

IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM SISTEMAS MECÂNICOS  
CONSIDERANDO INCERTEZAS E UTILIZANDO MÉTODOS DE  
OTIMIZAÇÃO

Ricardo Fernandes Ribeiro

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Thiago Gamboa Ritto

Rio de Janeiro  
Maio de 2018

IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM SISTEMAS MECÂNICOS  
CONSIDERANDO INCERTEZAS E UTILIZANDO MÉTODOS DE  
OTIMIZAÇÃO

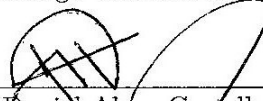
Ricardo Fernandes Ribeiro

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
MECÂNICA.


Examinada por:



Prof. Thiago Gamboa Ritto, D.Sc.



Prof. Daniel Alves Castello, D.Sc.



Prof. Haroldo Fraga de Campos Velho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
MAIO DE 2018

Ribeiro, Ricardo Fernandes

Identificação de Danos em Sistemas Mecânicos Considerando Incertezas e Utilizando Métodos de Otimização/Ricardo Fernandes Ribeiro. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XV, 102 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Thiago Gamboa Ritto

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 70 – 75.

1. Identificação de danos. 2. Incertezas. 3. Otimização. I. Ritto, Thiago Gamboa. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*Porque sou eu que conheço os  
planos que tenho para vocês”, diz  
o Senhor, “planos de fazê-los  
prosperar e não de lhes causar  
dano, planos de dar-lhes  
esperança e um futuro.  
(Je 29:11)*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por todas as suas bênçãos em minha vida e na vida de meus amigos e familiares. Agradeço a ti, Senhor, por me acompanhar durante mais uma etapa importante na minha vida, por me dar forças nos momentos de fraqueza e por me dar sabedoria nos momentos de obscuridão. *Na verdade, é justo e necessário, é nosso dever e salvação dar-vos graças, sempre e em todo lugar, Senhor, Pai santo, Deus eterno e todo-poderoso, por Cristo, Senhor nosso.*

Agradeço à santíssima Virgem Maria por seu poderoso amparo, por estar presente com o seu colo de mãe durante todos os momentos de aflição presentes nessa jornada. *Infinitas graças vos damos, Soberana Rainha, pelos benefícios que todos os dias recebemos de vossas mãos liberais. Dignai-vos, agora e para sempre tomar-nos debaixo do vosso poderoso amparo e para mais vos obrigar, vos saúdo (em oração) com uma Salve Rainha.*

Agradeço aos meus pais e familiares, por me apoiarem diariamente, sempre me motivando a seguir em frente diante de todas as dificuldades de forma positiva, e, em especial, agradeço à minha avó Maria das Dores por seu imenso carinho e por suas orações.

Agradeço à minha namorada Luciana por toda a sua compreensão, carinho, amor e por todo o seu companheirismo nessa caminhada.

Agradeço aos meus amigos de longa data por fazerem jus ao verdadeiro significado de amizade. Aos amigos do Colégio Maria Raythe, aos amigos da época de graduação e ao meu “irmão” Yuri e à minha “cunhada” Ana Cláudia, só me resta vos agradecer por todo o carinho.

Agradeço a todos os colegas do Mestrado que compartilharam comigo parte dessa trajetória rumo à obtenção do título de Mestre.

Agradeço ao professor Thiago Ritto por toda a sua orientação durante a produção desse trabalho. Agradeço-lhe pela confiança e pela compreensão diante de diversas dificuldades pessoais que tive que enfrentar durante essa jornada.

Agradeço ao professor Daniel por aceitar fazer parte desta banca e por todos os ensinamentos transmitidos desde a época de graduação. Aproveito para destacar o meu profundo respeito e a minha profunda admiração pela excelente didática do professor Daniel Castello.

Agradeço ao professor Haroldo por também aceitar fazer parte desta banca e, principalmente, por me acolher tão bem durante duas semanas junto ao LAC-INPE (Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada). Aproveito para agradecer também ao Reynier pela acolhida e pelas proveitosas discussões sobre algoritmos genéticos, heurísticas e sobre a diferença entre biscoito e bolacha juntamente com os colegas do INPE.

Agradeço também ao professor José Herskovits por me receber no laboratório Optimize e por ser bastante solícito nos ensinamentos sobre técnicas de otimização.

Agradeço aos amigos de Crisma da Paróquia Santo Afonso. Muito obrigado pelas orações: Marcella, Thiago, Thaty, Ana Livia, Andressa, Gabriel, Yasmin, Danni, Naerley, Júlia, Luiza, Maria Eduarda e Leonardo.

Agradeço aos diversos amigos da Família RA. Muito obrigado pelos votos de sucesso e por partilharem comigo o mesmo sonho de querer impactar positivamente a nossa sociedade através da educação.

Agradeço aos recentes amigos que fiz no IBRE: Raquel, Bruno, Thayná, Luan, Fellipe, Vitória, Adriana e Juliana. Muito obrigado pelo apoio nessa reta final. A todos os colegas do IBRE, meus sinceros agradecimentos.

Agradeço à CAPES pela bolsa de Mestrado a mim conferida durante essa etapa de formação acadêmica.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM SISTEMAS MECÂNICOS  
CONSIDERANDO INCERTEZAS E UTILIZANDO MÉTODOS DE  
OTIMIZAÇÃO

Ricardo Fernandes Ribeiro

Maio/2018

Orientador: Thiago Gamboa Ritto

Programa: Engenharia Mecânica

Um dos principais problemas encontrados em análises de integridade estrutural de sistemas mecânicos consiste no processo de identificação de danos. A existência de incertezas em dados de medição e na modelagem matemática de tais sistemas mecânicos pode gerar conclusões errôneas quanto ao processo de identificação de danos. Este trabalho visa abordar um estudo de identificação de danos considerando a presença de incertezas tanto nos dados experimentais quanto no modelo matemático dos sistemas mecânicos estudados. Este estudo está pautado na comparação de quatro técnicas de otimização (*Nelder-Mead Simplex*, *BFGS Quasi-Newton*, *Ponto Interior* e *Programação Quadrática Sequencial - SQP*) relacionadas ao processo de identificação de danos, bem como na comparação de duas técnicas de análise de incertezas (*Método de Monte-Carlo* e *Expansão por Caos Polinomial*).

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## DAMAGE IDENTIFICATION IN MECHANICAL SYSTEMS UNDER UNCERTAINTIES USING OPTIMIZATION ALGORITHMS

Ricardo Fernandes Ribeiro

May/2018

Advisor: Thiago Gamboa Ritto

Department: Mechanical Engineering

One of the main problems encountered in structural integrity analysis of mechanical systems is the process of damage identification. The existence of uncertainties in measurement data and in the mathematical modeling of such mechanical systems can lead to erroneous conclusions in the process of damage identification. This work aims to address a study of damage identification considering the presence of uncertainties both in the experimental data as in the mathematical model of the mechanical systems studied. This study is based on the comparison of four optimization techniques (*Nelder-Mead Simplex*, *BFGS Quasi-Newton*, *Inner Point* and *Sequential Quadratic Programming - SQP*) related to the damage identification process, as well as in the comparison of two uncertainty analysis techniques (*Monte Carlo Method* and *Polynomial Chaos Expansion*).



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	3
1.2 Organização do trabalho . . . . .	3
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>5</b>
<b>3 Metodologia</b>	<b>10</b>
3.1 Transformada de Fourier . . . . .	10
3.2 Técnicas de Otimização . . . . .	12
3.2.1 Nelder-Mead Simplex . . . . .	12
3.2.2 BFGS Quasi-Newton . . . . .	13
3.2.3 Ponto Interior . . . . .	15
3.2.4 Programação Quadrática Sequencial – SQP . . . . .	16
3.3 Análise de Incertezas . . . . .	17
3.3.1 Método de Monte Carlo . . . . .	18
3.4 Metodologia – Apresentação . . . . .	19
3.4.1 Análise determinística . . . . .	20
3.4.2 Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na força . . . . .	21
3.4.3 Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na resposta . . . . .	21
3.4.4 Análise estocástica - Incerteza nos parâmetros . . . . .	21
<b>4 Expansão por Caos Polinomial</b>	<b>23</b>
4.1 Teoria . . . . .	23
4.1.1 Truncamento . . . . .	25
4.1.2 Determinação dos coeficientes . . . . .	27
4.1.3 Estimação de erros . . . . .	29
4.2 Método <i>Orthogonal Matching Pursuit</i> . . . . .	30
4.3 <i>UQLab</i> . . . . .	31

<b>5</b>	<b>Estudos de caso - exemplos práticos</b>	<b>33</b>
5.1	Massa-mola-amortecedor . . . . .	33
5.2	Estrutura treliçada . . . . .	35
5.3	Parâmetros de incerteza . . . . .	38
5.4	Técnicas de otimização . . . . .	39
5.5	Técnicas de propagação de incertezas . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>43</b>
6.1	Análise determinística . . . . .	43
6.1.1	Massa-mola-amortecedor . . . . .	43
6.1.2	Estrutura treliçada . . . . .	46
6.2	Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na força . . . . .	49
6.2.1	Massa-mola-amortecedor . . . . .	49
6.2.2	Estrutura treliçada . . . . .	51
6.3	Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na resposta . . . . .	53
6.3.1	Massa-mola-amortecedor . . . . .	53
6.3.2	Estrutura treliçada . . . . .	54
6.4	Análise estocástica - Incerteza nos parâmetros . . . . .	56
6.4.1	Massa-mola-amortecedor . . . . .	56
6.4.2	Estrutura treliçada . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>62</b>
7.1	Análise determinística . . . . .	62
7.2	Análises de sensibilidade estocástica . . . . .	63
7.3	Análise estocástica nos parâmetros . . . . .	67
7.4	Trabalhos futuros . . . . .	68
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Resultados - Tabelas</b>	<b>76</b>
A.1	Análise de sensibilidade estocástica - Massa-mola-amortecedor . . . . .	76
A.2	Análise de sensibilidade estocástica - Estrutura treliçada . . . . .	85
A.3	Análise estocástica - Massa-mola-amortecedor . . . . .	93
A.4	Análise estocástica - Estrutura treliçada . . . . .	98

# Lista de Figuras

4.1	Conjuntos de associação de graus de polinômio para diferentes valores de $p$ e $q$ . . . . .	27
4.2	Janela de uso da estrutura <i>UQLab</i> . . . . .	32
4.3	Janela de uso da estrutura <i>UQLab</i> . . . . .	32
5.1	Sistema mecânico estudado - Sistema massa-mola-amortecedor . . . .	33
5.2	Sistema massa-mola-amortecedor com 6 g.d.l. . . . .	34
5.3	Pórtico - Estrutura treliçada . . . . .	35
5.4	Pórtico - graus de liberdade . . . . .	36
5.5	Elemento de barra . . . . .	37
6.1	Identificação de danos . . . . .	44
6.2	Resposta da componente $X_1(\omega)$ nas configurações saudável e danificada	45
6.3	Identificação de danos para a componente $X_1(\omega)$ . . . . .	45
6.4	Identificação de danos . . . . .	46
6.5	Resposta da componente $X_3(\omega)$ nas configurações saudável e danificada	47
6.6	Resposta da componente $X_7(\omega)$ nas configurações saudável e danificada	48
6.7	Identificação de danos para a componente $X_3(\omega)$ . . . . .	48
6.8	Identificação de danos para a componente $X_7(\omega)$ . . . . .	49
6.9	Identificação de danos - Monte Carlo . . . . .	50
6.10	Identificação de danos - PCE . . . . .	51
6.11	Identificação de danos - Monte Carlo . . . . .	52
6.12	Identificação de danos - PCE . . . . .	52
6.13	Identificação de danos - Monte Carlo . . . . .	53
6.14	Identificação de danos - PCE . . . . .	54
6.15	Identificação de danos - Monte Carlo . . . . .	55
6.16	Identificação de danos - PCE . . . . .	55
6.17	Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	56
6.18	Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	56
6.19	Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	57
6.20	Identificação de danos - PCE - Caso 1 . . . . .	57

6.21	Identificação de danos - PCE - Caso 2 . . . . .	58
6.22	Identificação de danos - PCE - Caso 3 . . . . .	58
6.23	Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	59
6.24	Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	59
6.25	Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	59
6.26	Identificação de danos - PCE - Caso 1 . . . . .	60
6.27	Identificação de danos - PCE - Caso 2 . . . . .	60
6.28	Identificação de danos - PCE - Caso 3 . . . . .	61
7.1	Envelopes estatísticos obtidos via Monte Carlo . . . . .	64
7.2	Envelopes estatísticos obtidos via PCE . . . . .	65
7.3	Envelopes estatísticos obtidos via Monte Carlo e via PCE . . . . .	66
7.4	Envelopes estatísticos obtidos via Monte Carlo e via PCE - Massa- mola-amortecedor - Programação Quadrática Sequencial – SQP . . .	67
7.5	Envelopes estatísticos obtidos via Monte Carlo e via PCE - Estrutura treliçada - Programação Quadrática Sequencial – SQP . . . . .	68

# Lista de Tabelas

3.1	Transformadas de Fourier de algumas classes de funções . . . . .	11
4.1	Lista de bases polinomiais clássicas em problemas de PCE . . . . .	25
5.1	Cenários de identificação de danos - Massa-mola-amortecedor . . . . .	34
5.2	Cenários de identificação de danos - Estrutura treliçada . . . . .	38
5.3	Cenários para o parâmetro $\alpha$ . . . . .	39
6.1	Resultados - Identificação de danos . . . . .	43
6.2	Tempo computacional (em segundos) . . . . .	44
6.3	Resultados - Identificação de danos . . . . .	46
6.4	Tempo computacional (em segundos) . . . . .	46
6.5	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	50
6.6	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	51
6.7	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	52
6.8	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	52
6.9	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	53
6.10	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	54
6.11	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	55
6.12	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	55
6.13	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	57
6.14	Tempo computacional médio (em horas) . . . . .	57
6.15	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	58
6.16	Tempo computacional médio (em horas) . . . . .	58
6.17	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	60
6.18	Tempo computacional médio (em horas) . . . . .	60
6.19	Tempo computacional médio (em minutos) . . . . .	61
6.20	Tempo computacional médio (em horas) . . . . .	61
A.1	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	76
A.2	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	77
A.3	Incerteza na força - PCE - Caso 1 . . . . .	77

A.4	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 1 . . . . .	77
A.5	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	78
A.6	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	78
A.7	Incerteza na força - PCE - Caso 2 . . . . .	78
A.8	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 2 . . . . .	79
A.9	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	79
A.10	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	79
A.11	Incerteza na força - PCE - Caso 3 . . . . .	80
A.12	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 3 . . . . .	80
A.13	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 4 . . . . .	80
A.14	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 4 . . . . .	81
A.15	Incerteza na força - PCE - Caso 4 . . . . .	81
A.16	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 4 . . . . .	81
A.17	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 5 . . . . .	82
A.18	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 5 . . . . .	82
A.19	Incerteza na força - PCE - Caso 5 . . . . .	82
A.20	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 5 . . . . .	83
A.21	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 6 . . . . .	83
A.22	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 6 . . . . .	83
A.23	Incerteza na força - PCE - Caso 6 . . . . .	84
A.24	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 6 . . . . .	84
A.25	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	85
A.26	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	85
A.27	Incerteza na força - PCE - Caso 1 . . . . .	86
A.28	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 1 . . . . .	86
A.29	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	86
A.30	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	87
A.31	Incerteza na força - PCE - Caso 2 . . . . .	87
A.32	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 2 . . . . .	87
A.33	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	88
A.34	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	88
A.35	Incerteza na força - PCE - Caso 3 . . . . .	88
A.36	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 3 . . . . .	89
A.37	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 4 . . . . .	89
A.38	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 4 . . . . .	89
A.39	Incerteza na força - PCE - Caso 4 . . . . .	90
A.40	Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 4 . . . . .	90
A.41	Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 5 . . . . .	90
A.42	Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 5 . . . . .	91

A.43 Incerteza na força - PCE - Caso 5 . . . . .	91
A.44 Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 5 . . . . .	91
A.45 Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 6 . . . . .	92
A.46 Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 6 . . . . .	92
A.47 Incerteza na força - PCE - Caso 6 . . . . .	92
A.48 Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 6 . . . . .	93
A.49 Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	93
A.50 Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	94
A.51 Distribuição Gamma - PCE - Caso 1 . . . . .	94
A.52 Distribuição Normal - PCE - Caso 1 . . . . .	94
A.53 Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	95
A.54 Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	95
A.55 Distribuição Gamma - PCE - Caso 2 . . . . .	95
A.56 Distribuição Normal - PCE - Caso 2 . . . . .	96
A.57 Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	96
A.58 Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	96
A.59 Distribuição Gamma - PCE - Caso 3 . . . . .	97
A.60 Distribuição Normal - PCE - Caso 3 . . . . .	97
A.61 Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	98
A.62 Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 1 . . . . .	98
A.63 Distribuição Gamma - PCE - Caso 1 . . . . .	99
A.64 Distribuição Normal - PCE - Caso 1 . . . . .	99
A.65 Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	99
A.66 Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 2 . . . . .	100
A.67 Distribuição Gamma - PCE - Caso 2 . . . . .	100
A.68 Distribuição Normal - PCE - Caso 2 . . . . .	100
A.69 Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	101
A.70 Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 3 . . . . .	101
A.71 Distribuição Gamma - PCE - Caso 3 . . . . .	101
A.72 Distribuição Normal - PCE - Caso 3 . . . . .	102

# Capítulo 1

## Introdução

Nos últimos anos, as principais indústrias que utilizam componentes e estruturas mecânicas em sua linha de produção (automotiva, aeronáutica, imobiliária, naval, nuclear, óleo e gás etc.) aumentaram seus investimentos em pesquisas e no desenvolvimento tecnológico, visando obter métodos eficientes para analisar a integridade de estruturas e impedir que catástrofes e/ou acidentes advenham, assegurando a vida das pessoas e evitando prejuízos econômicos.

O monitoramento da integridade estrutural consiste em detectar falhas em estados iniciais, intervir na sua propagação e, conseqüentemente, impedir que algum acidente ocorra (levando à parada ou danificação da estrutura). Esta atual e importante linha de pesquisa é denominada monitoramento da integridade de estruturas (*SHM – Structural Health Monitoring*). Conforme destacado em [1], um SHM deve ser capaz de satisfazer os seguintes requisitos:

- Aquisição e processamento de dados;
- Validação e análise de sinais;
- Identificação e caracterização de falhas;
- Interpretação de mudanças adversas em uma estrutura;
- Auxiliar a tomada de decisões.

As falhas em componentes mecânicos levam a danos na estrutura mecânica. Danos são definidos como mudanças introduzidas em um sistema que afetam negativamente seu desempenho atual ou futuro. Um dano só é significativo mediante a comparação entre dois estados do sistema: o estado atual e o estado inicial (ou não danificado). As mudanças no sistema podem ser devido a mudanças em:

- Propriedades materiais e geométricas;



- Condições de contorno;
- Conectividade do sistema.

Na área de vibrações mecânicas, a modelagem do sistema é caracterizada pelo conhecimento da geometria das estruturas, das propriedades dos materiais, das condições iniciais e de contorno e dos termos de força que excitam a estrutura. A saída (resposta) do modelo, como deslocamento, acelerações, modos de vibração, etc, dependem das propriedades físicas das estruturas. Alterações nessas propriedades podem ser causadas por fissuras, afrouxamento de conexões ou quaisquer outros danos e podem ser detectáveis através das propriedades modais.

O processo de identificação de danos estruturais pode ser classificado com base no desempenho mecânico, atendendo a cinco níveis [2],[3]:

1. Detecção: a presença de qualquer dano é verificada.
2. Localização: determina onde os danos estão localizados.
3. Classificação: determina o tipo de dano.
4. Extensão: dá uma estimativa da extensão e gravidade do dano.
5. Prognóstico: tenta prever a vida útil restante da estrutura.

A maioria das obras encontradas na literatura atende aos dois primeiros níveis de desempenho (detecção e localização dos danos). Além disso, a literatura é limitada nos últimos três níveis, compreendendo a classificação, extensão e prognóstico [4].

Toda estrutura mecânica, antes de ser colocada em uso, passa por uma série de avaliações e testes de integridade estrutural. Neste caso são realizados ensaios não destrutivos (NDE – *Nondestructive Evaluation*), visando estimar o grau de segurança e confiabilidade da estrutura. Para isto, existem técnicas tradicionalmente utilizadas como: inspeção ultrassônica, radiografia-X, testes de emissão acústica, entre outras técnicas.

As técnicas tradicionais utilizadas para avaliação da integridade estrutural (apesar de contarem com um bom aparato instrumental e serem bem formuladas) não conseguem satisfazer as necessidades crescentes da indústria, como quando as estruturas estão em movimento [5], por exemplo. Além disso, os sistemas de monitoramento de integridade estrutural vêm sofrendo uma evolução natural devido ao avanço das tecnologias de sensores e materiais inteligentes; acrescenta-se a isso técnicas eficientes de processamento de dados e sinais e, principalmente, a crescente demanda de se empregar tais ferramentas em tempo real, como é o caso das aeronaves na indústria aeronáutica e informações sobre perfuração de poços na indústria de óleo e gás.

Procurando enriquecer e aperfeiçoar os estudos relacionados à identificação de danos em sistemas mecânicos, o presente trabalho visa contribuir através de uma abordagem estocástica para essa classe de problemas. A riqueza apresentada nessa abordagem estocástica consiste em se fazer uso da técnica de expansão por caos polinomial (PCE - *Polynomial Chaos Expansion*). Além disso, serão utilizadas, para fins comparativos, quatro técnicas de otimização aplicadas ao processo de resolução do problema de identificação.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como principais objetivos:

- Promover um estudo comparativo das técnicas de otimização diante da metodologia empregada para a identificação de danos nos sistemas mecânicos estudados;
- Promover um estudo comparativo das técnicas de propagação de incertezas diante da metodologia empregada para a identificação de danos nos sistemas estudados;
- Apresentar resultados de identificação de danos considerando incertezas nos parâmetros dos sistemas estudados;
- Avaliar a sensibilidade da metodologia às incertezas inerentes aos parâmetros e respostas dos sistemas em estudo;
- Avaliar os tempos/custos computacionais das técnicas utilizadas para propagação de incertezas e compará-los.

## 1.2 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

- ✓ O Capítulo 1 trata sobre uma breve introdução e contextualização do tipo de problema a ser abordado no decorrer do trabalho;
- ✓ O Capítulo 2 faz uma revisão bibliográfica do presente tema de trabalho.
- ✓ O Capítulo 3 aborda a metodologia utilizada no presente trabalho. São apresentados os conceitos que fundamentam as bases ferramentais utilizadas;

- ✓ O Capítulo 4 se caracteriza por ser uma apresentação detalhada dos conceitos de *Expansão por Caos Polinomial* e, também, das particularidades do código computacional utilizado como ferramenta de análise utilizando tais conceitos;
- ✓ O Capítulo 5 apresenta a aplicação da metodologia a um determinado sistema mecânico;
- ✓ O Capítulo 6 trata dos resultados e conclusões do presente trabalho;
- ✓ O Capítulo 7 aborda sugestões de atividades futuras a serem desenvolvidas nessa linha de pesquisa afim de se consolidar um *estado da arte* referente ao tema;

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

O processo de identificação de danos estruturais é muitas vezes formulado como um problema inverso. Para um conjunto de respostas de saída do problema (deslocamentos ou modos de vibração), dada uma configuração de cargas especificadas aplicadas à estrutura, as alterações nas propriedades estruturais (rigidez, por exemplo) da condição não danificada são identificadas inversamente minimizando uma função de erro.

A função de erro é geralmente definida como a diferença entre a resposta predita por um modelo computacional e a resposta medida a partir de uma experiência ([6],[7],[8]). A função de erro também é chamada como função objetivo do processo de minimização. A lógica por trás dessa abordagem é que, se a resposta do modelo computacional coincide com a da estrutura real, então as propriedades previstas e reais da estrutura alvo corresponderiam também. No entanto, tal análise inversa é inerentemente propensa a erros nas medições de resposta. Mesmo uma pequena alteração na resposta pode fazer com que uma análise inversa proporcione uma identificação significativamente diferente das propriedades estruturais. Além disso, o problema se torna mais desafiador quando a função objetivo tem mais de uma solução ou quando as soluções são descontínuas.

A abordagem de problemas inversos combina um modelo inicial da estrutura e dados medidos para melhorar o modelo ou testar uma hipótese. Na prática, o modelo é baseado em análise de elementos finitos e as medições são dados de medição ou dados simulados (no presente trabalho utilizaremos dados de simulação numérica), muitas vezes sob a forma de uma base de dados modal, embora também possam ser utilizados dados de função de resposta em frequência (FRF). As técnicas de estimativa são muitas vezes baseadas nos métodos de atualização de modelos, que tiveram algum sucesso na melhoria dos modelos e na compreensão da dinâmica subjacente. Os métodos de atualização de modelos podem ser classificados como métodos de sensibilidade ou métodos diretos. Os métodos do tipo sensibilidade dependem de um modelo paramétrico da estrutura e da minimização de alguma

função de penalidade com base no erro entre os dados medidos e as previsões do modelo. Estes métodos oferecem uma ampla gama de parâmetros para atualização que têm significado físico e permitem certo grau de controle sobre o processo de otimização. A alternativa são métodos de atualização direta que alteram matrizes completas de massa e/ou rigidez, embora os modelos atualizados obtidos sejam muitas vezes difíceis de interpretar para aplicações de monitoramento da integridade de estruturas.

Uma abordagem diferente consiste em usar apenas os dados medidos e identificar os danos causados pelas mudanças nas formas do modo de vibração. *Farrar e Jauregui* ([9],[10]) compararam vários desses métodos, como o método do índice de danos [11], as curvaturas modais [12], a mudança na flexibilidade [13] ou a alteração na rigidez [14]. O exemplo utilizado foi de uma ponte rodoviária com uma base de concreto e suportes de aço. Diferentes níveis de danos foram introduzidos, mas o dano foi claramente localizado com a maioria dos métodos apenas no nível mais grave, onde a primeira frequência natural foi alterada em pouco mais de 7%, e os modos de vibração alterados significativamente. O método do índice de danos foi considerado o mais promissor. Outros métodos baseados no reconhecimento de padrões, muitas vezes utilizando redes neurais, são também populares ([15], [16]). Esses métodos fornecem essencialmente ajustes de curva usando funções de interpolação e não são baseados em modelos físicos. A falta de um modelo físico também limita a possibilidade de prognóstico de danos.

A maioria das abordagens utilizadas para identificação de danos são baseadas nos métodos de atualização de modelos. Um primeiro método de atualização é a atualização direta. O objetivo é muitas vezes reproduzir os dados medidos alterando a matriz de rigidez o mínimo possível (em algum sentido de norma mínima). Historicamente, esses métodos estavam entre os primeiros na atualização de modelos [17] e, posteriormente, outras generalizações foram propostas [18]. Existem vários problemas com os métodos diretos. Não há garantia de que as matrizes resultantes sejam definidas positivas (ou semi-definidas para estruturas com modos livres-livres), e modos extras podem ser introduzidos na faixa de frequência de interesse. O principal problema para localização de dano, e de fato para localização de erro na atualização de modelo, é que todos os elementos nas matrizes podem ser alterados. Geralmente, devido à otimização da norma mínima no método de atualização, todos os elementos da matriz seriam alterados um pouco, ao invés de um pequeno número de elementos alterados substancialmente. Desta forma, o efeito de qualquer dano presente estaria espalhado por todos os graus de liberdade tornando a localização difícil. Outros trabalhos como [19], [14], [20], [21] e [22] foram produzidos nesta mesma linha com o intuito de reduzir o problema de localização do dano.

Neste ponto, se torna aparente que os métodos que atualizam matrizes inteiras

de massa e rigidez têm desvantagens significativas que não são compensadas pela principal vantagem de não exigirem modelos paramétricos dos mecanismos de dano. Naturalmente, a finalidade original destes métodos não era a detecção de danos, mas muitas vezes controle de vibração e estabilidade [23].

O segundo método de atualização de modelos para a identificação de danos é o método baseado na sensibilidade de parâmetros. Este método permite uma ampla escolha de parâmetros fisicamente significativos e essa vantagem levou ao seu uso generalizado frente aos métodos diretos. A abordagem é muito geral e consiste em minimizar uma função de penalização, a qual normalmente consiste no erro entre as quantidades medidas e as correspondentes previsões do modelo. Se houver medições suficientes e um conjunto restrito de parâmetros, então a identificação pode ser bem condicionada, não necessitando de uma regularização. Os principais trabalhos encontrados na literatura que abordam este método de uma forma descritiva são: [24]; [25]; [17]; [26] e [27].

Formalmente, como foi definido em *Rychlik e Rydén* [28], a incerteza é aquela situação em que não se tem conhecimento objetivo da distribuição de probabilidades associada aos eventos que poderão resultar. Para compreender como as incertezas afetam as previsões na Engenharia, muitos métodos foram desenvolvidos ao longo do tempo para resolver este problema ([29], [30]).

Uma das técnicas para quantificar a incerteza é a Expansão por Caos Polinomial (*Polynomial Chaos Expansion - PCE*) introduzida por Wiener [31] no início do século XX. Apesar disso, a aplicação desta ferramenta somente veio cerca de 60 anos depois com o trabalho pioneiro de *Ghanem e Spanos* [30], onde os autores apresentam o uso da PCE na quantificação de incerteza aplicado a alguns problemas envolvendo sistemas mecânicos. Posteriormente, *Xiu* em [32] estende o trabalho de Wiener para o uso de diferentes tipos de polinômios ortogonais, oferecendo uma maneira eficiente de representar processos não gaussianos. Esta nova metodologia é aplicada por *Xiu* a equações diferenciais estocásticas de baixa dimensão, com resultados satisfatórios em termos de custo computacional e precisão, se comparado ao método de Monte Carlo tradicional. O destaque da PCE se dá principalmente por sua rápida convergência e por expressar a solução final como um processo aleatório, e não meramente como um conjunto de estatísticas.

