



## FORMAÇÃO DE GEADA EM SUPERFÍCIES FRIAS

Paula Lyra Falquetto

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Nísio de Carvalho Lobo Brum

Rio de Janeiro  
Novembro de 2018

FORMAÇÃO DE GEADA EM SUPERFÍCIES FRIAS

Paula Lyra Falchetto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

---

Prof. Albino José Kalab Leiroz, Ph.D.

---

Prof. José Alberto dos Reis Parise, Ph.D.

---

Prof. Manuel Ernani de Carvalho Cruz, Ph.D.

---

Prof. Nísio de Carvalho Lobo Brum, D.Sc.

---

Prof. Rodrigo Otavio de Castro Guedes, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 2018

Falquetto, Paula Lyra

Formação de Geada em Superfícies Frias/ Paula Lyra Falquetto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018. XXIV, 144 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Nísio de Carvalho Lobo Brum

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 139-144.

1. Crescimento de geada 2. Meio Poroso 3. Modelagem .I. Brum, Nísio de Carvalho Lobo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*Dedico este trabalho aos meus pais,  
pelo apoio que me permitiu chegar  
até aqui.*

## AGRADECIMENTOS

À minha mãe e ao meu pai pelo amor, força, apoio e incentivo. Sem vocês isso não seria possível.

À minha irmã pelo amor, amizade, apoio e confiança.

Ao meu companheiro Maurinho, pelo amor, apoio, incentivo, parceria e conversas, de crescimento conjunto, durante todos esses anos.

Ao prof. Dr. Nísio pela confiança, incentivo, ensinamentos e orientação. Pela leveza e descontração em todos os momentos. Tem a minha admiração.

À toda minha família pelo apoio e alegrias vividas.

Aos meus velhos amigos, pelo apoio e amizade de tantos anos, pelas conversas, desabafos e momentos de alegria e felicidade: Mariana, Dayan, Driely, Fortunato, Karen, Bruno José, Hyan, Carol e Michele.

Ao amigo Inoussa, pela paciência e ajuda no início desta tese.

Aos amigos que fiz durante o doutorado Daniel, Rafael e Iasmin, pelas melhores risadas do laboratório, e, Lucas, Paloma e Rodrigo, todos eles por estarem tão presentes na minha vida nesses últimos anos.

Aos colegas do laboratório: Ana Cláudia, Bernard, Bruna, Bruno, Bruno, Diego, Gino, Henrique, Marcos Vinícius, Masoud, Milena, Mohsen, Nilton e Raphael pelos inúmeros momentos de descontração e convivência agradável ao longo desses anos.

Aos Profs. da Faculdade de Engenharia Mecânica da COPPE, em especial Albino Leiróz, Antonio Figueiredo, Manuel Ernani pelos ensinamentos e sugestões.

Aos Profs. José Alberto dos Reis Parise e Rodrigo Otavio de Castro Guedes pelas valiosas contribuições.

Aos funcionários do Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor (LTTC) e da Secretaria de Pós-graduação pela jornada ao longo desses anos: Evanise, Paulo Veiga, Júlio, Luciana, Paulo Cesar, Tito e Vera.

A todos aqueles que, de alguma maneira, estiveram presentes nessa etapa, pelo apoio e motivação ao longo desses anos.

O presente trabalho foi realizado com apoio Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil (CNPQ).

*“O começo de todas as ciências é o espanto de as coisas serem o que são”.*

(Aristóteles)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.)

## FORMAÇÃO DE GEADA EM SUPERFÍCIES FRIAS

Paula Lyra Falquetto

Novembro/2018

Orientador: Nísio de Carvalho Lobo Brum

Programa: Engenharia Mecânica

A formação de geada é um dos maiores problemas em alguns tipos de equipamentos de refrigeração e bombas de calor e acontece pela deposição progressiva e acúmulo de gelo nas superfícies dos trocadores de calor quando sua superfície fica abaixo de zero, acarretando em problemas significativos na operação dos evaporadores. Muitas das pesquisas existentes concentram-se na compreensão das características da camada de geada e o seu crescimento em placas planas. Em vista disso, o trabalho teve como objetivo prever o comportamento da geada a partir de um modelo físico formado por um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares que é resolvido de maneira acoplada. O contorno é considerado móvel a fim de representar o crescimento da geada em cada tempo. A camada de geada é tratada como meio poroso e para isso, usou-se a formulação da média volumétrica local para resolução. Identificou-se que a melhor formulação para o número de Nusselt é a que considerou a rugosidade da geada, representando melhor a transferência de calor por convecção. Na avaliação da expressão da difusividade efetiva, observou-se extrema dependência do valor assumido do fator de resistência à difusão em relação à espessura e massa específica da geada, e a escolha teve grande importância para a validação da simulação com os dados experimentais da literatura. A espessura inicial considerada teve influência a partir de um certo valor e a massa específica inicial influenciou de modo proporcional à medida que foi aumentada.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## FROST FORMATION ON A COLD SURFACES

Paula Lyra Falchetto

November/2018

Advisors: Nísio de Carvalho Lobo Brum

Department: Mechanical Engineering

Frost formation is one of the largest problems in some types of refrigeration equipment and heat pumps and occurs by the progressive deposition and ice accumulation on surfaces of heat exchangers when their surface is below zero, leading to significant problems in operation of evaporators. Many of the existing researches concentrate on understanding the characteristics of the frost layer and their growth on flat plates. The objective of this work was to predict the behavior of frost from a physical model formed by a system of nonlinear partial differential equations that are solved in a coupled manner. The boundary is considered mobile in order to represent the growth of the frost in each time of evaluation. The frost layer is treated as a porous medium and the local volume averaging technique was used for resolution. It was identified that the best formulation for the Nusselt number is the one considering the frost roughness, representing the heat transfer by convection in a better way. Evaluating the effective diffusivity expression, it was observed the extreme dependence of the assumed diffusion resistance factor value in relation to the thickness and density of frost, and the choice had great importance for validation of simulation with the experimental data found on literature. The assumed initial thickness had influence from certain value and the initial density influenced in a proportional way as it was increased.



## SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS .....	xviii
CAPÍTULO I.....	1
1 FENÔMENO DE FORMAÇÃO DE GEADA.....	1
1.1 INTRODUÇÃO .....	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	3
1.2.1 Estudos estruturais das fases sólidas da água a baixas temperaturas ....	3
1.2.2 Sinterização e adesão .....	5
1.2.3 Fenômeno de cristalização na formação do geada.....	6
1.2.4 Estudos experimentais e de modelos de formação de geada .....	17
1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	28
1.3.1 Objetivos específicos.....	28
CAPÍTULO II.....	30
2 PROBLEMA FÍSICO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	30
2.1 EQUAÇÕES GERAIS DE TRANSPORTE DE MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA .....	32
2.2 FORMULAÇÕES DAS EQUAÇÕES LOCAIS DE CONSERVAÇÃO.....	33
2.2.1 Fase Sólida .....	34
2.2.2 Fase gasosa.....	35
2.3 FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EM MÉDIA VOLUMÉTRICA.....	38
2.3.1 Equações da fase sólida.....	40

2.3.2	Fase gasosa.....	45
2.3.3	Equação Total da Energia .....	49
2.3.4	Equação da Difusão da fase vapor .....	53
CAPÍTULO III.....		55
3	MODELAGEM DO PROCESSO DE FORMAÇÃO DE GELO.....	55
3.1	EQUAÇÕES FINAIS DE CONSERVAÇÃO.....	55
3.1.1	Equação da Energia .....	56
3.1.2	Equação da Continuidade da fase sólida $\beta$ .....	57
3.1.3	Equação de Difusão da fase gás-vapor .....	57
3.1.4	Condições Iniciais.....	57
3.1.5	Condições de Contorno .....	59
3.2	AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS.....	61
3.2.1	Propriedades termofísicas do gelo.....	61
3.2.2	Propriedades termofísicas do ar seco e do vapor d'água .....	63
CAPÍTULO IV .....		67
4	TRATAMENTO NUMÉRICO .....	67
4.1	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	67
4.1.1	Discretização da Equação da Energia .....	68
4.1.2	Discretização da Equação da Difusão de massa .....	76
4.2	MÉTODO DE SOLUÇÃO.....	82
4.2.1	Laço temporal e laço iterativo espacial .....	82

4.2.2	Algoritmo de solução .....	84
4.2.3	Análise de convergência de malha .....	85
CAPÍTULO V .....		87
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	87
5.1	CONDIÇÕES INICIAIS .....	87
5.2	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA MALHA OBTIDA.....	89
5.3	VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....	91
5.4	INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE NUSSELT .....	94
5.5	INFLUÊNCIA DO FATOR DE RESISTÊNCIA À DIFUSÃO.....	105
5.6	INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE REYNOLDS .....	112
5.7	INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA DO AR INSUFLADO .....	117
5.8	INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA DA SUPERFÍCIE DA PLACA .....	121
5.9	INFLUÊNCIA DA UMIDADE RELATIVA DO AR .....	126
5.10	ANÁLISE DO COMPORTAMENTO POR VOLUME .....	131
CAPÍTULO VI .....		136
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....	136
6.1	CONCLUSÕES .....	136
6.2	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....	138
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		139

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. 1 Representação dos três estados de uma molécula escapando da superfície para o interior do gelo ou para a fase vapor (Adaptado de GURNEY, 1949). ....	4
Figura 1. 2 Representação esquemática do sinterizado de duas esferas de gelo (Adaptado de HOBBS, 1974).....	6
Figura 1. 3 Carta Psicrométrica com a representação do processo de nucleação (adaptado de HERMES et. al, 2009).....	7
Figura 1. 4 Representação esquemática de uma nucleação heterogênea e uma nucleação homogênea.....	8
Figura 1. 5 Morfologia da geada em função do grau de supersaturação e da temperatura de superfície (adaptado de KOBAYASHI, 1958).....	9
Figura 1. 6 Representação esquemática dos processos de formação e crescimento da geada (Adaptado de TAO, BESANT, MAO, 1993). ....	10
Figura 1. 7 Diagrama esquemático dos padrões de formação de geada no período de crescimento quase estático (Adaptado de AOKI, KATAYAMA, HAYASHI, 1983) .....	12
Figura 1. 8 Classificação dos tipos de formação de geada segundo HAYASHI et. al, 1977 (Adaptado de HAYASHI et. al, 1977).....	15
Figura 1. 9 Gráfico de razão de umidade por temperatura mostrando os padrões de formação de geada (Adaptado de HAYASHI et. al, 1977).....	16
Figura 2. 1 Esquema do fenômeno físico a ser analisado .....	31
Figura 2. 2 Volume Elementar do Meio Poroso.....	33
Figura 3. 1 Ilustração dos fenômenos ocorrendo na geada .....	56

Figura 4. 1 Ilustração dos fenômenos que acontecem na geada com a malha computacional para utilização do método de volumes finitos .....	67
Figura 4. 2 Ilustração dos fenômenos de transferência de calor que acontecem nos nós internos da geada .....	68
Figura 4. 3 Ilustração dos fenômenos de transferência de calor que acontecem na base da geada, na fronteira com a placa .....	71
Figura 4. 4 Ilustração dos fenômenos de transferência de calor que acontecem na parte superior da geada, em contato com o ar úmido .....	73
Figura 4. 5 Ilustração dos fenômenos de transferência de massa que acontecem nos nós internos da geada .....	77
Figura 4. 6 Ilustração dos fenômenos de transferência de calor que acontecem na parte superior da geada, em contato com o ar úmido .....	79
Figura 4. 7 Ilustração dos fenômenos de transferência de massa que acontecem na base da geada, na fronteira com a placa .....	81
Figura 4. 8 Diagrama de fluxo do algoritmo de solução .....	84
Figura 5. 1 Influência da espessura inicial da geada no crescimento de geada .....	87
Figura 5. 2 Influência da espessura inicial da geada na massa específica da geada ..	88
Figura 5. 3 Gráfico do estudo de convergência de malha para Temperatura .....	91
Figura 5. 4 Estudo de convergência de malha para fração volumétrica de gelo.....	91
Figura 5. 5 Comparação com resultados para espessura da geada .....	92
Figura 5. 6 Comparação com resultados para massa específica da geada .....	93
Figura 5. 7 Resultados de espessura da geada para diferentes equações de Nusselt para Reynolds igual a 4400 .....	97

Figura 5. 8 Resultados de espessura da geada para diferentes equações de Nusselt para Reynolds igual a 6700 .....	98
Figura 5. 9 Resultados de espessura da geada para diferentes equações de Nusselt para Reynolds igual a 9800 .....	98
Figura 5. 10 Resultados de espessura da geada para diferentes equações de Nusselt para Reynolds igual a 15900 .....	99
Figura 5. 11 Erros relativos obtidos da equação de Nusselt de O'Neal e Tree (1985) calculados em relação aos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984) para cada número de Reynolds.....	99
Figura 5. 12 Erros relativos obtidos da equação de Nusselt de Pethukov e Popov com fator de atrito de Petukhov (1970) calculados em relação aos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984) para cada número de Reynolds.....	100
Figura 5. 13 Erros relativos obtidos da equação de Pethukov e Popov com fator de atrito de Blasius calculados em relação aos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984) para cada número de Reynolds .....	100
Figura 5. 14 Erros relativos obtidos da equação de Pethukov e Popov com fator de atrito de Haaland (1983) calculados em relação aos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984) para cada número de Reynolds.....	101
Figura 5. 15 Erros relativos obtidos da equação de Nusselt de Gnielinski (1976) com fator de atrito de Petukhov (1970) calculados em relação aos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984) para cada número de Reynolds.....	101
Figura 5. 16 Resultados de massa específica da geada para diferentes equações de Nusselt .....	102
Figura 5. 17 Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão .....	107
Figura 5. 18 Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão para $Re=32400$ em relação à massa específica e ao crescimento da geada.....	110
Figura 5. 19 Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão para $Re=32400$ em relação à temperatura da superfície da geada.....	110

Figura 5. 20 Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão para $Re=5500$ em relação à massa específica e ao crescimento da geada.....	111
Figura 5. 21 Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão para $Re=5500$ em relação à temperatura da superfície da geada.....	111
Figura 5. 22 Influência do número de Reynolds na espessura da geada .....	113
Figura 5. 23 Influência do número de Reynolds na massa específica da geada .....	114
Figura 5. 24 Influência do número de Reynolds na temperatura da geada .....	114
Figura 5. 25 Influência do número de Reynolds na temperatura da superfície da geada .....	115
Figura 5. 26 Influência do número de Reynolds na fração volumétrica de gelo na geada .....	115
Figura 5. 27 Influência do número de Reynolds na condutividade térmica da geada	116
Figura 5. 28 Influência do número de Reynolds na difusividade efetiva da geada ....	116
Figura 5. 29 Influência da temperatura do ar na espessura da geada.....	117
Figura 5. 30 Influência da temperatura do ar na massa específica da geada.....	118
Figura 5. 31 Influência da temperatura do ar na temperatura da geada.....	118
Figura 5. 32 Influência da temperatura do ar na temperatura da superfície da geada .....	119
Figura 5. 33 Influência da temperatura do ar na fração volumétrica de gelo na geada .....	119
Figura 5. 34 Influência da temperatura do ar na condutividade térmica da geada.....	120
Figura 5. 35 Influência da temperatura do ar na difusividade efetiva da geada .....	120
Figura 5. 36 Influência da temperatura da placa na espessura da geada .....	122
Figura 5. 37 Influência da temperatura da placa na massa específica da geada .....	123

Figura 5. 38 Influência da temperatura da placa na temperatura da geada.....	123
Figura 5. 39 Influência da temperatura da placa na temperatura da superfície da geada .....	124
Figura 5. 40 Influência da temperatura da placa na fração volumétrica de gelo da geada .....	124
Figura 5. 41 Influência da temperatura da placa na condutividade térmica da geada	125
Figura 5. 42 Influência da temperatura da placa na difusividade efetiva da geada....	125
Figura 5. 43 Influência da umidade relativa na espessura da geada.....	127
Figura 5. 44 Influência da umidade relativa na massa específica da geada.....	128
Figura 5. 45 Influência da umidade relativa na temperatura da geada .....	128
Figura 5. 46 Influência da umidade relativa na temperatura da superfície da geada .	129
Figura 5. 47 Influência da umidade relativa na fração volumétrica de gelo na geada	129
Figura 5. 48 Influência da umidade relativa na condutividade térmica da geada.....	130
Figura 5. 49 Influência da umidade relativa na difusividade efetiva da geada .....	130
Figura 5. 50 Comportamento da temperatura da geada em cada volume para o caso 1 .....	131
Figura 5. 51 Comportamento da temperatura da geada em cada volume para o caso 2 .....	132
Figura 5. 52 Comportamento da temperatura da geada em cada volume para o caso 3 .....	132
Figura 5. 53 Comportamento da temperatura da geada em cada volume para o caso 4 .....	133
Figura 5. 54 Comportamento da massa específica da geada em cada volume para o caso 1 .....	134



Figura 5. 55 Comportamento da massa específica da geada em cada volume para o caso 2.....	134
Figura 5. 56 Comportamento da massa específica da geada em cada volume para o caso 3.....	135
Figura 5. 57 Comportamento da massa específica da geada em cada volume para o caso 4.....	135

## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição	Unidades
$A$	Área da seção transversal	[m <sup>2</sup> ]
$C_p$	Calor específico	[J/kg·°C]
$C$	Parâmetros de correlação da ASHRAE para pressão de saturação e temperatura de ponto de orvalho	[adimensional]
$CGI_{fina}$	Índice de convergência da malha refinada	[adimensional]
$D, D_{AB}$	Coeficiente de difusão de massa, indo de A em B	[m <sup>2</sup> /s]
$D_{eff}$	Coeficiente de difusividade efetiva da geada	[m <sup>2</sup> /s]
$D_h$	Diâmetro hidráulico	[m]
$e$	Erro relativo	[adimensional]
$f$	Fator de atrito	[adimensional]
$F, F_\mu$	Coeficiente de correção do parâmetro de resistência à difusão	[adimensional]
$g$	Aceleração da gravidade	[m/s <sup>2</sup> ]
$G$	Energia livre de Gibbs	[J]

$h$	Entalpia por unidade de massa	[J/kg]
$h$	Tamanho de elemento característico (item 4.2.3)	
$h_{cv}$	Coefficiente convectivo de transmissão de calor	[W/m <sup>2</sup> ·K]
$h_m$	Coefficiente convectivo de transferência de massa	[m/s]
$k$	Condutividade térmica	[W/m·K]
$k_{eff}$	Condutividade térmica efetiva da geada	[W/m · K]
$Le$	Número adimensional de Lewis	[adimensional]
$\dot{m}$	Taxa volumétrica de mudança de fase	[kg/m <sup>3</sup> ·s]
$n_t$	Fluxo total de massa	[kg/m <sup>2</sup> ·s]
$n; n_d$	Fluxo de massa do vapor d'água	[kg/m <sup>2</sup> ·s]
$Nu$	Número adimensional de Nusselt	[adimensional]
$p$	Pressão	[Pa]
$p$	Ordem aparente do método (item 4.2.3)	[adimensional]
$P$	Perímetro da seção transversal.	[m]
$Pr$	Número adimensional de Prandtl	[adimensional]

$q$	Fluxo de calor	[W/m <sup>2</sup> ]
$r$	Fator de refinamento da malha	[adimensional]
$R$	Constante dos gases ideais	[J/mol·K]
$Re$	Número adimensional de Reynolds	[adimensional]
$rug$	Rugosidade da superfície	[m]
$t$	Tempo	[s]
$T$	Temperatura	[K]
$\underline{\underline{T}}$	Tensor total de esforços	[N/m <sup>2</sup> ]
$\underline{u}$	Velocidade de difusão	[m/s]
UR	Umidade Relativa	[%]
$V$	Volume	[m <sup>3</sup> ]
$V(t)$	Volume contido no volume médio	[m <sup>3</sup> ]
$\underline{v}$	Velocidade média mássica	[m/s]
$v_{ar}$	Velocidade do ar ambiente (do fluxo de ar úmido)	[m/s]
$\underline{w}$	Velocidade na interface	[m/s]

$w$	Razão de umidade	[kg/kg]
$z$	Espessura da geada	[m]

### Símbolos gregos

Símbolo	Descrição	Unidades
$\Delta h_{sub}$	Calor latente de dessublimação	[J/kg]
$\Delta t$	Variação no tempo	[s]
$\Delta z$	Variação no espaço	[m]
$\varepsilon$	Fração volumétrica	[adimensional]
$\zeta$	Parâmetro para modelagem do período de fronteira plenamente desenvolvida da geada	[adimensional]
$\eta$	Coeficiente de sub-relaxação	[adimensional]
$\mu$	Fator de resistência à difusão	[adimensional]
$\mu_{ar}$	Viscosidade dinâmica do ar	[N·s/m <sup>2</sup> ]
$\varphi$	Taxa de geração de calor	[J/m <sup>3</sup> s]
$\emptyset$	Variável a ser analisada na convergência de malha	[-]

$\psi$	Relativo à média da fase	[-]
$\rho$	Massa específica	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Porosidade da geada	[adimensional]
$\underline{T}$	Tensor tensão, relativo às forças cisalhantes	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tau$	Tortuosidade = $\frac{\text{comprimento do caminho percorrido}}{\text{comprimento do menor caminho possível}}$	[adimensional]
$V$	Volume médio	[m <sup>3</sup> ]

### **Subscritos**

Símbolo	Descrição
$\beta$	Relativo à fase gelo
$\gamma$	Relativo à fase gás (vapor d'água+ar)
$\beta\gamma$	Relativo à interface $\beta - \gamma$
$\gamma\beta$	Relativo à interface $\gamma - \beta$
$\infty$	Relativo ao ar ambiente (do fluxo de ar úmido)
a	Aproximado

<i>ar</i>	Relativo à porção de ar, na fase gás
<i>atm</i>	Atmosférica
<i>ext</i>	Extrapolado
<i>cond</i>	Relativo à condução
<i>conv</i>	Relativo à convecção
<i>d</i>	Relativo à difusão
<i>geada</i>	Relativo à geada (vapor +gelo)
<i>i</i>	Relativo às espécies na fase gás (CAPÍTULO II)
<i>i</i>	Relativo à discretização no espaço (CAPÍTULO IV)
<i>lat</i>	Latente
<i>n</i>	Relativo à posição norte
<i>p</i>	Relativo à parede
<i>s</i>	Relativo à posição sul
<i>sup</i>	Relativo à superfície
<i>t</i>	Relativo à soma total
<i>vap</i>	Relativo à porção de vapor, na fase gás

*vap sat* Vapor Saturado

### **Sobrescritos**

Símbolo	Descrição
$k$	Tempo atual
$k+1$	Tempo posterior
$0$	Tempo inicial

### **Símbolos Matemáticos**

Símbolo	Descrição
$d/dt$	Derivada total no tempo
$D/Dt$	Derivada Material no tempo
$\partial/\partial t$	Derivada parcial no tempo
$\langle \psi \rangle$	Média espacial de uma função $\psi$ definida em qualquer lugar do espaço



## **CAPÍTULO I**

### **1 FENÔMENO DE FORMAÇÃO DE GEADA**

#### **1.1 INTRODUÇÃO**

A formação de geada é um dos maiores problemas em alguns tipos de equipamentos de refrigeração e bombas de calor, e acontece pela deposição progressiva e acúmulo de gelo nas superfícies dos trocadores de calor quando sua superfície fica abaixo de zero.

O acúmulo da geada é um resultado da transferência de calor e de massa entre o ar úmido em contato com a superfície fria de serpentinas de evaporadores, mantidas abaixo da temperatura de congelamento. Assim, quando o ar úmido passa através da serpentina com temperatura em suas superfícies abaixo do ponto de congelamento, a umidade do ar inicialmente condensa e então começa a se formar a geada.

Ao se formar, a camada de gelo reduz o fluxo de calor do ar mais quente para o refrigerante no interior do evaporador, diminuindo assim, a capacidade e eficiência térmica do evaporador. O processo agrava-se com o tempo devido ao acúmulo de gelo nas superfícies reduzindo a área do fluxo de calor para o refrigerante, o que resulta na queda do fluxo de ar, através do trocador de calor, devido ao aumento da perda de carga. Assim, à medida que o tempo passa, a camada de gelo cresce e vai se tornando mais densa, o que torna mais difícil o processo de degelo. Todo esse processo acarreta em problemas significativos na operação desses evaporadores, tais como:

- a. eficiência energética reduzida;
- b. aumento do consumo do equipamento;
- c. segurança do equipamento reduzida;
- d. perda da capacidade de operação durante o descongelamento;
- e. limitações no uso de superfícies de alto desempenho na transferência de calor por resultar num alto coeficiente de transferência de massa e na consequente intensificação da geada.

Assim, pesquisas sobre o fenômeno do crescimento da geada foram realizadas por numerosos pesquisadores desde meados do século XX. A maioria das pesquisas concentra-se principalmente na compreensão das características da camada de geada e o seu crescimento em placas planas.

Desde meados dos anos 1980 o foco da pesquisa da geada é em geometrias que são aplicáveis a trocadores de calor. Espera-se que a geometria dos sistemas seja de acordo com que minimize os impactos da geada e no desempenho dos mesmos.

Modelos simples de crescimento da camada de gelo para geometrias como tubo e placa plana foram desenvolvidos, onde a abordagem da maioria dos pesquisadores é de iniciar com equações diferenciais básicas para a transferência de calor e massa e resolvê-los analiticamente com o uso de coeficientes de transferência de calor obtidos a partir de experimentos.

Em geral a pesquisa do crescimento da geada pode ser classificada em três grandes grupos principais. O primeiro lida com as características de crescimento da geada, onde fazem a determinação de propriedades físicas da camada de gelo tais como massa específica, a condutividade térmica, porosidade, etc. e tem como objetivo o desenvolvimento de uma correlação baseada em experimentos. O segundo estuda o crescimento da geada em trocadores de calor, em que abordam geometrias aplicáveis a trocadores de calor abordando uma solução semi-analítica com o apoio de dados experimentais. E o terceiro pesquisa o crescimento da geada em placa plana, incluindo como respostas a taxa de crescimento da geada e fatores que mais afetam o crescimento da geada. As abordagens feitas neste último são tanto experimentais como numéricas.

Já do ponto de vista da transferência de calor e de massa, os estudos da geada podem ser divididos em duas principais categorias: aquelas que envolvem transferência de calor e de massa sob convecção natural e aquelas que envolvem processos de convecção forçada.

Este trabalho tem como objetivo o estudo numérico do crescimento da geada em uma placa, analisado localmente, em que será considerada a transferência de calor e de massa sob a condição de convecção forçada para analisar os fatores que mais afetam o crescimento da geada.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 1.2.1 Estudos estruturais das fases sólidas da água a baixas temperaturas

Segundo Hobbs (1974), a água pode formar mais fases sólidas do que qualquer outra substância conhecida. As moléculas de água são arranjadas em posições ordenadamente repetidas para formar um sólido cristalino com simetria hexagonal, o qual é chamado de *gelo hexagonal*, *gelo Ih* ou simplesmente gelo, neste caso, a água líquida é congelada abaixo das condições atmosféricas normais ou o vapor d'água é dessublimado a temperaturas entre  $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Quando o vapor d'água é dessublimado nas superfícies a temperaturas entre  $-130\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$ , o sólido cristalino produzido tem sua estrutura cúbica e é conhecido como *gelo cúbico* ou *gelo Ic*. Além dessas, há pelo menos oito formas cristalinas, a altas pressões, da substância água (gelos II a IX), que são referidos por sua vez, como *polimorfos do gelo à alta pressão*. Já quando se trata de temperaturas abaixo de  $-140\text{ }^{\circ}\text{C}$ , o vapor dessublimado parece ser não cristalino ou consistindo de cristais muito pequenos e são referidos como *gelo vítreo* ou *gelo amorfo* (HOBBS, 1974).

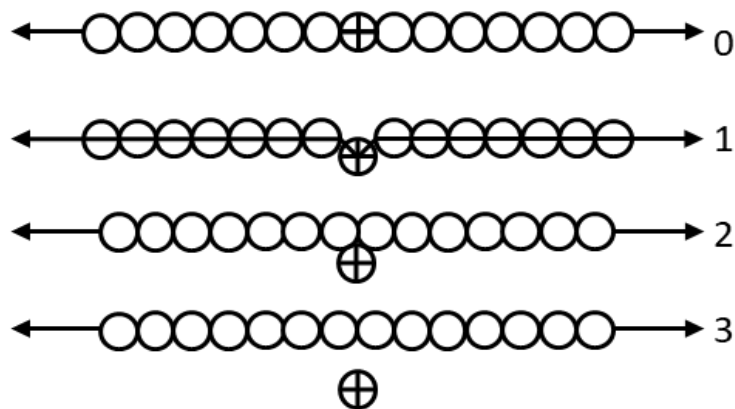
Portanto, a natureza da água depositada como sólido numa superfície resfriada, depende da temperatura da superfície. A ocorrência de um sólido amorfo a baixas temperaturas, e estruturas cristalinas a temperaturas menos baixas, podem ser entendidas em termos gerais como segue: se a temperatura da base é muito baixa, a molécula da fase vapor assenta-se sobre a base, rapidamente dissipará sua energia e então tenderá a permanecer próxima do ponto onde assentou. A temperaturas menos baixas, por outro lado, uma molécula terá mais energia para migrar sobre a superfície a posições de mínimo potencial de energia, as quais são as favoráveis para formação do cristal.

#### 1.2.1.1 Propriedades da superfície

Foi sugerido o conceito de que uma camada “padrão-líquido” existe na superfície do gelo e foi então considerada sendo um filme de água líquida assumida estar em equilíbrio de um lado com gelo e do outro lado com o ar. Esta teoria oferece, portanto, uma explicação não usual, para muitas das propriedades de superfície de gelo. Para, então, justificar que a superfície da estrutura do sólido devesse ser um “padrão-líquido”, foi apresentado o seguinte argumento (HOBBS, 1974):

Ao considerar uma superfície, livre de esforços, de um sólido cristalino a uma temperatura na qual é possível considerar a migração molecular, o potencial químico das moléculas superficiais será maior que as moléculas interiores, portanto, mais moléculas deixarão as camadas superficiais do que entrarão nesta (Figura 1. 1). Isto provocará um aumento na concentração de sítios vagos (vacâncias) próximos à superfície, e também o aumento da entropia das moléculas superficiais (GURNEY, 1949).

Entretanto, o potencial químico das moléculas na superfície não será afetado por essas mudanças, nenhuma tensão superficial efetiva será criada, então, continuariam a deixar a superfície e o equilíbrio térmico seria impossível. Afim de atingir o equilíbrio térmico com a partida das moléculas da superfície, deve ser criada uma força que se opõe à migração posterior de moléculas fora da superfície (GURNEY, 1949).



**Figura 1. 1** Representação dos três estados de uma molécula escapando da superfície para o interior do gelo ou para a fase vapor (Adaptado de GURNEY, 1949).

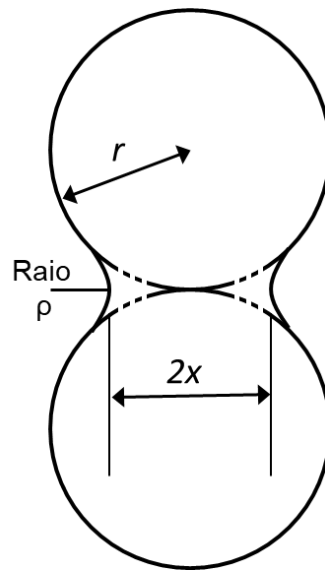
E ainda, quando o número de vacâncias da superfície alcança um dado número, o arranjo cristalino das moléculas superficiais se tornam instáveis com relação à fase líquida. A superfície, em seguida, derrete para formar um filme líquido de poucas moléculas de espessura, uma tensão é, então, criada no filme líquido de tal forma que o potencial químico das moléculas no filme seja igual ao das moléculas do interior do sólido, sob estas condições diz-se, então, que o sistema está em equilíbrio (GURNEY, 1949).

### 1.2.2 Sinterização e adesão

Uma das propriedades interessantes do gelo é sua aderência a uma superfície e a intensidade com que as partículas de gelo aderem entre si. Muitos estudos, demonstraram que se duas peças de gelo úmido são postas em contato, elas ficarão unidas até mesmo quando a temperatura ambiente for suficiente para um estado de degelo. Outros estudos mostraram que neste processo há uma pressão entre as peças, causada pela tensão superficial, que irá causar uma fusão mais intensa devido ao afastamento do estado de equilíbrio, para em seguida serem relaxadas por este mesmo processo, causando o congelamento da água derretida (HOBBS, 1974).

Outras investigações no efeito da temperatura sobre a adesão de partículas de gelo foram feitas experimentando a força requerida para separar duas esferas de gelo que foram colocadas em contato cuidadoso para evitar pressão e a força foi medida como função da temperatura mostrando que as forças de adesão decresceram à medida que as temperaturas diminuíram (HOBBS, 1974).

Observou-se, ainda, através de um microscópio que quando duas pequenas esferas de gelo são empurradas para tocar-se num ponto, a área de contato entre elas aumenta com o tempo quando a força original de contato é removida. Este fenômeno é chamado de *sinterização* e pode ser explicado como segue: duas esferas em contato em um ponto formam um sistema termodinâmico instável, a energia livre superficial não é minimizada (Figura 1. 2). A energia do sistema pode ser reduzida se material é transferido para a região de contato entre as esferas gerando uma forma de ponte, e então, acontecerá a transferência de material uma vez que haja suficiente força motriz (gradiente no potencial químico que existe entre a região altamente tensionada abaixo da superfície côncava da ponte e as partes restantes do sistema) disponível para superar a energia de ativação exigida para mover o material (HOBBS, 1974).



**Figura 1. 2** Representação esquemática do sinterizado de duas esferas de gelo  
(Adaptado de HOBBS, 1974)

### 1.2.3 Fenômeno de cristalização na formação do geada

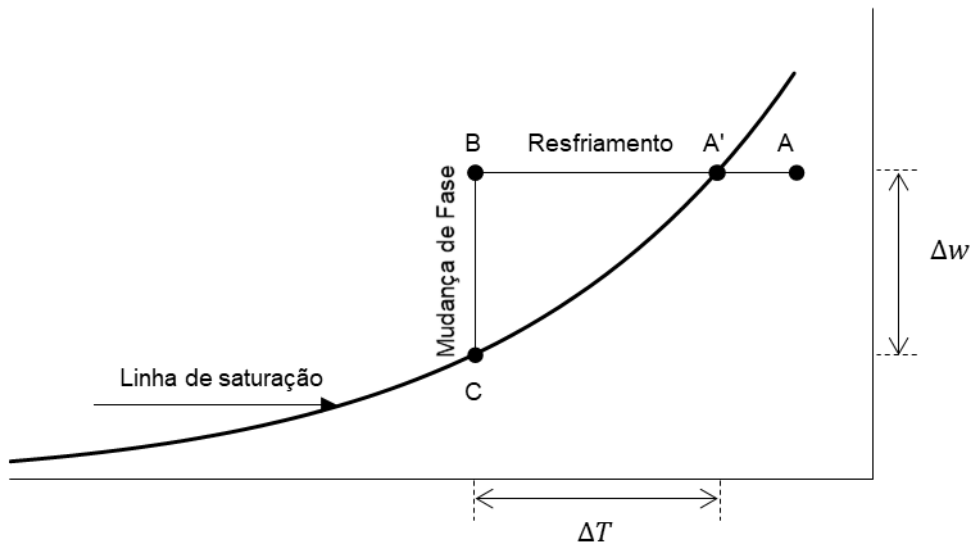
A formação de geada e a deposição inicial em uma superfície fria envolve dois processos distintos, a nucleação e o crescimento do cristal (FLETCHER, 1970).

#### 1.2.3.1 Nucleação e crescimento do cristal

O processo de nucleação do gelo pode ocorrer de maneira homogênea, no ambiente, como no caso de uma névoa, ou heterogênea, como no caso de formação de um cristal de geada, devido a interação com uma superfície. Em ambos os casos, desconsiderando efeitos de superfície, a energia necessária para converter  $n$  moléculas de vapor d'água para o estado sólido pode ser expressa através da energia livre de Gibbs e, este processo que requer que o embrião ultrapasse a barreira de energia livre de Gibbs é chamada nucleação (FLETCHER, 1970).

Assim, a nucleação pode ser considerada como o resultado de uma seqüência de processos psicrométricos, esquematizados na Figura 1. 3. Primeiramente o vapor d'água necessita ser resfriado até o ponto de orvalho (processo A-A') antes do início do processo de mudança de fase, este resfriamento, por sua vez, ocorre na camada limite

térmica da superfície. Devido às tensões de superfície que agem sobre o embrião, a nucleação exige uma grande quantidade de energia para romper o equilíbrio e concretizar o processo. Isso faz com que o resfriamento necessário ultrapasse o ponto de orvalho (processo A'-B). Assim que o equilíbrio é rompido, inicia-se a mudança de fase (processo B-C). Embora sejam processos distintos, os processos de resfriamento (A'-B) e de mudança de fase (B-C) ocorrem simultaneamente. Para totalizar a energia livre necessária para promover uma nucleação, soma-se a parcela sensível (processo A-A'-B) à latente (processo B-C),  $\Delta G_{total} = \Delta G_{sensível} + \Delta G_{latente}$ , (HERMES et. al, 2009).

