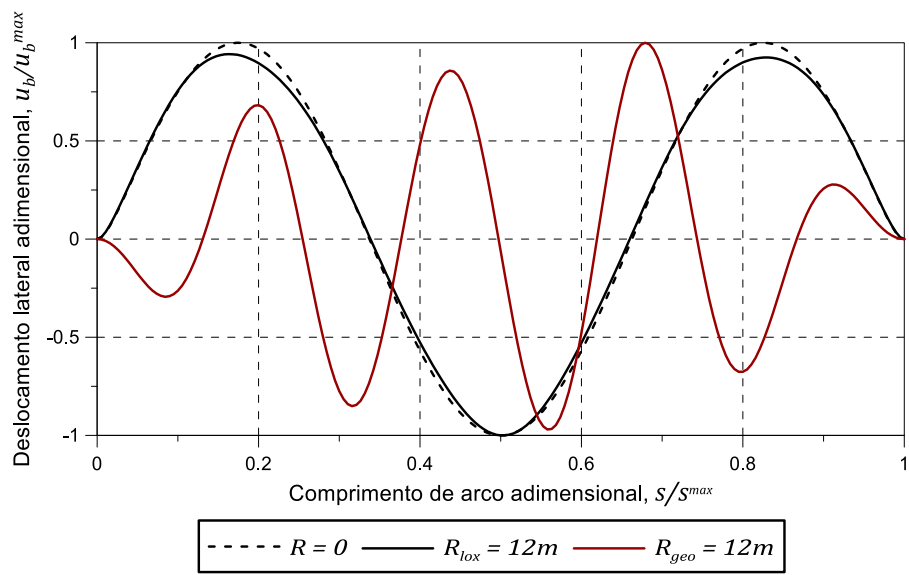


(a)

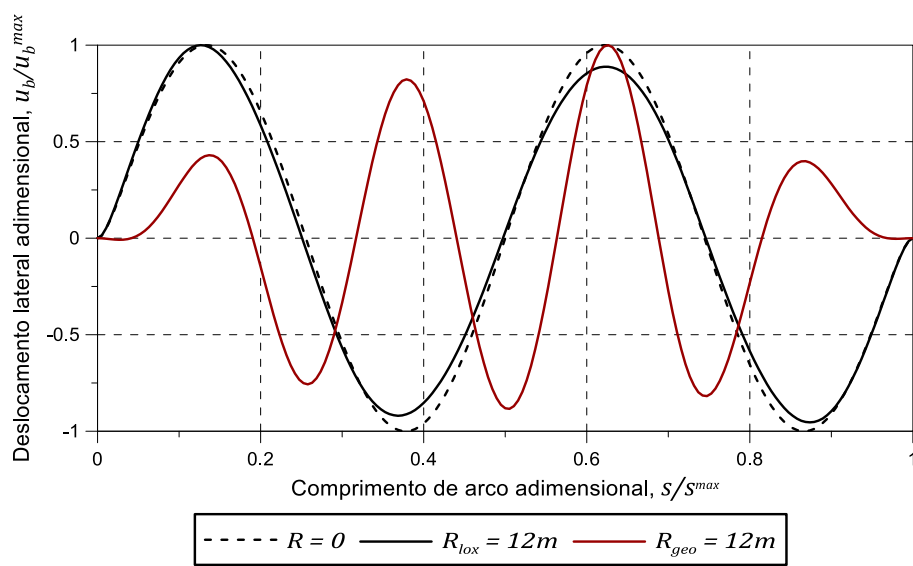


(b)

(Figura IV-8, continua na página seguinte)

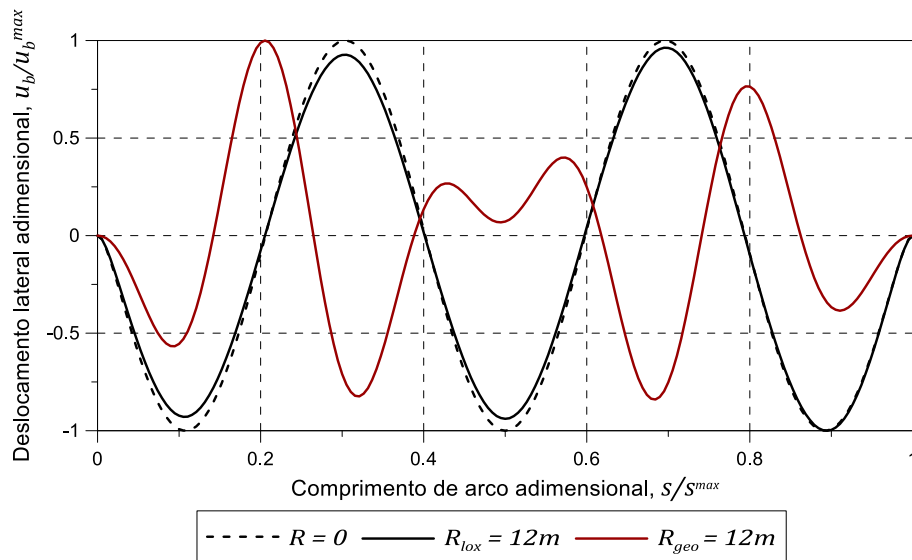


(c)



(d)

(Figura IV-8, continua na página seguinte)



(e)

Figura IV-8 – Modos de flambagem lateral e seus deslocamentos laterais para $R = 0$ e $R = 12m$: (a) primeiro modo; (b) segundo modo; (c) terceiro modo; (d) quarto modo; e (e) quinto modo.

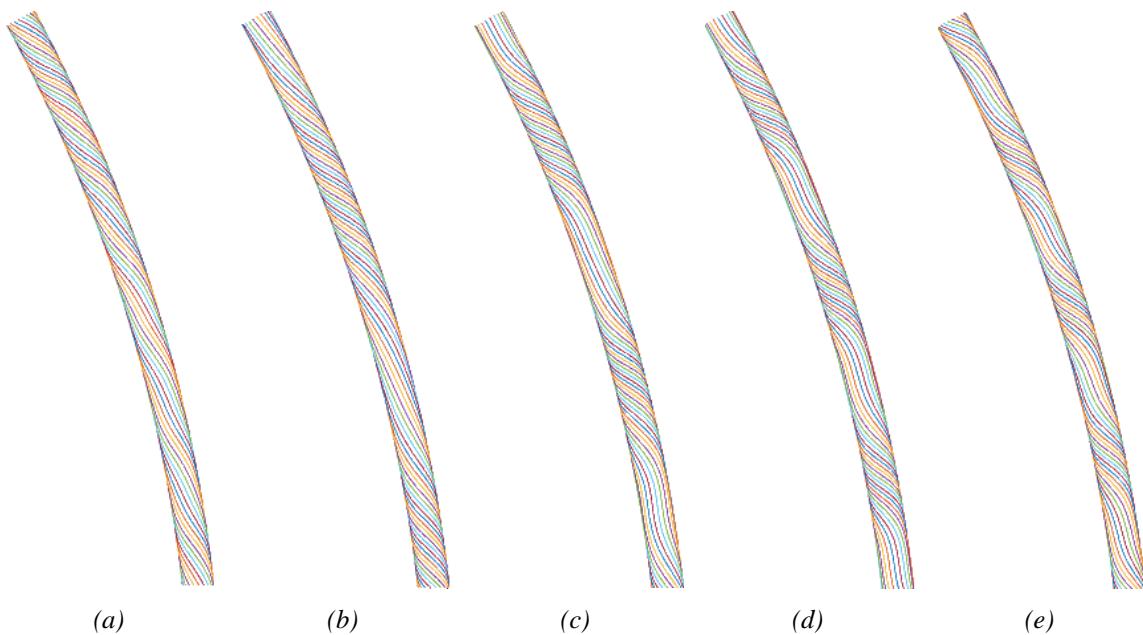


Figura IV-9- Modos de flambagem lateral para $R = 12m$ considerando a curva loxodrômica: (a) primeiro modo; (b) segundo modo; (c) terceiro modo; (d) quarto modo; e (e) quinto modo.

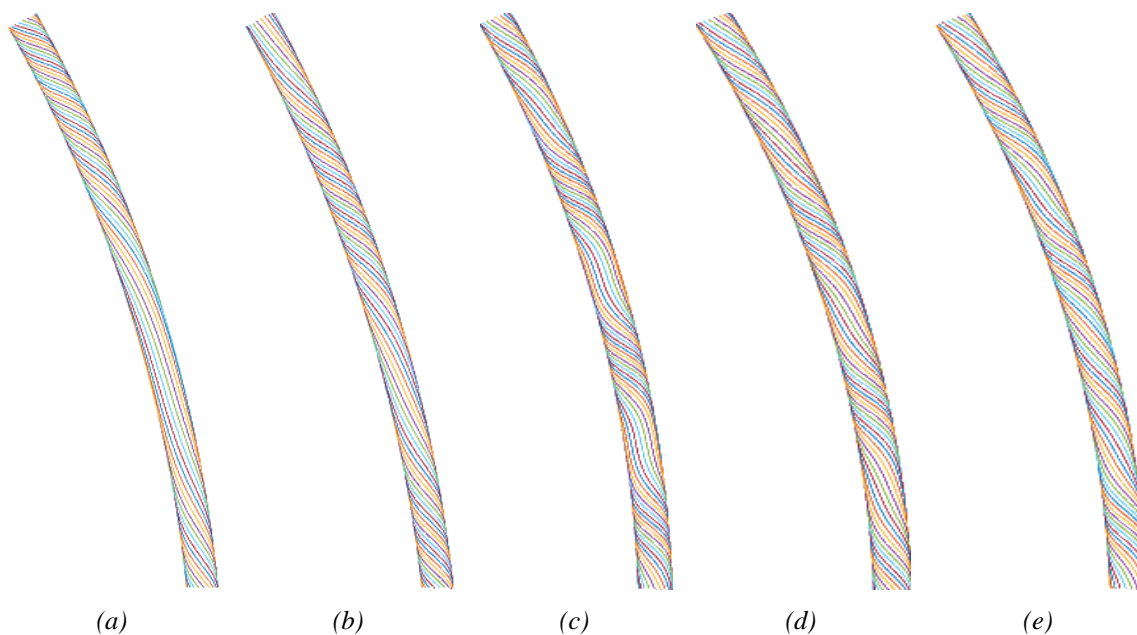


Figura IV-10- Modos de flambagem lateral para $R = 12m$ considerando a curva geodésica: (a) primeiro modo; (b) segundo modo; (c) terceiro modo; (d) quarto modo; e (e) quinto modo.

IV.3.6. Fundações elásticas: analogia ao atrito e à fita de alta resistência

Esta seção visa o estudo da influência das fundações elásticas na instabilidade dos arames da armadura de tração, bem como relacionar essas fundações à mecânica dos dutos flexíveis. Os quatro dutos (Seção IV.2.) são analisados quanto as variações das rigidezes das fundações elásticas. Por fim, será proposta uma analogia entre esses valores de rigidezes binormal e os coeficientes de atrito na direção binormal.

Primeiramente, são apresentadas as Tabela IV-14 e Tabela IV-15, as quais mostram as capacidades de cargas obtidas para cada um dos quatro dutos analisados ao se variar as rigidezes das fundações elásticas nas direções normal e binormal.

Os resultados apresentados pelas Tabela IV-14 e Tabela IV-15 indicam que as rigidezes das bases elásticas nas direções normal e binormal afetam a capacidade de carga do duto. A rigidez normal afeta de modo bastante brando a capacidade de carga, ao passo que a rigidez binormal incide sobre esse parâmetro mais intensamente. O aumento máximo da rigidez normal (de aproximadamente 0 a $10^4 N/mm^2$) provoca um acréscimo de aproximadamente 20% no valor da capacidade de carga. Isso pode ser atribuído à restrição aos pequenos deslocamentos que ocorrem na direção normal dos

arames. Esses deslocamentos ocorrem, em sua maioria, a fim de cumprir com as hipóteses cinemáticas e manter os arames sobre a superfície do toro.

Tabela IV-14 – Carga crítica de flambagem lateral (MVC) para valores diversos de rigidezes da fundação elástica na direção binormal (k_B).

k_B (N/mm^2)	<i>Dutos Flexíveis</i>			
	<i>6" riser</i>	<i>8" riser</i>	<i>9,5" riser</i>	<i>14" jumper</i>
10^{-2}	100,7kN	237,9kN	72,6kN	143,3kN
10^{-1}	100,8kN	238,7kN	72,6kN	143,4kN
10^0	101,7kN	240,1kN	73,2kN	145,2kN
10^1	107,7kN	249,9kN	75,3kN	152,5kN
10^2	120,7kN	281,4kN	81,5kN	175,9kN
10^3	127,6kN	289,8kN	92,1kN	189,2kN
10^4	128,1kN	289,2kN	93,3kN	191,0kN

Tabela IV-15 – Carga crítica de flambagem lateral (MVC) para valores diversos de rigidezes da fundação elástica na direção normal (k_N).

k_N (N/mm^2)	<i>Dutos Flexíveis</i>			
	<i>6" riser</i>	<i>8" riser</i>	<i>9,5" riser</i>	<i>14" jumper</i>
10^{-4}	101,9kN	239,7kN	72,7kN	145,4kN
10^{-3}	103,6kN	242,8kN	77,2kN	160,4kN
10^{-2}	120,2kN	272,7kN	120,8kN	244,5kN
10^{-1}	413,6kN ¹	901,2kN ¹	392,3kN ¹	794,1kN ¹
10^0	1494,4kN ¹	2897,4kN ¹	1556,9kN ¹	2180,9kN ¹
10^1	2043,2kN ²	6149,5kN ²	2329,7kN ²	3947,1kN
10^2	2043,2kN ²	6149,5kN ²	2329,7kN ²	3947,1kN

¹Mudança no modo de flambagem; ²Flambagem na direção normal

Acerca das rigidezes binormais, as capacidades de cargas aumentaram em mais de 20 vezes para todos os dutos. Essas rigidezes passam a agir sobre o mecanismo estudado mais intensamente a partir dos valores de $10^{-1} N/mm^2$, os quais estão associados à mudança do modo de instabilidade lateral. Para patamares de rigidezes

maiores que $10N/mm^2$, não mais se observou acréscimo na capacidade de carga, pois o modo encontrado é ortogonal àquele obtido anteriormente e dado, majoritariamente, na direção normal do arame.

Nesse ponto, mais uma vez, vale discutir as janelas de capacidade de carga determinadas pelos experimentos de Østergaard (2012) e expostas na Tabela IV-12. Conforme mencionado no item anterior, Seção IV.3.5. , os modelos teóricos, ao desconsiderarem os efeitos do atrito, apresentam capacidades de cargas que aparentam aproximar-se dos limites inferiores expostos por essas janelas de cargas. Ainda mais, é notado por Braga & Kaleff (2004), que os experimentos para a reprodução do mecanismo de flambagem lateral das armaduras de tração realizados em laboratório costumemente apresentam capacidades de cargas bastante inferiores àqueles realizados em campo (*DIP tests*).

Acredita-se, e corrobora-se essa crença pelos resultados apresentados na Tabela IV-15, que o atrito deve contribuir significativamente para aumentar a capacidade de carga dos dutos, o que pode, em grande parte, explicar as diferenças obtidas entre os experimentos e entre os experimentos e as previsões teóricas. Pode-se atribuir, portanto, por não mais que uma suposição, que os experimentos laboratoriais tendam a ter maior eficiência em dirimir a ação das forças de atrito do que os *DIP tests*, porém ainda guardem algum vestígio dessa ação.

O papel do modelo de atrito na determinação da capacidade de carga é corroborado por modelos teóricos outros que não o de Østergaard (2012), para quem o atrito não influi significativamente no mecanismo de flambagem lateral. Os modelos propostos por Vaz & Rizzo (2011) e por Yang *et al.* (2015), por exemplo, instruem que mesmo pequenas forças de atrito ocasionam significantes acréscimos à capacidade de carga dos dutos flexíveis.

Tendo isso exposto, um primeiro exercício interessante consta em determinar valores de coeficientes de atrito equivalentes para os arames dos dutos de 6", de 8" e de 14" que correspondam a valores das rigidezes das fundações elásticas que levem as capacidades de cargas aos limites superiores das janelas experimentais reproduzidas na Tabela IV-12. Esses valores devem ser baixos, uma vez que os experimentos realizados buscavam reproduzir a condição de anular alagado.

É observado que se forem consideradas as fundações elásticas, no MVC, com rigidezes binormais, aproximadamente, de $k_B^{6''} = 5kPa$, $k_B^{8''} = 6kPa$ e $k_B^{14''} = 4kPa$, os quais representam coeficientes de atrito iguais à $\mu^{6''} = \mu^{8''} \cong \mu^{14''} \cong 0,01$ os limites superiores da janela de capacidades de cargas determinados por Østergaard (2012) são obtidos, conforme pode ser notado na Figura IV-11. Esses valores estão bastante próximos dos valores obtidos experimentalmente por Sævik (1992) para os coeficientes de atrito quando o contato é lubrificado.

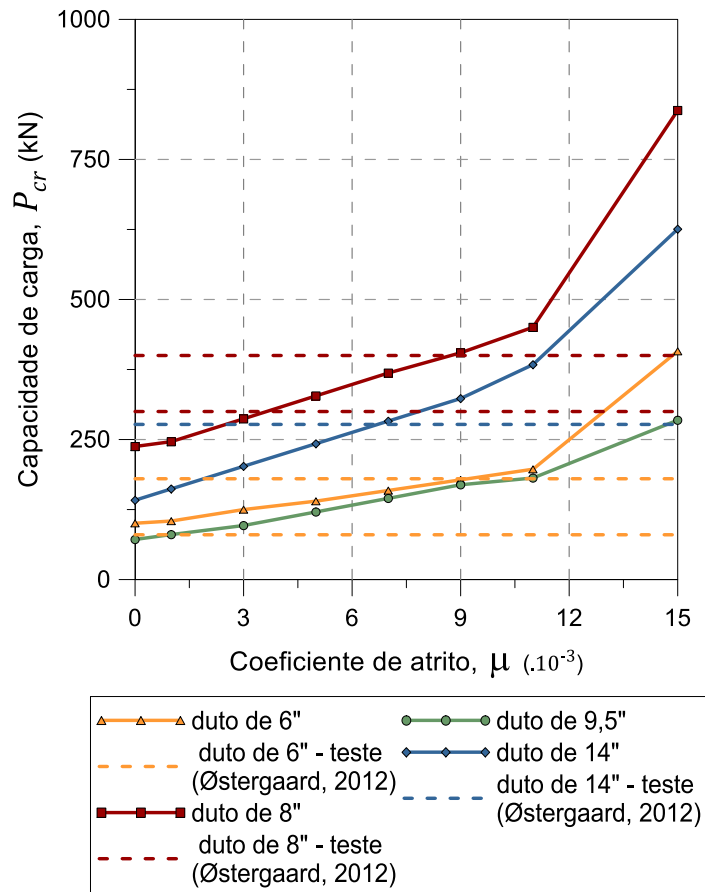


Figura IV-11 – Influência do coeficiente de atrito na capacidade de carga do duto para coeficientes de atrito baixos ($\mu = 0 \dots 0,015$).

Não se pode precisar quais valores devam, ao certo, representar a condição de teste mencionada. Porém, pode-se inferir que o atrito agindo no teste seja consideravelmente menor que os adotados usualmente no projeto de dutos flexíveis, posto que o experimento objetiva representar a condição de anular alagado mediante o alívio das pressões de contato. Por exemplo, como mencionado na Seção IV.3.1.3. Merino *et al.* (2010) estabelecem experimentalmente que os coeficientes de atrito, para condições normais, devam estar entre a faixa de 0,07 e 0,30. Usualmente, os modelos

numéricos e analíticos para análise locais dos dutos flexíveis adotam coeficientes de atrito entre 0,10 e 0,15, conforme pode ser visto em Sævik (1992)⁴⁶, Sævik & Berge (1995), Leroy & Estrier (2001), de Sousa (2005), Larsen *et al.* (2014), etc. Entretanto, ao analisar os resultados obtidos (Figura IV-11), é possível constatar que as faixas de coeficientes de atrito que levam a capacidades de cargas próximas às determinadas pelo experimento de Østergaard (2012) são bastante menores (entre $\mu^6 = 0,000$ e $0,009$; e $\mu^8 = 0,003$ e $0,009$) que os coeficientes usualmente adotados nas análises numéricas de flexão, mesmo para seus limites superiores. Esse fato se mostra coerente com a concepção do ensaio e com os resultados do modelo e fornecem indicativos de coeficientes de atrito a serem utilizados em projetos futuros de flambagem lateral dos arames.

Outro exercício interessante consta em comparar os resultados obtidos para o duto de 9,5” com aqueles obtidos por Vaz & Rizzo (2011) e Yang *et al.* (2015). Isso permite que se constate que o MVC apresenta resultados qualitativamente em acordo com os modelos previamente apresentados na literatura técnica, ao menos para as redondezas da faixa de coeficientes de atrito definida no trabalho de Merino *et al.* (2010). Essa comparação é apresentada na Figura IV-12.

É interessante notar, na Figura IV-12, que nenhum dos modelos apresenta acréscimo na capacidade de carga para coeficientes de atrito aproximadamente maiores que 0,10. Também se pode notar que essas cargas críticas estão relativamente próximas umas das outras, guardando maior relação com o modelo de Vaz & Rizzo (2011) (desvios menores que 1%) do que com o modelo de Yang *et al.* (2014) (desvio de aproximadamente 15%).

⁴⁶ Como mencionado rapidamente, Sævik (1992) também realiza experimentos para a determinação de coeficientes de fricção. Seus experimentos resultam em diferentes valores de coeficientes de atrito para diferentes situações. Os valores extremos acontecem para quando a velocidade de escorregamento é nula, equivalem a 0,3, e para a condição de contato lubrificado, 0,01. No entanto, ele sugere adotar os valores de 0,05 e 0,1 entre as armaduras interna e externa e entre a armadura interna e o substrato do duto, respectivamente.

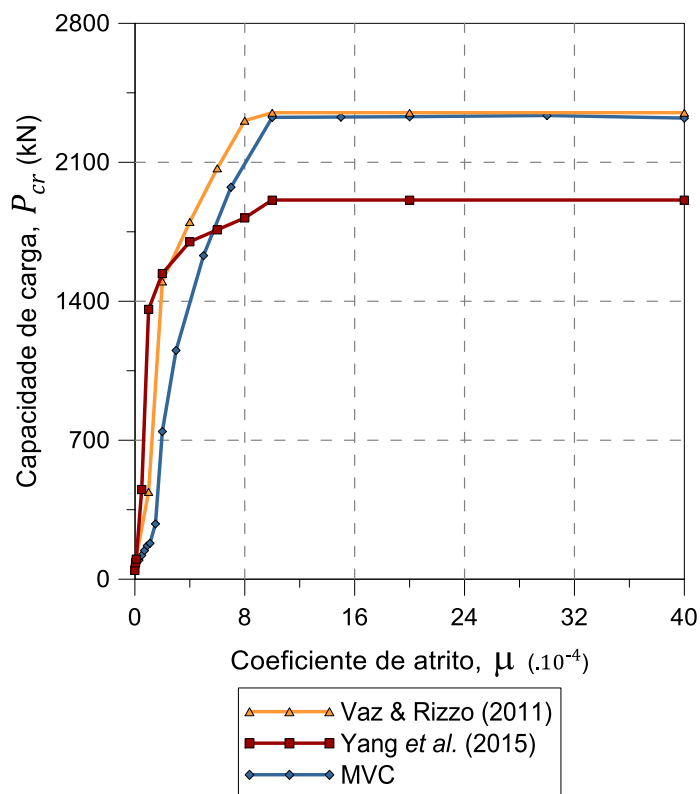


Figura IV-12 – Capacidade de carga para a variação do coeficiente de atrito ($\mu = 0 \dots 0,4$): comparação entre modelos teóricos [MVC, Vaz & Rizzo (2011) e Yang et al. (2015)].

Pode-se observar, ainda, que o acréscimo da força de atrito impõe maior resistência à instabilidade lateral nos arames das armaduras de tração. Essa relação não é linear. Sobre a curva apresentada para o MVC, é importante destacar que as mudanças de inclinação podem ser associadas às mudanças do modo de instabilidade, como notado, por exemplo, quando $\mu = 0,011$ (ver Figura IV-11). Esse valor é quase o mesmo que o $\mu = 0,01$, valor determinado por Yang et al. (2015), para a primeira mudança de modo de flambagem lateral (do primeiro para o segundo modo da Figura IV-8). Vaz & Rizzo (2011), por sua vez, detectam uma mudança de modo quando $\mu = 0,020$, a qual aparece novamente no MVC como uma *segunda mudança de modo* (do segundo para o terceiro modo da Figura IV-8) quando o coeficiente de atrito atinge 0,025.

Ainda de acordo com a análise da Figura IV-12, para coeficientes maiores que $\mu = 0,10$, o modo de instabilidade muda pela última vez, tanto para os modelos de Vaz & Rizzo (2011) e Yang et al. (2015), quanto para o MVC. Essa mudança, entretanto, não compreende um modo de instabilidade lateral, mas radial. Os modos de

instabilidade radiais foram referenciados como “Modo C” e “Modo D” por Vaz & Rizzo (2011). Enquanto o primeiro representa a falha da fita de alta resistência, o segundo consiste na flambagem elástica radial, a qual se apresenta como “rugas” na direção normal dos arames. Segundo Vaz & Rizzo (2011), este último modo representa um evento mais raro, porque, para ocorrer, faz-se necessário que altas pressões externas estejam conjugadas com altos coeficientes de atrito.

O MVC não leva em consideração o “Modo C”, para o qual existem expressões analíticas que satisfazem essa carência do modelo, como a proposta por Sævik & Thorsen (2012), com razoável acurácia. Com uma ligeira modificação, essa expressão, Equação IV-25, permite considerar todas as camadas poliméricas que contribuem para a estabilidade das camadas do duto. Mediante o uso dessa expressão, é possível determinar se a flambagem radial notada no duto seguirá o “Modo C” ou o “Modo D”, descritos por Vaz & Rizzo (2011).

$$P_{cr} = \sum_{j=1}^{n_{pl}} \frac{2\pi \cdot r_j^2 \cdot t_{plj}}{r_{plj} \cdot \tan^2 \phi} \cdot \sigma_{uj} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{IV-25} \end{array}$$

onde r_{pl} , σ_u e t_{pl} são o raio médio, a tensão de escoamento e a espessura de cada camada polimérica considerada.

Por conseguinte, a menor das duas compressões axiais, aquela calculada pelo MVC ou aquela determinada para o *birdcaging*, por meio da Equação IV-25, deve indicar o modo no qual os arames tenderam a instabilizar, o “Modo D” ou o “Modo C”, respectivamente.

A Figura IV-13 apresenta, para os quatro dutos estudados, a variação da capacidade de carga frente a diferentes coeficientes de atrito. Nessa figura, para efeito de comparação, as forças axiais responsáveis pelo rompimento das fitas e camadas poliméricas externas às armaduras de tração também são apresentadas.

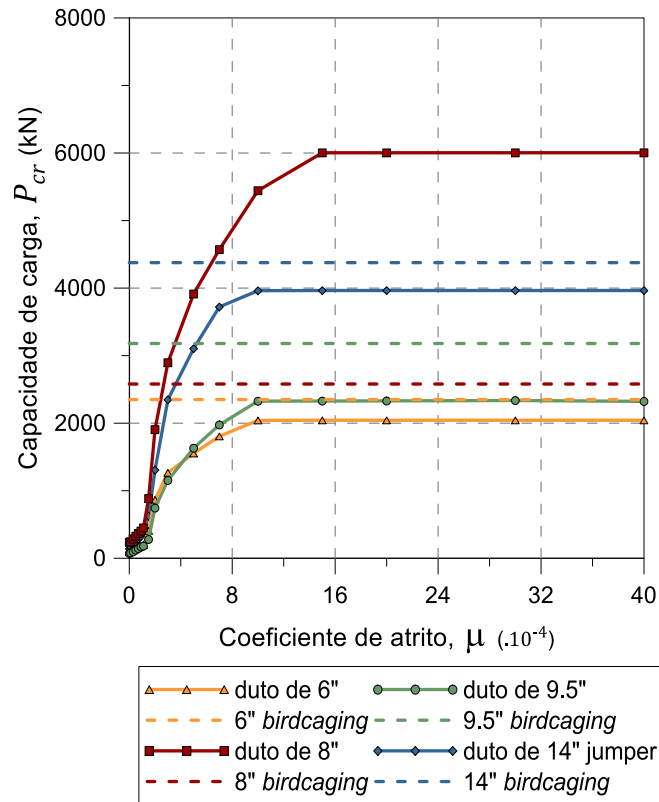


Figura IV-13 – Influência do coeficiente de fricção na capacidade de carga.