Com o método de PCE, uma função com entradas aleatórias pode ser representada como um metamodelo estocástico, com base em momentos estatísticos de ordem inferior e, além disso, a boa confiabilidade da saída da função pode facilitar a implementação da otimização de projetos em cenários de incerteza como design robusto [33] e design baseado em confiabilidade [34].

A técnica de PCE foi baseada no conceito de Wiener sobre o caos homogêneo [31], onde o termo caos refere-se à aleatoriedade nos parâmetros envolvidos em diferentes

processos físicos ou mecânicos. A base teórica desta aproximação está nas conclusões de *Cameron e Martin* [35], em que as expansões de caos polinomial convergem para um funcional  $L^2$  no espaço de Hilbert. No contexto dos processos estocásticos, isto significa que cada processo estocástico com momento de segunda ordem finito pode ser representado por uma expansão por caos polinomial infinita. A forma original do PCE é uma expansão espectral, baseada nos polinômios de Hermite ortogonais em termos de variáveis aleatórias gaussianas e utilizando coeficientes determinísticos. Entretanto, ao se utilizar esta forma original, obtém-se a convergência ótima somente quando se trabalha com processos estocásticos gaussianos.

O método de PCE original adota uma abordagem intrusiva pois requer extensas modificações nos códigos determinísticos existentes do modelo de análise, sendo geralmente limitado a pesquisas em que o especialista tem controle total de todas as equações do modelo, bem como conhecimento detalhado do software.

Alternativamente, abordagens não intrusivas foram desenvolvidas sem modificar o modelo de análise original, ganhando atenção crescente na literatura. Como uma abordagem PCE bem conhecida, o método generalizado de PCE (gPCE) baseado no esquema Askey ([36], [31]) (ver Capítulo 4) tem sido amplamente aplicado em problemas de propagação de incertezas por sua maior precisão e melhor convergência ([37], [38]) comparado ao método PCE original [39].

Ocasionalmente, a entrada aleatória não seguirá necessariamente um dos cinco tipos de distribuições probabilísticas (normal, uniforme, exponencial, beta e gama) no esquema Askey. Nesse caso, uma transformação deve ser feita para transferir cada variável de entrada aleatória para uma das cinco distribuições. Isso induz uma taxa de convergência substancialmente menor, o que torna a aplicação do caos polinomial de Askey computacionalmente ineficiente [40]. Desta forma, novos métodos foram desenvolvidos para acomodar distribuições arbitrárias através da construção de seus próprios polinômios ortogonais em vez de se referirem ao esquema Askey ([41], [42]).

Quando a modelagem matemática do problema físico envolve um aumento do número de variáveis propagadas, também aumenta significativamente o custo computacional. Este problema é conhecido como "Maldição da Dimensionalidade" (*Curse of Dimensionality*) [43]. Uma vez que a maior parte dos sistemas físicos ou mecânicos reais apresenta uma grande quantidade de parâmetros em seus modelos, este problema de dimensionalidade em caos polinomial é bastante investigado na literatura, conforme visto em [44], [45] e [46].

Diante deste problema, busca-se encontrar técnicas de aproximação que permitam obter os coeficientes da expansão em um tempo computacional viável. Mediante a técnica de projeção espectral, os coeficientes da expansão são definidos mediante integrais multidimensionais. *Kaarnioja* em [47] desenvolve fundamentos teóricos e práticos no uso da quadratura de Smolyak ou sparse grid para estimar integrais

de alta dimensão. Em [48] também se mostra a eficiência deste método em problemas de alta dimensão, observando que o efeito no custo computacional é mais pronunciado conforme aumenta o número de parâmetros.

Outra alternativa possível para calcular os coeficientes da expansão é adotar um enfoque de regressão. Neste caso, é preciso construir um planejamento de experimentos a partir de um conjunto de realizações. Em [49], [50] e [45] é possível perceber que, para problemas mecânicos e de análises de sensibilidade de alta dimensão, esta metodologia de regressão com um planejamento de experimentos otimizado é eficiente, em termos de precisão e número de rodadas, para o cálculo dos coeficientes da PCE.



# Capítulo 3

## Metodologia

Neste capítulo será apresentada a metodologia empregada para a identificação de danos em estruturas mecânicas provenientes do estudo de dinâmica de sistemas lineares. Em resumo, a metodologia consiste em se utilizar técnicas de otimização para se identificar parâmetros de rigidez de um sistema mecânico solicitado por uma dada força. Tal análise será realizada no domínio da frequência e serão consideradas incertezas no modelo e na resposta.

Visando um maior entendimento do leitor, este capítulo foi subdividido em quatro seções. As três primeiras seções irão abordar os fundamentos teóricos com os principais conceitos utilizados no embasamento desta metodologia, a saber: Transformada de Fourier (seção 3.1); Técnicas de Otimização (seção 3.2); Análise de Incertezas (seção 3.3).

A última seção é a responsável por compilar todos os conhecimentos apresentados nas seções anteriores e estruturar a metodologia propriamente dita (seção 3.4).

### 3.1 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier constitui uma das principais ferramentas matemáticas utilizada na engenharia e desenvolvida pelo físico-matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Juntamente com as séries de Fourier, desempenha importante papel em diversas áreas, desde comunicações, processamento de sinais, sistemas de controle, antenas, além de ser extremamente útil na resolução de equações diferenciais, embora com um poderio relativamente menor que a transformada de Laplace em alguns aspectos. Por exemplo, para calcular a resposta de um circuito elétrico a um dado valor de entrada (tensão ou corrente), a transformada de Laplace fornece a resposta transitória e permanente. Já a transformada de Fourier limita-se ao regime permanente. Ela pode ser definida como uma soma (integral) ponderada de senóides complexas:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.1)$$

Diz-se frequentemente que se imaginarmos a função  $f(t)$  como um feixe de luz, então a transformada de Fourier, como um prisma, quebra a função em diversos componentes de frequência  $\omega$  que a compõe, cada uma de intensidade  $F(\omega)$ . As várias frequências seriam chamadas cores e, dessa forma, a transformada de Fourier forneceria o espectro de cores do sinal. Fazendo o caminho contrário, a transformada inversa de Fourier combina o espectro, ou seja, combina todas as cores, para retornar à função original.

A principal razão da utilidade da transformada de Fourier na resolução de equações diferenciais resulta de transformar equações diferenciais lineares de coeficientes constantes em equações algébricas, dado que a transformada de Fourier da derivada de uma função  $f(t)$  num ponto  $\omega \in \mathfrak{R}$  é igual ao produto de  $i\omega$  pela transformada  $F(\omega)$  calculada em  $\omega$ .

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\} = i\omega F(\omega) \quad (3.2)$$

A seguir é apresentada uma tabela com as transformadas de Fourier das principais funções que surgem na resolução de equações diferenciais:

Tabela 3.1: Transformadas de Fourier de algumas classes de funções

$f(t)$	$F(\omega), F = \mathcal{F}(f)$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{a + i\omega}, a > 0$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}, a > 0$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi \delta(\omega)$
$\cos(at)$	$\pi [\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)]$
$\sin(at)$	$\pi [\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$

## 3.2 Técnicas de Otimização

A seguir, serão apresentadas as técnicas de otimização utilizadas nas análises de identificação de danos. A escolha de tais técnicas se deveu em virtude da familiaridade do autor com o ambiente *Matlab*, no qual tais técnicas já se encontram bem implementadas e documentadas.

### 3.2.1 Nelder-Mead Simplex

O algoritmo simplex de Nelder-Mead, publicado pela primeira vez em 1965, é um método de busca direta extremamente popular para a minimização de problemas multidimensionais não lineares e sem restrições. Apesar de seu uso generalizado, essencialmente nenhum resultado teórico foi provado explicitamente para a convergência do algoritmo de Nelder-Mead [51]. O método de Nelder-Mead constitui portanto num método de busca heurística.

O método de Nelder-Mead busca minimizar uma função não-linear escalar de  $n$  variáveis reais usando somente valores de função, sem nenhuma informação sobre a derivada (explícita ou implícita). O método de Nelder-Mead mantém em cada etapa um *simplex* não degenerado - uma figura geométrica em  $\mathbb{R}^n$  de volume não nulo que é o invólucro convexo de  $n + 1$  vértices (no  $\mathbb{R}^2$  será um triângulo formado por três pontos não colineares; no  $\mathbb{R}^3$  será um tetraedro formado por quatro pontos não coplanares e assim em diante).

Quatro parâmetros escalares devem ser especificados para definir o método Nelder-Mead por completo. São os coeficientes de: reflexão ( $\rho$ ); expansão ( $\chi$ ); contração ( $\gamma$ ) e encolhimento ( $\sigma$ ). De acordo com o trabalho original dos autores do método [52], estes parâmetros devem apresentar as seguintes relações:

$$\rho > 0 \quad \chi > 1 \quad \chi > \rho \quad 0 < \gamma < 1 \quad 0 < \sigma < 1 \quad (3.3)$$

No presente trabalho, serão utilizados os seguintes valores para os parâmetros (encontrado normalmente na literatura):

$$\rho = 1 \quad \chi = 2 \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \sigma = \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

Desta forma, para a  $k$ -ésima iteração, tem-se um *simplex* não degenerado  $\Delta_k$  (constituído por  $n + 1$  vértices). Esses vértices  $x_i^{(k)}$  são ordenados na forma  $x_1^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}$  tal que

$$f_1^{(k)} \leq f_2^{(k)} \leq \dots \leq f_{n+1}^{(k)} \quad (3.5)$$

onde  $f_i^{(k)} = f(x_i^{(k)})$ . Ao final desta  $k$ -ésima iteração, um novo *simplex* não degene-

rado  $\Delta_{k+1}$  (constituído por novos  $n + 1$  vértices) será obtido tal que  $\Delta_{k+1} \neq \Delta_k$ .

O método de Nelder-Mead é constituído por cinco passos: ordenação; reflexão; expansão; contração e encolhimento.

**- Ordenação**

Esse processo é o indicado na eq. 3.5.

**- Reflexão**

Com os pontos ordenados, calcula-se o ponto de reflexão  $x_r$  tal que, para  $\tilde{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ ,

$$x_r = \tilde{x} + \rho(\tilde{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho)\tilde{x} - \rho x_{n+1} \quad (3.6)$$

Se  $f_1 \leq f_r < f_n$ , aceita-se o ponto  $x_r$  no novo *simplex*  $\Delta_{k+1}$  e termina a iteração.

**- Expansão**

Se  $f_r < f_1$ , calcula-se o ponto de expansão

$$x_e = \tilde{x} + \chi(x_r - \tilde{x}) = \tilde{x} + \rho\chi(\tilde{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\chi)\tilde{x} - \rho\chi x_{n+1} \quad (3.7)$$

Se  $f_e < f_r$ , aceita-se o ponto  $x_e$  e termina a iteração; caso contrário, aceita-se o ponto  $x_r$  e termina a iteração.

**- Contração**

Se  $f_n \leq f_r < f_{n+1}$ , há uma contração "externa", na qual

$$x_c = \tilde{x} + \gamma(x_r - \tilde{x}) = \tilde{x} + \rho\gamma(\tilde{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\gamma)\tilde{x} - \rho\gamma x_{n+1} \quad (3.8)$$

Se  $f_c \leq f_r$ , aceita-se o ponto  $x_c$  e termina a iteração; caso contrário, realiza-se o encolhimento.

Porém, caso  $f_r \geq f_{n+1}$ , há uma contração "interna", na qual

$$x_{cc} = \tilde{x} - \gamma(\tilde{x} - x_{n+1}) = (1 - \gamma)\tilde{x} + \gamma x_{n+1} \quad (3.9)$$

Se  $f_{cc} < f_{n+1}$ , aceita-se o ponto  $x_{cc}$  e termina a iteração; caso contrário, realiza-se o encolhimento.

**- Encolhimento**

Consiste em se obter  $n$  novos pontos  $v_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1)$ ,  $i = 2, \dots, n + 1$ , tal que o novo *simplex*  $\Delta_{k+1}$  é constituído pelos pontos  $x_1, v_2, \dots, v_{n+1}$  e termina a iteração.

### 3.2.2 BFGS Quasi-Newton

Dos métodos que utilizam informações do gradiente da função objetivo, os mais usuais são os métodos de Quasi-Newton. Estes métodos constroem informações de curvatura em cada iteração para formular um problema de ordem quadrática da forma

$$\min_x \left( \frac{1}{2} x^T H x + c^T x + b \right) \quad (3.10)$$

onde a matriz Hessiana  $H$  é uma matriz simétrica definida positiva,  $c$  é um vetor constante, e  $b$  é uma constante. A solução ótima para este problema ocorre quando o vetor gradiente da expressão (tomada como função objetivo) se anula, isto é,

$$\nabla f(x^*) = Hx^* + c = 0 \quad (3.11)$$

Desta forma, a solução ótima é dada por

$$x^* = -H^{-1}c \quad (3.12)$$

Os métodos de Newton tradicionais (ao contrário dos métodos quasi-Newton) calculam  $H$  diretamente e procedem em uma direção de descida para localizar o mínimo após um número de iterações. Calcular  $H$  numericamente envolve uma grande quantidade de operações numéricas. Desta forma, os métodos Quasi-Newton evitam isso usando o comportamento observado de  $f(x)$  e  $\nabla f(x)$  para construir informações de curvatura para fazer uma aproximação de  $H$  usando uma técnica de atualização apropriada.

Diversas técnicas de atualização da matriz Hessiana foram desenvolvidas. No entanto, o algoritmo de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) foi utilizado por ser considerado um método eficaz para propósitos gerais. A atualização da matriz Hessiana pelo algoritmo BFGS é dada por

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k q_k^T}{q_k^T s_k} - \frac{H_k s_k s_k^T H_k^T}{s_k^T H_k s_k} \quad (3.13)$$

Onde,

$$\begin{aligned} s_k &= x_{k+1} - x_k \\ q_k &= \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \end{aligned} \quad (3.14)$$

A informação do gradiente é fornecida através de gradientes calculados analiticamente ou obtida por derivadas parciais utilizando um método de diferenciação numérica através de diferenças finitas.

Em cada iteração  $k$ , uma busca linear é realizada na direção  $d = -H_k^{-1} \cdot \nabla f(x_k)$ .

E, portanto, para um dado  $\alpha$  a ser determinado, o novo valor para a iteração  $x_{k+1}$  vale  $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$ .

### 3.2.3 Ponto Interior

A abordagem utilizada por este método para a resolução de problemas de minimização com restrições consiste em resolver uma sequência de problemas de minimização aproximados.

Para cada  $\mu > 0$ , o problema aproximado é dado por:

$$\min_{x,s} f_\mu(x, s) = \min_{x,s} f(x, s) - \mu \sum_i \ln(s_i) \quad \text{sujeito a } h(x) = 0 \text{ e } g(x) + s = 0 \quad (3.15)$$

Para o problema aproximado, há tantas variáveis  $s_i$  quantas são as restrições de desigualdade  $g$ . Os  $s_i$  são limitados a serem positivos para manter  $\ln(s_i)$  limitado. Como  $\mu$  decai para zero, o mínimo de  $f_\mu$  deve aproximar-se do mínimo de  $f$ . O termo logarítmico adicionado é chamado função de barreira. Este método é descrito em [53].

O problema aproximado 3.15 é uma sequência de problemas com restrições de igualdade. Para resolver o problema aproximado, o algoritmo usa um passo direto em  $(x, s)$ . Este passo tenta resolver as equações de KKT para o problema aproximado através de uma aproximação linear. Isso também é chamado de passo de Newton.

Desta forma, o passo direto  $(\Delta x, \Delta s)$  a ser dado em cada iteração é determinado ao se resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} H & 0 & J_h^T & J_g^T \\ 0 & S\Lambda & 0 & -S \\ J_h & 0 & I & 0 \\ J_g & -S & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s \\ -\Delta y \\ -\Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f - J_h^T y - J_g^T \lambda \\ S\lambda - \mu e \\ h \\ g + s \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Onde,

- $H$  denota o Hessiano do Lagrangeano de  $f$  -  $H = \nabla^2 f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla^2 g_i(x) + \sum_j \lambda_j \nabla^2 h_j(x)$ ;
- $J_g$  denota o Jacobiano da função  $g$ ;
- $J_h$  denota o Jacobiano da função  $h$ ;
- $S = \text{diag}(s)$ ;
- $\lambda$  denota o multiplicador de Lagrange associado à restrição  $g$ ;
- $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$ ;
- $y$  denota o multiplicador de Lagrange associado à restrição  $h$ ;

- $e$  denota o vetor de 1's de mesma dimensão de  $g$ ;

### 3.2.4 Programação Quadrática Sequencial – SQP

Na otimização com restrições, o objetivo geral é transformar o problema em um subproblema mais simples que pode logo ser resolvido e utilizado como a base de um processo iterativo. Um dos métodos empregados para este tipo de simplificação utiliza as equações de Karush-Khun-Tucker (KKT). As equações KKT são condições necessárias para otimalidade num problema de otimização com restrições. Se o problema de otimização for dito convexo, então as equações KKT são ambas necessárias e suficientes para uma solução global do problema.

A solução das equações de KKT é o ponto de partida de muitos algoritmos de programação não linear. Os métodos quasi-Newton garantem convergência super-linear, ao acumular informação de segunda ordem com relação às equações KKT, utilizando para isso um procedimento de atualização quasi-Newton. Esses métodos são comumente denominados de métodos de Programação Quadrática Sequencial (Sequential Quadratic Programming – SQP), porquanto um subproblema QP é resolvido em cada interação principal. O processo SQP é amplamente utilizado em resolução de problemas não lineares em diversas áreas, pois é um dos métodos que oferece as melhores eficiências e precisão.

Nas iterações principais do método SQP, uma aproximação do Hessiano  $H$  do Lagrangeano  $L$  é obtida utilizando um método de atualização quasi-Newton. Logo o Hessiano é usado para gerar um subproblema QP cuja solução serve para formar uma direção de busca num procedimento de procura unidimensional. Esta metodologia empregada no algoritmo foi proposta inicialmente por R. B. Wilson [54] em 1963 e interpretada por E. M. L. Beale [55] em 1967.

Desta forma, um problema do tipo

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && f(x) \\ & \text{subject to} && g_i(x) \leq 0 \\ & \text{and} && h_i(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

É resolvido da seguinte forma, para uma interação  $k$ :

#### - 1º Passo

Fixa-se um  $x^{(k)}$  constante e resolve-se o problema de programação quadrática associado para a direção  $d$ :

$$\begin{aligned}
& \underset{d}{\text{minimize}} && \frac{1}{2}d^T S d + \nabla f^T(x^{(k)})d \\
& \text{subject to} && \nabla g^T(x^{(k)})d + g(x) \leq 0 \\
& \text{and} && \nabla h^T(x^{(k)})d + h(x) = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

- 2º Passo

Atualizar  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d$  e retornar ao passo 1.

### 3.3 Análise de Incertezas

No presente trabalho, serão apresentadas duas classes de resultados referentes a duas estratégias para identificação de parâmetros ([56]): determinística e estocástica. Em resumo, a estratégia determinística não envolve modelos probabilísticos; já a estratégia estocástica considera algum modelo probabilístico (por exemplo, o parâmetro e/ou o ruído de medição são modelados como variáveis aleatórias). Considerando a estratégia determinística, pode-se construir um estimador pontual, que fornece como estimativa um único valor numérico para o parâmetro que se deseja estimar  $p^*$ . Neste caso, o nível de conhecimento a respeito de  $p$  é codificado em um único valor  $p^*$ . Ademais, deve-se destacar que esse estimador é uma variável aleatória, pois, para cada conjunto de dados experimentais, observa-se um valor diferente para  $p^*$ . Apesar de um estimador pontual ser uma variável aleatória, essa estratégia é chamada de identificação determinística porque não há modelos probabilísticos envolvidos. Por exemplo, dado um conjunto de dados experimentais  $\mathbf{x}_{exp}$  e um modelo preditivo  $\mathbf{x}(p)$ , que depende de um parâmetro  $p$ , pode-se, por exemplo, estimar o valor desse parâmetro minimizando a métrica  $p^* = \underset{p}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}_{exp} - \mathbf{x}_p\|^2$ .

Ou seja, busca-se o valor de  $p$  que faz com que a resposta do modelo  $\mathbf{x}(p)$  seja a mais próxima possível dos dados experimentais disponíveis  $\mathbf{x}_{exp}$ . Nesse caso, não há nenhuma hipótese relacionada a distribuições de probabilidade. Na estratégia estocástica, os parâmetros de interesse e o ruído de medição são modelados como variáveis aleatórias e a eles são atribuídos modelos probabilísticos. A partir de dados experimentais, os parâmetros dos modelos probabilísticos (média, variância,...) podem ser identificados a partir de estimadores pontuais. Nesse caso, a distribuição de probabilidade não se modifica, apenas os valores dos seus parâmetros que são estimados.

Neste ponto, é válido ressaltar que no presente trabalho, o processo de identificação é realizado utilizando-se o mesmo modelo computacional que foi utilizado para gerar os dados sintéticos necessários para a identificação. Isto é conhecido na literatura como um crime inverso e costuma gerar, na maioria das vezes, estimativas extremamente otimistas. Entretanto, decidiu-se por trabalhar desta forma visando



à simplicidade para o entendimento da metodologia estudada.

Por último, e não menos importante, destaca-se o uso de duas técnicas para a propagação de incertezas na estratégia estocástica de identificação: o Método de Monte-Carlo e a Expansão por Caos Polinomial. A primeira é apresentada logo a seguir na seção 3.3.1, enquanto a última será apresentada com maiores detalhes no capítulo 4.

### 3.3.1 Método de Monte Carlo

Em 1946, o matemático Stanislaw Ulam, durante um jogo de paciência, tentou calcular as probabilidades de sucesso de uma determinada jogada utilizando a tradicional análise combinatória. Após gastar bastante tempo fazendo cálculos, Ulam percebeu que uma alternativa mais prática seria simplesmente realizar inúmeras jogadas, por exemplo, cem ou mil, e contar quantas vezes cada resultado ocorria.

Ulam sabia que técnicas de amostragem estatística, como esta, não eram muito usadas por envolverem cálculos extremamente demorados, tediosos e sujeitos a erros. Entretanto, nessa época, ficara pronto o primeiro computador eletrônico, desenvolvido durante a segunda guerra mundial, o ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*). A versatilidade e rapidez do ENIAC, sem precedentes para a época, permitiu então a Ulam realizar diversas simulações de amostragem estatística.

Posteriormente, esse método ficou conhecido como Método de Monte Carlo, nome inspirado em um tio de Ulam, que jogava constantemente no famoso cassino de Monte Carlo, cujo aspecto aleatório de suas roletas também está intimamente ligado ao método.

O Método de Monte Carlo foi formalizado em 1949, por meio do artigo intitulado “Monte Carlo Method”, publicado por John Von Neumann e Stanislav Ulam [57].

Atualmente, o Método de Monte Carlo pode ser descrito como método de simulação estatística que utiliza sequências de números aleatórios para desenvolver simulações. Em outras palavras, é visto como método numérico universal para resolver problemas por meio de amostragem aleatória (aproximação da solução) [58].

O método torna desnecessário escrever as equações diferenciais que descrevem o comportamento de sistemas complexos. A única exigência é que o sistema físico ou matemático seja descrito (modelado) em termos de funções de densidade de distribuição de probabilidade (FDP). Uma vez conhecidas essas distribuições, a Simulação de Monte Carlo pode proceder fazendo as amostragens aleatórias a partir das mesmas. Este processo é repetido inúmeras vezes e o resultado desejado é obtido por meio de técnicas estatísticas (média, desvio padrão etc.) sobre um determinado número de realizações (amostra) que podem chegar a milhões.

### 3.4 Metodologia – Apresentação

O conjunto das equações de movimento referentes a um problema genérico de dinâmica linear de estruturas, escritas no domínio do tempo, pode ser resumido na seguinte equação:

$$[M]\{\ddot{x}\}(t) + [C]\{\dot{x}\}(t) + [K]\{x\}(t) = \{f\}(t) \quad (3.19)$$

Onde,  $\{x(t)\} \equiv$  vetor posição em função do tempo  $t$ ,  $\{x\} \in \mathbb{R}^n$ ;  $[M] \equiv$  matriz de massa do sistema;  $[C] \equiv$  matriz de amortecimento do sistema;  $[K] \equiv$  matriz de rigidez do sistema,  $[M], [C], [K] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Neste ponto, é válido destacar que a matriz de rigidez será a única “entidade matemática” representativa do modelo que conterà as informações dos parâmetros a serem determinados no processo de identificação de danos. A título de ilustração, será adiantado o “formato” dessa “entidade matemática” aplicado a um dos problemas-modelo, conforme Capítulo 5:

$$[K] = [K](k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \vdots \\ 0 & -k_3 & \ddots & -k_{n-1} \\ 0 & \dots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

De posse do sistema de equações diferenciais ordinárias que modelam o comportamento dinâmico do sistema, aplica-se a este a transformada de Fourier (eq. 3.2) com o intuito de se trabalhar no domínio da frequência. Desta forma, reescreve-se a equação 3.19 no domínio da frequência:

$$-\omega^2[M]\{X\}(\omega) + i\omega[C]\{X\}(\omega) + [K]\{X\}(\omega) = \{\hat{f}\}(\omega) \quad (3.21)$$

Onde,  $\{X(\omega)\} \equiv$  vetor posição escrito no domínio da frequência,  $\{X\} \in \mathbb{R}^n$ . A partir deste ponto do texto, adota-se a notação  $X(\omega)$  para se referenciar ao vetor posição escrito no domínio da frequência. Desta forma,

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])X(\omega) = \hat{f}(\omega) : \boxed{X(\omega) = (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])^{-1}\hat{f}(\omega)} \quad (3.22)$$

Neste ponto, é válido novamente ressaltar a dependência da matriz de rigidez  $[K]$  com os parâmetros de interesse, tal como ilustrado na equação 3.20. Portanto, reitera-se essa dependência no vetor de posição  $X(\omega)$ ; por simplificação, reescreve-se o conjunto de parâmetros  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  como um vetor  $\vec{k}$  e, assim, tem-se:

$$X(\omega, \vec{k}) = (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K](\vec{k}))^{-1} \hat{f}(\omega) \quad (3.23)$$

Uma vez determinada a função resposta do sistema no domínio da frequência, e considerando que essa mesma função irá gerar os resultados sintéticos experimentais (conforme explicado na seção 3.3), serão realizadas quatro análises que irão fundamentar a metodologia deste trabalho.

Antes de explicitar tais análises, é válido ressaltar que a resposta do sistema no domínio da frequência é um vetor  $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$ . A importância desta observação consiste no fato de que em sistemas físicos reais nem sempre é possível coletar todo e qualquer tipo de informação, seja pela complexidade do sistema (dificuldade de acesso, limitações físicas etc.), seja pela indisponibilidade de sensores e equipamentos de medição. Desta forma, uma vez que os sistemas mecânicos serão estudados sob uma abordagem discreta (apresentando  $n$  graus de liberdade - conforme Capítulo 5), apenas algumas componentes do vetor  $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$  serão utilizadas nas análises.

Portanto, no seguinte detalhamento das análises realizadas, será adotado o vetor  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega)$  como sendo aquele que contém as componentes do vetor  $X(\omega)$  observadas. Desta forma,  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega) \in \mathbb{R}^m$ , tal que  $m \equiv$  número de coordenadas observadas,  $m < n$ .

### 3.4.1 Análise determinística

Esta análise é apresentada apenas para ilustrar a eficiência e robustez de cada método de otimização apresentado na seção 3.2, bem como para comparar o tempo computacional exigido em cada um dos métodos. Nesta análise não será considerada nenhum tipo de incerteza.

O processo de identificação de danos se resume em se obter um conjunto de parâmetros  $\vec{k}_* = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ , oriundos de um problema de otimização que envolve a comparação de um modelo  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega, \vec{k})$  com resultados experimentais  $\tilde{\mathbf{X}}_{exp}(\omega)$ , e comparar tal conjunto  $\vec{k}_*$  com um conjunto de parâmetros ditos nominais de uma estrutura saudável  $\vec{k}_{NOM}$ .

Desta forma, a métrica utilizada no problema de otimização está relacionada ao *método dos mínimos quadrados*, ou seja, dado um conjunto de dados experimentais  $\tilde{\mathbf{X}}_{exp}(\omega)$  de uma estrutura danificada, almeja-se obter um conjunto de parâmetros  $\vec{k}_*$  tal que a diferença quadrática entre os vetores  $\tilde{\mathbf{X}}_{exp}(\omega)$  e  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega, \vec{k})$  seja mínima. Ou seja,

$$\vec{k}_* = \underset{\vec{k}}{\text{minimize}} \quad \|\tilde{\mathbf{X}}_{exp}(\omega) - \tilde{\mathbf{X}}(\omega, \vec{k})\|^2 \quad (3.24)$$

Neste ponto, definir-se-á um conceito para dano que também será utilizado nas análises subsequentes. Este será calculado em função de cada um dos parâmetros

do vetor  $\vec{k}$  da seguinte forma:

$$D_i = 1 - \frac{(\vec{k}_*)_i}{(\vec{k}_{NOM})_i} \quad (3.25)$$

### 3.4.2 Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na força

Esta análise poderia ser considerada idêntica à anterior (seção 3.4.1) não fosse pela consideração de que o valor estimado para o forçamento é incerto. Desta forma, o termo  $\hat{f}(\omega)$  relacionado à força será considerado uma variável aleatória, no qual a incerteza será modelada como um termo aditivo que segue uma distribuição normal  $\mathcal{N}(0, \sigma_F^2)$ .

Ao retornarmos à equação 3.23, perceberemos que, por  $\hat{f}(\omega)$  ser modelado como uma variável aleatória, consequentemente o vetor  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega, \vec{k})$  também será uma variável aleatória e, portanto, o vetor  $\vec{k}_*$  será uma variável aleatória.

Através das técnicas de propagação de incertezas citadas na seção 3.3, estatísticas como médias e desvios-padrão serão determinadas para o vetor de parâmetros  $\vec{k}_*$  e os danos  $D_i$ .