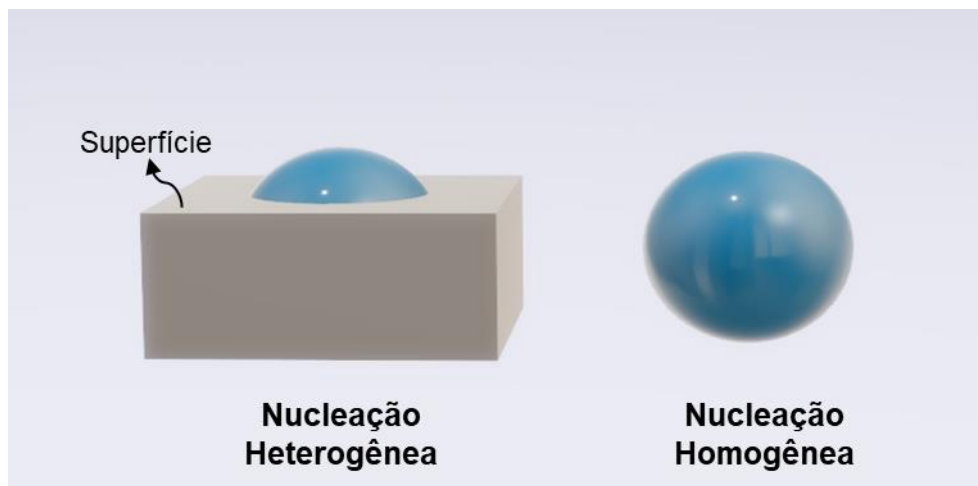


**Figura 1. 3** Carta Psicrométrica com a representação do processo de nucleação (adaptado de HERMES et. al, 2009)

Como, no equilíbrio, o sistema tende para uma condição de mínima energia, o embrião procura a menor área superficial para um determinado volume. Desta forma o embrião assume um formato esférico, no caso da nucleação homogênea, e um formato semiesférico, no caso da nucleação heterogênea (Figura 1. 4) (FLETCHER, 1970).

Uma vez que a nucleação acontece, também ocorrem os processos de crescimento da geada por meio da adesão de novas moléculas de vapor ao embrião nucleado. Diferentemente do fenômeno da nucleação, o crescimento da geada é tratado de maneira bidimensional, uma vez que depende de sucessivas nucleações sobre a

superfície dos cristais já formados, chamados de “ilhas” de nucleação (FLETCHER, 1970).



**Figura 1. 4** Representação esquemática de uma nucleação heterogênea e uma nucleação homogênea

Os cristais de gelo podem crescer de duas formas distintas: ou pelo congelamento da água no estado líquido ou por dessublimação, que é a deposição direta a partir da fase de vapor. Em cada caso, os mecanismos que determinam a taxa de crescimento são o transporte de moléculas de água para a interface de crescimento e sua adaptação a ela (FLETCHER, 1970, HOBBS, 1974).

Se o sistema contém outro componente, além de água, a situação torna-se mais complexa porque o crescimento dos cristais dependerá do transporte deste componente e assim, poderão ocorrer processos concorrentes na interface, interferindo no crescimento de cristais de gelo. Alguns destes componentes adicionais, tais como o ar e o vapor d'água interferem de um modo pouco intenso, tendo um efeito relativamente simples. Mas outros fenômenos mais complicados podem ocorrer, como por exemplo, no congelamento de soluções de açúcar ou salmoura (FLETCHER, 1970).

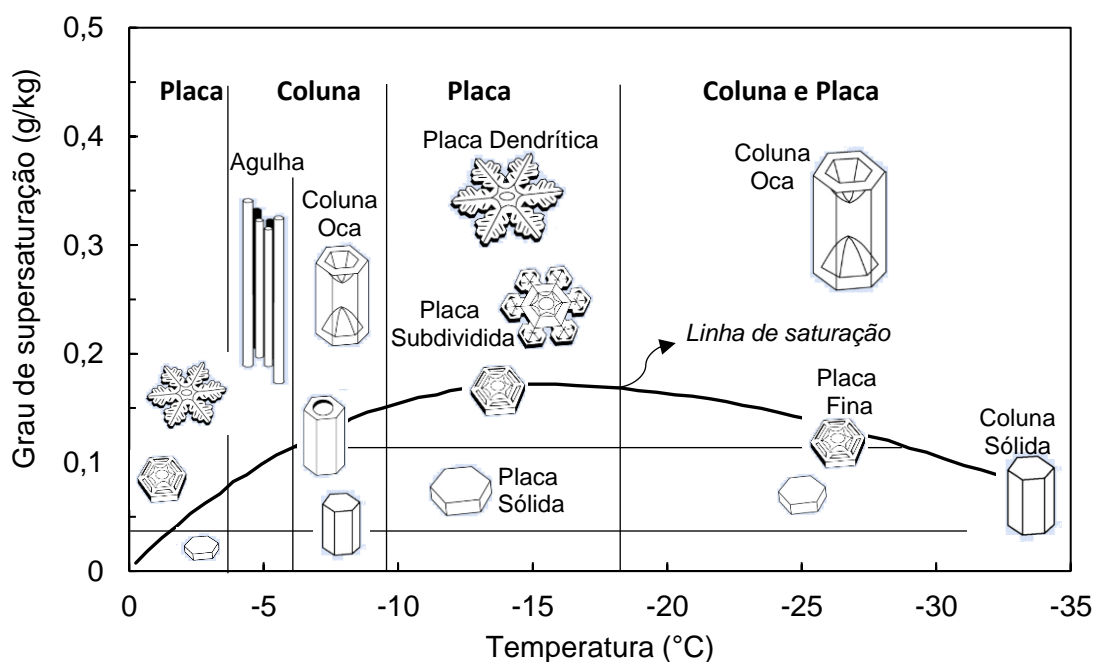
Portanto, o modo como os cristais de geada crescem e se acomodam variam de acordo com fenômenos de transporte de calor e de massa envolvidos. É, então, formando um meio poroso, que cresce e é adensado ao longo do tempo em função da difusão de massa.



Devido à natureza porosa da geada, a maioria dos modelos empíricos para as propriedades termofísicas da geada utiliza como base a massa específica, que se relaciona diretamente com a porosidade do meio.

O estudo de Kobayashi (1958) retrata a morfologia preferencial dos cristais de gelo de acordo com a temperatura da superfície e o grau de supersaturação. Porém, vale destacar que todas as morfologias podem ser encontradas em todas as regiões (Figura 1. 5).

Por possuir morfologias distintas, a geada formada pode ter propriedades diferentes. Um exemplo é a geada na forma de placa sólida ser mais compacta que na forma dendrítica. Essa diferença na porosidade influi diretamente na massa específica da geada e, conseqüentemente, na condutividade térmica.

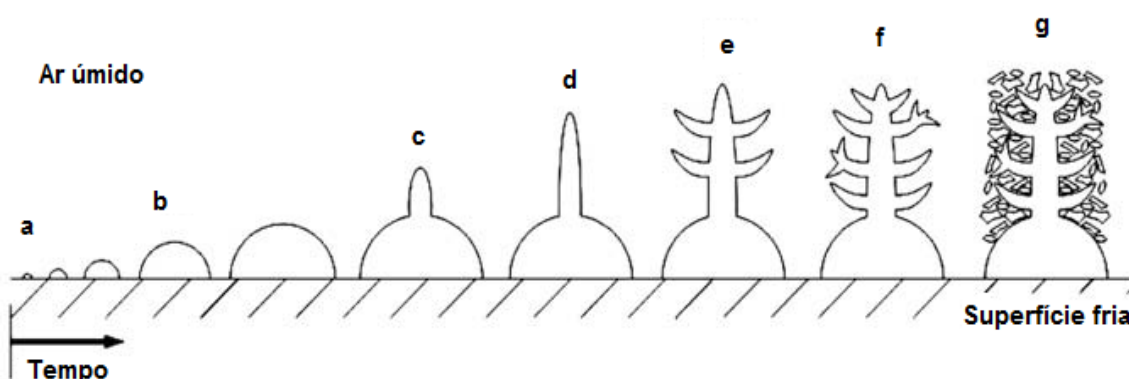


**Figura 1. 5** Morfologia da geada em função do grau de supersaturação e da temperatura de superfície (adaptado de KOBAYASHI, 1958)

### 1.2.3.2 Períodos de crescimento da geada

O processo de formação e crescimento da geada pode ser dividido em etapas. Esta subdivisão trata-se do fenômeno de cristalização e é fundamental na elaboração dos modelos.

A Figura 1. 6 mostra uma representação esquemática dos processos de formação e crescimento da geada nos períodos de crescimento unidimensional e tridimensional, ilustrados pelas etapas 'a' a 'g' que serão descritas a seguir.



**Figura 1. 6** Representação esquemática dos processos de formação e crescimento da geada (Adaptado de TAO, BESANT, MAO, 1993).

#### 1. Período de crescimento unidimensional do cristal

É o mais curto dos períodos. Primeiramente são satisfeitas as condições de não-equilíbrio e é quando se dá a nucleação heterogênea. Neste período, um aglomerado de moléculas de vapor d'água (embrião) entra em contato com uma superfície fria ocorrendo a condensação na forma de gotículas de água subresfriadas que se unem e posteriormente congelam, formando núcleos de cristais de gelo (a) (FLETCHER, 1970).

Numa segunda etapa o embrião começa a crescer por meio de adesão de novas moléculas (b) (FLETCHER, 1970). Em seguida, a temperatura da superfície do embrião se torna maior do que a temperatura da placa, e tem o aumento da superfície, exigindo uma remoção de maior quantidade de energia para manter seu crescimento (c). Quando

essa quantidade de energia se torna maior do que energia necessária para iniciar a nucleação em um novo local, o embrião para de crescer e ocorrerá, então, uma nucleação secundária. Então, o novo embrião cresce (d) (PIUCCO *et al.*, 2008).

Assim, no período de crescimento unidimensional do cristal, o vapor d'água é condensado em gotículas de água formando núcleos de cristais de gelo, onde novos cristais de geada são gerados e crescerão unidimensionalmente na direção perpendicular à superfície fria e à aproximadamente taxa constante (LE GALL, GRILLOT, JALLUT, 1997).

## 2. Período de crescimento tridimensional (da camada de gelo)

Neste período, passa-se a exigir uma maior quantidade de remoção de energia necessária para sustentar o crescimento do embrião, e, como resultado, novos pontos de nucleação aparecem sobre a superfície do embrião inicial (e, f). Depois, acontecem sucessivos processos de nucleação e crescimento do embrião que ocorrerão até quando a energia total disponível na superfície da geada não for suficiente para promover novas nucleações (g) (PIUCCO *et al.*, 2008).

## 3. Período de fronteira plenamente desenvolvida ou período de crescimento quase-estático

Neste período ocorre a ramificação dos cristais de geada até a formação de uma camada que se comporta como meio poroso. Acontece quando a camada da geada entra em período de crescimento pleno, isto é, quando a temperatura da superfície da geada alcança uma temperatura maior ou igual à temperatura de fusão do gelo ou a temperatura de ponto triplo (sólido-líquido-gás) da água, e água líquida é formada na superfície.

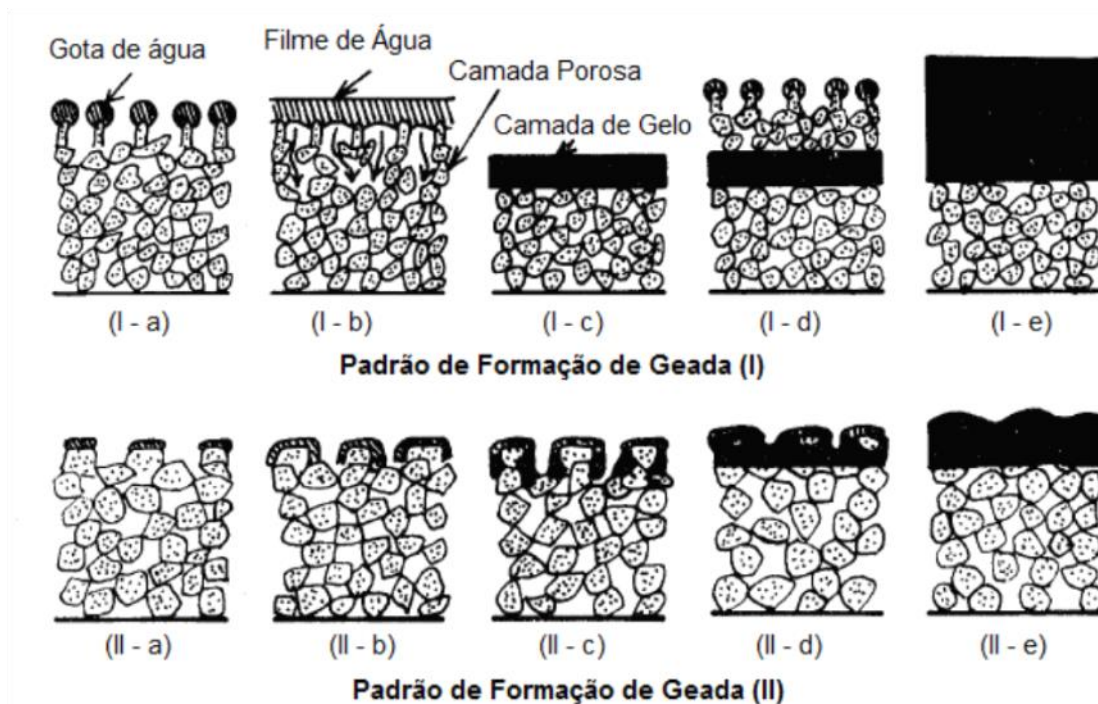
Este processo é chamado permeação e é estudado por Aoki, Katayama e Hayashi (1983) onde, a água condensada começa a entrar pela camada porosa congelando camadas inferiores. E esta infiltração do líquido acontece devido à capilaridade e/ou efeitos gravitacionais.

Durante este período, a camada de gelo passa por um ciclo de diluição e densificação devido ao derretimento e subsequente formação de uma subcamada de gelo pela permeação na parte superior enquanto que a difusão do vapor de água ainda continua em todo o resto da camada de geada e conduz um aumento tanto da espessura quanto da massa específica (LE GALL, GRILLOT, JALLUT, 1997).

O vapor d'água condensado no topo da camada de gelo forma um filme líquido que satura a camada de gelo e congela nas áreas mais frias em direção à parede fria. Então, um processo cíclico de derretimento, ou formação de gotículas de água, permeação, congelamento e crescimento ocorre até que um equilíbrio térmico de toda a camada de gelo seja alcançado. Os mecanismos de crescimento são complexos devido aos efeitos dos parâmetros ambientais e podem ser classificados em dois padrões de formação de geada que dependem da temperatura alcançada pela superfície da camada porosa de gelo e será descrito no item a seguir (AOKI, KATAYAMA, HAYASHI, 1983).

### 1.2.3.3 Padrões de formação de geada

Em 1983, Aoki, Katayama e Hayashi fizeram um estudo sobre os padrões de formação de geada, classificando os padrões em I e II, de 'a' a 'd', como mostra a Figura 1.7.



**Figura 1.7** Diagrama esquemático dos padrões de formação de geada no período de crescimento quase estático (Adaptado de AOKI, KATAYAMA, HAYASHI, 1983)

No padrão de formação de geada I, a resistência térmica da camada de gelo aumenta com a geada, de modo que a temperatura da superfície do gelo atinja 0°C. Depois disso, o vapor de água em movimento na superfície da geada não pode ser cristalizado como gelo, mas forma gotículas de água na superfície da geada e são mantidas lá pela tensão superficial (I - a). Essas gotículas se tornam maiores à medida que o vapor de água é fornecido e, em pouco tempo, uma película de água é formada pela combinação das gotículas à volta. A película de água, ou filme, resultante permeia rapidamente para a camada da geada por ação capilar (I - b) (AOKI, KATAYAMA, HAYASHI, 1983).

No entanto, a água congela gradualmente na camada de geada devido ao gradiente de temperatura existente na interface de permeação de água. Finalmente, a água para de permear quando a quantidade de calor latente (de congelamento) e a quantidade de calor derivado do gradiente de temperatura atingem o equilíbrio e uma camada de gelo é formada (I - c). Uma vez que a camada de gelo é formada, a temperatura da superfície da geada fica abaixo 0°C novamente devido a uma diminuição na resistência térmica do gelo, e a geada começa a ocorrer outra vez (I - d) (AOKI, KATAYAMA, HAYASHI, 1983).

Em seguida, o processo cíclico de formação de película de água, permeação de água, congelamento e formação de geada continua periodicamente. Finalmente, é alcançada uma condição de estado estacionário, o que significa que ocorre a condensação do vapor de água somente na superfície do gelo mantida a 0°C (I - e) (AOKI, KATAYAMA, HAYASHI, 1983).

Já no padrão de formação de geada II, depois que a temperatura da superfície do gelo atinge 0°C, gotas de água nas superfícies cristalinas individuais tornam-se grandes devido ao vapor de água fornecido (II - a, b). Contudo, neste padrão, não ocorre a permeação rápida de água baseada na formação de uma película de água uniforme e a água penetra, gradualmente, a partir do lado de cada cristal e congela (II - c). A posição de congelamento se aproxima da superfície da geada por causa de uma baixa taxa de permeação de água. Por conseguinte, a camada de gelo não cresce ciclicamente, como mostrado no padrão I, mas continua a crescer sob a ação simultânea de formação de gotículas de água, permeação de água e congelamento (II - d), e alcança a condição de estado estacionário (II - e) e a camada de gelo torna-se irregular (AOKI, KATAYAMA, HAYASHI, 1983).

Assim, o crescimento da geada durante o período de crescimento pleno da camada de gelo é classificado em dois padrões de formação de geada com base numa diferença na forma de permeação de água. A permeação de água no padrão I é caracterizada por permeação uniforme da água e com característica vítrea na superfície, devido à formação de uma película de água, e, assim, a camada de gelo cresce num processo cíclico. Por outro lado, o padrão de permeação em II é caracterizado por permeação da água irregular à margem dos cristais da geada, e, assim, a camada de gelo cresce continuamente sob a condição da temperatura da superfície geada ser mantida a 0°C e tem uma pequena espessura (AOKI, KATAYAMA, HAYASHI, 1983).

Quando este fenômeno é levado em consideração, num modelo numérico de crescimento de geada, considera-se que alguns volumes de controle acima da camada de gelo atingem o ponto de fusão e a massa de água correspondente é simplesmente redistribuída para os elementos subjacentes como segue (LE GALL, GRILLOT, JALLUT, 1997).

$$\varepsilon'_\beta = \varepsilon_\beta + \zeta(1 - \varepsilon_\beta) \quad \varepsilon'_\beta \geq \varepsilon_\beta \quad \text{e} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (1.1)$$





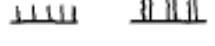

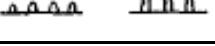
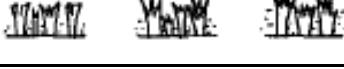

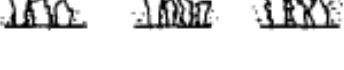

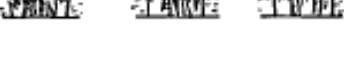
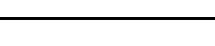
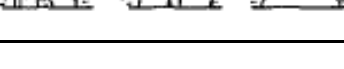



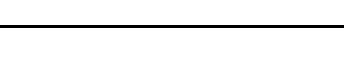
As frações de gelo no volume de controle ( $\varepsilon_\beta$ ) consideradas são corrigidos ( $\varepsilon'_\beta$ ) de acordo com as porosidades disponíveis. Um parâmetro ( $\zeta$ ) permite uma escolha entre uma infiltração mais ou menos profunda do filme líquido e por questão de generalidade, um valor médio de  $\zeta=0,5$  foi escolhido por Le Gall, Grillot e Jallut (1997).

Como a escala do tempo da permeação é negligenciável comparada com a difusão do vapor de água, este processo é considerado para atuar logo que a temperatura da água atinge o ponto triplo, sendo consideradas durante o processo as condições de contorno de calor e massa, bem como a temperatura de ponto triplo da água (quando a temperatura da superfície menor ou igual à temperatura de ponto triplo), aplicados à camada de gelo (LE GALL, GRILLOT, JALLUT, 1997).

Outra classificação foi feita por Hayashi *et al.* (1977), em que não consideram haver água líquida nem temperaturas de superfície igual a do ponto triplo. Eles classificaram os tipos de formação de geada em quatro grupos, A B, C e D, a partir de técnicas de visualização, relacionando razão de umidade e temperatura da superfície como condições, como mostrado na Figura 1. 8 e Figura 1. 9.

O tipo A é o mais representativo e nele os cristais de gelo crescem em dimensão quase linear. A geada no 'período de crescimento de cristal' se transforma gradualmente no 'período de crescimento da camada de gelo' (que inclui o período de crescimento tridimensional e período de crescimento quase-estático da camada de gelo) (HAYASHI *et al.*, 1977).

O ponto característico desta transição é quando se inicia a ramificação do tipo pena em volta do topo do cristal já formado. A diferença entre A-I e A-II é a formação de cristais do tipo agulha no estágio inicial do 'período de crescimento do cristal' (HAYASHI *et al.*, 1977).

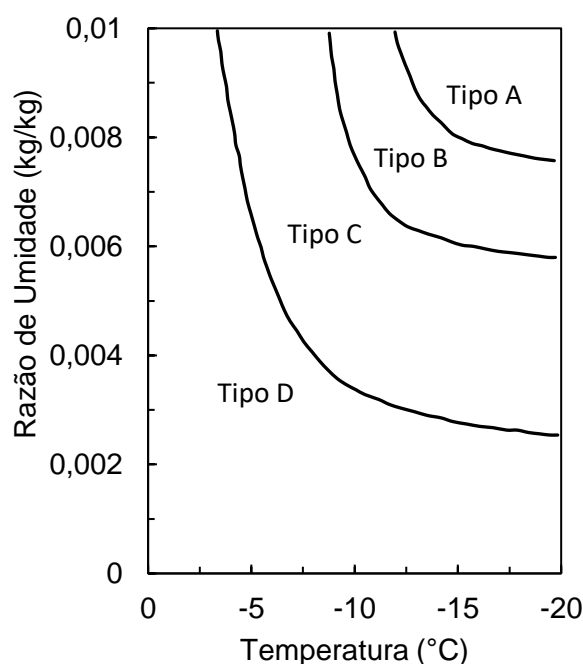
Tipo de Formação de Geada		Período de crescimento do cristal	Período de crescimento da camada de geada
A	A-I		
	A-II		
B	B-I		
	B-II		
C	C-I		
	C-II		
	C-III		
D	D-I		
	D-II		

**Figura 1. 8** Classificação dos tipos de formação de geada segundo HAYASHI *et. al.*, 1977 (Adaptado de HAYASHI *et. al.*, 1977)

O tipo B tem características semelhantes ao tipo A. No entanto, no 'período de crescimento da camada de geada' a ramificação do cristal será do tipo placa ao invés do tipo pena observado no tipo A (HAYASHI *et al.*, 1977).

O tipo C forma uma camada de geada mais densa que os tipos A e B. No 'período de crescimento do cristal', a taxa de crescimento vertical é pequeno e a rugosidade da superfície da geada é baixa porque o gelo é depositado não apenas no topo do cristal, mas também aos lados a partir da sua base (HAYASHI *et al.*, 1977).

Consequentemente, quando as condições de formação de geada chegam perto da região C (Figura 1. 9) torna-se difícil identificar a transição de 'período de crescimento de cristal' para o 'período de crescimento da camada da geada'. Assim, essa transição se dá quando há combinação e interferência de cada cristal causando um alargamento da geada. C-I, C-II e C-III são distinguidos de acordo com a presença de cristais do tipo agulha, como mostrado na Figura 1. 8 (HAYASHI *et al.*, 1977).



**Figura 1. 9** Gráfico de razão de umidade por temperatura mostrando os padrões de formação de geada (Adaptado de HAYASHI *et. al*, 1977)



O tipo D assume quase o mesmo padrão de formação do tipo C. No entanto, tem a tendência de se formar uma geada mais densa que o tipo C e a formação da geada neste tipo produz uma camada de geada mais homogênea, devido à acumulação de cristais mais próximos. A diferença entre D-I e D-II é devido à forma dos cristais, os do tipo D-I crescem na forma de uma placa quadrada regular e os do tipo D-II crescem com a superfície de forma fina e irregular (HAYASHI *et al.*, 1977).

Yun, Kim e Min (2002) usaram como base a classificação de Hayashi *et al.* 1977 para fazer um estudo onde se mediu a rugosidade da geada em diferentes intervalos de tempo e condições experimentais, e observaram que a rugosidade da geada teve um maior valor no 'período de crescimento unidimensional do cristal' devido ao crescimento da geada ser em dimensão vertical. No entanto, essa rugosidade diminuiu gradualmente com o tempo no 'período de crescimento da camada de gelo'.

Em seus estudos obtiveram dois tipos de formação da geada, segundo Hayashi *et al.*, 1977, tipo B e tipo C. Em geral, foi detectado que a rugosidade da geada do tipo C era menor do que o tipo B porque, como já falado, para o tipo C o gelo era depositado não apenas no topo do cristal, mas também aos lados desde sua base. Na região do tipo B, os cristais são gerados e crescem verticalmente após a formação de uma fina camada de gelo. Assim, a deposição se inicia no topo e não no vale da geada. No entanto, como a velocidade do fluxo aumentou, a rugosidade da geada do tipo B se aproximou do tipo C devido aos efeitos de convecção (YUN, KIM, MIN, 2002).

#### **1.2.4 Estudos experimentais e de modelos de formação de geada**

Yonko e Sepsy (1967) trabalharam na condutividade térmica da camada de gelo apresentando tanto a análise analítica quanto correlações empíricas. Para a condutividade térmica, essas correlações foram apresentadas como função da massa específica de geada, com base em experimentos realizados pelos autores e pesquisadores anteriores. Eles, ainda, demonstraram que duas camadas de geada de mesma espessura, mas com massa específica diferentes, tinham condutividade térmica diferentes.

O'Neal e Tree (1984) caracterizam os efeitos de parâmetros tais como número de Reynolds, umidade do ar, temperatura do ar e da placa, sobre o crescimento da geada e sua massa específica em uma placa vertical. Verificaram que o aumento de

Reynolds, abaixo de 15900, provoca maior crescimento da geada, já acima destes valores o crescimento da geada independe do número de Reynolds. A formação da geada apresentou dependência em relação à temperatura da placa e à umidade do ar, no entanto, apresentou mínima influência na faixa de 5 °C a 12 °C. Foi, então, desenvolvida uma correlação experimental relacionando a espessura média da geada com tempo, número de Reynolds, temperatura da placa, e umidade do ar.

Uma extensa revisão de estudos de crescimento de geada para geometrias simples foram feitos por O'Neal e Tree (1985). Eles conduziram experimentos de geada sobre trocadores de calor de tubo aletado sob as condições de fluxo de ar constante e variando a vazão de ar.

Auracher (1987) quantificou os efeitos de todos os modos de transferência de calor que ocorrem em uma camada de geada. Apresentou os dados obtidos a partir de uma configuração experimental, que foi idealizado para isolar os efeitos de cada um dos mecanismos. Cada mecanismo foi analisado separadamente e em uma ordem de magnitude para determinar sua contribuição. Efeitos da radiação sobre a condutividade da geada foi considerado desprezível. A convecção natural poderia ocorrer dentro da camada de gelo em função da geometria e da temperatura de congelamento da camada, no entanto, notou-se que, a fim de se obter uma contribuição significativa de convecção natural, o gradiente de temperatura deveria ser alto, o que normalmente não é o caso dentro de uma camada de gelo, assim, foi referido que a convecção natural no interior camada de gelo poderia ser negligenciado. Concluiu-se que a condutividade térmica é afetada principalmente pela difusão e pela condução.

Já segundo Padki, Sherif e Nelson (1989) o processo de formação de gelo é complexo devido às propriedades da geada poderem variar continuamente durante o desenvolvimento da camada da geada e devido à mudança na temperatura da interface ar-geada de acordo com o tempo e a posição, principalmente devido à mudança na resistência térmica da geada. Além disso, assim como a temperatura, a pressão parcial de vapor d'água na superfície também muda, então, muda a camada limite térmica e difusiva, eventualmente afeta a transferência de calor e conseqüentemente as taxas de crescimento da geada.

Outras dificuldades surgem principalmente devido à ocorrência de ciclos repetidos de derretimento e recongelamento uma vez que a temperatura da interface ar-geada alcança temperaturas de congelamento. Isto resulta na mudança estrutural da camada da geada, o que tende a aumentar com o tempo tanto a massa específica da

geada quanto a condutividade térmica, sem necessariamente aumentar a espessura da geada. Este fenômeno é mais provável acontecer em altas umidades e altas temperaturas ambientes do que em baixas umidades e baixas temperaturas (PADKI, SHERIF, NELSON, 1989).

Um modelo muito simples foi proposto por Padki, Sherif e Nelson (1989) para que se pudesse avaliar de forma rápida os valores para a formação de gelo em geometrias simples, como placa plana e cilíndrica. O modelo iterativo adota uma aproximação de estado quasi-estacionário que calcula propriedades da geada, pressão parcial do vapor d'água na superfície da geada, as taxas de crescimento da geada, a espessura da geada e ainda, a temperatura da interface ar-geada com relação ao tempo e à posição. A técnica também é capaz de ajustar a massa específica da geada e a condutividade térmica levando em conta as alterações na estrutura da camada de gelo como resultado da ocorrência do fenômeno de derretimento (ou fusão) e recongelamento sobre as camadas superiores da geada.

O método utiliza correlações de transferência de calor convectiva conhecidas para as diferentes geometrias e analogia de Lewis para determinar os coeficientes de transferência de massa convectivo e de calor. A grande vantagem desse método basea-se no fato de que qualquer situação geométrica, na qual se conheça o coeficiente de transferência de calor, ou que se possuísse algum método para avaliá-lo, fosse possível obter estimativas sobre a taxa de crescimento de gelo. No entanto, trata-se de um modelo muito aproximado e que só se deve ser usado em caso de inoperância dos demais métodos ou para uma avaliação mais grosseira (PADKI, SHERIF, NELSON, 1989).

Sami e Duong (1989) propuseram um modelo unidimensional para prever a espessura e a massa específica da geada formada sobre superfícies planas em função do tempo. O modelo teve como base os conceitos fundamentais de transferência de calor e massa e variou-se a temperatura, a umidade, a velocidade do ar e a temperatura da superfície. Os resultados obtidos foram comparados com dois trabalhos experimentais de outros autores, observando-se uma razoável concordância.

Tao, Besant e Mao (1993) formularam um modelo físico com difusão transiente de calor e de massa, acoplados, em um meio poroso para prever o crescimento de geada sobre uma placa plana. Foram investigadas as variações da temperatura da superfície com o tempo e espaço, massa específica e taxa de densificação de geada. Eles incorporaram um coeficiente de difusividade efetiva para o meio poroso, o que

concluiu-se melhorar substancialmente a concordância do modelo com os resultados experimentais.

Outro modelo numérico baseado na técnica de média volumétrica local foi proposto por Tao, Besant e Rezkallah (1993) para determinar a massa específica e a espessura da geada, onde, para esta técnica, o domínio total da solução é dividido em diferentes volumes de controle, qualquer propriedade é calculada para o volume de controle e para todo o volume e um volume médio é calculado pela ponderação da propriedade local com o volume local.

O modelo é útil apenas no período de crescimento da camada de gelo e não pode ser aplicado durante a fase inicial. Contou-se com a determinação da fração volumétrica da mistura ar-água e de gelo usando as relações de gás. Além disso, foi sugerido que a densificação (aumento de massa específica de gelo com relação ao tempo) é dependente da estrutura da geada durante o período inicial de crescimento, o que foi apontado também por outros pesquisadores (TAO, BESANT, REZKALLAH, 1993).

Tao, Besant e Rezkallah (1993) afirmaram que a temperatura e a massa específica em diferentes pontos da geada variam linearmente com temperatura. Foi mostrado que a temperaturas inferiores, dentre as analisadas, o fluxo de calor na placa cai mais rapidamente. Assim, quando a placa está a baixas temperaturas, a superfície da geada aumenta bruscamente e atinge uma temperatura de ponto triplo (sólido-líquido-gás) rapidamente. O valor utilizado por muitos autores para difusividade de vapor d'água no ar foi questionada pelos autores e eles sugeriram que a difusividade efetiva poderia ser até 7 vezes maior.

Le Gall, Grillot e Jallut (1997) apresentaram um modelo transiente para prever o crescimento e a densificação da geada sobre uma parede fria e submetida a um fluxo de ar úmido. Com base nos conceitos de difusão de calor e massa, a camada de gelo foi assumida como um meio uniforme e unidimensional, com espessura e massa específica inicial definida. As equações governantes, assim como Tao, Besant e Rezkallah (1993), foram resolvidas usando a técnica de média volumétrica local. O estudo continha tanto os componentes teóricos quanto os experimentais e tentou-se, também, verificar o modelo usando dados experimentais de outros pesquisadores.

Um termo de correção, denominado como fator de resistência à difusão, foi introduzido para o valor do coeficiente de difusão, obtidos pela lei de Fick, a fim de

coincidir com as observações experimentais. Foi observado pelos pesquisadores erros significativos em relação aos dados experimentais em torno de  $\pm 10\%$ , devido a uma má estimativa do coeficiente de difusão efetivo, no interior da camada da geada, e correlacionaram os erros com as condições de contorno para calor e massa (LE GALL, GRILLOT, JALLUT, 1997).

Ismail e Salinas (1999) apresentam outro modelo que avalia parâmetros envolvidos no processo de formação da geada sobre superfícies planas frias submetidas a fluxo de ar úmido. Eles expõem uma análise unidimensional transiente baseada na técnica de média volumétrica local e analisam em duas etapas; crescimento unidimensional do cristal se subdividindo em outras duas etapas e a fase de crescimento pleno. Eles verificam a influência da variação do parâmetro de difusão sobre a espessura e massa específica e validam o modelo utilizando dados experimentais.

Thomas, Chen e Besant (1999) descreveram uma bancada experimental instrumentada desenvolvida para realizar experimentos de caracterização do crescimento da geada em aletas de trocadores de calor, onde as superfícies frias e condições da alimentação do ar fossem semelhantes às condições em congeladores. A bancada tinha a capacidade de variar a temperatura da superfície ( $-35^{\circ}\text{C}$  para  $-40^{\circ}\text{C}$ ), temperatura do ar de alimentação ( $-10^{\circ}\text{C}$  para  $-20^{\circ}\text{C}$ ) e umidade relativa do ar (80% a 100%). Um sistema automatizado de varredura a laser foi usado para medir a espessura do gelo crescendo sobre as superfícies das aletas.

Esta bancada experimental incluiu uma seção de teste com aletas removíveis para medir a altura e concentração de massa da geada. A distribuição de massa de geada acumulada foi medida para cada teste usando aletas pré-gravadas e, após cada teste, as aletas poderiam ser facilmente removidas e pesadas. Outras variáveis de interesse como taxa de transferência de calor e queda de pressão também foram medidas. A taxa total de calor foi medida utilizando um medidor de fluxo de calor. O aumento da perda de pressão do ar resultante do crescimento geada sobre as aletas foi medida diretamente no circuito (THOMAS, CHEN, BESANT, 1999).

Foram relatados dois testes com diferentes temperatura e umidade do ar. A geada mais espessa foi formada perto da base da aleta e para cada aleta, valores medidos de massa de geada acumulada e espessura foram usados para determinar a massa específica. Uma incerteza de 14% para o cálculo da massa específica foi relatada pelos autores (THOMAS, CHEN, BESANT, 1999, CHEN, THOMAS, BESANT, 1999).

Um modelo numérico juntamente com sua validação foi apresentado por Chen, Thomas e Besant (2000a e 2000b). Trata o crescimento da geada como um meio poroso e foi construído com base na transferência de calor transiente bidimensional em aletas e transferência de calor transiente unidimensional na camada de geada. A vazão de ar foi assumida constante e a condição do escoamento do ar foi assumida turbulento. O modelo teve como objetivo prever parâmetros da geada, tais como altura da geada, massa específica e parâmetros dos trocadores de calor, tais como taxa de transferência de calor e perda de carga. Durante o fluxo de ar constante sobre o trocador de calor, é encontrado que a obstrução do fluxo de ar provocada pelo crescimento da geada aumenta as perdas de carga através da superfície externa do trocador de calor, e a taxa de transferência de calor diminui 20%. Finalmente, os resultados de simulação para perdas de carga através do trocador de calor ao término de cada teste são usualmente maiores que os dados experimentais e verificou-se grande sensibilidade à altura da camada da geada de tal forma que mesmo um pequeno erro de previsão da altura faria com que a previsão de perda de carga estivesse com valores inaceitáveis.

