COPPEAD/UFRJ

RELATÓRIO COPPEAD Nº 223

TEORIA DO CONSUMIDOR: NOTAS DIDÁTICAS

Claudio R. Contador*

Junho de 1989

* Professor da COPPEAD - Instituto de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração

I - OBJETIVOS

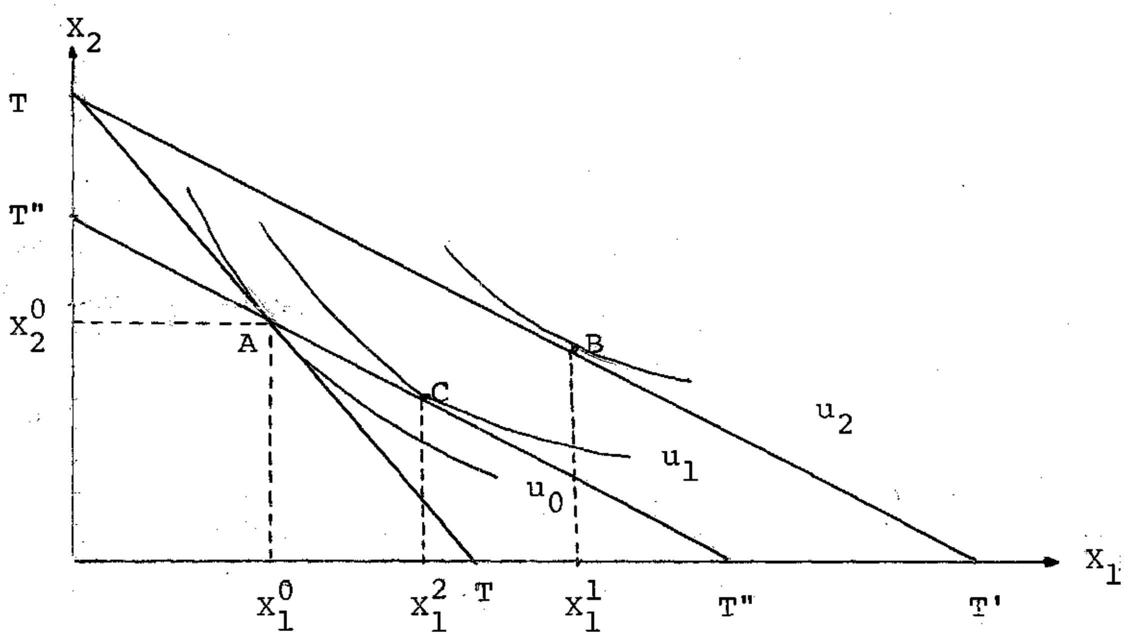
Curvas de demanda negativamente inclinadas em relação ao preço real são geralmente obtidas a partir da hipótese de consumidores racionais que maximizam a utilidade. Na verdade, o requisito da racionalidade não é necessário para se obter curvas de demanda negativamente inclinadas para o agregado de consumidores.(1)

Ainda assim, a hipótese de consumidores racionais faz parte da metodologia tradicional e serve de suporte para o rigor matemático.

As notas a seguir procuram reunir, sob forma didática, o conhecimento mínimo exigido nas disciplinas de Economia dos Programas de Pós-Graduação em Administração.

II - AS MUDANÇAS NA DEMANDA

Sejam dois bens X_1 e X_2 (X_2 corresponde a todos os demais bens), com preços inicialmente $P^o{}_1$ e $P^o{}_2$. O consumidor está em equilíbrio no ponto A, onde a linha de orçamento TT tangencia a curva de indiferença u_o. As quantidades consumidas dos dois bens em A são $X^o{}_1$ e $X^o{}_2$.



(1) Este tema é magistralmente explorado em Gary Becker, Irrational behavior and economic theory. Journal of Political Economy, 70(1):1-13, Feb. 1962.