O objetivo desta análise consistiu em avaliar: a sensibilidade dos métodos de otimização à variações de natureza incerta no modelo e comparar as técnicas de propagação de incertezas aplicadas nesse estudo.

### 3.4.3 Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na resposta

Outra análise realizada consistiu em considerar diretamente o vetor  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega, \vec{k})$  como sendo uma variável aleatória. Os objetivos desta análise são os mesmos apresentados no tópico anterior.

Desta forma, será considerado que a incerteza da variável aleatória  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega, \vec{k})$  é um vetor aditivo cujas componentes são independentes, não correlacionadas e seguem uma distribuição normal  $\mathcal{N}(0, \sigma_{exp}^2)$ .

### 3.4.4 Análise estocástica - Incerteza nos parâmetros

Esta análise pode ser considerada a mais importante do presente trabalho. Ela consiste em se considerar um modelo estocástico para as variáveis a serem determinadas no processo de otimização relacionado à identificação de danos.

Desta forma, consideremos o vetor de parâmetros  $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ . Neste ponto, ele será modelado como um vetor aleatório  $\vec{K} \sim \Psi(\vec{\mu}, [\Sigma])$ , ou seja, um vetor

aleatório que segue uma distribuição genérica  $\Psi$  (o tipo de distribuição utilizada no presente trabalho será melhor detalhada no capítulo 5) de média  $\vec{\mu}$  e matriz de covariância  $[\Sigma]$ .

A ideia central desta análise é determinar quais parâmetros  $\vec{\mu}^*$  e  $[\Sigma]^*$  melhor ajustam o modelo estocástico para a variável aleatória  $\vec{K}$  no sentido de otimização do processo de identificação do dano.

Para esse tipo de análise, será considerado apenas um dado de resultado experimental  $\tilde{\mathbf{X}}_{exp}(\omega)$  - este dado foi gerado considerando o mesmo tipo de incerteza proposto na seção 3.4.3.

Desta forma, denotando por  $\vec{\Theta}$  o par ordenado  $(\vec{\mu}, \Sigma)$ , o problema de otimização associado à identificação de dano é escrito como:

$$\vec{\Theta}^* = \underset{\vec{\Theta}}{\text{minimize}} \quad \alpha E\{\|\tilde{\mathbf{X}}_{exp}(\omega) - \tilde{\mathbf{X}}(\omega, \vec{\Theta})\|^2\} + (1 - \alpha) Desv_{\sigma}\{\|\tilde{\mathbf{X}}_{exp}(\omega) - \tilde{\mathbf{X}}(\omega, \vec{\Theta})\|^2\} \quad (3.26)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro para ponderamento entre as informações a respeito da média e do desvio padrão  $Desv_{\sigma}$ .

Ou seja, para cada iteração  $i$  do processo de otimização, serão realizadas simulações de cunho estocástico com o vetor aleatório  $\vec{K} \sim \Psi(\Omega^{(i)})$  e, assim, diversas amostras da diferença quadrática média  $\|\tilde{\mathbf{X}}_{exp}(\omega) - \tilde{\mathbf{X}}(\omega, \vec{\Theta})\|^2$  serão coletadas. Com estas amostras, calcula-se o valor de sua esperança  $E\{\cdot\}^{(i)}$  e seu desvio padrão  $Desv_{\sigma}\{\cdot\}^{(i)}$ ; assim, prossegue-se à próxima iteração visando minimizar a ponderação entre os valores de  $E\{\cdot\}^{(i)}$  e  $Desv_{\sigma}\{\cdot\}^{(i)}$  calculados.

Ao final da análise, serão estimados os melhores valores (no sentido de otimização) para os parâmetros  $\vec{\mu}$  e  $[\Sigma]$  do vetor aleatório  $\vec{K} \sim \Psi(\vec{\mu}, [\Sigma])$  relacionados ao processo de identificação de danos. De posse desses resultados, serão estimados os danos referentes às análises estruturais.

# Capítulo 4

## Expansão por Caos Polinomial

Conforme citado anteriormente, a quantificação de incertezas está se tornando um campo cada vez mais importante nas áreas de ciência aplicada. A modelagem preditiva baseada em cenário determinístico está sendo gradualmente substituída por modelagens estocásticas. Essa suave transição, no entanto, tem o custo de lidar com quantidades muito maiores de informações (ao se usar simulações de Monte Carlo, por exemplo), geralmente resultando na necessidade de executar repetidas e dispendiosas avaliações de modelos computacionais.

A metamodelagem (tradução livre para o termo *metamodelling*, amplamente encontrado na literatura, juntamente com o termo *surrogate modelling*) tenta compensar o aumento dos custos de modelagem estocástica substituindo os onerosos modelos computacionais por modelos substitutos de baixo custo computacional. A Expansão por Caos Polinomial (PCE) é uma poderosa técnica de metamodelagem que visa fornecer uma aproximação funcional de um modelo computacional através de sua representação espectral em uma base construída adequadamente de funções polinomiais.

O desenvolvimento do método de PCE se assemelha à análise de elementos finitos determinísticos, uma vez que se utiliza de noções de projeção, ortogonalidade e convergência fraca [30], [59], tendo como objetivo a caracterização das respostas dos sistemas cujas equações governantes envolvem coeficientes estocásticos [60]. Este método se enquadra, portanto, na linha de abordagem dos métodos de expansão estocástica.

### 4.1 Teoria

Consideremos um modelo computacional  $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ , onde  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$  é um vetor de entrada M-dimensional constituído por variáveis aleatórias com uma dada função de densidade de probabilidade (PDF) conjunta  $f_{\mathbf{X}}$  definida sobre um espaço de probabilidade padrão  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e  $\mathcal{M} : \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^M \mapsto \mathbb{R}$  é o modelo

computacional de interesse, onde  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$  é o suporte da distribuição do vetor  $\mathbf{X}$ .

Assumindo, sem perda de generalidade, que as variáveis aleatórias do vetor  $\mathbf{X}$  são independentes, ou seja, a PDF conjunta é escrita como o produto das PDFs marginais:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_M}(x_M) \quad (4.1)$$

E assumindo que a variável  $Y$  representa uma grandeza escalar e que se trata de uma variável aleatória de segunda ordem, ou seja,  $\mathbb{E}[Y^2] < +\infty$ , tem-se que esse modelo  $\mathcal{M}$  pertence a um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de funções quadrático-integráveis com relação ao produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

Neste ponto, denotaremos por  $\mathcal{H}_i$  um sub-espaço de funções quadrático-integráveis com relação à medida de probabilidade marginal  $\mathbb{P}_{X_i}(dx_i) = f_{X_i}(x_i)dx_i$ . Este sub-espaço também será um espaço de Hilbert e, portanto, consta com o produto interno abaixo

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_i} = \int_{\mathcal{D}_{X_i}} u(x_i)v(x_i)f_{X_i}(x_i)dx_i \quad (4.3)$$

onde  $\mathcal{D}_{X_i}$  é o suporte da distribuição de  $X_i$ .

Neste ponto, denotaremos por  $\{\phi_k^i, k \in \mathbb{N}\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{H}_i$  tal que

$$\langle \phi_k^i, \phi_l^i \rangle_{\mathcal{H}_i} = \delta_{kl} \quad (4.4)$$

onde  $\delta_{kl}$  é o delta de Kronecker, ou seja,  $\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = l \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases}$ .

*Soize e Ghanem* [61] provaram que o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é isomórfico ao produto tensorial  $\otimes_{i=1}^M \mathcal{H}_i$  dos sub-espaços  $\mathcal{H}_i$ . Desta forma, constrói-se uma base para o espaço  $\mathcal{H}$  através do produto tensorial dos vetores da base  $\{\phi_k^i, k \in \mathbb{N}\}$ ,  $i = 1, \dots, M$ .

Por consequência, a variável aleatória  $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$  poderá ser decomposta conforme a equação abaixo

$$Y = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{N}} \dots \sum_{\alpha_M \in \mathbb{N}} y_{\alpha_1 \dots \alpha_M} \phi_{\alpha_1}^1(X_1) \dots \phi_{\alpha_M}^M(X_M) \quad (4.5)$$

onde  $y_{\alpha_1 \dots \alpha_M}$  são coeficientes a serem determinados. Por uma questão de simplificação de notação, utiliza-se a seguinte expressão como representação da decomposição espectral da variável aleatória  $Y$ , adotando  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ :

$$Y = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} y_{\alpha} \phi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (4.6)$$

Em que  $\phi_{\alpha}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^M \phi_{\alpha_i}^i(X_i)$  são as funções da base de expansão e  $y_{\alpha}$  são os coeficientes a serem determinados.

Conforme explorado no Capítulo 2, a forma original do PCE [31] é de uma expansão espectral baseada nos polinômios de Hermite ortogonais em termos de variáveis aleatórias gaussianas. Desta forma, observando a equação 4.6, constatamos que a formulação original proposta por Wiener consiste na equivalência  $\phi_k^i \equiv$  polinômios de Hermite, com  $k \in \mathbb{N}, i = 1 \dots M$ .

O método generalizado de Expansão por Caos Polinomial (gPCE) consiste em se utilizar diferentes classes de bases polinomiais ortonormais em função da natureza das variáveis aleatórias estudadas. A correspondência entre tais classes de polinômios e a natureza das variáveis aleatórias pode ser observada na tabela 4.1.

Ressalta-se nesse ponto a utilização da seguinte notação para se representar a expansão gPCE:

$$Y = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} y_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (4.7)$$

Tabela 4.1: Lista de bases polinomiais clássicas em problemas de PCE

Tipo de Variável	Distribuição	Polinômio Ortogonal	Base Polinomial $\psi_k(x)$
Uniforme	$\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)/2$	Legendre $P_k(x)$	$P_k(x)/\sqrt{\frac{1}{2k+1}}$
Gaussiana	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	Hermite $H_{e_k}(x)$	$H_{e_k}(x)/\sqrt{k!}$
Gamma	$x^a e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$	Laguerre $L_k^a(x)$	$L_k^a(x)/\sqrt{\frac{\Gamma(k+a+1)}{k!}}$
Beta	$\mathbf{1}_{]-1,1[}(x) \frac{(1-x)^a(1+x)^b}{B(a)B(b)}$	Jacobi $J_k^{a,b}(x)$	$J_k^{a,b}(x)/\mathcal{J}_{a,b,k}$

onde  $\mathcal{J}_{a,b,k} = \left( \frac{2^{(a+b+1)}}{2k+a+b+1} \frac{\Gamma(k+a+1)\Gamma(k+b+1)}{\Gamma(k+a+b+1)\Gamma(k+1)} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

#### 4.1.1 Truncamento

Uma vez que se torna impossível praticar uma expansão por série infinita, utiliza-se um esquema de truncamento ao se aplicar a metodologia PCE. Desta forma, chega-se na seguinte expansão:



$$Y = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} y_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}) + \epsilon \quad (4.8)$$

Onde  $\mathcal{A}$  é o conjunto finito de multi-índices  $\alpha$  e  $\epsilon$  é o erro de truncamento.

O caso mais simples e genérico de se utilizar um critério de truncamento consiste em considerar somente os polinômios com um grau máximo total  $p$ , ou seja

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^{M,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : \|\alpha\|_1 = \sum_{i=1}^M \alpha_i \leq p\} \quad (4.9)$$

Esse critério padrão de truncamento se torna ineficiente em problemas de alta dimensão, de modo que *Blatman* [62] desenvolveu dois esquemas que permitem reduzir significativamente a cardinalidade  $D = \text{card}(\mathcal{A}^{M,p}) = \frac{(M+p)!}{(M!p!)}$  do conjunto finito de multi-índices. Uma vez que nesse presente trabalho só será utilizado o primeiro esquema, apresenta-se o mesmo somente.

Pelo primeiro esquema, assume-se que as interações entre os graus mais baixos do conjunto de polinômios são mais importantes do que as interações entre os graus mais elevados. Esse esquema de truncamento é denominado de truncamento hiperbólico e consiste em

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_q^{M,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : \|\alpha\|_q = \sum_{i=1}^M (\alpha_i^q)^{\frac{1}{q}} \leq p\} \quad (4.10)$$

onde  $0 < q \leq 1$  é o parâmetro de truncamento hiperbólico. Quando considera-se  $q = 1$ , retoma-se o critério padrão de truncamento. Um exemplo das associações de graus de polinômios para um problema bidimensional pode ser observado na figura 4.1.

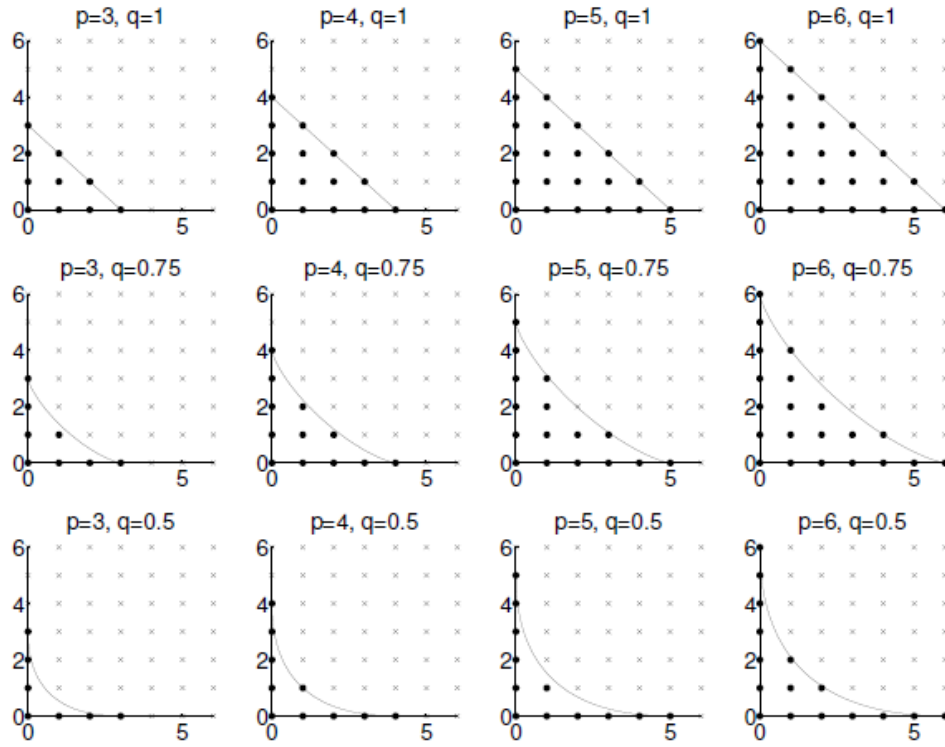


Figura 4.1: Conjuntos de associação de graus de polinômio para diferentes valores de  $p$  e  $q$

#### 4.1.2 Determinação dos coeficientes

Conforme indicado no início deste capítulo, *o desenvolvimento do método de PCE se assemelha à análise de elementos finitos determinísticos, uma vez que se utiliza de noções de projeção, ortogonalidade e convergência fraca*. Esse tipo de formulação é denominada de método de Galerkin. O método de Galerkin consiste em converter o sistema original de equações a um sistema de formulação fraca, resultando num sistema linear de equações que permite determinar os coeficientes da resposta do sistema no espaço aleatório. O método de Galerkin é considerado, portanto, um método intrusivo.

Métodos não intrusivos foram implementados como alternativas ao método de Galerkin, nos quais os coeficientes da expansão são estimados usando um conjunto de dados amostrais dos parâmetros de entrada do modelo de análise e suas respostas associadas. O caráter não intrusivo desses métodos consiste justamente no fato de as equações que governam o modelo não serem modificadas nem adaptadas. Na literatura, os métodos intrusivos comumente utilizados incluem métodos de colocação estocástica, métodos de regressão e métodos de projeção.

Os métodos de colocação estocástica são baseados nos métodos de interpolação por Lagrange. Desta forma, o modelo computacional é aproximado por polinômios de Lagrange que satisfazem a solução nos pontos de colocação. Os coeficientes da

expansão PCE são os valores de saída calculados nesses pontos de colocação. Este método deve ser utilizado com uma boa estruturação desses pontos de colocação, sendo geralmente utilizada uma malha esparsa [63]. A convergência desses métodos depende enormemente da seleção dos pontos de colocação.

Os métodos de projeção seguem diretamente a definição dada na Equação 4.7, juntamente com a propriedade de ortonormalidade da base polinomial. Desta forma, os coeficientes da expansão são estimados através do produto interno (projeção) entre a expansão e sua respectiva função polinomial associada, ou seja

$$y_\alpha = \mathbb{E}[\psi_\alpha(X) \cdot \mathcal{M}(X)] = \int_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}(x) \psi_\alpha f_X(x) dx \quad (4.11)$$

Os métodos de regressão consistem em estimar o conjunto de coeficientes  $\hat{\mathbf{y}}_\alpha = \{y_\alpha \in \mathcal{A}\}$  que minimiza o erro quadrático médio:

$$\mathbb{E}[\epsilon^2] \stackrel{def}{=} \mathbb{E} \left[ \left( Y - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{X}) \right)^2 \right] \quad (4.12)$$

Ou seja,

$$\hat{\mathbf{y}}_\alpha = \arg \min_{\mathbf{y}_\alpha \in \mathbb{R}^D} \mathbb{E} \left[ \left( \mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{X}) \right)^2 \right] \quad (4.13)$$

Na prática, os coeficientes são determinados através da minimização do erro empírico quadrático médio sobre um conjunto de amostra de tamanho  $N$ , ou seja

$$\hat{\mathbf{y}}_\alpha = \arg \min_{\mathbf{y}_\alpha \in \mathbb{R}^D} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \left( \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2 \right] \quad (4.14)$$

Onde  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$  é obtido por amostragem do vetor aleatório  $\mathbf{X}$ .

Avaliando as funções da base polinomial para os valores em  $\mathcal{X}$ , obtém-se a seguinte matriz

$$\mathbf{A} \stackrel{def}{=} \{A_{ij} = \psi_j(\mathbf{x}^{(i)}), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, D\} \quad (4.15)$$

Através dessa matriz, reescreve-se o problema de regressão linear por mínimos quadrados através da seguinte equação:

$$\hat{\mathbf{y}}_\alpha = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathcal{Y} \quad (4.16)$$

onde  $\mathcal{Y} = \{y^{(i)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}), i = 1, \dots, N\}$ .

### 4.1.3 Estimação de erros

Neste ponto do presente trabalho, é válido destacar que, para uma dada amostra  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$  e seu correspondente conjunto de resposta  $\mathcal{Y} = \{y^{(i)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}), i = 1, \dots, N\}$ , tem-se associado um conjunto de parâmetros estimados  $\hat{\mathbf{y}}_{\alpha}$  tal que se é possível construir uma representação do modelo estudado dada por

$$\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} \hat{y}_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (4.17)$$

Por se tratar de uma aproximação para um modelo, inerentemente à aproximação estará associado um erro. O erro quadrático esperado para a aproximação, também denominado de erro generalizado, é dado por

$$E_{gen} = \mathbb{E} \left[ \left( \mathcal{M}(\mathbf{X}) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{X}) \right)^2 \right] \quad (4.18)$$

Na prática, esse erro é calculado de maneira empírica, de forma que

$$E_{gen_{emp}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2 \quad (4.19)$$

Desta forma, define-se o erro empírico relativo

$$\epsilon_{emp} = \frac{E_{gen_{emp}}}{\text{Var}[\mathcal{Y}]} \quad (4.20)$$

Em que

$$\text{Var}[\mathcal{Y}] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y^{(i)} - \bar{\mathcal{Y}})^2, \quad \bar{\mathcal{Y}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^{(i)} \quad (4.21)$$

O erro generalizado  $E_{gen}$  é subestimado pelo erro empírico  $E_{gen_{emp}}$  [62]. Isso se deve ao chamado fenômeno de sobreajuste, no qual o erro empírico diminui sistematicamente com o grau crescente da base polinomial, enquanto o erro generalizado pode, de fato, aumentar. É de extrema importância usar um indicador de erro que seja menos propenso a sobreajuste. Portanto, se faz necessária a utilização do erro de validação cruzada *leave-one-out* (LOO).

A validação cruzada consiste em particionar o conjunto amostral  $\mathcal{X}$  em dois subconjuntos complementares, treinar um modelo usando um subconjunto e validando sua previsão no outro. Neste contexto, o termo LOO significa que o conjunto de validação compreende apenas uma única amostra. Definindo um ponto  $\mathbf{x}^{(i)}$  separado de  $\mathcal{X}$ , pode-se construir um modelo PCE  $\mathcal{M}^{PC \setminus i}(\cdot)$  dos pontos restantes  $\mathcal{X} \setminus \mathbf{x}^{(i)} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(i-1)}, \mathbf{x}^{(i+1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}\}$ . O erro residual previsto no ponto  $\mathbf{x}^{(i)}$  será:

$$\Delta^{(i)} \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}^{PC \setminus i}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (4.22)$$

O erro empírico LOO é definido, então, como sendo a média empírica dos erros residuais

$$E_{LOO} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta^{(i)2} \quad (4.23)$$

À primeira vista, o cálculo do erro LOO parece ser computacionalmente custoso, uma vez que requer treinar e validar os  $N$  modelos PCE. No entanto, devido à fórmula de regressão linear do PCE, pode-se calcular o erro LOO por meio de derivações algébricas de um único modelo PCE  $\mathcal{M}^{PC}(\cdot)$  construído com todo o conjunto amostral  $\mathcal{X}$  da seguinte forma [62]:

$$E_{LOO} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}^{PC}(\mathbf{x}^{(i)})}{1 - h_i} \right)^2 \quad (4.24)$$

Em que  $h_i$  é o  $i^{esimo}$  termo diagonal da matriz  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ . Desta forma, o erro relativo LOO é dado por

$$\epsilon_{LOO} = \frac{E_{LOO}}{\text{Var}[\mathcal{Y}]} \quad (4.25)$$

## 4.2 Método *Orthogonal Matching Pursuit*

Na prática, nem todas as funções polinomiais especificadas na base de truncamento  $\mathcal{A}^{M,p}$  são importantes e contribuem significativamente para a resposta de saída. Além disso, os métodos de regressão mais usuais requerem um grande número de avaliações do modelo, tipicamente duas a três vezes a cardinalidade  $D$  da base polinomial. No caso dos problemas de alta dimensão em que se deseja utilizar polinômios de graus elevados, o número de avaliações do modelo se torna impraticável. Portanto, é de suma importância usar uma técnica que possa detectar os polinômios relevantes mesmo com um número limitado de simulações.

A técnica utilizada no presente trabalho é o método *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP). Este método foi proposto por *Pati et al.* [64] como um refinamento do algoritmo *Matching Pursuit* proposto por *Mallat e Zhang* [65]. Este método pode ser identificado numa classe de métodos de PCE esparsas. Esta classe consiste em: a partir de uma base polinomial candidata, apenas um subconjunto dos polinômios mais relevantes é selecionado, enquanto os coeficientes de todos os outros são definidos como 0.

O método OMP trabalha recuperando iterativamente os elementos da base po-

linomial que estão mais correlacionados com o erro residual da aproximação atual e adicionando-os ao conjunto de polinômios que serão utilizados propriamente para calcular os coeficientes da expansão. Tal conjunto será indicado por  $\Psi_A$ .

Dado um erro residual  $R_n$  para uma base polinomial com  $n$  elementos e dado o erro residual  $R_{n+1}$  para uma base polinomial com  $n + 1$  elementos (as bases se diferem por um polinômio  $\psi_{\alpha_{n+1}}$ ), ao projetar  $R_n$  no polinômio  $\psi_{\alpha_{n+1}}$ , obtém-se a seguinte relação:

$$R_n = \langle R_n, \psi_{\alpha_{n+1}} \rangle \psi_{\alpha_{n+1}} + R_{n+1} \quad (4.26)$$

Desta relação, constata-se que, por construção, o erro residual  $R_{n+1}$  é ortogonal ao polinômio  $\psi_{\alpha_{n+1}}$ . Ao projetarmos toda a Equação 4.26 em  $R_n$ , obtemos

$$\|R_n\|^2 = |\langle R_n, \psi_{\alpha_{n+1}} \rangle|^2 + \|R_{n+1}\|^2 \quad (4.27)$$

Desta forma, observa-se que a minimização do termo  $R_{n+1}$  é equivalente à maximização do termo  $\langle R_n, \psi_{\alpha_{n+1}} \rangle$ . Portanto, cada iteração do método OMP consiste em obter um polinômio  $\alpha_{n+1}$  tal que se maximize  $\langle R_n, \psi_{\alpha_n} \rangle$ , ou seja, minimize o erro  $R_{n+1}$ . Matematicamente,

$$\psi_{\alpha_{n+1}} = \arg \max_{\alpha \in A} \langle R_n, \psi_{\alpha_n} \rangle \quad (4.28)$$

A cada iteração, após o elemento de base  $\psi_{\alpha_{n+1}}$  ter sido calculado e adicionado ao conjunto  $\Psi_A$ , todos os coeficientes polinomiais correspondentes  $y_\alpha$  são atualizados através do cálculo de regressão (ver Equação 4.16).

### 4.3 *UQLab*

A presente seção visa apresentar o ambiente *UQLab*, no qual constam os métodos de PCE utilizados no presente trabalho.

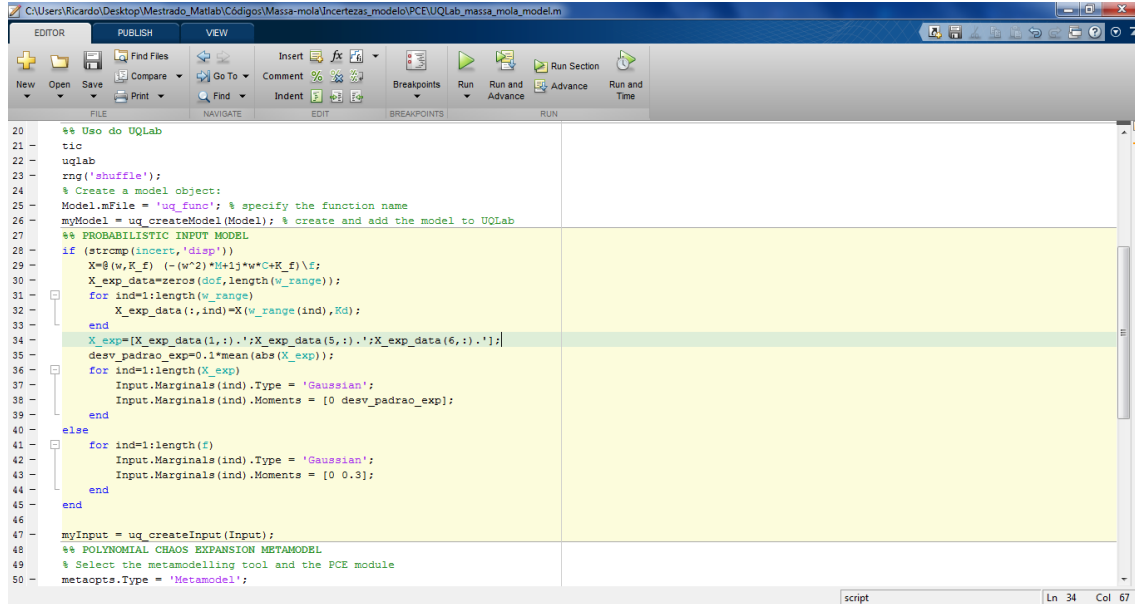
O *UQLab* é uma estrutura de software baseada em *Matlab* projetada para trazer técnicas e algoritmos de quantificação de incertezas para um grande público.

O *UQLab* não é simplesmente uma enésima caixa de ferramentas para quantificação de incertezas, mas um framework: além de oferecer um extenso arsenal de tipos de análises e algoritmos integrados, ele também fornece uma nova e poderosa maneira de desenvolver e implementar suas próprias ideias. Ele é composto por módulos científicos de código aberto que estão conectados ao *UQLabCore* para realizar a propagação de incertezas por meio de amostragem de Monte Carlo, análise de sensibilidade, análise de confiabilidade (cálculo de probabilidades de eventos raros), construir modelos substitutos (expansões por caos polinomial, métodos de *Kriging*),

técnicas Bayesianas para problemas inversos etc.

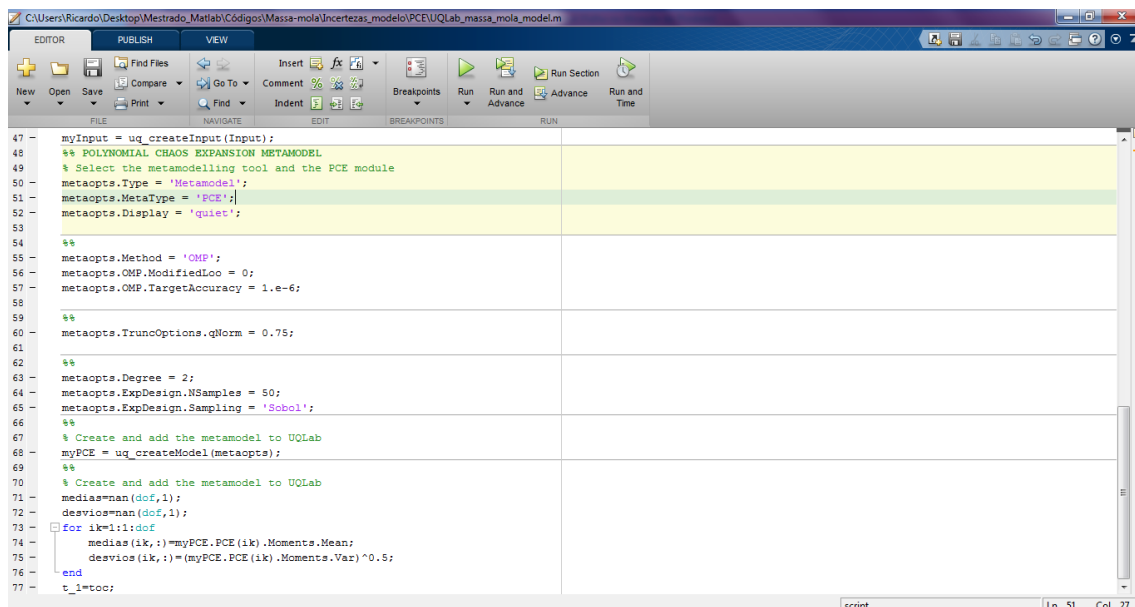
O *UQLab* foi desenvolvido sob a supervisão do professor Bruno Sudret e do doutor Stefano Marelli.