Sanchez (2003) e Sanchez e Brum (2004) fizeram um simulador numérico para análise da formação e crescimento da geada sobre placas mantidas a baixas temperaturas e submetidas a uma corrente de ar forçada e mostrou-se capaz de reproduzir resultados experimentais obtidos a partir de várias condições psicrométricas. Os resultados obtidos mostraram dependência nas condições iniciais da geada. Para a massa específica, observou um decréscimo na ordem de  $20 \text{ kg/m}^3$  perto da parede fria, estabilizando a seguir para finalmente ter comportamento variável perto da superfície da geada. Eles encontraram forte dependência no valor do fator de resistência a difusão e, dependendo do valor adotado, observaram saltos nos valores de massa específica.

Chen, Thomas e Besant (2003) aplicam um modelo para a predição do crescimento da geada para analisar a eficiência de um conjunto ventilador e trocador de calor aletado. Os resultados obtidos indicam uma diminuição no rendimento térmico e mecânico à medida que aumenta a espessura da geada.

Na e Webb (2003) realizaram um trabalho com foco no mecanismo de nucleação da geada sobre superfícies planas, nele são discutidos processos de nucleação e crescimento da geada, os processos de mudança de fase do vapor d'água e as condições necessárias para o início do processo de mudança de fase. A formação de geada foi classificada como dependente da energia de superfície e do ângulo de contato, onde, qualitativamente, uma superfície de baixa energia (e ângulo de contato alto) exige maior grau de supersaturação para a nucleação da geada do que uma alta

energia de superfície. Foi ainda, avaliado experimentalmente fatores que afetam a energia de superfície, tais como temperatura e rugosidade da superfície, que resultam em diferentes ângulos de contato, porém os resultados não se aproximaram das previsões teóricas.

Na sequência os mesmos autores Na e Webb (2004a) realizaram um trabalho onde a superfície da geada é considerada supersaturada, eles apresentaram um modelo numérico baseado na teoria da deposição e crescimento de gelo, onde além do vapor supersaturado na superfície da geada, utilizou-se correlações melhoradas para a condutividade térmica da geada e calcularam a variação de massa específica local da geada.

O ar descrito como supersaturado na superfície da geada foi considerado a uma pressão de vapor parcial maior que sua pressão de vapor na temperatura da superfície, o que significa que o vapor d'água é altamente instável no estado gasoso e se condensa muito rapidamente. A espessura da geada foi determinada por medição, usando um micrômetro. Os dados foram obtidos em intervalos de 10 a 30 minutos, em nove pontos. Os experimentos foram realizados para melhores correlações de condutividade térmica da geada (NA, WEBB, 2004b).

A condutibilidade térmica foi expressa em termos de dois modelos conforme definido por Sanders (1974), os quais assumem valores máximos e mínimos de condutividade térmica. A condutividade térmica necessita ser variável com o crescimento da geada, assim usa-se um valor numérico definido como fator de correção que tem a finalidade de poder prever essa variação da condutividade térmica. Este fator foi determinado a partir de dados experimentais e apresentado em diferentes temperaturas da superfície da geada (NA, WEBB, 2004b).

Na e Webb (2004b) compararam os dados experimentais com a predição do modelo saturado com o modelo supersaturado. O novo modelo formulado, supersaturado, baseado em que o ar na superfície da geada é supersaturado, responde por variação da massa específica na camada de gelo, e utiliza uma correlação melhorada para a condutividade térmica da geada. A taxa de crescimento da geada na superfície fria foi medida e os dados experimentais foram comparados com o modelo numérico obtendo-se um erro aproximado de 15%. O modelo proposto foi comparado com outros da literatura e mostrou uma capacidade de predição superior comparado aos modelos que assumem o vapor d'água, na superfície de gelo, saturado ao invés de supersaturado.

Lee e Ro (2005) também usaram dois modelos para prever o crescimento de geada em uma placa, na primeira, o vapor d'água da camada da geada foi assumido saturado, enquanto no segundo modelo, o vapor d'água na superfície da geada foi assumido supersaturado. Os autores apresentaram um tratamento detalhado das equações governantes juntamente com um procedimento computacional para resolver as equações.

Foram analisados possíveis efeitos das condições iniciais e observou-se que as soluções das equações governantes foram afetadas pelo valor inicial de espessura e massa específica da geada. Verificou-se que a espessura inicial da geada pode ser tão baixo quanto  $2,0 \times 10^{-5}$  m sem causar problemas, já a dependência da massa específica da geada foi considerada mais significativa (LEE, RO, 2005).

A porosidade inicial, quando aumentada, diminuiu a condutividade térmica efetiva e aumentou a difusividade efetiva. Quando a condutividade térmica efetiva diminui, há o aumento das temperaturas da superfície geada e, conseqüentemente, a transferência de calor por convecção diminui. Já o aumento da difusividade efetiva causa um maior fluxo mássico do vapor d'água na camada de gelo. A diminuição da massa específica inicial, ou o aumento da porosidade inicial, resultou numa camada mais espessa de geada. Também foram apresentados os efeitos dos parâmetros ambientais, como a taxa de umidade do ar, temperatura da placa, temperatura do ar e velocidade do ar (LEE, RO, 2005).

De forma a considerar os fenômenos físicos, um modelo modificado foi produzido com base no pressuposto que o vapor d'água estava supersaturado na camada de geada. Enquanto o modelo simples (modelo de saturação) deu resultados aceitáveis, os autores apresentaram um modelo detalhado com diferentes graus de supersaturação e foi observado que à medida que o grau de supersaturação variou, apareceram erros devido aos resultados do primeiro modelo, assim, ficou claro que o valor correto do grau de supersaturação deve ser utilizado para se obter os benefícios do modelo detalhado (LEE, RO, 2005).

Tso, Cheng e Lai (2006) fizeram um modelo para analisar o acúmulo de gelo em um trocador de calor de tubo aletado. Em suas equações para o modelo consideraram a variação da geada ao longo da aleta devido à distribuição desigual de temperatura, fizeram comparações do modelo com resultados experimentais mostrando-se adequado e concluíram que a formação da geada degrada o desempenho do trocador de calor devido ao efeito isolante e bloqueador da camada de gelo. Além disso, as temperaturas



do ar e da parede variam ao longo dos tubos e aletas e levam ao crescimento não uniforme de geada sendo a espessura da geada maior onde a temperatura da parede é menor.

Kandula (2010), por sua vez, propôs um modelo físico para a condutividade térmica efetiva para aplicação em toda a gama de densidade de geada. O modelo proposto baseia-se na formulação unidimensional de Zehner-Schlunder (1970) para meios porosos. Esta formulação é apropriada para relações de condutividade térmica sólido-fluido inferiores a 1000 W/mK. O modelo mostrou-se eficaz quando estendido para descrever a condutividade efetiva da geada. Foi, então, comparado com as medições para a condutividade térmica efetiva da geada, sendo demonstradas para uma ampla gama de densidades e temperaturas de geada. O modelo proposto revelou, também, que a condutividade térmica é afetada na mesma ordem tanto pelos efeitos de difusão de massa quanto pelos efeitos de convecção do calor.

Hermes (2012) propôs um modelo de simulação de princípios algébricos para prever o crescimento e densificação de geada em superfícies planas. O modelo foi apresentado com base em balanços macroscópicos de calor e massa na camada de gelo, que foram escritos de acordo com uma formulação adimensional e resolvidos analiticamente para obter uma expressão algébrica para a evolução temporal da espessura da geada em função do número de Nusselt, do grau de supersaturação e da diferença de temperatura ar-superfície.

As previsões do modelo se mostraram satisfatórias em relação aos resultados experimentais. A formulação também foi usada para avaliar as influências da razão de umidade, temperatura e número de Nusselt na espessura do gelo, e observou-se que os que mais influenciaram na espessura da geada foram a razão de umidade e número de Nusselt, tendo a temperatura menor influência (HERMES, 2012).

Este modelo teve o propósito de ter baixo esforço computacional e fácil implementação para fornecer uma indicação dos parâmetros chave que impulsionam o processo de formação de gelo. No entanto, o próprio autor diz que a validade e a sensibilidade do modelo em um intervalo mais amplo devem ser verificadas face às incertezas das suposições e as correlações consideradas para a massa específica do gelo, a condutividade do gelo, e o coeficiente de transferência de calor (HERMES, 2012).

Negrelli, Cardoso e Hermes (2016) apresentaram um estudo teórico-experimental do processo de crescimento da geada para a predição da condutividade térmica da geada formada sob diferentes condições de trabalho e, portanto, abrangendo uma ampla gama de morfologias de congelamento. O trabalho experimental foi desenvolvido em um aparato que consistia em um túnel de vento fechado, operando em diferentes condições em um canal de placas paralelas, onde foram controladas a velocidade, as condições psicrométricas do ar e a temperatura da placa resfriada.

Para o modelo, considerou-se meio poroso heterogêneo e foi baseado na teoria fractal, podendo determinar o arranjo adquirido pela geada e assim, avaliar as propriedades termofísicas do meio formado. As simulações se mostraram satisfatórias para prever a condutividade térmica de uma camada de geada, onde o erro variou entre  $\pm 15\%$ , em relação aos dados experimentais e à correlação semi-empírica desenvolvida no trabalho (NEGRELLI, CARDOSO, HERMES, 2016).

Além disso, constatou-se que temperatura e a umidade do ar não exercem uma influência prática na condutividade térmica da geada, a primeira porque a diferença de temperatura é proporcional ao fluxo de calor e a segunda porque o grau de supersaturação é proporcional ao grau de super-resfriamento (NEGRELLI, CARDOSO, HERMES, 2016).

Em 2016, Brèque e Nemer, fizeram uma comparação de diferentes hipóteses e os impactos nas predições de crescimento da geada. Fizeram comparações com diferentes equações de condutividade térmica efetiva, fatores de resistência à difusão, número de Nusselt e coeficiente convectivo de transferência de massa e verificaram que podem ser enormes os efeitos nas previsões de espessura e massa específica da geada.

Lee e Lee (2018) pesquisaram o comportamento do crescimento da camada de gelo sob condições favoráveis para a dessublimação, analisando efeitos da temperatura da superfície e temperatura, velocidade e razão de umidade do ar.

Os experimentos de congelamento foram conduzidos em uma superfície de resfriamento horizontal. O estágio inicial de congelamento foi observado quando a dessublimação ocorreu. Sob as condições experimentais, cristais de gelo iniciais em forma de penas foram formados diretamente na superfície de teste. Estes cristais de gelo cresceram unidimensionalmente, mantendo suas formas e não foram criados novos cristais de gelo (LEE, LEE, 2018).

Nesse processo, notou-se que a porosidade da camada de gelo quase não diminuiu, ou seja, a densidade não aumentou, e então a espessura da geada cresceu e, eventualmente, os cristais de gelo cresceram o suficiente para que eles interagissem entre si e formando uma camada de geada. Também se observou que um aumento na velocidade do ar aumentou a massa específica do gelo, mas não a espessura da camada de geada (LEE, LEE, 2018).

Nesse contexto, este trabalho visa estudar as principais hipóteses usadas para os diferentes modelos de crescimento e densificação de geada e seus impactos na previsão da geada. Isso ajudará a compreender melhor os diferentes mecanismos envolvidos na geada, oferecendo um conjunto possível de equações, no compromisso de uma melhor precisão, além de apontar os aspectos críticos para melhorar as previsões.

### 1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

O estudo será focado preferencialmente em casos como evaporadores de câmaras frigoríficas, as quais têm baixíssimas temperaturas de evaporação e portanto, ocorre a inevitável formação de geada na superfície em contato com o ar. Para isso, será desenvolvido um simulador numérico o qual abranja o processo de formação de gelo devido sua enorme influência nas condições de funcionamento de evaporadores.

Para a formulação do modelo, serão consideradas as equações que regem os fenômenos de transferência de calor e massa. Além disso, será utilizada a técnica de média volumétrica local, a qual possibilita a avaliação local das propriedades no tempo e no espaço, permitindo assim, que se avalie os pontos críticos de formação do gelo e não apenas os balanços globais.

Pretende-se utilizar correlações empíricas mais elaboradas que forneçam valores dos coeficientes de transferência de calor e de massa dependentes do tempo, do espaço e das características de escoamento na interface.

A camada de geada será considerada um meio poroso, os campos de temperatura e concentração, que não são fixados, serão resolvidos permitindo que se englobe, condições não lineares que se aproximem das condições de contorno que realmente se apresentam no processo. Além disso, o problema terá o contorno móvel para representar o crescimento da geada, ao longo do tempo.

Assim, o objetivo principal deste trabalho é prever o comportamento de superfícies frias que em contato com o ar ocorra a formação de geada, a partir da formulação de um modelo, físico matemático, que permita a comparação dos resultados disponíveis e avaliação das diferenças existentes, a partir da literatura.

#### 1.3.1 Objetivos específicos

- Examinar o quanto a quantidade de gelo inicial influencia no modelo de crescimento;
- Identificar a formulação para o número de Nusselt que represente melhor a transferência de calor por convecção;

- Avaliar a expressão para a difusividade efetiva mais coerente com as evoluções de espessura da geada dentre as registradas na literatura;
- Avaliar o comportamento da camada da geada para variações de temperatura do ar, temperatura da placa, número de Reynolds e umidade relativa do ar.

## CAPÍTULO II

### 2 PROBLEMA FÍSICO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

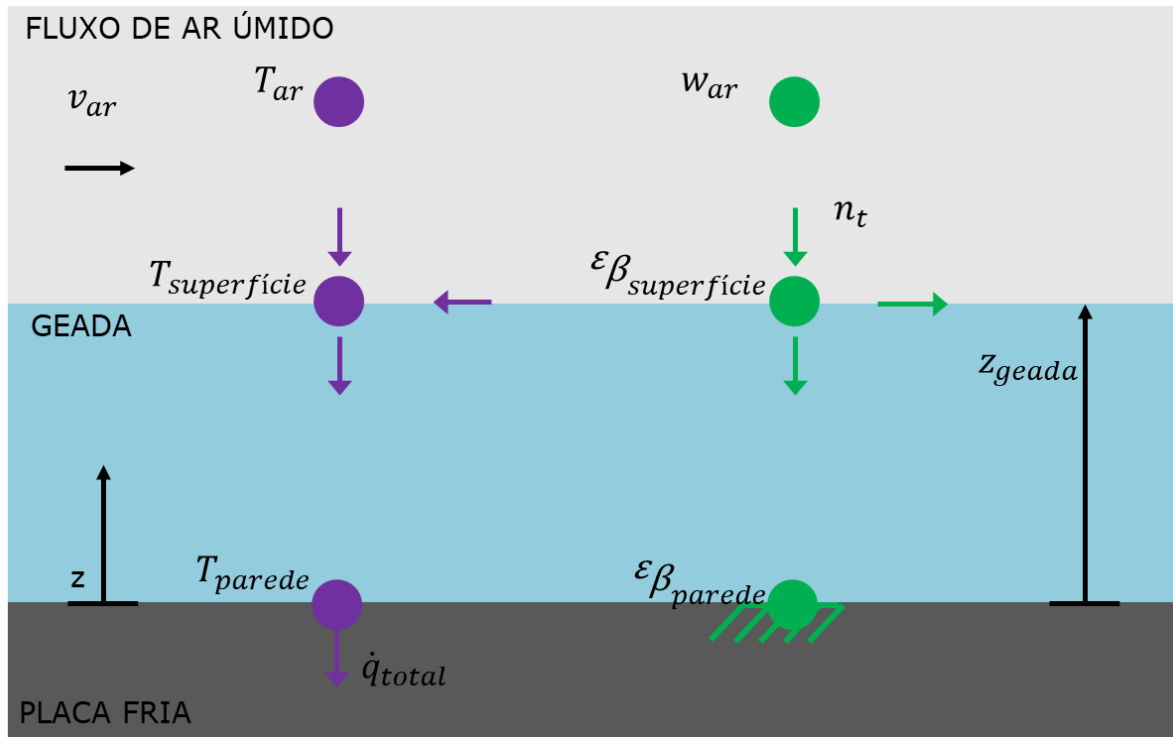
Neste item, será mostrado a formulação matemática do fenômeno de formação de gelo no período de crescimento da camada de geada que inclui tanto o 'período de crescimento tridimensional da camada de gelo' quanto o 'período de fronteira plenamente desenvolvida', que é o período em que a camada de gelo é considerada como meio poroso. O período inicial de crescimento unidimensional do cristal, corresponde às condições iniciais do problema.

Esta formulação parte das equações básicas que regem o fenômeno de transporte de calor e massa. Assim, deve-se descrever o sistema a ser analisado, que consiste em uma placa horizontal, sobre a qual há um fluxo de ar úmido, ou seja, uma mistura de ar seco com vapor d'água.

A placa por sua vez, é considerada com temperaturas abaixo de 0°C e inferiores à temperatura do ar úmido. Além disso, é suposta temperatura constante. Nestas condições, o vapor d'água em mistura com o ar poderia ser depositado sobre a placa inicialmente na fase líquida ou diretamente na forma de cristais de gelo. Assim, podem ser classificadas como geada por condensação (fase vapor para a fase líquida) ou geada por deposição (fase vapor para a fase sólida).

Para este trabalho é considerada apenas a fase vapor e a fase sólida, sendo desconsiderada a fase líquida e, portanto, é considerado na maioria dos casos estudados aqui, preferencialmente, a geada por deposição. A Figura 2. 1 apresenta um esquema simplificado do fenômeno físico analisado em que uma placa sobre a qual tem-se um fluxo de ar úmido.

A geada foi considerada como um meio poroso considerado uniforme, onde a difusão de calor e massa são governadas pelas leis de Fourier e Fick. Sua fase sólida teria seu volume variável no tempo, devido a dessublimação do vapor difundido nos poros formados pelos espaços deixados pela estrutura da geada. No entanto, esse volume foi considerado quase estacionário para simplificar a formulação das equações para meios porosos.



**Figura 2. 1** Esquema do fenômeno físico a ser analisado

Além disso, com a finalidade de que a modelagem físico-matemática represente da melhor forma possível os fenômenos físicos considerados, através de um modelo matemático de solução analítica ou numérica introduz-se hipóteses e condições a serem consideradas, como:

- A superfície da placa refrigerada é impermeável;
- Os escoamentos são incompressíveis;
- Ar úmido é forçado sobre a superfície da geada;
- Propriedades variáveis do ar úmido na camada da geada;
- O ar úmido no interior da camada porosa é saturado;
- O ar úmido é considerado uma mistura de gases ideais;
- Não há reação química nas fases;
- A fase sólida tem apenas um componente;

- Efeitos gravitacionais desprezíveis;
- Pressão total da fase gasosa constante.

Outras restrições são feitas ao longo do equacionamento.

## 2.1 EQUAÇÕES GERAIS DE TRANSPORTE DE MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA

### a. Equação da Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (2.1)$$

### b. Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Linear

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \rho \underline{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (2.2)$$

onde  $\underline{\underline{T}}$  é o tensor total de esforços.

### c. Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento Angular

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^* \quad (2.3)$$

onde  $\underline{\underline{T}}^*$  é a matriz transposta de  $\underline{\underline{T}}$ .

### d. Princípio da Conservação de Energia Térmica



$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q} + \frac{Dp}{Dt} + \nabla \underline{v} : \underline{\underline{\tau}} + \varphi \quad (2.4)$$

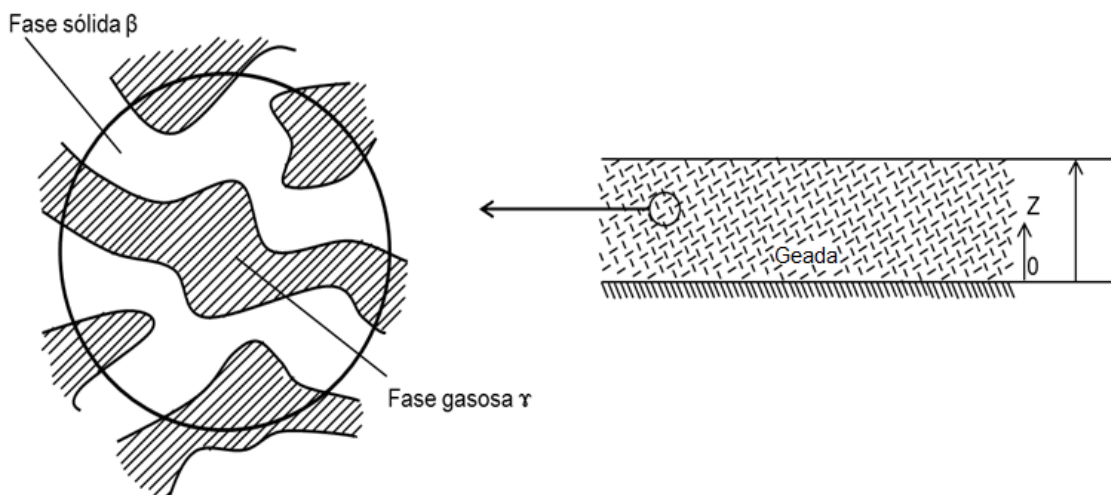
onde:  $\underline{\underline{\tau}}$  é o tensor relativo às forças cizalhantes,  $p$  é a pressão termodinâmica,  $h$  é a entalpia por unidade de massa e  $\varphi$  é o termo fonte.

## 2.2 FORMULAÇÕES DAS EQUAÇÕES LOCAIS DE CONSERVAÇÃO

O equacionamento apresentado a seguir é baseado no estudo de Whitaker (1977), porém será considerado conter apenas a fase gasosa e a fase sólida.

Em geral, para um meio poroso, é possível considerar duas fases:  $\beta$  é fase sólida (gelo) e  $\gamma$  é a fase gasosa (vapor d'água+ar). Logo, para as equações a seguir, o subscrito representa a fase em questão.

As equações governantes são formuladas para um volume elementar como representado na Figura 2. 2.



**Figura 2. 2** Volume Elementar do Meio Poroso

Foram consideradas as seguintes restrições:

R.1. Para ambas as fases (sólida e gasosa), a entalpia é independente da pressão, isto porque além da incompressibilidade da fase sólida, os gases serão tratados como misturas de gases ideais:  $h=h(T)$

R.2. O calor específico nas fases são constantes. O que significa que a entalpia pode ser representada por:  $h=C_p T$

R.3. Os trabalhos de compressão e devido aos termos de dissipação viscosa são desprezíveis em ambas as fases:  $\frac{Dp_\beta}{Dt}=0$  ;  $\nabla_{\underline{v}_\beta} \cdot T_\beta=0$ ;  $\frac{Dp_\gamma}{Dt}=0$ ;  $\nabla_{\underline{v}_\gamma} \cdot T_\gamma=0$

R.4. Não há reação química em nenhuma das fases:  $\varphi_\beta = 0$  e  $\varphi_\gamma = 0$

R.5. Como considera-se que a fase sólida é composta por apenas um componente:  $\rho_\beta$  é constante

## 2.2.1 Fase Sólida

### 2.2.1.1 Equação da continuidade

Como considera-se que a fase sólida tem apenas um componente, então a equação da continuidade para esta fase é:

$$\frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\beta \underline{v}_\beta) = 0 \quad (2.5)$$

### 2.2.1.2 Equação da energia

Com base na restrição R.3, pode-se simplificar a equação (2.4) para:

$$\rho_\beta \frac{Dh_\beta}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q}_\beta + \varphi_\beta \quad (2.6)$$

Expandindo a derivada material:

$$\rho_{\beta} \left( \frac{\partial h_{\beta}}{\partial t} + \underline{v}_{\beta} \cdot \nabla h_{\beta} \right) = -\nabla \cdot \underline{q}_{\beta} + \varphi_{\beta} \quad (2.7)$$

Considerando que a condutividade térmica é constante para a fase sólida, usando as restrições R.1 e R.2 e usando a Lei de Fourier, tem-se:

$$\rho_{\beta} C_{p\beta} \left( \frac{\partial T_{\beta}}{\partial t} + \underline{v}_{\beta} \cdot \nabla T_{\beta} \right) = k_{\beta} \nabla^2 T_{\beta} + \varphi_{\beta} \quad (2.8)$$

Mas pela restrição R.4,  $\varphi_{\beta}=0$ , então:

$$\rho_{\beta} C_{p\beta} \left( \frac{\partial T_{\beta}}{\partial t} \right) = k_{\beta} \nabla^2 T_{\beta} \quad (2.9)$$

## 2.2.2 Fase gasosa

Considera-se que a fase gasosa é composta por dois componentes, **vapor d'água (1)** e **ar seco (2)**.

### 2.2.2.1 Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho_y}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_y \underline{v}_y) = 0 \quad (2.10)$$

### 2.2.2.2 Equação da continuidade para a espécie i

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \underline{v}_i) = 0 \quad i=1,2 \quad (2.11)$$

Pode-se observar que esta equação deriva da soma das N espécies no sistema, sabendo que N=2, então:

$$\rho_Y = \rho_{\text{vap}} + \rho_{\text{ar}} \quad (2.12)$$

$$\rho_Y \underline{v}_Y = \rho_{\text{vap}} \underline{v}_{\text{vap}} + \rho_{\text{ar}} \underline{v}_{\text{ar}} \quad (2.13)$$

Agora, escrevendo as velocidades das espécies  $\underline{v}_i$  em termos de velocidade média mássica  $\underline{v}_Y$  e da velocidade de difusão  $\underline{u}_i$ , tem-se:

$$\underline{v}_i = \underline{v}_Y + \underline{u}_i \quad (2.14)$$

Assim, permite-se escrever a equação (2.11) como:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \underline{v}_Y) = -\nabla \cdot (\rho_i \underline{u}_i) \quad i=1,2 \quad (2.15)$$

O fluxo difusivo pode ser expresso como:

$$\rho_i \underline{u}_i = -\rho_Y D \nabla \left( \frac{\rho_i}{\rho_Y} \right) \quad (2.16)$$

Logo, a forma final da equação da continuidade para as espécies é:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \underline{v}_Y) = \nabla \cdot \left( \rho_Y D \nabla \left( \frac{\rho_i}{\rho_Y} \right) \right) \quad (2.17)$$

### 2.2.2.3 Equação da energia

A forma apropriada da equação (2.4) da energia para um sistema multicomponente é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i \bar{h}_i \right) + \nabla \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i \underline{v}_i \bar{h}_i \right) = -\nabla \cdot \underline{q} + \frac{Dp_Y}{Dt} + \nabla \underline{v}_Y : \underline{T} + \phi_Y \quad (2.18)$$

onde  $\bar{h}_i$  representa a entalpia mássica parcial, a qual é representada pela entalpia molar parcial da espécie  $i$  dividido pelo peso molecular da espécie  $i$ .

Utilizando a restrição R.3, a equação é simplificada a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i \bar{h}_i \right) + \nabla \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i \underline{v}_i \bar{h}_i \right) = -\nabla \cdot \underline{q} + \phi_Y \quad (2.19)$$

Definindo:

$$\rho_Y h_Y = \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i \bar{h}_i \quad (2.20)$$

Usando esta definição, equação (2.20), a equação (2.14) e a equação da continuidade, pode-se escrever, depois de algumas manipulações algébricas, a equação a seguir, expressa pela equação (2.19):

$$\rho_Y C_{p_Y} \left( \frac{\partial h_Y}{\partial t} + \underline{v}_Y \cdot \nabla h_Y \right) = -\nabla \cdot \underline{q} - \nabla \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i \underline{u}_i \bar{h}_i \right) + \phi_Y \quad (2.21)$$

Aplicando, então, a lei de Fourier e a restrição R.1, tem-se:

$$\rho_Y C_{p_Y} \left( \frac{\partial T_Y}{\partial t} + \underline{v}_Y \cdot \nabla T_Y \right) = k_Y \nabla^2 T_Y - \nabla \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i \underline{u}_i \bar{h}_i \right) + \phi_Y \quad (2.22)$$

Fazendo o uso da restrição R.4:

$$\rho_Y C_{pY} \left( \frac{\partial T_Y}{\partial t} + \underline{v}_Y \cdot \nabla T_Y \right) = k_Y \nabla^2 T_Y - \nabla \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i \underline{u}_i \bar{h}_i \right) \quad (2.23)$$

onde, o calor específico na fase gasosa é dado por:

$$C_{pY} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\rho_i}{\rho_Y} \bar{C}_{p_i} \quad (2.24)$$

### 2.3 FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EM MÉDIA VOLUMÉTRICA

Para todos os pontos no espaço, associa-se uma média volumétrica  $\mathcal{V}$ . Para a média volumétrica, então, escolhe-se qualquer forma desde que suas dimensões e orientação sejam invariantes. Há três tipos de média que são úteis em análises de fenômeno de transporte em meios porosos, a primeira delas é a média espacial de função  $\psi$  definido em todo o espaço. Esta média é representado por  $\langle \psi \rangle$  e é definido por (WHITAKER, 1977):

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \psi dV \quad (2.25)$$

Mais frequentemente interessa-se pela média de alguma quantidade associada apenas com uma única fase, por exemplo, pode-se estar preocupado com a temperatura média da fase sólida, e define-se, então, a média da fase de  $T_\beta$  como:

$$\langle T_\beta \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} T_\beta dV \quad (2.26)$$

Desde que  $T_\beta$  seja definido da maneira normal  $\beta$  na fase e zero em todas as outras fases, a equação se reduz a:

$$\langle T_{\beta} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_{\beta}} T_{\sigma} dV \quad (2.27)$$

A média da fase tem a desvantagem de que se  $T_{\beta}$  é constante, a média da fase não é igual ao valor desta constante. A quantidade mais representativa da temperatura do sólido é dita ser uma média intrínseca da fase, definida como:

$$\langle T_{\beta} \rangle^{\beta} = \frac{1}{V_{\beta}} \int_{V} T_{\beta} dV \quad (2.28)$$

Novamente, desde que  $T_{\beta}$  seja  $\beta$  na fase e zero em todas as outras fases, a equação se reduz a:

$$\langle T_{\beta} \rangle^{\beta} = \frac{1}{V_{\beta}} \int_{V_{\beta}} T_{\beta} dV \quad (2.29)$$

Define-se as frações volumétricas das fases:

$$\varepsilon_{\beta}(t) = \frac{V_{\beta}(t)}{V}, \quad \varepsilon_{\gamma}(t) = \frac{V_{\gamma}(t)}{V} \quad (2.30)$$

A soma dessas frações, será:

$$\varepsilon_{\beta}(t) + \varepsilon_{\gamma}(t) = 1 \quad (2.31)$$

e a média da fase e a média intrínseca da fase são relacionadas por:

$$\varepsilon_{\beta} \langle T_{\beta} \rangle^{\beta} = \langle T_{\beta} \rangle \quad (2.32)$$

A principal ferramenta na formulação das equações em média volumétrica local é o teorema da média, que pode ser escrito, para o caso geral de três fases, como:

$$\langle \nabla \psi_\beta \rangle = \nabla \langle \psi_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \psi_\beta \underline{n}_{\beta\sigma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \psi_\beta \underline{n}_{\beta\gamma} dA \quad (2.33)$$

Para as equações a seguir, considera-se o sistema sólido-gasoso em equilíbrio local, fazendo o uso das definições de média da fase ( $\langle T_\beta \rangle$ ) e média intrínseca da fase ( $\langle T_\beta \rangle^\beta$ ), usando a técnica de média volumétrica local, sobre a base das restrições e hipóteses indicadas, obtém-se as equações de transporte de calor e massa para o meio poroso, no caso geral, para as fases sólido ( $\beta$ ) e gasoso ( $\gamma$ ).

### 2.3.1 Equações da fase sólida

A interface  $\beta$ - $\gamma$  pode se movimentar a uma velocidade diferente de  $\underline{v}_\beta$  ou  $\underline{v}_\gamma$  e esta velocidade é nomeada então como  $\underline{w}$ .

#### 2.3.1.1 Equação da continuidade

Integrando a equação (2.5) através de  $V_\beta(t)$  e dividindo por  $V$ , tem-se:

$$\frac{1}{V} \int_{V_\beta(t)} \left( \frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} \right) dV + \frac{1}{V} \int_{V_\beta(t)} \nabla \cdot (\rho_\beta \underline{v}_\beta) dV = 0 \quad (2.34)$$

A aplicação do Teorema Geral do Transporte permite escrever:

$$\frac{1}{V} \int_{V_\beta(t)} \left( \frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} \right) dV = \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{V} \int_{V_\beta(t)} \rho_\beta dV \right] - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_\beta \underline{w} \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA \quad (2.35)$$

Enquanto o Teorema da Média fornece:

$$\frac{1}{V} \int_{V_\beta(t)} \nabla \cdot (\rho_\beta \underline{v}_\beta) dV = \langle \nabla \cdot (\rho_\beta \underline{v}_\beta) \rangle = \nabla \cdot \langle \rho_\beta \underline{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_\beta \underline{v}_\beta \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA \quad (2.36)$$



Além disso, considerando que  $\rho_\beta$  é constante, tem-se:

$$\langle \rho_\beta \underline{v}_\beta \rangle = \rho_\beta \langle \underline{v}_\beta \rangle \quad (2.37)$$

$$\langle \rho_\beta \rangle = \epsilon_\beta \rho_\beta \quad (2.38)$$

Finalmente, substituindo as equações (2.35) e (2.36) na equação (2.34) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_\beta \rangle + \nabla \cdot \langle \rho_\beta \underline{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_\beta (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA = 0 \quad (2.39)$$

Substituindo agora, as equações (2.37) e (2.38) na equação (2.39) e dividindo por  $\rho_\beta$ , leva-se à forma adequada da equação da continuidade para a fase sólida:

$$\frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \underline{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA = 0 \quad (2.40)$$

O  $\langle \underline{v}_\beta \rangle$  representa o vetor velocidade superficial, que é usado para avaliar a taxa de fluxo volumétrico e pode ser considerado nulo. Nesta última equação, pode-se identificar a taxa de sublimação e/ou dessublimação por unidade de volume como:

$$\langle \dot{m} \rangle = \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_\beta (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA \quad (2.41)$$

onde  $\langle \dot{m} \rangle$  será positivo para o processo de sublimação e negativo para o processo de dessublimação.

