COPPEAD/UFRJ

RELATÓRIO COPPEAD Nº 224

ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS PARA MODELOS DESCONTÍNUOS DE FORMAÇÃO DOS PREÇOS DE ATIVOS NEGOCIADOS EM BOLSAS DE VALORES

Eduardo A. D. Canabarro *
Eduardo Facó Lemgruber **
João Luiz Becker*

Julho de 1989

* Professores do Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - PPGA/UFRGS.

** Professor do Instituto de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração da Universidade Federal do Rio de Janeiro-COPPEAD/UFRJ.

1. INTRODUÇAO

A descrição do comportamento dos preços das ações desperta grande interesse de pesquisadores na área de finanças, pois representa um passo preliminar para o desenvolvimento de diversos modelos analíticos. Por exemplo, a forma da distribuição dos retornos das ações é crucial para a teoria de portfólios, como também a determinação de preços de opções depende do comportamento da variância dos retornos da ação-objeto. Conforme salienta KON (1984), a hipótese mais conveniente, tanto do ponto de vista teórico como empírico, é que a distribuição das taxas de retorno dos títulos seja normal multivariada, com parâmetros estacionários. Conseqüentemente, retornos de portfolios serão normalmente distribuídos.

FAMA (1965) apresenta evidências empíricas de que os retornos mensais de portfólios de ações são normalmente distribuídos. Entretanto, testes usando retornos diários destes portfólios revelam mais curtose (caudas mais gordas) do que seria esperado em distribuições normais. Desde então, diversos autores procuram justificativas para os desvios em relação à hipótese de normalidade dos retornos diários.

PRESS (1967), por exemplo, propõe um modelo capaz de melhor descrever a distribuição de retornos, em que o processo de formação dos preços das ações é dividido em duas partes. A primeira é uma componente de difusão contínua, descrita pelo movimento Browniano. É o resultado do afluxo contínuo no tempo de um grande número de informações independentes, individualmente responsáveis por variações marginais nos preços dos títulos. A segunda é uma componente descontínua, caracterizada por variações bruscas nos preços, correspondendo ao surgimento de informações relevantes e individualmente responsáveis por efeitos significativos. Estas premissas, de razoável apelo intuitivo, têm a capacidade de se moldar ao cenário econômico brasileiro, caracterizado por níveis de instabilidade e incerteza elevados, com freqüentes modificações bruscas de políticas econômicas.

O objetivo deste trabalho é analisar empiricamente o comportamento dos preços de ações no mercado acionário brasileiro. Mais especificamente, testam-se a hipótese de normalidade e dois modelos que incorporam descontinuidades na dinâmica de preços. O trabalho se organiza da seguinte maneira: na próxima seção são apresentados os modelos teóricos testados; a seção 3 descreve a amostra estudada; a seção 4 apresenta os resultados e a seção 5 conclui o trabalho.

2. PROCESSOS GERADORES DE RETORNOS

Nesta seção, são apresentados sumariamente os modelos de geração de retornos que serão testados empiricamente.

2.1. PROCESSO CONTÍNUO

De um ponto de vista formal, a hipótese de normalidade da distribuição de retornos é conseqüência de uma evolução de preços da ação modelada através de um processo estocástico contínuo de Wiener.[1] Assim, o preço da ação evolui de modo a satisfazer a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS/S = \alpha.dt + \sigma.dz \qquad (1)$$

onde

- S: preço corrente da ação;
- dS: variação do preço da ação ocorrida no intervalo de tempo $(t,t+dt)$;
- α: taxa de retorno instantânea esperada para a ação (tendência do processo);
- σ: desvio padrão instantâneo do retorno da ação;
- z: processo de Wiener padrão.