Abaixo é possível identificar janelas de utilização do *UQLab* integrado ao *Matlab*. Tais janelas pertencem às análises do presente trabalho, conforme pode ser verificado na seção 5.5.



```
20 %% Uso do UQLab
21 tic
22 uqlab
23 rng('shuffle');
24 % Create a model object:
25 Model.mFile = 'uq_func'; % specify the function name
26 myModel = uq_createModel(Model); % create and add the model to UQLab
27 %% PROBABILISTIC INPUT MODEL
28 if (strcmp(invert,'disp'))
29     X=@(w,K_f) (-w^2)*M+ij*w*C+K_f\;f;
30     X_exp_data=zeros(dof,length(w_range));
31     for ind=1:length(w_range)
32         X_exp_data(:,ind)=X(w_range(ind),Kd);
33     end
34     X_exp=[X_exp_data(1,:),X_exp_data(5,:),X_exp_data(6,:).'];
35     desv_padrao_exp=0.1*mean(abs(X_exp));
36     for ind=1:length(X_exp)
37         Input.Marginals(ind).Type = 'Gaussian';
38         Input.Marginals(ind).Moments = [0 desv_padrao_exp];
39     end
40 else
41     for ind=1:length(f)
42         Input.Marginals(ind).Type = 'Gaussian';
43         Input.Marginals(ind).Moments = [0 0.3];
44     end
45 end
46 myInput = uq_createInput(Input);
47 %% POLYNOMIAL CHAOS EXPANSION METAMODEL
48 % Select the metamodeling tool and the PCE module
49 metaopts.Type = 'Metamodel';
```

Figura 4.2: Janela de uso da estrutura *UQLab*



```
47 myInput = uq_createInput(Input);
48 %% POLYNOMIAL CHAOS EXPANSION METAMODEL
49 % Select the metamodeling tool and the PCE module
50 metaopts.Type = 'Metamodel';
51 metaopts.MetaType = 'PCE';
52 metaopts.Display = 'quiet';
53
54 %%
55 metaopts.Method = 'OMP';
56 metaopts.OMP.ModifiedLoe = 0;
57 metaopts.OMP.TargetAccuracy = 1.e-6;
58
59 %%
60 metaopts.TruncOptions.qNorm = 0.75;
61
62 %%
63 metaopts.Degree = 2;
64 metaopts.ExpDesign.NSamples = 50;
65 metaopts.ExpDesign.Sampling = 'Sobol';
66 %%
67 % Create and add the metamodel to UQLab
68 myPCE = uq_createModel(metaopts);
69 %%
70 % Create and add the metamodel to UQLab
71 medias=nan(dof,1);
72 desvios=nan(dof,1);
73 for ik=1:dof
74     medias(ik,:)=myPCE.PCE(ik).Moments.Mean;
75     desvios(ik,:)=(myPCE.PCE(ik).Moments.Var)^0.5;
76 end
77 t_1=tic;
```

Figura 4.3: Janela de uso da estrutura *UQLab*

# Capítulo 5

## Estudos de caso - exemplos práticos

No presente trabalho foram utilizadas duas configurações de sistema mecânico, a saber: um conjunto massa-mola-amortecedor e uma estrutura treliçada. A seguir serão apresentadas algumas considerações sobre esses sistemas.

### 5.1 Massa-mola-amortecedor

Tal sistema mecânico consiste num conjunto de elementos de massa interligados em série por molas elásticas e elementos dissipadores. Uma ilustração para  $n$  massas interligadas (e conseqüentemente  $n$  graus de liberdade – g.d.l.) pode ser visualizada na imagem abaixo:

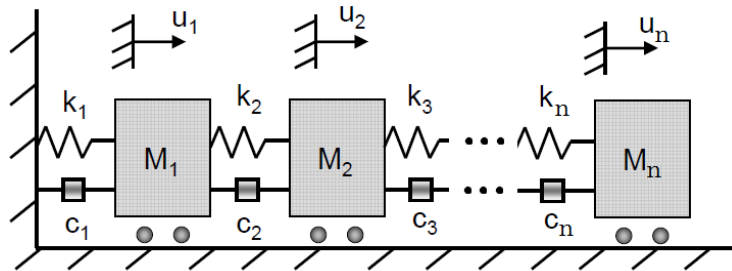


Figura 5.1: Sistema mecânico estudado - Sistema massa-mola-amortecedor

Para o presente estudo, considerou-se um sistema com seis graus de liberdade. Além disso, considerou-se a aplicação de uma força instantânea (modelada como um *Delta de Dirac*) no segundo e no quarto elementos de massa de magnitudes  $5N$  e  $8N$  respectivamente. Desta forma, a representação do sistema é ilustrada a seguir:



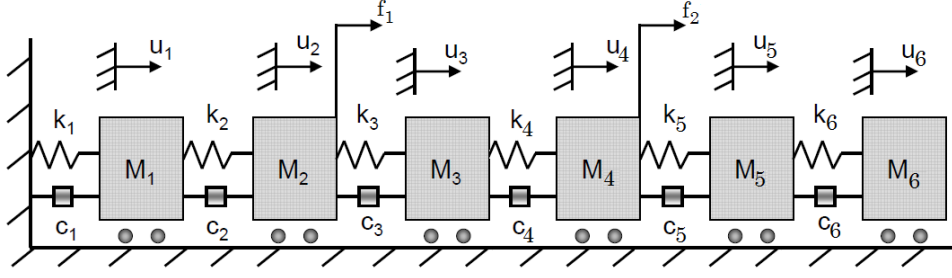


Figura 5.2: Sistema massa-mola-amortecedor com 6 g.d.l.

Além disso, é válido destacar que alguns cenários foram concebidos para as análises citadas nas seções 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3. Desta forma, denotando por  $k_i^S \equiv$  a rigidez da mola  $i$  na configuração saudável e  $k_i^D \equiv$  a rigidez da mola  $i$  na configuração danificada, apresenta-se os seguintes cenários:

- Análise determinística e Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na força

Somente um cenário de identificação de danos foi considerado nestas análises, a saber: o dano simulado no sistema mecânico foi de uma redução de 25% na rigidez da mola 1 ( $k_1^D = 0.75k_1^S$ ) e de 65% na rigidez da mola 5 ( $k_5^D = 0.35k_5^S$ ).

As componentes do vetor  $X(\omega)$  que irão compor o vetor  $\tilde{X}(\omega)$  (conforme cap. 3) são as componentes  $X_1, X_5$  e  $X_6$ .

- Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na resposta

Tabela 5.1: Cenários de identificação de danos - Massa-mola-amortecedor

Cenários	Danos						Descrição
	$k1$	$k2$	$k3$	$k4$	$k5$	$k6$	
1	25%	0%	0%	0%	65%	0%	$\tilde{X}(\omega) = [X_1(\omega)X_5(\omega)X_6(\omega)]^T$
2	0%	45%	30%	0%	0%	0%	
3	15%	0%	15%	0%	40%	0%	
4	25%	0%	0%	0%	65%	0%	$\tilde{X}(\omega) = [X_2(\omega)X_4(\omega)X_5(\omega)]^T$
5	0%	45%	30%	0%	0%	0%	
6	15%	0%	15%	0%	40%	0%	

Ademais, para este problema foram considerados os seguintes valores nominais para o conjunto de parâmetros:  $m_1 = 20kg$ ;  $m_2 = 12kg$ ;  $m_3 = 24kg$ ;  $m_4 = 18kg$ ;  $m_5 = 20kg$ ;  $m_6 = 15kg$ ;  $c_1 = 25\frac{Ns}{m}$ ;  $c_2 = 24\frac{Ns}{m}$ ;  $c_3 = 23\frac{Ns}{m}$ ;  $c_4 = 26\frac{Ns}{m}$ ;  $c_5 = 20\frac{Ns}{m}$ ;  $c_6 = 21\frac{Ns}{m}$ ;  $k_1 = 40\frac{N}{m}$ ;  $k_2 = 28\frac{N}{m}$ ;  $k_3 = 13\frac{N}{m}$ ;  $k_4 = 31\frac{N}{m}$ ;  $k_5 = 23\frac{N}{m}$ ;  $k_6 = 24\frac{N}{m}$ .

## 5.2 Estrutura treliçada

Em engenharia, treliça é uma estrutura constituída por elementos os quais estão submetidos a apenas duas forças (em suas extremidades), de modo que a união desses elementos se comporta como um único objeto [66].

Para o presente estudo de caso, considerou-se um pórtico como sistema mecânico. Tal estrutura pode ser entendida como sendo uma estrutura treliçada plana (bidi-mensional), conforme ilustrado na figura abaixo:

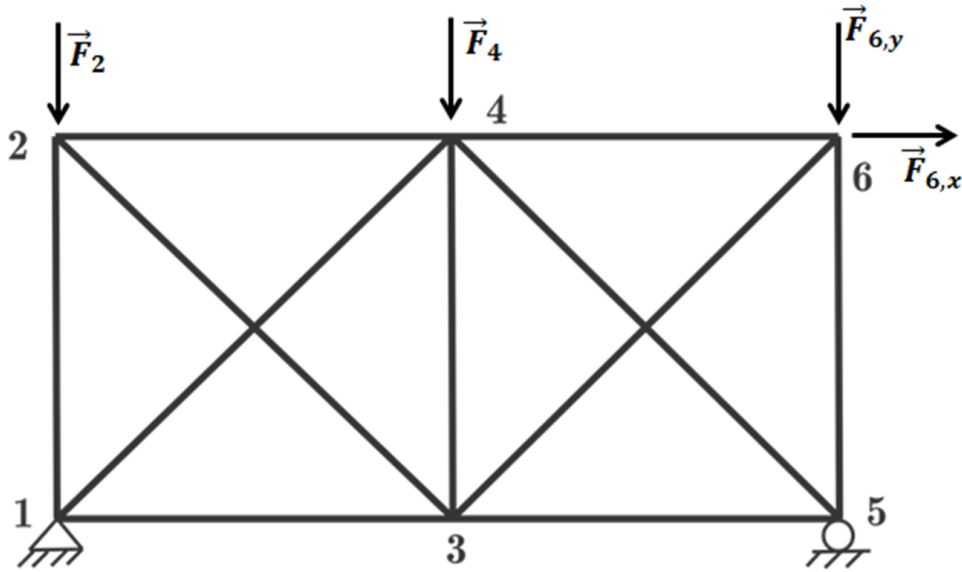


Figura 5.3: Pórtico - Estrutura treliçada

Como pode ser observado na figura acima, o pórtico é composto por 11 elementos de barra, de maneira que há 6 nós de interconexão entre os elementos. Além disso, observa-se que a estrutura está submetida a um conjunto de 4 forças, denotadas na figura por  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_4$ ,  $\vec{F}_{6,x}$  e  $\vec{F}_{6,y}$ .

De posse dessas informações, observa-se que a estrutura apresenta 12 graus de liberdade, indicados na figura abaixo juntamente com os elementos de barra considerados:

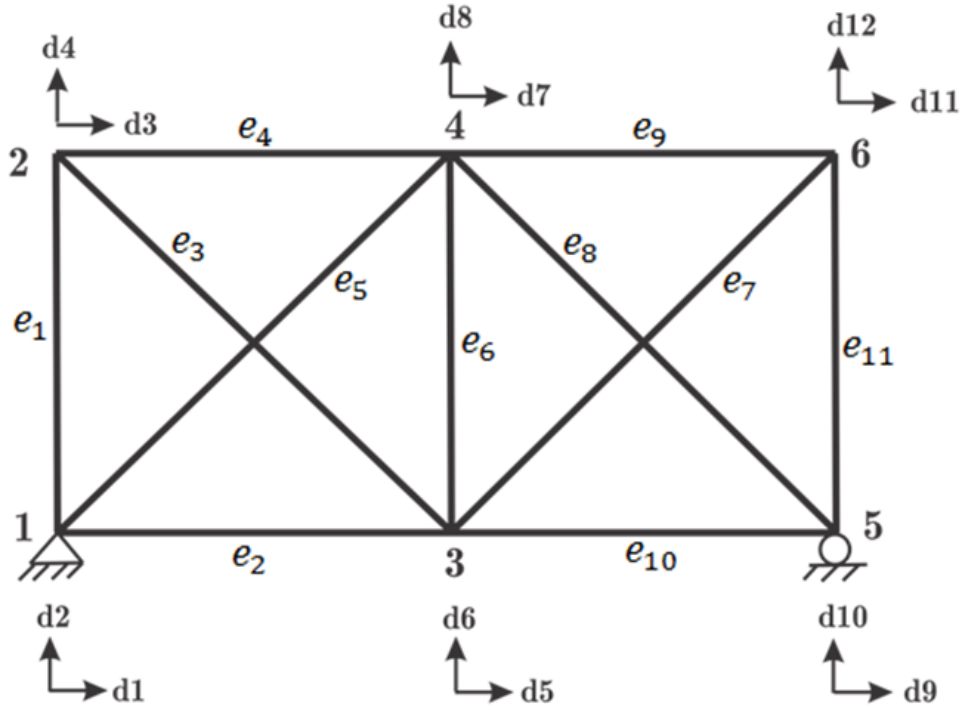


Figura 5.4: Pórtico - graus de liberdade

Considerando as condições de apoio apresentadas na figura 5.4, percebe-se que a estrutura está impedida de se mover nos graus de liberdade indicados por  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_{10}$ . Desta forma, define-se a seguinte condição de contorno para o problema estrutural:  $d_1 = d_2 = d_{10} = 0$ .

Neste ponto, é válido ressaltar que o vetor deslocamento será um vetor  $X(\omega) \in \mathbb{R}^{12}$ , tal que cada componente do vetor  $X_i(\omega)$  será o deslocamento  $d_i$  referente aos graus de liberdade citados anteriormente. Desta forma, o vetor deslocamento será dado por:

$$X(\omega) = (0, 0, X_3(\omega), X_4(\omega), X_5(\omega), X_6(\omega), X_7(\omega), X_8(\omega), X_9(\omega), 0, X_{11}(\omega), X_{12}(\omega)) \quad (5.1)$$

Conforme citado anteriormente, os elementos que constituem o pórtico foram modelados como elementos e barra. Desta forma, conforme o método dos elementos finitos (ou através de uma análise matricial de estruturas), identifica-se a seguinte formulação para a matriz elementar de rigidez  $[k^e]$ :

$$[k^e] = \frac{E^e A^e}{L^e} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \sin^2(\theta) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & -\sin^2(\theta) \\ -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & -\sin^2(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Onde  $E^e \equiv$  módulo de elasticidade do elemento  $e$ ;  $A^e \equiv$  área da seção transversal do elemento  $e$ ;  $L^e \equiv$  comprimento do elemento  $e$ . Além disso,  $\theta$  pode ser observado na figura abaixo:

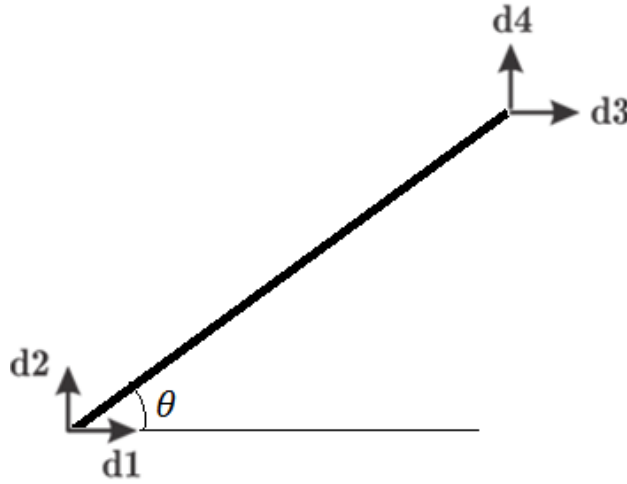


Figura 5.5: Elemento de barra

Ainda com relação ao elemento de barra, é válido destacar que a matriz elementar de massa  $[m^e]$  foi modelada sob uma ótica "consistente", ou seja:

$$[m^e] = \frac{\rho^e A^e L^e}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2\cos^2(\theta) & 2\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ 2\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & 2\sin^2(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \sin^2(\theta) \\ \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & 2\cos^2(\theta) & 2\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\cos(\theta) \cdot \sin(\theta) & 2\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Onde  $\rho^e \equiv$  massa específica do elemento  $e$ .

A partir deste ponto, denotar-se-á por  $k_e^S = \frac{E^e A^e}{L^e} \equiv$  a rigidez equivalente do elemento  $e$  na configuração saudável e por  $k_e^D \equiv$  a rigidez equivalente do elemento  $e$  na configuração danificada.

De maneira análoga ao que foi apresentado na seção anterior, destaca-se que alguns cenários foram concebidos para as análises citadas nas seções 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3. Desta forma, apresenta-se os seguintes cenários:

- Análise determinística e Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na força

Somente um cenário de identificação de danos foi considerado nestas análises, a saber: o dano simulado no sistema mecânico foi de uma redução de 55% na rigidez do elemento 3 ( $k_3^D = 0.45k_3^S$ ), de 70% na rigidez do elemento 5 ( $k_5^D = 0.30k_5^S$ ) e de 85% na rigidez do elemento 7 ( $k_7^D = 0.15k_7^S$ ).

As componentes do vetor  $X(\omega)$  que irão compor o vetor  $\tilde{X}(\omega)$  (conforme cap. 3) são as componentes  $X_3, X_5, X_9$  e  $X_{12}$ .

- Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na resposta

Tabela 5.2: Cenários de identificação de danos - Estrutura treliçada

Cenários	Danos											Descrição
	k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11	
1	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%	$\tilde{X}(\omega) = [X_3(\omega)X_5(\omega)X_9(\omega)X_{12}(\omega)]^T$
2	0%	60%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%	
3	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%	
4	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%	$\tilde{X}(\omega) = [X_4(\omega)X_6(\omega)X_8(\omega)X_{11}(\omega)]^T$
5	0%	60%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%	
6	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%	

Ademais, para este problema foi considerado que todas as barras são idênticas na condição saudável e que apresentam os seguintes valores nominais para o conjunto de parâmetros:  $\rho^e = 2.7 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ ;  $A^e = 3 \cdot 10^{-4} m^2$ ;  $L^e = 3m$ ;  $E^e = 70 \cdot 10^9 Pa$ . *Obs.: os elementos  $e_3, e_5, e_7$  e  $e_8$ , por estarem na diagonal das conexões do pórtico (ver figura 5.4), apresentam  $L^e = 3\sqrt{2}m$ .*

### 5.3 Parâmetros de incerteza

Para as análises envolvendo incertezas, foram utilizados os seguintes valores (conforme seções 3.4.2, 3.4.3):  $\sigma_F = 0.3$ ;  $\sigma_{exp} = 10\%$  do valor médio das componentes do vetor  $\tilde{X}_{exp}(\omega)$ .

Para as análises estocásticas com incertezas no parâmetro, assumiu-se que as componentes do vetor aleatório  $\vec{K}$  são independentes e não correlacionadas. Desta forma, foram utilizadas dois tipos de distribuição de probabilidade como distribuições marginais em função da característica do problema (os parâmetros  $k_i$ s devem ser positivos): distribuição Gama e distribuição Normal Truncada.

A função densidade de probabilidade da distribuição Gama pode ser escrita em função dos parâmetros  $\beta$  e  $\theta$  através da seguinte equação (onde  $\beta = \frac{\mu_G^2}{Var_G}$  e  $\theta = \frac{Var_G}{\mu_G}$ ):

$$f(x) = x^{\beta-1} \cdot e^{\frac{-x}{\theta}} \cdot \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)\theta^\beta} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.4)$$

Já a função densidade de probabilidade da distribuição Normal Truncada pode ser escrita em função de sua média  $\mu_{NT}$  e variância  $\sigma_{NT}^2$  através da seguinte equação:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{NT}^2}} \exp(-\frac{(x-\mu_{NT})^2}{2\sigma_{NT}^2})}{1 - G(0)} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.5)$$

Onde  $G(y) = \int_{-\infty}^y (\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{NT}^2}} \exp(-\frac{(x-\mu_{NT})^2}{2\sigma_{NT}^2})) dy$ .

Por último, destaca-se que foram analisados três cenários referentes à análise abordada na seção 3.4.4. Tais cenários levam em consideração a variação do parâmetro  $\alpha$  (ver equação 3.26) e são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 5.3: Cenários para o parâmetro  $\alpha$

Cenário	$\alpha$
1	0.5
2	0.25
3	0.75

Nestas análises, para o sistema massa-mola-amortecedor, o dano simulado no sistema mecânico foi de uma redução de 25% na rigidez da mola 1 ( $k_1^D = 0.75k_1^S$ ) e de 65% na rigidez da mola 5 ( $k_5^D = 0.35k_5^S$ ), sendo o vetor  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega)$  dado por  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega) = [X_1(\omega)X_5(\omega)X_6(\omega)]^T$ ; já para o sistema treliçado, o dano simulado no sistema mecânico foi de uma redução de 55% na rigidez do elemento 3 ( $k_3^D = 0.45k_3^S$ ), de 70% na rigidez do elemento 5 ( $k_5^D = 0.30k_5^S$ ) e de 85% na rigidez do elemento 7 ( $k_7^D = 0.15k_7^S$ ), sendo o vetor  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega)$  dado por  $\tilde{\mathbf{X}}(\omega) = [X_3(\omega)X_5(\omega)X_9(\omega)X_{12}(\omega)]^T$ .

## 5.4 Técnicas de otimização

Conforme citado na seção 3.2, o ambiente computacional utilizado para realizar todas as simulações numéricas apresentadas no presente trabalho foi o *Matlab*. Desta forma, o autor apresenta todos os aspectos computacionais relevantes à compreensão da metodologia empregada nas análises:

- Ambiente computacional - *Matlab R2015a*;

- Sistema operacional - *Windows 7 Home Premium 64 bits*;
- Processador - *AMD A10-4600M APU with Radeon(tm) HD Graphics 2.30 GHz*
- Memória RAM - 8GB

No que concerne propriamente às técnicas de otimização utilizadas nas análises, utilizou-se os seguintes critérios para todas as técnicas:

- N° máximo de iterações - 1000;
- Tolerância para a função objetivo -  $1 \cdot 10^{-6}$ .

Uma vez que os métodos de Ponto Interior e de Programação Quadrática Sequencial – SQP utilizam restrições em sua formulação, é válido destacar que, para as análises determinística (seção 3.4.1) e de sensibilidade estocástica (seções 3.4.2 e 3.4.3), as seguintes restrições de inequação foram utilizadas (resumidas em uma única equação):

$$\vec{k}_{inferior} \leq \vec{k}_* \leq \vec{k}_{superior} \quad (5.6)$$

Onde  $\vec{k}_* \equiv$  vetor de rigidezes a ser determinado no problema de otimização (ver seção 3.4);  $\vec{k}_{inferior} \equiv$  limite inferior para o vetor  $\vec{k}_*$ , definido como sendo  $\vec{k}_{inferior} = 0.5 \cdot \vec{k}^D$ , ou seja, o vetor limite inferior corresponde à metade do vetor que contém as rigidezes na configuração danificada;  $\vec{k}_{superior} \equiv$  limite superior para o vetor  $\vec{k}_*$ , definido como sendo  $\vec{k}_{superior} = 1.1 \cdot \vec{k}^S$ , ou seja, o vetor limite superior corresponde à 110% do vetor que contém as rigidezes na configuração saudável.

Já para as análises estocásticas, em que consideramos os parâmetros de rigidez como sendo incertos no modelo (seção 3.4.4), utilizou-se apenas uma restrição para o parâmetro  $\vec{\Theta}$  a ser determinado:

$$\vec{\Theta} \geq \vec{0} \quad (5.7)$$

Onde  $\vec{\Theta}$ , embora definido como sendo o par ordenado  $(\vec{\mu}, \Sigma)$ , será entendido, a partir de então, como sendo um par ordenado  $(\vec{\mu}, \vec{\sigma})$ , onde  $\vec{\mu}$  continua sendo o vetor média do vetor aleatório  $\vec{K}$  e, como as componentes deste vetor aleatório são consideradas independentes e não correlacionadas, a matriz de covariância  $[\Sigma]$  será diagonal, sendo esta diagonal composta pelas variâncias das distribuições marginais das componentes do vetor aleatório  $\vec{K}$ , ou seja:

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r^2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Desta forma, o vetor denotado por  $\vec{\sigma}$  na representação do par ordenado  $\vec{\Theta} = (\vec{\mu}, \vec{\sigma})$  será composto pelos desvios padrões  $\sigma_r$  das componentes do vetor aleatório  $\vec{K}$ , ou seja,  $\vec{\sigma} = [\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r]^T$ .

Portanto, as restrições representadas na equação 5.7 se configuram em:  $\vec{\mu} \geq \vec{0}$  e  $\vec{\sigma} \geq \vec{0}$ .

Por último, é válido destacar que todas as outras configurações das funções de otimização implementadas no ambiente *Matlab* foram mantidas na sua configuração *default* (para maiores informações, ver [67]).

## 5.5 Técnicas de propagação de incertezas

Conforme citado na seção 3.3, foram utilizadas duas técnicas de propagação de incertezas: Método de Monte Carlo e Expansão por Caos Polinomial.

O Método de Monte Carlo foi implementado de modo que fossem geradas amostras das variáveis aleatórias dentro de um *loop* condicional, onde as condições estabelecidas foram:

- $\max(|\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i|) \geq 1 \cdot 10^{-3}$ ;
- $n_{it} \leq N_{it}^{max}$

Onde,  $\vec{v}_i \equiv$  denota um vetor aleatório de acordo com o tipo de análise estudada, em que os subscritos  $i$  e  $i + 1$  indicam a qual iteração pertence o vetor calculado;  $n_{it} \equiv$  denota o número de iterações para um dado *loop*;  $N_{it}^{max} \equiv$  denota um número máximo de iterações para se garantir a convergência estocástica do método. Para todas as análises em questão, foi realizado um estudo prévio de convergência, de modo que assumiu-se  $N_{it}^{max} = 450$  para todas as simulações.

Já com relação à Expansão por Caos Polinomial, foi utilizado o algoritmo de *Orthogonal Matching Pursuit* (vide seção 4.2).

De acordo com as definições abordadas no Capítulo 4, apresenta-se abaixo os parâmetros adotados nas simulações de Expansão por Caos Polinomial:

- $\epsilon_{LOO}^* = 1 \cdot 10^{-6}$ ;
- Truncamento Hiperbólico  $q = 0.75$ ;



- Grau máximo dos polinômios calculados  $p = 2$ ;
- Número de amostras calculadas  $N = 50$ ;
- Técnica de amostragem: *Sobol*.

# Capítulo 6

## Resultados

Neste capítulo serão apresentados um resumo dos resultados para as análises descritas na seção 3.4. Compilou-se em diversas tabelas no Apêndice A todos os resultados de identificação de danos para todas as análises realizadas no presente trabalho. Desta forma, neste capítulo serão apresentados apenas alguns resultados considerados relevantes para o entendimento das análises.

Nos resultados apresentados adiante, utilizou-se a seguinte nomenclatura para os métodos de otimização:

- Método 1  $\longleftrightarrow$  Nelder-Mead Simplex;
- Método 2  $\longleftrightarrow$  BFGS Quasi-Newton;
- Método 3  $\longleftrightarrow$  Ponto Interior;
- Método 4  $\longleftrightarrow$  Programação Quadrática Sequencial – SQP;

### 6.1 Análise determinística

#### 6.1.1 Massa-mola-amortecedor

Apresenta-se abaixo os resultados encontrados para o sistema massa-mola-amortecedor, conforme a metodologia apresentada na seção 3.4.1.

Tabela 6.1: Resultados - Identificação de danos

Dano	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
Elemento 1	24,78%	25%	25%	25%
Elemento 2	5,96%	0%	0%	0%
Elemento 3	0,95%	0%	0%	0%
Elemento 4	-15,84%	0%	0%	0%
Elemento 5	64,31%	65%	65%	65%
Elemento 6	-1,23%	0%	0%	0%

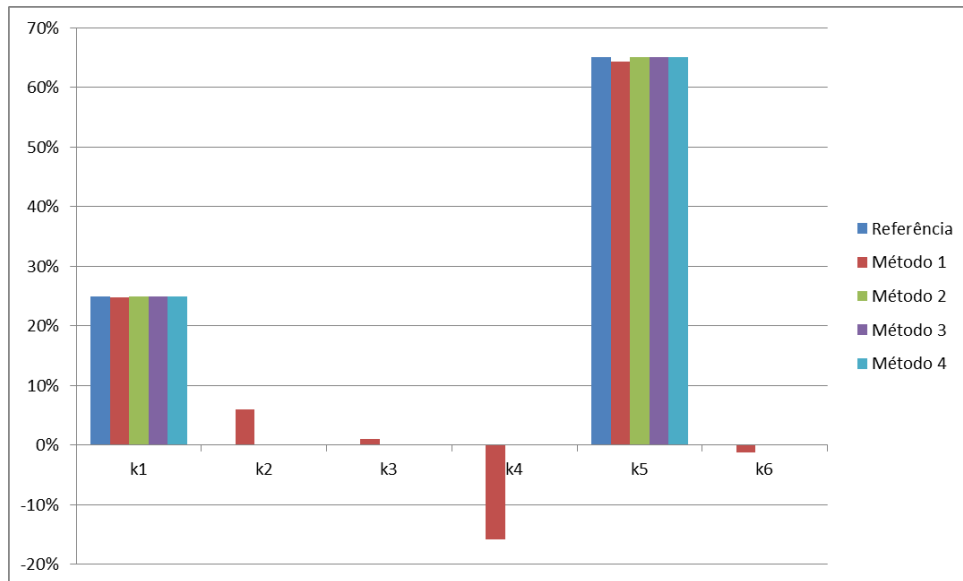


Figura 6.1: Identificação de danos

Os tempos computacionais gastos em cada método estão apresentados a seguir:

Tabela 6.2: Tempo computacional (em segundos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
14.57	6.60	4.14	5.81

Constata-se, neste ponto, que o método Nelder-Mead Simplex não só apresenta os piores resultados de identificação de danos (vide o dano estimado de  $-15,84\%$  para o Elemento 4), como também é o mais oneroso em termos de tempo computacional, sendo, em média, 2.7 vezes superior aos outros tempos computacionais.