Logo:

$$\frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial t} + \frac{\langle \dot{m} \rangle}{\rho_\beta} = 0 \quad (2.42)$$

### 2.3.1.2 Equação de energia

Expandindo a derivada material da equação (2.6), tem-se:

$$\frac{\partial(\rho_\beta h_\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\beta h_\beta \underline{v}_\beta) = -\nabla \cdot \underline{q}_\beta + \phi_\beta \quad (2.43)$$

Para obter a forma de volume médio da equação de transporte, assim como a sequência feita anteriormente, deve-se integrar através de  $V_\beta(t)$  e dividir por  $\mathcal{V}$ , e fazer o uso do teorema geral do transporte para o primeiro termo e o teorema da média para o segundo e terceiro termos, obtendo:

$$\frac{\partial \langle \rho_\beta h_\beta \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_\beta h_\beta \underline{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA = -\nabla \cdot \langle \underline{q}_\beta \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \underline{q}_\beta \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA + \langle \phi_\beta \rangle \quad (2.44)$$

A integral da área no lado direito da equação (2.44) representa a taxa na qual o calor é transferido da fase  $\beta$  para a fase  $\gamma$  através da área interfacial  $A_{\beta\gamma}$ . Agora, para analisar os termos do lado esquerdo da (2.44), é requerido expressar a entalpia, como indicado na restrição R.2. Isto leva a:

$$h_\beta = h_\beta^\circ + (Cp)_\beta (T_\beta - T_\beta^\circ) \quad (2.45)$$

onde  $h_\beta^\circ$  é a entalpia de referência na temperatura  $T_\beta^\circ$ . Direcionando a atenção para os dois primeiros termos da equação (2.44) e substituindo na equação (2.45) e lembrando que  $\rho_\beta$ ,  $(Cp)_\beta$  e  $[h_\beta^\circ - Cp_\beta T_\beta^\circ]$  são constantes, a fim de obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho_\beta h_\beta \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_\beta h_\beta \underline{v}_\beta \rangle &= \rho_\beta (Cp)_\beta \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_\beta \langle T_\beta \rangle^\beta) + \rho_\beta [h_\beta^\circ - Cp_\beta T_\beta^\circ] \left( \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial t} \right) + \\ &+ \rho_\beta (Cp)_\beta \nabla \cdot \langle T_\beta \underline{v}_\beta \rangle + \rho_\beta [h_\beta^\circ - Cp_\beta T_\beta^\circ] \nabla \cdot \langle \underline{v}_\beta \rangle \end{aligned} \quad (2.46)$$

Aqui se usa a equação (2.32). Neste ponto, o objetivo é representar o termo  $\nabla \cdot \langle T_\beta \underline{v}_\beta \rangle$  em termos de  $\langle T_\beta \rangle^\beta$  e  $\langle \underline{v}_\beta \rangle$ . Desta maneira, precisa-se representar  $T_\beta$  e  $\underline{v}_\beta$  em termos de valores médios e desvios destes valores médios. Assim, tem-se:

$$\langle T_\beta \rangle = \langle T_\beta \rangle^\beta + \tilde{T}_\beta \quad \text{na fase } \beta \quad (2.47)$$

$$T_\beta - \tilde{T}_\beta = 0 \quad \text{na fase } \gamma \quad (2.48)$$

$$\underline{v}_\beta = \langle \underline{v}_\beta \rangle + \tilde{\underline{v}}_\beta \quad \text{na fase } \beta \quad (2.49)$$

$$\underline{v}_\beta - \tilde{\underline{v}}_\beta = 0 \quad \text{na fase } \gamma \quad (2.50)$$

A aplicação das equações (2.47) a (2.50) permite escrever:

$$\langle T_\beta \underline{v}_\beta \rangle = \langle T_\beta \rangle^\beta \langle \underline{v}_\beta \rangle + \langle \tilde{T}_\beta \tilde{\underline{v}}_\beta \rangle \quad (2.51)$$

O termo  $\langle \tilde{T}_\beta \tilde{\underline{v}}_\beta \rangle$  é referido como um vetor dispersão. Substituindo a equação (2.51) na equação (2.46) e rearranjando, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \rho_\beta h_\beta \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_\beta h_\beta \underline{v}_\beta \rangle &= \varepsilon_\beta \rho_\beta (Cp)_\beta \frac{\partial \langle T_\beta \rangle^\beta}{\partial t} \\ + \rho_\beta \left[ h_\beta^\circ - Cp_\beta (\langle T_\beta \rangle^\beta - T_\beta^\circ) \right] &\left( \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \underline{v}_\beta \rangle \right) + \\ + \rho_\beta (Cp)_\beta \langle \underline{v}_\beta \rangle \cdot \nabla \langle T_\beta \rangle^\beta &+ \rho_\beta (Cp)_\beta \nabla \cdot \langle \tilde{T}_\beta \tilde{\underline{v}}_\beta \rangle \end{aligned} \quad (2.52)$$

Usando a equação (2.40) é permitido expressar este resultado como:

$$\frac{\partial \langle \rho_\beta h_\beta \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_\beta h_\beta \underline{v}_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \rho_\beta (Cp)_\beta \frac{\partial \langle T_\beta \rangle^\beta}{\partial t} + \quad (2.53)$$

$$-\left[ h_{\beta}^{\circ} + C p_{\beta} (\langle T_{\beta} \rangle^{\beta} - T_{\beta}^{\circ}) \right] \left\{ \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_{\beta} (\underline{v}_{\beta} - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA \right\}$$

Substituindo esta equação na equação (2.44), obtém-se a forma da equação da energia para a fase  $\beta$ :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} \frac{\partial \langle T_{\beta} \rangle^{\beta}}{\partial t} + \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} \langle \underline{v}_{\beta} \rangle \cdot \nabla \langle T_{\beta} \rangle^{\beta} + \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} \nabla \cdot \langle \tilde{T}_{\beta} \tilde{\underline{v}}_{\beta} \rangle + \\ & + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} (T_{\beta} - T_{\beta}^{\circ}) (\underline{v}_{\beta} - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA - \\ & - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} (\langle T_{\beta} \rangle^{\beta} - T_{\beta}^{\circ}) (\underline{v}_{\beta} - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA = \\ & = -\nabla \cdot \langle \underline{q}_{\beta} \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \underline{q}_{\beta} \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA + \langle \varphi_{\beta} \rangle \end{aligned} \quad (2.54)$$

Agora, usa-se novamente a equação (2.45) para representar  $h_{\beta}$  em termos de  $h_{\beta}^{\circ}$  e  $(Cp)_{\beta} (T_{\beta} - T_{\beta}^{\circ})$ . Nesta última equação, o quarto e o quinto termos do lado esquerdo são cancelados já que a temperatura na fase sólida é considerada uniforme, ou seja,

$$T_{\beta} = \langle T_{\beta} \rangle^{\beta} = \text{constante}$$

mas para o caso geral, deve-se usar novamente a equação (2.47) para obter a forma simplificada da equação (2.54):

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} \frac{\partial \langle T_{\beta} \rangle^{\beta}}{\partial t} + \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} \langle \underline{v}_{\beta} \rangle \cdot \nabla \langle T_{\beta} \rangle^{\beta} + \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} \nabla \cdot \langle \tilde{T}_{\beta} \tilde{\underline{v}}_{\beta} \rangle + \\ & + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} \tilde{T}_{\beta} (\underline{v}_{\beta} - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA = \nabla \cdot \left\{ k_{\beta} \left[ \nabla (\varepsilon_{\beta} \langle T_{\beta} \rangle^{\beta}) + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_{\beta} \underline{n}_{\beta\gamma} dA \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \underline{q}_{\beta} \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA + \langle \varphi_{\beta} \rangle \end{aligned} \quad (2.55)$$

Neste caso, usou-se a lei de Fourier, onde pelo teorema da média, e considerando  $k_{\beta}$  aproximadamente constante, escreve-se:

$$\langle \underline{q}_\beta \rangle = -k_\beta \langle \nabla T_\beta \rangle = -k_\beta \left[ \nabla \langle T_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta \underline{n}_{\beta\gamma} dA \right] \quad (2.56)$$

Agora substituindo a equação (2.41) na equação (2.55) e usando a restrição R.4, obtemos uma forma ainda mais simplificada da equação da energia:

$$\begin{aligned} \epsilon_\beta \rho_\beta (Cp)_\beta \frac{\partial \langle T_\beta \rangle^\beta}{\partial t} + \rho_\beta (Cp)_\beta \langle \underline{v}_\beta \rangle \cdot \nabla \langle T_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta (Cp)_\beta \nabla \cdot \langle \tilde{T}_\beta \tilde{\underline{v}}_\beta \rangle + (Cp)_\beta \tilde{T}_\beta \langle \dot{m} \rangle = \\ = \nabla \cdot \left\{ k_\beta \left[ \nabla (\epsilon_\beta \langle T_\beta \rangle^\beta) + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta \underline{n}_{\beta\gamma} dA \right] \right\} - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \underline{q}_\beta \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA \end{aligned} \quad (2.57)$$

## 2.3.2 Fase gasosa

### 2.3.2.1 Equação da continuidade

Para a fase gasosa, repete-se a análise que foi feita para a fase sólida, usando a equação (2.10):

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_\gamma \rangle + \nabla \cdot \langle \rho_\gamma \underline{v}_\gamma \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} \rho_\gamma (\underline{v}_\gamma - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\gamma\beta} dA = 0 \quad (2.58)$$

Não é possível uma maior simplificação destes resultados, uma vez que  $\rho_\gamma$  depende da temperatura e da composição da fase gasosa. A representação em termos da média intrínseca da fase conseguida através da expressão de funções de ponto como:

$$\rho_\gamma = \langle \rho_\gamma \rangle^\gamma + \tilde{\rho}_\gamma \quad \text{na fase } \gamma \quad (2.59)$$

$$\rho_\gamma = \tilde{\rho}_\gamma = 0 \quad \text{na fase } \beta \quad (2.60)$$

$$\underline{v}_\gamma = \langle \underline{v}_\gamma \rangle + \tilde{\underline{v}}_\gamma \quad \text{na fase } \gamma \quad (2.61)$$

$$\underline{v}_\gamma = \tilde{\underline{v}}_\gamma = 0 \quad \text{na fase } \beta \quad (2.62)$$

Além disso, pode-se usar a definição:

$$\langle \rho_\gamma \rangle = \varepsilon_\gamma \langle \rho_\gamma \rangle^\gamma \quad (2.63)$$

Juntamente com as equações (2.59) a (2.62) pode-se expressar a equação (2.58) como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_\gamma \langle \rho_\gamma \rangle^\gamma) + \nabla \cdot (\langle \rho_\gamma \rangle^\gamma \langle \underline{v}_\gamma \rangle) + \nabla \cdot \langle \tilde{\rho}_\gamma \tilde{\underline{v}}_\gamma \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} \rho_\gamma (\underline{v}_\gamma - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\gamma\beta} dA = 0 \quad (2.64)$$

Não há vantagem em representar a integral da área em termos de média intrínseca da fase  $\langle \rho_\gamma \rangle^\gamma$  e da média da fase  $\langle \underline{v}_\gamma \rangle$ , por isso, deixa-se este termo inalterado. Em geral, espera-se que  $\tilde{\rho}_\gamma$  e  $\tilde{\underline{v}}_\gamma$  sejam muito menores que  $\langle \rho_\gamma \rangle^\gamma$  e  $\langle \underline{v}_\gamma \rangle$  na fase  $\gamma$ , e pode-se afirmar que esta suposição geralmente é plausível:

$$\tilde{\Psi}_\omega \ll \langle \Psi_\omega \rangle^\omega \text{ e } \tilde{\Psi}_\omega \ll \langle \tilde{\Psi}_\omega \rangle \quad \text{na fase } \omega \quad (2.65)$$

onde  $\omega$  refere-se às fases  $\beta$  e  $\gamma$ . E então, pode-se expressar a equação da continuidade da fase gasosa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_\gamma \langle \rho_\gamma \rangle^\gamma) + \nabla \cdot (\langle \rho_\gamma \rangle^\gamma \langle \underline{v}_\gamma \rangle) + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} \rho_\gamma (\underline{v}_\gamma - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\gamma\beta} dA = 0 \quad (2.66)$$

Desde que a equação (2.65) permita escrever que:

$$\nabla \cdot (\langle \rho_\gamma \rangle^\gamma \langle \underline{v}_\gamma \rangle) \gg \nabla \cdot \langle \tilde{\rho}_\gamma \tilde{\underline{v}}_\gamma \rangle \quad (2.67)$$

Aqui se fez uma hipótese definitiva sobre a ordem de grandeza de funções e pode-se listar mais cuidadosamente esta hipótese como:

“O produto dos desvios (isto é, os termos assinalados por um til), em geral, será considerado negligenciável em comparação com o produto das médias”.

### 2.3.2.2 Equação da continuidade para as espécies i

Para a equação da continuidade para as espécies da fase gasosa, parte-se da equação (2.11) e como resultado análogo da equação (2.58), é obtido:

$$\frac{\partial \langle \rho_i \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_i \underline{v}_i \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{V\beta}} \rho_i (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{V\beta} dA = 0, \quad i=1, 2 \quad (2.68)$$

Seguindo as equações (2.14) e (2.16), representa-se  $\underline{v}_i$  em termos de velocidade média mássica e a velocidade de difusão e a lei de Fick são usadas para representar a equação (2.68) como segue:

$$\frac{\partial \langle \rho_i \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_i \underline{v}_i \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{V\beta}} \rho_i (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{V\beta} dA = \nabla \cdot \left\langle \rho_V D \nabla \left( \frac{\rho_i}{\rho_V} \right) \right\rangle, \quad i=1, 2 \quad (2.69)$$

Pode-se desprezar as variações de D dentro do volume médio local, mas conservando a possibilidade de variação com a distância:

$$\frac{\partial \langle \rho_i \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_i \underline{v}_i \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{V\beta}} \rho_i (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{V\beta} dA = \nabla \cdot \left[ D \left\langle \rho_V \nabla \left( \frac{\rho_i}{\rho_V} \right) \right\rangle \right], \quad i=1, 2 \quad (2.70)$$

Tem-se:

$$\langle \rho_i \rangle = \varepsilon_V \langle \rho_i \rangle^Y \quad (2.71)$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_V} = \frac{\rho_i}{\langle \rho_V \rangle^Y} \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{\rho}_V}{\langle \rho_V \rangle^Y} \right) \right] \quad (2.72)$$

Usando as equações (2.65) e (2.67):

$$\left(\langle \rho_Y \rangle^Y + \tilde{\rho}_Y\right)^{-1} = \frac{1}{\langle \rho_Y \rangle^Y} \left[ 1 - \frac{\tilde{\rho}_Y}{\langle \rho_Y \rangle^Y} \right] \quad (2.73)$$

$$\langle \langle \rho_Y \rangle^Y + \psi_Y \rangle = \langle \rho_i \rangle^Y \langle \psi_Y \rangle \quad (2.74)$$

Após algumas simplificações, tem-se a forma final da equação de continuidade para as espécies da fase gasosa:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_Y \langle \rho_i \rangle^Y) + \nabla \cdot (\langle \rho_i \rangle^Y \langle \underline{v}_Y \rangle) + \frac{1}{V} \int_{A_{Y\beta}} \rho_i (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{Y\beta} dA = \nabla \cdot \left\{ \langle \rho_Y \rangle^Y D \left[ \nabla \left( \frac{\langle \rho_i \rangle}{\langle \rho_Y \rangle^Y} \right) + \tilde{\Omega}_i \right] \right\} \quad (2.75)$$

onde

$$\tilde{\Omega}_i = \frac{1}{V} \int_{A_{Y\beta}} \left( \frac{\rho_i}{\langle \rho_Y \rangle^Y} \right) \underline{n}_{Y\beta} dA + \left\langle \nabla \left[ \frac{\rho_i}{\langle \rho_Y \rangle^Y} \left( \frac{\tilde{\rho}_Y}{\langle \rho_Y \rangle^Y} \right) \right] \right\rangle + \left\langle \tilde{\rho}_Y \nabla \left( \frac{\rho_i}{\langle \rho_Y \rangle^Y} \right) \right\rangle / \langle \rho_Y \rangle^Y \quad (2.76)$$

### 2.3.2.3 Equação da energia

Para a fase gasosa, começa-se a análise para a equação da energia térmica com a equação (2.19) e usando a mesma análise feita anteriormente para a fase sólida, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \sum_{i=1}^{i=2} \rho_i \bar{h}_i \right\rangle + \nabla \cdot \left\langle \sum_{i=1}^{i=2} \rho_i v_i \bar{h}_i \right\rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{Y\beta}} \left[ \sum_{i=1}^{i=2} \rho_i \bar{h}_i (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{Y\beta} \right] dA = -\nabla \cdot \langle \underline{q}_Y \rangle - \\ - \frac{1}{V} \int_{A_{Y\beta}} \underline{q}_Y \cdot \underline{n}_{Y\beta} dA + \langle \varphi_Y \rangle \end{aligned} \quad (2.77)$$

A equação a seguir, expressa a entalpia parcial mássica para a espécie i:

$$\bar{h}_i = h_i^\circ + (Cp)_i (T_Y - T_Y^\circ) \quad (2.78)$$



A expressão é dada pela entalpia parcial mássica em termos do calor específico do componente puro  $(Cp)_i$  ao invés do calor específico parcial mássico  $(\overline{Cp})_i$ , assim, considera-se a fase gasosa como sendo termodinamicamente ideal.

Após algumas etapas, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \sum_{i=1}^{i=2} \langle \rho_i \rangle (Cp)_i \right\} \frac{\partial \langle T_Y \rangle^Y}{\partial t} + \left\{ \sum_{i=1}^{i=2} (Cp)_i \langle \rho_i v_i \rangle \right\} \cdot \nabla \langle T_Y \rangle^Y + \\
 & + \frac{1}{V} \int_{A_{V\beta}} \sum_{i=1}^{i=2} \rho_i (Cp)_i \tilde{T}_Y (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{V\beta} dA + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{i=2} (Cp)_i \langle \tilde{\rho}_i \tilde{T}_Y \rangle + \\
 & + \nabla \cdot \sum_{i=1}^{i=2} (Cp)_i \langle \tilde{\rho}_i \tilde{T}_Y \rangle = \nabla \cdot \left\{ k_Y \left[ \nabla (\epsilon_Y \langle T_Y \rangle^Y) + \frac{1}{V} \int_{A_{V\beta}} T_Y \underline{n}_{V\beta} dA \right] \right\} - \\
 & - \frac{1}{V} \int_{A_{V\beta}} \underline{q}_{-Y} \cdot \underline{n}_{V\beta} dA + \langle \phi_Y \rangle
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

### 2.3.3 Equação Total da Energia

Enquanto há muitos processos nos quais a temperatura do gás  $\langle T_Y \rangle^Y$  é diferente da temperatura do sólido  $\langle T_\beta \rangle^\beta$ , outros processos podem ser caracterizados pelas taxas de transporte convectivos baixos e abaixo dessas circunstâncias é possível assumir que o transporte condutivo é suficiente para eliminar as diferenças de temperaturas entre as fases separadas. Então o sistema sólido-gás é considerado em “equilíbrio local”.

Uma consequência lógica desta suposição é que a média das temperaturas da fase intrínseca é igual a:

$$\langle T_Y \rangle^Y = \langle T_\beta \rangle^\beta \tag{2.80}$$

Desde que a temperatura média espacial seja definida como:

$$\langle T \rangle \equiv \epsilon_\beta \langle T_\beta \rangle^\beta + \epsilon_Y \langle T_Y \rangle^Y \tag{2.81}$$

E a equação (2.80) exige que:

$$\langle T_\beta \rangle^\beta = \langle T_\gamma \rangle^\gamma = \langle T \rangle \quad (2.82)$$

A seguir, assume-se um meio poroso, onde para sistema sólido-gás é imposta a hipótese de estar em “equilíbrio local”, assim, a soma das equações de energia térmica das fase  $\beta$  e fase  $\gamma$ , leva diretamente ao desenvolvimento de uma equação total de energia térmica, portanto, somando as equações (2.55) e (2.79), tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[ \epsilon_\beta \rho_\beta (Cp)_\beta + \epsilon_\gamma \left\{ \sum_{i=1}^{i=2} \langle \rho_i \rangle (Cp)_i \right\} \right] \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \left[ \rho_\beta (Cp)_\beta \langle \underline{v}_\beta \rangle + \sum_{i=1}^{i=2} (Cp)_i \langle \rho_i \underline{v}_i \rangle \right] \cdot \nabla \langle T \rangle + \\ & + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_\beta (Cp)_\beta \tilde{T}_\beta (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} \sum_{i=1}^{i=2} \rho_i (Cp)_i \tilde{T}_\gamma (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\gamma\beta} dA = \\ & = \nabla \cdot \left\{ \nabla \left[ \left( k_\beta \epsilon_\beta + k_\gamma \epsilon_\gamma \right) \langle T \rangle \right] + (k_\beta - k_\gamma) \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta \underline{n}_{\beta\gamma} dA \right\} - \\ & - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} (\underline{q}_\beta - \underline{q}_\gamma) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA - \nabla \cdot \langle \xi \rangle + \langle \varphi \rangle \end{aligned} \quad (2.83)$$

No resultado, foi feito o uso do fato que:

$$\underline{n}_{\beta\gamma} = -\underline{n}_{\gamma\beta} \quad (2.84)$$

E ainda que:

$$T_\gamma = T_\beta \quad \text{para} \quad A_{\gamma\beta} = A_{\beta\gamma} \quad (2.85)$$

O termo fonte da equação pode ser definido como:

$$\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_\beta \rangle + \langle \varphi_\gamma \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{i=2} (Cp)_i \langle \tilde{\rho}_i \tilde{T}_\gamma \rangle \quad (2.86)$$

E o termo  $\nabla \cdot \langle \xi \rangle$  é o termo de dispersão da fase gasosa, dado por:

$$\nabla \cdot \langle \xi \rangle = \rho_\beta (Cp)_\beta \nabla \cdot \langle \tilde{T}_\beta \tilde{V}_\beta \rangle + \nabla \cdot \sum_{i=1}^{i=2} (Cp)_i \langle \tilde{\rho}_i \tilde{V}_i \tilde{T}_i \rangle \quad (2.87)$$

A seguir examina-se separadamente as partes da equação da energia térmica com a intenção de desenvolver uma forma que seja usual na análise do problema a ser tratado neste trabalho.

A massa específica média espacial é uma quantidade bem definida e medida dada por (sabendo que  $\langle \rho \rangle$  é a massa total por unidade de volume):

$$\langle \rho \rangle = \varepsilon_\beta \langle \rho_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\gamma \sum_{i=1}^{i=2} \langle \rho_i \rangle^\gamma \quad (2.88)$$

e é apropriado usar  $\langle \rho \rangle$  para definir a média ponderada da fração mássica do calor específico por:

$$Cp = \frac{\varepsilon_\beta \rho_\beta (Cp)_\beta + \varepsilon_\gamma \sum_{i=1}^{i=2} \langle \rho_i \rangle^\gamma (Cp)_i}{\langle \rho \rangle} \quad (2.89)$$

Lembrando que  $\langle \rho_\beta \rangle^\beta = \rho_\beta$  desde que a massa específica da fase sólida seja constante.

O primeiro termo do lado direito da equação (2.83) pode, então, ser expresso como:

$$\left[ \varepsilon_\beta \rho_\beta (Cp)_\beta + \varepsilon_\gamma \left\{ \sum_{i=1}^{i=2} \langle \rho_i \rangle^\gamma (Cp)_i \right\} \right] \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \langle \rho \rangle Cp \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \quad (2.90)$$

Deve-se avaliar também as condições na fronteira gás-sólido:

$$\rho_\beta h_\beta (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} + \sum_{i=1}^{i=2} \rho_i \bar{h}_i (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\gamma\beta} = - (\underline{q}_\beta - \underline{q}_\gamma) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} \quad (2.91)$$

Substituindo as equações (2.90) e (2.91) na equação (2.83) e rearranjando leva à uma forma levemente mais atrativa da equação total da energia térmica:

$$\begin{aligned} & \langle \rho \rangle C_p \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \left[ \rho_\beta (C_p)_\beta \langle v_\beta \rangle + \sum_{i=1}^{i=2} (C_p)_i \langle \rho_i v_i \rangle \right] \cdot \nabla \langle T \rangle - \\ & - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} \rho_\beta [h_\beta - (C_p)_\beta] \tilde{T}_\beta (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\beta}} \sum_{i=1}^{i=2} \rho_i [\bar{h}_i - (C_p)_i] \tilde{T}_\gamma (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\gamma\beta} dA = \quad (2.92) \\ & = \nabla \cdot \left\{ \left[ (k_\beta \epsilon_\beta + k_\gamma \epsilon_\gamma) \langle T \rangle \right] + (k_\beta - k_\gamma) \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\gamma}} T_\beta \underline{n}_{\beta\gamma} dA \right\} - \nabla \cdot \langle \xi \rangle + \langle \varphi \rangle \end{aligned}$$

Integrando os termos do lado esquerdo da equação (2.92) e substituindo as equações de entalpia (2.45) e (2.78), tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho_\beta [h_\beta - (C_p)_\beta \tilde{T}_\beta] (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} d + \sum_{i=1}^{i=2} \rho_i [\bar{h}_i - (C_p)_i \tilde{T}_\gamma] (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\gamma\beta} = \\ & = [h_\beta^\circ - (C_p)_\beta (\langle T_\beta \rangle^\beta - T_\beta^\circ)] \rho_\beta (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} d + \sum_{i=1}^{i=2} [h_i^\circ - (C_p)_i (\langle T_\gamma \rangle^\gamma - T_\gamma^\circ)] \rho_i (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\gamma\beta} \quad (2.93) \end{aligned}$$

Sabe-se que, na fronteira do volume médio, tem-se:

$$\rho_i (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} + \rho_\beta (\underline{v}_\beta - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{para } i=1 \quad (2.94)$$

$$\rho_i (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\gamma\beta} = 0 \quad \text{para } i=2 \quad (2.95)$$

Logo, o lado direito da equação (2.93) pode ser simplificado para:

$$\rho_{\beta} [h_{\beta} - (Cp)_{\beta} \tilde{T}_{\beta}] (\underline{v}_{\beta} - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} + \sum_{i=1}^{i=2} \rho_i [\bar{h}_i - (Cp)_i \tilde{T}_i] (\underline{v}_i - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma} = \quad (2.96)$$

$$= [h_{\beta}^{\circ} - h_{vap}^{\circ} + (Cp)_{\beta} (\langle T \rangle - T_{\beta}^{\circ}) - (Cp)_{vap} (\langle T \rangle - T_{\gamma}^{\circ})] \rho_{\beta} (\underline{v}_{\beta} - \underline{w}) \cdot \underline{n}_{\beta\gamma}$$

Agora, identificando a entalpia de dessublimação por unidade de massa na temperatura  $\langle T \rangle$ , tem-se:

$$\Delta h_{sub} = [h_{vap}^{\circ} - h_{\beta}^{\circ} + (Cp)_{vap} (\langle T \rangle - T^{\circ}) - (Cp)_{\beta} (\langle T \rangle - T^{\circ})] \quad (2.97)$$

Aqui tem-se a última informação da temperatura de referência  $T_{\gamma}^{\circ}$  e  $T_{\beta}^{\circ}$  como a temperatura do ponto de dessublimação  $T^{\circ}$ . A substituição da equação (2.96) e (2.97) na equação leva à maior simplificação da equação da energia térmica total:

$$\langle \rho \rangle Cp \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \left[ \rho_{\beta} (Cp)_{\beta} \langle \underline{v}_{\beta} \rangle + \sum_{i=1}^{i=2} (Cp)_i \langle \rho_i \underline{v}_i \rangle \right] \cdot \nabla \langle T \rangle + \Delta h_{sub} \langle \dot{m} \rangle = \nabla \cdot (K_{eff}^T \cdot \nabla \langle T \rangle) + \langle \phi \rangle \quad (2.98)$$

Agora, considerando  $\langle \underline{v}_{\beta} \rangle = 0$  e assumindo a restrição R.4, negligenciando qualquer transporte convectivo na energia térmica onde  $K_{eff}^T$  pode ser substituído por  $K_{eff}$ , devido ao tensor de segunda ordem ser de difícil resolução, e o calor de condução assumido somente na fase sólida, tem-se finalmente, então:

$$\langle \rho \rangle Cp \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \Delta h_{sub} \langle \dot{m} \rangle = \nabla \cdot (K_{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle) \quad (2.99)$$

### 2.3.4 Equação da Difusão da fase vapor

De maneira similar, ao que foi feito para equação de energia, a equação final para difusão da fase vapor fica:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_Y \langle \rho_{\text{vap}} \rangle^Y) + \nabla \cdot (\langle \rho_{\text{vap}} \rangle^Y \langle \underline{v}_Y \rangle) - \langle \dot{m} \rangle = \nabla \cdot \left\{ \langle \rho_Y \rangle^Y D_{\text{eff}} \left[ \nabla \left( \frac{\langle \rho_{\text{vap}} \rangle^Y}{\langle \rho_Y \rangle^Y} \right) \right] \right\} \quad (2.100)$$

Desprezando os efeitos convectivos,  $\nabla \cdot (\langle \rho_{\text{vap}} \rangle^Y \langle \underline{v}_Y \rangle) \approx 0$ , logo:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_Y \langle \rho_{\text{vap}} \rangle^Y) - \langle \dot{m} \rangle = \nabla \cdot \left\{ \langle \rho_Y \rangle^Y D_{\text{eff}} \left[ \nabla \left( \frac{\langle \rho_{\text{vap}} \rangle^Y}{\langle \rho_Y \rangle^Y} \right) \right] \right\} \quad (2.101)$$

Após simplificações, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_Y \langle \rho_{\text{vap}} \rangle^Y) - \langle \dot{m} \rangle = \nabla \cdot [D_{\text{eff}} \nabla \langle \rho_{\text{vap}} \rangle^Y] \quad (2.102)$$

## CAPÍTULO III

### 3 MODELAGEM DO PROCESSO DE FORMAÇÃO DE GELO

O processo de crescimento de gelo divide-se em três estágios. Nesta modelagem irá ser considerado o segundo e terceiro estágios de formação de geada, que consiste no período de crescimento tridimensional da camada da geada e no período de fronteira plenamente desenvolvida ou período de crescimento quase estático.

Estes estágios consistem basicamente da ramificação dos cristais até a formação de uma camada porosa daí o início da segunda etapa, que por sua vez é predominante, devido à curta duração da primeira. Nesta modelagem, a primeira etapa não é modelada e é considerada como parte das condições iniciais estabelecidas. E a camada é tratada, em toda a modelagem, como meio poroso.

Para esta etapa então, é usada a hipótese de que o vapor contido em todos os poros da geada estaria saturado. Além disso, como dito anteriormente, o mesmo é tratado como um gás ideal, onde sua massa específica torna-se função somente da temperatura. Sendo assim, a equação da conservação de massa apresentada é uma equação para a fração de gelo.

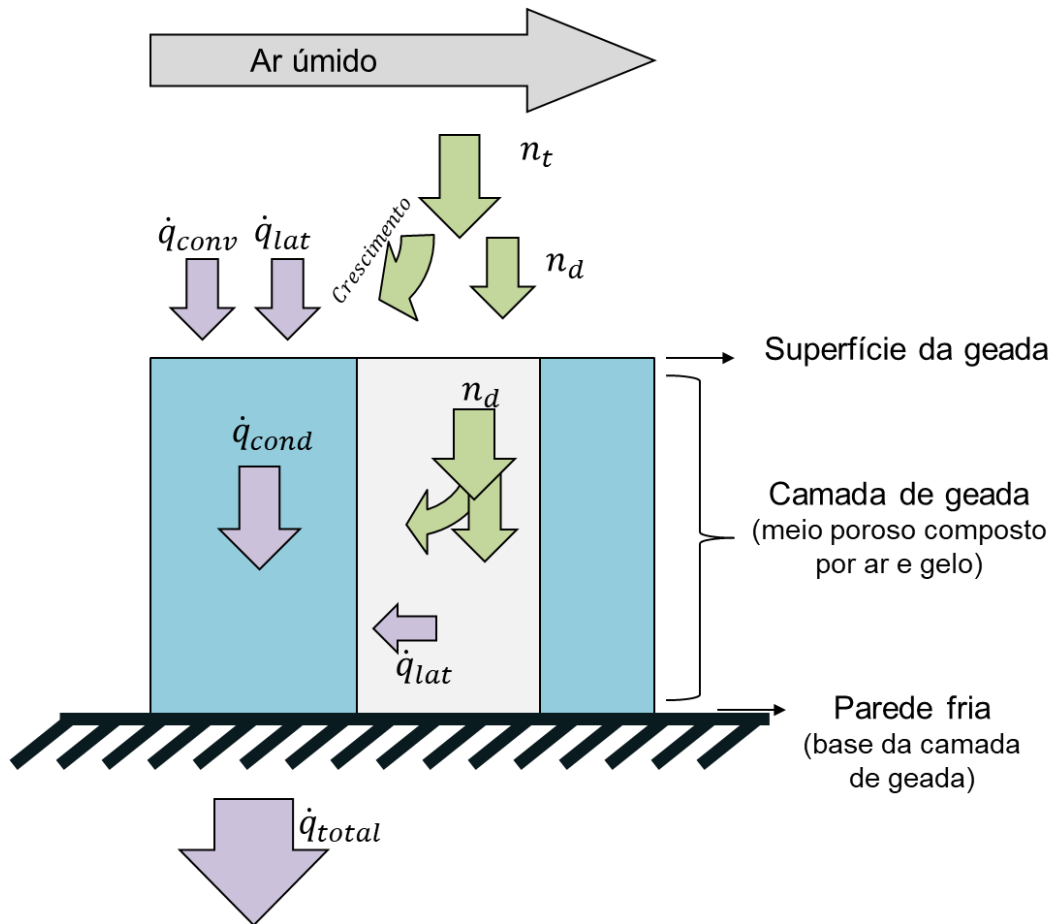
#### 3.1 EQUAÇÕES FINAIS DE CONSERVAÇÃO

Como foi discutido no capítulo anterior, as equações que governam o processo de formação de gelo neste estágio, o qual é tratado como meio poroso, são deduzidas usando a técnica da média volumétrica local. Com as restrições e hipóteses definidas.

As equações governantes para este estágio são derivadas de balanços de energia e massa para o seguinte modelo físico:

- Os núcleos de gelo sobre a superfície da placa simulam elementos de gelo com base, comprimento e espaçamento determinados, sobre os quais se tem ar úmido escoando forçadamente;
- Tem-se a transferência de calor e massa sobre os elementos, considera-se o crescimento unidimensional e é avaliado localmente.

A Figura 3. 1 ilustra estes fenômenos de transporte acontecendo no processo de formação da geada.



**Figura 3. 1** Ilustração dos fenômenos ocorrendo na geada

Por razões práticas, o símbolo  $\langle \rangle$ , foi retirado, mas deve-se lembrar das naturezas das variáveis, bem como lembrar que se trata de variáveis dimensionais.

### 3.1.1 Equação da Energia

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \Delta h_{sub} \dot{m} = \nabla \cdot (K_{eff} \nabla T) \quad (3.1)$$



ou

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \Delta h_{\text{sub}} \dot{m} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

### 3.1.2 Equação da Continuidade da fase sólida $\beta$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\beta}}{\partial t} + \frac{\dot{m}}{\rho_{\beta}} = 0 \quad (3.2)$$

### 3.1.3 Equação de Difusão da fase gás-vapor

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{\gamma} \rho_{\text{vap}}) - \dot{m} = \nabla \cdot [D_{\text{eff}} \nabla \rho_{\text{vap}}]$$

ou

(3.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{\gamma} \rho_{\text{vap}}) - \dot{m} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D_{\text{eff}} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_{\text{vap}}) \right]$$

### 3.1.4 Condições Iniciais

A resolução desse modelo matemático começa no tempo inicial  $t^0$ , para o qual a camada de geada é considerada uma camada porosa uniforme de espessura  $z_{\text{sup}}^0$  e massa específica média  $\bar{\rho}^0$ , a temperatura é uniforme e igual à da placa fria. Durante o período inicial, o crescimento rápido da geada corresponde ao período unidimensional de crescimento do cristal.

Porém, como este período não é modelado, é necessário estabelecer valores iniciais reduzidos, para espessura e massa específica da geada, para que seja possível a resolução das equações do modelo.

Brèque e Nemer (2016) constataram que embora alguns modelos sejam bastante independentes das condições iniciais, outros são muito dependentes. O que levanta

questões sobre a escolha dessas condições iniciais, particularmente em aplicações de modelagem de sistema onde os dados experimentais não podem ser usados.

Muitos autores escolhem valores baixos de espessura e massa específica iniciais da geada e mostram que os resultados não são afetados após alguns minutos de simulação. Jones e Parker (1975), por exemplo, verificaram que poderia ser utilizado valores que se aproximassem de zero para espessura (usaram  $z_{\text{sup}}^0=1 \cdot 10^{-5} \text{m}$ ) e valores da massa específica inicial ( $\bar{\rho}^0$ ) significativamente menores do que possivelmente a geada alcançaria posteriormente (entre 8 e 48  $\text{kg/m}^3$ ).

Tso, Cheng e Lai (2006) utilizaram valores como  $z_{\text{sup}}^0=2 \cdot 10^{-5} \text{m}$  e  $\bar{\rho}^0=30 \text{kg/m}^3$ . Já Le Gall, Grillot e Jallut (1997) escolheram os valores  $z_{\text{sup}}^0=1 \cdot 10^{-4} \text{m}$  e  $\bar{\rho}^0=25 \text{kg/m}^3$  com base em cálculos de sensibilidade do modelo de Le Gall (1994).

No entanto, em alguns casos, as condições iniciais podem ter um grande impacto nos resultados e por isso alguns autores como Lee, Jhee e Yang (2003) escolheram condições iniciais baseadas em dados experimentais, o que seria muito mais preciso, porém impraticável para a simulação, já que uma condição inicial deveria ser dada pra cada caso.

Outros autores, como Lee e Ro (2005), relataram que nenhum valor fixo inicial da massa específica da geada resultou em uma boa correspondência com os dados experimentais.

Para a massa específica alguns autores como Padhmanabhan *et al.* (2011) usaram a correlação de Hayashi *et al.* (1977), que visa prever a massa específica da geada em relação à temperatura da superfície geada. Porém, essa equação não se destina a prever a massa específica inicial da geada.

Neste contexto, em 2012, Wang *et al.* desenvolveram uma correlação para a massa específica inicial da geada, que vale para todo o período de formação de geada. Mas sua equação depende, ainda, somente da temperatura.

Porém, devido sua natureza porosa, a geada se relaciona diretamente com a porosidade do meio e o mais correto, seria dizer que a massa específica não depende unicamente da temperatura, mas também da sua porosidade.

Como a equação para resolução da massa específica para meios porosos considera a massa específica dependente da fração volumétrica das fases, e como a equação de fração volumétrica é resolvida de maneira acoplada à temperatura, optou-se por utilizar essa equação, por definir melhor o problema físico apresentado, que foi a mesma equação utilizada por Le Gall, Grillot e Jallut (1997) e, portanto também se optou por utilizar a mesma massa específica inicial ( $\bar{\rho}^0=25 \text{ kg/m}^3$ ) escolhida por esses autores.