Um processo de Wiener é um processo estocástico $W(t)$ satisfazendo aos seguintes pressupostos (HOEL; PORT; STONE. 1972):

i) $W(0) = 0$;

---

[1] Intuitivamente falando, contínuo significa que o gráfico de preços da ação no tempo pode ser desenhado sem que se precise levantar o lápis do papel.

ii) $W(t) - W(s)$ tem distribuição normal com média 0 e variância $(t-s)$ para $s \le t$;

iii) $W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_3) - W(t_2)$, ..., $W(t_n) - W(t_{n-1})$ são independentes para $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$;

Desta forma, pode ser demonstrado que o retorno da ação calculado no instante de tempo t segue uma distribuição normal com média $(\alpha-\sigma^2/2).dt$ e variância $\sigma^2.dt$.[2]

2.2. PROCESSOS DESCONTÍNUOS

Alternativamente, se os retornos da ação seguem um processo de difusão e saltos de Poisson a evolução do preço da ação satisfaz à seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS/S = \alpha.dt + \sigma.dz + dq$$

$$= \alpha.dt + \sigma.dz + \begin{cases} \overset{\tau.dt}{\longrightarrow} Y \\ \underset{(1-\tau).dt}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \qquad (2)$$

onde

- S: preço corrente da ação;
- dS: variação do preço da ação ocorrida no intervalo de tempo $(t,t+dt)$;
- α: taxa de retorno instantânea esperada para a ação (tendência do processo);

---

2 Para detalhes veja MALLIARIS & BROCK (1982).

σ: desvio padrão instantâneo do retorno da ação, condicionado à não-ocorrência de descontinuidades;

z: processo de Wiener padrão, independente de q;

q: processo de Poisson com taxa τ (número de descontinuidades por unidade de tempo), independente de z;

Y: taxa de variação de S, condicionada à ocorrência de uma descontinuidade.

A diferença entre este modelo e o anterior é a incorporação de um processo estocástico de Poisson con taxa τ representando a chegada ao mercado de informações relevantes e responsáveis por variações não-marginais nos preços das ações. Se, adicionalmente, a variável Y possuir distribuição lognormal$(0,\delta^2)$,[3] pode ser demonstrado que o retorno da ação calculado no instante de tempo t segue uma mistura de distribuições normais dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\tau.dt} \; (\tau.dt)^n}{n!} \; N((\alpha-\sigma^2/2).dt,\; \sigma^2.dt+n.\delta^2). \qquad (3)$$

Quando a extensão do intervalo de tempo é muito pequena, a probabilidade de ocorrer mais do que uma descontinuidade é virtualmente nula. Nesta situação, o processo de Poisson se reduz a um processo de Bernoulli. Formalmente, a característica essencial de um processo de Bernoulli é a suposição de que durante um período fixo de tempo h, no máximo uma informa-

---

[3] Esta hipótese foi adotada por BECKERS (1981) e por BALL & TOROUS (1983, 1985). Ela significa que o efeito médio das informações "anormais" que determinam saltos no preço da ação é nulo, ou seja, E(Y) = 1.

ção "anormal" poderá chegar ao mercado, com probabilidade $\tau.h$, onde τ é a taxa do processo de Bernoulli. Assim, quando são utilizados retornos diários para estimar os parâmetros desse processo, se está restringindo de antemão a ocorrência de saltos a no máximo um por dia de negociação. Esta pode ser uma hipótese plausível pela própria característica de anormalidade destas ocorrências. Neste caso, a expressão (3) se reduz a:

$$(1-\tau).N((\alpha-\sigma^2/2).dt,\ \sigma^2.dt) + \tau.N((\alpha-\sigma^2/2).dt,\ \sigma^2.dt+\delta^2). \quad (4)$$

Os processos estocásticos definidos pelas expressões (3) e (4) são estacionários se o vetor de parâmetros $\theta = (\alpha,\sigma^2,\tau,\delta^2)$ é constante ao longo do tempo. Para a especificação completa destes processos, é necessária a determinação de θ. Neste trabalho foi usada a técnica de estimação de máxima verossimilhança.[4]

---

[4] Para detalhes, veja CANABARRO (1988).

3. AMOSTRA

Estudou-se o comportamento do índice Bovespa no período de 01/01/85 até 31/12/86. Este período foi determinado em função da necessidade de se captar as características dos modelos estudados da forma mais completa possível. Como a ocorrência de descontinuidades no processo de formação de preços é aleatória, necessita-se um grande número de observações para a estimativa da variância total por unidade de tempo (MERTON, 1976, p.138-9).