Apenas por um caráter ilustrativo, apresenta-se abaixo os gráficos para a componente  $X_1(\omega)$  do vetor resposta em frequência.

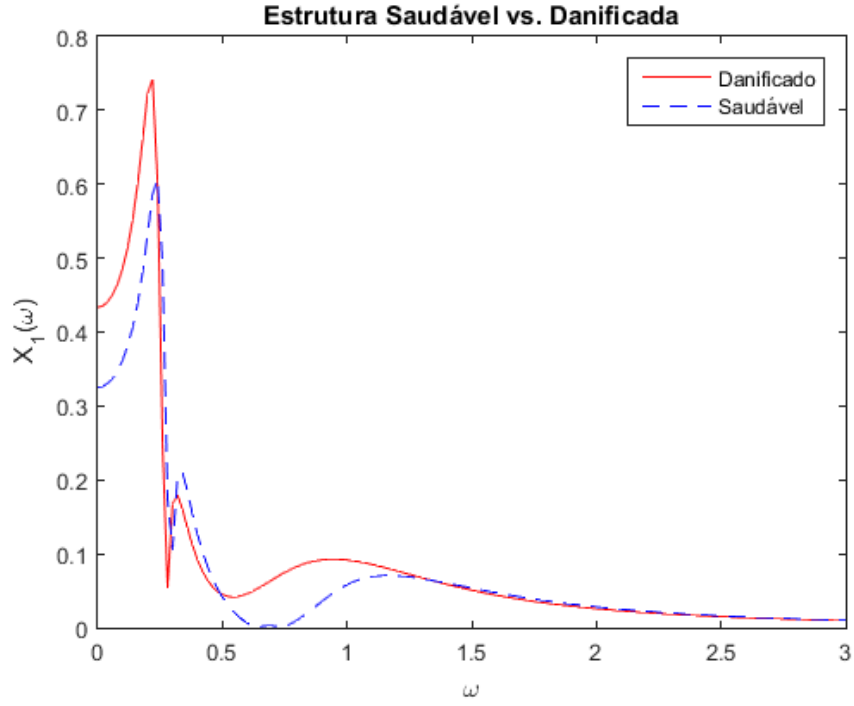


Figura 6.2: Resposta da componente  $X_1(\omega)$  nas configurações saudável e danificada

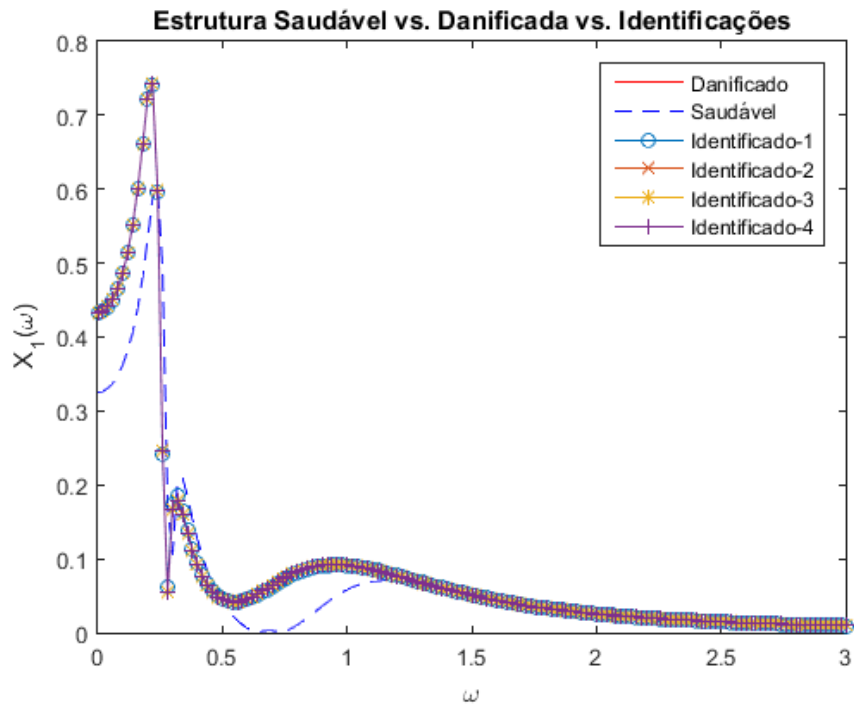


Figura 6.3: Identificação de danos para a componente  $X_1(\omega)$

### 6.1.2 Estrutura treliçada

Já para a estrutura treliçada, foram encontrados os seguintes resultados conforme a metodologia apresentada na seção 3.4.1.

Tabela 6.3: Resultados - Identificação de danos

Dano	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
Elemento 1	-1,02%	0%	0%	0%
Elemento 2	5,97%	0%	0%	0%
Elemento 3	54,9%	55%	55%	55%
Elemento 4	3,97%	0%	0%	0%
Elemento 5	69,83%	70%	70%	70%
Elemento 6	25,01%	0%	0%	0%
Elemento 7	82%	85%	85%	85%
Elemento 8	10,00%	0%	0%	0%
Elemento 9	-1,98%	0%	0%	0%
Elemento 10	-2,65%	0%	0%	0%
Elemento 11	3,34%	0%	0%	0%

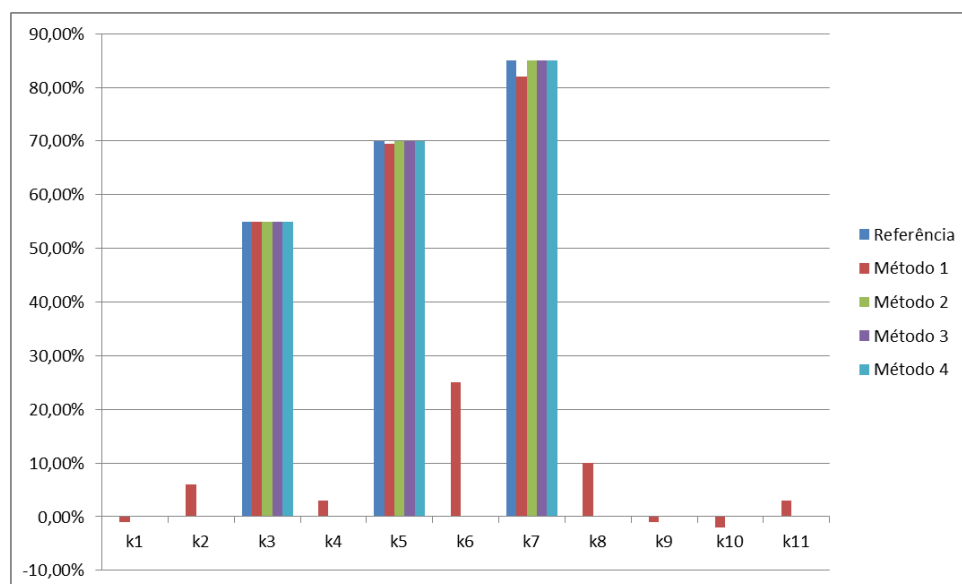


Figura 6.4: Identificação de danos

Os tempos computacionais gastos em cada método estão apresentados a seguir:

Tabela 6.4: Tempo computacional (em segundos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
15.64	7.80	5.34	6.89

De maneira análoga aos resultados apresentados para o sistema massa-mola-amortecedor, constata-se que o método Nelder-Mead Simplex não só apresenta os

piores resultados de identificação de danos (vide o dano estimado de 25,01% para o Elemento 6), como também é o mais oneroso em termos de tempo computacional, sendo, em média, 2.4 vezes superior aos outros tempos computacionais.

Apenas por um caráter ilustrativo, apresenta-se abaixo os gráficos para as componentes  $X_3(\omega)$  e  $X_7(\omega)$  do vetor resposta em frequência.

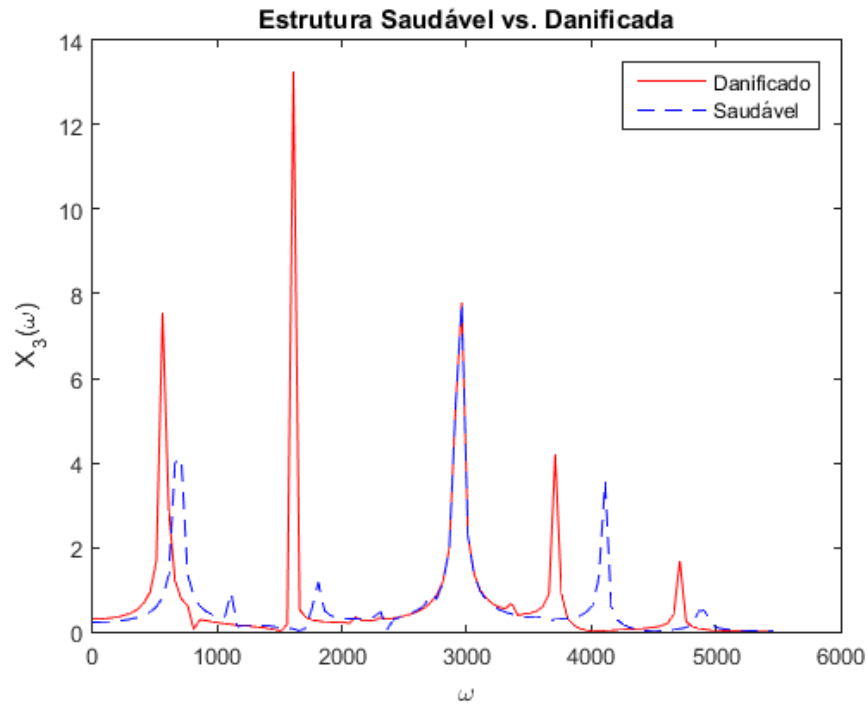


Figura 6.5: Resposta da componente  $X_3(\omega)$  nas configurações saudável e danificada

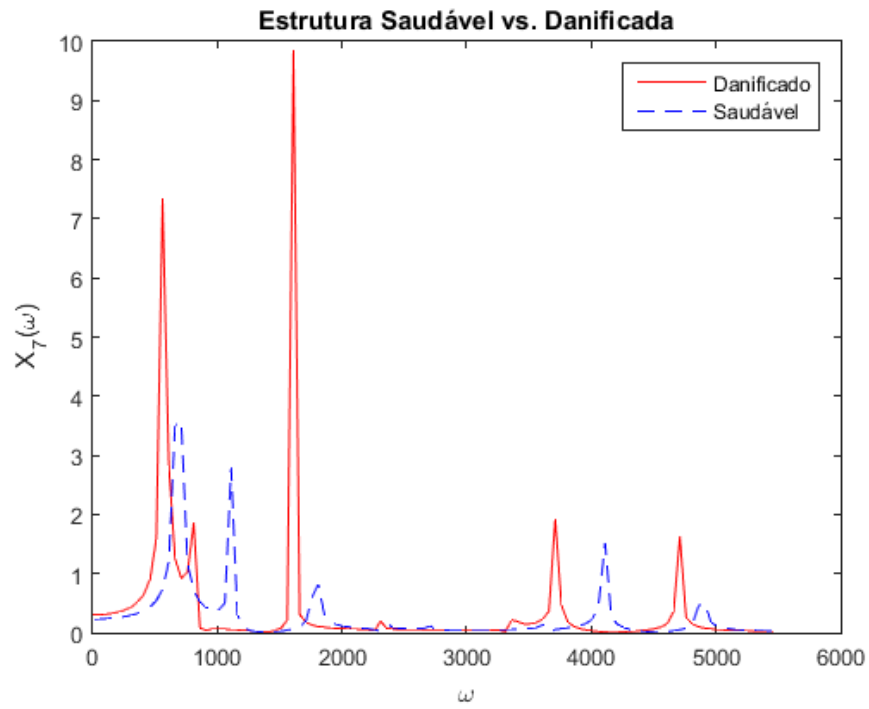


Figura 6.6: Resposta da componente  $X_7(\omega)$  nas configurações saudável e danificada

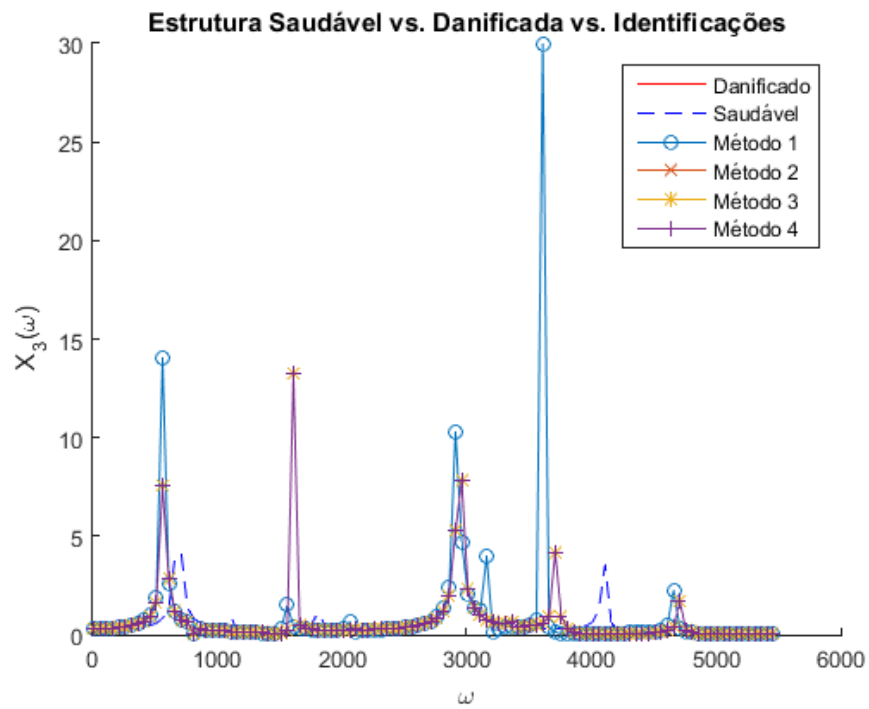


Figura 6.7: Identificação de danos para a componente  $X_3(\omega)$

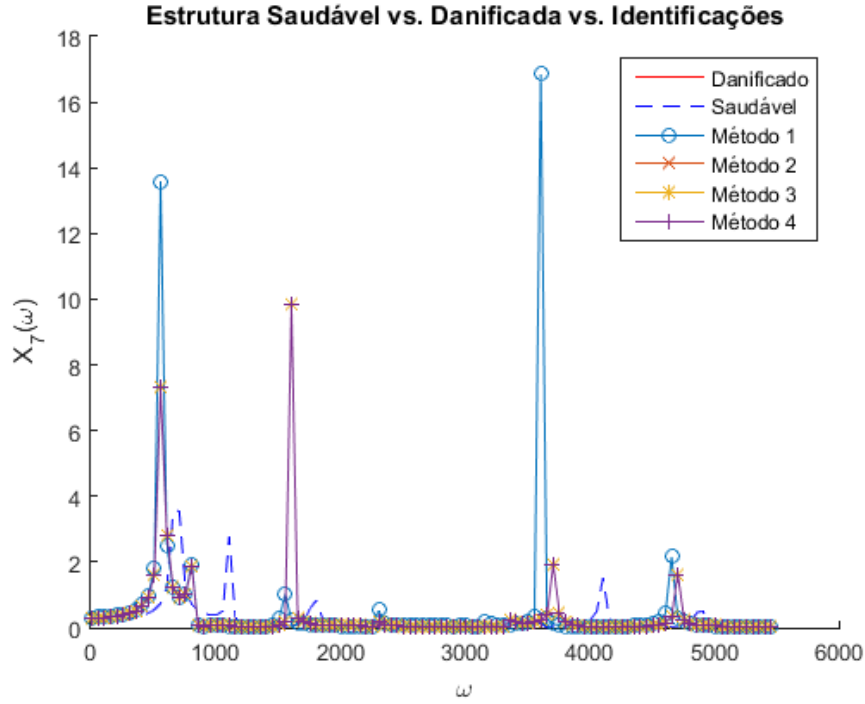


Figura 6.8: Identificação de danos para a componente  $X_7(\omega)$

## 6.2 Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na força

### 6.2.1 Massa-mola-amortecedor

Conforme a metodologia apresentada na seção 3.4.2, apresenta-se abaixo os resultados encontrados para o Caso 1 (vide Tabela 5.1) do sistema massa-mola-amortecedor, tanto com a propagação de incertezas via Monte Carlo, quanto via PCE.



- Identificação de danos com Monte Carlo

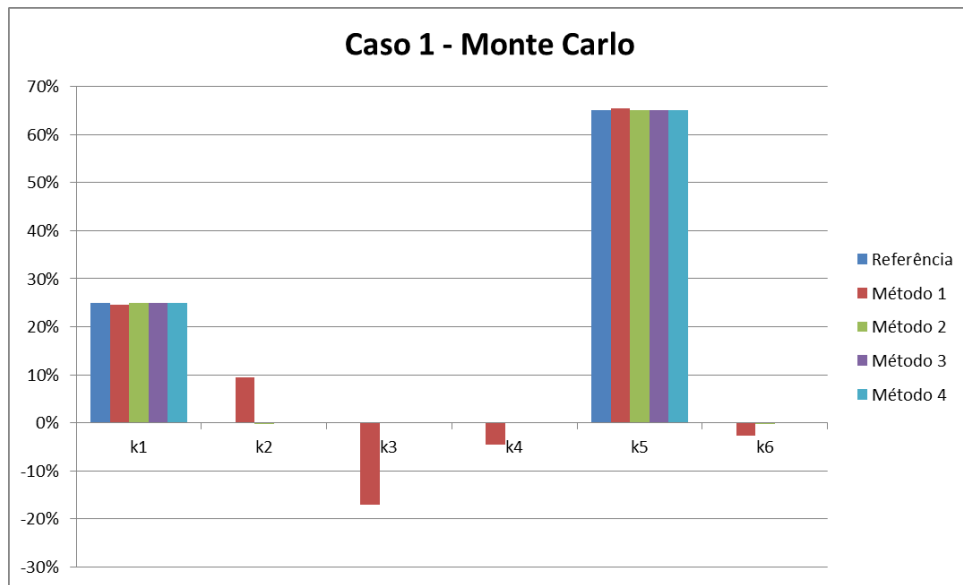


Figura 6.9: Identificação de danos - Monte Carlo

Tabela 6.5: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
51.3	19.8	18.4	16.7

- Identificação de danos com Expansão por Caos Polinomial

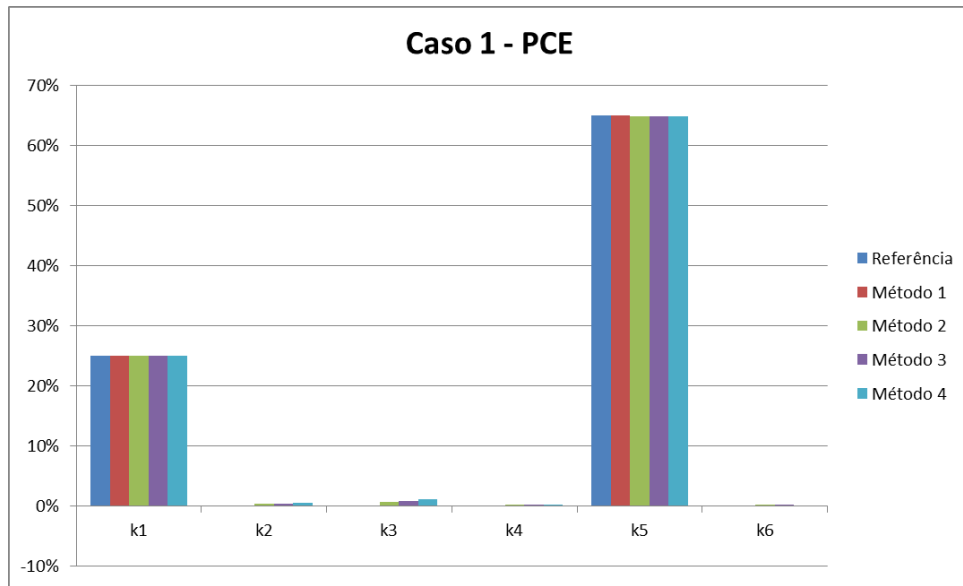


Figura 6.10: Identificação de danos - PCE

Tabela 6.6: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
12.9	4.9	4.6	4.0

Observa-se que os resultados obtidos via PCE não só melhor estimam os danos como também são obtidos num tempo menor (houve uma redução média de 75% no tempo computacional).

### 6.2.2 Estrutura treliçada

Apresenta-se abaixo os resultados encontrados via Monte Carlo e via PCE para o Caso 3 (vide Tabela 5.2) referente à estrutura treliçada, conforme a metodologia apresentada na seção 3.4.2.

- Identificação de danos com Monte Carlo

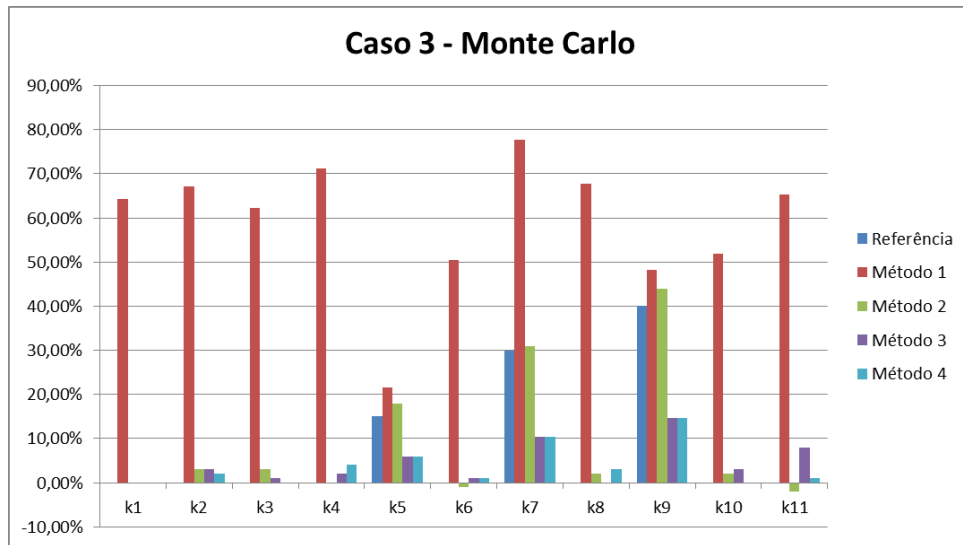


Figura 6.11: Identificação de danos - Monte Carlo

Tabela 6.7: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
36.9	19.6	18.4	16.7

- Identificação de danos com Expansão por Caos Polinomial

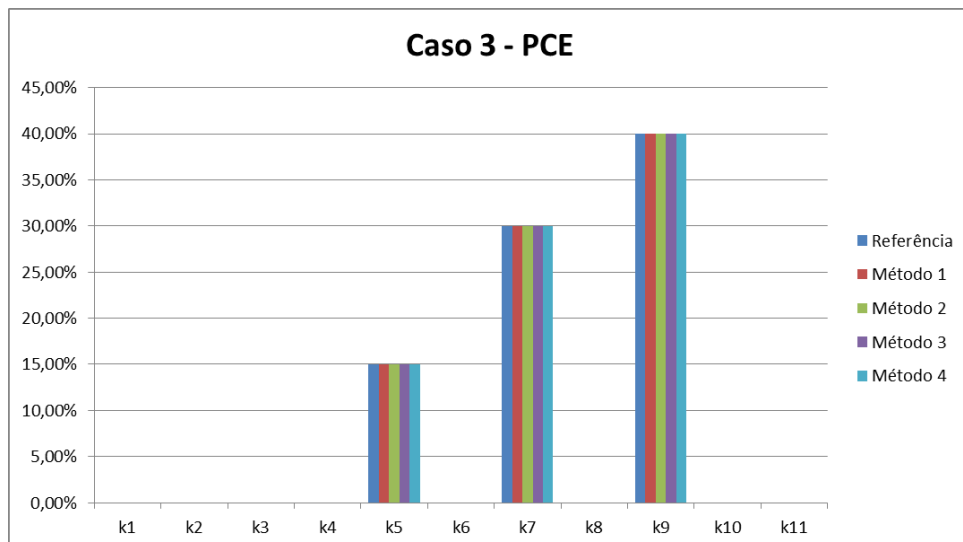


Figura 6.12: Identificação de danos - PCE

Tabela 6.8: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
10.5	5.6	5.3	4.8

De maneira análoga aos resultados obtidos para o sistema mecânico anterior, observa-se que os resultados obtidos via PCE não só melhor estimam os danos (principalmente com relação ao Método 1) como também são obtidos num tempo menor (houve uma redução média de 71% no tempo computacional).

## 6.3 Análise de sensibilidade estocástica - Incerteza na resposta

Uma vez que não houve tanta disparidade nos tempos computacionais gastos para se obter os resultados para os diferentes casos analisados, apresenta-se nesta seção valores médios para o tempo computacional referente a cada método.

### 6.3.1 Massa-mola-amortecedor

Apresenta-se abaixo os resultados encontrados para o Caso 1 referente ao sistema massa-mola-amortecedor, conforme a metodologia apresentada na seção 3.4.3.

- Identificação de danos com Monte Carlo

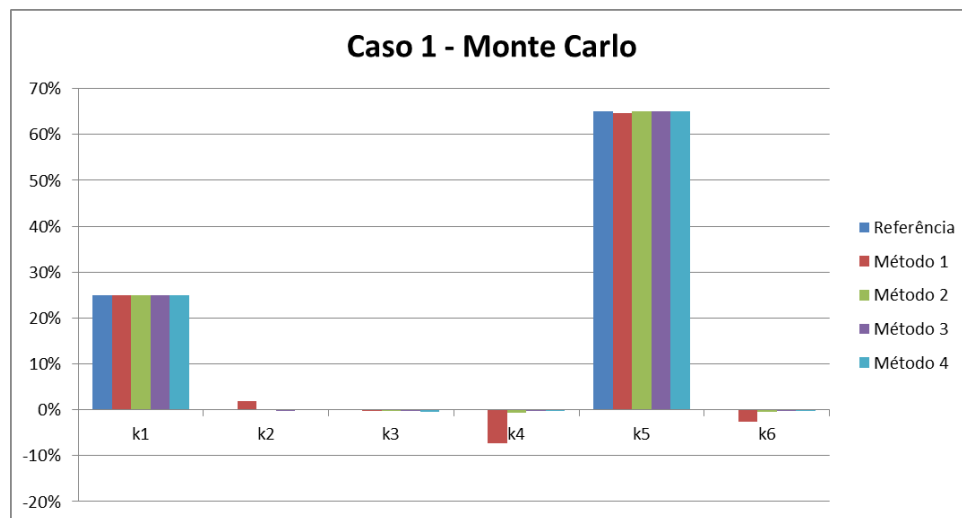


Figura 6.13: Identificação de danos - Monte Carlo

Tabela 6.9: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
73.3	35.0	32.3	30.2

- Identificação de danos com Expansão por Caos Polinomial

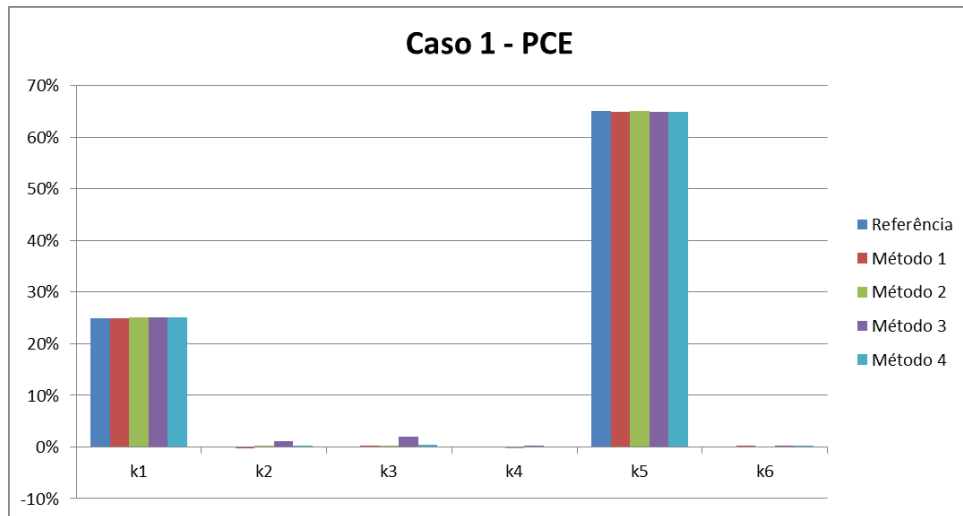


Figura 6.14: Identificação de danos - PCE

Tabela 6.10: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
18.9	9.1	8.4	7.8

Observa-se que os resultados obtidos via PCE não só melhor estimam os danos como também são obtidos num tempo menor (houve uma redução média de 74% no tempo computacional).

### 6.3.2 Estrutura treliçada

Já para a estrutura treliçada, apresenta-se abaixo os resultados para o Caso 3, conforme a metodologia apresentada na seção 3.4.3.