Suponha-se, agora, uma variação (por exemplo, uma queda) no preço de X_1, mantidos constantes os demais preços e a renda nominal. A linha de orçamento gira para a posição TT. Como (por hipótese), X_1 não é um bem de Giffen, a quantidade demandada aumenta correspondendo agora a $X^1{}_1$, no ponto B. O movimento AB corresponde ao efeito-preço. Porém, considerando um efeito-substituição "a la" Slutsky, o efeito-preço AB pode ser decomposto no efeito-substituição AC, e no efeito-renda CB. Ou

$$\Delta X = X^1{}_1 - X^o{}_1$$

$$= (X^1{}_1 - X^2{}_1) + (X^2{}_1 - X^o{}_1)$$

$$= \Delta X^I + \Delta X^s \qquad (1)$$

onde ΔX corresponde ao efeito-preço (total); ΔX^I, ao efeito-renda; e ΔX^s, ao efeito-substituição nas quantidades demandadas de X^1.

Sabe-se que ao longo da reta TT, o nível de **renda real Y** é mantido constante ("a la" Slutsky). Logo o consumo em C retrata a mesma **renda real** que em A. (O preço de X_1 caiu, mas ocorreu uma variação compensatória na renda nominal, de tal forma que com a linha de preços T"T", o consumidor, agora na posição C, poderia ter mantido a posição A, se assim quisesse).

Portanto, ao longo da reta T"T", onde se observa apenas o efeito-substituição tem-se:

$$\sum_i P^o{}_i X_i = Y = \text{constante} \qquad (2)$$

III - O EFEITO-SUBSTITUIÇÃO

Generalizando-se, agora, o modelo para n bens X_1, $X_2, \ldots X_n$, suponha-se uma mudança no preço de X_j. Haverá uma série de mudanças nas quantidades consumidas de X_1, X_2, ... , de tal forma que

$$\sum_i P_1^o \frac{\partial X_i^o}{\partial P_j} = 0 \qquad (3)$$

onde a equação (3) é a derivada de (2) em relação a P_1. Dividindo por Y e multiplicando por X_i/X_i e por P_j;

$$\sum_i \frac{P_i^o X_i}{Y} \frac{\partial X_i^s}{\partial P_i} \frac{P_j}{X_j} = 0 \qquad (4)$$

ou

$$\sum_i \alpha_i \eta_{ij}^s = 0 \qquad (5)$$

onde $\alpha_i = P_i X_i / Y$ corresponde à participação do dispêndio com bem X_i no orçamento Y do consumidor; e η_{ij}^s, a elasticidade-substituição da quantidade do bem X_i em relação ao preço de X_j. Por compreender apenas o efeito-substituição η_{ij}^s é também chamada de "elasticidade compensada" (É verdade que o efeito-substituição "a la" Slutsky compreende um pequeno efeito-renda com a passagem da curva de indiferença u_o para u_1, mas pode ser considerado negligível).

Um somatório de valores nulos é igualmente nulo. Por isso, pode-se escrever com (5);

$$\sum_j \sum_i \alpha_i \eta_{ij}^s = 0 \qquad (6)$$

$$\sum_i \alpha_i \sum_i \eta^s_{ij} = 0 \tag{7}$$

e para que (7) se verifique é preciso ou que todos os α_i sejam nulos,

$$\alpha_i = 0, \text{ para } i = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

o que é impossível, ou que

$$\sum_j \eta^s_{ij} = 0 \tag{9}$$

ou seja um resultado razoável. A equação (9) mostra que uma mudança proporcional em todos os preços de bens não afeta a quantidade demandada de X_i. Vale dizer, funções demanda são homogêneas de grau zero nos preços.