Dado o interesse dos pesquisadores no mercado brasileiro de opções e como os modelos de apreçamento de opções são calcados no conhecimento do comportamento individual dos preços das ações-objeto, foram também estudadas as ações das empresas Paranapanema, Petrobrás e Sharp. Sobre estas ações são lançadas opções de compra caracterizadas por um alto volume de negociação e liquidez.

No período estudado, foram observados 492 preços de fechamento para cada dia de negócios.[5] Os dados foram obtidos junto à Bolsa de Valores de São Paulo. Com base nesses preços, foram calculados os retornos diários, definidos como sendo o logarítmo natural da razão entre preços sucessivos, ajustados para distribuições. Os retornos em períodos que continham fins-de-semana ou feriados foram tratados da mesma forma que aqueles calculados para dias comuns de negociação. Foram excluídos da amostra os retornos do índice BOVESPA nos

[5] Nesse trabalho, o valor do índice Bovespa será tratado como se fosse o preço de um portfólio hipotético constituído pelos títulos que compõem o índice.

cinco dias em que sua composição foi alterada (02/05/85, 02/09/85, 02/01/86, 02/05/86, 01/09/86). A amostra final consiste de 486 retornos para o índice BOVESPA e de 491 retornos para cada uma das ações estudadas.

4. RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados encontrados. Inicia-se com os testes de distribuição normal e a seguir apresentam-se os testes dos modelos de salto.

4.1. TESTES DE NORMALIDADE

A Tabela 1 resume os parâmetros estimados para este caso.

Tabela 1 - Estimativas dos Parâmetros Assumindo-se que a Distribuição dos Retornos Diários é Normal: período de 1/1/85 a 31/12/86

Ação/Índice	$\hat{\mu}$(%)	$\hat{\sigma}^2 . 10^3$	Máx(%)	Mín(%)
Paranapanema	0,2204	0,3312	34,94	-31,49
Petrobrás	0,4278	0,2744	21,00	-14,85
Sharp	0,4603	0,3610	24,51	-24,01
Ibovespa	0,3745	0,1153	20,91	-09,02

A Figura 1, na página seguinte, apresenta os histogramas das distribuições encontrados em superposição com as distribuições teóricas correspondentes às estimativas realizadas acima. Para verificar o ajustamento das distribuições de retornos diários à hipótese de normalidade, aplicou-se o teste não-paramétrico de Kolmogorov-Smirnov para uma amostra.[6] Os resultados da aplicação do teste são apresentados na Tabela 2.

[6] Veja SIEGEL (1956, p. 47-52). Para o teste da hipótese nula de normalidade das distribuições observadas, utilizou-se a tabela de LILLIEFORS (1967).