- Identificação de danos com Monte Carlo

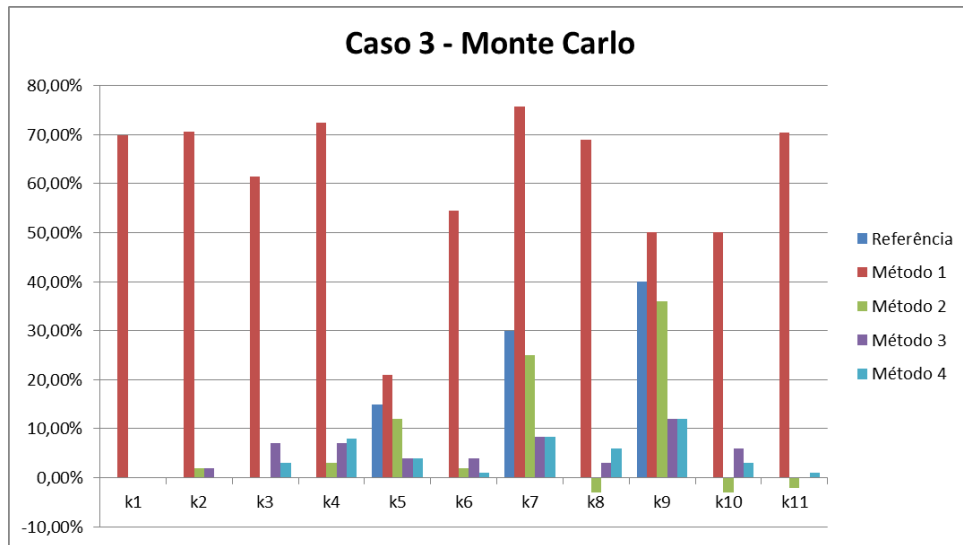


Figura 6.15: Identificação de danos - Monte Carlo

Tabela 6.11: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
73.3	34.9	32.3	30.2

- Identificação de danos com Expansão por Caos Polinomial

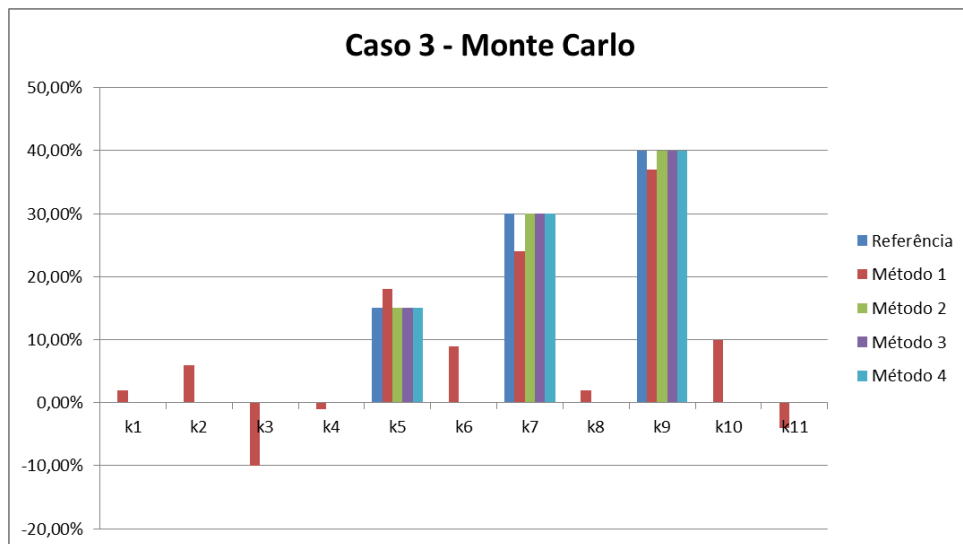


Figura 6.16: Identificação de danos - PCE

Tabela 6.12: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
20.9	10.0	9.2	8.6

De maneira análoga aos resultados obtidos para o sistema mecânico anterior, observa-se que os resultados obtidos via PCE não só melhor estimam os danos (principalmente com relação ao Método 1) como também são obtidos num tempo menor (houve uma redução média de 71% no tempo computacional).

## 6.4 Análise estocástica - Incerteza nos parâmetros

### 6.4.1 Massa-mola-amortecedor

Apresenta-se abaixo os resultados encontrados para o sistema massa-mola-amortecedor, para ambas as distribuições Gamma e Normal Truncada consideradas, via Monte Carlo e via PCE, conforme a metodologia apresentada na seção 3.4.4.

- Identificação de danos com Monte Carlo

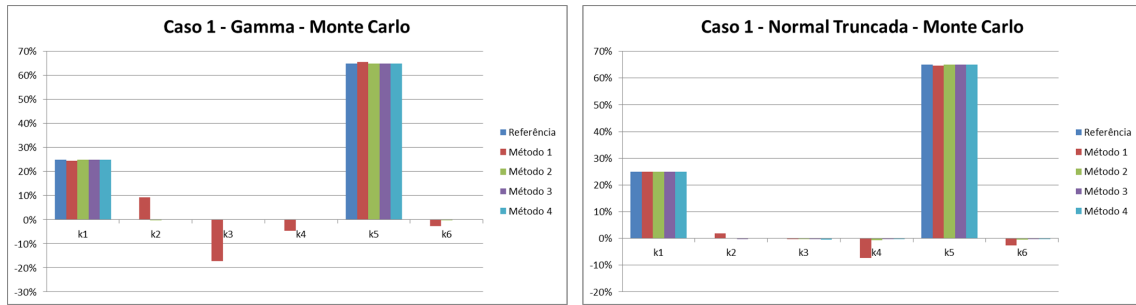


Figura 6.17: Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 1

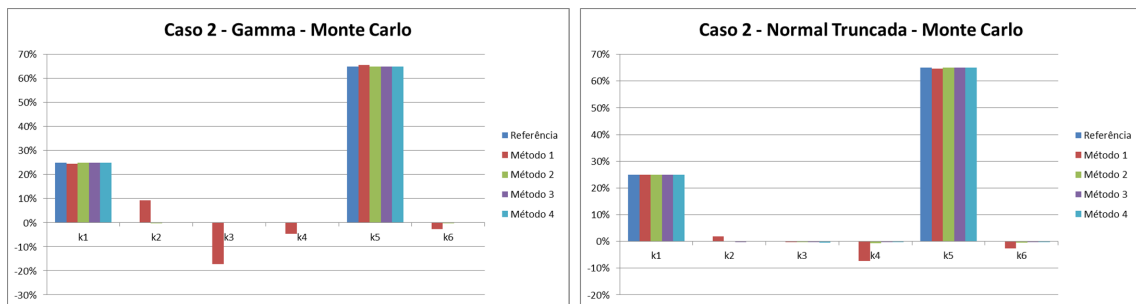


Figura 6.18: Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 2

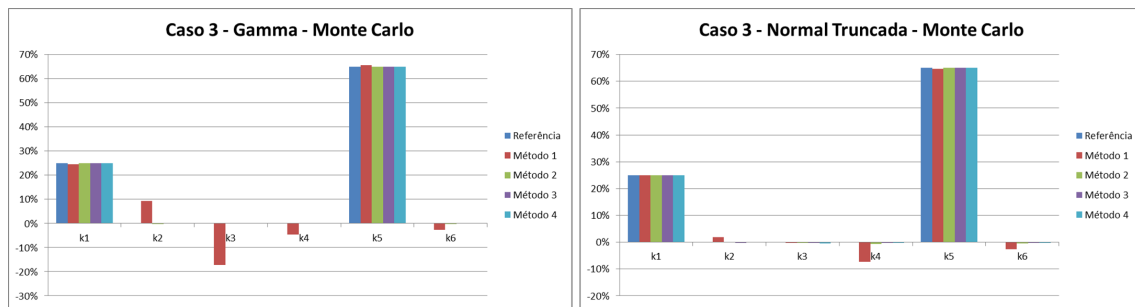


Figura 6.19: Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 3

A seguir, apresentam-se os tempos computacionais referentes à distribuição Gamma.

Tabela 6.13: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
317.7	15.0	6.2	24.9

A seguir, apresentam-se os tempos computacionais referentes à distribuição Normal Truncada.

Tabela 6.14: Tempo computacional médio (em horas)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
6.3	1.4	1.5	1.0

- Identificação de danos com Expansão por Caos Polinomial

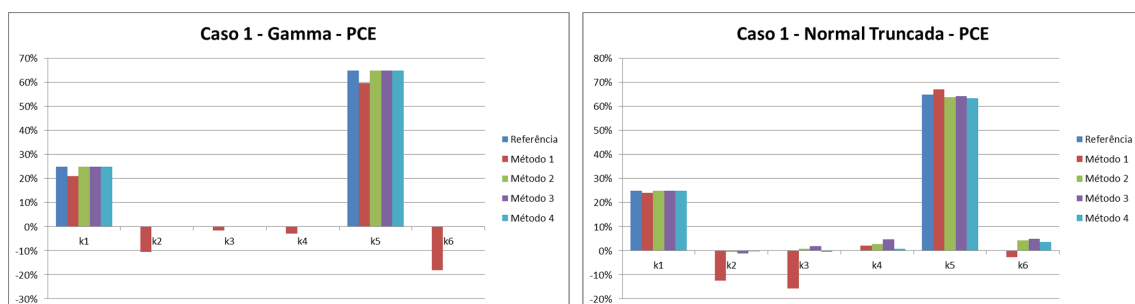


Figura 6.20: Identificação de danos - PCE - Caso 1



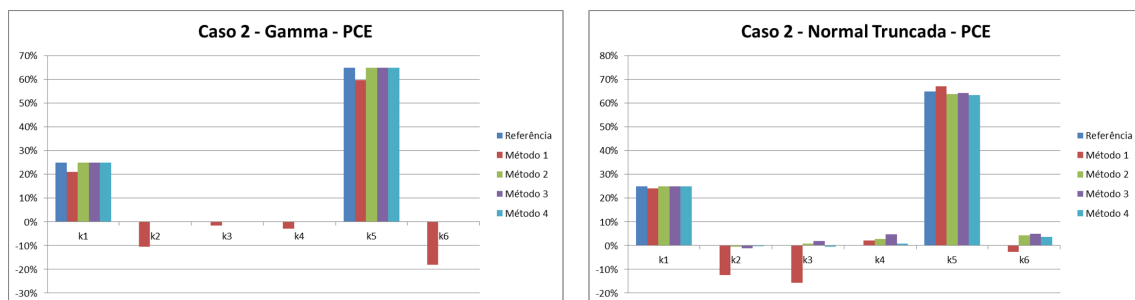


Figura 6.21: Identificação de danos - PCE - Caso 2

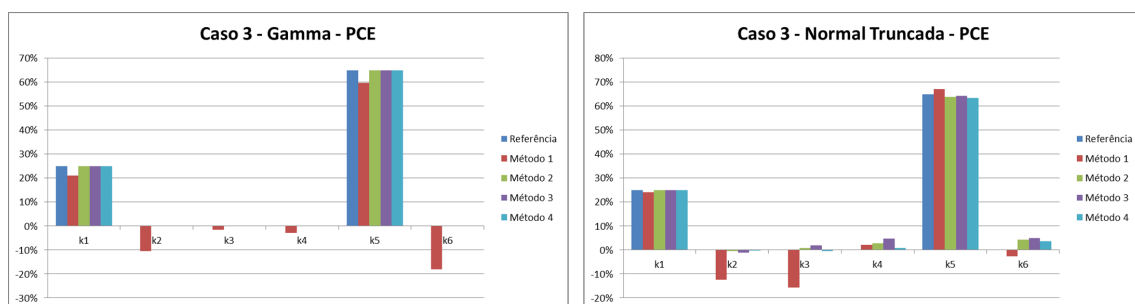


Figura 6.22: Identificação de danos - PCE - Caso 3

A seguir, apresentam-se os tempos computacionais referentes à distribuição Gamma.

Tabela 6.15: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
94.5	4.5	1.9	7.4

A seguir, apresentam-se os tempos computacionais referentes à distribuição Normal Truncada.

Tabela 6.16: Tempo computacional médio (em horas)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
1.9	0.4	0.5	0.3

Observa-se que os resultados obtidos via PCE estimam melhor os danos para uma distribuição Gamma (para a distribuição Normal Truncada, não há tanta disparidade entre os métodos de propagação de incertezas). Em termos de redução no tempo computacional, percebe-se uma redução média de 70% para as análises com a distribuição Gamma e uma redução média de 69% no tempo para a distribuição Normal Truncada.

## 6.4.2 Estrutura treliçada

Apresenta-se abaixo os resultados encontrados para a estrutura treliçada, conforme a metodologia apresentada na seção 3.4.4.

### • Identificação de danos com Monte Carlo

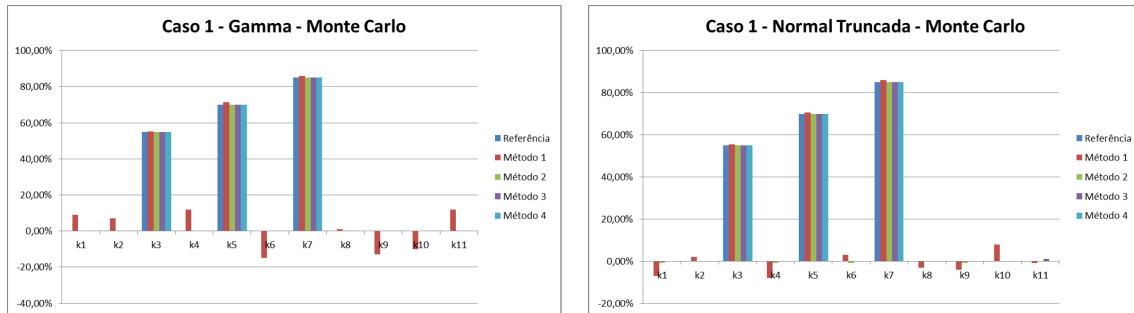


Figura 6.23: Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 1

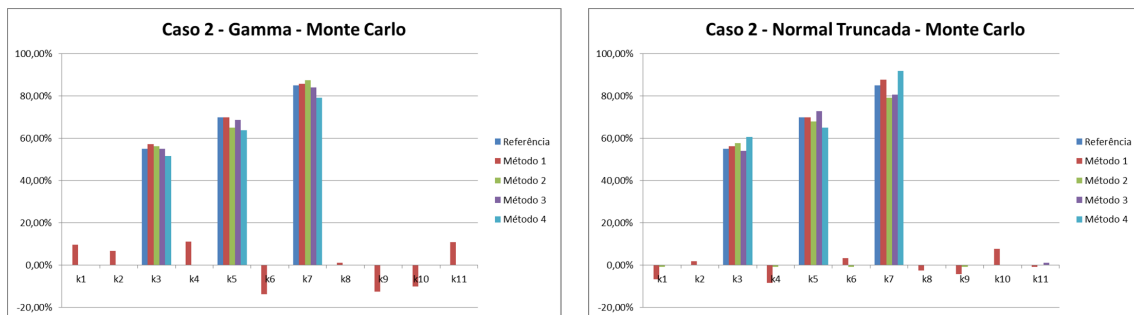


Figura 6.24: Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 2

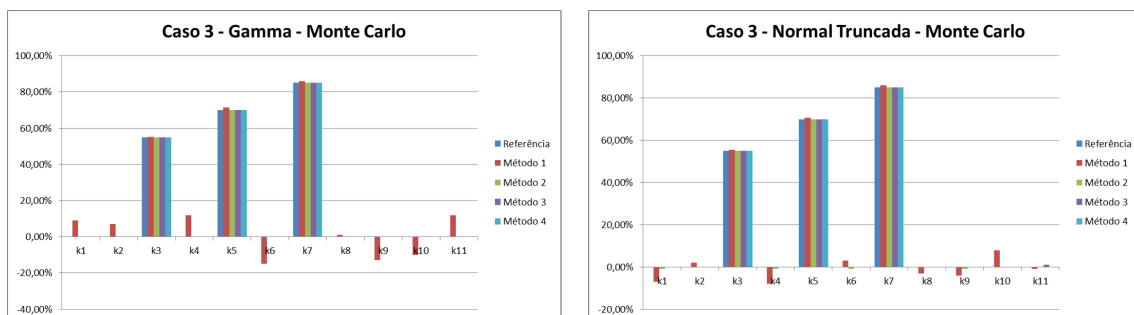


Figura 6.25: Identificação de danos - Monte Carlo - Caso 3

A seguir, apresentam-se os tempos computacionais referentes à distribuição Gamma.

Tabela 6.17: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
336.7	19.3	7.1	28.6

A seguir, apresentam-se os tempos computacionais referentes à distribuição Normal Truncada.

Tabela 6.18: Tempo computacional médio (em horas)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
6.4	1.4	1.5	1.1

### • Identificação de danos com Expansão por Caos Polinomial

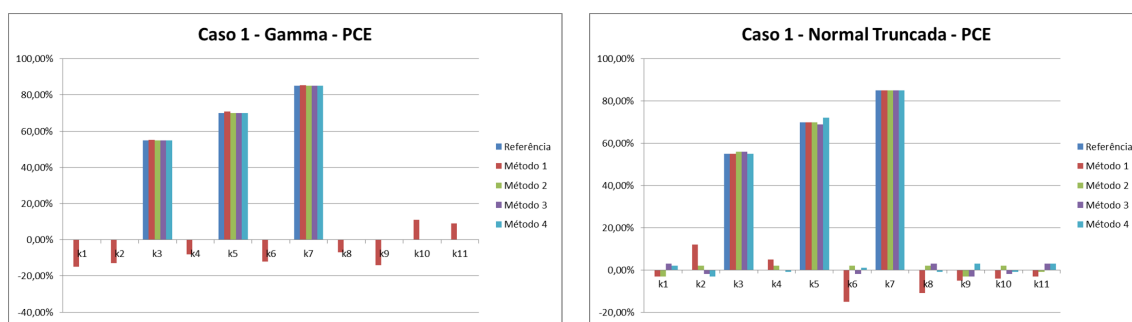


Figura 6.26: Identificação de danos - PCE - Caso 1

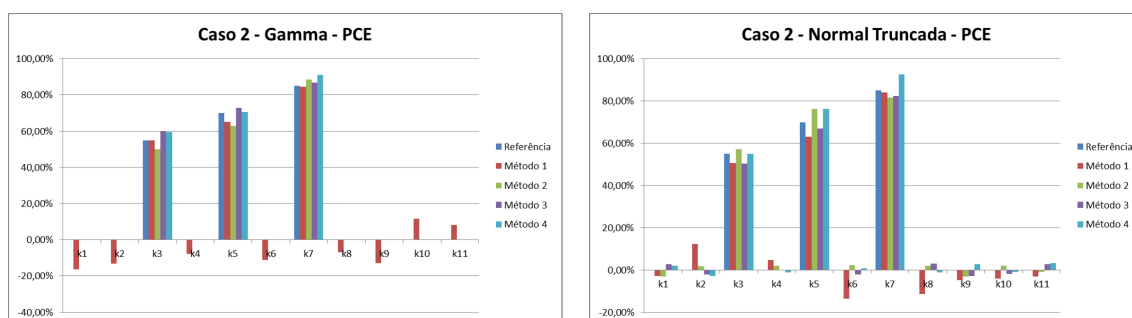


Figura 6.27: Identificação de danos - PCE - Caso 2

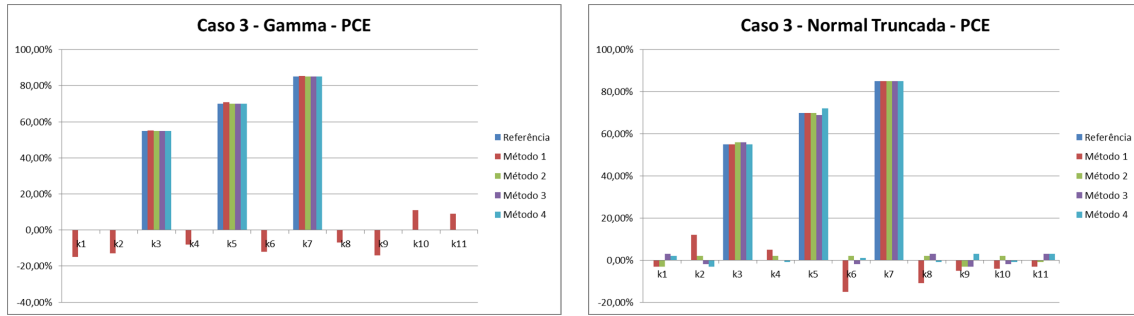


Figura 6.28: Identificação de danos - PCE - Caso 3

A seguir, apresentam-se os tempos computacionais referentes à distribuição Gamma.

Tabela 6.19: Tempo computacional médio (em minutos)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
100.1	5.7	2.1	8.5

A seguir, apresentam-se os tempos computacionais referentes à distribuição Normal Truncada.

Tabela 6.20: Tempo computacional médio (em horas)

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
1.9	0.5	0.5	0.3

De maneira análoga aos resultados encontrados para o sistema mecânico anterior, observa-se que os resultados obtidos via PCE estimam melhor os danos para uma distribuição Gamma (para a distribuição Normal Truncada, não há tanta disparidade entre os métodos de propagação de incertezas). Em termos de redução no tempo computacional, percebe-se uma redução média de 70% para as análises com a distribuição Gamma e uma redução média de 68% no tempo para a distribuição Normal Truncada.

# Capítulo 7

## Conclusões e trabalhos futuros

A grande contribuição que se almeja obter com este trabalho e posterior continuidade do mesmo consiste em produzir um material que agregue conhecimentos de técnicas de otimização e de modelagem estocástica aplicados em processos de identificação de danos em sistemas mecânicos.

Desta forma, de posse dos resultados obtidos no capítulo 6, faz-se uma análise detalhada dos resultados encontrados em cada seção.

### 7.1 Análise determinística

Conforme citado na seção 3.4.1, esta análise permite fazer uma comparação entre as técnicas de otimização utilizadas no trabalho quanto à eficiência e quanto à robustez de cada método.

Através da observação dos resultados da análise determinística, já se torna visível que, do ponto de vista de técnicas de otimização, a técnica de Nelder-Mead Simplex é a que apresenta resultados menos satisfatórios quando comparados aos resultados das outras técnicas.

Ao se analisar as tabelas 6.1 (tabela de resultados para o sistema massa-mola-amortecedor) e 6.3 (tabela de resultados para a estrutura treliçada), juntamente com as figuras 6.1 e 6.4, percebe-se que as técnicas de BFGS Quasi-Newton, de Ponto Interior e de Programação Quadrática Sequencial – SQP previram com exatidão os danos simulados nos sistemas mecânicos, enquanto que a técnica de Nelder-Mead Simplex identificou danos que não condizem com as simulações. Ademais, ao se analisar os tempos computacionais dispendidos em cada simulação, percebe-se que a técnica de Nelder-Mead Simplex é a mais onerosa.

Conclui-se, portanto, que para as análises realizadas, a técnica de Nelder-Mead Simplex é a menos recomendada uma vez que gera resultados ineficazes e mais onerosos de se obter. Uma vez que essa primeira análise de resultados serve justamente

para avaliar a eficiência de cada técnica de otimização, constata-se que esta conclusão irá se repetir nas análises subsequentes.

Por último, é válido destacar que a ineficiência constatada na técnica de Nelder-Mead Simplex pode levar a conclusões extremamente equivocadas quanto à resposta dos sistemas mecânicos analisados. Mais precisamente ao analisarmos as respostas em frequência para a estrutura treliçada (figuras 6.7 e 6.8), observa-se amplitudes bastante elevadas que não condizem com as simulações e com as previsões das outras técnicas, bem como uma ligeira defasagem no domínio da frequência dos pontos de máxima amplitude. Ao se pensar em termos de controle robusto de estruturas e de planejamento de manutenção mecânica, conclui-se que tais erros podem levar a falhas de projeto.

## 7.2 Análises de sensibilidade estocástica

No que concerne às análises de sensibilidade estocástica, percebe-se uma grande distinção no comportamento entre os resultados para os sistemas mecânicos estudados. Tal distinção pode ser explicada devido à diferença entre as dimensões dos problemas relacionados a cada sistema mecânico, ou seja, entre os graus de liberdade característicos de cada sistema estudado. Desta forma, denotando por Sist.1 o sistema massa-mola-amortecedor e por Sist.2 a estrutura treliçada, uma vez que  $g.d.l_{Sist.1} = 6$  e  $g.d.l_{Sist.2} = 12$  e, portanto,  $g.d.l_{Sist.2} > g.d.l_{Sist.1}$ , percebe-se que a estrutura treliçada é mais complexa (em termos de dimensionalidade) do que o sistema massa-mola-amortecedor.

### • Considerações sobre o sistema massa-mola-amortecedor

Desta forma, ao se analisar os resultados para o sistema massa-mola-amortecedor, percebe-se novamente que as técnicas de otimização BFGS Quasi-Newton, Ponto Interior e Programação Quadrática Sequencial – SQP foram as mais eficientes no processo de identificação de danos em ambas as metodologias de propagação de incertezas (Monte Carlo e PCE).

Destaca-se, portanto, que a metodologia de Expansão por Caos Polinomial se apresentou mais eficaz que o Método de Monte Carlo, uma vez que melhores resultados foram obtidos via PCE e em menores tempos.

Além disso, destaca-se que maiores tempos foram observados ao se considerar a presença de incertezas na resposta. Tal fato deve estar relacionado à taxa de convergência estocástica, uma vez que as incertezas modeladas na força geram uma menor incerteza na variável observada (o deslocamento) quando comparadas às incertezas modeladas propriamente sobre a variável deslocamento.

Apresenta-se abaixo um compilado de envelopes estatísticos com um intervalo de confiança de 95% para uma das respostas em frequência do sistema mecânico estudado.

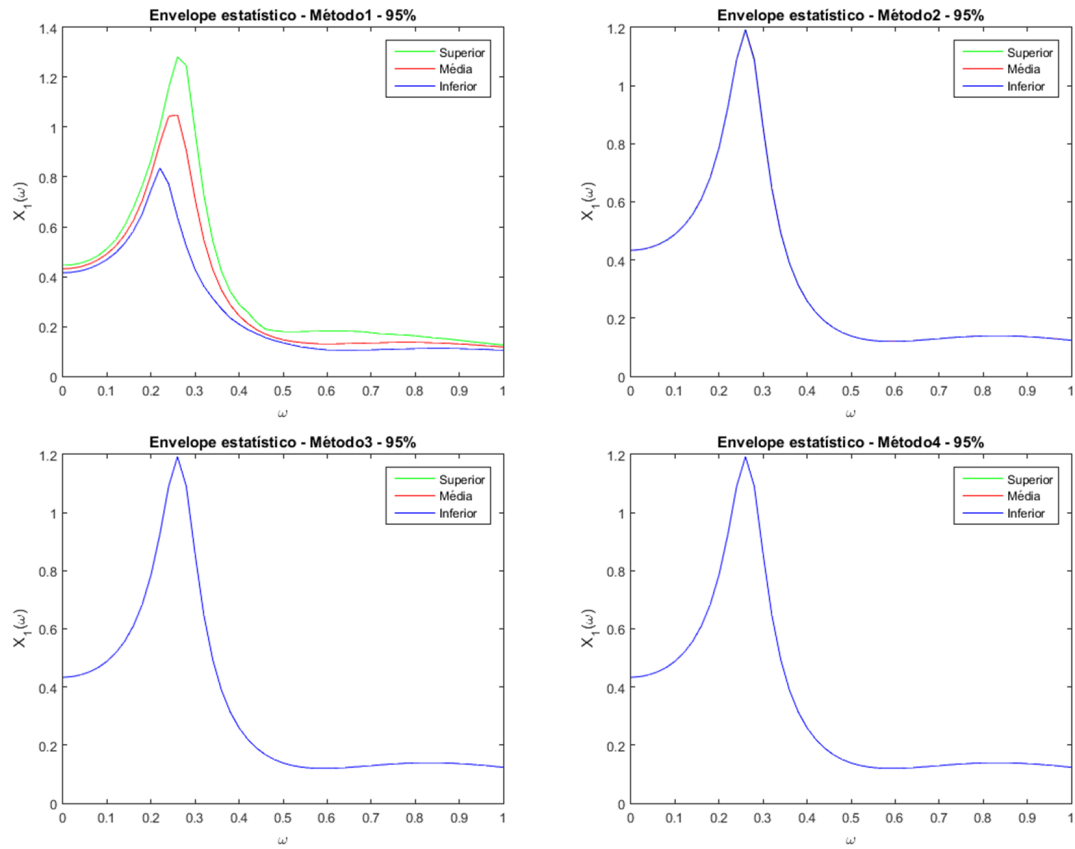


Figura 7.1: Envelopes estatísticos obtidos via Monte Carlo

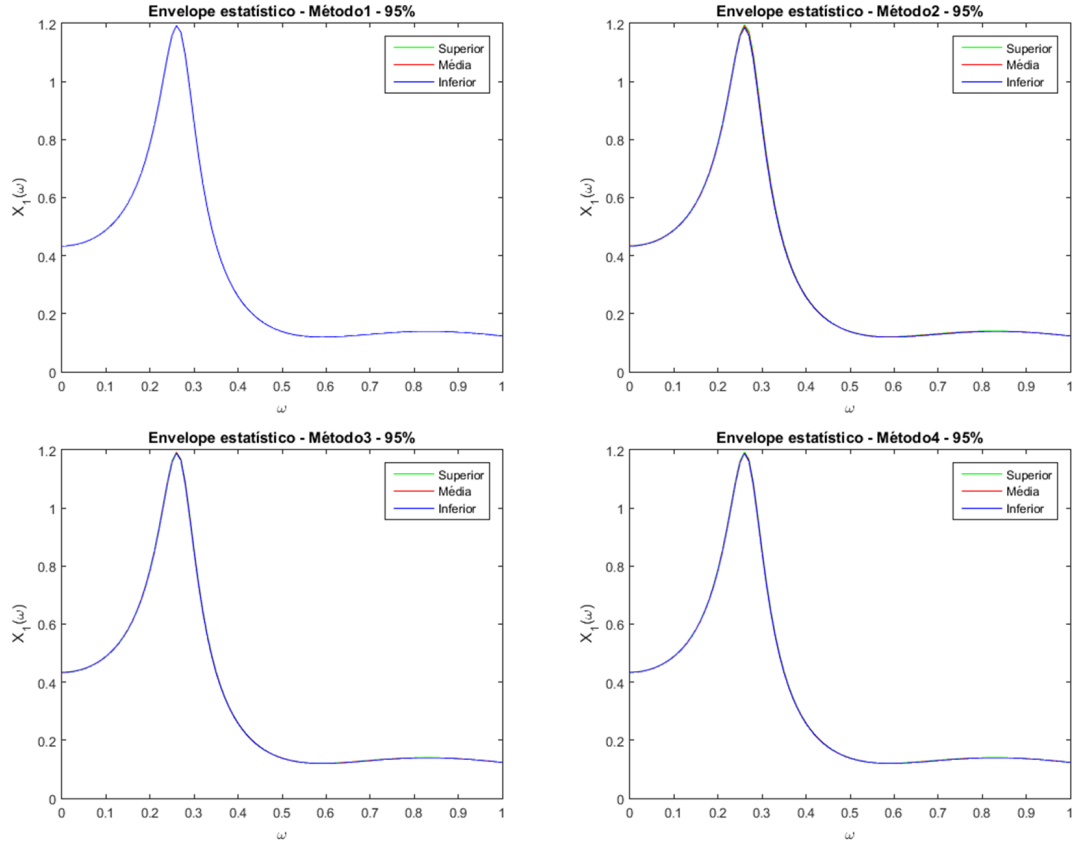


Figura 7.2: Envelopes estatísticos obtidos via PCE

Conclui-se, portanto, que para o sistema massa-mola-amortecedor a metodologia de propagação de incertezas de Expansão por Caos Polinomial atrelada à técnica de Programação Quadrática Sequencial – SQP foi a que gerou melhores resultados.