Em alguns casos em que se utilizou dados experimentais da literatura para comparação com o modelo apresentado, modificou-se eventualmente a massa específica inicial, mas, foi indicado em cada caso.

### 3.1.5 Condições de Contorno

Para as condições de contorno, são analisados, para a transferência de calor e massa, dois pontos extremos de forma distinta dos pontos interiores à camada de gelo devido a conservação de massa e energia serem alteradas nestas localidades. São elas: condição na parede, junto à placa, e a condição na superfície do gelo.

É também feita a hipótese que o vapor esteja saturado em todos os poros da geada e, como dito anteriormente, é considerado como gás ideal, logo, sua massa específica é somente função da temperatura.

#### 3.1.5.1 Na parede, junto à placa resfriada

As condições na parede ( $z=z_p$ ) são simples. A temperatura em  $z_p$  é a temperatura da parede:

$$T(z_p)=T_p \quad (3.4)$$

A parede é considerada impenetrável e leva a:

$$D_{\text{eff}} \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \Big|_{z=z_p} = 0 \quad (3.5)$$

### 3.1.5.2 Na Interface geada-ar úmido

Na interface geada-ar úmido há um contato da superfície e a corrente de ar úmido. O fluxo total de massa ( $n_t$ ) entregue por convecção para a superfície da geada é função da temperatura da superfície da geada, dado por:

$$n_t = h_m [\rho_{\text{vap } \infty} - \rho_{\text{vap sup}}(T_{\text{sup}})] \quad (3.6)$$

O fluxo de massa do vapor d'água difundindo através da superfície da geada [ $n_d(z_s)$ ] é dado por:

$$n_d(z_{\text{sup}}) = D_{\text{eff}} \left. \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \right|_{z=z_p} \quad (3.7)$$

No caso do crescimento da geada,  $n_t$  excede  $n_d(z_{\text{sup}})$ , assim o vapor d'água se deposita no topo contribuindo, assim, para o crescimento subsequente da camada de gelo de acordo com:

$$n_t - n_d(z_{\text{sup}}) = \left( \rho \frac{\partial z}{\partial t} \right) \Big|_{z=z_{\text{sup}}} \quad (3.8)$$

$$D_{\text{eff}} \left. \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \right|_{z=z_p} = h_m [\rho_{\text{vap } \infty} - \rho_{\text{vap sup}}(T_{\text{sup}})] - \left( \rho \frac{\partial z}{\partial t} \right) \Big|_{z=z_{\text{sup}}} \quad (3.9)$$

onde  $\rho$  em  $z=z_{\text{sup}}$  é a massa específica na superfície da geada.

O balanço de transferência de calor na interface leva a seguinte condição de contorno:

$$K_{\text{eff}} \nabla T_{\text{sup}} = h_{\text{cv}} (T_{\infty} - T_{\text{sup}}) + \Delta h_{\text{sub}} [n_t - n_d(z_{\text{sup}})] \quad (3.10)$$

Logo,

$$K_{\text{eff}} \nabla T_{\text{sup}} = h_{\text{cv}} (T_{\infty} - T_s) + \Delta h_{\text{sub}} \left( \rho \frac{\partial z}{\partial t} \right) \Big|_{z=z_{\text{sup}}} \quad (3.11)$$

O sistema de equações diferenciais parciais necessita, para ser resolvido, de expressões para as propriedades termofísicas que serão apresentadas no item 3.2.

## 3.2 AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS

### 3.2.1 Propriedades termofísicas do gelo

As propriedades do gelo são avaliadas utilizando equações empíricas encontradas na literatura.

Condutividade térmica, segundo Dietenberger (1983), válida para temperaturas entre 100 e 273 K:

$$k_{\beta} = \frac{630}{T} \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m K}} \right], \text{ onde } T \text{ está em K} \quad (3.12)$$

O calor específico do gelo é dado segundo Le Gall (1994) apud Le Gall, Grillot E Jallut (1997):

$$Cp_{\beta} = 2109 + 3,66T \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right], \text{ onde } T \text{ está em } ^{\circ}\text{C} \quad (3.13)$$

A massa específica do gelo, segue, segundo Perry (1994):

$$\frac{1}{\rho_{\beta}} = 0,0010907 + 1,4635 \cdot 10^{-7} T \quad \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right], \text{ onde } T \text{ está em K} \quad (3.14)$$

O calor latente de dessublimação é avaliado da seguinte equação (PARISH e SEPSY, 1972):

$$\Delta h_{\text{sub}} = \{-0,04667 \cdot [1,8 \cdot (T - 273,15) + 32] + 1220,1\} \cdot 2322 \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right], \text{ onde } T \text{ está em K} \quad (3.15)$$

A massa específica da camada de geada é dada pela equação para meio poroso de Whitaker (1977), como equação (2.88):

$$\rho_{\text{geada}} = \varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} + \varepsilon_{\gamma} (\rho_{\text{vap}} + \rho_{\text{ar}}) \quad \text{ou} \quad \rho_{\text{geada}} = \varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} + (1 - \varepsilon_{\beta}) (\rho_{\text{vap}} + \rho_{\text{ar}}) \quad \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (3.16)$$

E o calor específico da camada de geada é dado pela equação para meio poroso de Whitaker (1977), como equação (2.89):

$$Cp_{\text{geada}}(\varepsilon_{\beta}, T) = \left[ \varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} Cp_{\beta}(T) + (1 - \varepsilon_{\beta}) (\rho_{\text{vap}} Cp_{\text{vap}} + \rho_{\text{ar}} Cp_{\text{ar}}) \right] / \rho_{\text{geada}} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] \quad (3.17)$$

A condutividade térmica efetiva da geada é calculada, baseado no meio poroso, também usada por Auracher (1987), como:

$$k_{\text{eff geada}} = \varepsilon_{\beta} k_{\beta} + (1 - \varepsilon_{\beta}) k_{\gamma} \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] \quad (3.18)$$

A porosidade da geada é calculada segundo Luer e Beer (2000):

$$\sigma_{\text{geada}} = \frac{\rho_{\beta} - \rho_{\text{geada}}}{\rho_{\beta} - \rho_{\gamma}} \quad \text{e} \quad \rho_{\gamma} = \rho_{\text{vap}} + \rho_{\text{ar}} \quad (3.19)$$

### 3.2.2 Propriedades termofísicas do ar seco e do vapor d'água

Condutividade térmica, para a fase gasosa (ar úmido) que é aproximadamente referida por Le Gall, Grillot e Jallut (1997), válida para temperaturas entre 180 e 600 K, é:

$$k_{\gamma} \approx k_{\text{ar}} = -3,381 \cdot 10^{-8} T^2 + 9,814 \cdot 10^{-5} T - 1,308 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m K}} \right], \text{ onde } T \text{ está em K} \quad (3.20)$$

A difusividade efetiva, ou coeficiente efetivo de difusão,  $D_{\text{eff}}$ , é um dos parâmetros mais difíceis de se determinar, devido aos complexos mecanismos de difusão que acontecem neste fenômeno. É responsável pela combinação dos seguintes mecanismos físicos envolvidos na evolução do meio poroso da geada (LE GALL, GRILLOT E JALLUT, 1997; TAO, BESANT e REZKALLAH, 1993):

- Difusão ordinária;
- Diminuição da área da seção transversal efetiva;
- Tortuosidade do meio poroso;
- Transições de fase (condensação e/ou dessublimação);
- Metamorfismo dentro da estrutura geada;
- Variações de pressão gasosa dentro dos pequenos poros.

$D_{\text{eff}}$  pode ser expresso como uma função da difusividade do vapor de água molecular no ar úmido:

$$D_{\text{eff}} = \mu D_{\text{AB}} \quad (3.21)$$

onde  $\mu$  é o fator de resistência à difusão e será discutido nos resultados, e  $D_{\text{AB}}$ , coeficiente binário de difusão que pode ser avaliado, segundo Le Gall, Grillot e Jallut (1997), pela expressão empírica que segue:

$$D_{AB} = 1,451 \cdot 10^{-4} \frac{T^{1,72}}{p_{atm}} \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (3.22)$$

A razão de umidade do ar,  $w$ , é calculada com base na lei de Dalton, pela expressão:

$$w = 0,6218 \frac{p_{vap\ sat}}{p_{atm} - p_{vap\ sat}} \quad (3.23)$$

onde a pressão atmosférica é igual a  $p_v$  e a pressão de saturação em qualquer tempo e posição da camada de gelo é avaliada em função da temperatura, usando a equação empírica (ASHRAE, 2007):

$$\ln p_{vap\ sat} = \frac{C_1}{T} + C_2 + C_3 T + C_4 T^2 + C_5 T^3 + C_6 T^4 + C_7 \ln T \quad (3.24)$$

onde:

$$C_1 = -5,6745359 \cdot 10^3$$

$$C_2 = 6,3925247$$

$$C_3 = -9,677843 \cdot 10^{-3}$$

$$C_4 = 6,2215701 \cdot 10^{-7}$$

$$C_5 = 2,0747825 \cdot 10^{-9}$$

$$C_6 = -9,4840242 \cdot 10^{-13}$$

$$C_7 = 4,1635019$$

sendo válida para a faixa de temperatura entre 173 a 273 K e a pressão de vapor saturado está em Pa.



$$\ln p_{\text{vap sat}} = \frac{C_8}{T} + C_9 + C_{10}T + C_{11}T^2 + C_{12}T^3 + C_{13} \ln T \quad (3.25)$$

onde:

$$C_8 = -5,8002206 \cdot 10^3$$

$$C_9 = 1,3914993$$

$$C_{10} = -7,8640239 \cdot 10^{-2}$$

$$C_{11} = 4,1764768 \cdot 10^{-5}$$

$$C_{12} = -1,4452093 \cdot 10^{-8}$$

$$C_{13} = 6,5459673$$

sendo válida para a faixa de temperatura entre 273 a 473 K e a pressão de vapor saturado está em Pa.

O coeficiente convectivo de transferência de calor na interface é dado pela correlação a seguir, a partir de correlações do número adimensional de Nusselt, que por sua vez é função dos números adimensionais de Reynolds e Prandtl, que serão avaliados nos resultados:

$$h_{cv} = \frac{\text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr}) \cdot k_y}{D_h} \quad (3.26)$$

onde  $D_h$  é o diâmetro hidráulico, dado por:

$$D_h = \frac{4 \cdot A}{P} \quad (3.27)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal e  $P$  é o perímetro da seção transversal. Essa relação permite a avaliação do número de Reynolds pelo diâmetro hidráulico para dutos não circulares em escoamentos turbulentos com razoável precisão. Para os casos com tubos, o diâmetro hidráulico é o próprio diâmetro do tubo.

O coeficiente convectivo de transferência de massa é determinado através da relação de Lewis para mistura ar-água:

$$h_m = \frac{h_{cv}}{(\rho_{ar\infty} \cdot C_{p_{ar}})} \quad (3.28)$$

O número de Prandtl é um número adimensional e fornece uma medida da transferência de momento e de energia por difusão, e pode ser dado pela seguinte equação:

$$Pr = \frac{C_{p_{ar}} \mu_{ar}}{k_{ar}} \quad (3.29)$$

Para este trabalho é usado  $Pr=0,71$ .

O número de Reynolds é um número adimensional e, pode ser interpretado como uma razão entre as forças de inércia e forças viscosas e pode ser dado pela equação a seguir:

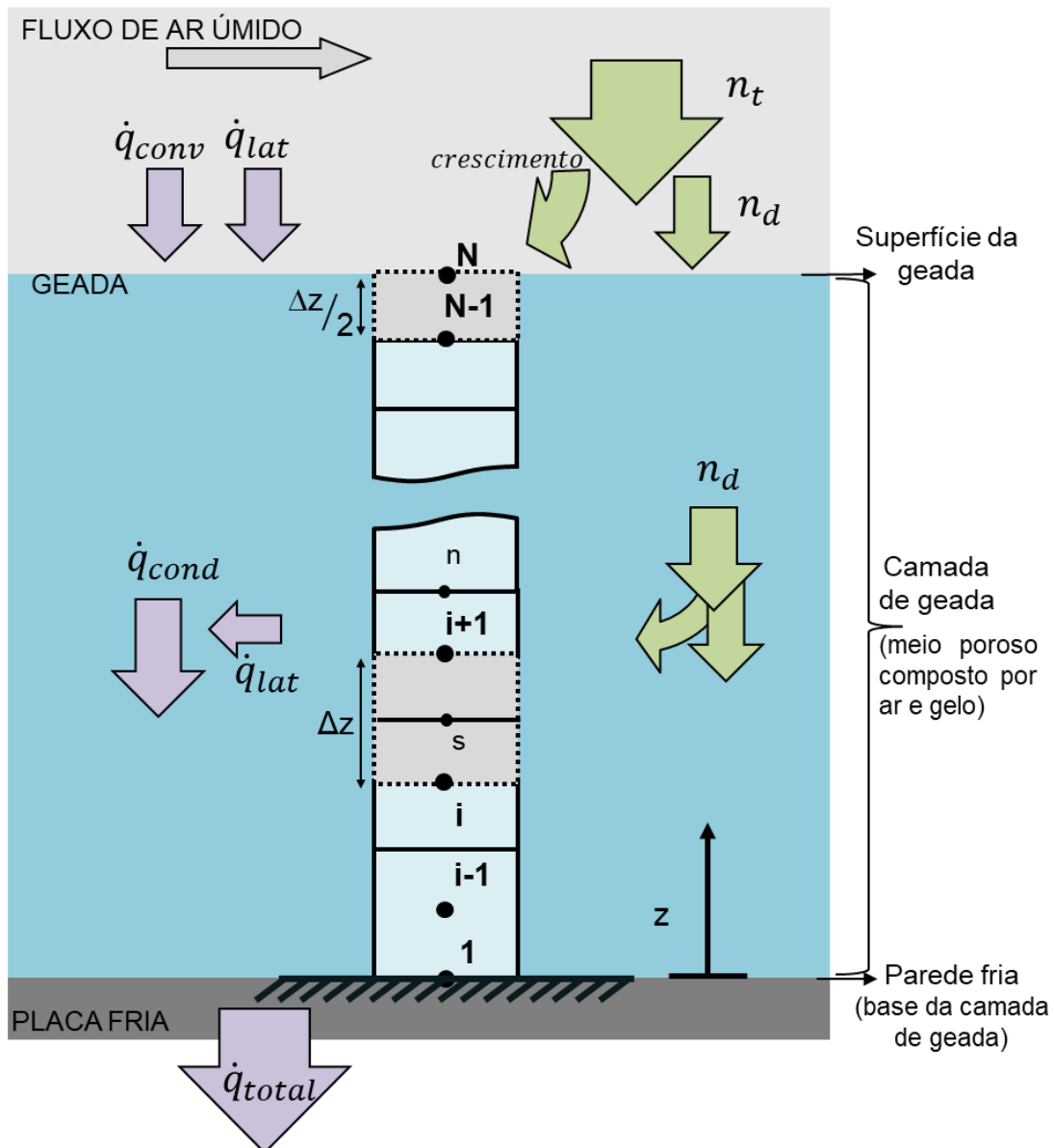
$$Re = \frac{\rho_{ar\infty} v_{ar} Dh}{\mu_{ar}} \quad (3.30)$$

## CAPÍTULO IV

### 4 TRATAMENTO NUMÉRICO

#### 4.1 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A partir das equações diferenciais, descritas no capítulo anterior, que nas suas formas conservativas geraram aproximações, foi feita a discretização das equações baseando-se no método de volumes finitos segundo Patankar (1980) e Maliska (2013).



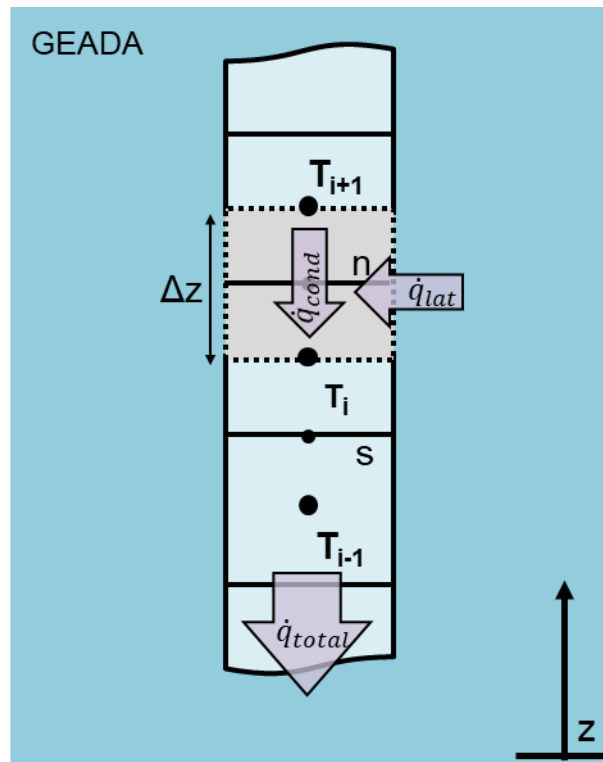
**Figura 4. 1** Ilustração dos fenômenos que acontecem na geada com a malha computacional para utilização do método de volumes finitos

#### 4.1.1 Discretização da Equação da Energia

Substituindo a equação da continuidade (4.2) na equação da energia (4.1), tem-se:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_\beta \Delta h_{\text{sub}} \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (4.1)$$

##### 4.1.1.1 Discretização para os nós internos



**Figura 4. 2** Ilustração dos fenômenos de transferência de calor que acontecem nos nós internos da geada

Neste item, será feita a integração de cada termo da equação (4.1) no tempo e no espaço:

$$\int_z \int_t \frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} dt dz - \int_z \int_t \rho_\beta \Delta h_{sub} \frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial t} dt dz = \int_t \int_z \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{eff} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz dt \quad (4.2)$$

onde, analisando cada termo, tem-se:

$$\int_k^{k+1} \frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} dt = \rho^{k+1} C_p^{k+1} T^{k+1} - \rho^k C_p^k T^k \quad (4.3)$$

considerando que  $\rho_\beta$  seja constante e integrando por partes, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \rho_\beta \Delta h_{sub} \frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial t} dt &= \rho_\beta \int_k^{k+1} \Delta h_{sub} \frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial t} dt = \\ &= \rho_\beta \left[ \Delta h_{sub}^{k+1} \epsilon_\beta^{k+1} - \Delta h_{sub}^k \epsilon_\beta^k - \int \epsilon_\beta^{k+1} d(\Delta h_{sub}) \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

desprezando a variação de  $\Delta h_{sub}$ , tem-se

$$\rho_\beta \int_k^{k+1} \Delta h_{sub} \frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial t} dt = \rho_\beta \Delta h_{sub}^k (\epsilon_\beta^{k+1} - \epsilon_\beta^k) \quad (4.5)$$

e o termo da difusão de calor pode ser aproximado a:

$$\int_i^{i+1} \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{eff} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz = k_n \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_n - k_s \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_s = \frac{k_n (T_{i+1} - T_i)}{\Delta z} - \frac{k_s (T_i - T_{i-1})}{\Delta z} \quad (4.6)$$

onde,  $k_n$  e  $k_s$  são avaliados por média harmônica entre os valores  $K_{eff_{i+1}}$  e  $K_{eff_i}$  e entre  $K_{eff_{i-1}}$  e  $K_{eff_i}$ , respectivamente:

$$k_n = \frac{2K_{eff_{i+1}}K_{eff_i}}{K_{eff_{i+1}} + K_{eff_i}} \quad (4.7)$$

$$k_s = \frac{2K_{eff_i}K_{eff_{i-1}}}{K_{eff_i} + K_{eff_{i-1}}} \quad (4.8)$$

então, reescrevendo a equação da energia:

$$\begin{aligned} & \int_i^{i+1} \left[ \rho^{k+1} C_p^{k+1} T^{k+1} - \rho^k C_p^k T^k - \rho_{\beta_i} \Delta h_{sub_i}^k (\varepsilon_{\beta_i}^{k+1} - \varepsilon_{\beta_i}^k) \right] dz = \\ & = \int_k^{k+1} \left[ \frac{k_n (T_{i+1} - T_i)}{\Delta z} - \frac{k_s (T_i - T_{i-1})}{\Delta z} \right] dt \end{aligned} \quad (4.9)$$

aproximando as integrais em  $z = 1$  e em  $t = k + 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \rho_i^{k+1} C_{p_i}^{k+1} T_i^{k+1} - \rho_i^k C_{p_i}^k T_i^k - \rho_{\beta_i}^{k+1} \Delta h_{sub_i}^k (\varepsilon_{\beta_i}^{k+1} - \varepsilon_{\beta_i}^k) = \frac{\Delta t}{\Delta z^2} [k_n^{k+1} (T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}) - \\ - k_s^{k+1} (T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1})] \end{aligned} \quad (4.10)$$

pode-se definir agora:

$$R_1 = \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \quad (4.11)$$

Então, a equação da energia discretizada para os nós internos é:

$$\begin{aligned} \rho_i^{k+1} C_{p_i}^{k+1} T_i^{k+1} - \rho_i^k C_{p_i}^k T_i^k - \rho_{\beta_i}^{k+1} \Delta h_{sub_i}^k (\varepsilon_{\beta_i}^{k+1} - \varepsilon_{\beta_i}^k) = R_1 k_n^{k+1} T_{i+1}^{k+1} - R_1 k_n^{k+1} T_i^{k+1} - \\ - R_1 k_s^{k+1} T_i^{k+1} + R_1 k_s^{k+1} T_{i-1}^{k+1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

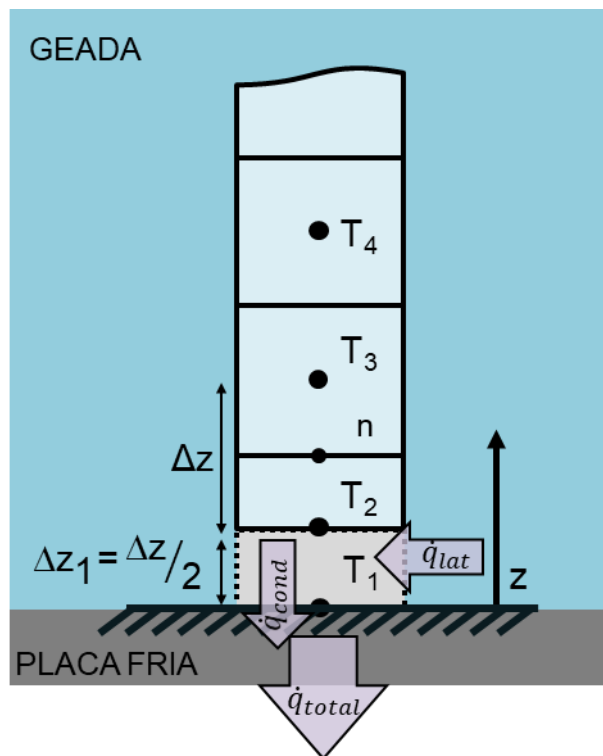
Rearranjando a equação da energia discretizada para os nós internos, fica:

$$\begin{aligned} -R_1 k_s^{k+1} T_{i-1}^{k+1} + (\rho_i^{k+1} C_{p_i}^{k+1} + R_1 k_n^{k+1} + R_1 k_s^{k+1}) T_i^{k+1} - R_1 k_n^{k+1} T_{i+1}^{k+1} = \\ = \rho_i^k C_{p_i}^k T_i^k + \rho_{\beta_i}^{k+1} \Delta h_{sub_i}^k (\varepsilon_{\beta_i}^{k+1} - \varepsilon_{\beta_i}^k) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Define-se, então, para a matriz:

$$\begin{cases} A=R_1k_s^{k+1} \\ B=(\rho_i^{k+1}Cp_i^{k+1}+R_1k_n^{k+1}+R_1k_s^{k+1}) \\ C=R_1k_n^{k+1} \\ G=\rho_i^kCp_i^kT_i^k+\rho_{\beta_i}^{k+1}\Delta h_{\text{sub}_i}^k(\varepsilon_{\beta_i}^{k+1}-\varepsilon_{\beta_i}^k) \end{cases} \quad (4.14)$$

#### 4.1.1.2 Discretização para a fronteira sul (base da geada, parte inferior)



**Figura 4. 3** Ilustração dos fenômenos de transferência de calor que acontecem na base da geada, na fronteira com a placa

A condição de contorno na fronteira sul é de temperatura prescrita, como dado anteriormente:

As condições na parede ( $z=z_p$ )

$$\begin{cases} n_d(z_p)=0 \\ T(z_p)=T_p=T_1 \end{cases}$$

O balanço de energia na fronteira, considerando parte da expressão já integrada é:

$$\int_z \left[ \rho^{k+1} C_p^{k+1} T^{k+1} - \rho^k C_p^k T^k - \rho_\beta \Delta h_{\text{sub}}^k (\epsilon_\beta^{k+1} - \epsilon_\beta^k) \right] dz = \int_t \left( K_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_n - q \right) dt \quad (4.15)$$

O fluxo de calor na parede é:

$$q = \frac{k_1(T_2 - T_1)}{\Delta z_1} = \frac{2k_1(T_2 - T_1)}{\Delta z} \quad (4.16)$$

Substituindo a equação para o fluxo de calor e aproximando as integrais em  $z=2$  e em  $t= k+1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho_2^{k+1} C_p^{k+1} T_2^{k+1} - \rho_2^k C_p^k T_2^k - \rho_\beta \Delta h_{\text{sub}2}^k (\epsilon_{\beta_2}^{k+1} - \epsilon_{\beta_2}^k) = \\ & = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ \frac{k_n^{k+1} (T_3^{k+1} - T_2^{k+1})}{\Delta z} - \frac{2k_1^{k+1} (T_2^{k+1} - T_1^{k+1})}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2^{k+1} C_p^{k+1} T_2^{k+1} - \rho_2^k C_p^k T_2^k - \rho_\beta \Delta h_{\text{sub}2}^k (\epsilon_{\beta_2}^{k+1} - \epsilon_{\beta_2}^k) = \\ & = \frac{\Delta t}{\Delta z^2} [k_n^{k+1} (T_3^{k+1} - T_2^{k+1}) - 2k_1^{k+1} (T_2^{k+1} - T_1^{k+1})] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Substituindo a equação anterior por  $R_1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho_2^{k+1} C_p^{k+1} T_2^{k+1} - \rho_2^k C_p^k T_2^k - \rho_\beta \Delta h_{\text{sub}2}^k (\epsilon_{\beta_2}^{k+1} - \epsilon_{\beta_2}^k) = \\ & = R_1 k_n^{k+1} T_3^{k+1} - R_1 k_n^{k+1} T_2^{k+1} - 2R_1 k_1^{k+1} T_2^{k+1} + 2R_1 k_1^{k+1} T_1^{k+1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Agrupando os termos semelhantes da equação anterior, tem-se a equação da energia discretizada para a fronteira sul da geadá:

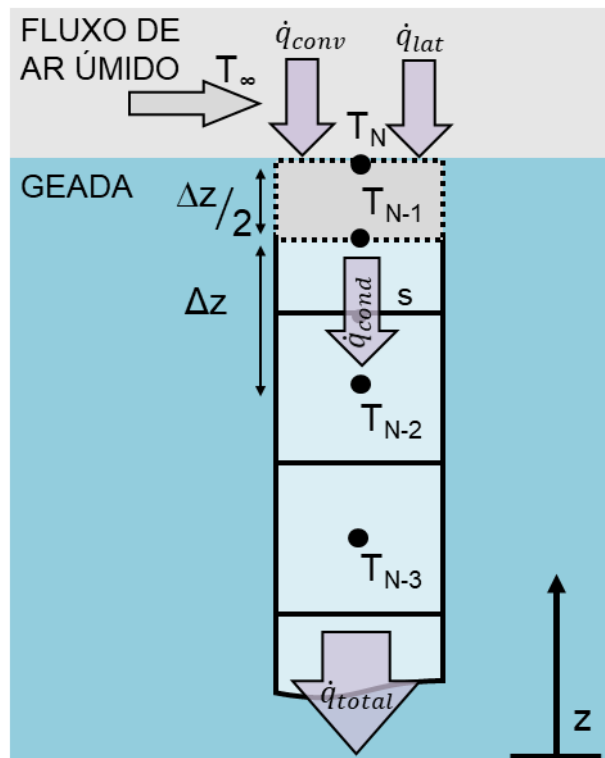


$$\begin{aligned}
 & (\rho_2^{k+1} C p_2^{k+1} + R_1 k_n^{k+1} + 2R_1 k_1^{k+1}) T_2^{k+1} - R_1 k_n^{k+1} T_3^{k+1} = \\
 & = \rho_2^k C p_2^k T_2^k + \rho_\beta \Delta h_{\text{sub}2}^k (\varepsilon_{\beta_2}^{k+1} - \varepsilon_{\beta_2}^k) + 2R_1 k_1^{k+1} T_1^{k+1}
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

Define-se então:

$$\begin{cases}
 A=0 \\
 B=(\rho_2^{k+1} C p_2^{k+1} + R_1 k_n^{k+1} + 2R_1 k_1^{k+1}) \\
 C=R_1 k_n^{k+1} \\
 G=\rho_2^k C p_2^k T_2^k + \rho_\beta \Delta h_{\text{sub}2}^k (\varepsilon_{\beta_2}^{k+1} - \varepsilon_{\beta_2}^k) + 2R_1 k_1^{k+1} T_1^{k+1}
 \end{cases}
 \tag{4.21}$$

#### 4.1.1.3 Discretização para a fronteira norte (superfície da geada, parte superior)



**Figura 4. 4** Ilustração dos fenômenos de transferência de calor que acontecem na parte superior da geada, em contato com o ar úmido

O balanço de energia na superfície da geada, pode ser expressa como:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Taxa de calor por} \\ \text{convecção desde o ar} \\ \text{livre até à geada-}q_{\text{conv}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Taxa de calor} \\ \text{conduzida através} \\ \text{da geada- } q_{\text{cond}} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Taxa de calor} \\ \text{latente liberado} \\ \text{pela geada-}q_{\text{lat}} \end{array} \right)$$

$$h_{\text{cv}}(T_{\infty}-T_N) = \frac{2k_2(T_N-T_{N-1})}{\Delta Z} - \rho_{\text{sup}}\Delta h_{\text{sub}} \frac{dz_{\text{sup}}}{dt} \quad (4.22)$$

A condição de contorno na fronteira norte, na interface geada ar-úmido é dada pelo balanço de calor dado pelo equação (3.10), e substituindo a equação (3.9) nesta expressão pode-se obter o valor da temperatura na superfície da camada de gelo na forma:

$$T_{\infty}-T_N = \frac{2k_2(T_N-T_{N-1})}{h_{\text{cv}}\Delta Z} - \frac{\rho_s\Delta h_{\text{sub}}}{h_c\Delta t} (z_{\text{sup}}^{k+1}-z_{\text{sup}}^k) \quad (4.23)$$

Definindo:

$$R_2 = \frac{2k_2}{h_{\text{cv}}\Delta Z} \quad (4.24)$$

$$R_3 = \frac{\rho_{\text{sup}}\Delta h_{\text{sub}}}{h_{\text{cv}}\Delta t} \quad (4.25)$$

Logo:

$$(1+R_2)T_N = T_{\infty} + R_2T_{N-1} + R_3(z_{\text{sup}}^{k+1}-z_{\text{sup}}^k) \quad (4.26)$$

O que permite obter, finalmente:

$$T_N = \frac{T_{\infty} + R_2T_{N-1} + R_3(z_{\text{sup}}^{k+1}-z_{\text{sup}}^k)}{(1+R_2)} \quad (4.27)$$

Agora substituindo na expressão do fluxo de calor difusivo na fronteira:

$$q_{cd} = \frac{2k_2(T_N - T_{N-1})}{\Delta Z} \quad (4.28)$$

Aproximando em k+1 e substituindo a equação (4.27) na equação (4.28) tem-se:

$$q_{cd}^{k+1} = \frac{2k_2^{k+1}}{(1+R_2)\Delta Z} [T_\infty - T_{N-1}^{k+1} + R_3(z_{sup}^{k+1} - z_{sup}^k)] \quad (4.29)$$

Agora voltando à equação de energia parcialmente integrada, escreve-se:

$$\left[ \rho_{N-1}^{k+1} C_{p_{N-1}}^{k+1} T_{N-1}^{k+1} - \rho_{N-1}^k C_{p_{N-1}}^k T_{N-1}^k - \rho_\beta \Delta h_{sub_{N-1}}^k (\epsilon_{\beta_{N-1}}^{k+1} - \epsilon_{\beta_{N-1}}^k) \right] \Delta Z = \left[ q_{cd}^{k+1} - k_s^{k+1} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_s \right] \Delta t \quad (4.30)$$

Substituindo a expressão de fluxo de calor na superfície tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_{N-1}^{k+1} C_{p_{N-1}}^{k+1} T_{N-1}^{k+1} - \rho_{N-1}^k C_{p_{N-1}}^k T_{N-1}^k - \rho_\beta \Delta h_{sub_{N-1}}^k (\epsilon_{\beta_{N-1}}^{k+1} - \epsilon_{\beta_{N-1}}^k) \right] \Delta Z = \\ & = \left\{ \frac{2k_2^{k+1}}{(1+R_2)\Delta Z} [T_\infty - T_{N-1}^{k+1} + R_3(z_{sup}^{k+1} - z_{sup}^k)] - \frac{k_s^{k+1} (T_{N-1}^{k+1} - T_{N-2}^{k+1})}{\Delta Z} \right\} \Delta t \end{aligned} \quad (4.31)$$

Definindo:

$$R_4 = \frac{2k_2^{k+1}}{\Delta Z(1+R_2)} \quad (4.32)$$

$$R_5 = \frac{k_s^{k+1}}{\Delta Z} \quad (4.33)$$

$$R_{11} = \frac{\Delta t}{\Delta Z} \quad (4.34)$$

Substituindo as equações (4.32), (4.33), e (4.34) e agrupando os termos semelhantes da equação, tem-se a equação da energia discretizada para a fronteira norte da geada:

$$-R_5 R_{11} T_{N-2}^{k+1} + (\rho_{N-1}^{k+1} C_{p_{N-1}}^{k+1} + R_4 R_{11} + R_5 R_{11}) T_{N-1}^{k+1} \rho_{N-1}^k = \quad (4.35)$$

$$C_{p_{N-1}}^k T_{N-1}^k + \rho_\beta \Delta h_{\text{sub}_{N-1}}^k (\varepsilon_{\beta_{N-1}}^{k+1} - \varepsilon_{\beta_{N-1}}^k) + R_4 R_{11} [T_\infty + R_3 (z_{\text{sup}}^{k+1} - z_{\text{sup}}^k)]$$

Define-se então:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = R_5 R_{11} \\ B = (\rho_{N-1}^{k+1} C_{p_{N-1}}^{k+1} + R_4 R_{11} + R_5 R_{11}) \\ C = 0 \\ G = \rho_{N-1}^k C_{p_{N-1}}^k T_{N-1}^k + \rho_\beta \Delta h_{\text{sub}_{N-1}}^k (\varepsilon_{\beta_{N-1}}^{k+1} - \varepsilon_{\beta_{N-1}}^k) + R_4 R_{11} [T_\infty + R_3 (z_{\text{sup}}^{k+1} - z_{\text{sup}}^k)] \end{array} \right. \quad (4.36)$$

#### 4.1.2 Discretização da Equação da Difusão de massa

Substituindo a equação da continuidade (4.2) na equação da difusão da fase gás-vapor (4.1), para o caso unidimensional tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varepsilon_\beta) \rho_{\text{vap}}] - \rho_\beta \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{\text{eff}} \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \right) \quad (4.37)$$