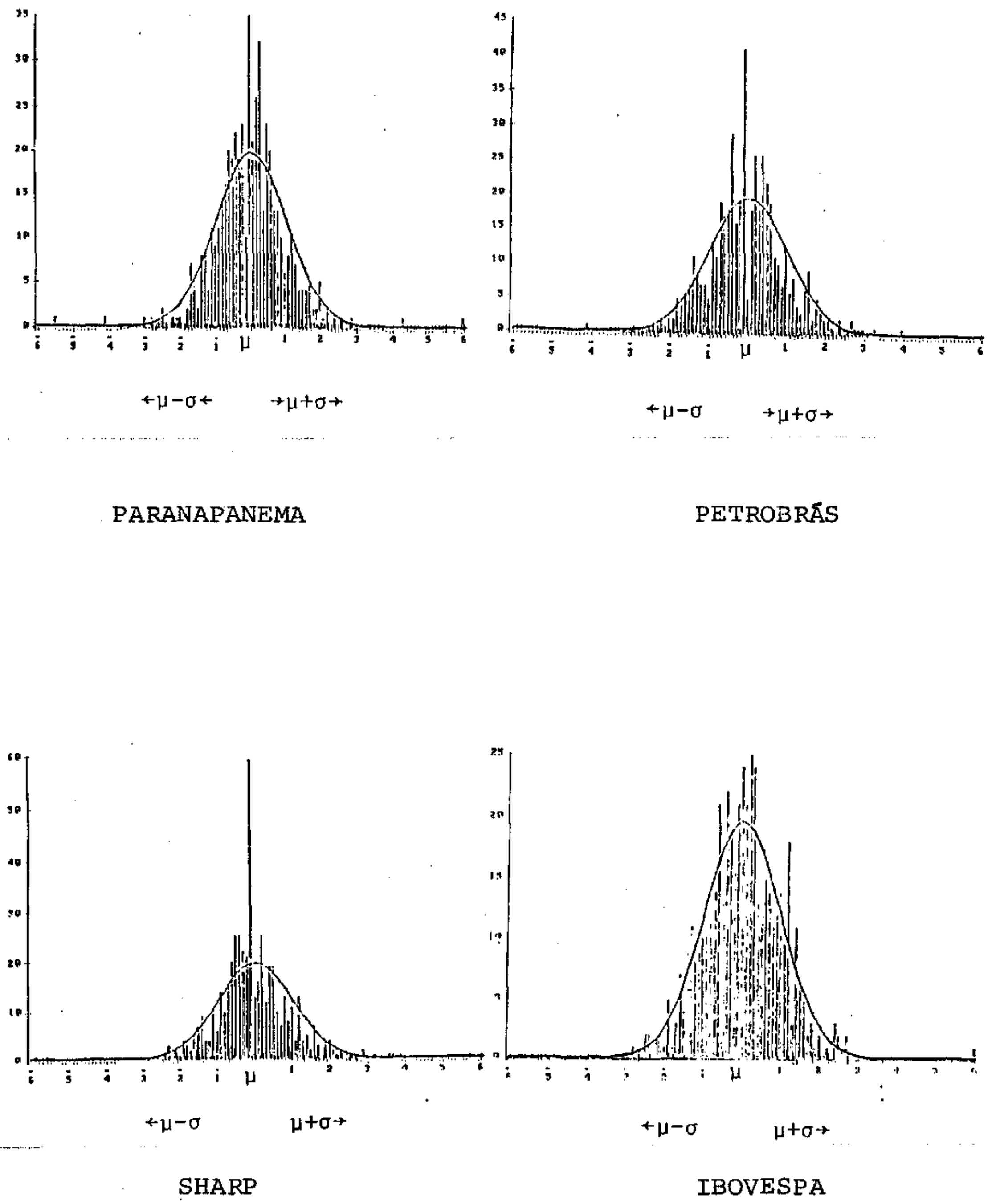
Tabela 2 - Aplicação do Teste K-S às Distribuições de Retornos Diários

Ação/Índice	D	n
Paranapanema	0,056119	491
Petrobrás	0,074529	491
Sharp	0,057907	491
Ibovespa	0,051293	486

Nota: todos os testes são significativos a menos de 1%.

Com base no valor da máxima diferença absoluta D entre as probabilidades acumuladas das distribuições esperada e observada, a hipótese nula de normalidade dos retornos diários é rejeitada ao nível de significância de 1%.

Figura 1 - Histogramas das Distribuições dos Retornos diá rios para as Ações Paranapanema, Petrobrás e Sharp, e para o Índice Ibovespa. Período de 1985 a 1986, e curvas normais correspondentes aos parâmetros estimados.



4.2. TESTE DOS MODELOS DESCONTÍNUOS

A Tabela 3 apresenta as estimativas dos parâmetros para o processo de Bernoulli.