Observando a Figura IV-13, percebe-se que:

- Segundo a metodologia proposta, apenas o duto de 8” falharia de acordo com o “Modo C”, enquanto os demais tenderiam a falhar pela instabilidade radial segundo o “Modo D”. Além disso, é importante notar que, quando os tendões se instabilizam no “Modo D”, o aumento da compressão axial pode levar posteriormente à falha das camadas poliméricas e, conseqüentemente, ao “Modo C”.
- A mudança de direção da flambagem de lateral para radial ocorre para coeficientes de atrito entre $\mu = 0,10 - 0,15$ em todos os dutos.
- Se apenas as fitas forem consideradas nas estimativas da carga axial de instabilidade (Equação IV-25), apenas o duto 9,5” falharia pelo “Modo D”, enquanto os demais apresentariam a instabilidade de acordo com o “Modo C”.
- Conforme já mencionado para o duto de 9,5”, as mudanças de inclinações nas curvas apresentadas também indicam mudanças de modos de flambagem lateral para os demais dutos.

CAPÍTULO V

MODELO EMPÍRICO-ANALÍTICO PARA A ANÁLISE DE FLAMBAGEM LATERAL DAS ARMADURAS DE TRAÇÃO DE *RISERS* FLEXÍVEIS

V.1. Apresentação

Até aqui, objetivou-se explorar de forma pontual os valores e validades dos resultados do modelo numérico, bem como suas principais particularidades. Neste capítulo, no entanto, será proposta uma expressão analítica que permita calcular a magnitude da carga crítica de instabilidade lateral de um arame assentado sobre o duto reto quando coeficientes de atrito menores que 0,10 são considerados. Essa faixa de coeficiente de atrito foi estipulada, porque, como visto na Seção IV.3.6. , para coeficientes de atrito maiores que o referido valor o modo de flambagem sofre alteração, deixando de ocorrer na direção lateral. Antes de apresentar a expressão, a metodologia empírica, baseada no uso de RS, utilizada para sua obtenção, será detalhada.

V.2. Algoritmos genéticos e a regressão simbólica

Uma maneira usual de obter soluções para problemas complexos é a utilização de algoritmos genéticos que buscam padrões interpretáveis em séries de dados, provenientes de experimentos e/ou modelos mais complexos, como os de elementos finitos, e as respectivas respostas associadas a esse problema. Dentre os diversos tipos de algoritmos genéticos, destacam-se aqueles responsáveis pela execução de RS. De forma geral, os algoritmos genéticos utilizam-se dos conceitos, cunhados por Darwin, presentes na evolução natural. A evolução ou seleção natural atesta que características hereditárias favoráveis à adaptabilidade das espécies tem a tendência de se perpassarem geneticamente pela reprodução, ao passo que características desfavoráveis, tendem a desaparecer (Koza, 1992).

Dessa forma, mediante as operações de **reprodução** ou **cruzamento** e **mutação**, um algoritmo genético procura controlar a **evolução** de uma dada população, isto é, para o caso específico da RS, o conjunto de expressões que objetivam ajustar os **dados de entrada** do programa. Os dados de entrada podem deter diversas dimensões, mas sempre devem resguardar a característica de correlacionar essas dimensões com os resultados do fenômeno a ser estudado. Em outras palavras, cada uma das variáveis que influem na resposta do fenômeno compõe a dimensão do problema. Os resultados, seja de uma medição seja de uma análise numérica de maior complexidade, são os valores alvos que as equações empregadas, ou soluções, objetivaram alcançar. Quanto maior for a dimensão do problema, maior será a dificuldade do algoritmo em “desvendar” as “leis naturais” subjacentes ao fenômeno estudado.

Cada uma das soluções é chamada de **cromossomo**, que, a cada geração, deverá passar por um processo de ajuste e correlação entre os dados fornecidos. Esse processo é o responsável por determinar quais respostas, ou cromossomos, possuem maiores chances de passarem suas características às novas gerações. Em outras palavras, quanto melhores ajustados forem os dados pelas expressões testadas, no caso da RS, maiores as chances desses termos passarem para as próximas gerações. Os **cruzamentos** são processos de reproduções em que se combinam **genes**, ou parcelas das expressões analíticas testadas, de dois cromossomos bem sucedidos nos testes de ajustes e compõe uma nova geração de respostas. **Mutações**, por outro lado, são processos

assexuais, pois, ocorrem dentro de uma mesma geração e de um mesmo cromossomo. Essa operação altera termos individuais das equações de cada um dos cromossomos, criando novas respostas e garantindo que a diversidade da população seja restaurada (Koza, 1992).

Ambos os processos apresentados são controlados por taxas máximas de ocorrência e objetivam procurar dentro do espaço de equações pré-estabelecido leis naturais subjacentes aos dados iniciais. A Figura V-1 ilustra os principais passos de um algoritmo genético geral.

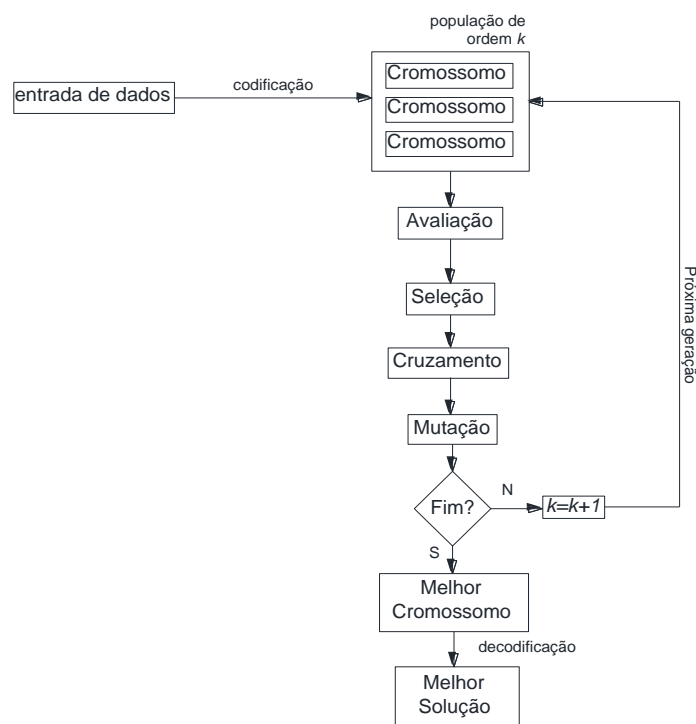


Figura V-1 – Fluxograma de um algoritmo genético geral.

A RS é um processo orientado por dados capaz de extrair um modelo apropriado do espaço de expressões matemáticas, S , as quais são definidas e determinadas por uma série de operações binárias (Schmidt & Lipson, 2009). Esse tipo de regressão, calcada na otimização de métricas de erro, não requer modelos matemáticos com formas específicas fixas, conforme ocorre com os métodos tradicionais de regressão linear e não-linear, os quais, por suas vezes, consistem em adequar parâmetros a equações de formas pré-definidas (linear, polinomial, exponencial, etc.). Como ensina Koza (1992), a RS consiste, pois, na própria busca por

expressões/equações, em suas formas simbólicas, que se ajustem à coleção de dados fornecida. Em outras palavras, ambos, parâmetros e forma, são variados com o objetivo de ajuste dos dados. O procedimento executado pelo algoritmo para a retenção ou descarte das expressões matemáticas pode ser escrito pela Equação V-1

$$f^* = \arg \min_{f \in S} \sum_i^N \frac{\|f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}, x_n^{(i)}) - y_i\|^2}{N} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{V-1} \end{array}$$

onde $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}, x_n^{(i)}) \in \mathbb{R}^n$ e $y_i \in \mathbb{R}$ são os dados de entrada, sendo os últimos os valores representativos do fenômeno ilustrado; f^* é a equação resultante e f a combinação dos blocos matemáticos usados na regressão.

A RS funciona, inicialmente, formando expressões mediante a combinação aleatória de blocos matemáticos, constituídos de operadores algébricos (+, -, ×, ÷), funções analíticas (seno, cosseno, tangente, exponencial, etc.), constantes e variáveis de entrada $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, cada um com sua dimensão unitária característica, que constituem, conforme aparecem na solução, a dimensão do problema. Em cada passo, as equações simbólicas devem competir para aproximar os dados fornecidos ao programa. Enquanto as expressões que mais bem se ajustam aos dados de entrada são retidas, aquelas com ajustes piores são descartadas. Esse processo pode ser baseado em diversas medidas de dispersão, neste trabalho será utilizado a medida do erro médio quadrático (EMQ), dado pela Equação V-2 (Schmidt & Lipson, 2009).

$$EMQ = \frac{1}{N} \cdot \sum_i^N [y_i - f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}, x_n^{(i)})]^2 \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{V-2} \end{array}$$

Após um tempo suficiente de computação, o algoritmo retorna uma série de equações, seus tamanhos e parâmetros de ajustes com relação à série de dados (y_i) fornecida na entrada do programa. As equações variam das mais sofisticadas e acuradas às mais simples e de menor grau de acurácia. Com o intuito de obter um modelo fisicamente significativo, a solução adotada, conforme sugestão de Schmidt & Lipson (2009), deve satisfazer o princípio da **Navalha de Occam**. Este princípio diz que, dada

mais de uma solução satisfatória para um determinado problema, a solução mais simples é aquela a ser adotada.

V.3. Modelo Empírico-Analítico

Neste trabalho, o programa computacional comercial EUREQA® (Schmidt & Lipson, 2009) foi empregado para a realização das análises de RS em dois momentos, a dizer: na obtenção de uma equação analítica simples que satisfizesse as equações diferenciais da geodésica, o que permite com que se trabalhe com as curvaturas dessa curva no modelo de elementos finitos, sem que haja a necessidade de simplificações na expressão⁴⁷; e na obtenção de uma expressão analítica para a carga crítica que levasse em conta a consideração dos efeitos das fundações elásticas, baseadas nos resultados do modelo de elementos finitos.

Para a obtenção de uma equação fechada que dê conta dos efeitos de flambagem lateral dos arames de armadura de tração dos dutos flexíveis, foram utilizados 39 dutos flexíveis, os quais apresentam características físicas e geométricas dentro da janela estipulada pela Tabela V-1 para cada um dos nove parâmetros considerados. Esse procedimento é semelhante ao empregado por de Paiva & Vaz (2017). No entanto, neste trabalho, os resultados utilizados como entrada para o algoritmo genético foram obtidos do modelo de elementos finitos aqui apresentados. A vantagem desse processo consiste na possibilidade de obter uma expressão fechada, de relativa simplicidade, que permita avaliar a influência do atrito nas cargas e nos modos críticos.

Vale ainda ressaltar que a variação do coeficiente de atrito também foi considerada. Nesse sentido, cada um dos trinta e nove dutos é analisado considerando coeficientes de atrito que variam de 0,00 a 0,10, o que leva a um total de 429 casos de treino para o algoritmo genético. Nessas análises, porém, há a possibilidade da mudança do modo de flambagem dos arames com o aumento do coeficiente de atrito, o que é

⁴⁷ Esses resultados podem ser vistos em (Gonzalez, et al., 2018) e são apresentados de maneira sucinta no APÊNDICE E.

traduzido em mudanças de inclinação da curva correspondente ao comportamento da carga crítica *versus* o coeficiente de atrito.

Tabela V-1 – Características dos dutos usados como entrada no EUREQA®.

<i>Características</i>	<i>Janela de valores</i>
Raio médio das armaduras (r)	60 – 200 mm
Largura da seção transversal do arame (w)	5 – 20 mm
Altura da seção transversal do arame (h)	2 – 10 mm
Ângulo de assentamento dos arames (ϕ_0)	25° – 40°
Número de arames (n_{ar})	50 – 150
Módulo de elasticidade (C_σ)	207 – 210 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0.3
Tensão última do arame (σ_u)	750 – 1500 MPa
Tensão de escoamento do arame (σ_y)	680 – 1350 MPa

Dessa forma, atendo-se apenas à magnitude dessa carga, podem-se considerar os coeficientes de atrito, em conjunto com as demais características do duto, como aquelas a constituírem as variáveis do programa $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n-1}^{(i)}, x_n^{(i)})$. As cargas críticas obtidas pelo modelo de elementos finitos fazem o papel dos **valores alvo**, ou **outputs**, fornecidos como entrada ao programa EUREQA® e são, nesta tese, representados por y_i .

Visto que o problema proposto apresenta um espaço multidimensional bastante grande e variáveis com dimensões distintas, uma possibilidade recai à adimensionalização dessas variáveis. Com as características dos dutos, podem-se determinar quais grandezas físicas influem mais ativamente no fenômeno de flambagem e o processo de adimensionalização deve levar em consideração tais parâmetros físicos e geométricos dos dutos analisados.

Duas classes de variáveis regem problemas mecânicos elásticos, ou seja, aquelas que descrevem o carácter geométrico das estruturas (o comprimento, a área da seção, etc.) e as que constituem suas características físicas (o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson, etc.). Para utilização do programa de RS, EUREQA®,

preocupou-se com a consistência entre as unidades dos parâmetros regentes do mecanismo de flambagem e a unidade do parâmetro a ser previsto, ou seja, a carga crítica à flambagem lateral de um único arame.

O trabalho de de Paiva & Vaz (2017) baseou-se no termo ressaltado por Mitchell (2007), $\frac{C_{\tau}J}{r^2}$, dominante no fenômeno de flambagem de colunas de perfuração, para a definição dos termos de entrada (*input*) do programa de RS. As demais rigidezes à flexão, normal ($C_{\sigma}I_N$) e binormal ($C_{\sigma}I_B$), são apresentadas sob esse mesmo formato (ver Equação V-3). Os mesmos termos foram utilizados neste trabalho, pois, além de todos aparecerem diretamente na formulação analítica proposta por Sævik & Ji (2014) (Equação II-4), a qual deve ser englobada pela resposta do programa, todos esses termos apresentam dimensão de força, que é a mesma dimensão do alvo de predição (*output*), a carga crítica. No entanto, o valor da carga crítica calculada por Sævik & Ji (2014) para um arame (λ_{cr}^0) é utilizado, por fim, nesses termos para adimensionalizar essas variáveis, conforme ilustra a Equação V-3.

$$\overline{C_{\sigma}I_N} = \frac{C_{\sigma}I_N}{\lambda_{cr}^0 \cdot r^2}$$

$$\overline{C_{\sigma}I_b} = \frac{C_{\sigma}I_B}{\lambda_{cr}^0 \cdot r^2}$$

$$\overline{C_{\tau}J} = \frac{C_{\tau}J}{\lambda_{cr}^0 \cdot r^2}$$

Equação

V-3

Além desses três parâmetros, dois outros compõem o espaço dos parâmetros adotados, isto é, coeficiente de atrito, μ limitado a 0,10 e o ângulo de assentamento, ϕ_0 . Dessa maneira, o programa de RS realizará buscas sucessivas e, após um determinado tempo de análise, apresentará uma lista de opções de funções do seguinte tipo:

$$f(\phi_0, \mu, \overline{C_{\sigma}I_n}, \overline{C_{\sigma}I_b}, \overline{C_{\tau}J})$$

Equação

V-4

A análise de RS que levou à determinação da equação adotada levou em torno de 26 horas. Buscou-se com o elevado tempo de análise deixar com que o algoritmo

desenvolvesse “plena maturidade” (Gen & Cheng, 1997). Garante-se, ao atingir taxas elevadas de maturidade e de estabilidade, que soluções mais bem ajustadas aos dados de entrada do que aquelas já obtidas sejam dificilmente encontradas (Schmidt & Lipson, 2009). Neste trabalho, foram adotadas taxas alvo maiores do que 50% para ambas as de maturidade e as de estabilidade. A solução do programa EUREQA® dá-se mediante um conjunto de equações, dentre as quais a Equação V-5 ilustra a expressão adotada.

$$f = \left[A_1 + A_2 \cdot \tan(A_3 \cdot \phi_0) + \frac{\mu + \phi_0 + \mu \cdot \phi_0 + A_4 \cdot \cos\left(\frac{A_5 \cdot C_\sigma I_n}{C_\tau J}\right)}{A_6 \cdot e^{A_7 \cdot \mu} + A_8} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{V-5} \end{array}$$

onde:

$$A_1 = 0.8841028227$$

$$A_2 = 4.356862922$$

$$A_3 = 58.62694222$$

$$A_4 = 0.1298436254$$

$$A_5 = 3506.320283$$

$$A_6 = 9.455216954$$

$$A_7 = -232.6056771$$

$$A_8 = 0.05111171245$$

Equação

V-6

Logo, a carga crítica de um arame será dada por :

$$\lambda_{cr}^{SR} = f \cdot \lambda_{cr}^0 \text{.}^{48}$$

Equação

V-7

⁴⁸ Da carga crítica do arame, dada pela Equação V-5, pode-se obter uma estimativa da capacidade de carga do duto pela simples multiplicação do valor da carga crítica para um arame da armadura interna pelo número total de arames das armaduras de tração e o ângulo de assentamento.

onde:

$$\lambda_{cr}^0 = \frac{\text{sen}^2(2 \cdot \phi_0) \cdot \cos(\phi_0)}{4} \cdot \left[\overline{C_{\sigma} I_n} + 4 \cdot \overline{C_{\sigma} I_b} - \overline{C_{\tau} J} \cdot \frac{\cos(2 \cdot \phi_0)}{\cos^2(\phi_0)} \right]^{49} \quad \text{Equação V-8}$$

V.4. Resultados

V.4.1. Análise de sensibilidade do MEA

Esta seção tem por objetivo verificar a adequabilidade dos resultados obtidos pelo MEA (Equação V-7) frente aos dados numéricos que serviram de base para seu desenvolvimento. A Figura V-2 tem por objetivo ilustrar a predição da expressão da Equação V-7 para a capacidade de carga dos 39 dutos flexíveis analisados frente aos resultados numéricos obtidos pelo MVC. Cada duto foi analisado sob 11 coeficientes de atrito diferentes⁵⁰, o que constitui os 429 casos analisados. Já a Figura V-3 ilustra os desvios⁵¹ da resposta empírico-analítica com relação aos resultados numéricos.

A correlação entre as respostas numérica e empírico-analítica é calculada em 0,996 e o erro máximo absoluto obtido é de 6,76N, o que indica razoável predição da equação proposta, como pode ser visto ao observar os desvios entre os resultados da Equação V-7 e das respostas do MVC (Figura V-3).

A análise desses resultados mostra que os desvios entre as respostas não ultrapassou 22% para nenhum caso e tem seu valor médio absoluto igual a 5%. Os maiores desvios foram encontrados para os dutos com baixas capacidades de carga, os quais foram mais dificilmente aproximados pelo algoritmo de RS. Por fim, ao analisar a Equação V-7 pode-se analisar a sensibilidade das variáveis, o que indica a contribuição, qualitativa e quantitativa, de cada uma dessas variáveis sobre a carga crítica fornecida pela Equação V-7.

⁴⁹ λ_{cr}^0 é uma reorganização dos termos da carga de flambagem lateral proposta por Sævik e Ji (2014) e ilustrada pela Equação II-4.

⁵⁰ $\mu = [0,000; 0,005; 0,010; 0,015; 0,020; 0,025; 0,030; 0,050; 0,070; 0,090 \text{ e } 0,100]$

⁵¹ Os desvios são calculados de acordo com: $\frac{P_{MVC} - P_{Eq. IV-29}}{P_{MVC}} \%$, onde P_{MVC} é o resultado numérico do modelo de elementos finitos e $P_{Eq. IV-29}$ o resultado obtido pela utilização da expressão dada pela Equação V-5.

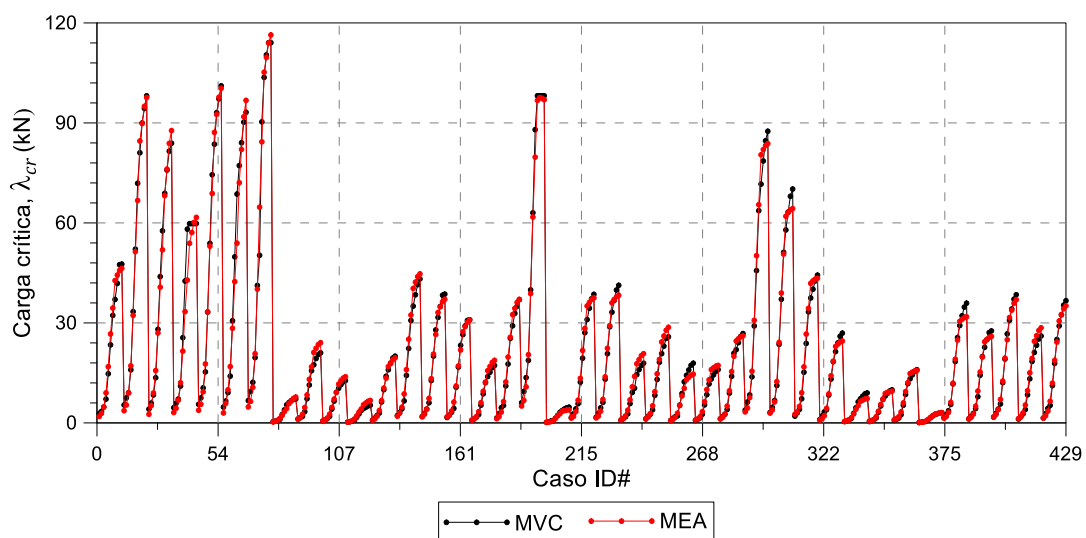


Figura V-2 – Comparação entre os casos propostos (MVC) e os resultados da equação proveniente da RS (MEA – Equação V-7).

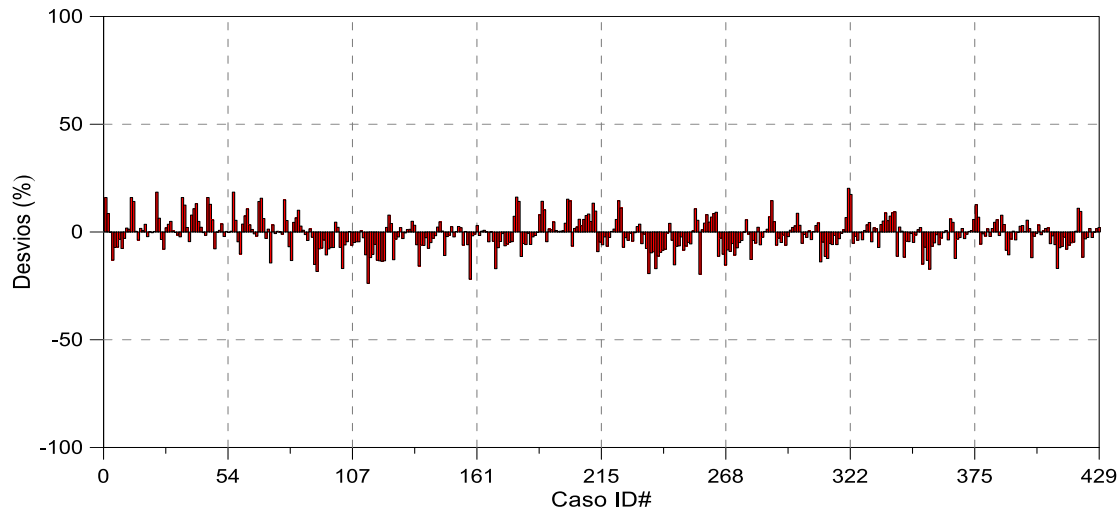


Figura V-3 – Desvios entre as cargas críticas obtidas via MVC e MEA (Equação V-7) para os casos propostos.

A Tabela V-2, retirada do software EUREQA®, ilustra essa análise. Dessa tabela, pode-se inferir que a rigidez à torção do arame é a variável que apresenta maior

impacto na determinação da carga crítica⁵², seguida da rigidez binormal e do coeficiente de atrito. Apenas as duas primeiras variáveis não são 100% positivas, ou seja, promovem aumento da carga crítica ao serem incrementadas. Ambos os parâmetros, em 47% dos casos analisados, quando incrementados, apresentam decréscimo na carga crítica. A magnitude dessa influência negativa é menor que a positiva para o caso da rigidez a torção, porém maior que a positiva para a rigidez binormal. O impacto das demais variáveis sobre a resposta é bastante inferior ao mensurado para as duas primeiras variáveis.

Tabela V-2 – Estudo de sensibilidade das variáveis⁵³ na determinação da carga crítica (Equação V-7).

Variável	Sensibilidade	% Positiva	Magnitude Positiva	% Negativa	Magnitude Negativa
$\overline{C_{\tau J}}$	1,3e+08	53%	2.4e+08	47%	5,8e+04
$\overline{C_{\sigma I_b}}$	2,3e+03	53%	1,6e+03	47%	3,2e+03
$\overline{C_{\sigma I_n}}$	0,224	100%	0,224	0%	0
ϕ_0	0,206	100%	0,206	0%	0
μ	0,809	100%	0,809	0%	0

⁵² Tal fato é corroborado pelos resultados apresentados por de Sousa (2005), que também atribui à rigidez à torção grande influência na magnitude da carga crítica.

⁵³ **Sensibilidade:** Por sensibilidade, entende-se o impacto relativo que uma determinada variável (*input*) exerce na aproximação da variável alvo (*output*). Definida por $S = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_x}$, onde $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$, σ_f e σ_x representam a média da derivada parcial da função f em relação à variável x , o desvio padrão dos dados de entrada da variável x e o desvio padrão dos resultados de f .

% Positiva: É a probabilidade de que o aumento de determinada variável acarrete, também, um aumento sobre a variável alvo. É calculada como a porcentagem dos pontos em que $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$.

Magnitude Positiva: Mensura o quão grande é o impacto positivo de determinada variável sobre a variável alvo. É o valor da sensibilidade dos pontos em que $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$.

% Negativa: É a probabilidade de que a diminuição de determinada variável acarrete, também, um decréscimo sobre o valor da variável alvo. É calculada como a porcentagem de dos pontos em que $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$.

Magnitude Negativa: Mensura o impacto negativo de determinada variável sobre a variável alvo. É o valor da sensibilidade dos pontos em que $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ (Schmidt & Lipson, 2009).

V.4.2. Análises paramétricas de flambagem lateral

Nesta, propõe-se um estudo paramétrico no qual se varia o ângulo de assentamento, o raio médio da armadura, a largura e a altura da seção transversal de um arame da armadura de tração de um duto flexível pelo MEA. Esse arame possui, inicialmente, seção transversal de $3 \times 10 \text{ mm}$ e ângulo de assentamento (ϕ_0) de 27° . Encontra-se assentado sobre um toro de raio menor (r) igual a $0,1 \text{ m}$ e raio maior (R) igual a 15 m . O coeficiente de atrito entre esse arame e as camadas circundantes também é variado.

Espera-se que a expressão proposta, Equação V-5, caso realmente seja válida, apresente comportamento semelhante ao encontrado pela equação analítica desenvolvida por Sævik & Ji (2014), para os casos em que o atrito é desconsiderado. Logo, essa expressão, Equação II-4, será utilizada como validação qualitativa da equação empírico-analítica, ou seja, buscou-se verificar se os comportamentos das equações estudadas são concordantes. Ademais, essas comparações permitem a melhor compreensão das influências de cada um dos parâmetros geométricos dos arames sobre a carga crítica à flambagem lateral das armaduras de tração.