Ainda considerando a mudança no preço de X_j, pode-se verificar o que acontece com X_i. O consumo de X_i se modificará em:

$$\frac{\partial X^s_i}{\partial P_j} \, dP_j \tag{10}$$

e como P^o_i é constante, a variação no dispêndio com X_i será

$$P_i^o \frac{\partial X_i^s}{\partial P_j} dP_j \tag{11}$$

Por outro lado, uma variação idêntica (compensatória) no dispêndio com X_j será

$$P_j^o \frac{\partial X_j^s}{\partial P_i} dP_i \tag{12}$$

Igualando (11) a (12)

$$P_i^o \frac{\partial X_i}{\partial P_j} dP_j = P_j^o \frac{\partial X_j}{\partial P_i} dP_i \tag{13}$$

e operando, pode ser demonstrado que

$$\eta_{ij}^s = \eta_{ji}^s \tag{14}$$

ou seja o efeito-substituição é simétrico.

IV - O EFEITO-RENDA

Seja definida agora como m_i, a propensão marginal a consumir de X_i

$$m_i = P_i \frac{\partial X_i^I}{\partial Y} \qquad (15)$$

Se a variação na renda ∂Y foi causada por uma mudança, no sentido oposto, no preço de X_i

$$- m_i \; \partial Y = P_i \; \partial X_i^I \qquad (16)$$

$$- m_i \; X_i \; \partial P_i = P_i \; \partial X_i^I \qquad (17)$$

ou

$$- m_i \; X_i \; \frac{\partial P_i}{P_i} = \partial X_i^I \tag{18}$$

Aplicando (18) em (1), (supondo-se naturalmente variações infinitésimas nas quantidades);

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= \Delta X_i^I + \Delta X_i^S \\ \Delta X_i &= - m_i \; X_i \; \frac{\Delta P_i}{P_i} + \Delta X^S \end{aligned} \tag{19}$$

e operando

$$\frac{\Delta X_i}{X_i} = - m_i \; \frac{\Delta P_i}{P_i} + \frac{\Delta X^S}{X_i} \tag{20}$$

$$\frac{\Delta X_i}{X_i} : \frac{\Delta P_i}{P_i} = - m_i + \frac{\Delta X_i^S}{X_i} : \frac{\Delta P_i}{P_i} \tag{21}$$

ou

$$\eta_{ij} = - m_i + \eta_{ij}^{s} \tag{22}$$

onde η_{ij} é a elasticidade-preço não compensada (inclusive o efeito-renda).

Mas, por definição

$$m_i = P_i \frac{\Delta X_i}{\Delta Y}$$

Logo, rearranjando os termos

$$m_i = P_i \frac{\Delta X_i}{\Delta Y} \frac{Y}{X_i} \frac{X_i}{Y} \tag{23}$$

$$m_i = \alpha_i \sigma_i \tag{24}$$

onde σ_i é a elasticidade-renda da demanda por X_i. Portanto, a expressão (22) pode também ser escrita como

$$\eta_{ii} = \eta_{ii}^{s} - \alpha_i \sigma_i \tag{25}$$

um resultado convencional na Teoria do Consumidor.

Agora, considerando que a variação na renda foi provocada por uma mudança no sentido oposto no preço de X_j, as expressões (15) e (16) se transformam em

$$m_i = P_i \frac{\Delta X_i^I}{\Delta Y} \tag{26}$$

$$\Delta Y = - X_j \Delta P_j \tag{27}$$

ou

$$m_i \Delta Y_i = P_i \Delta X_i^I \tag{28}$$

$$- m_i X_j \; \Delta P_j = P_i \; \Delta X_i^I \qquad (29)$$

$$\frac{\Delta X_i^I}{X_j} = - m_i \; \frac{X_j \; \Delta P_j}{X_i \;\; P_i} \qquad (30)$$

e como

$$\frac{X_i P_i / Y}{X_j P_j / Y} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \qquad (31)$$

então

$$\frac{\Delta X_i^I}{X_i} = - m_i \; \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \; \frac{\Delta P_j}{P_j} \qquad (32)$$

Considerando na expressão (1) que foi o preço de X_j que variou e causou as mudanças no consumo de X_1, X_2..., X_i,...