Usando a difusividade efetiva segundo Le Gall, Jallut e Grillot (1997):

$$D_{\text{eff}} = \mu D_{AB} \quad (4.38)$$

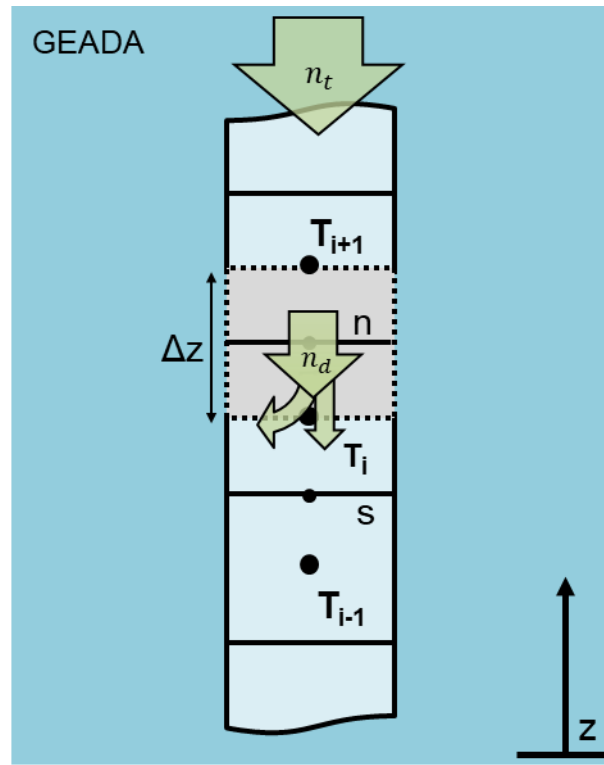
Pode-se, então, definir:

$$D_{\text{eff}_{i+1}} = \mu_{i+1} D_{AB_{i+1}} \quad (4.39)$$

$$D_{\text{eff}_i} = \mu_i D_{AB_i} \quad (4.40)$$

$$D_{\text{eff}_{i-1}} = \mu_{i-1} D_{AB_{i-1}} \quad (4.41)$$

#### 4.1.2.1 Discretização para os nós internos



**Figura 4. 5** Ilustração dos fenômenos de transferência de massa que acontecem nos nós internos da geada

Considerando  $\rho_\beta$  constante e integrando cada termo da equação no tempo e no espaço, tem-se:

$$\int_z \int_t \frac{\partial}{\partial t} [\rho_{\text{vap}} + (\rho_\beta - \rho_{\text{vap}}) \varepsilon_\beta] dt dz = \int_t \int_z \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{\text{eff}} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} \right) dz dt \quad (4.42)$$

$$(4.43)$$

$$= \int_t \left[ \left( D_{\text{eff}_n} \frac{\rho_{\text{vap}_{i+1}} - \rho_{\text{vap}_i}}{\Delta Z} \right) - \left( D_{\text{eff}_s} \frac{\rho_{\text{vap}_i} - \rho_{\text{vap}_{i-1}}}{\Delta Z} \right) \right] dt$$

Sabendo que  $D_{\text{eff}_n}$  e  $D_{\text{eff}_s}$  são avaliados por média harmônica entre os valores  $D_{\text{eff}_{i+1}}$  e  $D_{\text{eff}_i}$  e entre  $D_{\text{eff}_{i-1}}$  e  $D_{\text{eff}_i}$ , respectivamente:

$$D_{\text{eff}_n} = \frac{2D_{\text{eff}_{i+1}}D_{\text{eff}_i}}{D_{\text{eff}_{i+1}} + D_{\text{eff}_i}} \quad (4.44)$$

$$D_{\text{eff}_s} = \frac{2D_{\text{eff}_i}D_{\text{eff}_{i-1}}}{D_{\text{eff}_i} + D_{\text{eff}_{i-1}}} \quad (4.45)$$

E aproximando as integrais da equação (4.43) em  $z = i$  e  $t = k+1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_{\text{vap}_i}^{k+1} + (\rho_{\beta_i}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_i}^{k+1}) \varepsilon_{\beta_i}^{k+1} - \rho_{1i}^k - (\rho_{\beta_i}^k - \rho_{\text{vap}_i}^k) \varepsilon_{\beta_i}^k \right] \Delta Z = \\ & = \frac{\Delta t}{\Delta Z} \left[ D_{\text{eff}_n}^{k+1} (\rho_{\text{vap}_{i+1}}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_i}^{k+1}) - D_{\text{eff}_s}^{k+1} (\rho_{\text{vap}_i}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_{i-1}}^{k+1}) \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Substituindo a equação (4.11) na equação (4.46):

$$\begin{aligned} & \rho_{\text{vap}_i}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_i}^k + (\rho_{\beta_i}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_i}^{k+1}) \varepsilon_{\beta_i}^{k+1} - (\rho_{\beta_i}^k - \rho_{\text{vap}_i}^k) \varepsilon_{\beta_i}^k = \\ & = R_1 D_{\text{eff}_n}^{k+1} (\rho_{\text{vap}_{i+1}}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_i}^{k+1}) - R_1 D_{\text{eff}_s}^{k+1} (\rho_{\text{vap}_i}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_{i-1}}^{k+1}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Então define-se:

$$R_6 = \rho_{\text{vap}_i}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_i}^k \quad (4.48)$$

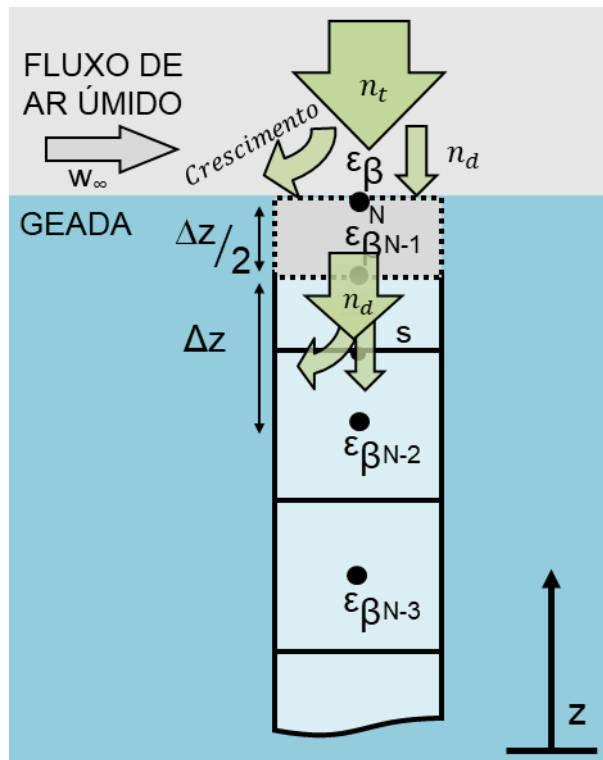
$$R_7 = \rho_{\beta_i}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_i}^{k+1} \quad (4.49)$$

$$R_8 = \rho_{\beta_i}^k - \rho_{\text{vap}_i}^k \quad (4.50)$$

Substituindo, obtém-se a equação da difusão de massa discretizada para os nós internos:

$$R_6 + R_7 \varepsilon_{\beta_i}^{k+1} - R_8 \varepsilon_{\beta_i}^k = R_1 \left[ D_{\text{eff}_n}^{k+1} (\rho_{1_{i+1}}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_i}^{k+1}) - D_{\text{eff}_s}^{k+1} (\rho_{\text{vap}_i}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_{i-1}}^{k+1}) \right] \quad (4.51)$$

#### 4.1.2.2 Discretização para a fronteira norte (superfície da geada, parte superior)



**Figura 4. 6** Ilustração dos fenômenos de transferência de calor que acontecem na parte superior da geada, em contato com o ar úmido

A conservação de vapor no nó próximo à interface é:

$$(4.52)$$

$$= \int_t \left[ D_{\text{eff}_n} \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \Big|_n - D_{\text{eff}_s} \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \Big|_s \right] dt$$

Aproximando as integrais da equação em  $z=N-1$  e  $t=k+1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho_{\text{vap}_{N-1}}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_{N-1}}^k + (\rho_{\beta_{N-1}}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_{N-1}}^{k+1}) \varepsilon_{\beta_{N-1}}^{k+1} - (\rho_{\beta_{N-1}}^k - \rho_{\text{vap}_{N-1}}^k) \varepsilon_{\beta_{N-1}}^k = \\ & = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ D_{\text{eff}_n} \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \Big|_n - D_{\text{eff}_s} \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \Big|_s \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

A condição da interface é:

$$D_{\text{eff}_n} \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \Big|_n = h_m (\rho_{\text{vap}_\infty} - \rho_{\text{vap}_N}) - \rho_{sN} \frac{\partial z_s}{\partial t} \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \Big|_s = \frac{\rho_{\text{vap}_{N-1}} - \rho_{\text{vap}_{N-2}}}{\Delta z} \quad (4.55)$$

Então:

$$\begin{aligned} & \rho_{\text{vap}_{N-1}}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_{N-1}}^k + (\rho_{\beta_{N-1}}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_{N-1}}^{k+1}) \varepsilon_{\beta_{N-1}}^{k+1} - (\rho_{\beta_{N-1}}^k - \rho_{\text{vap}_{N-1}}^k) \varepsilon_{\beta_{N-1}}^k = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ h_m^{k+1} (\rho_{\text{vap}_\infty}^{k+1} - \right. \\ & \left. - \rho_{\text{vap}_N}^{k+1}) - \rho_{sN}^{k+1} \frac{\partial z_s}{\partial t} - D_{\text{eff}_s}^{k+1} \frac{\rho_{\text{vap}_{N-1}}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_{N-2}}^{k+1}}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

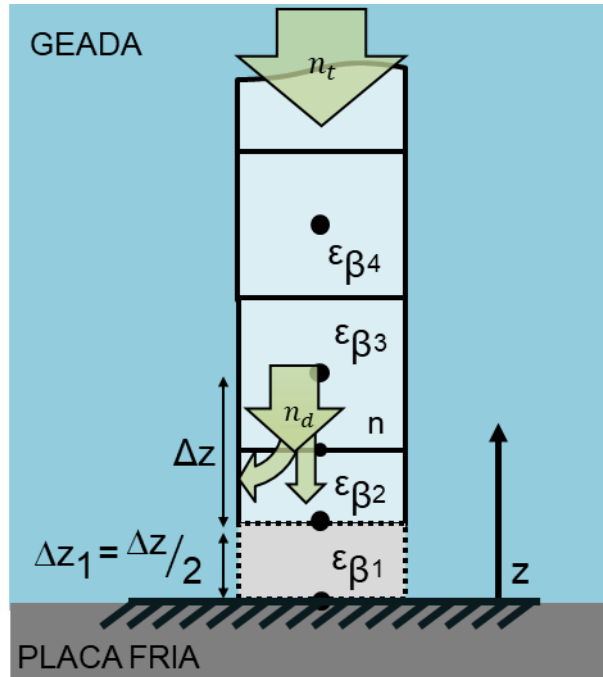
onde,  $D_{\text{eff}_s}^{k+1} = \frac{2D_{\text{eff}_{N-1}}^{k+1} D_{\text{eff}_{N-2}}^{k+1}}{D_{\text{eff}_{N-1}}^{k+1} + D_{\text{eff}_{N-2}}^{k+1}}$ , e substituindo as equações (4.48), (4.49) e (4.50) para  $i=N-$

1, tem-se a equação da difusão de massa para a fronteira norte da geada:

$$R_6 + R_7 \varepsilon_{\beta_{N-1}}^{k+1} - R_8 \varepsilon_{\beta_{N-1}}^k = R_{11} \left[ h_m (\rho_{\text{vap}_\infty} - \rho_{\text{vap}_N}) - \rho_{sN} \frac{\partial z_s}{\partial t} - \frac{D_{\text{eff}_s} (\rho_{\text{vap}_{N-1}} - \rho_{\text{vap}_{N-2}})}{\Delta z} \right] \quad (4.57)$$



4.1.2.3 Discretização para a fronteira sul (base da geadá, parte inferior)



**Figura 4. 7** Ilustração dos fenômenos de transferência de massa que acontecem na base da geadá, na fronteira com a placa

A expressão já discretizada para o nó próximo a superfície inferior é:

$$\begin{aligned} & \rho_{vap_i}^{k+1} - \rho_{vap_i}^k + (\rho_{\beta_i}^{k+1} - \rho_{vap_i}^{k+1}) \epsilon\beta_i^{k+1} - (\rho_{\beta_i}^k - \rho_{vap_i}^k) \epsilon\beta_i^k = \\ & = \frac{\Delta t}{\Delta z^2} [D_{eff_n}^{k+1} (\rho_{vap_{i+1}}^{k+1} - \rho_{vap_i}^{k+1}) - 2D_{eff_1}^{k+1} (\rho_{vap_i}^{k+1} - \rho_{vap_{i-1}}^{k+1})] \end{aligned} \quad (4.58)$$

Supondo a superfície inferior impenetrável, tem-se  $D_{eff_1} = 0$ . E reconhecendo a fronteira como  $i=2$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho_{\text{vap}_2}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_2}^k + (\rho_{\beta_2}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_2}^{k+1}) \varepsilon_{\beta_2}^{k+1} - (\rho_{\beta_2}^k - \rho_{\text{vap}_2}^k) \varepsilon_{\beta_2}^k = \\ & = \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \left[ D_{\text{eff}_n}^{k+1} (\rho_{\text{vap}_3}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_2}^{k+1}) \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Então é obtida a equação da difusão de massa discretizada para a base da geada:

$$R_6 + R_7 \varepsilon_{\beta_2}^{k+1} - R_8 \varepsilon_{\beta_2}^k = R_1 \left[ D_{\text{eff}_n}^{k+1} (\rho_{\text{vap}_3}^{k+1} - \rho_{\text{vap}_2}^{k+1}) \right] \quad (4.60)$$

onde  $D_{\text{eff}_n}^{k+1} = \frac{2D_{\text{eff}_3}^{k+1} D_{\text{eff}_2}^{k+1}}{D_{\text{eff}_3}^{k+1} + D_{\text{eff}_2}^{k+1}}$ .

#### 4.1.2.4 Discretização da expressão para o incremento da geada ao longo do tempo

Na superfície da geada tem-se:

$$h_m \left( \rho_{\text{vap}_\infty} - \rho_{\text{vap}} \Big|_{z=z_{\text{sup}}} \right) = D_{\text{eff}} \frac{\partial \rho_{\text{vap}}}{\partial z} \Big|_{z=z_{\text{sup}}} + \left( \rho \frac{\partial z}{\partial t} \right) \Big|_{z=z_{\text{sup}}} \quad (4.61)$$

Assim, obtém-se a taxa de crescimento da geada:

$$z_{\text{sup}} = z_{\text{sup}} + \frac{\Delta t}{\rho|_{i=N}} \left[ h_m \left( \rho_{\text{vap}_\infty} - \rho_{\text{vap}} \Big|_{i=N} \right) - \frac{D_{\text{eff}_N}}{\Delta z} (\rho_{\text{vap}_N} - \rho_{\text{vap}_{N-1}}) \right] \quad (4.62)$$

## 4.2 MÉTODO DE SOLUÇÃO

### 4.2.1 Laço temporal e laço iterativo espacial

Foi utilizado um esquema implícito para as equações principais de massa e energia, onde o sistema de equações algébricas gerado pela discretização da equação de energia gerou uma matriz tridiagonal, que foi resolvida pelo método de Thomas, com uma aproximação de primeira ordem.

Por se tratar de um problema não linear e acoplado, de acordo com as equações (3.1) e (3.2), um esquema iterativo fez-se necessário para o cálculo da fração volumétrica do gelo em cada volume de controle uma vez que depende da temperatura da geada e vice-versa. Ou seja, as não-linearidades devido à dependência das propriedades com a temperatura e fração volumétrica de gelo foram tratadas utilizando um atraso no cálculo, com a posterior correção, iterativa, até que uma tolerância fosse atendida.

Realizou-se, então, o cálculo até que o erro relativo entre a fração volumétrica calculada e a obtida da iteração anterior fosse menor que uma tolerância de  $10^{-5}$ . O mesmo foi considerado para a distribuição de temperatura. Para auxiliar no processo de convergência e garantir uma melhor estabilidade na obtenção da solução, um coeficiente de sub-relaxação,  $\eta=0,8$ , foi adotado, de modo que:

$$\varepsilon_{\beta} = \eta \cdot \varepsilon_{\beta} + (1 - \eta) \cdot \varepsilon_{\beta}^* \quad (4.63)$$

$$T = \eta \cdot T + (1 - \eta) \cdot T^* \quad (4.64)$$

onde o asterisco sobrescrito indica o valor da iteração imediatamente anterior.

Como o problema é de fronteira móvel, a solução espacial é realizada para cada um dos volumes de controle do domínio discretizado de forma que a condição de saída de um volume de controle seria utilizada como condição de entrada para o próximo. Porém, a cada tempo é acrescentado uma quantidade de geada. Este aumento gerou uma redefinição da malha, a cada passo no tempo.

Ao considerar essa nova quantidade de geada, tem-se um novo espaço para o volume de controle e, portanto, os valores em cada ponto nodal não seriam exatamente os que foram calculados. Para tanto, houve a redefinição da malha a cada passo no tempo e os valores das propriedades nos novos nós foram obtidos utilizando-se de um método de interpolação para que os valores de entrada no tempo seguinte fossem os valores exatos aos calculados naqueles pontos equivalentes.

Devido à diferença entre os intervalos serem extremamente pequenos, o método de Interpolação Polinomial Linear foi suficiente para obtenção das respostas.

A inicialização para o primeiro volume de controle parte da arbitragem das condições de entrada do problema e são conhecidas como a condição inicial.

#### 4.2.2 Algoritmo de solução

A Figura 4.7 ilustra o algoritmo de solução utilizado para resolução do problema.

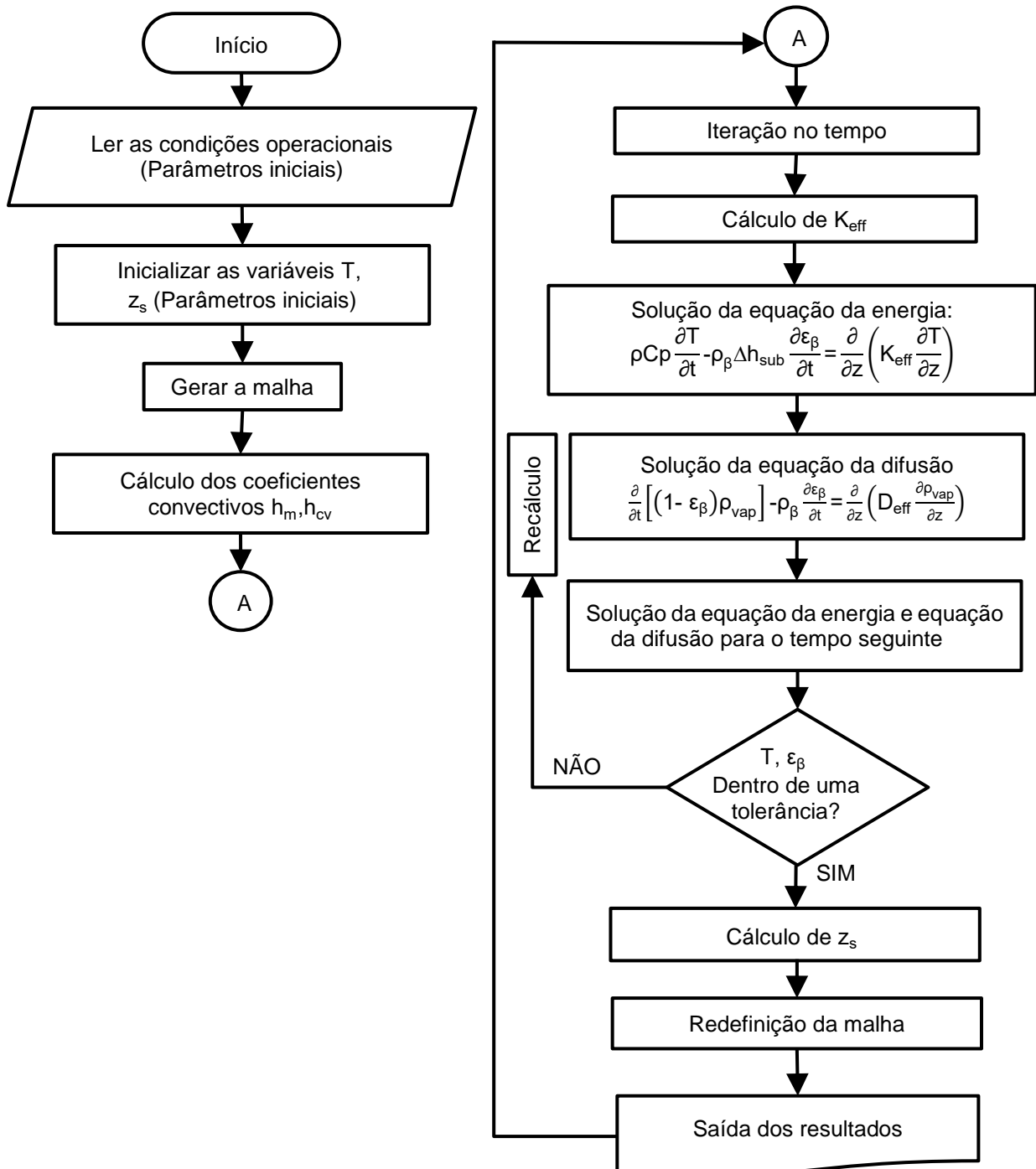


Figura 4. 8 Diagrama de fluxo do algoritmo de solução

### 4.2.3 Análise de convergência de malha

Para análise da convergência de malha foi usado o método proposto por Celik et. al (2008) e ASME (2009), que consiste na avaliação do valor de determinada variável,  $\phi$ , calculada na simulação em pontos espaciais do modelo geométrico. Esse método denominado GCI (*Grid Convergence Method*) é usado para estimar erros associados à discretização em um problema de dinâmica dos fluidos computacional e é composto por cinco passos detalhados a seguir:

Passo 1: Definir um tamanho de elemento característico,  $h$ , para o problema de interesse. Para um problema unidimensional  $h=\Delta z$ .

Passo 2: Selecionar três valores de  $h$ , diferentes significativamente, de forma que  $h_1 < h_2 < h_3$ , referentes às malhas denominadas 1, 2 e 3 respectivamente. É recomendado que os fatores de refinamento da malha,  $r$ , sejam maiores que 1,3.

$$r_{21} = \frac{h_2}{h_1} \quad (4.65)$$

$$r_{32} = \frac{h_3}{h_2} \quad (4.66)$$

Passo 3: Definidos  $r_{21}$  e  $r_{32}$ , calcular a ordem aparente do método,  $p$ , usando a equação:

$$p = \frac{1}{\ln(r_{21})} |\ln|\epsilon_{32}/\epsilon_{\epsilon 21}| + q(p)| \quad (4.67)$$

$$q(p) = \ln \left( \frac{r_{21}^p - s}{r_{32}^p - s} \right) \quad (4.68)$$

$$s = 1 \cdot \text{sgn}(\epsilon_{32}/\epsilon_{\epsilon 21}) \quad (4.69)$$

onde  $\epsilon_{32} = \phi_3 - \phi_2$ ,  $\epsilon_{\epsilon 21} = \phi_2 - \phi_1$  e pode ser resolvida pelo método do ponto fixo. Porém, para  $r = \text{constante}$ ,  $q(p) = 0$ , então, a equação torna-se:

$$p = \frac{1}{\ln(r_{21})} |\ln|\epsilon_{32}/\epsilon_{\epsilon 21}|| \quad (4.70)$$

Passo 4: Calcular o valor extrapolado  $\phi_{\text{ext}}^{21}$  e similarmente  $\phi_{\text{ext}}^{32}$ :

$$\phi_{\text{ext}}^{21} = (r_{21}^p \phi_1 - \phi_2) / (r_{21}^p - 1) \quad (4.71)$$

$$\phi_{\text{ext}}^{32} = (r_{32}^p \phi_2 - \phi_3) / (r_{32}^p - 1) \quad (4.72)$$

Passo 5: Calcular os erros relativos aproximados:

$$e_a^{21} = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{\phi_1} \right| \quad (4.73)$$

os erros relativos extrapolados:

$$e_{\text{ext}}^{21} = \left| \frac{\phi_{\text{ext}}^{12} - \phi_1}{\phi_{\text{ext}}^{12}} \right| \quad (4.74)$$

e o índice de convergência da malha refinado, dado por:

$$\text{CGI}_{\text{fina}}^{21} = \frac{1,25e_a^{21}}{r_{21}^p - 1} \quad (4.75)$$

Os índices  $\text{CGI}_{\text{fina}}^{21}$  e  $\text{CGI}_{\text{fina}}^{32}$  correspondem à incerteza numérica da solução refinada para a variável  $\phi$ . É importante destacar que este índice não inclui os erros relativos à modelagem.

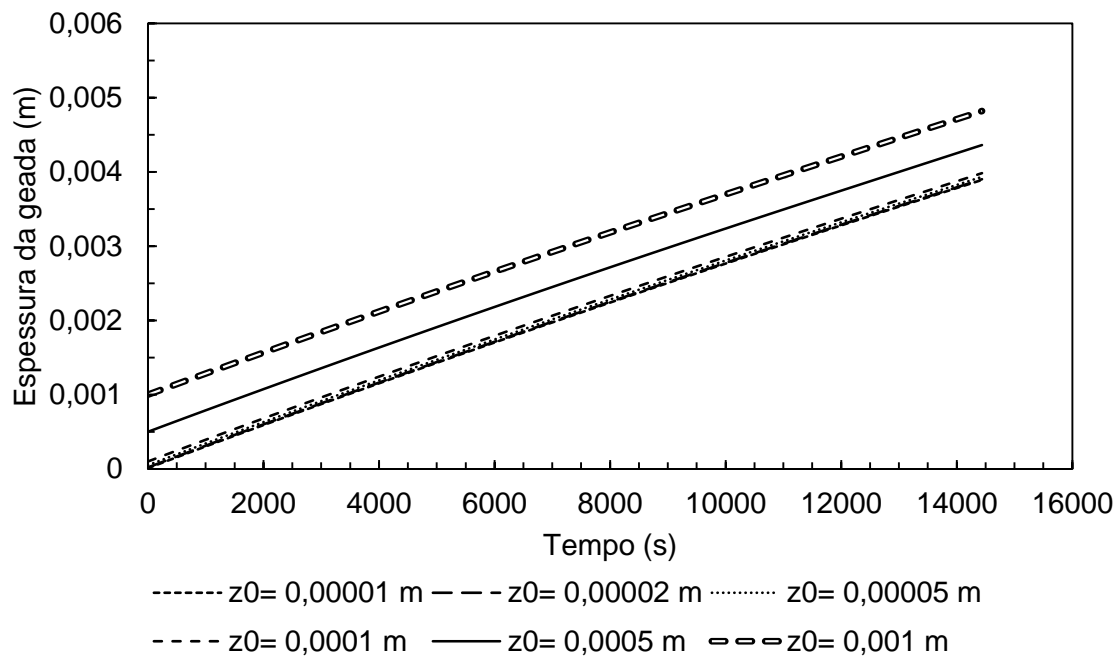
## CAPÍTULO V

### 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

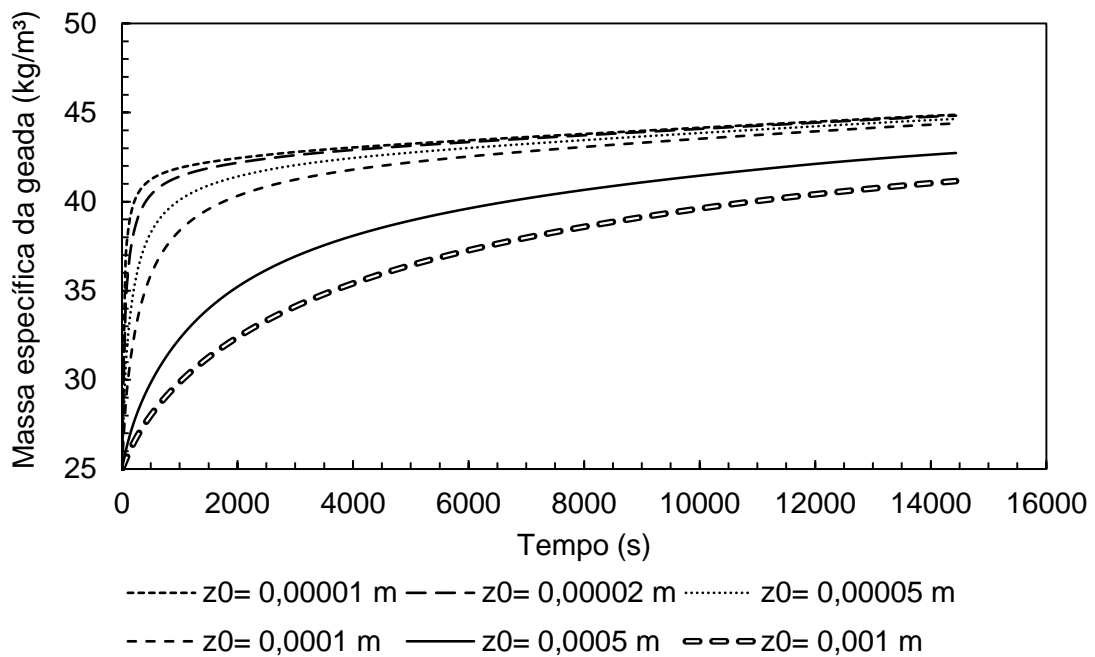
#### 5.1 CONDIÇÕES INICIAIS

Para a análise da influência da espessura inicial da geada foram testados alguns dos valores de acordo com a literatura, descritas no item 3.1.4. E utilizaram-se as seguintes condições:  $T_{\infty}=278,15$  K,  $T_p=263,15$  K, UR=65%, Re=7500, Dh =0,245 m,  $t=14400$  s,  $F_{\mu}=7$ ,  $\bar{\rho}^0=25$  kg/m<sup>3</sup>, e serão mostradas na Figura 5. 1 e Figura 5. 2.

Na Figura 5. 1, as espessuras de 0,00001 m a 0,0001 m não apresentaram diferença significativa entre elas, apresentando um erro relativo de 1% em relação à média entre elas. Já as outras espessuras iniciais testadas (0,0005 m e 0,001 m) apresentaram valores significativamente diferentes de espessuras finais.



**Figura 5. 1** Influência da espessura inicial da geada no crescimento de geada



**Figura 5. 2** Influência da espessura inicial da geada na massa específica da geada

Além disso, observa-se pela Figura 5. 2 que para as diferentes espessuras de 0,00001 m a 0,0001 m, a massa específica dentro de cerca de 15 minutos apresentou valores próximos, independentemente do valor inicial. Onde se conclui que se pode escolher uma espessura inicial no valor de até 0,0001 m.

Portanto para todos os casos rodados, a espessura inicial da geada usada foi a mesma ( $z_{sup}^0 = 1 \cdot 10^{-4}$  m), que também foi o mesmo valor escolhido por Le Gall, Grillot e Jallut (1997).



## 5.2 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA MALHA OBTIDA

A solução para o problema foi obtida para as quatro malhas apresentadas na Tabela 5. 1 e os resultados obtidos foram analisados considerando o método *GCI* (CELIK et. al, 2008; ASME, 2009) de avaliação do índice de convergência de malha proposto e descrito no item 4.2.3. Os códigos numéricos foram implementados na plataforma comercial Intel® Visual Fortran e simulados em um computador com 64 bits, Windows 10 Pro, processador Intel® Core™ i7 CPU 860@, 2,80 GHz, com 8 GB de memória RAM.

Os pontos nos quais as quantidades foram monitoradas são:

- Temperatura  $T$ , medida na superfície no último tempo.
- Fração volumétrica de gelo  $\epsilon_\beta$ , medida no mesmo ponto.

A Tabela 5. 1 mostra os resultados do estudo de convergência para as quatro malhas avaliadas.

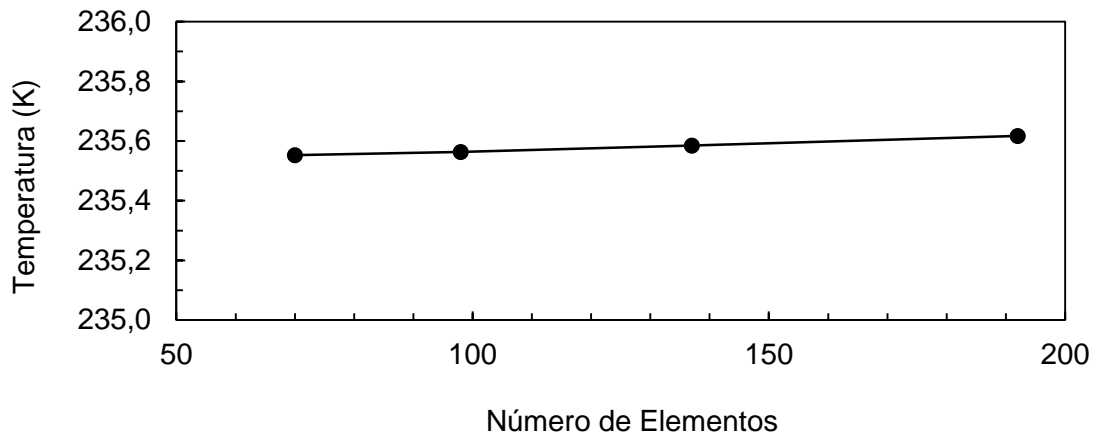
De acordo com os dados apresentados, a incerteza numérica associada à solução da malha fina (malha 1) para a temperatura é de 0,024% e para a fração volumétrica é de 0,087%. É possível notar também que esses valores, bem como os valores dos erros relativos e extrapolados, são menores que os obtidos para as malhas 2, 3 e 4, mostrando que o refinamento foi efetivo para redução das incertezas numéricas da solução. Portanto, pode-se afirmar que os resultados obtidos mostraram a convergência da malha à medida que a mesma foi refinada.

O comportamento ilustrado na Figura 5. 3 e na Figura 5. 4 mostram, de forma gráfica, os resultados apresentados na Tabela 5. 1. É possível visualizar que à medida que a malha se torna mais refinada, ou seja, o número de elementos aumenta, os valores de temperatura e fração volumétrica aumentam, tendendo a um valor constante, e conseqüentemente fazendo com que o erro relativo aproximado entre uma malha e outra também seja reduzido, chegando a um valor inferior a 0,2% para fração volumétrica, entre as malhas 1 e 2. Esse fato é um indicativo de que o refinamento utilizado é suficiente para obter uma solução independente da resolução da malha.

**Tabela 5. 1** Estudo de convergência de malha pelo método CGI.

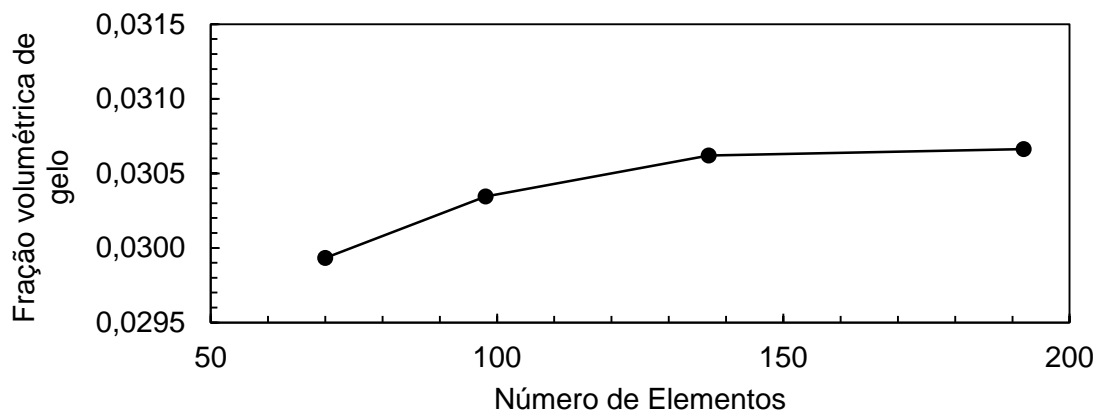
Número de elementos	192, 137, 98, 70	192, 137, 98, 70
<b>Quantidade avaliada</b>	<b>T [K]</b>	<b><math>\epsilon_{\beta}</math></b>
<i>r21</i>	1,404	1,404
<i>r32</i>	1,402	1,402
<i>r43</i>	1,406	1,406
$\emptyset_1$	253,62	0,0307
$\emptyset_2$	235,59	0,0306
$\emptyset_3$	235,56	0,0303
$\emptyset_4$	235,55	0,0299
Valor extrapolado ( $\emptyset_{ext}^{21}$ )	235,66	0,0307
Erro relativo aproximado ( $e_a^{21}$ )	0,013%	0,144%
Erro relativo extrapolado ( $e_{ext}^{21}$ )	0,019%	0,070%
<b>Índice de convergência (<math>CGI_{fina}^{21}</math>)</b>	<b>0,024%</b>	<b>0,087%</b>
Valor extrapolado ( $\emptyset_{ext}^{32}$ )	253,62	0,0308
Erro relativo aproximado ( $e_a^{32}$ )	0,009%	0,892%
Erro relativo extrapolado ( $e_{ext}^{32}$ )	0,013%	0,431%
<b>Índice de convergência (<math>CGI_{fina}^{32}</math>)</b>	<b>0,016%</b>	<b>0,541%</b>
Valor extrapolado ( $\emptyset_{ext}^{43}$ )	235,58	0,0305
Erro relativo aproximado ( $e_a^{43}$ )	0,005%	1,364%
Erro relativo extrapolado ( $e_{ext}^{43}$ )	0,006%	0,657%
<b>Índice de convergência (<math>CGI_{fina}^{43}</math>)</b>	<b>0,008%</b>	<b>0,827%</b>

Para a malha mais grosseira, apenas a fração volumétrica apresentou um índice de convergência maior, de 0,827%, porém, sendo este, um número menor que 1% a malha 4 ainda poderia ser utilizada para obtenção da solução numérica já que não apresentou diferença significativa no resultado simulado. No entanto, considerando que os custos computacionais da simulação não aumentam significativamente com o aumento do número de nós para o problema proposto, optou-se por utilizar a malha 2 para obtenção da solução numérica.