Como diversos desses parâmetros influem diretamente no número de arames das armaduras de tração de dutos flexíveis, buscou-se também apresentar as capacidades de carga pra dutos flexíveis genéricos com fator de preenchimento iguais a $F_f = 0,9$ em ambas as armaduras. Dessa forma, da Figura V-4 à Figura V-8, o comportamento à flambagem para a variação de cada um dos parâmetros analisados (ângulo de assentamento, raio médio da armadura de tração, largura e altura da seção transversal e coeficiente de atrito) é apresentado, para a carga crítica de um arame e para a capacidade de carga do duto flexível. Buscou-se ainda ilustrar como cada um desses parâmetros influencia na magnitude final da carga crítica dado o aumento do coeficiente ($\mu = [0; 0,005; 0,010; 0,015]$) de atrito.

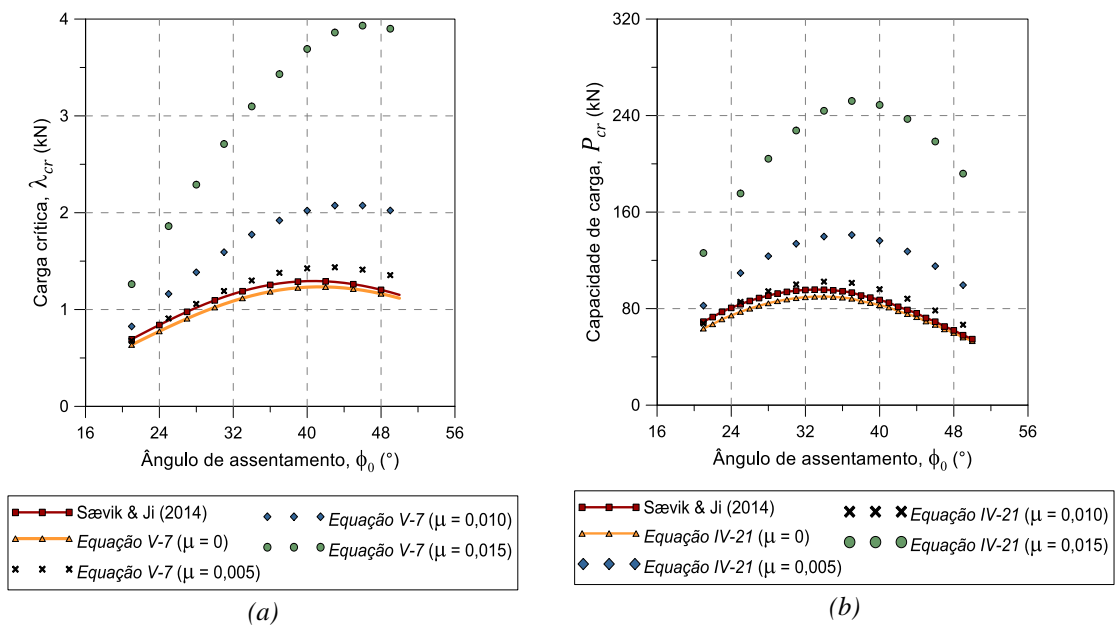


Figura V-4 – Influência do ângulo de assentamento inicial do arame sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto.

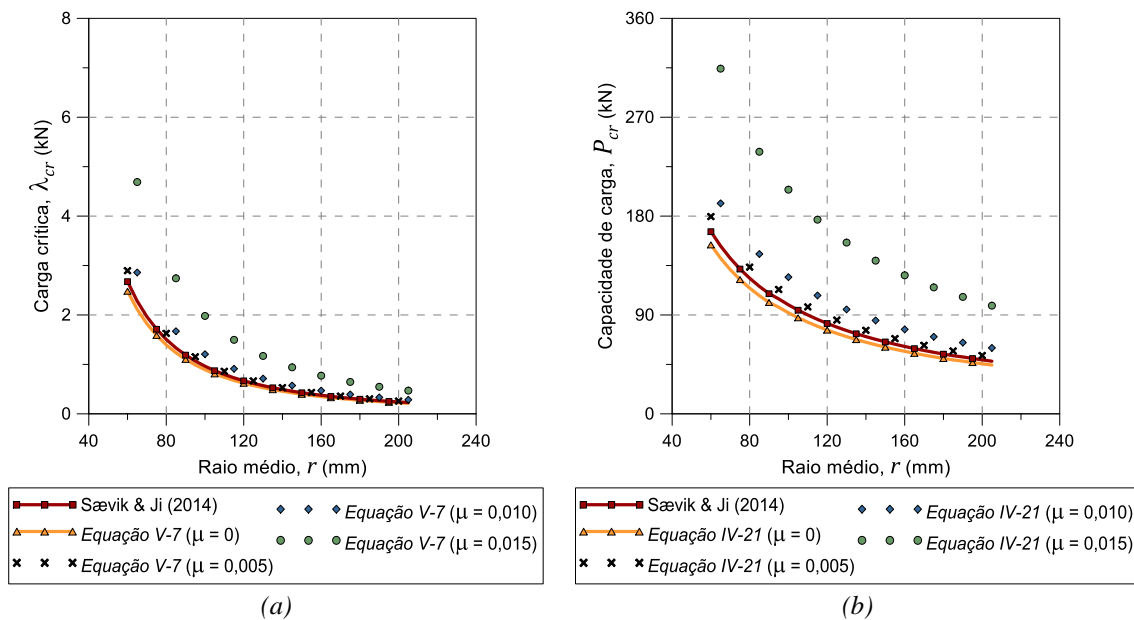


Figura V-5 – Influência do raio médio do arame sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto.

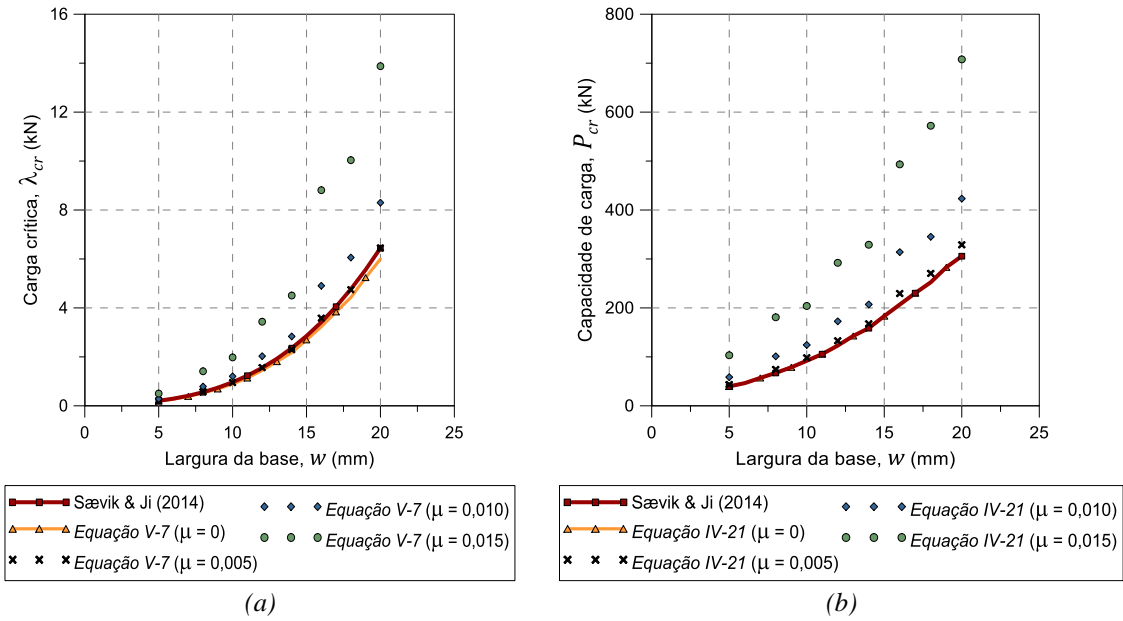


Figura V-6 – Influência da largura da seção transversal do arame sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto.

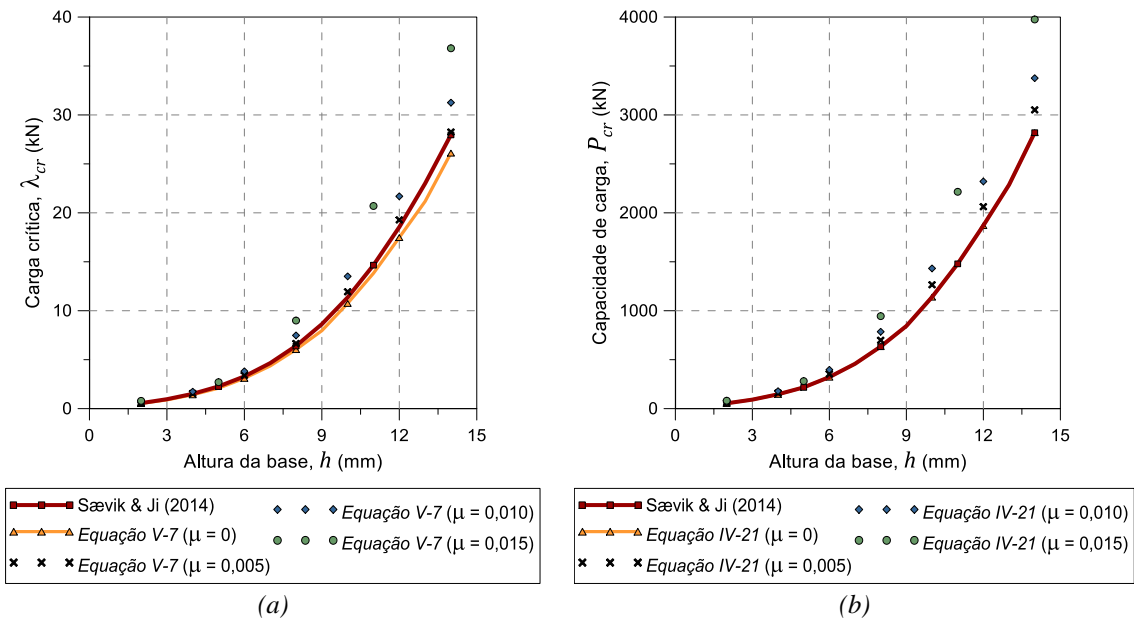


Figura V-7 – Influência da altura da seção transversal do arame sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto.

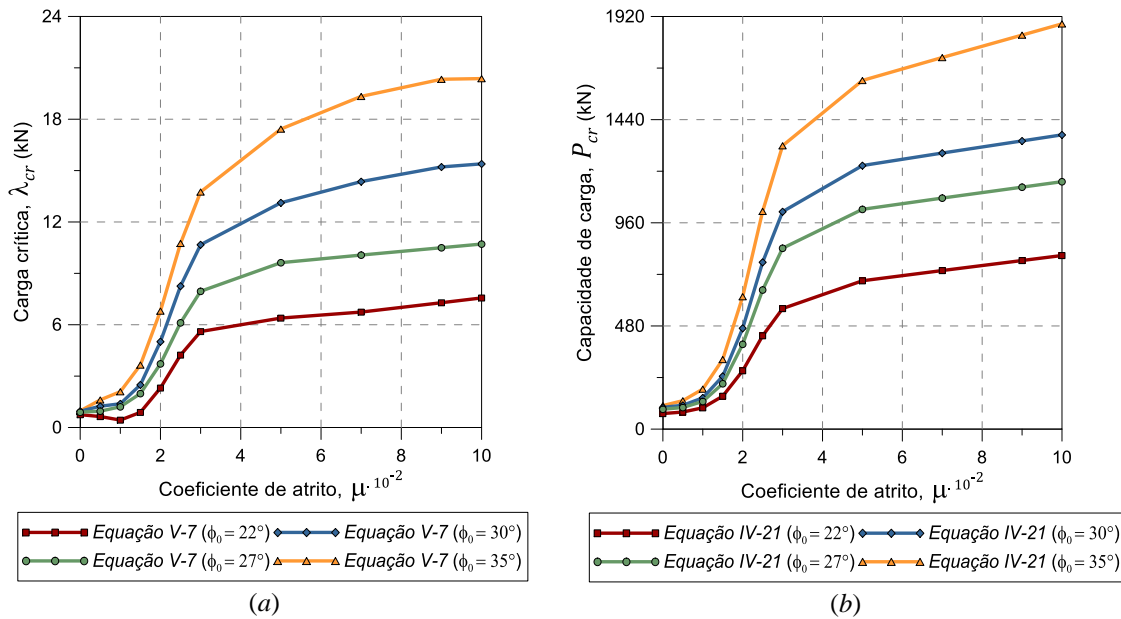


Figura V-8 – Influência do coeficiente de atrito sobre a (a) carga crítica de um único arame e sobre a (b) capacidade de carga do duto para quatro ângulos de assentamentos: $\phi_0 = [22^\circ; 27^\circ; 30^\circ; 35^\circ]$.

Das Figura V-4 a Figura V-8, pode-se tirar importantes conclusões. Primeiramente, acerca da representatividade do comportamento da Equação II-4 pelo MEA, pôde-se verificar grande concordância entre os resultados da Equação V-5 e essa formulação analítica, tanto qualitativa quanto quantitativamente. Como o MEA foi obtido com os resultados do modelo de elementos finitos, é de se esperar que essa correlação seja extensível a ele. É interessante ressaltar que a predição dos valores pelo MEA é garantida para os valores de coeficientes de atrito estudados. Outros valores devem ser utilizados com cautela, uma vez que a expressão adotada não garante a extrapolação do comportamento para valores não considerados, especialmente para valores maiores que 0,10.

Quando o coeficiente de atrito é desprezado, os resultados analíticos de Sævik & Ji (2014) e os provenientes do MEA divergem, em média, aproximadamente, 6%, sendo estes, os do MEA, mais conservadores que aqueles, os provenientes da Equação II-4. Os maiores desvios se deram para ângulos de assentamentos baixos, entre 22° e 25° , que não foram maiores que 8%. Para ângulos mais altos, os desvios entre os resultados não ultrapassaram 5%. O ângulo de assentamento apresenta influência não-linear na determinação da carga crítica, como a análise da Figura V-4 indica, porém de maneira ligeiramente distinta para a carga crítica de um só arame, como indica a Figura

V-4(a), e para a capacidade de carga do duto, de acordo com o ilustrado pela Figura V-4(b). Ao analisar as cargas críticas dos arames individuais, pode-se ressaltar que o incremento no ângulo de assentamento, para ângulos menores que $35^\circ/40^\circ$, representam um acréscimo no valor da carga crítica. Já para ângulos maiores que esses, para os arames individuais, e maiores que $30^\circ/35^\circ$, para os dutos flexíveis, quanto mais se aproximam de um ângulo reto, menores cargas críticas e capacidades de cargas devem ser esperadas. Ainda deve ser ressaltado que o aumento do coeficiente de atrito provoca um incremento na resistência à flambagem do arame, notado tanto nas análises dos arames individuais quanto dos dutos flexíveis. Para valores de $\mu = 0,005$, a carga crítica mostra, em média, magnitudes, aproximadamente, 9% maiores que para a situação sem atrito (obtida pela Equação II-4). Para $\mu = 0,010$ e $\mu = 0,015$, respectivamente, os valores das cargas críticas apresentaram-se, em média, 55 e 170% maiores que os obtidos pela Equação II-4.

O raio médio de assentamento comprovou, também, exercer uma relação não linear com os valores da carga crítica, de acordo com o exposto pela Figura V-5. Essa relação indica que maiores raio médios tendem a levar à diminuição da capacidade de resistência à flambagem lateral dos arames das armaduras de flexão. Essa diminuição, parece, contudo, assintótica e tende a zero quando o raio médio cresce indefinidamente. Os desvios obtidos entre os valores da Equação II-4 e os resultados do MEA foram de -7% , 8% , 25% e 105% , respectivamente quando os coeficientes de atrito foram iguais a 0; 0,005; 0,010 e 0,015.

Também foi encontrada uma relação não-linear entre a carga crítica e os parâmetros geométricos da seção transversal do arame. A altura do arame, contudo, parece contribuir de maneira mais significativa do que a largura na sua resistência à flambagem lateral. Os maiores valores de altura e base apresentam valores de cargas críticas 420% e 360% maiores que as cargas críticas para as menores altura ($h = 2mm$) e base ($w = 5mm$), respectivamente. Esses valores não diferem muito quando as análises lidam com um arame ou com o duto flexível. O aumento do coeficiente de atrito associado à variação das características da seção apresenta menos impacto para a altura do que para a largura. Os desvios obtidos entre os valores da Equação II-4 e os resultados do MEA, quando a variação da base da seção transversal é considerada, foram de -7% , 2% , 35% e 130% , respectivamente quando os coeficientes de atrito

foram iguais a 0; 0,005; 0,010 e 0,015. Já os desvios obtidos entre os valores da Equação II-4 e os resultados do MEA quando a variação da seção transversal é considerada foram de -7%, 2%, 15% e 35%, respectivamente quando os coeficientes de atrito foram iguais a 0; 0,005; 0,010 e 0,015.

Por fim, a Figura V-8 ilustra a influência da variação do aumento do coeficiente de atrito na resposta do arame à flambagem lateral para quatro ângulos de assentamentos distintos, $\phi_0 = 22^\circ$; $\phi_0 = 27^\circ$; $\phi_0 = 30^\circ$ e $\phi_0 = 35^\circ$. O comportamento mostra uma tendência à estabilização do valor de carga crítica também para o MEA quando os valores do coeficiente de atrito aproximam-se de 0,10. Isso indica que a expressão reproduz corretamente o comportamento encontrado no MVC, bem como aqueles apresentados nos modelos de elementos finitos de Vaz & Rizzo (2011) e Yang *et al.* (2015), nos quais a estabilização do valor da carga crítica deu-se para valores aproximadamente iguais a 0,10.

CAPÍTULO VI

COMENTÁRIOS FINAIS

O tema central deste trabalho foi o estudo do mecanismo de flambagem, com foco especial na flambagem lateral, dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis. Tal fenômeno é de difícil reprodução sistemática, tanto em laboratório quanto no campo. A falta de correlação entre esses experimentos é, sobretudo, fruto dessa dificuldade. Ademais, alguns trabalhos teóricos ainda apresentam resultados conflitantes entre si, tais como a influência do atrito e da curvatura do duto no mecanismo de flambagem lateral e a caracterização dos modos segundo os quais os arames podem instabilizar, isto é, se os modos são estáveis ou instáveis. Analisando o trabalho de Braga (2003), por exemplo, diversas configurações finais dos arames podem ser associadas à flambagem lateral. Mesmo os experimentos de Østergaard (2012) indicam que os arames instabilizam sob modos distintos.

Para atacar essas e outras dúvidas, este trabalho propôs um modelo baseado em elementos finitos e na teoria de vigas inicialmente curvas e torcidas assentadas sobre fundações elásticas. Ao levar em conta a complexidade inerente do modelo e a influência do atrito na magnitude da capacidade de carga do duto, propõe-se também uma expressão empírico-analítica que promova uma estimativa do valor da carga crítica, sem comprometer significativamente a acurácia dos resultados de modo simples e direto.

O modelo de elementos finitos, chamado de Modelo de Viga Curva (MVC), utiliza um elemento finito baseado na teoria de viga tridimensional inicialmente curva e torcida (Love, 1906) assentado sobre fundações elásticas. Esse elemento também utilizou da hipótese de Euler-Bernoulli para cisalhamento e de restrições cinemáticas à rotação axiais para prevenir o fenômeno de *fish-scaling*. O modelo computa ainda a influência da flexão dos dutos mediante as hipóteses das curvas limites, isto é, as curvas geodésica ou loxodrômica. As matrizes de rigidez lineares e não-lineares do elemento proposto são obtidas pela análise dos termos da energia potencial de deformação desse elemento.

Ademais, a TEE (Koiter, 1945) é utilizada para o modelo de elementos finitos. Essa teoria permite angariar maior conhecimento sobre a estabilidade dos pontos críticos e seus caminhos de equilíbrio pré e pós-crítico. Os pontos críticos são estudados pela análise da EPT, da qual se deduzem as três formulações de autovalores (clássica, consistente e atualizada) utilizadas para o estudo da carga crítica e de seu modo associado. Já a investigação do caminho pós-crítico, no que diz respeito a sua aproximação ou qualidade, é realizada mediante as aproximações assintóticas do equilíbrio crítico e pós-crítico.

Nesta tese, foram estudados quatro dutos flexíveis, três *risers* (diâmetros nominais de 6", 8" e 9,5") e um *jumper* (diâmetro nominal de 14"). Esses dutos foram escolhidos, pois já foram abordados na literatura técnica e, desse modo, existem resultados teóricos e experimentais que foram aqui comparados aos resultados dos modelos numérico (MVC) e empírico-analítico (MEA) propostos.

Antes de iniciar a investigação do fenômeno de flambagem lateral, verificações a respeito do comportamento mecânico axial dos dutos flexíveis utilizando o MVC se fizeram necessárias. Foram realizadas, por conseguinte, análises lineares de tração, torção e tração-torção. Os resultados foram comparados com a expressão analítica proposta por Féret & Bournazel (1987), os quais se mostraram bastante correlatos (não foram obtidos desvios, em módulo, maiores que 1,4% para nenhum dos casos analisados).

Para balizar as análises de flambagem do MVC, foi, ainda, estudada a influência da variação do comprimento dos arames sobre a carga crítica, procedimento

comum a diversos trabalhos teóricos. Foram utilizados os resultados provenientes, tanto da equação proposta por Sævik & Ji (2014) quanto do modelo proposto por Østergaard (2012), para verificar aqueles obtidos pelo MVC. Mais uma vez, os resultados encontrados pelo MVC mostraram-se em concordância com os dos modelos reproduzidos, à exceção do resultado para arames com apenas um passo da armadura, para os quais os desvios foram ligeiramente maiores. Os resultados do MVC, porém, apresentaram-se intermediários à expressão analítica e ao modelo de Østergaard (2012) e mantiveram desvio, com cada uma dessas, não superiores a 20%. Por último, e mais importante, vale dizer que o comportamento esperado foi atingido, ou seja, observou-se a estabilização da carga crítica para números de passos maiores que 4, conforme também observado com os modelos de Sævik & Ji (2014) e de Østergaard (2012), respectivamente.

Fundações elásticas foram propostas como forma de aproximar a representação do atrito entre as armaduras de tração e suas camadas adjacentes. Fez-se necessário, contudo, validar essa abordagem. Assim, foi proposta a comparação dos resultados encontrados pelo MVC com os resultados obtidos do modelo de Féret *et al.* (1995) e a abordagem proposta mostrou-se adequada.

Essas análises concluíram a fase de verificação do modelo. Passou-se, em seguida, ao estudo propriamente dito da instabilidade lateral das armaduras de tração de dutos flexíveis. Esse estudo foi dividido em seis seções, que contam com as comparações entre as diferentes análises de autovalor apresentadas; a investigação e descrição sobre os modos de flambagem; a investigação sobre a influência das condições de contorno; a investigação sobre a influência da curvatura do duto; o comportamento da carga crítica à variação das rigidezes das fundações elásticas e a equivalência entre a rigidez binormal e os coeficientes de atrito; e, por último, análises paramétricas que visam tanto observar o comportamento da carga crítica quanto estudar o comportamento do MEA.

Inicialmente, observou-se que as análises de flambagem linear clássica e consistente e a análise atualizada produzem valores de cargas críticas bastantes diferentes umas das outras. As análises atualizadas e consistentes apresentaram resultados para os dutos de 6” e de 8” que caem dentro da faixa experimental atribuída à

flambagem lateral por Østergaard (2012). No entanto, a análise atualizada é considerada mais adequada para o estudo da flambagem lateral elástica dos arames das armaduras, porque, além de apresentarem resultados mais conservadores, apresentam resultados próximos àqueles obtidos pelos demais modelos teóricos propostos. Outras razões que corroboram a escolha do método compreendem a possibilidade de análise de estruturas perfeitas, não garantida pelas análises incrementais; e a generalidade do método, que abarca estruturas de comportamento majoritariamente extensionais e sem grandes deslocamentos na região pré-crítica. Ademais, ressalta-se que a alta influência às imperfeições iniciais encontrada nas análises iterativas (confirmadas pela análise assintótica que detectou a instabilidade do caminho pós-crítico encontrado) requer que essa ferramenta seja utilizada com bastante atenção.

Sobre as análises incrementais, pode-se ainda dizer que essas apenas captam o comportamento não-linear da estrutura quando a curva loxodrômica é avaliada. Mesmo assim, apenas o início do caminho não-linear pode ser traçado, uma vez que logo após o ponto limite as análises deixam de convergir à medida que esse comportamento se acentua, o que dá indícios da emergência de um caminho de equilíbrio instável, conforme foi posteriormente detectado. Por fim, enfatiza-se o fato de os modos de instabilidade dos pontos limites (análise iterativa) e dos pontos de bifurcações (análises de autovalor) terem sido diferentes. Mais uma vez, essa diferença pode ser atribuída à sensibilidade do caminho de equilíbrio iterativo às imperfeições iniciais, o que impede a detecção do ponto de bifurcação pelas análises iterativas. Isto, pois as imperfeições referentes às curvaturas iniciais da curva loxodrômica estimulam um modo distinto daquele encontrado como modo fundamental nas análises de autovalor. Esta hipótese, como já dito, é corroborada pela análise assintótica e pela análise da segunda variação da energia potencial na vizinhança do ponto limite, as quais fornecem indicativos da instabilidade desse caminho pós-crítico.

Os cinco modos iniciais de flambagem lateral dos arames de armadura de tração foram apresentados. Dentre eles, os dois primeiros apresentam capacidades de carga bastante próximas umas das outras (desvios de aproximadamente 5 a 10%), o que sugere a possibilidade de acoplamento entre esses modos. No entanto, maiores investigações a esse respeito merecem serem traçadas. Já as condições de contorno bi-apoiada e bi-engastada mostram-se equivalentes quanto ao comportamento da

capacidade de carga quando o número de passos da armadura considerada foi maior que 4, para o qual os modelos teórico da literatura, Sævik & Ji (2014) e Østergaard (2012), convergem para os valores apontados pelo MVC.

A presença de curvatura inicial devido à flexão do duto desempenhou papel relevante no que tange o comportamento da carga crítica. As curvas loxodrômicas levam a menores capacidades de carga que as curvas geodésicas e os dutos retos. Propõe-se que essas curvas componham uma janela de capacidade de carga, sendo seus limites inferiores e superiores condicionados às curvas loxodrômicas e geodésicas, respectivamente.

É proposta a correlação das rigidezes das fundações elásticas com o coeficiente de atrito, a qual, apesar de superestimar os efeitos de atrito, permite modelar de maneira simples e eficiente tais forças. Esse comentário é corroborado por diversos estudos teóricos, como os de Feret *et al.* (1989), de Vaz & Rizzo (2011) e de Yang *et al.* (2015). Ainda quanto ao atrito, algumas observações merecem ser traçadas, são elas: a influência que o atrito apresenta sobre os modos de flambagem dos arames; a sobreposição da flambagem radial à lateral para $\mu \geq 0,10 - 0,15$, dependendo do duto analisado; a extrema sensibilidade das capacidades de carga ao acréscimo dos coeficientes de atrito para pequenos valores dos mesmos (menores que $\mu = 0,10$); e a não-linearidade da relação P_{cr} versus μ . Crê-se, ainda, que coeficientes de atrito menores que 0,01, possam mais bem representar os resultados dos testes de bancada⁵⁴.

Por fim, ressalta-se que a desorganização dos arames, atribuída aos efeitos não-conservativos do atrito, do contato lateral entre arames, entre outros, como aponta Clayeron *et al.* (2017) deve ser distinguida da flambagem lateral elástica. Mesmo sabendo que ambas acarretam em perda de rigidez axial dos dutos flexíveis, elas não devem ser consideradas como frutos do mesmo fenômeno.

O Modelo Empírico-Analítico (MEA) consiste em uma expressão fechada para a estimativa da carga crítica de um arame das armaduras de tração de um duto flexível obtida mediante a utilização de algoritmos genéticos e o programa comercial

⁵⁴ Esse valor é equivalente à condição de armaduras lubrificadas, conforme medido experimentalmente por Sævik (1992).