### • Considerações sobre a estrutura treliçada

Ao se analisar os resultados obtidos para a estrutura treliçada, chega-se às mesmas conclusões apresentadas anteriormente para o sistema massa-mola-amortecedor. Entretanto, apresenta-se abaixo um compilado de envelopes estatísticos para a resposta em frequência da estrutura treliçada para uma subsequente discussão sobre os resultados. *Obs.: foi omitido da análise os envelopes gerados pela técnica de Nelder-Mead Simplex, uma vez que a mesma já foi constatada como ineficaz para a geração de resultados.*



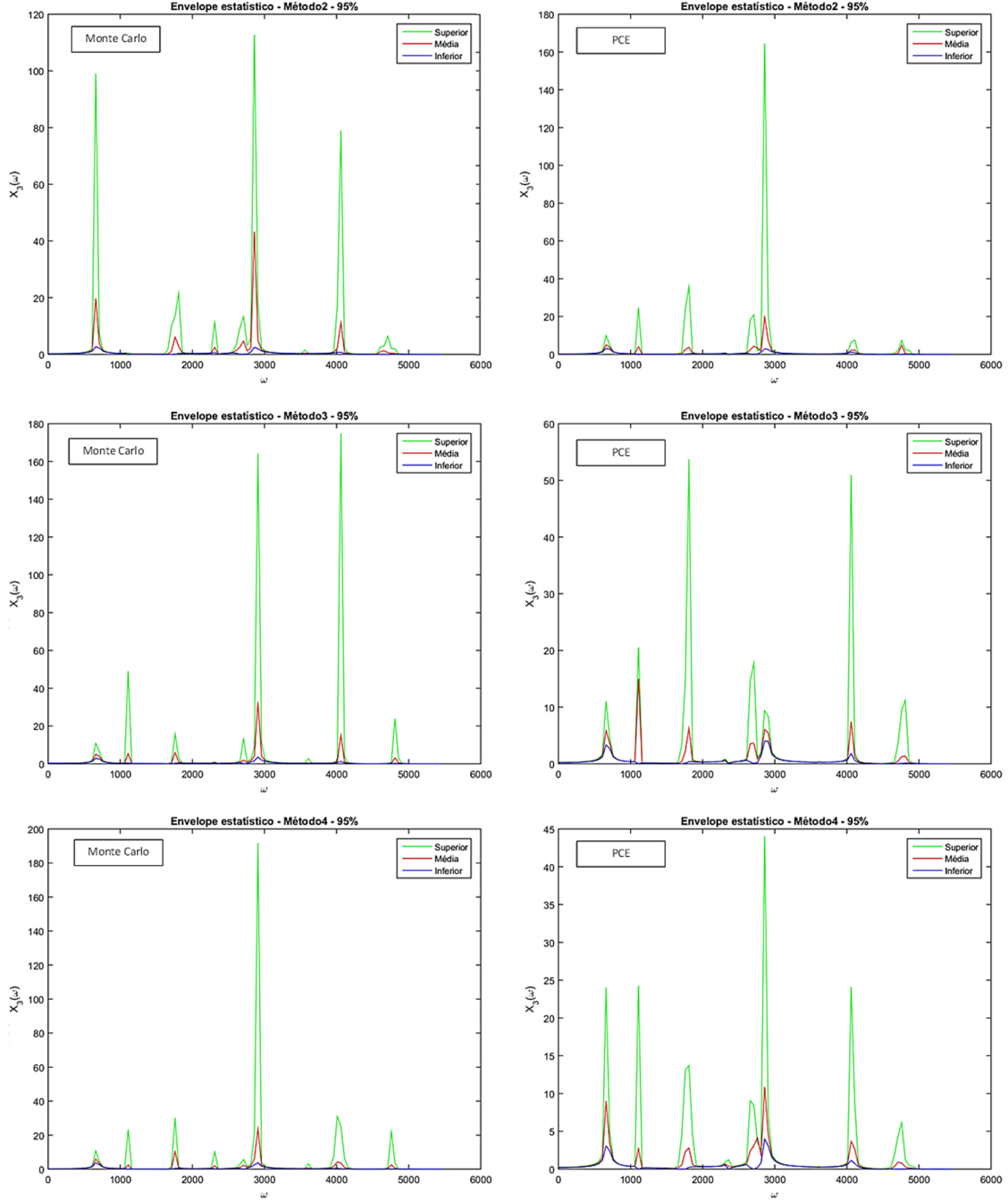


Figura 7.3: Envelopes estatísticos obtidos via Monte Carlo e via PCE

Ao se analisar estes envelopes estatísticos, percebe-se que os limites superiores obtidos com o método de Monte Carlo apresentam um maior valor de amplitude quando comparados aos limites obtidos via PCE. Tal fato só corrobora a boa aplicabilidade da técnica de Expansão por Caos Polinomial neste tipo de problema. Ademais, percebe-se que novamente a técnica de Programação Quadrática Sequencial – SQP foi a que gerou os melhores resultados quando comparada às demais.

### 7.3 Análise estocástica nos parâmetros

Considerada a análise de maior importância no presente trabalho, dada a sua complexidade de formulação, constatou-se que, do ponto de vista de técnicas utilizadas para otimização e propagação de incertezas, as conclusões obtidas se assemelham às das análises anteriores: a combinação de técnicas mais acurada e de maior eficiência computacional foi a dupla “ Programação Quadrática Sequencial – SQP + Expansão por Caos Polinomial”.

Desta forma, apresenta-se abaixo os envelopes estatísticos relacionados aos resultados obtidos pela técnica SQP para as diferentes distribuições de probabilidade consideradas e para as diferentes técnicas de propagação de incertezas.

- Massa-mola-amortecedor

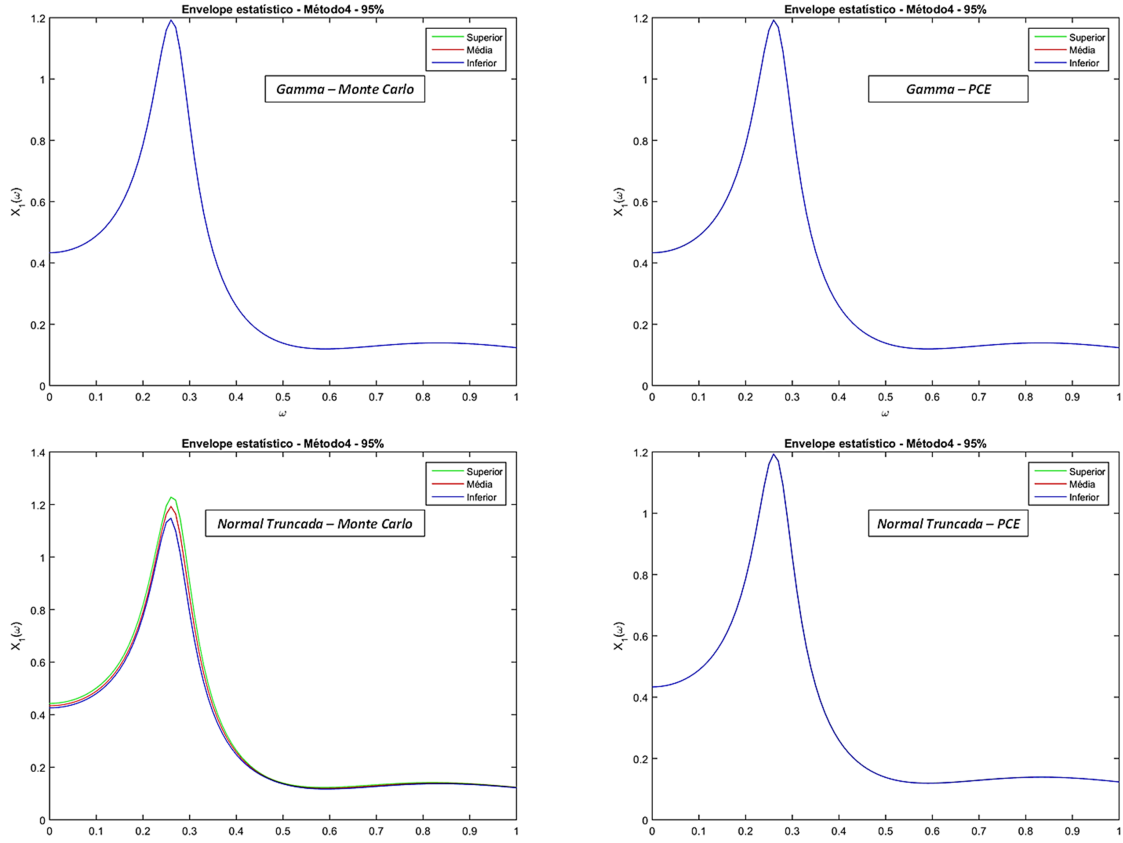


Figura 7.4: Envelopes estatísticos obtidos via Monte Carlo e via PCE - Massa-mola-amortecedor - Programação Quadrática Sequencial – SQP

- Estrutura treliçada

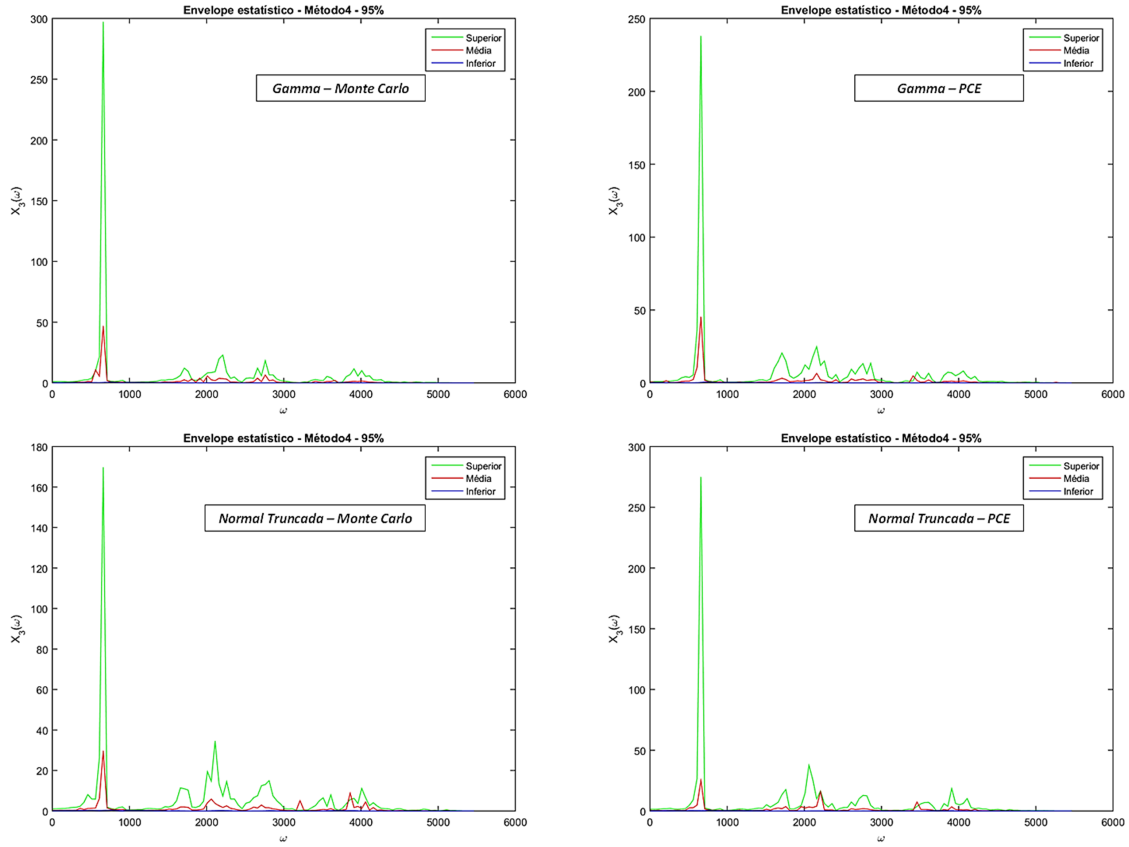


Figura 7.5: Envelopes estatísticos obtidos via Monte Carlo e via PCE - Estrutura treliçada - Programação Quadrática Sequencial – SQP

Além disso, destaca-se que os tempos computacionais dispendidos nas análises referentes à distribuição Normal Truncada (ordem de horas) superam bastante os tempos referentes à distribuição Gamma (ordem de minutos). De posse dessas observações, conclui-se que a convergência estocástica para a distribuição Normal Truncada é mais lenta e gera resultados menos acurados do que os da distribuição Gamma.

## 7.4 Trabalhos futuros

Diante do presente trabalho apresentado, o autor identifica como sugestões para trabalhos futuros diversos aspectos a serem explorados para um enriquecimento desse tipo de análise, a saber:

- Analisar outros sistemas mecânicos;

- Analisar outras configurações para a modelagem estocástica dos parâmetros - outras distribuições e outros valores para  $\alpha$ ;
- Considerar o processo de regularização nas análises;
- Explorar outras técnicas de otimização nas análises;
- Analisar outras técnicas de propagação de incertezas (ex.: colocação estocástica);
- Considerar não linearidades nos modelos mecânicos estudados.

Neste ponto, manifesto o meu interesse em dar continuidade a essa pesquisa justamente implementando essas soluções propostas de trabalhos futuros.

# Referências Bibliográficas

- [1] HALL, S. R. “The effective management and use of structural health data”. In: *INTERNATIONAL WORKSHOP ON STRUCTURAL HEALTH MONITORING*, pp. 265–275, New York, 1999.
- [2] RITTER, A. *Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures*. Tese de D.Sc., Aalborg University, 1993.
- [3] WORDEN, K., DULIEU-BARTON, J. M. “An overview of intelligent fault detection in systems and structures”, *Struct. Heal. Monit.*, v. 3, n. 1, pp. 85–98, 2004.
- [4] OOIJEVAAR, T. H. *Vibration based structural health monitoring of composite skin-stiffener structures*. Tese de D.Sc., University of Twente, 2014.
- [5] FRANCO, V. R. *Monitoramento da integridade de estruturas aeronáuticas*. Ph.D. dissertation, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, São Paulo, SP, 2009.
- [6] BANAN, M. R., HJELMSTAD, K. D. “Parameter estimation of structures from static response. I. Computational aspects”, *Journal of Structural Engineering*, v. 120, n. 11, pp. 3243–3258, 1994.
- [7] HJELMSTAD, K. D., SHIN, S. “Damage detection and assessment of structures from static response”, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 123, n. 6, pp. 568–576, 1997.
- [8] CHOU, J. H., GHABOUSSI, J. “Genetic algorithm in structural damage detection”, *Computers et Structures*, v. 79, n. 14, pp. 1335–1353, 2001.
- [9] FARRAR, C. R., JAUREGUI, D. A. “Comparative study of damage identification algorithms applied to a bridge: I. Experiment”, *Smart Mater. Struct.*, v. 7, n. 5, pp. 704–719, 1998.
- [10] FARRAR, C. R., JAUREGUI, D. A. “Comparative study of damage identification algorithms applied to a bridge: II. Numerical study”, *Smart Mater. Struct.*, v. 7, n. 5, pp. 720–731, 1998.

- [11] STUBBS, N., KIM, J. T., TOPOLE, K. G. *An efficient and robust algorithm for damage localization in offshore platforms*. ASCE 10th Struct. Cong. 92, 1992.
- [12] PANDEY, A. K., BISWAS, M., SAMMAM, M. M. “Damage detection from changes in curvature mode shapes”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 145, pp. 321–332, 1991.
- [13] PANDEY, A. K., BISWAS, M. “Damage detection in structures using changes in flexibility”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 169, pp. 3–17, 1994.
- [14] ZIMMERMAN, D. C., KAOUK, M. “Structural damage detection using a minimum rank update theory”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 116, pp. 222–230, 1994.
- [15] SOHN, H., FARRAR, C. R., HUNTER, N. F., et al. “Structural health monitoring using statistical pattern recognition techniques”, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, v. 123, pp. 706–711, 2001.
- [16] TRENDAFILOVA, I., HEYLEN, W. “Categorisation and pattern recognition methods for damage localisation from vibration measurements”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 17, pp. 825–836, 2003.
- [17] FRISWELL, M. I., MOTTERSHEAD, J. E. *Finite element model updating in structural dynamics*. 1 ed. Dordrecht, Springer Netherlands, 1995.
- [18] KENIGSBUCH, R., HALEVI, Y. “Model updating in structural dynamics: a generalised reference basis approach”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 12, pp. 75–90, 1998.
- [19] KAOUK, M., ZIMMERMAN, D. C. “Structural damage assessment using a generalised minimum rank perturbation theory”, *AIAA Journal*, v. 32, pp. 836–842, 1994.
- [20] DOEBLING, S. W. “Minimum-rank optimal update of elemental stiffness parameters for structural damage identification”, *AIAA Journal*, v. 34, pp. 2615–2621, 1996.
- [21] ABDALLA, M. O., GRIGORIADIS, K. M., ZIMMERMAN, D. C. “Enhanced structural damage detection using alternating projection methods”, *AIAA Journal*, v. 36, pp. 1305–1311, 1998.
- [22] ABDALLA, M. O., GRIGORIADIS, K. M., ZIMMERMAN, D. C. “Structural damage detection using linear matrix inequality methods”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 122, pp. 448–455, 2000.

- [23] FRISWELL, M. I. “Damage identification using inverse methods”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 365, pp. 393–410, 2007.
- [24] FOX, R. L., KAPOOR, M. P. “Rates of change of eigenvalues and eigenvectors”, *AIAA Journal*, v. 6, pp. 2426–2429, 1968.
- [25] NELSON, R. B. “Simplified calculation of eigenvector derivatives”, *AIAA Journal*, v. 14, pp. 1201–1205, 1976.
- [26] FRISWELL, M. I. “The derivatives of repeated eigenvalues and their associated eigenvectors”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 118, pp. 390–397, 1996.
- [27] ADHIKARI, S., FRISWELL, M. I. “Eigenderivative analysis of asymmetric non-conservative systems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 51, pp. 709–733, 2001.
- [28] RYCHLIK, I., RYDÉN, J. *Probability and Risk Analysis: an Introduction for Engineers*. 1 ed. Berlin, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [29] MAÎTRE, O. L., KNIO, O. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification*. 1 ed. Berlin, Springer Netherlands, 2010.
- [30] GHANEM, R. G., SPANOS, P. *Stochastic finite elements: a spectral approach*. 1 ed. New York, Springer-Verlag New York, 1991.
- [31] WIENER, N. “The Homogeneous Chaos”, *American Journal of Mathematics*, v. 60, n. 4, pp. 897—936, 1938.
- [32] XIU, D. *Numerical Methods for Stochastic Computations: A Spectral Method Approach*. 1 ed. New Jersey, Princeton University Press, 2010.
- [33] DODSON, M., PARKS, G. “Robust Aerodynamic Design Optimization Using Polynomial Chaos”, *Journal of Aircraft - J AIRCRAFT*, v. 46, pp. 635–646, 03 2009.
- [34] COELHO, R. F., BOUILLARD, P. “Multi-objective Reliability-based Optimization with Stochastic Metamodels”, *Evol. Comput.*, v. 19, n. 4, pp. 525–560, 2011.
- [35] CAMERON, R. H., MARTIN, W. T. “The Orthogonal Development of Non-Linear Functionals in Series of Fourier-Hermite Functionals”, *Annals of Mathematics*, v. 48, n. 2, pp. 385–392, 1947.

- [36] XIU, D., KARNIADAKIS, G. “The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations”, *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 24, pp. 619–644, 10 2002.
- [37] FAN, Y., HUANG, G., BAETZ, B., et al. “Parameter uncertainty and temporal dynamics of sensitivity for hydrologic models: A hybrid sequential data assimilation and probabilistic collocation method”, v. 86, 12 2016.
- [38] GUERINE, A., ELHAMI, A., WALHA, L., et al. “A polynomial chaos method for the analysis of the dynamic behavior of uncertain gear friction system”, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, v. 59, pp. 76–84, 03 2016.
- [39] C. MEECHAM, W., SIEGEL, A. “Wiener-Hermite Expansion in Model Turbulence at Large Reynolds Numbers”, *Physics of Fluids - PHYS FLUIDS*, v. 7, pp. 1178–1190, 08 1964.
- [40] HOON LEE, S., CHEN, W. “A comparative study of uncertainty propagation methods for black-box-type problems”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 37, pp. 239–253, 01 2009.
- [41] WITTEVEEN, J., BIJL, H. “Modeling Arbitrary Uncertainties Using Gram-Schmidt Polynomial Chaos”, *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 01 2006.
- [42] WAN, X., KARNIADAKIS, G. E. “Multi-Element Generalized Polynomial Chaos for Arbitrary Probability Measures”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 28, n. 3, pp. 901–928, 2006.
- [43] KUO, F. Y., SLOAN, I. H. “Lifting the curse of dimensionality”, *Notices of the AMS*, v. 52, pp. 1320–1328, 2005.
- [44] O’HAGAN, A. *Polynomial Chaos: A Tutorial and Critique from a Statistician’s Perspective*. Lecture notes, 2013.
- [45] SUDRET, B., BLATMAN, G., BERVEILLER, M. “Response Surfaces Based on Polynomial Chaos Expansions”. In: *Construction Reliability: Safety, Variability and Sustainability*, pp. 147–167, 2013.
- [46] PRANGA, M., TOMPKINS, M. J. *Efficient estimation of polynomial chaos proxies using generalized sparse quadrature*. Schlumberger-doll research : Technical paper, 2012.
- [47] KAARNIOJA, V. *Smolyak Quadratura*. Tese de D.Sc., University of Helsinki, 2013.



- [48] HOLTZ, M. *Sparse Grid Quadrature in High Dimensions with Applications in Finance and Insurance*. 1 ed. Berlin, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [49] BLATMAN, G., SUDRET, B. “Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach”, *Comptes Rendus Mécanique*, v. 336, pp. 518–523, 2008.
- [50] SUDRET, B. “Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions”, *Reliability Engineering and System Safety*, v. 93, pp. 964–979, 2008.
- [51] LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H., et al. “Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Algorithm in Low Dimensions”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 9, pp. 112–147, 1998.
- [52] NELDER, J., MEAD, R. “A simplex method for function minimization”, *Computer Journal*, v. 7, pp. 308–313, 1965.
- [53] BYRD, R. H., HRIBAR, M. E., NOCEDAL, J. “An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 9, pp. 877–900, 1999.
- [54] WILSON, R. B. *A Simplicial Algorithm for Concave Programming*. Tese de D.Sc., Harvard University Graduate School of Business Administration, 1963.
- [55] BEALE, E. M. L. *Numerical Methods*. In: Nonlinear programming, J. Abadie ed, North - Holland, Amsterdam, 1967.
- [56] RITTO, T. G., CASTELLO, D. A. *Quantificação de incertezas e estimação de parâmetros em dinâmica estrutural: uma introdução a partir de exemplos computacionais*. 1 ed. São Carlos, SBMAC, 2016.
- [57] SOBOL, L. M. A. *Primer for the Monte Carlo Method*. 1 ed. Boca Raton, CRC Press Florida, 1994.
- [58] SHONKWILER, R. W., MENDIVIL, F. *Explorations in Monte Carlo Methods*. 1 ed. New York, Springer New York, 2009.
- [59] GHANEM, R., RED-HORSE, J. “Propagation of Probabilistic Uncertainty in Complex Physical Systems Using a Stochastic Finite Element Approach”, *Phys. D*, v. 133, n. 1-4, pp. 137–144, 1999.

- [60] DAKOTA, *A Multilevel Parallel Object-Oriented Framework for Design Optimization, Parameter Estimation, Uncertainty Quantification and Sensitivity Analysis: Version 4.2 User's Manual*. Sandia National Laboratories, California, United States, 2008. Disponível em: <<http://www.cs.sandia.gov/DAKOTA/software.html>>.
- [61] SOIZE, C., GHANEM, R. “Physical Systems with Random Uncertainties: Chaos Representations with Arbitrary Probability Measure”, *SIAM J. Scientific Computing*, v. 26, pp. 395–410, 01 2004.
- [62] BLATMAN, G. *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. Ph.D. thesis, Universite Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2009.
- [63] NOBILE, F., TEMPONE, R., WEBSTER, C. G. “A Sparse Grid Stochastic Collocation Method for Partial Differential Equations with Random Input Data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 46, n. 5, pp. 2309–2345, 2008.
- [64] PATI, Y. C., REZAIIFAR, R., KRISHNAPRASAD, P. S. “Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition”. In: *Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 40–44 vol.1, Nov 1993.
- [65] MALLAT, S. G., ZHANG, Z. “Matching pursuits with time-frequency dictionaries”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 41, n. 12, pp. 3397–3415, Dec 1993.
- [66] PLESHA, M. E., GRAY, G. L., COSTANZO, F. *Engineering Mechanics: Statics*. 2 ed. New York, McGraw-Hill Companies Inc, 2013.
- [67] *MATLAB 2015a Language Reference Manual*. The MathWorks, Inc., Massachusetts, United States, 2015. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>>.

# Apêndice A

## Resultados - Tabelas

Serão apresentados neste Apêndice, sob a forma de tabelas, todos os resultados obtidos nas análises realizadas.