**Figura 5. 3** Gráfico do estudo de convergência de malha para Temperatura

( $T_{\infty}$ =257,75 K,  $T_p$ =233,15 K,  $Re$ =15000,  $v_{\infty}$ =2,18 m/s ,  $t$ =360 min,  $UR$ =95%)



**Figura 5. 4** Estudo de convergência de malha para fração volumétrica de gelo

( $T_{\infty}$ =257,75 K,  $T_p$ =233,15 K,  $Re$ =15000,  $v_{\infty}$ =2,18 m/s ,  $t$ =360 min,  $UR$ =95%)

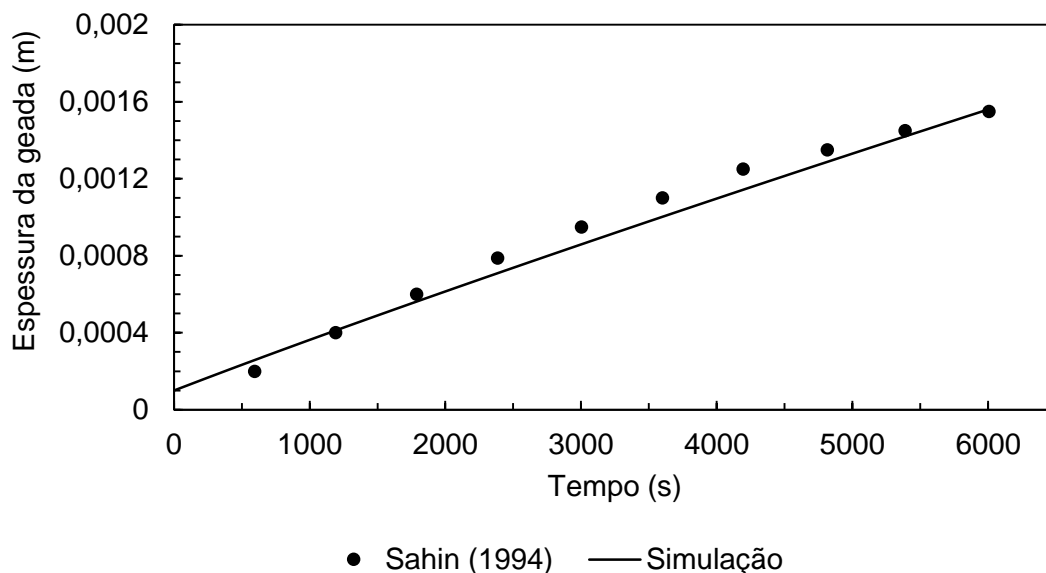
### 5.3 VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A fim de avaliar a eficiência do modelo, os resultados numéricos foram comparados a resultados experimentais da literatura, tanto para espessura da geada com o tempo, como para massa específica média da geada com o tempo. Para isso

gerou-se a formulação computacional para as mesmas condições impostas pela literatura em cada caso.

É importante ressaltar que a literatura nem sempre é clara em relação a todas as variáveis em suas condições de teste experimental sendo necessário fazer suposições ou cálculos. Em cada caso serão mencionados todos valores utilizados.

A Figura 5. 5 apresenta a validação para espessura da geada. As condições iniciais de operação de simulação foram apresentadas na legenda da figura e foram obtidos por Sahin (1994).



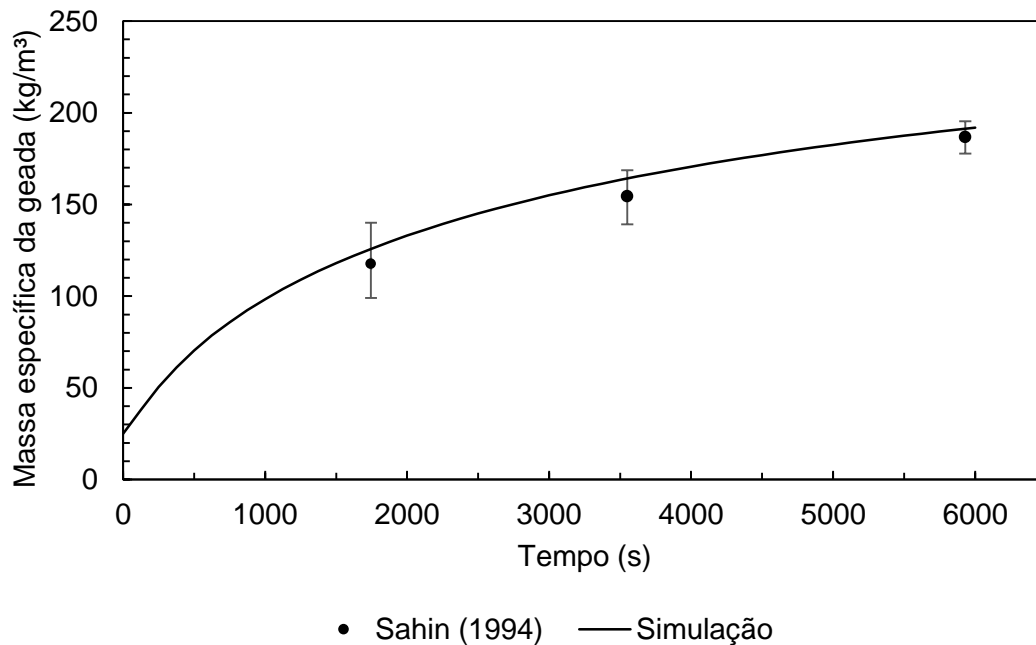
**Figura 5. 5** Comparação com resultados para espessura da geada

( $T_{\infty}=286$  K,  $T_p=264$  K,  $Re=3700$ ,  $v_{\infty}=2,1$  m/s,  $t=100$  min,  $w=0,0069$  kg/kg,  $UR=75\%$ ,  
 $F_{\mu}=11$ )

O erro relativo foi calculado para todos os pontos experimentais, obtendo-se um erro relativo médio de 2,4%, podendo-se então verificar uma boa concordância entre os valores da simulação e os valores experimentais.

E o erro relativo do último ponto calculado foi igual a 0,6%, o que mostra que a espessura final da geada obtida pelo modelo não difere significativamente da espessura da geada obtida experimentalmente.

A Figura 5. 6 apresenta a validação para a massa específica da geada, também obtida por Sahin (1994), os dados de entrada para a simulação são apresentados na legenda.



**Figura 5. 6** Comparação com resultados para massa específica da geada

( $T_{\infty}=293$  K,  $T_p=248$  K,  $Re=3700$ ,  $v_{\infty}=2,1$  m/s,  $t=100$  min,  $w=0,007$  kg/kg,  $UR=48,7\%$ ,  $F_{\mu}=7$ )

Nessa figura, é possível observar que os valores além de próximos dos valores experimentais, que são os pontos médios do gráfico, estão dentro da faixa de erro considerada para o experimento (barra de erros). Além disso, o último ponto, que mostra a massa específica alcançada ao final da simulação apresenta a menor diferença para o ponto médio, mostrando que os dados da simulação estão de acordo com os resultados experimentais.

#### 5.4 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE NUSSELT

O número de Nusselt é um parâmetro adimensional e fornece uma medida da transferência de calor por convecção. Para a análise da influência do número de Nusselt no modelo de formação da geada foram analisadas algumas correlações de acordo com a literatura, para escoamentos turbulentos com variadas faixas de Reynolds consideradas.

Primeiramente foi utilizada a equação (5.1) de O'Neal e Tree (1985), usada para geada em uma geometria em que há a transferência de calor entre placas e uma corrente de ar:

$$Nu=0,038Re^{0,75}Pr^{0,33} \quad (5.1)$$

sendo válida para a faixa de número de Reynolds de 4400 a 45100.

Assim, essa equação representa o comportamento da transferência de calor para escoamentos internos nos quais foram estudados casos específicos para a geada.

O'Neal e Tree (1985), ainda, observaram que para números de Reynolds iguais a 10630 e 6500, o coeficiente total de transferência de calor diminuiu rapidamente nos primeiros dez minutos. Já no menor número de Reynolds analisado ( $Re=2720$ ), a diminuição tornou-se menor. Em seguida, todos os valores de coeficiente mostraram-se aproximadamente constantes, concluindo-se que para números de Reynolds menores que 16000, não se observa mudança significativa do coeficiente convectivo de transferência de calor com o tempo.

O'Neal e Tree (1984) obtiveram dados para números de Reynolds entre 4400 e 32300 e serão comparados alguns casos a seguir juntamente com as outras equações a serem analisadas.

A próxima equação (5.2) a ser analisada foi proposta por Petukhov e Popov (1963). É uma correlação clássica utilizada para escoamentos turbulentos em região plenamente desenvolvida e apesar de sua complexidade, seu uso pode reduzir erros, em relação a outras correlações como Dittus-Boelter. Além disso, é possível introduzir correlações em que se considera o efeito da rugosidade.

$$Nu = \frac{(f/8)RePr}{1,07 + 12,7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)} \quad (5.2)$$

onde  $f$  é o fator de atrito e as faixas validadas de Prandtl e Reynolds são respectivamente:  $0,5 \leq Pr \leq 2000$  e  $10^4 < Re < 5 \cdot 10^6$ , mas esta última será extrapolada.

Assim, para essa correlação a análise depende além do número de Reynolds, do fator de atrito, que é uma função das condições da superfície e aumenta com a rugosidade dessa superfície.

Para essa correlação, foram consideradas três diferentes correlações para o fator de atrito. A primeira é a equação explícita de Petukhov (1970) para superfícies lisas, que cobre uma ampla faixa de números de Reynolds e é dada por:

$$f = (0,79 \ln Re - 1,64)^{-2} \quad (5.3)$$

onde a faixa utilizada é  $3000 \leq Re \leq 5 \cdot 10^6$ .

A segunda, também muito conhecida, é o fator de atrito de Blasius para tubo liso:

$$f = 0,32 Re^{-1/4} \quad (5.4)$$

onde a faixa utilizada  $2 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^5$  (BERGAN et al., 2014).

E a terceira e última usada foi a equação de Haaland (1983), que é uma equação explícita, para resolução da equação implícita de Colebrook (1939), com erro em relação a esta igual a 2%:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[ \left( \frac{rug}{3,7Dh} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re} \right] \quad (5.5)$$

onde  $rug$  é a rugosidade da superfície.

A equação de Colebrook (1939) é uma correlação para superfícies rugosas em que os fatores de atrito medidos cobrem uma ampla faixa de condições.

Yun, Kim e Min (2002) fizeram um estudo onde se mediu a rugosidade da geadá em diferentes condições experimentais. Baseando-se nos dados experimentais, eles, então, desenvolveram uma correlação para a rugosidade da geadá em função do tempo, para uma placa de 250 mm e o desvio padrão apresentado foi de  $\pm 29\%$ .

$$rug(t) = 3,92 \cdot 10^{-3} + 0,069 \cdot t - 0,023 \cdot t^2 + 2,84 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 - 1,28 \cdot 10^{-7} \cdot t^4 \quad (5.6)$$

onde o tempo  $t$  é em minutos.

Neste trabalho, a rugosidade utilizada foi obtida através dos dados experimentais de Yun, Kim e Min (2002) calculando-se uma rugosidade média, igual a 0,6 mm. Para isso, foi usado o gráfico de rugosidade variando com o tempo, e nele foram detectados diferentes tipos de formação de geada.

Foi decidido usar a média porque a equação usada é uma equação de ajuste dos dados experimentais e não consegue abranger e retratar tempos maiores que 80 minutos. Por exemplo, após 30 minutos, a rugosidade da geada calculada pela equação é de 0,66 mm.

Já aos 100 minutos o valor da rugosidade calculada pela equação seria igual a -0,5 mm, o que não seria correto utilizar, já que a rugosidade da geada foi definida por Yun, Kim e Min (2002) como a diferença entre a altura da colina e do vale da geada, e portanto teria somente valores positivos de rugosidade. A rugosidade foi medida utilizando um micrômetro com uma agulha fina e ampliando com uma lupa, a fim de verificar o ponto de contato da agulha com a geada.

Outra correlação de Nusselt utilizada para Reynolds menores é a equação de Petukhov modificada por Gnielinski (1976):

$$Nu = \frac{(f/8)(Re-1000)Pr}{1,07 + 12,7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3}-1)} \quad (5.7)$$

onde a faixa utilizada de Prandtl e Reynolds é respectivamente:  $0,5 \leq Pr \leq 2000$  e  $3000 \leq Re \leq 5 \cdot 10^6$  (BERGAN et al., 2014).

Essa é uma correlação para superfícies lisas em uma ampla faixa de número de Reynolds, incluindo a região de transição. Para essa equação, utilizou-se o fator de atrito de Pethukov.

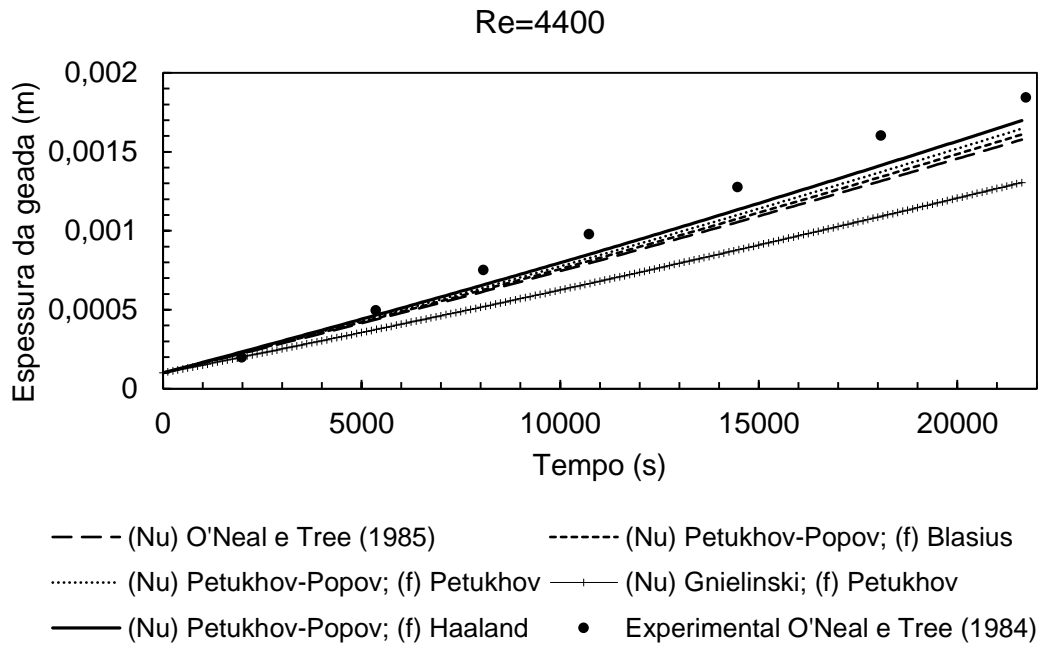
Para a escolha entre as correlações do número de Nusselt, fez-se a comparação dos resultados obtidos da simulação de cada equação e dos resultados experimentais de O'Neal e Tree (1984) e Hayashi et. al (1977).

Nos gráficos apresentados a seguir (Figura 5. 7 à Figura 5. 10) utilizou-se das seguintes condições iniciais de operação de simulação:  $T_{\infty}=279,85$  K,  $T_P=267,95$  K,  $w=0,00395$ kg/kg,  $UR=65,1\%$ ,  $\bar{\rho}^0=105$  kg/m<sup>3</sup>,  $D_h=0,245$  m,  $t=360$  min,

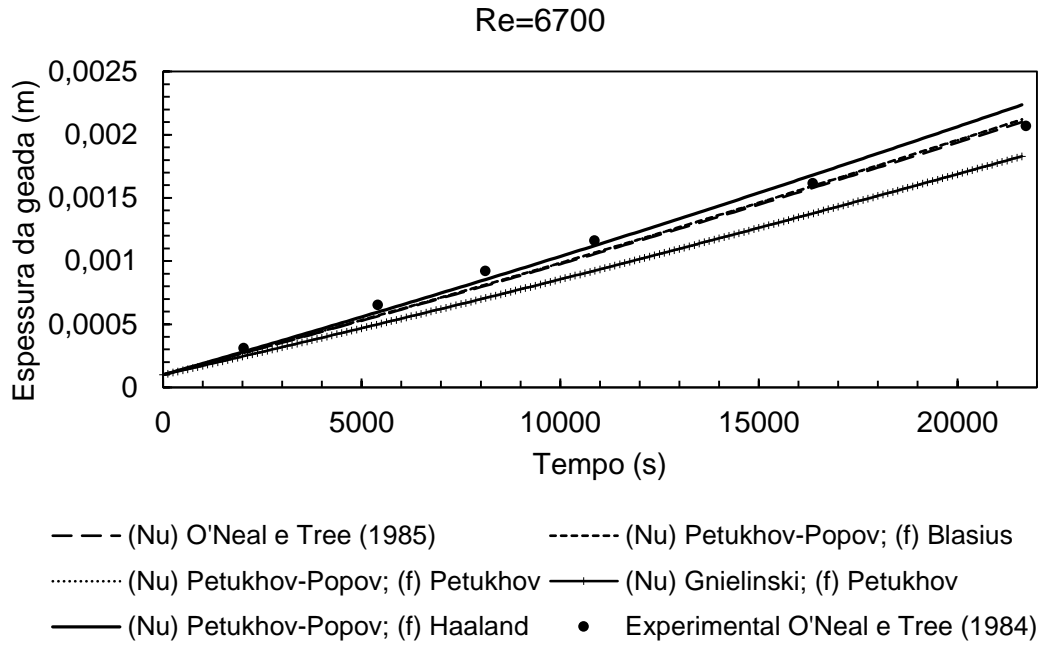


$F_{\mu}=8$ . Esses valores foram retirados, calculados e/ou estimados a partir dos dados de O'Neal e Tree (1984).

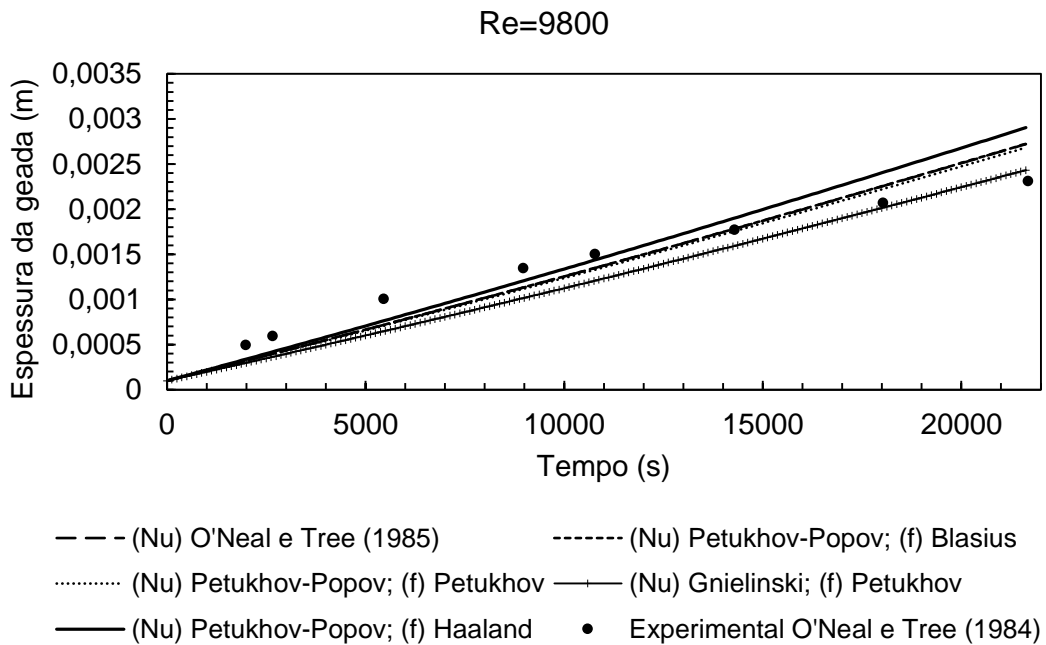
Nos gráficos da Figura 5. 11 à Figura 5. 15 são apresentados os erros relativos calculados a partir do modelo, para cada equação de Nusselt analisada, em relação aos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984). Sendo esses os mesmos da Figura 5. 7 à Figura 5. 10. Os erros foram apresentados para cada equação de Nusselt obtendo-se um erro relativo médio e são destacados, nos pontos em dispersão, os erros por números de Reynolds.



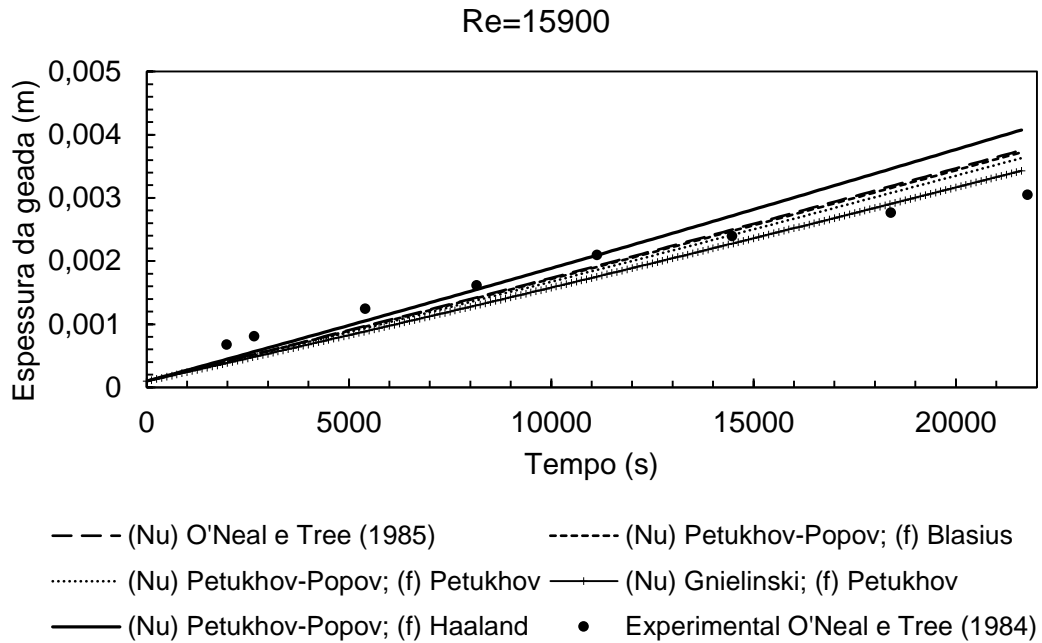
**Figura 5. 7** Resultados de espessura da geada para diferentes equações de Nusselt para Reynolds igual a 4400



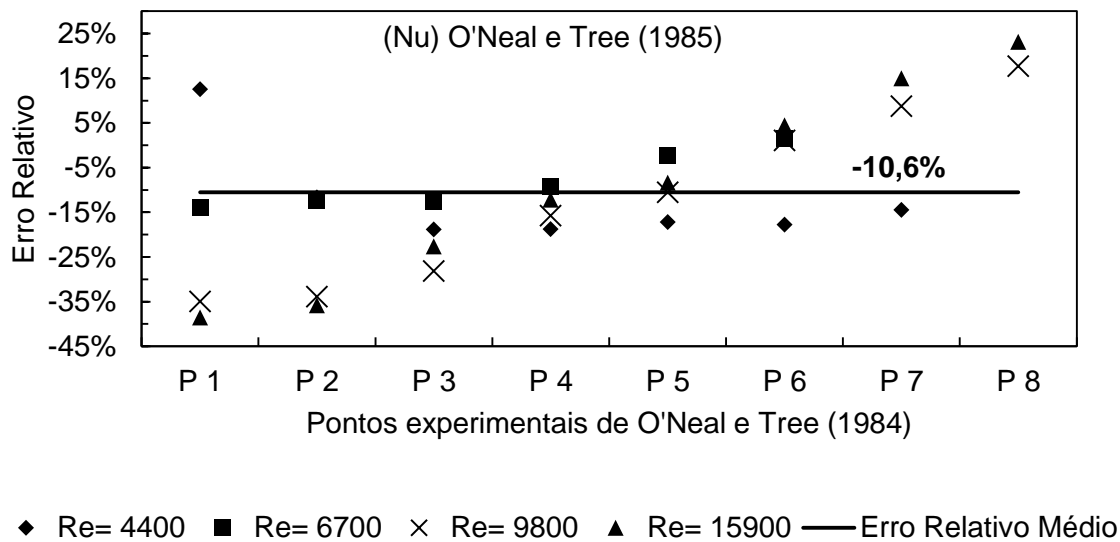
**Figura 5. 8** Resultados de espessura da geada para diferentes equações de Nusselt para Reynolds igual a 6700



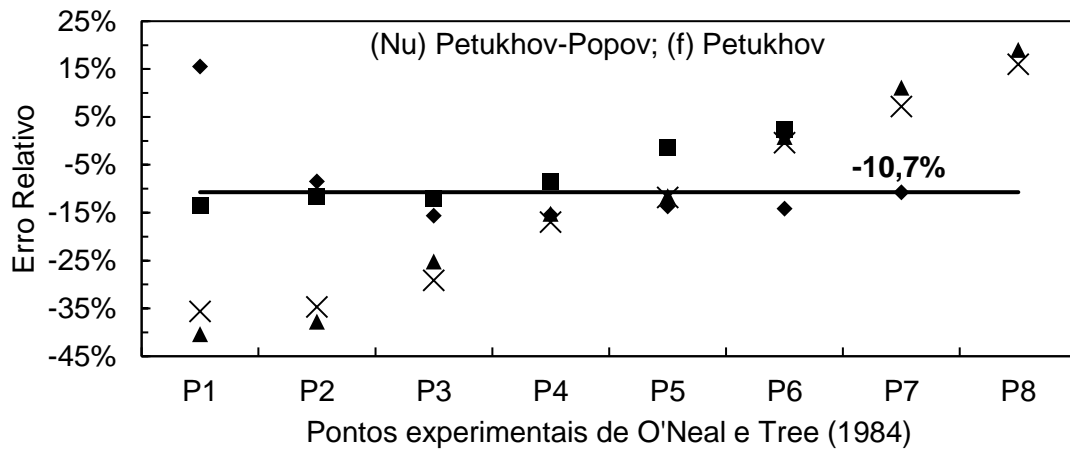
**Figura 5. 9** Resultados de espessura da geada para diferentes equações de Nusselt para Reynolds igual a 9800



**Figura 5. 10** Resultados de espessura da geada para diferentes equações de Nusselt para Reynolds igual a 15900

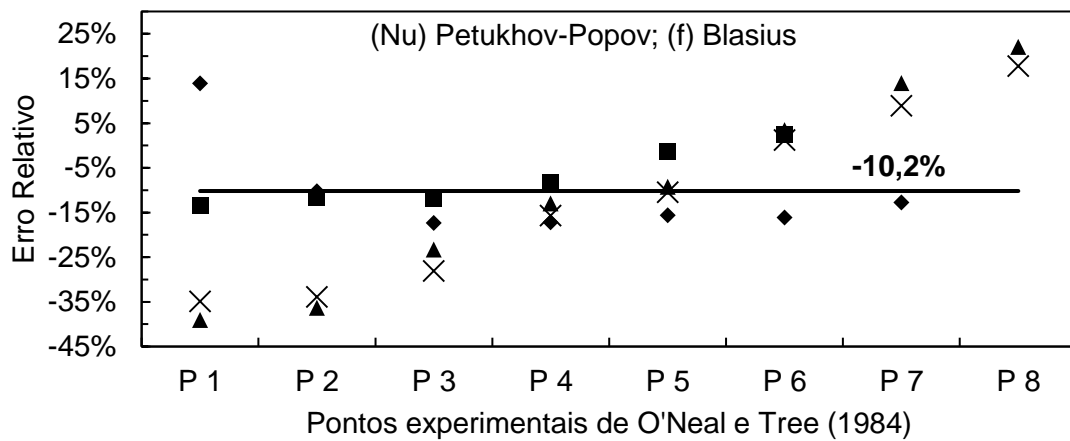


**Figura 5. 11** Erros relativos obtidos da equação de Nusselt de O'Neal e Tree (1985) calculados em relação aos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984) para cada número de Reynolds



♦ Re= 4400 ■ Re= 6700 × Re= 9800 ▲ Re= 15900 — Erro Relativo Médio

**Figura 5. 12** Erros relativos obtidos da equação de Nusselt de Pethukov e Popov com fator de atrito de Petukhov (1970) calculados em relação aos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984) para cada número de Reynolds



♦ Re= 4400 ■ Re= 6700  
 × Re= 9800 ▲ Re= 15900  
 — Erro Relativo Médio

**Figura 5. 13** Erros relativos obtidos da equação de Pethukov e Popov com fator de atrito de Blasius calculados em relação aos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984) para cada número de Reynolds

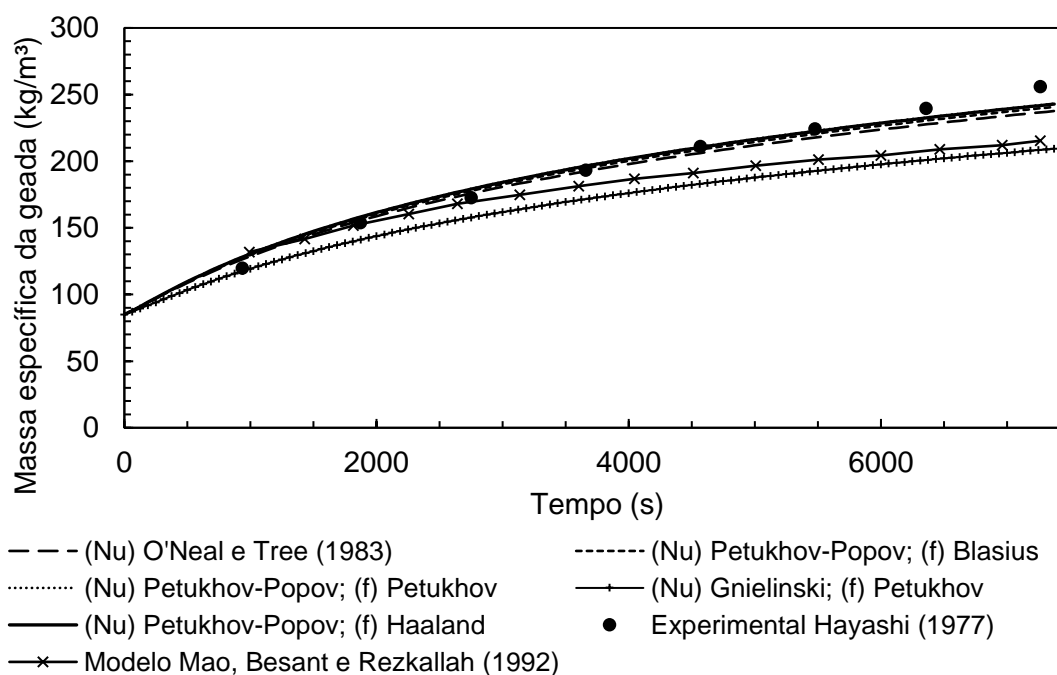


Mao, Besant e Rezkallah (1992) validaram seus resultados de massa específica utilizando dados experimentais de Hayashi et. al (1977). Na Figura 5. 16 foi feita a comparação para as mesmas equações, utilizando os valores obtidos de Mao, Besant e Rezkallah (1992).

As condições iniciais de operação de simulação foram as seguintes:  $T_{\infty}=298,15$  K;  $T_p=268,05$  K;  $w=0,0075$  kg/kg;  $UR=70,8\%$ ;  $\rho_{geada}=85$  kg/ m<sup>3</sup>;  $Re= 5200$ ;  $F\mu = 2$ ;  $t=120$  min. Esses valores foram retirados ou calculados a partir dos dados de Mao, Besant e Rezkallah (1992) comparados com Hayashi et. al (1977).

Pode-se verificar boa concordância entre os valores da simulação e os valores experimentais. Onde, para estas condições, o modelo apresentou uma aproximação maior aos resultados experimentais comparado ao modelo de Mao, Besant e Rezkallah (1992).

Além disso, é possível verificar pela curva de massa específica que para uma mesma comparação com modelo e experimental houve uma melhora com relação ao modelo proposto por Mao, Besant e Rezkallah (1992), que apresentou o maior erro relativo igual a 15,9%, em relação ao último ponto. A seguir, são apresentados os erros relativos em relação aos pontos em cada caso na Tabela 5. 2.



**Figura 5. 16** Resultados de massa específica da geada para diferentes equações de Nusselt

**Tabela 5. 2** Erros relativos calculados em relação aos últimos pontos experimentais de O'Neal e Tree (1984) e Hayashi et. al (1977) para cada número de Reynolds

<b>Ponto</b>	<b>(Nu) O'Neal e Tree (1983)</b>	<b>(Nu) Petukhov -Popov; (f) Blasius</b>	<b>(Nu) Petukhov -Popov; (f) Petukhov</b>	<b>(Nu) Gnielinsk i; (f) Petukhov</b>	<b>(Nu) Petukhov -Popov; (f) Haaland</b>	<b>Modelo Mao, Besant e Rezkalla h (1992)</b>
<b>Ponto 1</b>	5,6%	6,4%	7,0%	<b>-1,9%</b>	6,9%	10,1%
<b>Ponto 2</b>	1,1%	2,1%	2,9%	-8,2%	2,8%	-1,4%
<b>Ponto 3</b>	1,9%	3,0%	3,9%	-8,5%	3,8%	-2,6%
<b>Ponto 4</b>	<b>-0,2%</b>	0,9%	1,9%	-11,1%	1,7%	-6,3%
<b>Ponto 5</b>	<b>-2,3%</b>	-1,1%	<b>-0,2%</b>	-13,3%	<b>-0,3%</b>	-9,4%
<b>Ponto 6</b>	<b>-2,7%</b>	-1,5%	<b>-0,6%</b>	-14,0%	<b>-0,7%</b>	-10,3%
<b>Ponto 7</b>	<b>-4,9%</b>	<b>-3,7%</b>	<b>-2,7%</b>	-16,1%	<b>-2,9%</b>	-12,8%
<b>Ponto 8</b>	7,2%	6,0%	5,0%	18,2%	5,1%	-15,9%

O número de Nusselt foi analisado de acordo com os gráficos (Figura 5. 7 à Figura 5. 16) e tabelas (Tabela 5. 2) apresentados. O erro relativo foi analisado para os tempos e condições analisadas com relação aos pontos experimentais de espessura e massa específica.

A equação do número de Nusselt de O'Neal e Tree (1983) (Figura 5. 11) tem a vantagem de ser uma equação estudada para casos típicos de geada, é uma equação

de fácil aplicação e ainda considera faixas de Reynolds mais facilmente encontrados aos casos experimentais com crescimento de geada. Apresenta um erro relativo médio de -10,6% entre os Reynolds analisados.

Essa equação expressou resultados próximos aos resultados da equação de Petukhov-Popov usando fator de atrito de Petukhov (1970) (Figura 5. 12), que apresentou erro relativo médio de -10,7%, e da equação de Petukhov-Popov com fator de atrito de Blasius (Figura 5. 13) com erro relativo médio de -10,2%

Já a equação de Petukhov-Popov com fator de atrito de Haaland (Figura 5. 14) apresentou uma diminuição do erro relativo médio entre os números de Reynolds, igual a -4,3%. Mostrando que essa equação é que melhor se adequa para os variados números de Reynolds. Para massa específica (Tabela 5. 2) também observou-se que os erros se mantiveram baixos, com um erro relativo médio de 3,1%. Essa equação é interessante por retratar a rugosidade da geada, que normalmente é descartada nos modelos. Tais modelos tratam o escoamento como tendo a superfície como lisa.

Apresentou os erros maiores nos dois primeiros e dois últimos pontos dos números de Reynolds iguais a 9800 e 15900. Isso poderia ser explicado já que em maiores números de Reynolds, há o aumento do coeficiente convectivo de transferência de calor intensificando a transferência de calor e se obterá uma maior espessura da geada. Nesse caso, também é possível haver a intensificação da transferência de calor devido à introdução do parâmetro da rugosidade.

Pode-se observar que a equação de Gnielinski (Figura 5. 15) apresentou erros menores apenas para alguns pontos em números todos os números de Reynolds. Sendo eles os últimos pontos do Reynolds igual a 9800 e a 15900 e o primeiro ponto para massa específica. Para Reynolds igual a 4400, o erro se aproximou de zero para o primeiro ponto, e cresceu nos próximos pontos. O erro relativo médio entre os variados Reynolds foi igual a -20,5%, mostrando um subdimensionamento significativo do problema, e os resultados do número de Reynolds igual a 6700 foram os mais próximos da média.