EUREQA®. Essa expressão leva em consideração os efeitos de atrito de forma a fornecer uma maneira mais rápida e direta do que a análise de elementos finitos para se obter o valor da carga crítica dos arames das armaduras de tração de um duto flexível. Mediante a análise dos resultados obtidos no CAPÍTULO V, traçam-se alguns comentários finais, a dizer:

- há alta correlação com os resultados de elementos finitos (aproximadamente 0,996) e baixos desvios com relação aos dados de treino (desvio médio absoluto da ordem de 5%), exceto para os dutos que apresentaram cargas críticas muito baixas;
- a expressão empírico-analítica abarca o comportamento da expressão analítica proposta por Sævik & Ji (2014), a qual desconsidera qualquer efeito do atrito;
- a expressão adotada não garante a extrapolação de seu comportamento para valores fora da faixa considerada de: coeficiente de atrito, raio médio, ângulo de assentamento e largura e altura da base;
- a tendência à estabilização do valor de carga crítica para valores de coeficiente de atrito maiores que 0,10 também é notada.

Tendo os principais comentários sidos traçados, resta agora delinear algumas possíveis sugestões para investigações futuras. No que segue, aconselha-se:

- a implementação da TCAC e o estudo do caminho de equilíbrio não-linear dos arames das armaduras de tração, bem como a investigação de imperfeições iniciais diferentes e outros modelos de atrito;
- maiores investigações sobre a possibilidade de acoplamento dos modos obtidos e da flambagem ocorrer em modos mistos;
- estudar modificações na cinemática das vigas curvas assentadas sobre toro para tentar abarcar a desorganização lateral dos arames da armadura de tração, proveniente da ação cíclica de flexão;
- buscar aproximar o caminho não-linear pela técnica assintótica modal, a qual produz melhores aproximações por garantir a ortogonalidade dos modos considerados;

- investigar os efeitos quadráticos das rotações nas matrizes de rigidez não-lineares do elemento proposto;
- investigar os efeitos de outras curvas situadas entre as curvas limites na capacidade de carga dos dutos;
- investigar a influência da pressão radial externa e interna no modelo não-linear iterativo;
- investigar os efeitos da torção do duto na flambagem lateral, os quais foram desprezados até aqui;
- expandir a faixa de aplicabilidade do MEA considerando dutos com características físicas e geométricas distintas além do efeito da curvatura.
- verificação dos modelos frente a novos dados experimentais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves, R. V., 1995. *Instabilidade Não Linear Elásticas de Estruturas Reticuladas Espaciais*. Rio de Janeiro, Brazil: Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE.

Antonini, R. C., 1986. *Uma formulação discretizada da teoria da estabilidade elástica para análise estrutural via elementos finitos*. Rio de Janeiro, Brasil: Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE.

API RP 17B, 2014. *Recommended practice for flexible pipe*, Fourth edition, Washington, USA: American Petroleum Institute.

API SP 17J, 2014. *Specification for Unbonded Flexible Pipes*, Third edition, Washington, USA: American Petroleum Institute.

Banan, M. R., Karami, G. & Farshad, M., 1990. Finite Element Analysis of Curved Beams on Elastic Support. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 19, pp. 863-867.

Barltrop, N. D. P., 1998. *Floating Structures: a guide for design and analysis*. England, OPL: The Centre for Marine and Petroleum Technology (CMPT).

Bathe, K. J., 2006. *Finite Element Procedures*. Boston, Massachusetts, EUA: Prentice-Hall, Pearson education, Inc. .

Bectarte, F. & Courtarel, A., 2004. Instability of tensile armour layers of flexible pipes. *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering - OMAE*, pp. 1-12.

Berge, S., Engseth, A. & Fylling, I., 1992. *Handbook on design and operation of flexible pipes*, Report STF70 A92006, SINTEF Structural Engineering, Trondheim, Norway: s.n.

Brack, A., Troina, L. M. B. & Sousa, J. R. M., 2005. Flexible riser resistance against combined axial compression, bending and torsion in ultra-deep water depths. *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering - OMAE*, pp. 1-16.

Braga, M., 2003. *Instabilidade de Armaduras de Tração de Linhas Flexíveis*. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

Braga, M. P. & Kaleff, P., 2004. Flexible pipe sensitivity to birdcaging and armor wire lateral buckling. *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering - OMAE*, pp. 1-8.

Brush, D. O. & Almroth, B. O., 1975. *Buckling of bars, plates and shells*. Tokyo, Japan: McGraw-Hill.

Caleyron, F. et al., 2017. Stress in Tensile Armour Layers of Unbounded Flexible Risers Loaded with External Pressure: Application to Lateral Buckling Mode. *Proceedings of the ASME 2017 36th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, 25-30 Junho.

Caleyron, F., Leroy, J. M., Guiton, M. L. E. & Paumier, L., 2014. A multi-purpose finite element model for flexible risers studies. *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering - OMAE*, pp. 1-11.

Carnoy, E. G., 1981. Asymptotic study of the elastic postbuckling behavior of structures by the finite element method. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, v. 29, Volume 29, pp. 147-173.

Chiaverini, V., 1986. *Tecnologia mecânica - estrutura e propriedades das ligas metálicas*. São Paulo: McGraw-Hill.

Chilver, A. H. a. K. C. J., 1969. Coupled modes of buckling in some continuous systems. In: *Instability of continuous systems*. Londres, Reino Unido: International Union of Theoretical and Applied Mechanics.

Crisfield, M. A., 1991. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. s.l.:John Wiley & Sons Ltd..

Custódio, A. B., 2005. *Modelo analítico para determinação de instabilidade de armaduras de tração de dutos flexíveis*. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

Custódio, A. B., Lemos, C. A. D., Troina, L. M. B. & de Almeida, M. C., 2007. Recent research on the instability of flexible pipe's armours. *International Offshore and Polar Engineering Conference*, pp. 1026-1032.

de Paiva, L. F., 2015. *Análise de Flambagem Lateral nas Armaduras de Tração de Dutos Flexíveis*. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ.

de Paiva, L. F. & Vaz, M. A., 2017. An empirical model for flexible pipe armor wire lateral buckling failure load. *Applied Ocean Research*, v. 66(46-54).

de Sousa, F. J. M. et al., 2009. *A New Configuration for Steel Risers in Ultra Deep Waters*. Armação de Búzios, Brasil, s.n.

de Sousa, J. R. M., 2005. *Análise local de linhas flexíveis pelo método dos elementos finitos*. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

de Sousa, J. R. M., Viero, P. F., Magluta, C. & Roitman, N., 2012. An Experimental and Numerical Study on the Axial Compression Response of Flexible Pipes. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Volume 134.

do Carmo, M. P., 1976. *Differential geometry of curves and surfaces*. New Jersey, USA: Prentice-Hall.

Eisenhart, L. P., 1909. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. Boston, USA: The Atheneum Press.

Felippa, C. A., 1999. *Nonlinear Finite Element Methods*. Boulder, Colorado: University of Colorado.

Féret, J. J. & Bournazel, C. L., 1987. Calculation of stresses and slips in structural layers of unbounded flexible pipes. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, pp. 263-269.

Féret, J., Leroy, J. M. & Estrier, P., 1995. Calculation of Stresses and Slips in Flexible Armour Layers with Layers Interaction. *Proceedings of the 14th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE)*, 18-22 Junho, pp. 469-474.

Fulchignoni, L., 2015. *Análise de Flambagem Lateral nas Armaduras de Tração de Dutos Flexíveis*. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ.

Fulchignoni, L. & Vaz, M. A., 2017. An Empirical Model for Flexible Pipe Armor Wire Lateral Buckling. *Applied Ocean Research*, v. 66, pp. 46-54.

Fyrileiv, O. & Collberg, L., 2005. Influence of pressure in pipeline design - effective axial force. *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering - OMAE*, pp. 1-8.

Garcia, L. F. T., 2007. *Elasticidade não linear: Teoria geral e aplicações*. Rio de Janeiro, Brasil: Letra Capital Editora.

Gen, M. & Cheng, R., 1997. *Genetic Algorithms and Engineering Design*. New Jersey, EUA: John Wiley & Sons.

Golub, G. H. & Loan, C. F., 1996. *Matrix Computations*. Baltimore, Maryland, EUA.: The John Hopkins University Press.

Gonzalez, G. M., 2016. *Metodologias para a investigação do mecanismo de instabilidade dos arames das armaduras de tração de dutos flexíveis*. s.l.:Exame de Qualificação Acadêmica para Candidatos ao Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE.

Gonzalez, G. M., Cortina, J. P. C., de Sousa, J. R. M. & Sagrilo, L. V. S., 2018. Alternative solutions of the geodesic differential equations applied to mechanical analysis of the tensile armors of flexible pipes under bending. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2018, pp. 1-16.

Haftka, R. T., Mallet, R. H. & Nachbar, W., 1971. Adaption of Koiter's method to finite element analysis of snap-through buckling behavior. *International Journal of Solids Structures*, Volume vol. 7, pp. 1427-1445.

Koiter, W. T., 1945. *A Translation of the Stability of Elastic Equilibrium*. Delft, Holanda: Department of Mechanics, Shipbuilding, and Airplane Building, Delft University.

Koza, J. R., 1992. *Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection*. Redwood, California, USA: Stanford University Press.

Larsen, C. M., Sævik, S. & Qvist, J., 2014. Design Analysis. In: *Handbook on Design and Operation of Flexible Pipes*. s.l.:NTNU/4Subsea/MARINTEK.

Leroy, J. M. & Estrier, P., 2001. Calculation of Stresses and Slips in Helical Layers of Dynamically Bent Flexible Pipes. *Oil & Gas Science and Technology*, v. 56, pp. 545-554.

Levold, E., 1990. *Solid mechanics and material models including large deformations*. Trondheim, Norway: Division of Structural Engineering, NTNU.

Li, X., Vaz, M. A. & Custódio, A. B., 2018. Analytical prediction for lateral buckling of tensile wires in flexible pipes. *Marine Structures*, Volume 61, pp. 268-281.

Love, A. E. H., 1906. *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Lyons, G. J., Patel, M. H. & Witz, J. A., 1994. *Vertical riser design manual*. London: University College London.

MATLAB, 1992. *User's Guide (version R2017a)*. s.l.:The Math Works Inc..

Mciver, D. B. & Olson, O. J., 1981. Riser effective tension – now you see it, Nnow you don't. *37th Mechanical Engineering Workshop and Conference Petroleum, Dallas*.

Merino, H. E. M., Sousa, J. R. M., Magluta, C. & Roitman, N., 2009. Numerical and experimental study of a flexible pipe under torsion. *International Conference on Ocean, Offshore and Artic Engineering - OMAE*, pp. 1-12.

Mitchell, R., 2007. The effect of friction on initial buckling of tubing and flowlines. *Society of Petroleum Engineers*, Volume pp. 112-118.

National Oiwell Varco, 2016. *www.nov.com*. [Online] Available at: http://www.nov.com/fps_landing/products/dynamic-flexible-risers.html [Acesso em 15 Janeiro 2016].

Nutbourne, A. W. & Martin, R. R., 1988. *Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design*. Chichester, West Sussex, England: Ellis Horwood Limited.

Nygård, D., 2012. *Tensile armour buckling in flexible pipes*. Trondheim: Master's Dissertation, Department of Marine Technology, Norwegian University of Science and Technology.

Østergaard, N. H., 2012. *On lateral buckling of armouring wires in flexible pipes*. Aalborg: Doctoral Thesis, Aalborg University, Denmark.

Østergaard, N. H., Lyckegaard, A. & Andreasen, J., 2011. A method for the prediction of the equilibrium state of a long and slender wire on a frictionless toroid applied for analysis of flexible pipe structures. *Engineering Structures*, pp. 391-399.

Østergaard, N. H., Lyckegaard, A. & Andreasen, J., 2012. Imperfection analysis of flexible pipe armour wires in compression and bending. *Applied Ocean Research*, pp. 1-11.

Østergaard, N. H., Lyckegaard, A. & Andreasen, J. H., 2011. Simulation of frictional effects in models for calculation of the equilibrium state of flexible pipe armouring wires in compression and bending. *Journal of Structural Mechanics*, Volume v. 44, pp. 243-259.

Østergaard, N. H., Lyckegaard, A. & Andreasen, J. H., 2012. On modeling of lateral buckling failure in flexible pipe tensile armour layers. *Marine Structures*, pp. 1-12.

PETROBRAS, 2012. [Online] Available at: <http://www.petrobras.com.br> [Acesso em 24 Julho 2012].

Rabelo, M. A. et al., 2014. An investigation on flexible pipes birdcaging triggering. *Marine Structures*, Volume v. 40, pp. 159-182.

Raussen, M., 2008. *Elementary Differential Geometry: Curves and Surfaces*. Aalborg, Dinamarca: Aalborg University Press.

Riks, E., 1979. An incremental approach to solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, pp. 529-551.

Roorda, J. & Chilver, A. H., 1970. Frame buckling: An illustration of the perturbation technique. *Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 5, pp. 235-246.

Sævik, S., 1992. *On the stresses and fatigue in flexible pipes*. Trondheim: Doctoral Thesis, Trondheim University, Norway.

Sævik, S., 2011. Theoretical and experimental studies of stresses in flexible pipes. *Computer & Structures*, pp. 97-106.

Sævik, S. & Ji, G., 2014. Differential equation for evaluating transverse buckling behavior of tensile armour wires. *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering - OMAE*, pp. 1-6.

Sævik, S. & Li, H., 2013. Shear interaction and transverse buckling of tensile armour in flexible pipes. *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering - OMAE*, pp. 1-9.

Sævik, S. & Thorsen, M., 2012. Techniques for predicting tensile armour buckling and fatigue in deep water flexible risers. *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering - OMAE*, pp. 1-14.

Schmidt, M. & Lipson, H., 2009. Distilling free-form natural laws from experimental data. 324(n° 5923, pp. 81-85).

Schmidt, M. & Lipson, H., 2009. Symbolic regression of implicit equations. In: *Genetic Programming: Theory and Practice*. s.l.:Springer, pp. 81-85.

Secher, P., Bectarte, F. & Felix-Henry, A., 2011. Qualification Testing Of Flexible Pipes For 3000m. *Offshore Technology Conference - OTC*, pp. 1-10.

Silva, A. A. d., 2009. *Análise não-linear assintótica modal da instabilidade de estruturas reticuladas*. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE.

Silva, J. L., 2014. *Desenvolvimento e calibração experimental de modelo numérico baseado em teoria de viga para a estimativa da pressão de colapso de dutos flexíveis*. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ.

SIMULIA, 2013. *ABAQUS Documentation (version 6.13)*, 3DS SIMULIA: s.n.

Söderberg, A. & Björklund, S., 2008. Validation of simplified numerical contact model. *Tribology International*, v. 41, pp. 926-933.

Sparks, C., 1984. The influence of tension, pressure and weight on pipe and riser. *Transactions of the ASME*, pp. 46-54.

Sparks, C. P., 2007. *Fundamentals of Marine Riser Mechanics: Basic Principles and Simplified Analyses*. 1st ed. Oklahoma, USA: PennWell.

Stark, P. A., 1979. *Introdução aos métodos numéricos*. s.l.:Ed. Interciência.

Supple, W. J., 1996. Coupled branching configurations in the elastic buckling of symmetric structural systems. *International Journal of Mechanical Science*, Volume v. 9, pp. 97-112.

Tabarrok, B. & Xiong, Y., 1989. On the buckling equations for spatial rods. *International Journal of Mechanical Science*, v. 3, pp. 179-192.

Tabarrok, B. & Xiong, Y., 1992. A Spatially Curved and Twisted Rod Element for Buckling Analysis. *International Journal of Solids Structures*, v. 29, n°. 23, pp. 3011-3023.

Talgatti, O. L., 2013. *Instabilidade radial em dutos flexíveis com defeitos na bandagem de alta resistência sujeitos a cargas axiais compressivas*. Porto Alegre: Dissertação de Mestrado, UFRGS.

Tan, Z., Loper, C., Sheldrake, T. & Karabelas, G., 2006. Behavior of Tensile Wires in Unbonded Flexible Pipe under Compression and Design Optimization for

Prevention. *International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering - OMAE*, pp. 1-8.

TECHNIP, 2016. *www.technip.com*. [Online] Available at: http://www.technip.com/sites/default/files/technip/fields/publications/attachments/flexible_pipe_july_2015_web.pdf [Acesso em Janeiro 2016].

Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N., 1979. *Teoria da Elasticidade..* s.l.:3 ed., McGraw-Hill.

Timoshenko, S. & Gere, J. M., 1963. *Theory of elastic stability*. Stanford, California, USA: McGraw-Hill.

Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S., 1959. *Theory of plates and Shells*. Tokyo, Japan: McGraw-Hill.

Vaz, M. A. & Rizzo, N. A. S., 2011. A finite element model for flexible pipe armor wire. *Marine Structures*, pp. 275-291.

Winkler, E., 1867. *The doctrine of elasticity and strength (on elasticity and fixity)*. Prague, Czech Republic: s.n.

Witz, J. A. & Burke, R. N., 1995. *Polymer deformation in high pressure flexible flow lines*. Londres, MARINEFLEX.

Yang, X., Sævik, S. & Sun, L., 2015. Numerical analysis of buckling failure in flexible pipe tensile armor wires. *Ocean Engineering*, pp. 594-605.

Young, R. D. & Fowler, J. R., 1978. *Mathematics of the Marine Riser. Energy Technology Conference and Exhibition*.

Zienkiwicz, O. C., 1977. *The finite element method*. Londres, UK: McGraw-Hill.

ANEXO A

PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE RIGIDEZ

Segundo Alves (1995), tomando $\{\mathbf{X}\}$, $\{\mathbf{Y}\}$ e $\{\mathbf{Z}\}$ como vetores genéricos e, como um escalar qualquer, α , pode-se observar as seguintes propriedades nas matrizes:

1. Simetria

$$[\mathbf{K}_0] = [\mathbf{K}_0]^T$$

$$[\mathbf{K}_G] = [\mathbf{K}_G]^T$$

Equação

$$[\mathbf{K}_1(\{\mathbf{X}\})] = [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{X}\})]^T$$

A-1

$$[\mathbf{K}_2(\{\mathbf{X}\}, \{\mathbf{Y}\})] = [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{X}\}, \{\mathbf{Y}\})]^T$$

2. Distributividade dos parâmetros

$$[\mathbf{K}_1(\{\mathbf{X}\} + \{\mathbf{Y}\})] = [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{X}\})] + [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{Y}\})]$$

Equação

$$[\mathbf{K}_2(\{\mathbf{X}\} + \{\mathbf{Z}\}, \{\mathbf{Y}\})] = [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{X}\}, \{\mathbf{Y}\})] + [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{Z}\}, \{\mathbf{Y}\})]$$

A-2

3. Comutatividade dos parâmetros

$$[\mathbf{K}_2(\{\mathbf{X}\}, \{\mathbf{Y}\})] = [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{Y}\}, \{\mathbf{X}\})]$$

Equação

A-3

4. Comutatividade na multiplicação por vetor

$$[\mathbf{K}_1(\{\mathbf{X}\})] \cdot \{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{K}_1(\{\mathbf{Y}\})] \cdot \{\mathbf{X}\}$$

Equação

$$[\mathbf{K}_2(\{\mathbf{X}, \{\mathbf{Y}\}\})] \cdot \{\mathbf{Z}\} = [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{X}, \{\mathbf{Z}\}\})] \cdot \{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{Z}, \{\mathbf{Y}\}\})] \cdot \{\mathbf{X}\}$$

A-4

5. Comutatividade na multiplicação por escalar

$$a \cdot [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{X}, \{\mathbf{Y}\}\})] = [\mathbf{K}_2(a \cdot \{\mathbf{X}, \{\mathbf{Y}\}\})] = [\mathbf{K}_2(\{\mathbf{X}, a \cdot \{\mathbf{Y}\}\})]$$

Equação

A-5

APÊNDICE A

NOÇÕES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

A.1. Introdução

O desenvolvimento deste trabalho se apoiou em conceitos da geometria diferencial, a qual pode ser entendida como a área da matemática que tem por função descrever curvas e superfícies por meio de ferramentas matemáticas inseridas pelo advento do cálculo diferencial. O presente apêndice tem como objetivo apresentar as bases matemáticas dos conceitos utilizados no desenvolvimento dos modelos teóricos apresentados nesta tese. Três tópicos compõem este apêndice, são eles: as curvas paramétricas (Seção A.2.); o toro e as superfícies regulares (Seção A.3.); e as curvas contidas em superfícies (Seção A.4.). Vale ainda ressaltar que a presente seção baseou-se nas considerações encontradas em Eisenhart (1909) e do Carmo (1976). Utilizou-se ainda do trabalho de de Paiva (2015), que versa sobre tema semelhante e apresenta organização e explicações, que se mostraram bastante didáticas.

A.2. Curvas paramétricas

Segundo do Carmo (1976), curvas diferenciáveis parametrizadas podem ser definidas como aplicações diferenciáveis do tipo $\mathbf{a} : I \rightarrow \mathcal{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta \mathcal{R} em \mathcal{R}^3 . O termo diferenciável, nesse contexto, significa que \mathbf{a} é uma correspondência que aplica cada $t \in I$ em um ponto $\{\mathbf{a}(t)\} = \{x(t) \ y(t) \ z(t)\} \in \mathcal{R}^3$ de modo que x , y e z admitem derivadas contínuas de todas as ordens em todos os pontos de I . Curvas dessa natureza podem ser definidas como regulares quando $\{\mathbf{a}(t)\}_{,t} \neq 0$ para todo $t \in I$. Apenas curvas diferenciáveis, parametrizadas e regulares serão tratadas daqui em diante.

Uma das formas mais usuais de parametrização de curvas, segundo Eisenhart (1909), é aquela realizada em função de seu comprimento de arco s , o qual pode ser obtido pela Equação A-1. Nessa situação, a curva passará a ser tratada por $\{\mathbf{a}(s)\}$ ⁵⁵. As curvas estudadas por este trabalho, além de diferenciáveis e regulares, são parametrizadas em relação ao seu comprimento de arco. Tal hipótese é feita para facilitar a apresentação dos conceitos que seguem.

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{s_{x,t}^2 + s_{y,t}^2 + s_{z,t}^2} dt \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{A-1} \end{array}$$

Considera-se, pois, $\{\mathbf{a}\}$ uma dada curva desse tipo. A tangente dessa curva em um ponto p pode ser representada pela posição limítrofe da secante de dois pontos quando o segundo se aproxima do primeiro. O **vetor tangente** unitário da curva, $\{\mathbf{t}\}$, é fornecido pela derivada da curva em relação ao comprimento de arco, conforme expressa a Equação A-2.

$$\{\mathbf{t}\} = \{\mathbf{a}\}_{,s} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{A-2} \end{array}$$

⁵⁵ Vale ressaltar que o elemento de comprimento de arco, ds , está associado à primeira forma fundamental aplicada à $\{\mathbf{a}(0)\}_{,s}$, chamada de I_p . Dessa primeira forma fundamental, é possível obter comprimentos de curvas e ângulos dos vetores tangentes a uma determinada coordenada. Ademais, daqui em diante, como todas as funções são admitidas parametrizadas em função do termo de comprimento de arco, este será omitido.

Outra importante medida para a definição geométrica de curvas é a taxa com que tangentes próximas se afastam angularmente umas das outras, ou seja, o quão rápido a curva, em um ponto p , se desvia da reta tangente na vizinhança deste ponto. A essa medida é dado o nome de curvatura, κ . O inverso da curvatura é chamado de raio de curvatura, R .

$$\kappa = \|\{\boldsymbol{\alpha}\}_{,ss}\|$$

Equação

A-3

É basal para a orientação de uma curva que se defina seu **vetor normal**, $\{\mathbf{n}\}$. Esse vetor é ortogonal ao vetor tangente da curva, logo, pode ser definido, quando $\kappa \neq 0$, na direção de $\{\boldsymbol{\alpha}\}_{,ss}$ pela Equação A-4.

$$\{\boldsymbol{\alpha}\}_{,ss} = \{\mathbf{t}\}_{,s} = \kappa \cdot \{\mathbf{n}\}$$

Equação

A-4

O plano formado pelos vetores ortogonais, tangente e normal, é comumente referido por **plano osculador**. O vetor que orienta tal plano é denominado de **vetor binormal**, o qual, por ser mutuamente perpendicular aos vetores $\{\mathbf{t}\}$ e $\{\mathbf{n}\}$, pode ser obtido pela relação de geometria analítica dada pela Equação A-5.

$$\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{t}\} \times \{\mathbf{n}\}$$

Equação

A-5

Pode-se observar que o resultado da derivação do vetor binormal, $\{\mathbf{b}\}_{,s}$, é normal a $\{\mathbf{t}\}$ e a $\{\mathbf{n}\}_{,s}$ e, por conseguinte, paralelo a $\{\mathbf{n}\}$. Portanto, a Equação A-6 apresenta outra maneira de defini-lo.

$$\{\mathbf{b}\}_{,s} = \tau \cdot \{\mathbf{n}\}$$

Equação

A-6

Nessa equação, τ é um escalar chamado de torção da curva para cada ponto p . A torção de uma curva é a medida do quanto esta se afasta de uma curva plana, logo, se a

curva for plana, a torção deve ser nula. Isto é facilmente observável, uma vez que para curvas planas o vetor binormal é constante. Além do plano osculador, podem-se definir outros dois planos característicos de uma curva espacial: o plano normal e o plano retificador, os quais são formados, respectivamente, pelos vetores $\{\mathbf{t}\}$ e $\{\mathbf{b}\}$ e orientado pelo vetor $\{\mathbf{n}\}$; e pelos vetores $\{\mathbf{n}\}$ e $\{\mathbf{b}\}$ e orientado pelo vetor $\{\mathbf{t}\}$ (Love, 1906).

A cinemática de uma partícula movendo-se ao longo da curva no espaço Euclidiano \mathcal{R}^3 é, geralmente, expressa pela variação do triedro composto pelos vetores ortonormais – tangente, normal e binormal –, e chamado de triedro de Frenet. A expressão que fornece essa variação é conhecida como fórmula de Frenet-Serret, expressa pela Equação A-7. A Figura VI-1 ilustra o triedro de Frenet.

$$\begin{bmatrix} \{\mathbf{t}\} \\ \{\mathbf{n}\} \\ \{\mathbf{b}\} \end{bmatrix}_{,s} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{t}\} \\ \{\mathbf{n}\} \\ \{\mathbf{b}\} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{A-7} \end{array}$$

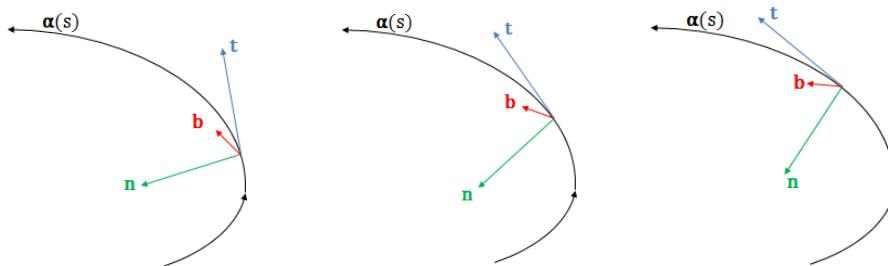


Figura VI-1 – Triedro de Frenet,

A.3. Superfícies regulares espaciais e o caso especial do toro

Antes de definir o toro, é necessário conceituar superfícies regulares. Essas são definidas pelo subconjunto $S \rightarrow \mathcal{R}^3$ quando, para cada ponto $p \in S$, existe uma vizinhança $V \subset \mathcal{R}^3$ de p , um conjunto aberto $U \subset \mathcal{R}^2$ e uma aplicação $\{\mathbf{x}\} : U \rightarrow V \cap S$ com as seguintes propriedades: $\{\mathbf{x}\}$ é diferenciável, sua inversa é contínua e, para todo

$q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3$ é injetiva. Tal aplicação $\{\mathbf{x}\}$ é denominada parametrização ortogonal⁵⁶ de S , com os parâmetros locais angulares v e θ , conforme pode ser verificado na Equação III-1 para o caso especial do toro.