$$\Delta X_i = \Delta X_i^I + \Delta X_i^S$$

$$\frac{\Delta X_i}{X_i} = \frac{\Delta X_i^I}{X_i} + \frac{\Delta X_i^S}{X_i} \tag{33}$$

$$\frac{\Delta X_i}{X_i} : \frac{\Delta P_j}{P_j} = - m_i \frac{\alpha_j}{\alpha_i} + \frac{\Delta X_i^S}{X_i} : \frac{\Delta P_j}{P_j}$$

ou

$$\eta_{ij} = \eta_{ij}^S - m_i \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \tag{34}$$

Mas pela expressão (24)

$$m_i = \alpha_i \sigma_i$$

logo

$$m_i \frac{\alpha_j}{\alpha_i} = \alpha_i \sigma_i \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$$

(35)

$$m_i \frac{\alpha_j}{\alpha_i} = \sigma_i \alpha_j$$

e substituindo em (34)

$$\eta_{ij} = \eta_{ij}^{s} - \alpha_i \, \alpha_j \tag{36}$$

Agregando (36) para todos os bens X_j

$$\sum_j \eta_{ij} = \sum_j \eta_{ij}^{s} - \sigma_i \sum_j \alpha_j \tag{37}$$

e como: $\Sigma \eta_{ij}^{s} = 0$, (vide expressão (9))

$\Sigma \alpha_j = 1$ (por definição)

tem-se que:

$$\sum_j \eta_{ij} = -\sigma_i \tag{38}$$

Também como

$$\begin{aligned} &\sum_j m_i = 1 \\ &\sum_j \alpha_i = 1 \\ &\Sigma \alpha_1 \frac{m_i}{\alpha_i} = 1 \end{aligned} \tag{39}$$

Logo

$$\Sigma\alpha_i \ \sigma_i = 1 \tag{40}$$

V - UM EXEMPLO

Para demonstrar a aplicação das fórmulas, imagine que um estudo empírico verificou que a demanda pelo bem X_1 tem formato

$$X_1 = 50 \ \frac{Y^{0,3} \ P_2^{\ 0,1}}{P_1^{\ 0,7}}$$

onde Y é o nível da renda; P_1 e P_2 os preços de X_1 e X_2 respectivamente. Sabe-se também que 10% e 20% da renda é gasta com os bens X_1 e X_2, respectivamente.

Com base nestas informações calculam-se as elasticidades-preço (compensada e não-compensada) e renda.

A elasticidade-preço não compensada será

$$\eta_{11} = \frac{\partial X_1}{\partial P_1} \ \frac{P_1}{X_1} = \frac{d \log X_1}{d \log P_1} = - 0,7$$

e a elasticidade-preço cruzada não-compensada

$$\eta_{12} = \frac{\partial X_1}{\partial P_2} \ \frac{P_2}{X_1} = \frac{d \log X_1}{d \log P_2} = + 0,1$$

A elasticidade-renda da demanda por X_1

$$\alpha_1 = \frac{\partial X_1}{\partial Y} \quad \frac{Y}{X_1} = \frac{d \log X_1}{d \log Y} = 0,3$$

Pode-se, agora, calcular as elasticidades-preço compensadas. Se

$$\eta_{11} = \eta_{11}^{s} - \sigma_1 \alpha_1$$

$$\eta_{12} = \eta_{12}^{s} - \sigma_1 \alpha_2$$

Logo

$$\eta_{11}^{s} = \eta_{11} + \sigma_1 \alpha_1$$

$$\eta_{11}^{s} = - 0,7 + 0,3 \text{ x } 0,1 = 0,67$$

e

$$\eta_{12}^{s} = \eta_{12} + \sigma_1 \alpha_2$$

$$\eta_{12}^{s} = 0,1 + 0,3 \text{ x } 0,2 = 0,16$$

E a proporção marginal a consumir de X_1

$$m_i = \alpha_1 \sigma_1 = 0,1 \text{ x } 0,3 = 0,03$$