Tabela 3 - Estimativas dos Parâmetros Assumindo-se que os Retornos Diários Seguem um Processo de Bernoulli para o Período de 1/1/85 a 31/12/86

Ação/Índice	$\hat{\alpha}$(%)	$\hat{\sigma}^2.10^3$	$\hat{\delta}^2.10^2$	$\hat{\tau}$	$\cap$
Paranapanema	0,3469 (0,0109)	0,2326 (0,0010)	2,0397 (0,0502)	0,0484 (0,0014)	61,78*
Petrobrás	0,0824 (0,0097)	0,0533 (0,0010)	0,3718 (0,0022)	0,5982 (0,0044)	39,04*
Sharp	0,4374 (0,0127)	0,1047 (0,0024)	0,3987 (0,0026)	0,6429 (0,0070)	15,68*
Ibovespa	0,3670	0,0233	0,1014	0,9077	1,56

Nota: os erros padrão das estimativas são apresentados entre parênteses; devido a problemas de instabilidade numérica, os erros padrão das estimativas dos parâmetros do Ibovespa não puderam ser calculados;
*: significante a menos de 1%

A estatística razão de verossimilhança ($\cap$) é calculada por

$$\cap = -2.[\ln(L(x;\theta^{\circ})) - \ln(L(x;\theta^{*}))], \qquad (5)$$

onde θ° é o vetor de parâmetros estimado para o máximo local que ocorre quando $\tau = 0$ (portanto, na ausência de uma estrutura de saltos), e θ^{*} é a estimativa de máxima verossimilhança sob especificação do processo de saltos de Bernoulli. Sob a hipótese nula de que os retornos diários são consistentes com um processo de difusão normal, $\cap$ possui distribuição assintótica qui-quadrado com dois graus de liberdade, o que permite testar estatisticamente a presença da componente descontínua no processo de formação de preços.

Pela análise da última coluna da Tabela 3, constata-se que a hipótese nula (ausência da componente de saltos de Bernoulli) não pode ser rejeitada ao nível de significância de 10% para o portfólio representado pelo índice Ibovespa. Este resultado parece apoiar o pressuposto de MERTON (1976) de que a componente de saltos constitui-se num risco específico da empresa, que se dilui no contexto de um portfólio suficientemente diversificado. Para as ações da Paranapanema, Petrobrás e Sharp a hipótese nula é rejeitada ao nível de significância de 1%.

A Tabela 4 apresenta as estimativas dos parâmetros para o processo de Poisson.

Tabela 4 - Estimativas dos Parâmetros Assumindo-se que os Retornos Diários Seguem um Processo de Poisson para o Período de 1/1/85 a 31/12/86

Ação/Índice	$\hat{\alpha}$(%)	$\hat{\sigma}^2.10^2$	$\hat{\delta}^2.10^2$	$\hat{\tau}$	$\cap$
Paranapanema	0,3467 (0,0110)	0,2325 (0,0010)	1,9890 (0,0510)	0,0498 (0,0015)	61,76*
Petrobrás	0,0235 (0,0094)	0,0329 (0,0007)	0,1789 (0,0020)	1,3535 (0,0090)	41,34*
Sharp	0,4119 (0,0124)	0,0796 (0,0020)	0,1776 (0,0030)	1,5880 (0,0329)	16,96*
Ibovespa	0,3586	0,0012	0,0222	5,0815	9,44*

Nota: os erros padrão das estimativas são apresentados entre parênteses; devido a problemas de instabilidade numérica, os erros padrão das estimativas dos parâmetros do Ibovespa não puderam ser calculados;
*: significante a menos de 1%

A Tabela 4 mostra que para as ações da Paranapanema, Petrobrás e Sharp, e para o índice Ibovespa, a hipótese nula de ausência da componente de saltos é rejeitada ao nível de significância de 1%.

Com exceção do processo de preços da ação da Paranapanema, a componente de saltos é responsável pela maior parte da variância dos retornos observados. Esse fato não decorre apenas da variância da amplitude dos saltos, mas também da freqüência com que ocorrem. No caso do índice Ibovespa, a componente de saltos é responsável por 99% da variância total dos retornos,[7] e o número médio de saltos chega a 5,0815 por dia de negociação. Estas estimativas parecem estar em desacordo com a noção intuitiva de que saltos ocorrem como conseqüência da chegada de informações não sistemáticas ao mercado e responsáveis por variações mais do que marginais nos preços.