Tendo visto o que se entende por superfície regular, pode-se passar à definição do toro. O toro é uma superfície regular que pode ser obtida ao rotacionar um círculo de raio r em torno de um eixo pertencente ao seu próprio plano e distante $R > r$ do centro do círculo. Uma das possíveis parametrizações do toro é dada pela Equação III-1, onde $0 \leq v \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, A Figura VI-2 ilustra a superfície de um toro.

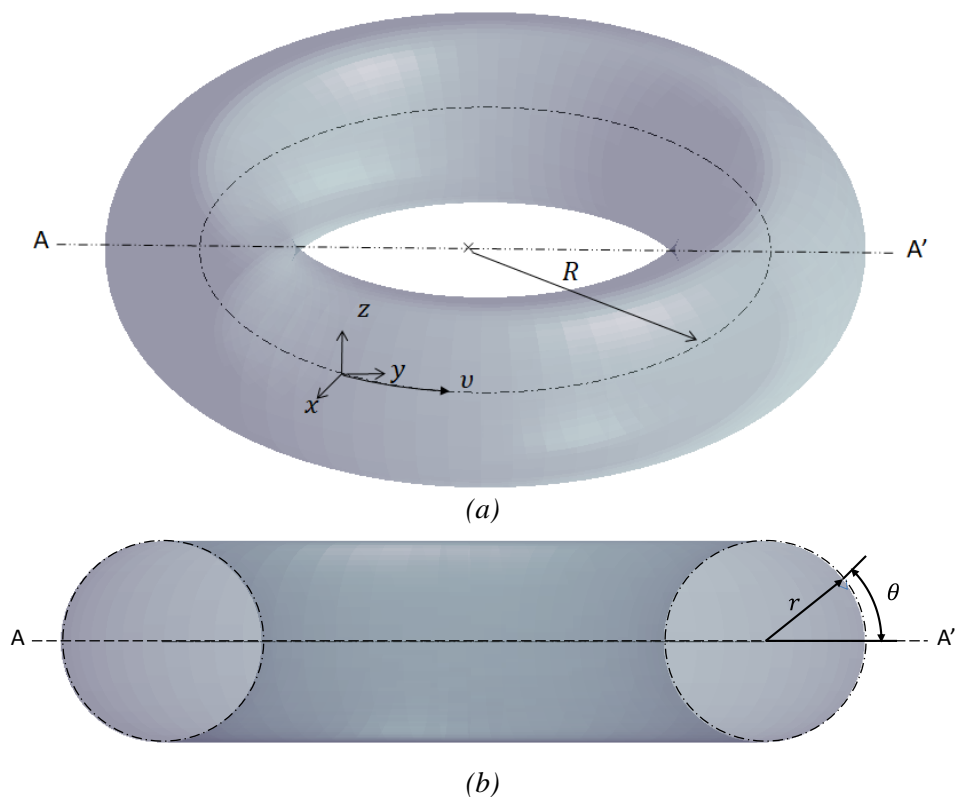


Figura VI-2 – Toro e suas coordenadas paramétricas: (a) vista isométrica e (b) vista do corte sobre o plano A-A'.

As derivadas parciais de $\{\mathbf{x}\}$, $\{\mathbf{x}\}_{,v} = \frac{\partial\{\mathbf{x}\}}{\partial v}$ e $\{\mathbf{x}\}_{,\theta} = \frac{\partial\{\mathbf{x}\}}{\partial \theta}$, representam vetores tangentes às direções principais v e θ , respectivamente, e são expressas, para o caso do toro, pela Equação A-8. Os vetores $\{\mathbf{x}\}_{,v}$ e $\{\mathbf{x}\}_{,\theta}$ compõem, em cada ponto, uma base do

⁵⁶ Parametrização ortogonal significa que as curvas correspondentes às coordenadas de parametrização devem ser ortogonais, ou seja, o produto dos vetores resultantes das derivadas parciais $\{\mathbf{x}\}_{,v}$ e $\{\mathbf{x}\}_{,\theta}$ é nulo.

plano tangente, $T_p(S)$, da superfície, como mostra a Figura VI-3(a). Ainda, o ângulo que o vetor $\{\mathbf{x}\}_{,v}$ faz com a tangente da curva $\{\mathbf{t}\}$ é chamado, neste trabalho, de ângulo de assentamento (ϕ) e pode ser visto na Figura VI-3(b).

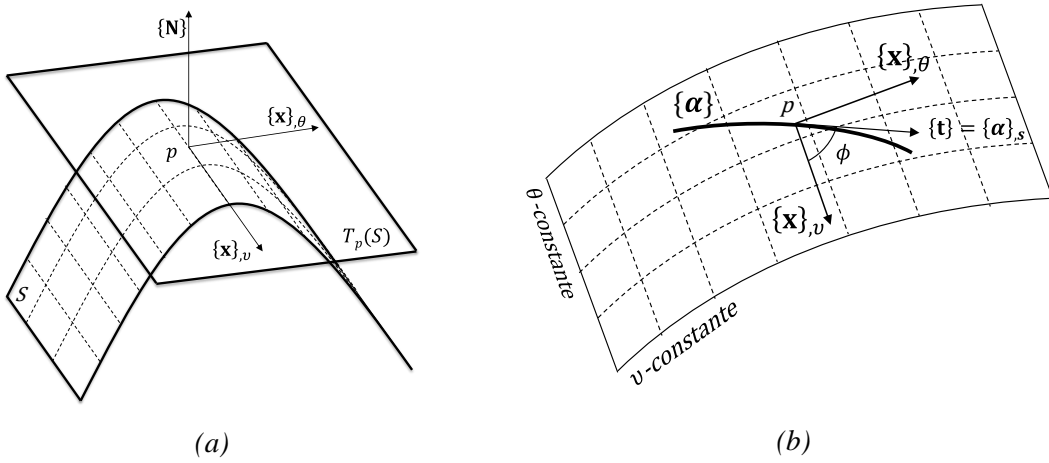


Figura VI-3 – Representações do(a) plano tangente, T_p , e das variáveis (b) ϕ , $\{\mathbf{x}\}_{,v}$, $\{\mathbf{x}\}_{,\theta}$ e $\{\mathbf{t}\}$,

$$\{\mathbf{x}\}_{,v} = \begin{Bmatrix} -\kappa \cdot \left[\frac{1}{\kappa} + r \cdot \cos(\theta) \right] \sin(\kappa \cdot v) \\ \kappa \cdot \left[\frac{1}{\kappa} + r \cdot \cos(\theta) \right] \cos(\kappa \cdot v) \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \text{Equação A-8}$$

$$\{\mathbf{x}\}_{,\theta} = \begin{Bmatrix} -r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\kappa \cdot v) \\ -r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\kappa \cdot v) \\ r \cos(\theta) \end{Bmatrix}$$

A esse plano, ainda, são associados dois vetores unitários e normais que se chamam *vetores normais*. Fixando, então, uma parametrização $\{\mathbf{x}\} : U \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow S$, para cada ponto $q \in \{\mathbf{x}(U)\}$ podemos determinar um dos vetores normal unitário por meio da aplicação diferenciável $\{\mathbf{N}\} : \{\mathbf{x}(U)\} \rightarrow \mathcal{R}^3$, expressa pela Equação A-9. O outro vetor normal possui a mesma direção, porém sentido oposto ao vetor normal determinado.

$$\{\mathbf{N}(q)\} = \frac{\{\mathbf{x}\}_{,v} \times \{\mathbf{x}\}_{,\theta}}{\|\{\mathbf{x}\}_{,v} \times \{\mathbf{x}\}_{,\theta}\|} (q) \quad \text{Equação A-9}$$

Vale ressaltar, segundo do Carmo (1976), que uma superfície regular pode ser orientável quando admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definidos por toda sua superfície. Sua orientação é definida pela escolha de um campo $\{\mathbf{N}\}$. Para o caso específico do toro, o campo $\{\mathbf{N}\}$, que determina a orientação, é dado pela Equação A-10.

$$\{\mathbf{N}\} = \begin{Bmatrix} \cos(\kappa u) \cos(\theta) \\ \sin(\kappa u) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{A-10} \end{array}$$

Analogamente à curvatura, que fornece uma medida de variação da direção da curva, a aplicação linear⁵⁷ diferencial dN_p de $\{\mathbf{N}\}$ em $p \in S$ fornece informações sobre a forma local de S . Dessa forma, dN_p mede a taxa de variação do vetor normal restrito à curva $\{\mathbf{a}\}$ situada sobre a superfície S . Segundo do Carmo (1976), a aplicação linear $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ é auto-adjunta⁵⁸, o que permite associá-la à segunda forma fundamental, ou forma quadrática, de S , II_p , dada pela Equação A-11 e que será mais discutida quando a curvatura normal da superfície for abordada.

$$II_p(\{\mathbf{w}\}) = -dN_p(\{\mathbf{w}\}) \cdot \{\mathbf{w}\} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{A-11} \end{array}$$

Voltando à aplicação diferencial dN_p , um importante conceito pode ser estabelecido, as curvaturas principais κ_1 e κ_2 . Esses valores são obtidos a partir da aplicação do operador de forma, dN_p , em uma base do plano tangente da superfície, T_p . Isso remete a um problema de autovetores e autovalores de dN_p , onde os vetores na base do plano tangente, $\{\mathbf{x}\}_u$ e $\{\mathbf{x}\}_\theta$, são os autovetores e κ_1 e κ_2 , os autovalores. As expressões da Equação A-12 fornecem a formulação de tal problema. Essas igualdades, bem como suas provas matemáticas, são apresentadas por do Carmo (1976) e por Eisenhart (1909).

⁵⁷ Uma aplicação é dita linear quando preserva a adição de vetores ($A(\{\mathbf{u}\} + \{\mathbf{v}\}) = A(\{\mathbf{u}\}) + A(\{\mathbf{v}\})$) e a multiplicação por um escalar ($A(a\{\mathbf{u}\}) = aA(\{\mathbf{u}\})$).

⁵⁸ Uma aplicação linear é também auto-adjunta, ou simétrica, se a matriz que a representa em uma base ortonormal B é, também, simétrica. Para a prova matemática, ver do Carmo (1976).

$$dN_p(\{\mathbf{x}\}_{,v}) = \{\mathbf{N}\}_{,v} = -\kappa_1 \cdot \{\mathbf{x}\}_{,v} \quad \text{Equação}$$

$$dN_p(\{\mathbf{x}\}_{,\theta}) = \{\mathbf{N}\}_{,\theta} = -\kappa_2 \cdot \{\mathbf{x}\}_{,\theta} \quad \text{A-12}$$

Por meio da resolução do problema de autovalor e autovetor previamente apresentado pela Equação A-12, as expressões para as curvaturas principais de uma superfície regular podem ser obtidas. A Equação A-13 define tais parâmetros para o caso específico do toro.

$$\kappa_1 = -\frac{\kappa \cos \theta}{1 + r \kappa \cos \theta} \quad \text{Equação}$$

$$\kappa_2 = -\frac{1}{r} \quad \text{A-13}$$

A.4. Curvas contidas em superfícies regulares

Já foram apresentados os conceitos de geometria diferencial necessários para a abordagem matemática de curvas e superfícies regulares. Entretanto, ainda é indispensável a apresentação de conceitos que permitam determinar a restrição da primeira, a curva regular, à segunda, a superfície regular. Logo, será necessária a apresentação dos conceitos referentes às fórmulas de Darboux, bem como as definições, geométrica e matemática, das curvaturas normal, geodésica e, por último, da torção geodésica.

As fórmulas de Darboux utilizam um triedro de vetores unitários e ortogonais (Figura VI-4) análogo ao apresentado pelo triedro de Frenet. Os três vetores são os vetores tangente, normal e binormal, representados respectivamente por: $\{\mathbf{T}\}$, $\{\mathbf{N}\}$ e $\{\mathbf{B}\}$ onde $\{\mathbf{N}\}$ é dado pela Equação A-9 e $\{\mathbf{T}\}$ e $\{\mathbf{B}\}$, pela Equação A-14.

$$\{\mathbf{T}\} = \{\mathbf{t}\} = \{\mathbf{a}\}_{,s}; \{\mathbf{B}\} = \{\mathbf{t}\} \times \{\mathbf{N}\} \quad \text{Equação}$$

A-14

O triedro de Darboux é obtido pela rotação do triedro de Frenet de um ângulo γ , onde $\cos(\gamma) = \{\mathbf{n}\} \cdot \{\mathbf{N}\}$. Essa rotação garante que o vetor $\{\mathbf{N}\}$ seja representado pela normal da superfície e não mais pela normal da curva, $\{\mathbf{n}\}$, imprimindo à curva a invariância desse ângulo como restrição.

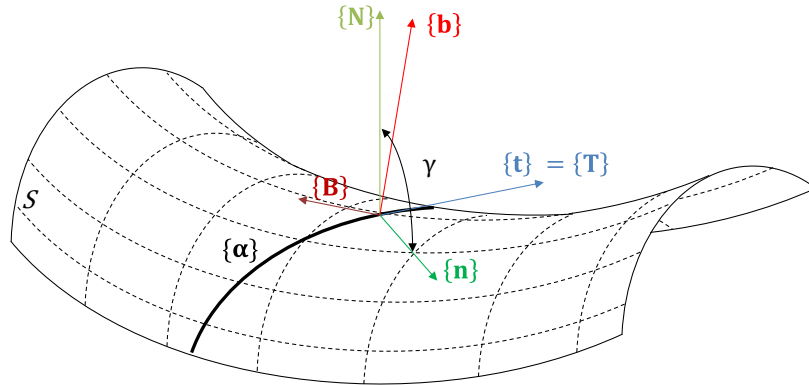


Figura VI-4 – Triedro de Darboux, de Frenet e ângulo de rotação γ .

Similarmente às fórmulas de Frenet, as fórmulas de Bonnet-Kovalevski (Equação A-15) relacionam as primeiras derivadas, em relação ao comprimento de arco da curva, dos vetores componentes do triedro de Darboux com os próprios vetores $\{\mathbf{t}\}$, $\{\mathbf{N}\}$ e $\{\mathbf{B}\}$ e com as componentes de curvaturas, normal (κ_n) e geodésica (κ_g), e de torção geodésica (τ_g). Essas componentes de curvaturas são entidades geométricas que caracterizarão o comportamento da curva contida em uma superfície.

$$\begin{bmatrix} \{\mathbf{t}\} \\ \{\mathbf{N}\} \\ \{\mathbf{B}\} \end{bmatrix}_{,s} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_n & -\kappa_g \\ -\kappa_n & 0 & \tau_g \\ \kappa_g & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{t}\} \\ \{\mathbf{N}\} \\ \{\mathbf{B}\} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{A-15} \end{array}$$

A expansão das relações de Bonnet-Kovalevski fornece as definições matemáticas dos parâmetros geométricos correspondentes à curvatura normal, à curvatura geodésica e à torção geodésica de maneira direta, como indica a Equação A-16. Porém, esse procedimento é trabalhoso o que leva a explorar conceitos mais abstratos de geometria diferencial para a determinação dessas grandezas. Vale ainda ressaltar, como deixa claro Nutbourne & Martin (1988), que apenas a curvatura

geodésica informa sobre como a curva vagueia pela superfície, mas nenhuma informação confere sobre a superfície. Já os outros dois parâmetros, a curvatura normal e a torção geodésica, dependem exclusivamente da superfície em que a curva se dá e do ponto considerado.

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{t}\}_{,s} = -\{\mathbf{t}\} \cdot \{\mathbf{N}\}_{,s} \\ \kappa_g &= \{\mathbf{t}\} \cdot \{\mathbf{B}\}_{,s} = -\{\mathbf{B}\} \cdot \{\mathbf{t}\}_{,s} \\ \tau_g &= \{\mathbf{B}\} \cdot \{\mathbf{N}\}_{,s} = -\{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{B}\}_{,s}\end{aligned}$$

*Equação
A-16*

A curvatura normal, κ_n , é a representação geométrica da intensidade com que uma superfície regular S se afasta, com uma direção determinada, do plano tangente T_p em uma região próxima a um ponto $p \in S$. Geometricamente, a curvatura normal é o comprimento da projeção da derivada do vetor tangente sobre a reta que passa pela normal da superfície. Lembrando que, pela fórmula de Frenet, $\{\mathbf{t}\}_{,s} = \kappa \cdot \{\mathbf{n}\}$, pode-se provar, fazendo uso da definição matemática de curvatura normal, $\kappa_n = \{\mathbf{t}\}_{,s} \cdot \{\mathbf{N}\}$, que ao substituir a expressão $\{\mathbf{t}\}_{,s}$ por $\kappa\{\mathbf{n}\}$, obtém-se: $\kappa_n = \kappa\{\mathbf{n}\} \cdot \{\mathbf{N}\}$. Assim, como os dois vetores normais são unitários, a expressão para a curvatura normal fica: $\kappa_n = \kappa \cdot \cos(\gamma)$. Por simples análise da Figura VI-5, é, também, possível chegar à mesma conclusão apresentada acima.

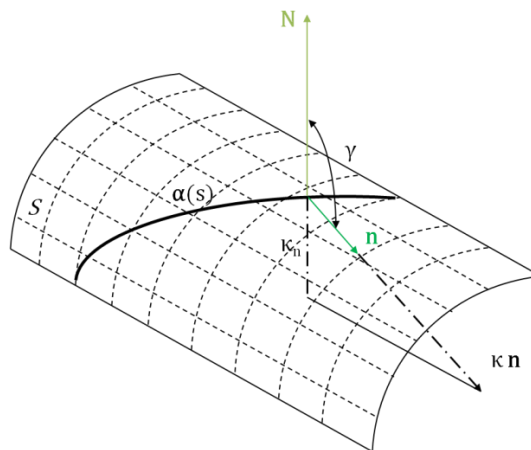


Figura VI-5 – Curvatura normal,

Outra interpretação geométrica da curvatura normal é traçada ao considerá-la como a curvatura da curva plana gerada pela interseção do plano formado pelo vetor

tangente à curva $\{\mathbf{a}\}$ e pela normal, $\{\mathbf{N}\}$, à superfície S . Essa definição permite associar a curvatura normal à forma quadrática da superfície, II_p , conforme demonstrado em Eisenhart (1909), pela equação de Euler (Equação A-17) que relaciona as curvaturas principais, máxima e mínima, e o ângulo ϕ . A derivação da equação de Euler é apresentada sucintamente pela Equação A-17, a qual é obtida pela igualdade da segunda forma fundamental⁵⁹ de S quando aplicada a um vetor unitário $\mathbf{v} = \cos(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_1\} + \sin(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_2\}$ ⁶⁰, que represente a direção da curva e forme uma base ortonormal do plano tangente.

$$\begin{aligned}
 \kappa_n = II_p(\mathbf{v}) &= -dN_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\
 &= -dN_p \cdot (\cos(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_1\} + \sin(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_2\}) \\
 &\quad \cdot (\cos(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_1\} + \sin(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_2\}) \\
 &= (\kappa_1 \cdot \cos(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_1\} + \kappa_2 \cdot \sin(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_2\}) \\
 &\quad \cdot (\cos(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_1\} + \sin(\phi) \cdot \{\mathbf{e}_2\}) \\
 &= \kappa_1 \cdot \cos^2(\phi) + \kappa_2 \cdot \sin^2(\phi)
 \end{aligned}$$

Equação A-17

Como as curvaturas principais para o toro já foram apresentadas, a curvatura normal pode ser facilmente obtida, para o caso do toro:

$$\kappa_n = -\frac{\kappa \cdot \cos \theta}{1 + r \kappa \cdot \cos \theta} \cos^2(\phi) + -\frac{1}{r} \sin^2(\phi)$$

Equação A-18

Enquanto a curvatura normal, κ_n , de uma curva $\{\mathbf{a}\}$ é a componente normal da curvatura total κ , a curvatura geodésica, κ_g , é a sua componente tangencial. Desse modo, pode-se escrever que a curvatura total é igual a $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$ e, analogamente ao exposto para a curvatura normal, a curvatura geodésica deve ser igual a $\kappa_g = \kappa \cdot \sin(\gamma)$. Do Carmo (1976) define a curvatura geodésica de uma curva $\{\mathbf{a}\}$ no ponto p como o valor absoluto da componente tangencial do vetor $\{\mathbf{a}\}_{,ss} = \kappa \cdot \{\mathbf{n}\}$, onde κ é a

⁵⁹ A prova matemática relativa à associação da curvatura normal e a segunda forma quadrática da superfície será omitida neste trabalho, mas pode ser encontrada tanto em Eisenhart (1909) quanto em do Carmo (1976).

⁶⁰ \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 representam a base ortonormal do plano tangente e ϕ o ângulo entre \mathbf{e}_1 e a direção de \mathbf{v} .

curvatura da curva em p e $\{\mathbf{n}\}$, o vetor normal. Em outras palavras, a curvatura geodésica pode ser definida como a taxa de variação do ângulo que a tangente da curva faz com a direção da própria curva. Segundo do Carmo (1976), Liouville propôs uma expressão (Equação A-19) para o cálculo da curvatura geodésica envolvendo as curvaturas geodésicas das curvas de coordenadas constantes, $\{\beta(v)\}$ e $\{\eta(\theta)\}$. Essas curvaturas, $(\kappa_g)_\theta$ e $(\kappa_g)_v$, são obtidas mantendo, respectivamente, as variáveis θ e v constantes. A Figura VI-6 ilustra as curvas, $\{\beta(v)\}$ e $\{\eta(\theta)\}$.

$$\kappa_g = (\kappa_g)_\theta \cos(\phi) + (\kappa_g)_v \sin(\phi) + \phi_{,s}$$

Equação
A-19

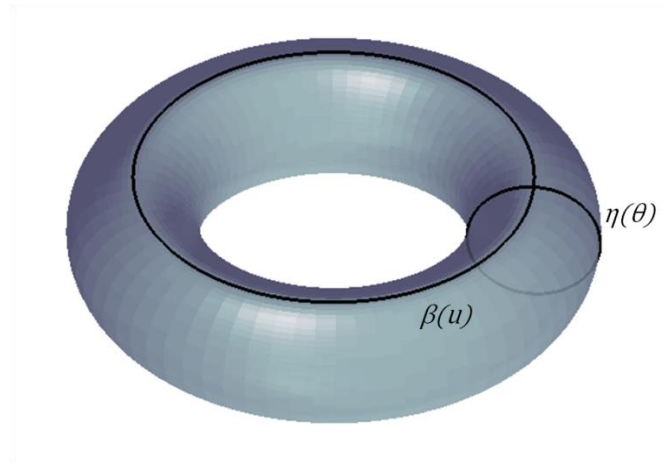


Figura VI-6 – Curvas coordenadas, $\{\beta(v)\}$ e $\{\eta(\theta)\}$,

Para o caso do toro, $(\kappa_g)_\theta$ e $(\kappa_g)_v$ são obtidas diretamente da expansão das fórmulas de Darboux explicitadas pela Equação A-16 quando a curva analisada é aquela em que as respectivas variáveis são mantidas constantes. Esses valores são expostos pela Equação A-20.

$$(\kappa_g)_\theta = \frac{\text{sen}(\theta)}{R + r \cdot \cos(\theta)}; (\kappa_g)_v = 0$$

Equação
A-20

Logo, substituindo a Equação A-20 na Equação A-19, κ_g é dado pela Equação A-21.

$$\kappa_g = \frac{\kappa \cdot \text{sen}(\theta)}{1 + r \cdot \kappa \cdot \text{cos}(\theta)} \cdot \text{cos}(\phi) + \frac{d\phi}{ds}$$

Equação
A-21

O último parâmetro a ser definido é a torção geodésica, chamada neste trabalho de τ_g . O conceito de torção geodésica compreende a medida de quão rápido a curva se afasta por distorção do plano de curvatura total, ou seja, a torção geodésica é igual à própria torção da curva mais a variação do ângulo γ entre a normal da superfície, $\{\mathbf{N}\}$, e a normal da curva, $\{\mathbf{n}\}$, ao longo do comprimento de arco. Do Carmo (1976) fornece uma expressão, que se baseia nesse conceito, para a definição da torção geodésica. Tal expressão simplifica bastante o cálculo desta grandeza e pode ser vista pela Equação A-22.

$$\begin{aligned} \tau_g &= -(\kappa_1 - \kappa_2) \cdot \text{sen}(\phi) \cdot \text{cos}(\phi) \\ &= \left(\frac{\kappa \cdot \text{cos}(\theta)}{1 + r \cdot \kappa \cdot \text{cos}(\theta)} - \frac{1}{r} \right) \cdot \text{sen}(\phi) \cdot \text{cos}(\phi) \end{aligned}$$

Equação
A-22

Finalmente, vale mencionar sobre duas curvas específicas constritas em superfícies regulares, a dizer: a geodésica e a loxodrômica. As curvas geodésicas podem ser entendidas como aquelas que ligam dois pontos pelo menor comprimento possível. Essas curvas possuem curvatura geodésica nula e torção geodésica igual à torção da curva ($\tau = \tau_g$). Pela análise da relação $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$, portanto, é fácil observar que a curvatura normal de uma geodésica será equivalente à própria curvatura κ da superfície. As loxodrômicas, por sua vez, são curvas que cortam toda a superfície com o mesmo ângulo, o ângulo de assentamento ($\phi = \phi_0 = cte$). Por meio da definição apresentada, conclui-se que $\frac{d\phi}{ds} = 0$.

APÊNDICE B

ATUALIZAÇÕES DAS CURVATURAS

Para a resolução do problema de autovalor atualizado ou do problema incremental iterativo, é necessário determinar como as curvaturas e torções das vigas variam ao longo da compressão das vigas. Essas variações podem ser expressas em função das variações dos triedros principais da viga sobre o toro ($\{\mathbf{t}_0\}, \{\mathbf{N}_0\}, \{\mathbf{B}_0\}$). Dessa forma, segue-se procedimento análogo ao proposto por Tabarrok & Xiong (1989), no qual, depois de solicitado, tendo conhecimento do triedro deformado ($\{\mathbf{t}\}, \{\mathbf{N}\}, \{\mathbf{B}\}$), pode-se obter as suas variações.