### A.1 Análise de sensibilidade estocástica - Massa-mola-amortecedor

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 1;

Tabela A.1: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	9%	-17%	-5%	66%	-3%
	Desvio	1%	18%	36%	21%	1%	11%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 1;

Tabela A.2: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	2%	0%	-7%	65%	-3%
	Desvio	1%	8%	2%	21%	1%	10%
Método 2	Média	25%	0%	0%	-1%	65%	-1%
	Desvio	1%	4%	2%	9%	1%	4%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	3%	2%	7%	1%	4%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	4%	2%	8%	1%	4%

- Incerteza na força - PCE - Caso 1;

Tabela A.3: Incerteza na força - PCE - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	25%	0%	1%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	1%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	1%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	1%	1%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 1;

Tabela A.4: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	8%	13%	3%	1%	2%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	9%	14%	4%	1%	3%
Método 3	Média	25%	1%	2%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	7%	13%	4%	1%	3%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	7%	9%	3%	1%	2%

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 2;

Tabela A.5: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	-2%	44%	29%	2%	-5%	-13%
	Desvio	-5%	1%	1%	5%	-15%	-33%
Método 2	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 2;

Tabela A.6: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	6%	45%	30%	0%	2%	7%
	Desvio	12%	1%	1%	11%	8%	2%
Método 2	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	1%	1%	1%	7%	1%	7%
Método 3	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	1%	1%	4%	0%	7%
Método 4	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	2%	1%	1%	7%	6%	6%

- Incerteza na força - PCE - Caso 2;

Tabela A.7: Incerteza na força - PCE - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	1%	45%	30%	1%	1%	1%
	Desvio	0%	0%	0%	1%	0%	0%
Método 3	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	1%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 2;

Tabela A.8: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	1%	7%	11%	3%	1%	2%
Método 2	Média	1%	45%	30%	1%	1%	1%
	Desvio	1%	8%	14%	3%	1%	3%
Método 3	Média	1%	45%	30%	0%	1%	1%
	Desvio	1%	6%	13%	4%	1%	3%
Método 4	Média	1%	45%	30%	1%	1%	1%
	Desvio	1%	6%	9%	3%	1%	2%

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 3;

Tabela A.9: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	15%	-7%	15%	-4%	40%	6%
	Desvio	1%	-18%	1%	-9%	1%	18%
Método 2	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 3;

Tabela A.10: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	15%	-2%	15%	-4%	40%	-2%
	Desvio	1%	2%	1%	1%	1%	5%
Método 2	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	1%	7%	1%	9%	1%	7%
Método 3	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	1%	6%	1%	7%	1%	0%
Método 4	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	1%	9%	1%	8%	1%	3%

- Incerteza na força - PCE - Caso 3;

Tabela A.11: Incerteza na força - PCE - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 3;

Tabela A.12: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	1%	8%	12%	3%	1%	2%
Método 2	Média	15%	1%	15%	2%	40%	1%
	Desvio	1%	8%	13%	3%	1%	3%
Método 3	Média	15%	1%	15%	2%	40%	0%
	Desvio	1%	7%	12%	4%	1%	3%
Método 4	Média	15%	1%	15%	0%	40%	1%
	Desvio	1%	6%	8%	3%	1%	2%

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 4;

Tabela A.13: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 4

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	9%	-17%	-4%	64%	-3%
	Desvio	1%	18%	36%	20%	1%	11%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	64%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	64%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 4;

Tabela A.14: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 4

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	2%	0%	-7%	64%	-3%
	Desvio	1%	8%	2%	21%	1%	10%
Método 2	Média	25%	0%	0%	-1%	64%	-1%
	Desvio	1%	4%	2%	9%	1%	4%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	64%	0%
	Desvio	1%	3%	2%	7%	1%	4%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	64%	0%
	Desvio	1%	3%	2%	7%	1%	4%

- Incerteza na força - PCE - Caso 4;

Tabela A.15: Incerteza na força - PCE - Caso 4

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	25%	0%	1%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	1%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	1%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	1%	1%	0%	64%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 4;

Tabela A.16: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 4

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	0%	0%	0%	64%	0%
	Desvio	1%	8%	13%	3%	1%	2%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	64%	0%
	Desvio	1%	9%	14%	4%	1%	3%
Método 3	Média	25%	1%	2%	0%	64%	0%
	Desvio	1%	7%	12%	4%	1%	3%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	64%	0%
	Desvio	1%	6%	9%	3%	1%	2%



- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 5;

Tabela A.17: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 5

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	-2%	43%	29%	2%	-5%	-13%
	Desvio	-5%	1%	1%	5%	-15%	-32%
Método 2	Média	0%	44%	29%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	0%	44%	29%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	45%	29%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 5;

Tabela A.18: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 5

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	6%	45%	30%	0%	2%	7%
	Desvio	12%	1%	1%	11%	8%	2%
Método 2	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	1%	1%	1%	7%	1%	7%
Método 3	Média	0%	44%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	1%	1%	4%	0%	7%
Método 4	Média	0%	45%	29%	0%	0%	0%
	Desvio	2%	1%	1%	7%	6%	6%

- Incerteza na força - PCE - Caso 5;

Tabela A.19: Incerteza na força - PCE - Caso 5

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	0%	44%	30%	1%	1%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	45%	29%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 5;

Tabela A.20: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 5

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	0%	45%	30%	0%	0%	0%
	Desvio	1%	7%	11%	3%	1%	2%
Método 2	Média	1%	45%	30%	1%	1%	1%
	Desvio	1%	8%	13%	3%	1%	3%
Método 3	Média	1%	45%	30%	0%	1%	1%
	Desvio	1%	6%	12%	4%	1%	3%
Método 4	Média	1%	45%	30%	1%	1%	1%
	Desvio	1%	6%	8%	3%	1%	2%

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 6;

Tabela A.21: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 6

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	14%	-7%	14%	-4%	40%	6%
	Desvio	1%	-18%	1%	-9%	1%	18%
Método 2	Média	15%	0%	15%	0%	39%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 6;

Tabela A.22: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 6

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	15%	-2%	15%	-4%	40%	-2%
	Desvio	1%	2%	1%	1%	1%	5%
Método 2	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	1%	7%	1%	9%	1%	7%
Método 3	Média	15%	0%	15%	0%	39%	0%
	Desvio	1%	6%	1%	7%	1%	0%
Método 4	Média	15%	0%	15%	0%	39%	0%
	Desvio	1%	9%	1%	8%	1%	3%

- Incerteza na força - PCE - Caso 6;

Tabela A.23: Incerteza na força - PCE - Caso 6

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	15%	0%	15%	0%	39%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	15%	0%	15%	0%	39%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	15%	0%	15%	0%	40%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	15%	0%	15%	0%	39%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 6;

Tabela A.24: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 6

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	15%	0%	15%	0%	39%	0%
	Desvio	1%	7%	12%	3%	1%	2%
Método 2	Média	15%	0%	15%	1%	40%	1%
	Desvio	1%	8%	13%	3%	1%	3%
Método 3	Média	15%	1%	15%	2%	40%	0%
	Desvio	1%	6%	12%	4%	1%	3%
Método 4	Média	15%	1%	15%	0%	40%	1%
	Desvio	1%	6%	8%	3%	1%	2%

## A.2 Análise de sensibilidade estocástica - Estrutura treliçada

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 1

Tabela A.25: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	80%	82%	76%	82%	25%	61%	95%	80%	60%	60%	80%
	Desvio	11%	10%	30%	4%	33%	5%	28%	25%	35%	5%	2%
Método 2	Média	-4%	-3%	60%	3%	53%	1%	83%	3%	-2%	0%	0%
	Desvio	6%	3%	2%	6%	2%	3%	5%	3%	2%	0%	0%
Método 3	Média	24%	24%	-7%	24%	-7%	24%	-7%	-7%	24%	24%	24%
	Desvio	4%	4%	6%	4%	6%	4%	6%	6%	4%	4%	4%
Método 4	Média	24%	24%	-7%	24%	-7%	24%	-7%	-7%	24%	24%	24%
	Desvio	4%	4%	6%	4%	6%	4%	6%	6%	4%	4%	4%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 1

Tabela A.26: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	80%	82%	76%	81%	25%	61%	95%	79%	60%	60%	79%
	Desvio	10%	8%	25%	3%	27%	4%	23%	21%	29%	4%	2%
Método 2	Média	-3%	-3%	60%	2%	52%	1%	83%	3%	-1%	0%	0%
	Desvio	3%	2%	1%	3%	2%	2%	3%	4%	4%	0%	0%
Método 3	Média	24%	24%	-7%	24%	-7%	24%	-7%	-7%	24%	24%	24%
	Desvio	4%	4%	5%	4%	5%	4%	5%	5%	4%	4%	4%
Método 4	Média	24%	24%	-7%	24%	-7%	24%	-7%	-7%	24%	24%	24%
	Desvio	4%	4%	5%	4%	5%	4%	5%	5%	4%	4%	4%

- Incerteza na força - PCE - Caso 1

Tabela A.27: Incerteza na força - PCE - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	1%	5%	3%	5%	0%	1%	0%	4%	3%	2%	5%
Método 2	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	1%	1%	1%	1%	1%	0%	1%	1%	2%	2%
Método 3	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	1%	0%	1%	0%	1%	1%	2%	2%	2%	2%
Método 4	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	2%	1%	0%	2%	0%	0%	1%	1%	2%	0%	2%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 1

Tabela A.28: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-6%	0%	54%	-5%	78%	-12%	85%	0%	-9%	-1%	0%
	Desvio	26%	9%	10%	15%	20%	22%	5%	6%	15%	8%	3%
Método 2	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	5%	5%	2%	0%	2%	3%	3%	1%	2%	3%	0%
Método 3	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	5%	1%	3%	0%	1%	2%	5%	1%	1%	1%	0%
Método 4	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	1%	4%	5%	5%	4%	5%	5%	5%	3%	5%	3%

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 2

Tabela A.29: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	69%	70%	67%	71%	22%	49%	78%	69%	54%	49%	68%
	Desvio	9%	8%	26%	3%	26%	4%	22%	22%	29%	4%	2%
Método 2	Média	2%	55%	-2%	39%	-2%	51%	-2%	-1%	-3%	0%	0%
	Desvio	6%	3%	2%	5%	1%	2%	5%	2%	2%	0%	0%
Método 3	Média	20%	11%	20%	8%	20%	10%	20%	20%	20%	20%	21%
	Desvio	3%	4%	5%	4%	5%	4%	5%	5%	3%	4%	3%
Método 4	Média	19%	11%	20%	8%	20%	10%	20%	20%	21%	21%	20%
	Desvio	4%	4%	5%	4%	5%	4%	5%	5%	4%	4%	4%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 2

Tabela A.30: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	72%	70%	68%	69%	22%	49%	83%	71%	49%	50%	70%
	Desvio	8%	7%	20%	3%	25%	3%	20%	18%	26%	3%	1%
Método 2	Média	0%	63%	0%	37%	-1%	53%	2%	3%	3%	0%	0%
	Desvio	3%	1%	1%	3%	1%	1%	2%	4%	4%	0%	0%
Método 3	Média	21%	16%	-6%	9%	-6%	13%	-6%	-6%	19%	21%	21%
	Desvio	3%	3%	5%	3%	5%	3%	4%	4%	3%	3%	3%
Método 4	Média	19%	13%	21%	7%	-6%	11%	-6%	-6%	21%	20%	21%
	Desvio	3%	3%	4%	3%	4%	3%	4%	4%	3%	3%	3%

- Incerteza na força - PCE - Caso 2

Tabela A.31: Incerteza na força - PCE - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-5%	58%	12%	31%	3%	43%	6%	8%	4%	9%	-12%
	Desvio	8%	20%	15%	11%	14%	21%	9%	13%	15%	16%	14%
Método 2	Média	0%	60%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	2%	1%	2%	2%	4%	5%	5%	0%	0%	4%	5%
Método 3	Média	0%	60%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	4%	1%	4%	4%	1%	0%	2%	5%	3%	2%	2%
Método 4	Média	0%	60%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	4%	0%	1%	5%	4%	0%	5%	3%	3%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 2

Tabela A.32: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-5%	58%	12%	31%	3%	43%	6%	8%	4%	9%	-12%
	Desvio	8%	20%	15%	11%	14%	21%	9%	13%	15%	16%	14%
Método 2	Média	0%	60%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	2%	1%	2%	2%	4%	5%	5%	0%	0%	4%	5%
Método 3	Média	0%	60%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	4%	1%	4%	4%	1%	0%	2%	5%	3%	2%	2%
Método 4	Média	0%	60%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	4%	0%	1%	5%	4%	0%	5%	3%	3%

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 3

Tabela A.33: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	64%	67%	62%	71%	22%	50%	78%	68%	48%	52%	65%
	Desvio	10%	8%	26%	3%	27%	4%	25%	21%	32%	4%	2%
Método 2	Média	0%	3%	3%	0%	18%	-1%	31%	2%	44%	2%	-2%
	Desvio	0%	3%	2%	6%	2%	2%	5%	2%	2%	2%	2%
Método 3	Média	0%	3%	1%	2%	6%	1%	10%	0%	15%	3%	8%
	Desvio	0%	1%	1%	2%	1%	4%	1%	3%	2%	0%	7%
Método 4	Média	0%	2%	0%	4%	6%	1%	10%	3%	15%	0%	1%
	Desvio	0%	6%	2%	8%	1%	3%	1%	7%	2%	5%	2%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 3

Tabela A.34: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	70%	71%	62%	73%	21%	54%	76%	69%	50%	50%	70%
	Desvio	8%	7%	21%	3%	24%	3%	19%	17%	23%	3%	1%
Método 2	Média	0%	2%	0%	3%	12%	2%	25%	-3%	36%	-3%	-2%
	Desvio	0%	1%	1%	3%	1%	1%	2%	4%	4%	1%	1%
Método 3	Média	0%	2%	7%	7%	4%	4%	8%	3%	12%	6%	0%
	Desvio	0%	5%	5%	3%	1%	4%	1%	3%	2%	1%	3%
Método 4	Média	0%	0%	3%	8%	4%	1%	8%	6%	12%	3%	1%
	Desvio	0%	1%	3%	4%	1%	3%	1%	8%	2%	6%	1%

- Incerteza na força - PCE - Caso 3

Tabela A.35: Incerteza na força - PCE - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	4%	4%	5%	1%	3%	1%	3%	0%	0%	1%	4%
Método 2	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	0%	1%	0%	1%	2%	2%	2%	2%	0%	2%	2%
Método 3	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	1%	0%	2%	2%	1%	0%	2%	1%	0%	1%	2%
Método 4	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	2%	2%	0%	2%	0%	1%	1%	2%	2%	0%	2%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 3

Tabela A.36: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	2%	6%	-10%	-1%	18%	9%	24%	2%	37%	10%	-4%
	Desvio	14%	11%	11%	19%	10%	18%	13%	14%	18%	14%	19%
Método 2	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	0%	5%	3%	1%	1%	1%	4%	5%	1%	1%	4%
Método 3	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	5%	2%	3%	1%	3%	5%	5%	0%	5%	2%	2%
Método 4	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	5%	0%	4%	2%	4%	3%	4%	0%	0%	4%	2%

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 4

Tabela A.37: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 4

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	79%	80%	75%	81%	24%	60%	93%	78%	60%	59%	78%
	Desvio	11%	10%	30%	4%	32%	5%	28%	25%	35%	5%	2%
Método 2	Média	-4%	-3%	60%	3%	53%	1%	83%	3%	-2%	0%	0%
	Desvio	6%	3%	2%	6%	2%	3%	5%	3%	2%	0%	0%
Método 3	Média	24%	24%	-7%	24%	-7%	24%	-7%	-7%	24%	24%	24%
	Desvio	4%	4%	6%	4%	6%	4%	6%	6%	4%	4%	4%
Método 4	Média	24%	24%	-7%	24%	-7%	24%	-7%	-7%	24%	24%	24%
	Desvio	4%	4%	6%	4%	6%	4%	6%	6%	4%	4%	4%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 4

Tabela A.38: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 4

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	79%	80%	75%	81%	24%	60%	93%	78%	60%	59%	78%
	Desvio	11%	10%	30%	4%	32%	5%	28%	25%	35%	5%	2%
Método 2	Média	-4%	-3%	60%	3%	53%	1%	83%	3%	-2%	0%	0%
	Desvio	6%	3%	2%	6%	2%	3%	5%	3%	2%	0%	0%
Método 3	Média	24%	24%	-7%	24%	-7%	24%	-7%	-7%	24%	24%	24%
	Desvio	4%	4%	6%	4%	6%	4%	6%	6%	4%	4%	4%
Método 4	Média	24%	24%	-7%	24%	-7%	24%	-7%	-7%	24%	24%	24%
	Desvio	4%	4%	6%	4%	6%	4%	6%	6%	4%	4%	4%



- Incerteza na força - PCE - Caso 4

Tabela A.39: Incerteza na força - PCE - Caso 4

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	84%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	1%	5%	3%	5%	0%	1%	0%	4%	3%	2%	5%
Método 2	Média	0%	0%	54%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	1%	1%	1%	1%	1%	0%	1%	1%	2%	2%
Método 3	Média	0%	0%	54%	0%	69%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	1%	0%	1%	0%	1%	1%	2%	2%	2%	2%
Método 4	Média	0%	0%	54%	0%	69%	0%	84%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	2%	1%	0%	2%	0%	0%	1%	1%	2%	0%	2%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 4

Tabela A.40: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 4

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-6%	0%	53%	-4%	77%	-11%	83%	0%	-9%	-1%	0%
	Desvio	26%	9%	10%	15%	20%	22%	5%	6%	14%	8%	3%
Método 2	Média	0%	0%	54%	0%	69%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	5%	5%	2%	0%	2%	3%	3%	1%	2%	3%	0%
Método 3	Média	0%	0%	54%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	5%	1%	3%	0%	1%	2%	5%	1%	1%	1%	0%
Método 4	Média	0%	0%	54%	0%	69%	0%	83%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	1%	4%	5%	5%	4%	5%	5%	5%	3%	5%	3%

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 5

Tabela A.41: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 5

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	68%	70%	66%	71%	22%	49%	78%	69%	53%	49%	68%
	Desvio	9%	8%	26%	3%	26%	4%	22%	22%	29%	4%	2%
Método 2	Média	2%	55%	-2%	38%	-2%	50%	-2%	-1%	-3%	0%	0%
	Desvio	6%	3%	2%	5%	1%	2%	5%	2%	2%	0%	0%
Método 3	Média	20%	11%	20%	8%	20%	10%	20%	20%	20%	19%	21%
	Desvio	3%	4%	5%	4%	5%	4%	5%	5%	3%	4%	3%
Método 4	Média	19%	11%	20%	8%	20%	10%	20%	20%	21%	21%	20%
	Desvio	3%	4%	5%	4%	5%	4%	5%	5%	4%	4%	4%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 5

Tabela A.42: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 5

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	72%	68%	67%	69%	22%	49%	83%	70%	49%	50%	70%
	Desvio	8%	7%	20%	3%	24%	3%	19%	17%	26%	3%	1%
Método 2	Média	0%	62%	0%	37%	-1%	52%	2%	3%	3%	0%	0%
	Desvio	3%	1%	1%	3%	1%	1%	2%	4%	4%	0%	0%
Método 3	Média	21%	15%	-6%	9%	-6%	13%	-6%	-6%	19%	21%	20%
	Desvio	3%	3%	4%	3%	5%	3%	4%	4%	3%	3%	3%
Método 4	Média	19%	13%	21%	7%	-6%	10%	-6%	-6%	21%	20%	21%
	Desvio	3%	3%	4%	3%	4%	3%	4%	4%	3%	3%	3%

- Incerteza na força - PCE - Caso 5

Tabela A.43: Incerteza na força - PCE - Caso 5

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	0%	59%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	1%	0%	1%	3%	2%	4%	4%	0%	0%	3%
Método 2	Média	0%	59%	0%	35%	0%	49%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	1%	2%	2%	2%	0%	0%	0%	0%	1%
Método 3	Média	0%	59%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	2%	2%	1%	1%	1%	2%	0%	1%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	60%	0%	35%	0%	49%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	1%	1%	0%	0%	2%	0%	1%	2%	2%	0%	0%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 5

Tabela A.44: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 5

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-5%	57%	12%	30%	3%	43%	6%	8%	4%	9%	-12%
	Desvio	8%	20%	15%	11%	14%	21%	9%	13%	15%	16%	14%
Método 2	Média	0%	59%	0%	34%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	2%	1%	2%	2%	4%	5%	5%	0%	0%	4%	5%
Método 3	Média	0%	59%	0%	35%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	4%	1%	4%	4%	1%	0%	2%	5%	3%	2%	2%
Método 4	Média	0%	59%	0%	35%	0%	49%	0%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	4%	0%	1%	5%	4%	0%	5%	3%	3%

- Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 6

Tabela A.45: Incerteza na força - Monte Carlo - Caso 6

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	64%	66%	62%	70%	21%	50%	78%	67%	48%	52%	65%
	Desvio	10%	8%	26%	3%	26%	4%	25%	21%	32%	4%	2%
Método 2	Média	0%	3%	3%	0%	18%	-1%	31%	2%	44%	2%	-2%
	Desvio	0%	3%	2%	5%	2%	2%	5%	2%	2%	2%	2%
Método 3	Média	0%	3%	1%	2%	6%	1%	10%	0%	15%	3%	8%
	Desvio	0%	1%	1%	2%	1%	4%	1%	3%	2%	0%	7%
Método 4	Média	0%	2%	0%	4%	6%	1%	10%	3%	14%	0%	1%
	Desvio	0%	6%	2%	8%	1%	3%	1%	7%	2%	5%	2%

- Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 6

Tabela A.46: Incerteza no deslocamento - Monte Carlo - Caso 6

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	69%	71%	60%	72%	21%	54%	74%	69%	50%	50%	70%
	Desvio	8%	7%	21%	3%	24%	3%	19%	16%	23%	3%	1%
Método 2	Média	0%	2%	0%	3%	12%	2%	25%	-3%	36%	-3%	-2%
	Desvio	0%	1%	1%	3%	1%	1%	2%	4%	4%	1%	1%
Método 3	Média	0%	2%	7%	7%	4%	4%	8%	3%	12%	6%	0%
	Desvio	0%	5%	5%	3%	1%	4%	1%	3%	2%	1%	3%
Método 4	Média	0%	0%	3%	8%	4%	1%	8%	6%	12%	3%	1%
	Desvio	0%	1%	3%	4%	1%	3%	1%	8%	2%	6%	1%

- Incerteza na força - PCE - Caso 6

Tabela A.47: Incerteza na força - PCE - Caso 6

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	4%	4%	5%	1%	3%	1%	3%	0%	0%	1%	4%
Método 2	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	39%	0%	0%
	Desvio	0%	1%	0%	1%	2%	2%	2%	2%	0%	2%	2%
Método 3	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	29%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	1%	0%	2%	2%	1%	0%	2%	1%	0%	1%	2%
Método 4	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	39%	0%	0%
	Desvio	2%	2%	0%	2%	0%	1%	1%	2%	2%	0%	2%

- Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 6

Tabela A.48: Incerteza no deslocamento - PCE - Caso 6

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	2%	6%	-10%	-1%	18%	9%	24%	2%	37%	10%	-4%
	Desvio	14%	11%	11%	19%	10%	18%	13%	14%	18%	14%	19%
Método 2	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	0%	5%	3%	1%	1%	1%	4%	5%	1%	1%	4%
Método 3	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	29%	0%	39%	0%	0%
	Desvio	5%	2%	3%	1%	3%	5%	5%	0%	5%	2%	2%
Método 4	Média	0%	0%	0%	0%	15%	0%	30%	0%	40%	0%	0%
	Desvio	5%	0%	4%	2%	4%	3%	4%	0%	0%	4%	2%

### A.3 Análise estocástica - Massa-mola-amortecedor

- Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 1

Tabela A.49: Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	9%	-17%	-5%	66%	-3%
	Desvio	1%	18%	36%	21%	1%	11%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 1

Tabela A.50: Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	2%	0%	-7%	65%	-3%
	Desvio	1%	8%	2%	21%	1%	10%
Método 2	Média	25%	0%	0%	-1%	65%	-1%
	Desvio	1%	4%	2%	9%	1%	4%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	3%	2%	7%	1%	4%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	4%	2%	8%	1%	4%

- Distribuição Gamma - PCE - Caso 1

Tabela A.51: Distribuição Gamma - PCE - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	21%	-10%	-1%	-3%	60%	-18%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - PCE - Caso 1

Tabela A.52: Distribuição Normal - PCE - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	24%	-12%	-16%	2%	67%	-3%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	25%	-1%	1%	3%	64%	4%
	Desvio	0%	1%	0%	1%	1%	0%
Método 3	Média	25%	-1%	2%	5%	64%	5%
	Desvio	0%	1%	1%	1%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	1%	63%	4%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 2

Tabela A.53: Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	9%	-17%	-5%	66%	-3%
	Desvio	1%	13%	24%	20%	1%	9%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 2

Tabela A.54: Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	2%	0%	-7%	65%	-3%
	Desvio	1%	7%	2%	18%	1%	9%
Método 2	Média	25%	0%	0%	-1%	65%	-1%
	Desvio	1%	4%	2%	9%	1%	4%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	3%	2%	6%	1%	4%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	3%	2%	7%	1%	4%

- Distribuição Gamma - PCE - Caso 2

Tabela A.55: Distribuição Gamma - PCE - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	21%	-10%	-1%	-3%	60%	-18%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - PCE - Caso 2

Tabela A.56: Distribuição Normal - PCE - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	24%	-12%	-16%	2%	67%	-3%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	25%	-1%	1%	3%	64%	4%
	Desvio	0%	1%	0%	1%	1%	0%
Método 3	Média	25%	-1%	2%	5%	64%	5%
	Desvio	0%	1%	1%	1%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	1%	63%	4%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 3

Tabela A.57: Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	9%	-17%	-5%	66%	-3%
	Desvio	1%	18%	36%	21%	1%	11%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 3

Tabela A.58: Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	25%	2%	0%	-7%	65%	-3%
	Desvio	1%	8%	2%	21%	1%	10%
Método 2	Média	25%	0%	0%	-1%	65%	-1%
	Desvio	1%	4%	2%	9%	1%	4%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	3%	2%	7%	1%	4%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	1%	4%	2%	8%	1%	4%

- Distribuição Gamma - PCE - Caso 3

Tabela A.59: Distribuição Gamma - PCE - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	21%	-10%	-1%	-3%	60%	-18%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	0%	65%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - PCE - Caso 3

Tabela A.60: Distribuição Normal - PCE - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6
Método 1	Média	24%	-12%	-16%	2%	67%	-3%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 2	Média	25%	-1%	1%	3%	64%	4%
	Desvio	0%	1%	0%	1%	1%	0%
Método 3	Média	25%	-1%	2%	5%	64%	5%
	Desvio	0%	1%	1%	1%	0%	0%
Método 4	Média	25%	0%	0%	1%	63%	4%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%



## A.4 Análise estocástica - Estrutura treliçada

- Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 1

Tabela A.61: Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	9%	7%	55%	12%	71%	-15%	86%	1%	-13%	-10%	12%
	Desvio	7%	11%	1%	9%	2%	10%	2%	11%	12%	9%	12%
Método 2	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 1

Tabela A.62: Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-7%	2%	56%	-8%	71%	3%	86%	-3%	-4%	8%	-1%
	Desvio	18%	15%	1%	20%	2%	20%	2%	19%	8%	8%	19%
Método 2	Média	-1%	0%	55%	-1%	70%	-1%	85%	0%	-1%	0%	0%
	Desvio	3%	9%	1%	4%	2%	8%	2%	4%	5%	5%	10%
Método 3	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	1%
	Desvio	2%	3%	1%	3%	1%	5%	2%	6%	5%	6%	2%
Método 4	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	3%	2%	1%	5%	1%	5%	2%	4%	3%	7%	3%

- Distribuição Gamma - PCE - Caso 1

Tabela A.63: Distribuição Gamma - PCE - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-15%	-13%	55%	-8%	71%	-12%	86%	-7%	-14%	11%	9%
	Desvio	1%	1%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	0%	1%	1%
Método 2	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - PCE - Caso 1

Tabela A.64: Distribuição Normal - PCE - Caso 1

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-3%	12%	55%	5%	70%	-15%	85%	-11%	-5%	-4%	-3%
	Desvio	26%	9%	10%	15%	20%	22%	5%	6%	15%	8%	3%
Método 2	Média	-3%	2%	56%	2%	70%	2%	85%	2%	-3%	2%	-1%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	0%	1%	1%
Método 3	Média	3%	-2%	56%	0%	69%	-2%	85%	3%	-3%	-2%	3%
	Desvio	0%	0%	0%	1%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	1%
Método 4	Média	2%	-3%	55%	-1%	72%	1%	85%	-1%	3%	-1%	3%
	Desvio	1%	1%	0%	1%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	1%

- Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 2

Tabela A.65: Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	10%	7%	57%	11%	70%	-14%	86%	1%	-13%	-10%	11%
	Desvio	7%	11%	1%	8%	2%	9%	2%	10%	12%	9%	12%
Método 2	Média	0%	0%	56%	0%	65%	0%	88%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	0%	0%	55%	0%	69%	0%	84%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	0%	52%	0%	64%	0%	79%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 2

Tabela A.66: Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-7%	2%	56%	-8%	70%	3%	88%	-3%	-4%	8%	-1%
	Desvio	17%	14%	1%	20%	2%	20%	2%	18%	7%	7%	19%
Método 2	Média	-1%	0%	58%	-1%	68%	-1%	79%	0%	-1%	0%	0%
	Desvio	3%	9%	1%	4%	2%	7%	2%	4%	5%	5%	9%
Método 3	Média	0%	0%	54%	0%	73%	0%	81%	0%	0%	0%	1%
	Desvio	2%	3%	1%	3%	1%	5%	2%	6%	5%	6%	2%
Método 4	Média	0%	0%	61%	0%	65%	0%	92%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	3%	2%	1%	5%	1%	5%	2%	4%	3%	7%	3%

- Distribuição Gamma - PCE - Caso 2

Tabela A.67: Distribuição Gamma - PCE - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-16%	-13%	55%	-8%	65%	-11%	85%	-7%	-13%	12%	8%
	Desvio	1%	1%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	0%	1%	1%
Método 2	Média	0%	0%	50%	0%	63%	0%	88%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	0%	0%	60%	0%	73%	0%	87%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	0%	59%	0%	71%	0%	91%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - PCE - Caso 2

Tabela A.68: Distribuição Normal - PCE - Caso 2

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-3%	12%	51%	5%	63%	-14%	84%	-11%	-5%	-4%	-3%
	Desvio	23%	9%	10%	15%	19%	22%	5%	6%	15%	8%	3%
Método 2	Média	-3%	2%	57%	2%	76%	2%	82%	2%	-3%	2%	-1%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	0%	1%	1%
Método 3	Média	3%	-2%	50%	0%	67%	-2%	82%	3%	-3%	-2%	3%
	Desvio	0%	0%	0%	1%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	1%
Método 4	Média	2%	-3%	55%	-1%	76%	1%	93%	-1%	3%	-1%	3%
	Desvio	1%	1%	0%	1%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	1%

- Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 3

Tabela A.69: Distribuição Gamma - Monte Carlo - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	9%	7%	55%	12%	71%	-15%	86%	1%	-13%	-10%	12%
	Desvio	6%	11%	1%	8%	2%	9%	2%	10%	13%	8%	12%
Método 2	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 3

Tabela A.70: Distribuição Normal - Monte Carlo - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-7%	2%	56%	-8%	71%	3%	86%	-3%	-4%	8%	-1%
	Desvio	18%	15%	1%	21%	2%	19%	2%	17%	8%	8%	19%
Método 2	Média	-1%	0%	55%	-1%	70%	-1%	85%	0%	-1%	0%	0%
	Desvio	3%	9%	1%	4%	2%	8%	2%	4%	5%	5%	9%
Método 3	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	1%
	Desvio	2%	3%	1%	3%	1%	5%	2%	6%	5%	6%	2%
Método 4	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	3%	2%	1%	5%	1%	5%	2%	4%	3%	7%	3%

- Distribuição Gamma - PCE - Caso 3

Tabela A.71: Distribuição Gamma - PCE - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-15%	-13%	55%	-8%	71%	-12%	86%	-7%	-14%	11%	9%
	Desvio	1%	1%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	0%	1%	1%
Método 2	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 3	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Método 4	Média	0%	0%	55%	0%	70%	0%	85%	0%	0%	0%	0%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

- Distribuição Normal - PCE - Caso 3

Tabela A.72: Distribuição Normal - PCE - Caso 3

Danos		k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11
Método 1	Média	-3%	12%	55%	5%	70%	-15%	85%	-11%	-5%	-4%	-3%
	Desvio	27%	9%	11%	15%	19%	22%	5%	5%	14%	8%	3%
Método 2	Média	-3%	2%	56%	2%	70%	2%	85%	2%	-3%	2%	-1%
	Desvio	0%	0%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	0%	1%	1%
Método 3	Média	3%	-2%	56%	0%	69%	-2%	85%	3%	-3%	-2%	3%
	Desvio	0%	0%	0%	1%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	1%
Método 4	Média	2%	-3%	55%	-1%	72%	1%	85%	-1%	3%	-1%	3%
	Desvio	1%	1%	0%	1%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	1%