Por outro lado, o processo de preços da ação da Paranapanema apresenta uma freqüência média de apenas 4,98 saltos a cada 100 dias de negociação. Nesse processo, a componente de saltos é responsável por 30% da variância total dos retornos. É possível, portanto, identificar uma componente de saltos com freqüência relativamente baixa com amplitudes relativamente grandes em relação à componente de difusão. Esta nitidez (capacidade de resolução) da separação das duas componentes está refletida no valor elevado da estatística razão de verossimilhança para essa ação: 61,76.

---

[7] $\tau.\delta^2/(\sigma^2+\tau.\delta^2) = 0{,}99$.

5. CONCLUSOES

Neste trabalho foram testados empiricamente tres modelos alternativos para o processo de formação de preços no mercado brasileiro de ações. Testaram-se a formulação clássica de difusão contínua e dois outros modelos que adicionam uma componente de descontinuidade ao processo na tentativa de representar a chegada de informações não sistemáticas ao mercado. A componente de descontinudade foi modelada através dos processos de Bernoulli e de Poisson. Os testes empíricos foram conduzidos utulizando-se preços de fechamento diários para as ações das empresas Paranapanema, Petrobrás e Sharp, e do índice Ibovespa, para os anos de 1985 e 1986.

Os resultados mostram que a normalidade das distribuições dos retornos diários, hipótese fundamental do modelo de difusão contínua, é rejeitada a níveis de significância menores do que 1% para as quatro séries estudadas. A comparação entre os modelos revela que tanto o modelo de Bernoulli como o de Poisson possuem capacidade de explicação para os retornos diários observados para as tres ações significativamente maior (a menos de 1%) do que o modelo contínuo puro. Para o índice Ibovespa, apenas o modelo de Poisson apresenta diferença significativa (a menos de 1%) em relação ao modelo contínuo. Neste caso, o modelo de Bernoulli, embora menos sofisticado do que o de Poisson, parece representar melhor nossa intuição a respeito da freqüência de saltos no mercado.

A comparação entre os modelos realizada neste trabalho apresenta implicações relevantes. Como o processo de estimação de parâmetros populacionais está vinculado ao modelo usado para representar o comportamento de preços, diferentes modelos fornecerão diferentes estimativas. Por exemplo, LEMGRUBER et alii (1989) encontram diferenças significativas nos retornos de ações em diferentes dias da semana. A constatação foi feita com base nas estimativas de média e variância do processo de difusão contínua. Se o estudo tivesse sido realizado sob a pressuposição de que o processo de formação de preços segue um modelo de saltos, será que o efeito de fim-de-semana ainda se faria presente? BECKER & LEMGRUBER (1987) documentam que o modelo de Black-Scholes sub-avalia as opções de compra mais negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo. O modelo de Black-Scholes está também baseado no processo de difusão contínuo. Alternativamente, MERTON (1976) desenvolve um modelo de avaliação de opções com base no modelo de saltos. Como o modelo de Merton avaliaria as opções no mercado brasileiro?

6. BIBLIOGRAFIA

BALL, C. & TOROUS, W. N. A simplified jump process for common stock returns. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 18(1):53-66, Mar. 1983.

________ . On jumps in common stock prices and their impact on call option pricing. The Journal of Finance, 40(1):155-73, 1985.

BECKER, J.L. & LEMGRUBER, E. F. A trading strategy analysis of the brazilian option market: evidence from the three most traded call options. Rio de Janeiro, COPPEAD/UFRJ, Apr. 1987. (Relatório de Pesquisa, 70)

BECKERS, S. A note on estimating the parameters of the diffusion-jump model of stock returns. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 16(1):127-40, Mar. 1981.

CANABARRO, E.A.D. Avaliação de opções de compra quando o processo de preços da ação-objeto é descontínuo: evidência empírica no Brasil. Porto Alegre, PPGA/UFRGS, 1988. Tese de Mestrado.

FAMA, E. The behavior of stock prices. The Journal of Business, 38(1):34-105, Jan. 1965.

SIEGEL, S. Nonparametric statistics for the behavioral sciences. New York, McGraw-Hill, 1956.