Considerando um ponto inicial na configuração indeformada situado na linha central da viga, m_0 , e supondo o vetor de posição desse ponto referente à origem igual à $\{\mathbf{r}_0\}$; após a deformação, o ponto m_0 desloca-se para o ponto m , com vetor de posição $\{\mathbf{r}\}$, descrito pela Equação B-1.

$$\{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{r}_0\} + u_t \cdot \{\mathbf{t}\} + u_N \cdot \{\mathbf{N}\} + u_B \cdot \{\mathbf{B}\}$$

*Equação
B-1*

A variação do vetor posição ao longo de toda a linha central do duto é obtida diferenciando a Equação B-1 com respeito ao comprimento de arco s e é dada pela Equação B-2.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{r}\}_{,s} = \{\mathbf{r}_0\}_{,s} + \frac{du_t}{ds} \cdot \{\mathbf{t}\} + \frac{du_N}{ds} \cdot \{\mathbf{N}\} + \frac{du_B}{ds} \cdot \{\mathbf{B}\} + u_t \cdot \{\mathbf{t}\}_{,s} + u_N \cdot \{\mathbf{N}\}_{,s} \\ + u_B \cdot \{\mathbf{B}\}_{,s} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ B-2 \end{array}$$

Utiliza-se das fórmulas de Bonnet-Kovalevski (Equação III-2), e remete-se a, para o estado indeformado, $\{\mathbf{r}_0\}_{,s} = \{\mathbf{t}_0\}$. Dessa maneira, a Equação B-2 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{r}\}_{,s} = \{\mathbf{t}\} \cdot \left(1 + \frac{du_t}{ds} - \kappa_{n_0} u_N - \kappa_{g_0} u_B\right) + \{\mathbf{N}\} \cdot \left(\frac{du_N}{ds} + \kappa_{n_0} u_t + \tau_{g_0} u_B\right) \\ + \{\mathbf{B}\} \cdot \left(\frac{du_B}{ds} + \kappa_{g_0} u_t - \tau_{g_0} u_N\right) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ B-3 \end{array}$$

Como em vigas as deformações de flexão tendem a ser bastante maiores que suas deformações axiais, pode-se desprezar a parcela de alongamento axial. Ressalta-se que os termos cruzados entre as derivadas dos deslocamentos e os mesmos também são desprezados. Com essas simplificações, obtém-se o vetor tangente na posição deformada em função do triedro na posição inicial, conforme a Equação B-4:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{t}\} = \{\mathbf{t}_0\} + \{\mathbf{N}_0\} \cdot \left(\frac{du_N}{ds} + \kappa_{n_0} u_t + \tau_{g_0} u_B\right) + \{\mathbf{B}_0\} \\ \cdot \left(\frac{du_B}{ds} + \kappa_{g_0} u_t - \tau_{g_0} u_N\right) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ B-4 \end{array}$$

Ao diferenciar essa equação, tem-se:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{t}\}_{,s} = \{\mathbf{t}_0\} \cdot & \left(\kappa_{n_0} \cdot \frac{du_N}{ds} + \kappa_{n_0}^2 \cdot u_t - \kappa_{n_0} \tau \cdot u_B + \kappa_{g_0} \cdot \frac{du_B}{ds} - \kappa_{g_0}^2 \cdot u_t \right. \\
& \left. + \kappa_{g_0} \tau_{g_0} \cdot u_N \right) + \{\mathbf{N}_0\} \\
& \cdot \left(\frac{d^2 u_N}{ds^2} + \frac{d\kappa_{n_0}}{ds} \cdot u_t + \kappa_{n_0} \cdot \frac{du_t}{ds} + \frac{d\tau_{g_0}}{ds} \cdot u_B + 2\tau_{g_0} \cdot \frac{du_B}{ds} \right. \\
& \left. + \kappa_{g_0} \tau_{g_0} \cdot u_t - \tau_{g_0}^2 \cdot u_t + \kappa_{n_0} \right) + \{\mathbf{B}_0\} \\
& \cdot \left(\frac{d^2 u_B}{ds^2} + \frac{d\kappa_{g_0}}{ds} \cdot u_t + \kappa_{g_0} \cdot \frac{du_t}{ds} - \frac{d\tau_{g_0}}{ds} \cdot u_N - 2\tau_{g_0} \cdot \frac{du_N}{ds} \right. \\
& \left. - \kappa_{n_0} \tau_{g_0} \cdot u_t - \tau_{g_0}^2 \cdot u_B + \kappa_{g_0} \right)
\end{aligned}$$

Equação B-5

A variação da tangente também pode ser expressa, pelo uso da formulação de Bonnet-Kovalevski (Equação III-2), a qual fornece, ao desprezar o cruzamento das quantidades incrementais, a expressão:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{t}\}_{,s} = \kappa_n \cdot \{\mathbf{N}\} - \kappa_g \cdot \{\mathbf{B}\} \\
= (\kappa_{n_0} + \kappa_{n_0}^*) \cdot (\{\mathbf{N}_0\} + \{\mathbf{N}_0^*\} + \beta_t \cdot \{\mathbf{B}_0\}) - (\kappa_{g_0} + \kappa_{g_0}^*) \\
\cdot (\{\mathbf{B}_0\} + \{\mathbf{B}_0^*\} + \beta_t \cdot \{\mathbf{N}_0\}) \\
= (\kappa_{n_0} + \kappa_{n_0}^* - \kappa_{g_0} \cdot \beta_t) \cdot \{\mathbf{N}_0\} + \kappa_{n_0} \cdot \{\mathbf{N}_0^*\} \\
- (\kappa_{g_0} + \kappa_{g_0}^* + \kappa_{n_0} \cdot \beta_t) \cdot \{\mathbf{B}_0\} + \kappa_{g_0} \cdot \{\mathbf{B}_0^*\}
\end{aligned}$$

Equação B-6

onde o sobrescrito (*) representa o incremento na respectiva quantidade analisada quando deslocamentos incrementais ($[\mathbf{u}^*]$) são impostos a estrutura.

As variações das curvaturas, normal e geodésica, são obtidas da equivalência entre a Equação B-5 e a Equação B-6 e podem ser simplificadas considerando que as curvaturas são uniformes ao longo do comprimento de arco (Tabarrok & Xiong, 1992).

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= \kappa_{n_0} + \frac{d^2 u_N}{ds^2} + \frac{d\kappa_{n_0}}{ds} \cdot u_t + \kappa_{n_0} \cdot \frac{du_t}{ds} + \frac{d\tau_{g_0}}{ds} \cdot u_B + 2\tau_{g_0} \cdot \frac{du_B}{ds} \\
&\quad + \kappa_{g_0} \tau_{g_0} \cdot u_t - \tau_{g_0}^2 \cdot u_t + \kappa_{g_0} \cdot (\tau_{g_0} \cdot u_t - \kappa_t \cdot u_B) \\
&\cong \kappa_{n_0} + \frac{d^2 u_N}{ds^2} + \kappa_{n_0} \cdot \frac{du_t}{ds} + 2\tau_{g_0} \cdot \frac{du_B}{ds} + \kappa_{g_0} \tau_{g_0} \cdot u_t \\
&\quad - \tau_{g_0}^2 \cdot u_t + \kappa_{g_0} \cdot (\tau_{g_0} \cdot u_t - \kappa_t \cdot u_B)
\end{aligned}$$

Equação

B-7

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= \kappa_{g_0} - \frac{d^2 u_B}{ds^2} - \frac{d\kappa_{g_0}}{ds} \cdot u_t - \kappa_{g_0} \cdot \frac{du_t}{ds} - \frac{d\tau_{g_0}}{ds} \cdot u_N + 2\tau_{g_0} \cdot \frac{du_N}{ds} \\
&\quad + \kappa_{n_0} \tau_{g_0} \cdot u_t + \tau_{g_0}^2 \cdot u_B - \kappa_{n_0} \cdot (\tau_{g_0} \cdot u_t - \kappa_t \cdot u_B) \\
&\cong \kappa_{g_0} - \frac{d^2 u_B}{ds^2} - \kappa_{g_0} \cdot \frac{du_t}{ds} + 2\tau_{g_0} \cdot \frac{du_N}{ds} + \kappa_{n_0} \tau_{g_0} \cdot u_t + \tau_{g_0}^2 \\
&\quad \cdot u_B - \kappa_{n_0} \cdot (\tau_{g_0} \cdot u_t - \kappa_t \cdot u_B)
\end{aligned}$$

Por fim, resta obter a expressão que caracteriza a torção na configuração deformada em função de sua configuração inicial e dos deslocamentos obtidos em cada incremento. Para tanto, são utilizadas as simplificações apresentadas no início desse capítulo, chamadas de restrições cinemáticas, em conjunto com a determinação dos vetores $\{\mathbf{N}\}$ e $\{\mathbf{B}\}$, na configuração deformada. Esses vetores são determinados pelas relações geométricas fornecidas pela geometria diferencial clássica:

$$\{\mathbf{N}\} = \{\mathbf{t}\}_{,s}$$

Equação

$$\{\mathbf{B}\} = \{\mathbf{t}\} \times \{\mathbf{N}\}$$

B-8

De posse dos vetores normal e binormal, pode-se estimar a torção geodésica pelas relações obtidas da fórmula de Bonnet-Kovalevski, para as quais temos:

$$\kappa_n = \{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{t}\}_{,s}$$

Equação

$$\kappa_g = \{\mathbf{B}\} \cdot \{\mathbf{t}\}_{,s}$$

B-9

$$\tau_g = \{\mathbf{B}\} \cdot \{\mathbf{N}\}_{,s}$$

Tem-se, portanto, a expressão para a torção geodésica dada pela Equação B-10:

$$\begin{aligned} \tau_g = & \tau_{g_0} + \kappa_{g_0} \cdot \frac{du_N}{ds} - \tau_{g_0} \cdot \frac{du_t}{ds} - (\kappa_t - \kappa_{n_0}) \cdot \frac{du_B}{ds} - \tau_{g_0} \kappa_{n_0} \cdot u_N \\ & - \tau_{g_0} \kappa_{g_0} \cdot u_B \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{B-10} \end{array}$$

Deve-se ressaltar que, nas deduções referentes às variações das curvaturas, a hipótese de rotações moderadas e as restrições cinemáticas apresentadas na Seção III.3.2. são consideradas. Ao lançar mão dessas hipóteses, temos as variações de curvaturas e torção ($\Delta\kappa_g$, $\Delta\kappa_n$ e $\Delta\tau_g$) dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta\kappa_g = & \kappa_{g_0} - \frac{d^2u_B}{ds^2} - \kappa_{g_0} \cdot \frac{du_t}{ds} + 2\tau_{g_0} \cdot \frac{du_N}{ds} + \kappa_{n_0} \tau_{g_0} \cdot u_t + \tau_{g_0}^2 \cdot u_B \\ & - \kappa_{n_0} \cdot (\tau_{g_0} \cdot u_t - \kappa_t \cdot u_B) \\ \Delta\kappa_n = & \frac{d^2u_N}{ds^2} + \kappa_{n_0} \cdot \frac{du_t}{ds} + 2\tau_{g_0} \cdot \frac{du_B}{ds} + \kappa_{g_0} \tau_{g_0} \cdot u_t - \tau_{g_0}^2 \cdot u_t + \kappa_{g_0} \\ & \cdot (\tau_{g_0} \cdot u_t - \kappa_t \cdot u_B) \\ \Delta\tau_g = & \kappa_{g_0} \cdot \frac{du_N}{ds} - \tau_{g_0} \cdot \frac{du_t}{ds} - (\kappa_t - \kappa_{n_0}) \cdot \frac{du_B}{ds} - \tau_{g_0} \kappa_n \cdot u_N - \tau_{g_0} \kappa_g \\ & \cdot u_B \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{B-11} \end{array}$$

APÊNDICE C

**MODELOS PARA FLAMBAGEM DE ARAMES DA ARMADURA DE
TRAÇÃO**

C.1. Introdução

Este apêndice tem por objetivo a apresentação de duas metodologias apresentadas em Gonzalez (2016), que objetivam a predição do fenômeno de instabilidade dos arames das armaduras de tração. O primeiro modelo a ser apresentado é o proposto por Østergaard (2012) e o segundo, primeiramente, por de Sousa (2005) e, em sequência, por Gonzalez *et al.* (2017). Ambos os modelos possibilitam a predição do mecanismo de flambagem lateral elástica dos arames. Porém, apenas o segundo modelo permite também a previsão da instabilidade radial desses arames. Outra diferença relativa a esses modelos são suas abordagens. Enquanto o primeiro é calcado na dedução de equações diferenciais para o problema e as resolve por diferenças finitas, o segundo faz uso de um programa comercial de elementos finitos para sua elaboração.

C.2. Modelos reproduzidos da literatura

C.2.1. Instabilidade lateral de arames: o modelo de Østergaard (2012)

Este modelo prevê o comportamento mecânico de uma curva assentada sobre a superfície de um toro. O comportamento mecânico dessa curva é descrito por um sistema não-linear de equações diferenciais e suas condições de contorno. As equações diferenciais que governam esse problema são derivadas com o auxílio de conceitos de geometria diferencial, os quais foram previamente apresentados no APÊNDICE A. Esses conceitos são aplicados às equações diferenciais de equilíbrio para vigas curvas, conforme apresentado por Love (1906). É interessante ressaltar que o modelo de Østergaard (2012) considera a hélice de passo constante assentada sobre um cilindro reto como o estado inicial do arame.

Para a derivação do sistema de equações diferenciais, é imperativo o uso de algumas hipóteses simplificadoras e premissas básicas, a dizer:

- Cada camada de armadura se comporta de forma homogênea, ou seja, o comportamento mecânico de um único arame pode ser extrapolado para os demais.
- Os efeitos do atrito entre os arames das armaduras de tração e as camadas circundantes são desprezados, a fim de simular o ocorrido após diversos ciclos de flexão e/ou a situação de anular alagado.
- A contração radial deve ser desprezível, o que é razoável para dutos dotados de carcaça intertravada e armadura de pressão. Porém, essa premissa não se sustenta para as expansões radiais, usualmente contidas pela ação da pressão externa (condição de anular seco) e da fita de alta resistência (condição de anular alagado), decorrentes da compressão.
- As solicitações nos arames devem se ater ao regime elástico.
- A definição de deformação axial de Cauchy é utilizada e, para tal, essas deformações devem ser suficientemente pequenas.
- A curvatura, κ , imposta ao cilindro deve ser considerada constante ao longo de seu comprimento.

No que segue, as expressões que caracterizam esse problema serão apresentadas de modo sucinto. No modelo de Østergaard (2012), a curva $\{\mathbf{a}\}$ (ver Figura III-1 e APÊNDICE A), interpreta o papel de um dos arames das armaduras de tração, os quais terão comportamento descrito pela extrapolação linear do comportamento do único arame analisado.

A superfície de apoio $\{\mathbf{x}\}$ (Equação III-1) e a restrição do arame à mesma são responsáveis por representar o comportamento das demais camadas do duto flexível. Em outras palavras, essa imposição simula, superestimando, tanto a restrição radial imposta pelas fitas de reforço à compressão quanto a rigidez radial garantida pela carcaça intertravada e pela armadura de pressão. Já a possibilidade de imposição de curvatura na superfície de apoio permite a representação de diversas situações que perpassam desde as condições de instalação às de operação, o que justifica a escolha do toro como superfície de assentamento do arame.

As duas primeiras equações diferenciais que regem a mecânica do arame, segundo Østergaard (2012), podem se obtidas diretamente de relações geométricas. Com o auxílio do apresentado no APÊNDICE A, é possível verificar que:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\cos(\phi)}{\|\{\mathbf{x}\}_{,v}\|} \quad \text{Equação C-1}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos(\phi)}{\|\{\mathbf{x}\}_{,\theta}\|}$$

onde os módulos dos vetores $\{\mathbf{x}\}_{,v}$ e $\{\mathbf{x}\}_{,\theta}$ são fornecidos pela Equação C-2.

$$\|\{\mathbf{x}\}_{,v}\| = 1 + r\kappa \cos(\phi) \quad \text{Equação C-2}$$

$$\|\{\mathbf{x}\}_{,\theta}\| = r$$

Substituindo a Equação C-2 na Equação C-1, acham-se as primeiras duas equações que compõe o sistema de equações proposto por Østergaard (2012), ilustrados pela Equação C-3, conforme posto pelo autor.

$$v_{,s} = \frac{\cos(\phi)}{1 + r\kappa \cos(\phi)} \quad \text{Equação C-3}$$

$$\theta_{,s} = \frac{\cos(\phi)}{r}$$

A terceira equação diferencial do sistema atesta a taxa de variação do ângulo de assentamento ϕ ao longo do comprimento de arco. Essa equação é obtida pela Equação A-21, a qual define a curvatura geodésica da curva. Dessa maneira, chega-se a:

$$\frac{d\phi}{ds} = -\frac{\kappa \operatorname{sen}(\theta)}{1 + r\kappa \cos(\theta)} \cos(\phi) + \kappa_g \quad \text{Equação C-4}$$

Até aqui, apenas conceitos obtidos pelo estudo da geometria da curva e da superfície consideradas foram utilizados para a formulação das equações diferenciais. Contudo, para seguir adiante, será necessário considerar as equações que regem o equilíbrio mecânico de vigas curvas (Seção III.3.3.). As equações para o equilíbrio mecânico de uma viga espacial sobre um toro podem ser vistas na Equação III-12. Destas seis equações, três comporão o sistema de equações que regem o comportamento mecânico dos arames da armadura de tração, conforme será mostrado.

Antes de tudo, são necessárias algumas simplificações para adequá-las ao problema de um arame que possa deslizar livremente sobre a superfície de apoio. Assim sendo, a condição de não fricção é simulada ao admitir que as componentes de cargas distribuídas p_t e p_B sejam nulas. Também as componentes de momento distribuído m_N e m_B deverão ser desprezadas, porque, desse modo, garante-se que a torção ao redor da tangente do arame seja governada pela torção da superfície, isto é, que a torção tangencial local dos arames seja desconsiderada e, com isso, o fenômeno denominado “*fish-scaling*” ou escama de peixe não ocorra. A Equação C-5 representa o sistema de seis equações base apresentados por Østergaard (2012), onde as variáveis κ_n e τ_g são dadas pelas equações Equação A-18 e Equação A-22, respectivamente.

$$\frac{du}{ds} = \frac{\cos(\phi)}{1 + r\kappa \cdot \cos(\theta)}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\text{sen}(\phi)}{r}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{-\kappa \cdot \text{sen}(\phi)}{1 + r\kappa \cdot \cos(\theta)} \cdot \cos(\phi) + \kappa_g$$

Equação

C-5

$$\frac{dP_t}{ds} = \kappa_n \cdot P_N - \kappa_g \cdot P_B$$

$$\frac{dP_B}{ds} = \kappa_g \cdot P_t - \tau_g \cdot P_N$$

$$\frac{dM_N}{ds} = -\kappa_n \cdot M_t + \tau_g \cdot M_B + P_B$$

O esforço interno na direção normal do arame, P_N , é obtido pela manipulação da equação que governa o equilíbrio do momento na direção binormal, M_B , obtendo a Equação C-6.

$$P_N = \frac{dM_B}{ds} - \kappa_g M_t + \tau_g M_N$$

Equação

C-6

Resta definir os esforços resultantes, os quais podem ser obtidos admitindo que as dimensões da seção transversal do arame são muito pequenas quando comparadas ao seu comprimento e relacionando a variação nas entidades geométricas de curvaturas e de torção com suas respectivas rigidezes. A Equação C-7 ilustra as equações constitutivas utilizadas nesse problema.

$$P_t = C_\sigma A \varepsilon$$

$$M_t = C_\tau J \Delta \tau_g$$

$$M_N = C_\sigma I_N \Delta \kappa_g$$

$$M_B = C_\sigma I_B \Delta \kappa_n$$

Equação

C-7

Vale ressaltar que as variações de torção e curvaturas são fornecidas em relação ao estado inicial do duto analisado. Em outras palavras, essas variações são constituídas pela torção ou curvaturas da curva final menos a torção ou curvatura do estado inicial helicoidal. É possível, então, estabelecer que a derivada do momento na direção binormal, M_B , com relação à s seja igual à Equação C-8

$$\frac{dM_B}{ds} = C_\sigma I_B \cdot \frac{d\kappa_n}{ds} \quad \text{Equação C-8}$$

onde $\frac{d\kappa_n}{ds}$ pode ser obtido analiticamente e é dado pela derivada da Equação A-18, a qual resulta na Equação C-9.

$$\frac{d\kappa_n}{ds} = - \frac{\text{sen}(\phi) \cos(\phi) \cdot [2\kappa_g - 3\kappa \cdot \text{sen}(\phi) \cos(\phi) + 2\kappa\kappa_g r \cdot \cos(\phi)]}{r \cdot [1 + r\kappa \cdot \cos(\theta)]^2} \quad \text{Equação C-9}$$

Para garantir a compatibilidade das restrições impostas geometricamente, é primordial que as cargas distribuídas p_N e m_t atuem de modo a anular as equações de equilíbrio de forças na direção normal e de momento na direção tangencial (Equação C-10). Fazendo isso, garante-se que o triedro do arame esteja fixo ao da superfície, não sendo permitido nem a torção nem o deslocamento radial do arame.

$$p_N = - \frac{dP_N}{ds} - \kappa_n \cdot P_t + \tau_g \cdot P_B \quad \text{Equação C-10}$$

$$m_t = \frac{dM_t}{ds} - \kappa_n \cdot M_N + \kappa_g \cdot M_B$$

A obtenção da solução do sistema de equações diferenciais é feita como um Problema de Valor de Contorno (PVC) de sexta ordem, no qual seis condições de contorno acompanham o sistema de equações (Equação C-5). Para garantir a captação dos efeitos não-lineares, é imprescindível que as condições de contorno sejam aplicadas sobre as variáveis geométricas que regem esse problema, que são: o deslocamento total, u ; a coordenada angular, θ ; e o ângulo de assentamento, ϕ . As condições de contorno utilizadas nesse modelo foram, para os casos em que o comportamento não-linear

deveria ser estudado, as apresentadas pela Equação C-11, Para o estudo da parcela linear da resposta, as condições de contorno de deslocamentos do arame são substituídas pelas condições de contorno de forças no final do arame ($s = s_L$), $P_t(s_L) = P_{t_{aplicado}}$ e $P_B(s_L) = P_{B_{aplicado}}$.

$$u(0) = u(s_L) = 0$$

$$\phi(0) = \phi(s_L) = \phi_0$$

Equação
C-11

$$\theta(0) = \theta_{ini}^A; \theta(s_L) = \theta_{ini}^B$$

Concernente à solução deste PVC, conforme indicado por Østergaard (2012), o método de Lobato-IIIa, baseado em diferenças finitas e disponível no *software* comercial MATLAB®, foi utilizado. A escolha baseia-se principalmente no fato de o método otimizar a malha para a convergência do problema em solução.

C.2.2. O modelo de Sousa (2005)

Apesar da capacidade para a representação do mecanismo de flambagem lateral, conforme relatado, o modelo proposto por Sousa (2005) pode ser utilizado para atuar na validação dos resultados à flambagem radial de dutos flexíveis devido a sua acurácia e a sua simplicidade. Os resultados desse modelo, quanto à flambagem lateral, serão comparados frente aos obtidos pelas equações apresentadas na Seção C.2.1. A Figura VI-7 ilustra duas vistas do modelo, a isométrica e a frontal.

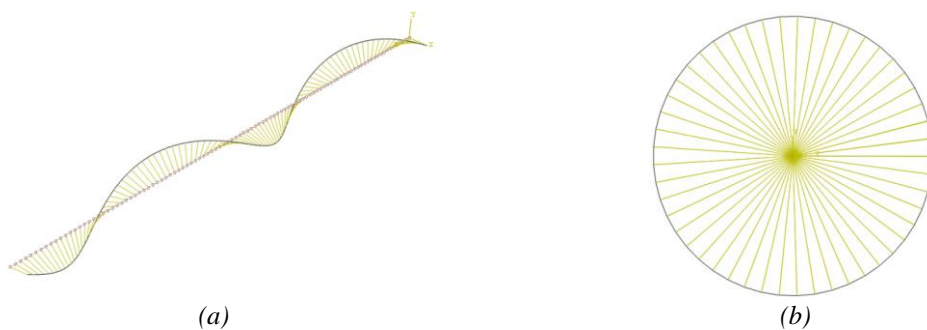


Figura VI-7 – (a) Vista isométrica e (b) Vista frontal do modelo.

Esse modelo foi reproduzido por meio de um gerador de malha desenvolvido em FORTRAN, o qual visa facilitar a modelagem de diferentes estruturas com diferentes geometrias no programa ABAQUS®. A seguir as particularidades desse modelo serão apresentadas.

As principais características desse modelo englobam: a hipótese de que cada arame da armadura de tração se comporta independente dos demais; o desprezo do atrito entre os arames e as camadas adjacentes; a consideração de não-linearidade geométrica e de linearidade física; e a inclusão dos efeitos de flexão do duto por meio da alteração da geometria do arame fletido.

O modelo aqui reproduzido é composto unicamente por dois tipos de elementos, que são:

- *Elementos de viga tridimensionais – (B31)* – formulados pela teoria de Euler-Bernoulli. Possuem dois nós com seis graus de liberdades cada e são capazes de representar a não linearidade geométrica da estrutura.
- *Molas não-lineares – (SpringA)* – utilizadas para representar as demais camadas dos dutos flexíveis e suas contribuições para o comportamento mecânico dos arames das armaduras de tração. Essa camada é análoga à superfície de apoio utilizada por Østergaard (2012), porém permite a representação da rigidez radial do duto.

Os elementos de viga são gerados pela Equação C-14 no gerador de malha desenvolvido. Essas equações carregam consigo a consideração de que o arame, antes da compressão, sempre assumirá a posição de menor dispêndio de energia, ou seja, a configuração de menor comprimento entre dois pontos, a geodésica (do Carmo, 1976). Conforme já dito, essa hipótese é satisfatória apenas quando o atrito entre as camadas adjacentes pode ser desprezado.

Para o desenvolvimento dessas equações, parte-se das equações de uma hélice (Equação C-12, onde $X_{hélice}$, $Y_{hélice}$ e $Z_{hélice}$ representam as coordenadas da hélice).

$$X_{hélice}(\theta, \kappa) = r \cdot \cos \theta$$

$$Y_{hélice}(\theta, \kappa) = \theta \cdot \frac{L_{modelo}}{2 \cdot n_p \cdot \pi}$$

Equação

C-12

$$Z_{hélice}(\theta, \kappa) = r \cdot \sin \theta$$

A essas equações são incorporadas os deslocamentos necessários para que esta hélice reta, assentada sobre um cilindro também reto, assuma a configuração da geodésica de um toro. Os deslocamentos foram propostos por Féret & Bournazel (1987) e calculados a partir da minimização do comprimento de arco de uma curva sobre um toro. Esses deslocamentos são dados em dois termos, tangencial (u_t) e circunferencial (u_B), expressos pela Equação C-13.

$$u_t(\theta, \kappa) = -2 \cdot r^2 \cdot \frac{\kappa \cdot \sin \theta}{\tan \phi_0}$$

Equação

$$u_B(\theta, \kappa) = r^2 \cdot \frac{\kappa \cdot \sin \theta}{\tan^2 \phi_0}$$

C-13

Logo, a incorporação do deslocamento tangencial na formulação da hélice pode ser feita pela soma direta desse à componente Y_{modelo} das equações que fornecem os nós dos arames, resultando na Equação C-14. Já a parcela circunferencial do deslocamento deve ser transformada em ângulo de giro circunferencial, $\Theta_{giro}(\theta, \kappa)$, mediante a divisão desse deslocamento pelo menor raio do toro. O ângulo de giro Θ_{giro} pode, então, ser somado à parcela de variação do ângulo, θ , a coordenada polar, nas equações que fornecem as coordenadas X_{modelo} e Z_{modelo} para a hélice reta:

$$X_{modelo}(\theta, \kappa) = r \cdot \cos[\theta + \Theta_{giro}(\theta, \kappa)]$$

$$Y_{modelo}(\theta, \kappa) = \theta \cdot \frac{L_{modelo}}{2 \cdot n_p \cdot \pi} - 2 \cdot r^2 \cdot \frac{\kappa \cdot \sin \theta}{\tan \phi_0}$$

Equação

C-14

$$Z_{modelo}(\theta, \kappa) = r \cdot \sin[\theta + \Theta_{giro}(\theta, \kappa)]$$

onde $\Theta_{giro}(\theta, \kappa) = \frac{u_B(\theta, \kappa)}{r}$, L_{modelo} representa o comprimento total do modelo e n_p , o número de passos do arame.

Vale ressaltar que quando a curvatura do toro for nula a Equação C-14 recai naquelas que dão forma à hélice assentada em um cilindro reto. Por fim, é interessante observar, como ressaltado por Sousa (2005) e ilustrado pela Figura VI-8, que quanto menor for o ângulo de assentamento, para um mesmo arame sobre o mesmo toro, maiores serão seus deslocamentos de flexão,

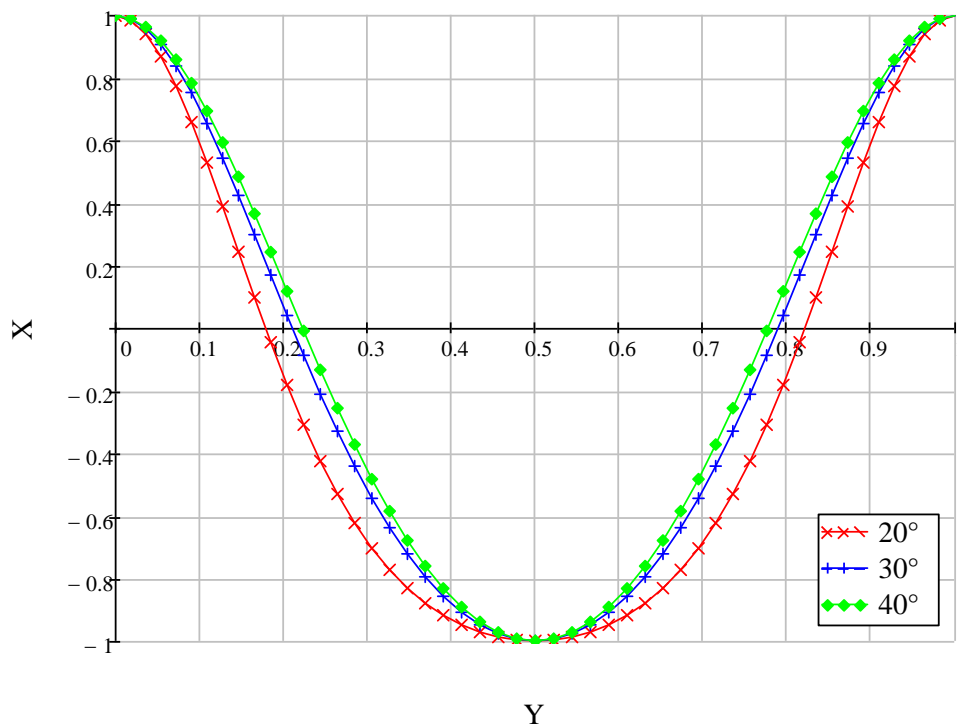


Figura VI-8 – Vista lateral dos arames assentados a 20°, 30° e 40°,

Tendo visto a modelagem geométrica dos elementos de viga, resta agora definir o comportamento das molas que simulam as demais camadas dos dutos flexíveis e suas interações com os arames das armaduras de tração.

Para a definição das molas, é necessária a especificação de três parâmetros: o nó inicial, o final e o comportamento físico que descreve esse elemento. Os nós iniciais destas molas coincidem com os nós dos elementos de viga. Já os nós finais são assentados na linha central do duto. O comportamento físico da mola é descrito por

pares de forças e deslocamentos correspondentes às rigidezes que as molas impõem ao deslocamento.

Dessa forma, no ABAQUS®, as molas não-lineares são responsáveis por acoplar uma força a um deslocamento na direção de seus nós. Esse acoplamento utiliza o sistema de coordenadas locais para sua atribuição. Desse modo, a definição do sentido positivo dos deslocamentos é dada na direção do primeiro para o segundo nó, sendo a direção oposta, negativa. Vale dizer que a interpolação entre os pares de pontos fornecidos é sempre linear.

Para o cálculo da curva característica das molas, aquela que rege o comportamento mecânico das mesmas, as características físicas e geométricas das fitas de reforço, da carcaça intertravada, da armadura de pressão e das demais camadas plásticas serão levadas em consideração. Além disso, algumas simplificações foram tomadas, a dizer:

- O material das demais camadas tem comportamento linear e elástico.
- Fitas de alta resistência, camadas plásticas externas e internas, armaduras de pressão e carcaça intertravada são consideradas cilindros de parede fina.
- A pressão radial exercida pelos arames das armaduras de tração sobre as camadas poliméricas pode ser considerada uniformemente distribuída.
- Os efeitos de extremidades podem ser desconsiderados.

Segundo Young & Fowler (1978), o deslocamento radial, u_N , de um cilindro de parede fina com espessura t sob ação de uma pressão interna p_{int} é dado pela Equação C-15

$$u_N = \frac{p_{int} \cdot r^2}{C_\sigma \cdot t}$$

Equação
C-15

A força exercida pela mola P_{mol} é dada pelo produto entre a rigidez da mola e seu deslocamento. A primeira dessas parcelas é diretamente proporcional à pressão interna p_{int} e, logo, à área de contato A_c . Dessa forma, a força da mola é dada pela Equação C-16.

$$P_{mol} = k_{mol} \cdot u_N = \frac{C_\sigma \cdot t \cdot A_c}{r^2} \cdot u_N \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{C-16} \end{array}$$

A área de contato de cada arame, por sua vez, pode ser dada pelo produto entre o comprimento do elemento de viga utilizado e a largura do arame mais a distância entre os arames da armadura de tração, isto é:

$$A_c = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{n_{ar}} \cdot \frac{L_{mod}}{n_{dv}} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{C-17} \end{array}$$

Portanto, a rigidez equivalente da mola k_{mol} é dada pela Equação C-18,

$$k_{mol} = \begin{cases} A_c \cdot \left(\frac{C_\sigma^{ft} \cdot t_{ft}}{r_{ft}^2} + \frac{C_\sigma^{pl} \cdot t_{pl}}{r_{pl}^2} \right), u_N \leq 0 \\ A_c \cdot \left(\frac{C_\sigma^{car} \cdot t_{car}}{r_{car}^2} + \frac{C_\sigma^{pre} \cdot t_{pre}}{r_{pre}^2} + \frac{C_\sigma^{pl} \cdot t_{pl}}{r_{pl}^2} \right), u_N > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{C-18}^{61} \end{array}$$

onde r_{car} , r_{pre} , r_{ft} e r_{pl} designam os raios médios, C_σ^{car} , C_σ^{pre} , C_σ^{ft} e C_σ^{pl} os módulos de elasticidades e t_{car} , t_{pre} , t_{ft} e t_{pl} as espessuras referentes às camadas da carcaça intertravada, da armadura de pressão, das fitas de alta resistência e das camadas plásticas, respectivamente.

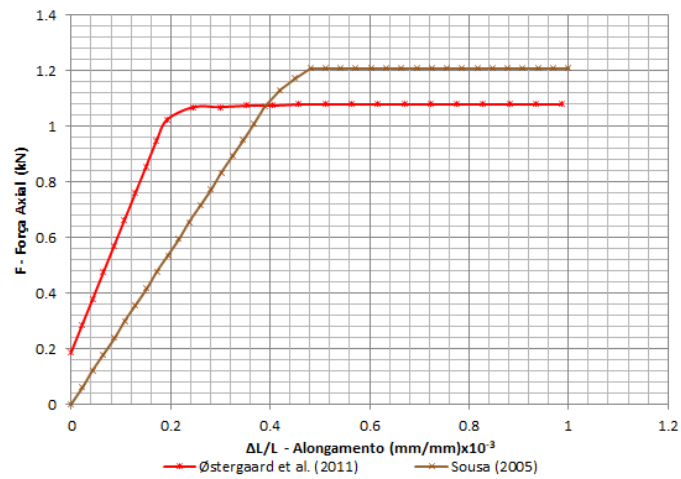
⁶¹ Os valores de rigidezes neste trabalho foram considerados de maneira ligeiramente diferente do proposto por Sousa (2005). Em sua tese de doutoramento, Sousa (2005) propôs que a contribuição da carcaça intertravada e da armadura de pressão fosse computada à rigidez interna da mola através de um fator de multiplicação, igual a dez. Esse fator é aplicado ao valor da rigidez externa da mola, isto é, aquela imposta pelas camadas plásticas e pelas fitas de reforço externas, para a configuração da rigidez interna da mesma.

É de grande relevância destacar que as espessuras e os módulos de elasticidades referentes à carcaça e à armadura de pressão, utilizados na Equação C-18, não são relativos aos valores geométricos dessas camadas, mas, sim, aos valores obtidos através da analogia entre grelhas e cascas ortotrópicas, proposta por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959). Essa analogia pode ser aplicada aos dutos flexíveis considerando que o atrito interno nessas camadas é desprezível e que não há interação entre a direção de assentamento dos arames e a direção normal a ela. As hipóteses mencionadas são de fato razoáveis dada a folga existente entre os arames nessas camadas.

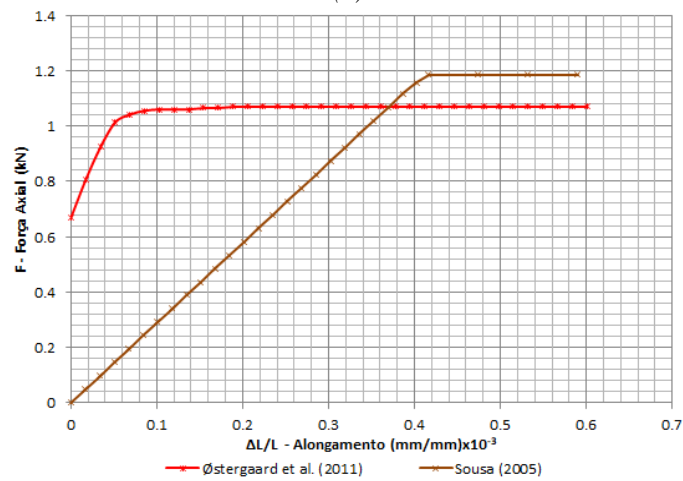
As expressões utilizadas para calcular as espessuras e módulos de elasticidades das cascas equivalentes são fornecidas respectivamente por de Sousa (2005) e não serão apresentadas. Finalmente, deve-se reafirmar que, apesar de ser adotado o comportamento bilinear para as molas desse modelo, é possível adotar qualquer comportamento não-linear desejado, desde que os pares força/deslocamento característicos da mola sejam fornecidos.

C.3. Alguns resultados

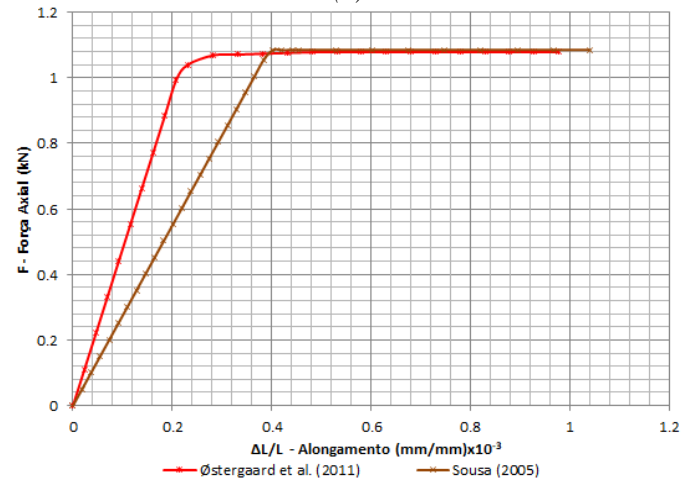
Esta seção tem por fim a apresentação de alguns resultados dos modelos descritos e que foram previamente utilizados no exame de qualificação do autor desta tese (Gonzalez, 2016). No exame de qualificação de Gonzalez (2016), os estudos foram tomados considerando apenas um arame de cada um dos dutos de 6" e de 8". Aqui, apenas uma breve seleção dos resultados para o arame único do duto de 6" é apresentada. Para maiores detalhes acerca desse estudo, ver Gonzalez (2016).



(a)



(b)



(c)

Figura VI-9 – Comparação dos resultados de um arame da armadura interna do duto de 6" sujeito à variação da curvatura: (a) $\kappa = (15m)^{-1}$, $L_p = 1,25m$ e $n_p = 4$; (b) $\kappa = (10m)^{-1}$, $L_p = 1,25m$ e $n_p = 4$; e (c) $\kappa = (0m)^{-1}$, $L_p = 1,5m$ e $n_p = 4$.

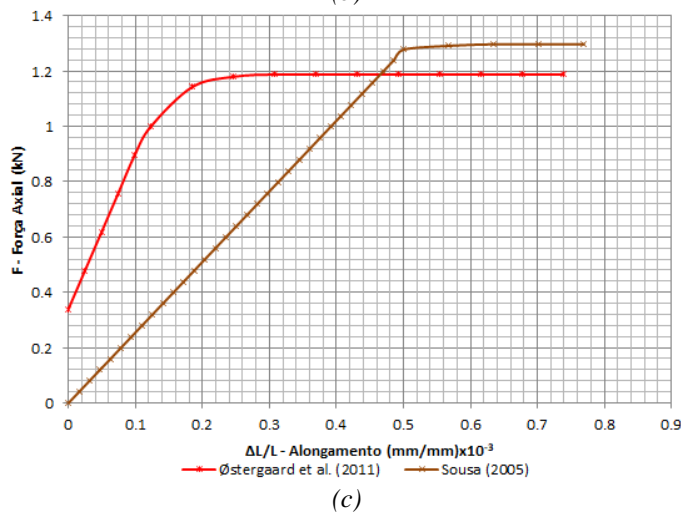
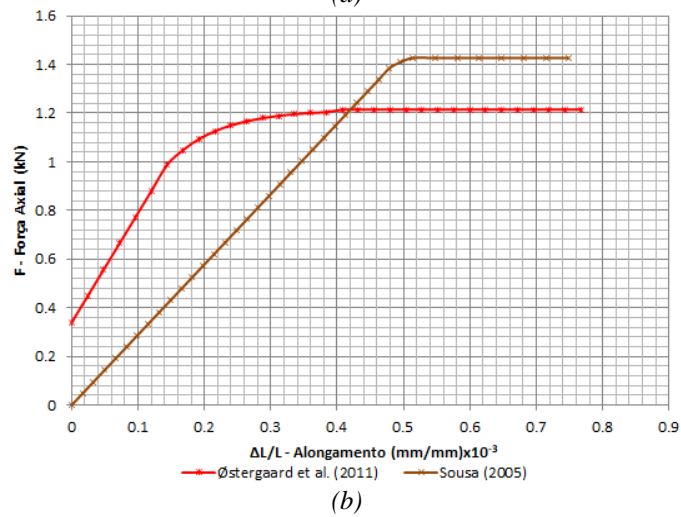
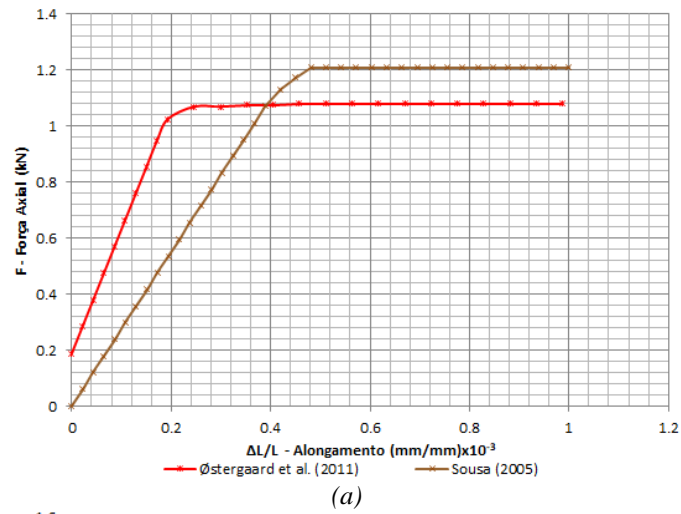


Figura VI-10 – Comparação dos resultados de um arame da armadura interna do duto de 6" sujeito à variação do comprimento do passo: (a) $\kappa=(15m)^{-1}$, $L_p=1,0m$ e $n_p=4$; (b) $\kappa=(15m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $n_p=4$; e (c) $\kappa=(15m)^{-1}$, $L_p=1,5m$ e $n_p=4$.

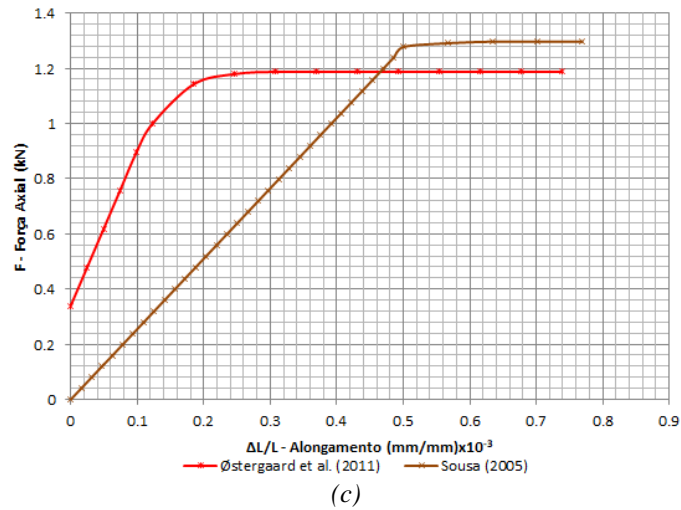
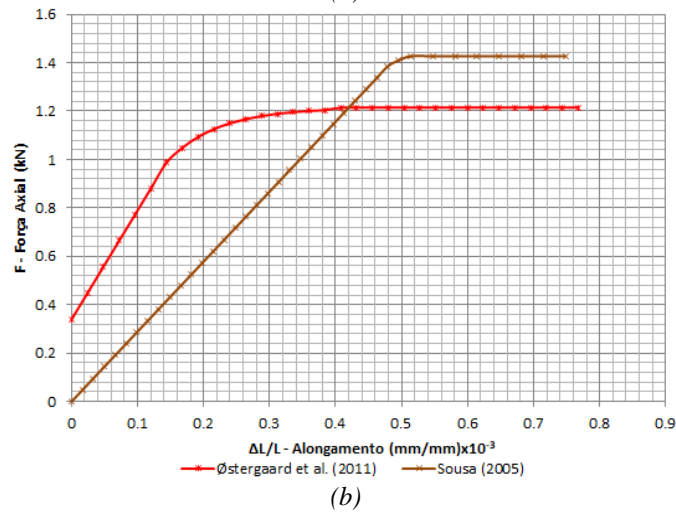
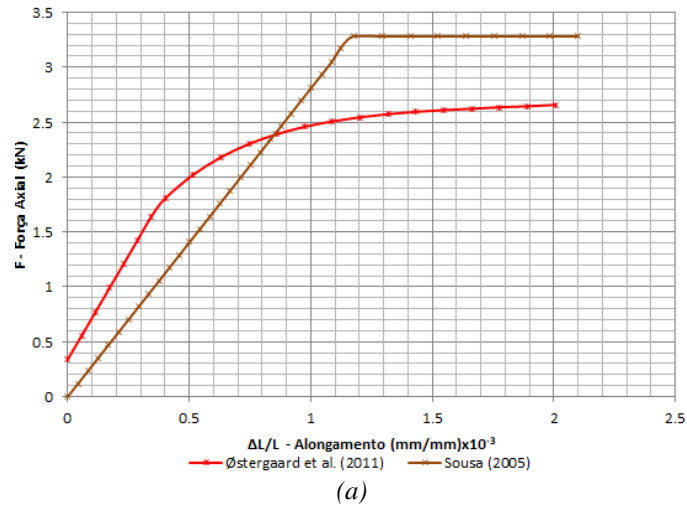


Figura VI-11 - Comparação dos resultados de um arame da armadura interna do duto de 6" sujeito à do número de passos analisados: (a) $\kappa=(15m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $n_p=1$; (b) $\kappa=(15m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $n_p=2$; e (c) $\kappa=(15m)^{-1}$, $L_p=1,25m$ e $n_p=3$.

APÊNDICE D

VALIDAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CASO DE VIGAS RETAS

D.1. Introdução

Este apêndice tem como pilar central a apresentação de resultados que possam ratificar a aplicabilidade do elemento finito apresentado, mediante a comparação dos resultados com casos mais simples com ampla abordagem na literatura técnica, como é o caso da coluna de Euler. Ainda nesta seção, a validade do comportamento das fundações elásticas e a implementação das condições de contorno apresentadas também são averiguadas. Ambas as investigações são comparadas com resultados provenientes de expressões analíticas obtidas das equações diferenciais de equilíbrio para vigas com rotações moderadas.

D.2. Validação

Para adequar o elemento finito apresentado na Seção III.4. ao caso de vigas inicialmente retas, é necessário considerar que o ângulo de assentamento do arame e o raio do duto são nulos e o raio de curvatura do duto deve tender a infinito ($\phi_0 = r = 0$ e

$R \rightarrow \infty$). Como sabido, para essas vigas, têm-se que suas cargas críticas são dadas pela Equação D-1.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 C_{\sigma} I_N}{L_e^2} \quad \text{Equação D-1}$$

onde L_e é o comprimento efetivo de flambagem das colunas, o qual depende das condições de contorno a que as vigas estão submetidas. A Figura VI-12 ilustra as quatro condições de contorno analisadas, onde os comprimentos efetivos são iguais a $0,5L$, $2,0L$, $0,7L$ e $1,0L$ para os casos (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

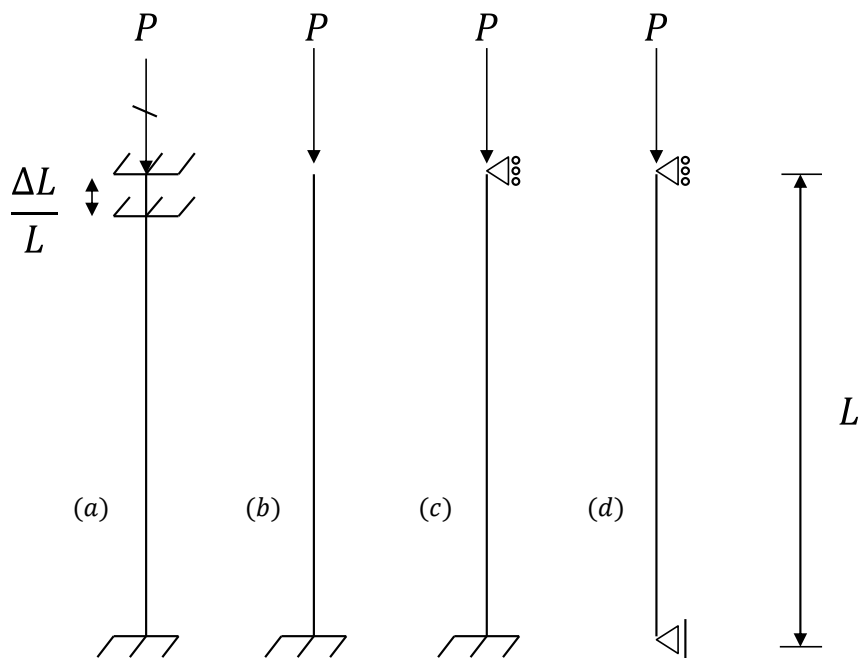


Figura VI-12 Colunas de Euler com as condições de contorno (a) engastada-engastada; (b) livre-engastada; (c) apoiada-engastada; (d) bi-apoiada.

Ao considerar, por exemplo, uma viga de aço ($C_{\sigma} = 195GPa$) com seção transversal de $6x3mm$ e comprimento total $L = 1,0m$, pode-se comparar as cargas críticas provenientes das expressões analíticas e da formulação de elementos finitos. Vale dizer que o modelo de elementos finitos é constituído de 20 elementos e é referido neste trabalho por MVC (Modelo de Viga Curva). A Tabela D-1 apresenta esses valores de comparação. A Tabela D-1 indica que o modelo de elementos finitos apresenta resultados coincidentes com aqueles obtidos pela formulação analítica.

Tabela D-1 Comparação analítica e numérica para as cargas de Euler.

Modelos	(a)	(b)	(c)	(d)
Equação D-1	103,93 N	6,49 N	53,16 N	25,98 N
MVC	103,93 N	6,49 N	53,16 N	25,98 N

O mesmo procedimento será executado, agora, para viga de $L = 10m$ e rigidez à flexão $C_{\sigma}I_N = 100kNm^2$ e assentada sobre fundação elástica com rigidez (k) de $1,0 kN/m^2$. Para essa situação, Brush & Almroth (1975) apresentaram uma equação fechada que determina a carga crítica dessa estrutura. Essa expressão é dada pela Equação D-2 e é válida para condições de contorno equivalentes à condição (d), isto é, bi-apoiada.

$$P_{cr} = \frac{(m \cdot \pi)^2 \cdot C_{\sigma}I_N + k \cdot L^4}{(m \cdot \pi \cdot L)^2} \quad \text{Equação D-2}$$

onde m representa um número inteiro positivo que determina o modo que a estrutura deverá instabilizar. O modo será, pois, dado de forma a garantir que a carga crítica assuma o menor valor dentre todos os modos de flambagem possíveis. Dos resultados obtidos, pode-se inferir que o modelo proposto apresenta, em um primeiro momento, resultados coerentes com valores obtidos na literatura.

Tabela D-2 – Comparação dos resultados numéricos (MVC) e analíticos (Equação D-2) para a viga assentada sobre fundação elástica de $1kN/m^2$.

Modos	MVC			Equação
	5 elementos	10 elementos	20 elementos	D-2
1°	19,51 kN	19,87 kN	19,98 kN	20,00 kN
2°	41,70 kN	41,89 kN	41,98 kN	42,01 kN
3°	90,92 kN	89,92 kN	89,93 kN	89,95 kN

APÊNDICE E

ESTUDO DAS CURVAS LIMITES

E.1. Introdução

Devido à grande utilização das chamadas curvas limites, geodésica e loxodrômica (vide Figura VI-13), nos modelos, normalmente analíticos, de flexão, esse apêndice tem por intuito derivar formulações analíticas que permitam: tanto a descrição geométrica de ambas as curvas, bem como garantir maior simplicidade e acurácia no cálculo das curvaturas e torção dessas curvas. Como a curva loxodrômica possui equação derivável analiticamente, maior foco será dado às curvas geodésicas, as quais as equações diferenciais não possuem tais soluções.

E.2. A hipótese das curvas limites

A hipótese das curvas limites garante maior simplicidade na predição do comportamento mecânico dos dutos flexíveis quando fletidos. É, contudo, comum que as simplificações conduzidas na dedução das formulações das curvaturas levem a resultados, em termos de tensão no arame, bastante diferentes.

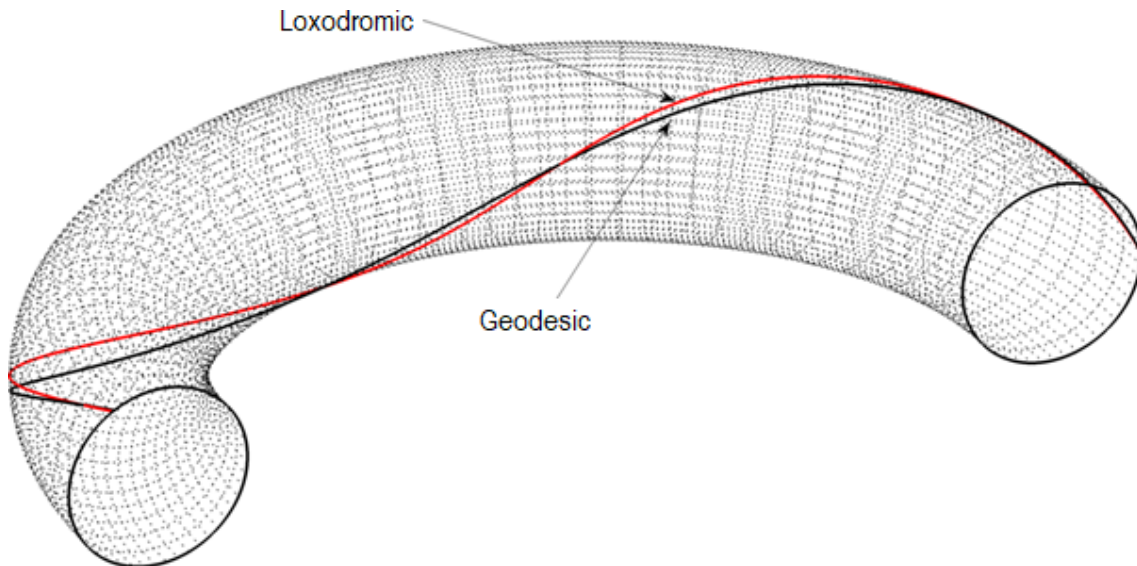


Figura VI-13 – Curvas limites.

Por um lado, as curvas geodésicas podem ser entendidas como curvas sobre uma superfície que unem dois pontos através do menor caminho possível (Eisenhart, 1909). Tal concepção requer que não exista qualquer restrição aos deslocamentos laterais desses arames. Em outras palavras, é como se, durante a flexão, os efeitos de fricção pudessem ser desprezados. As curvas loxodrômicas, por outro lado, são curvas que cortam todos os meridianos da superfície do toro a um ângulo constante, ϕ_0 , nesse caso o ângulo de assentamento original do arame. Têm-se, portanto, os dois extremos, isto é, a loxodrômica não admite deslocamentos laterais e, na geodésica, esses deslocamentos são livres.

E.3. Curva loxodrômicas e suas curvaturas

A curva loxodrômica corta todos os meridianos da superfície de um toro a um ângulo constante, ϕ_0 . Sua equação pode ser deduzida a partir desta propriedade. Inicialmente, o comprimento de arco de uma curva pode ser escrito por:

$$ds^2 = E \cdot dv^2 + 2 \cdot F \cdot dv \cdot d\theta + G \cdot d\theta^2$$

*Equação
E-1*

onde E , F e G são as chamadas componentes da primeira forma fundamental de uma superfície, conforme apresenta Nutbourne & Martin (1988) e ilustra a Equação E-2, onde os subscritos representam as variações com respeito às coordenadas angulares do toro (θ e v).

$$E = [\mathbf{x}]_{,v} \cdot [\mathbf{x}]_{,v} = [R + r \cdot \cos(\theta)]^2$$

$$F = [\mathbf{x}]_{,v} \cdot [\mathbf{x}]_{,\theta} = 0$$

$$G = [\mathbf{x}]_{,\theta} \cdot [\mathbf{x}]_{,\theta} = r^2$$

Equação

E-2

Para uma superfície ortogonal, como é o caso do toro, esses parâmetros representam o quadrado da velocidade ao longo da primeira e da segunda variáveis angulares da superfície (Raussen, 2008).

O primeiro termo do lado direito da igualdade na Equação E-1 ($E \cdot dv^2$) representa o quadrado da projeção do elemento de linha sobre o eixo longitudinal (ver BB' na Figura III-1). Essa projeção também pode ser escrita como $ds \cdot \cos(\phi_0)$. Conseqüentemente, têm-se:

$$\cos(\phi_0) = \frac{\sqrt{E} \cdot dv}{ds} = \frac{[R + r \cdot \cos(\theta)] \cdot dv}{\sqrt{[R + r \cdot \cos(\theta)]^2 \cdot dv^2 + r^2 \cdot d\theta^2}}$$

Equação

E-3

A partir de manipulações algébricas, a Equação E-3 dá forma à primeira equação diferencial que descreve a curva loxodrômica, dada pela Equação E-4. Essa equação possui solução fechada que, por sua vez, é ilustrada pela Equação E-5.

$$v_{,\theta} = \frac{\cos(\phi_0)}{R + r \cdot \cos(\theta)}$$

Equação

E-4

$$v(s) = \frac{2 \cdot r \cdot \cot(\phi_0)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \operatorname{atan} \left[\tan \left(\frac{\theta(s)}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R + r} \right]$$

Equação

E-5

Ademais, analogamente à obtenção da equação anterior, agora levando em consideração o ultimo termo da Equação E-1 ($G \cdot d\theta^2$), a razão entre o comprimento de arco, o raio menor do toro, r , e a variável angular θ pode ser estabelecida, como:

$$\theta(s) = \frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \quad \text{Equação E-6}$$

De posse das relações dadas pelas Equação E-5 e Equação E-6, pode-se, mediante o uso da Equação III-3, obter as curvaturas normal, geodésica e a torção geodésica da curva loxodrômica.

$$\kappa_n = \frac{\text{sen}^2(\phi_0)}{r} + \frac{\cos(\theta)}{R + r \cdot \cos(\theta)} \cdot \cos^2(\phi_0)$$

$$\kappa_g = \frac{\text{sen}(\theta)}{R + r \cdot \cos(\theta)} \cdot \cos(\phi_0) \quad \text{Equação E-7}$$

$$\tau_g = \frac{R}{r \cdot [R + r \cos(\theta)]} \cdot \cos(\phi_0) \cdot \text{sen}(\phi_0)$$

Para fins de comparação, essas curvaturas são comparadas às expressões propostas por Sævik (1992), Equação E-8, e por Østergaard (2012). Equação E-9. As equações propostas por Østergaard (2012) são baseadas nas fórmulas fechadas para curvaturas de curvas sobre superfícies, as quais são apresentadas por do Carmo (1976).

$$\kappa_n = -\frac{\text{sen}^2(\phi_0)}{r} \cdot [1 + r\kappa \cdot \cot^2(\phi_0) \cdot \cos^2(\phi_0) \cdot \cos(\theta)]$$

$$\kappa_g = -\kappa \cos(\phi_0) \cdot [1 + \text{sen}(\phi_0)] \cdot \text{sen}(\theta) \quad \text{Equação E-8}$$

$$\tau_g = -\frac{\cos(\phi_0) \text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot [1 + r\kappa \cdot \cos^2(\phi_0) \cdot \cos(\theta)]$$

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2(\phi) + \kappa_2 \sin^2(\phi)$$

$$\kappa_g = \kappa_{g\theta} \cos(\phi) + \kappa_{gv} \sin(\phi) + \phi_{,s}$$

$$\tau_g = (\kappa_1 - \kappa_2) \cos(\phi) \sin(\phi)$$

Equação

E-9

onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas principais maiores e menores, respectivamente; e $\kappa_{g\theta}$ e κ_{gv} são as curvaturas geodésicas das curvas θ -constante e v -constante, nessa ordem.

$$\kappa_1 = \frac{-\{\mathbf{N}\}_{,v} \cdot \{\mathbf{x}\}_{,v}}{E}; \quad \kappa_2 = \frac{-\{\mathbf{N}\}_{,\theta} \cdot \{\mathbf{x}\}_{,\theta}}{G}$$

$$\kappa_{g\theta} = -\frac{E_{,\theta}}{2 \cdot E \cdot \sqrt{G}}; \quad \kappa_{gv} = \frac{G_{,v}}{2 \cdot E \cdot \sqrt{G}}$$

Equação

E-10

A Figura VI-14 apresenta a variação das curvaturas e torção, para as três formulações relacionadas, de um arame assentado sob um toro de raio menor $r = 0,35 \text{ m}$, raio maior $R = 13 \text{ m}$, ângulo de assentamento $\phi_0 = 22^\circ$ e $S = 5,871 \text{ m}$.

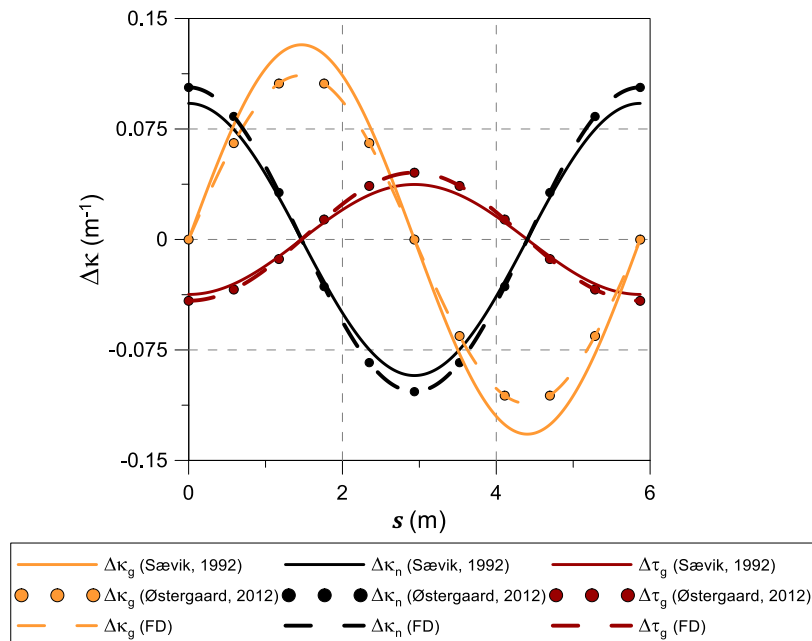


Figura VI-14 – Comparação entre resultados Sævik (1992), Østergaard (2012) e as formulações deduzidas (FD) para as variações de curvaturas ($\Delta\kappa_n$, $\Delta\kappa_g$ e $\Delta\tau_g$) de uma curva loxodrômica ao longo do comprimento de arco (s).

Ademais, podem-se calcular essas variações de curvatura para os arames da armadura interna ou externa de tração de cada um dos quatro dutos analisados no CAPÍTULO IV. A Figura VI-15, de (a) a (d), ilustra cada um desses casos, para os arames da armadura interna, quando a curva loxodrômica é considerada. Todos os casos referem-se a toros de $R = 12m$.

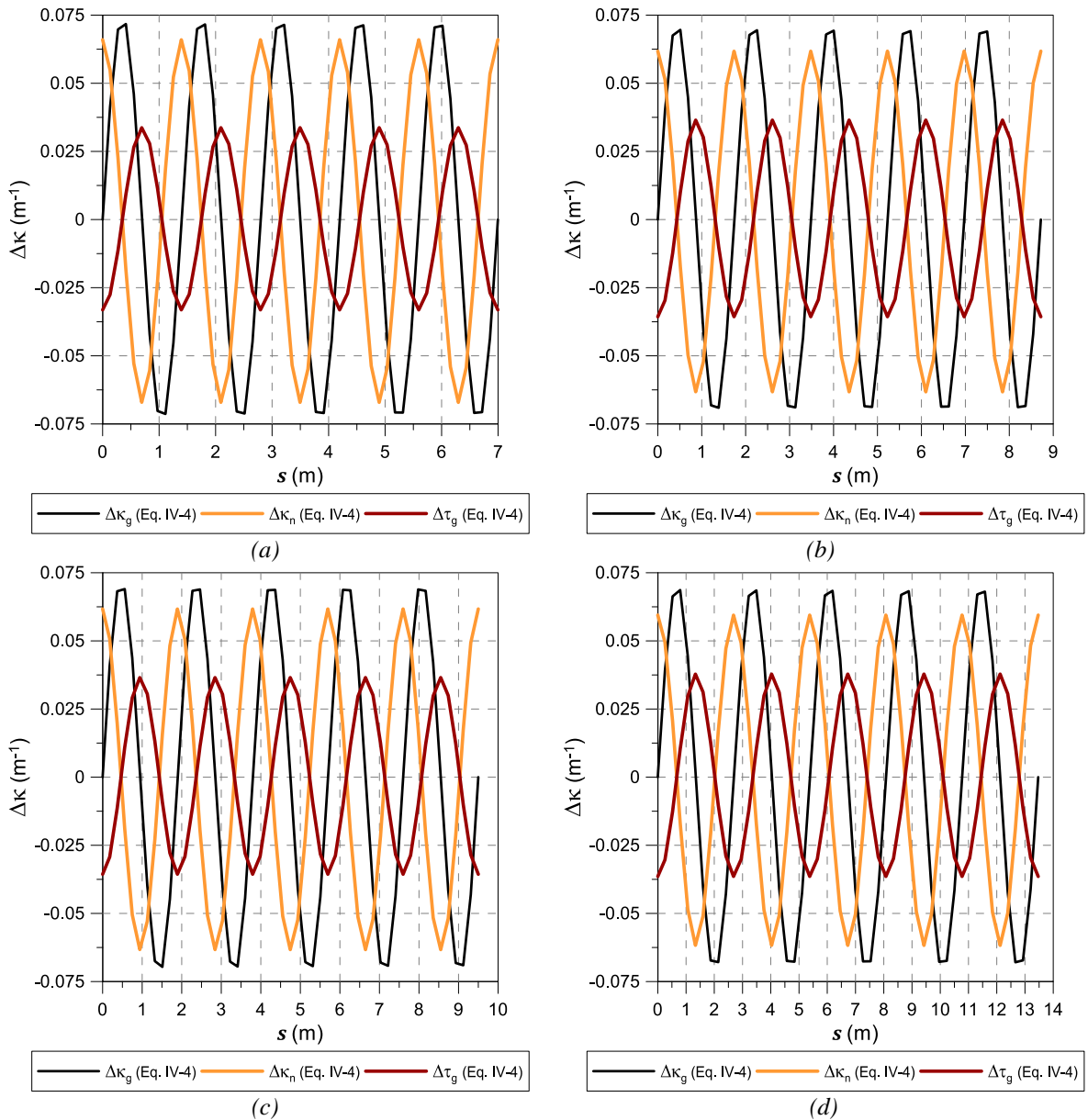


Figura VI-15 – Variação de curvaturas normal, geodésica e torção para os dutos de (a) 6", (b) 8", (c) 9,5" e (d) 14" e para a curva loxodrômica.

E.4. Curvas geodésicas e suas curvaturas

As curvas geodésicas podem ser entendidas como curvas sobre superfícies que se comportam analogamente às retas sobre planos (do Carmo, 1976), isto é, as curvas geodésicas são aquelas que minimizam a distância entre dois pontos da superfície, no caso desta tese, o toro. Esta seção tem por intuito apresentar uma solução para as equações diferenciais que definem essas curvas, uma vez que as mesmas não podem ser resolvidas analiticamente, e calcular suas curvaturas utilizando essas soluções. Para tanto, será utilizada a técnica de RS, mediante o emprego do *software* EUREQA® (Schmidt & Lipson, 2009), o qual é alimentado com dados referentes à solução numérica da equação diferencial da geodésica. Vale ainda dizer, que a presente seção é baseada em (Gonzalez, et al., 2018).

Do Carmo (1976) fornece uma descrição ainda mais precisa dessas curvas, ou seja, as geodésicas são curvas de velocidades constantes com curvatura geodésica nula. Por essa definição, expressa pela Equação E-11, é possível derivar uma relação entre a primeira das equações diferenciais para as curvas geodésicas de um toro.

$$\kappa_g = -\frac{E_{,\theta}}{2 \cdot E \cdot \sqrt{G}} \cos(\phi) + \frac{G_{,v}}{2 \cdot E \cdot \sqrt{G}} \sin(\phi) + \phi_{,s} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{E-11} \end{array}$$

Em suma, uma das equações diferenciais que descrevem essas curvas, em função das coordenada angular do toro (θ) e do ângulo de assentamento do arame (ϕ), são dadas pela Equação E-12.

$$\theta_{,s} = \frac{\sin(\phi)}{r} \quad \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{E-12} \end{array}$$
$$\phi_{,s} = -\frac{\sin(\theta)}{R - r \cdot \cos(\theta)} \cdot \cos(\phi)$$

A segunda dessas equações é obtida ao considera a curvatura geodésica, na Equação E-11, nula. Já a primeira pode ser derivada ao se correlacionar o vetor unitário tangente com qualquer uma das variações, com respeito ao comprimento de arco da curva, das variáveis angulares do toro.

Esse sistema de equações (Equação E-12) não possui solução fechada, logo para se obter as curvaturas, torna-se necessária a resolução numérica desse sistema em conjunto com suas condições de contorno ($\theta(0) = \theta_0^A$; $\theta(S) = \theta_0^B$). Os valores de curvaturas, para cada estrutura diferente, necessitaria da realização desse procedimento numérico, o que oneraria computacionalmente o problema.

Com isso em vista, as equações diferenciais foram resolvidas por diferenças finitas para 106 casos, os quais têm seus limites estabelecidos pela Tabela E-1, com uma discretização de 51 pontos (Gonzalez, et al., 2018).

Tabela E-1 – Limites máximo e mínimo dos parâmetros utilizados nos casos de treino.

<i>Parâmetros</i>	<i>Valor Mínimo</i>	<i>Valor Máximo</i>
<i>r</i>	<i>0,07m</i>	<i>0,35m</i>
<i>R</i>	<i>8,0m</i>	<i>13,0m</i>
ϕ_0	<i>22,0°</i>	<i>42,0°</i>
<i>S</i>	<i>0,657m</i>	<i>5,870m</i>
<i>s</i>	<i>0</i>	<i>1</i>

Os 106 casos e seus 51 pontos de discretização totalizam 5406 pontos de treino para o algoritmo genético do programa EUREQA®, o qual tem por objetivo a obtenção de duas funções (Equação E-13) capazes de satisfazer as relações que subjazem os dados, de *input* (r, R, ϕ_0, s) e *output* (θ, ϕ), fornecidos.

$$\begin{aligned} \theta &= f([r, R, \phi_0, s]) && \text{Equação} \\ \phi &= g([r, R, \phi_0, s]) && \text{E-13} \end{aligned}$$

Após o treino, o programa EUREQA® fornece uma série de funções dos argumentos de entrada que satisfazem cada uma das variáveis de saída. A escolha das funções deve atender tanto à simplicidade quanto ao menor desvio para com os dados fornecidos. Dessa forma, foram escolhidas as seguintes expressões para as variáveis angulares:

$$\theta_{SR}(r, R, \phi_0, s) = \frac{\text{sen} [\phi_{SR}(r, R, \phi_0, s)]}{r} \cdot s$$

$$\phi_{SR}(r, R, \phi_0, s)$$

$$= \phi_0 + \frac{r}{R \cdot \tan(\phi_0)} \cdot \cos \left[\frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right] - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \tan(\phi_0)} \cdot \cos \left[2 \cdot \frac{\text{sen}(\phi_0)}{r} \cdot s \right]$$

Equação

E-14

Os resultados dessas expressões são comparados à resposta das soluções numéricas das equações diferenciais, as quais foram resolvidas pelo método das diferenças finitas (RK Lobatto-IIIa). É também utilizado dessas expressões (θ_{SR} e ϕ_{SR}) para o cálculo das curvaturas referentes às curvas geodésicas, as quais são comparadas às simplificações propostas por Sævik (1993) e as curvaturas obtidas pelo método das diferenças finitas.

O caso escolhido para a apresentação dos resultados consiste em um arame assentado sob um toro de raio menor $r = 0,35 \text{ m}$, raio maior $R = 13 \text{ m}$, ângulo de assentamento $\phi_0 = 22^\circ$ e $S = 5,871 \text{ m}$, enquanto, na Figura VI-16, o qual apresentou maiores discrepâncias entre os métodos apresentados.

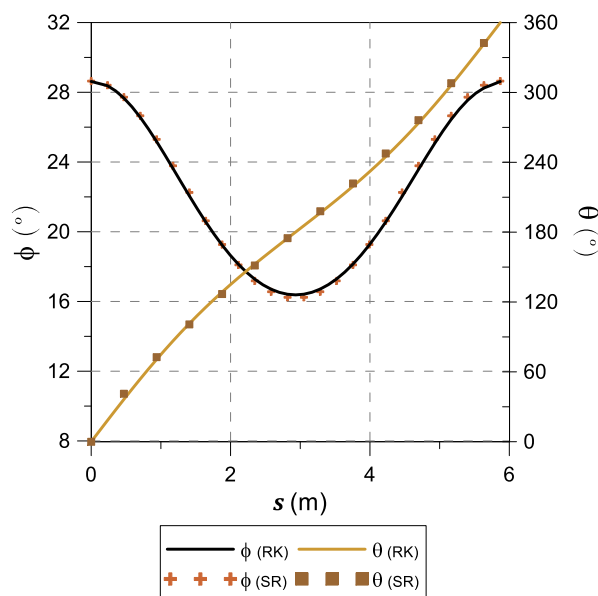


Figura VI-16 – Comparação entre resultados numéricos (RK) e empíricos (SR) para a variação de ϕ e θ de uma curva geodésica ao longo do comprimento de arco (s).

Para a comparação das curvaturas, além da comparação entre os resultados numéricos (RK) e os empíricos (SR), foram utilizadas as expressões propostas Sævik (1993), ilustradas pela Equação E-15.

$$\kappa_n = \frac{\text{sen}^2(\phi_0)}{r} \cdot \left[1 - \frac{3}{R} \cdot \frac{\text{sen}(\theta)}{\tan^2(\phi_0)} \right]$$

$$\kappa_g = 0$$

$$\tau_g = \frac{\text{sen}(\phi_0) \cdot \cos(\phi_0)}{r} \cdot \left\{ 1 + \frac{r}{R} \cdot \cos^2(\phi_0) \cdot \cos(\theta) \right\}$$

Equação

E-15

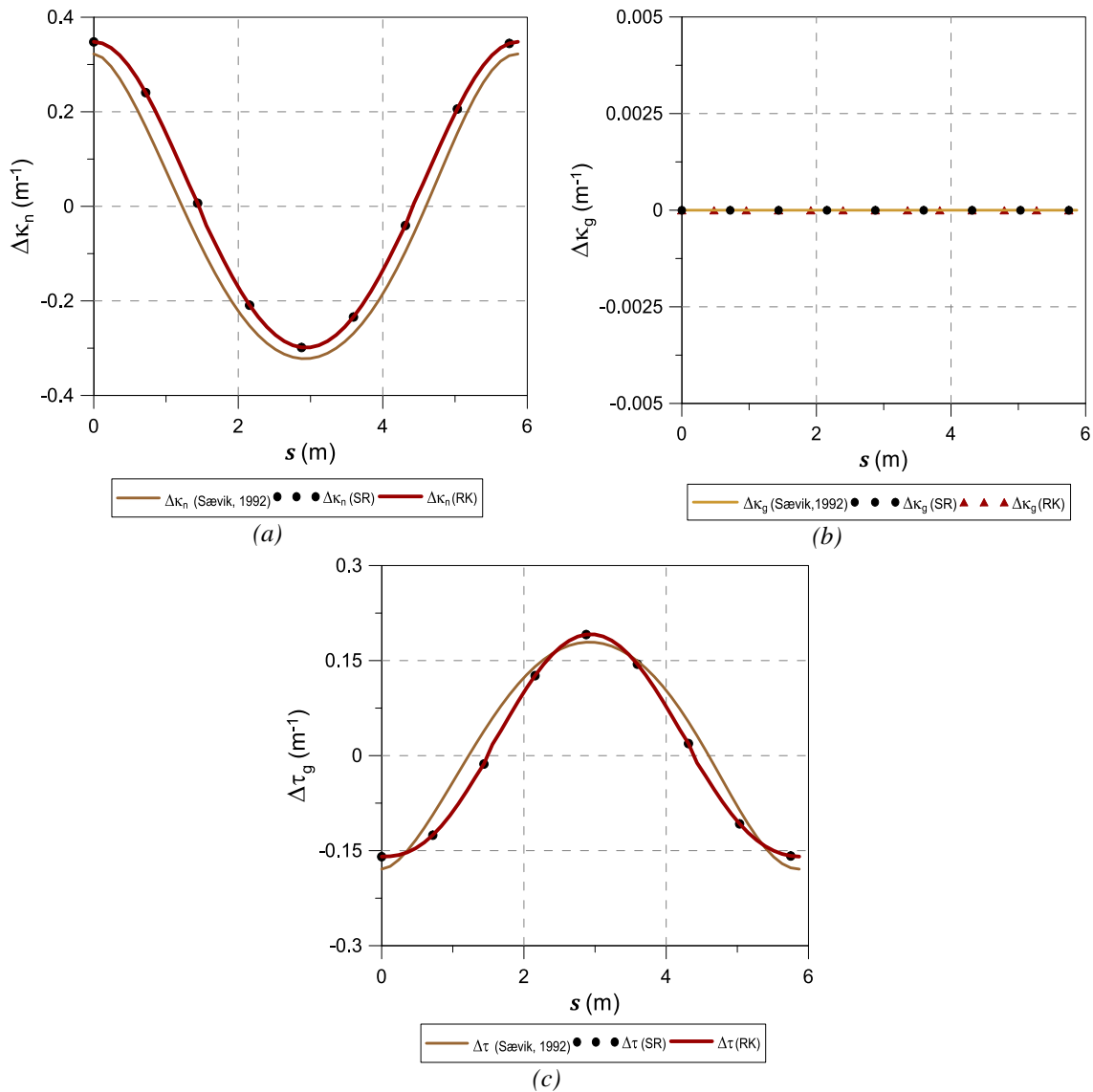


Figura VI-17 – Comparação entre resultados numéricos (RK) e empíricos (SR) para as variações de curvaturas ($\Delta\kappa_n$, $\Delta\kappa_g$ e $\Delta\tau_g$) ao longo do comprimento de arco (s).

Ademais, podem-se calcular essas variações de curvatura para os arames da armadura interna ou externa de tração de cada um dos quatro dutos analisados no CAPÍTULO IV. A Figura VI-18, de (a) a (d), ilustra cada um desses casos, para os arames da armadura interna, quando a curva geodésica é considerada. Todos os casos referem-se a toros de $R = 12m$.

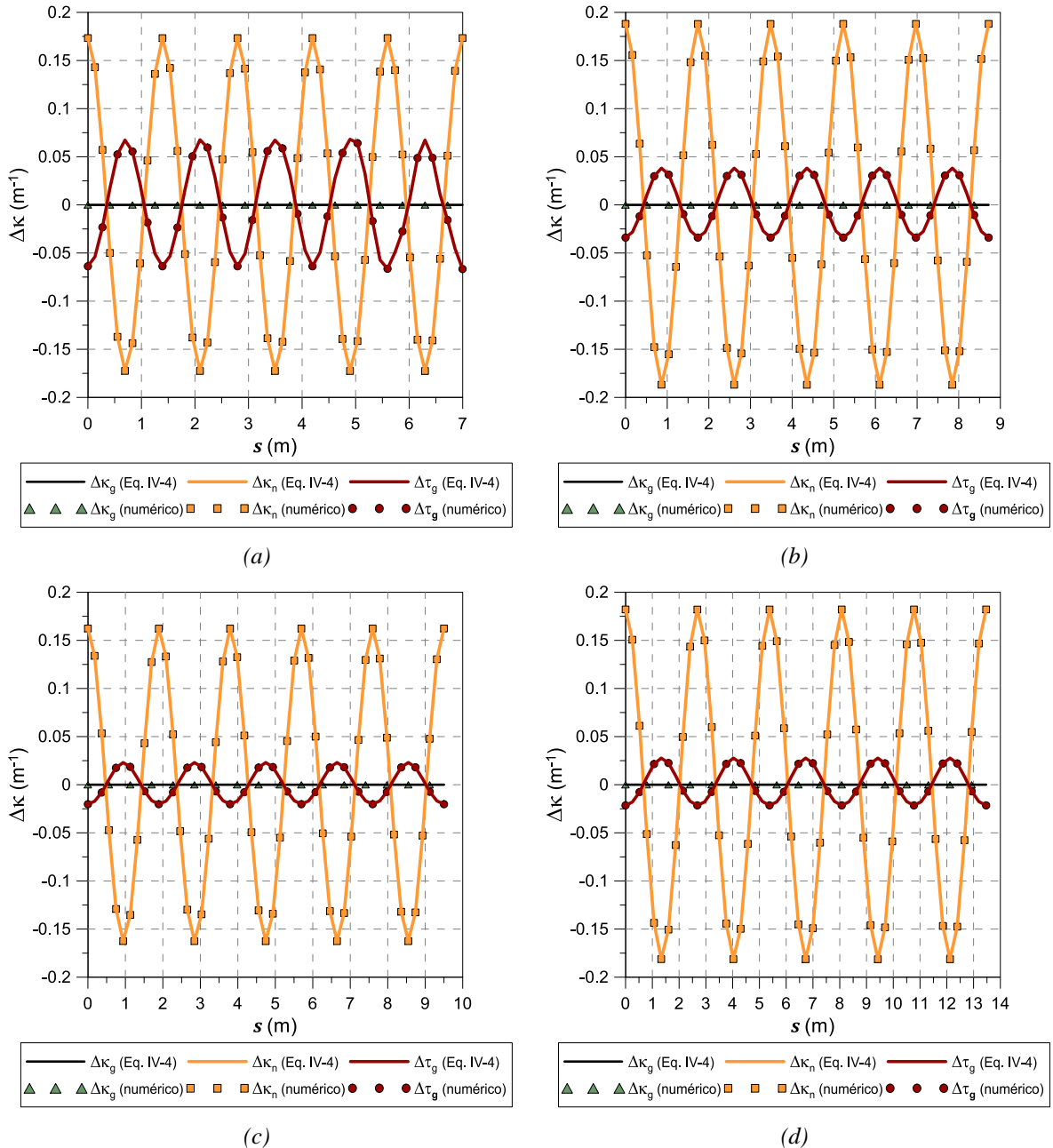


Figura VI-18 – Variação de curvaturas normal, geodésica e torção para os dutos de (a) 6", (b) 8", (c) 9,5" e (d) 14" e para a curva geodésica.