Para os resultados de Hayashi et. al (1977) expostos na Tabela 5. 2, com exceção da comparação de Gnielinski, os erros não diferem significativamente entre si

Alguns erros relativos pontuais observados aqui e até mesmo o erro relativo médio de Gnielinski podem parecer grandes se comparados a outros pontos ou outros



tipos de modelos. Porém, para modelos que levam em conta o crescimento de geada é comum erros dessa magnitude, já que são consideradas muitas variáveis dependentes em questão.

E ainda, é possível calcular os erros relativos pontuais de outros modelos de geada de outros trabalhos e os maiores erros relativos pontuais dentro da curva chegam a aproximadamente 45%. Jones e Parker (1975), por exemplo, concluem isso em seu trabalho, e apresentam a diferença de 30% dos dados do modelo em relação aos dados experimentais. Nos próximos tópicos serão mostradas as mudanças com relação a algumas variáveis, para mesmas condições.

Portanto, após essa análise, foi escolhido a equação de Petukhov-Popov e que usa o fator de atrito de Haaland, por ser uma equação que melhor representa o problema proposto.

## 5.5 INFLUÊNCIA DO FATOR DE RESISTÊNCIA À DIFUSÃO

Como já salientado, um dos principais problemas em modelos é a avaliação do fator de resistência à difusão ( $\mu$ ). As expressões para  $\mu$  são normalmente relacionadas à porosidade da geada ou fração volumétrica do gelo.

É um coeficiente sujeito a muitas discussões na literatura e podem ser classificados em dois grupos: correlações com valores de fator de resistência à difusão sempre menores do que um e aqueles com valores que podem exceder um (BRÈQUE, NEMER, 2016).

Brian, Reid e Shah (1970) propõem uma equação empírica (5.8), apresentada a seguir, em que se considera a tortuosidade do meio poroso ( $\tau$ ). Os valores obtidos de  $\mu$  são sempre menores que um.

$$\mu = \frac{(1 - \epsilon_{\beta})}{\tau} \quad \text{com } 1,1 \leq \tau \leq 1,3 \quad (5.8)$$

Sanders (1974) também obtém valores menores que um, mas considera somente a porosidade em sua equação (5.9). Esta equação também foi utilizada por Mezedur, Kaviany e Moore (2002) e Padhmanabhan et. al (2011):

$$\mu = \frac{(1-\varepsilon_{\beta})}{1-(\varepsilon_{\beta})^{0,5}} \quad (5.9)$$

Outra equação clássica (5.10) em que  $\mu$  é menor do que um é a equação de Auracher (1987), que realizou estudos teóricos sobre estrutura do gelo e algumas medições da difusão do vapor de água na geada:

$$\mu = \frac{(1-\varepsilon_{\beta})}{1-C_0 \cdot \varepsilon_{\beta}} \quad \text{com } C_0=0,58 \quad (5.10)$$

Desse modo, todas as equações anteriormente apresentadas resultarão em difusividades efetivas menores que a molecular. No entanto, ao contrário dos modelos acima citados, Yosida (1955) estudou a difusão de vapor na neve que resultou em um fator de resistência à difusão muito maior que 1 (até 10).

Le Gall, Grillot e Jallut (1997), por sua vez, consideraram a equação de Auracher (1987) limitada para aplicação do problema com as condições de contorno especificadas, e para o ajuste com os dados experimentais. Assim, tentaram aumentar o valor de  $\mu$ , adicionando um segundo termo à equação de Auracher (1987):

$$\mu = \frac{(1-\varepsilon_{\beta})}{1-C_0 \cdot \varepsilon_{\beta}} + F_{\mu} \cdot k \cdot \varepsilon_{\beta} \cdot (1-\varepsilon_{\beta})^k \quad (5.11)$$

com  $C_0=0,58$ ;  $k=10$  e  $F_{\mu}$  variando de -2 a 20.

O coeficiente  $k$  é um termo que varia de 1 a 10 e permite que o aumento de  $\mu$  seja distribuído ao longo da fração de gelo, onde sempre  $\mu(\varepsilon_{\beta}=0)=1$  e  $\mu(\varepsilon_{\beta}=1)=0$ . Quando o valor de  $k$  é igual a 1, há aumento de  $\mu$  numa distribuição proporcional. À medida que esse valor é aumentado, a distribuição se desloca, sendo maior para menores frações volumétricas de gelo. Assim, Le Gall, Grillot e Jallut (1997) escolheram fixar este coeficiente no valor 10 para garantir um valor máximo nas áreas de maior porosidade.

Já o parâmetro  $F_{\mu}$  afeta a intensidade da correção, onde valores positivos levam à uma difusividade efetiva maior do que a molecular, e para valores negativos, a

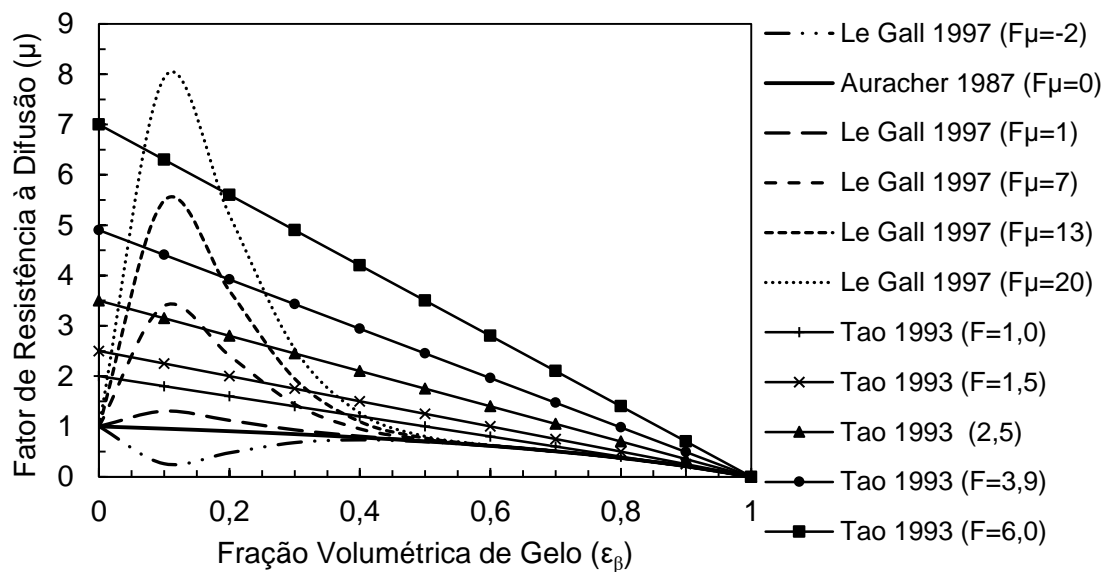
difusividade efetiva é menor do que a molecular, mas esses só serão considerados neste tópico. Seus valores variam de -2 a 20, o que corresponde a um coeficiente de difusão efetiva de no máximo até 8 vezes o molecular.

Tao, Besant e Rezkallah (1993) também obtiveram difusividades efetivas várias vezes maior do que a molecular (até 7). Para isso, definiram um parâmetro F relacionado a  $\mu$ , como mostra a equação (5.12):

$$\mu = (1 - \varepsilon_\beta) \cdot (1 + F) \quad (5.12)$$

os fatores F, segundo os autores, são função da temperatura e variam de 0,05 a 6.

Le Gall, Grillot e Jallut (1997) propõem uma equação que cubra o domínio do modelo de Auracher (1987) e de Tao, Besant e Rezkallah (1993) e a comparação entre as equações pode ser visualizada pela Figura 5. 17.



**Figura 5. 17** Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão

A partir da Figura 5. 17 é possível verificar a discrepância entre os valores e diferenças dos fatores de resistência à difusão. Para a análise dos fatores de resistência à difusão utilizou-se desde o máximo ao mínimo valor de  $F_\mu$  da equação de Le Gall,

Grillot e Jallut (1997). Para  $F_{\mu}=0$ , tem-se a equação de Auracher (1987). Também se utilizou uma ampla variação de  $F_{\mu}$  para a equação de Tao, Besant e Rezkallah (1993).

O valor de  $F_{\mu}=-2$  mostrado apresenta valores do fator de resistência à difusão menores do que 1, assim como os dados pela equação de Auracher (1987) que tem seu valor máximo de  $\mu$  igual a 1. A partir de  $F_{\mu}=1$ , os valores do fator de resistência à difusão alcançam valores maiores do que um, assim com todos os obtidos pela equação de Tao, Besant e Rezkallah (1993).

Acredita-se que fator de resistência à difusão é uma função muito mais complexa e que envolve efeitos estruturais do gelo, bem como outras condições ambientais predominantes na camada de gelo.

Le Gall, Grillot e Jallut (1997) apresentaram seus resultados comparado a resultados experimentais mostrando que foi feito por tentativa e erro a escolha de  $F_{\mu}$ . Para um correto ajuste do modelo seria exigido uma variação  $F_{\mu}$  correspondendo a condições variáveis.

Considerando essa exigência, Le Gall, Grillot e Jallut (1997) decidiram usar correlações empíricas de Mao Besant e Rezkallah (1992), que mediram as condições de contorno, bem como as principais características de uma camada de gelo que cresce em uma placa fria submetida à circulação forçada de ar úmido, no entanto, não mediram a temperatura real da superfície de geada, assumindo sempre igual a 0 °C e portanto, não poderia ser utilizado para os ajustes de  $F_{\mu}$ .

Utilizando dados de literatura Le Gall, Grillot e Jallut (1997), então, propõem uma segunda correlação e comparam valores preditos e valores obtidos de  $F_{\mu}$ , obtendo uma maior concordância para condições de fluxos turbulentos e fluxos laminares do que usando a relação de Mao Besant e Rezkallah (1992). No entanto, essa relação além de um uso bastante complexo, os resultados obtidos foram inaproveitáveis devido a diferentes escalas de valores que não permitiram a implementação.

Portanto, neste trabalho foi usada a equação proposta por de Le Gall, Grillot e Jallut (1997) com valores preditos de  $F_{\mu}$  e a seguir será mostrado o impacto desses em algumas variáveis consideradas no estudo da geada.

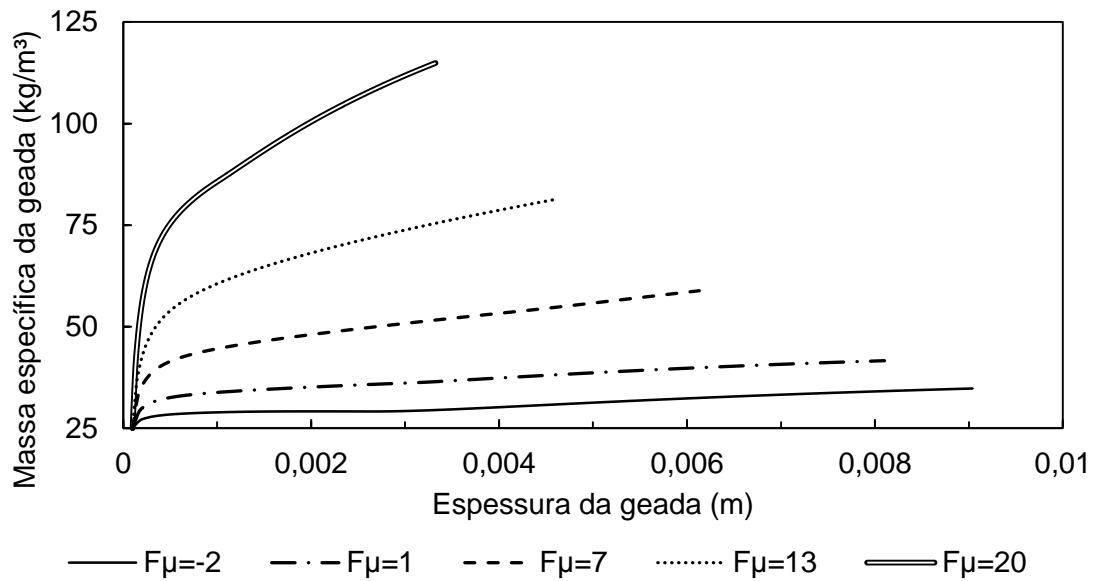
A seguir, tem-se as comparações dos fatores de resistência à difusão mostrados nas Figura 5. 18 e Figura 5. 20 e as condições iniciais de operação de simulação encontram-se nas legendas.

A Figura 5. 18 e a Figura 5. 20 mostram que resultados do modelo sensíveis a  $F_{\mu}$  (e, portanto, ao fator de resistência à difusão  $\mu$ ). E também mostram que apesar das diferentes condições iniciais, a tendência de resposta para o comportamento de cada  $F_{\mu}$  é a mesma.

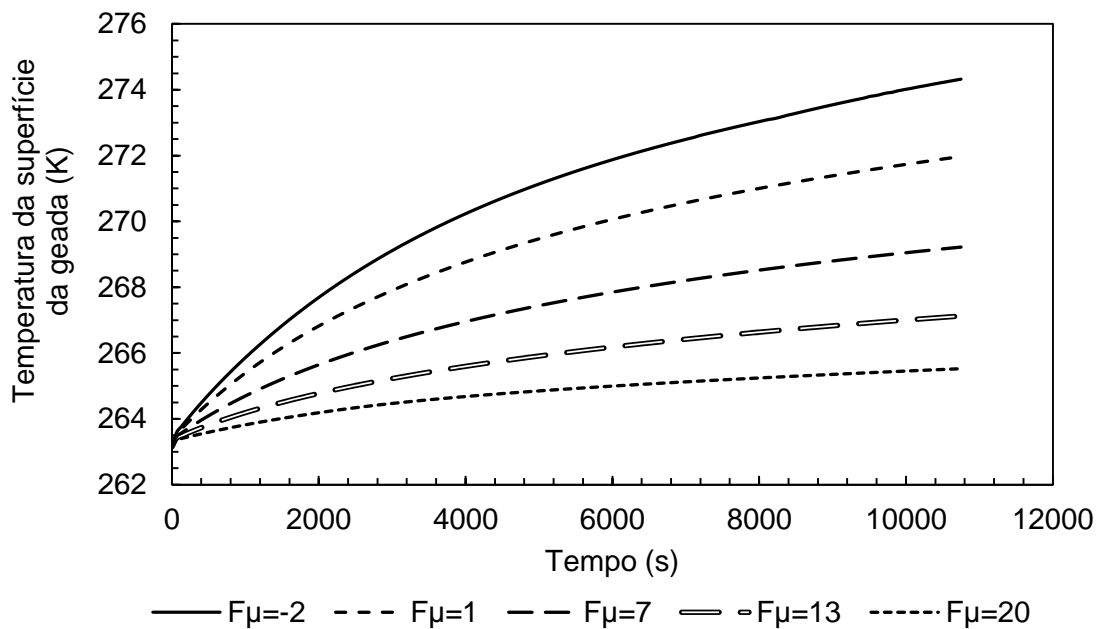
Onde é possível observar que valores mais altos de  $F_{\mu}$  correspondem a camadas de geada mais finas e mais densas e menores valores de  $F_{\mu}$  correspondem a camadas de geada mais espessas e menos densas.

Comparando os fatores de resistência à difusão em relação à temperatura da superfície da geada pode-se observar, para os dois casos, pela Figura 5. 19 e pela Figura 5. 21, um comportamento similar ao crescimento da geada, onde para menores valores de  $F_{\mu}$ , maiores são as temperaturas da superfície. O mesmo é observado no trabalho de Le Gall, Grillot e Jallut (1997).

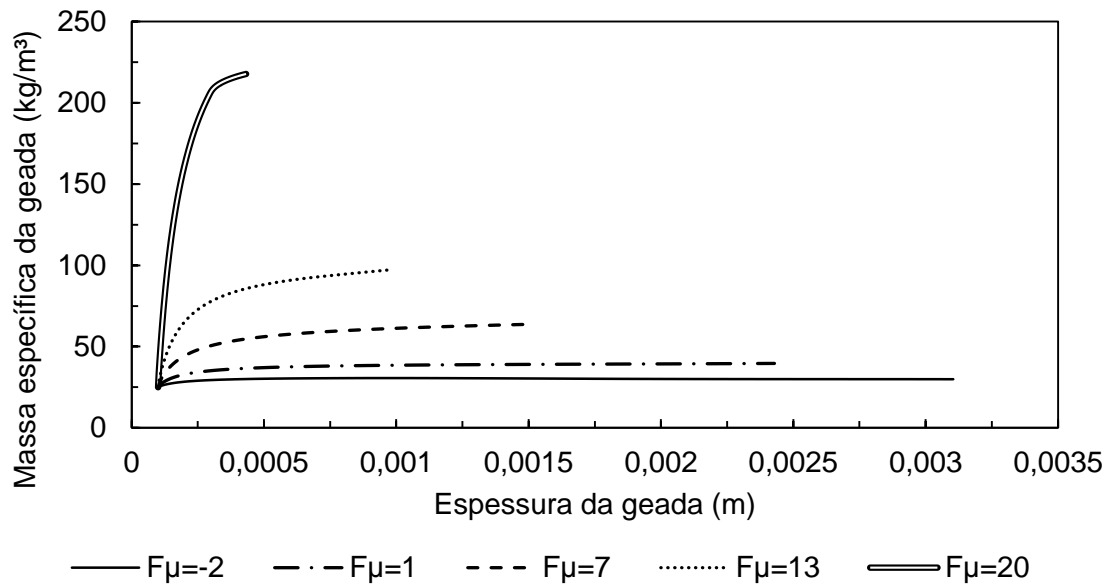
Portanto, pode-se dizer que variações do  $F_{\mu}$  e portanto de  $\mu$  pode ser responsável por grande discrepância observada entre experimentos e dados teóricos. Para este trabalho, em geral, foram utilizado valores intermediários de  $F_{\mu}$  por serem valores que se aproximam mais aos resultados experimentais comparados.



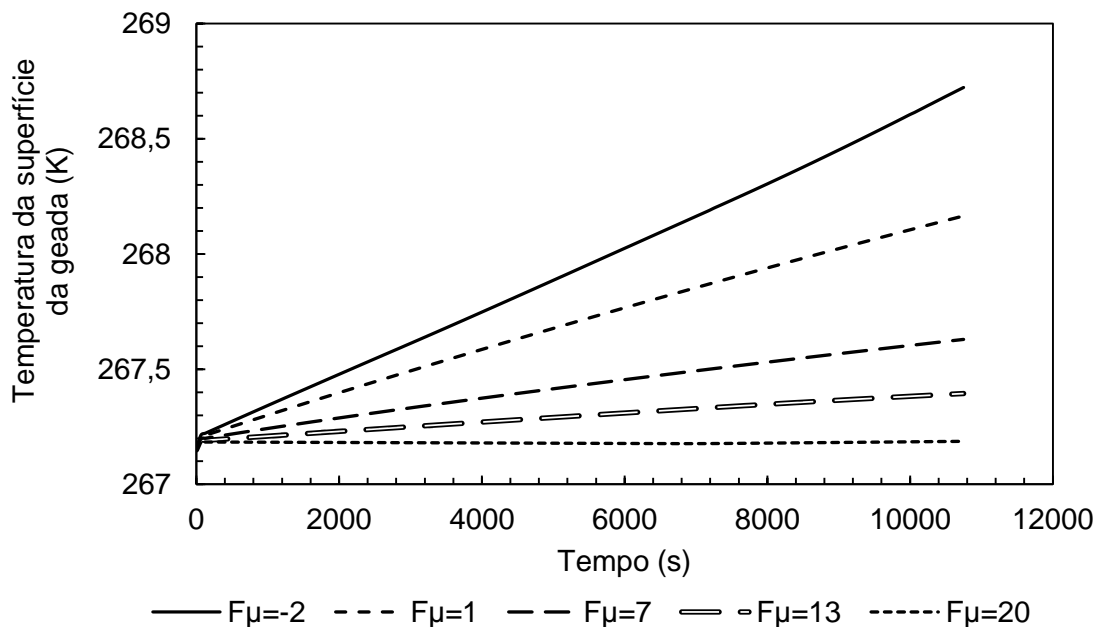
**Figura 5. 18** Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão para  $Re=32400$  em relação à massa específica e ao crescimento da gead ( $T_{\infty}=279,15$  K;  $T_P=263,15$  K;  $Re=32400$ ;  $v=0,55$  m/s;  $UR=70\%$ ;  $t=180$  min)



**Figura 5. 19** Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão para  $Re=32400$  em relação à temperatura da superfície da gead ( $T_{\infty}=279,15$  K;  $T_P=263,15$  K;  $Re=32400$ ;  $v=0,55$  m/s;  $UR=70\%$ ;  $t=180$  min)



**Figura 5. 20** Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão para  $Re=5500$  em relação à massa específica e ao crescimento da geada ( $T_{\infty}=279,15$  K;  $T_P=267,15$  K;  $Re=5500$ ;  $v=4,0$  m/s;  $UR=85\%$ ;  $t=180$  min)



**Figura 5. 21** Comparação das correlações dos fatores de resistência à difusão para  $Re=5500$  em relação à temperatura da superfície da geada ( $T_{\infty}=279,15$  K;  $T_P=267,15$  K;  $Re=5500$ ;  $v=4,0$  m/s;  $UR=85\%$ ;  $t=180$  min)

## 5.6 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE REYNOLDS

Para a análise da influência do número de Reynolds na geada utilizaram-se as seguintes condições:  $T_{\infty}=278,15$  K,  $T_p=263,15$  K, UR=70%,  $t=14400$  s,  $D_h= 0,245$  m,  $F_{\mu}=7$ , e serão mostradas na Figura 5. 22 à Figura 5. 28.

As Figura 5. 22 e Figura 5. 23 mostram a influência do número de Reynolds no crescimento e densificação da geada, respectivamente, ambas em função do tempo. É possível observar que tanto o crescimento quanto densificação da geada, aumentam com o tempo, em todos os números de Reynolds. Onde, quanto maior o número de Reynolds, maior e mais densa será a camada da geada. E quanto menor o número de Reynolds, menor e menos densa será a camada da geada.

Verifica-se também, que para números de Reynolds elevados, o aumento das espessuras se reduz, observando uma menor diferença de espessura entre um Reynolds e outro. Ou seja, esse aumento de espessura com o aumento de Reynolds deixa de ser linear. Assim, o crescimento da geada será menos influenciado pelos altos números de Reynolds.

O'Neal e Tree (1984), também observaram esse fato em seus experimentos, quando em Reynolds maiores que 15900, a espessura da camada de geada não era tão afetada pelos mesmos.

Já a massa específica cresce proporcionalmente em cada número de Reynolds testado, não diferindo em altos ou baixos números de Reynolds. O mesmo acontece com a fração volumétrica de gelo (Figura 5. 26).

Observando a Figura 5. 24, assim como para espessura e a massa específica da geada, verifica-se que à medida que aumenta o número de Reynolds, também é aumentada a temperatura da camada da geada e conseqüentemente a temperatura da superfície (Figura 5. 25). Porém, nota-se que a temperatura da geada manteve-se aproximadamente constante para números de Reynolds baixos.

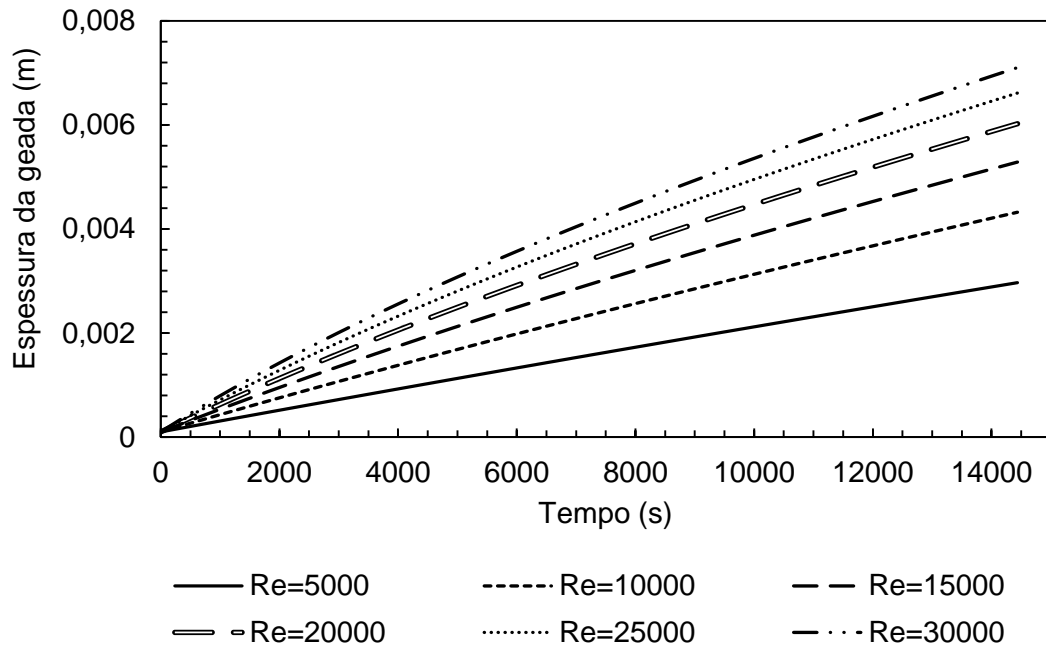
O mesmo acontece na Figura 5. 27, para a condutividade térmica efetiva da geada e na Figura 5. 28, para a difusividade efetiva da geada. Quanto maior o número de Reynolds, maior a condutividade térmica efetiva e maior a difusividade térmica efetiva.

Assim como a temperatura, a difusividade efetiva da geada manteve-se aproximadamente constante para baixos números de Reynolds, isso porque a

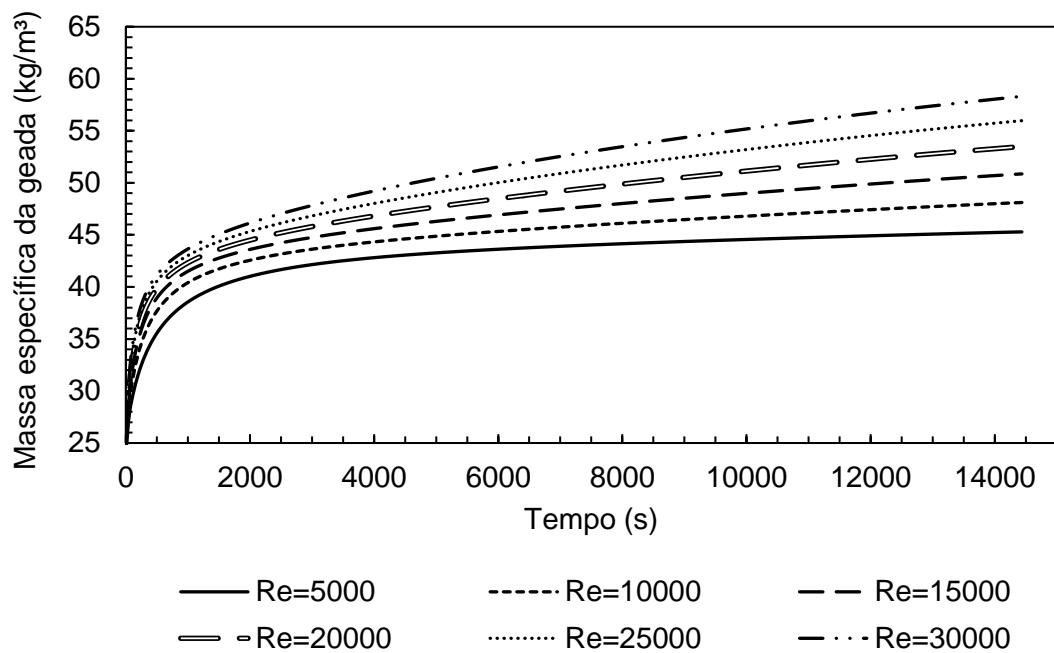


difusividade é uma função da temperatura, e por isso é possível notar o comportamento similar nos gráficos apresentados.

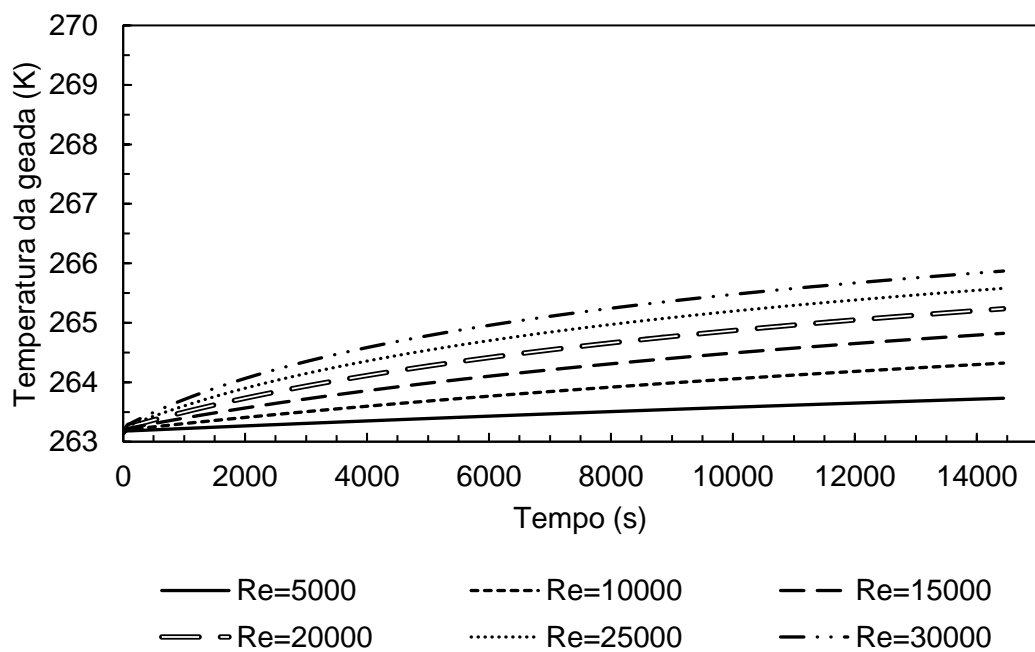
Portanto, à medida que se aumentou o número de Reynolds houve também o aumento de todas as variáveis analisadas.



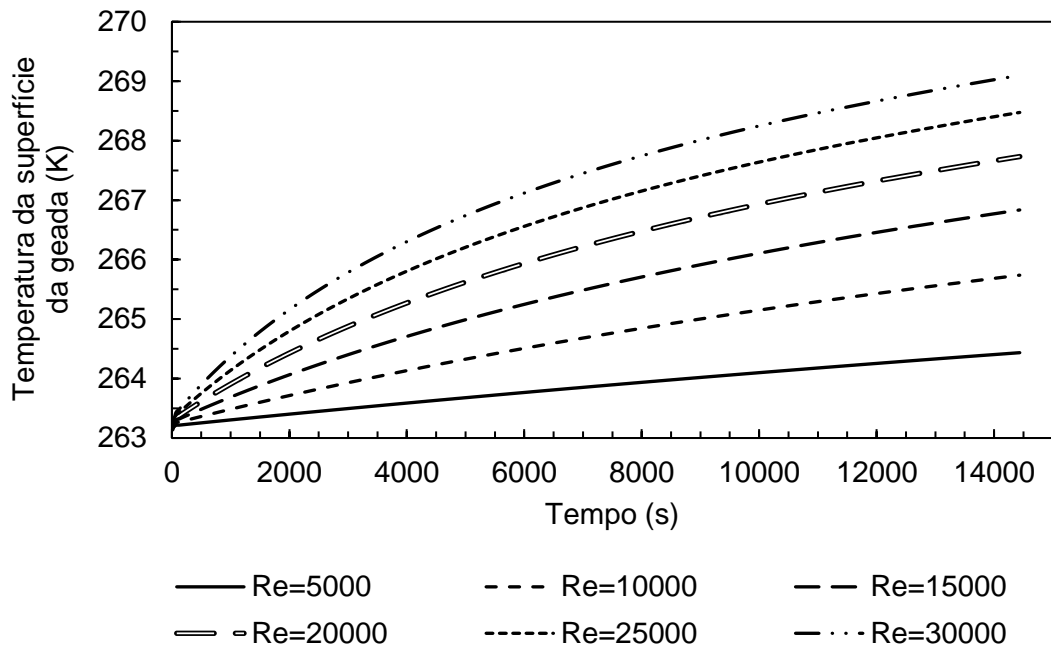
**Figura 5. 22** Influência do número de Reynolds na espessura da geada



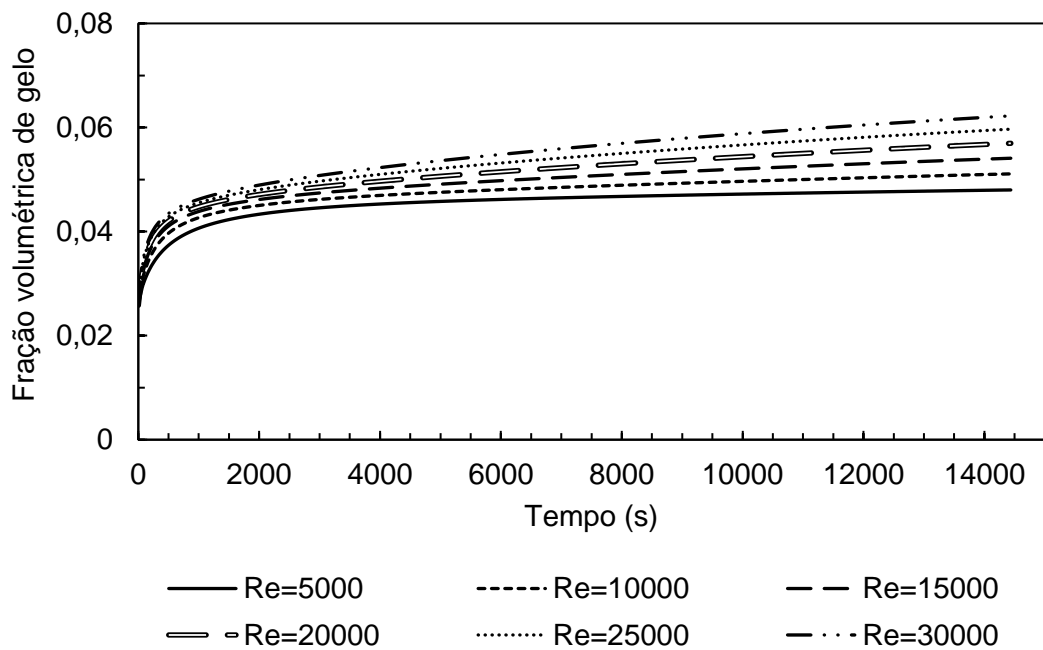
**Figura 5. 23** Influência do número de Reynolds na massa específica da geada



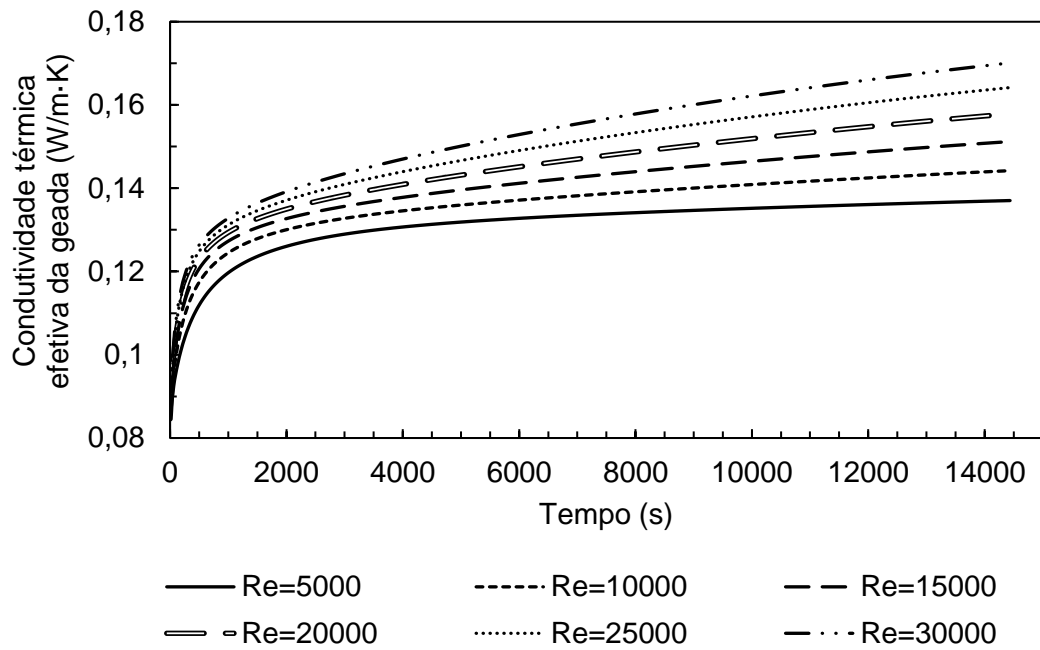
**Figura 5. 24** Influência do número de Reynolds na temperatura da geada



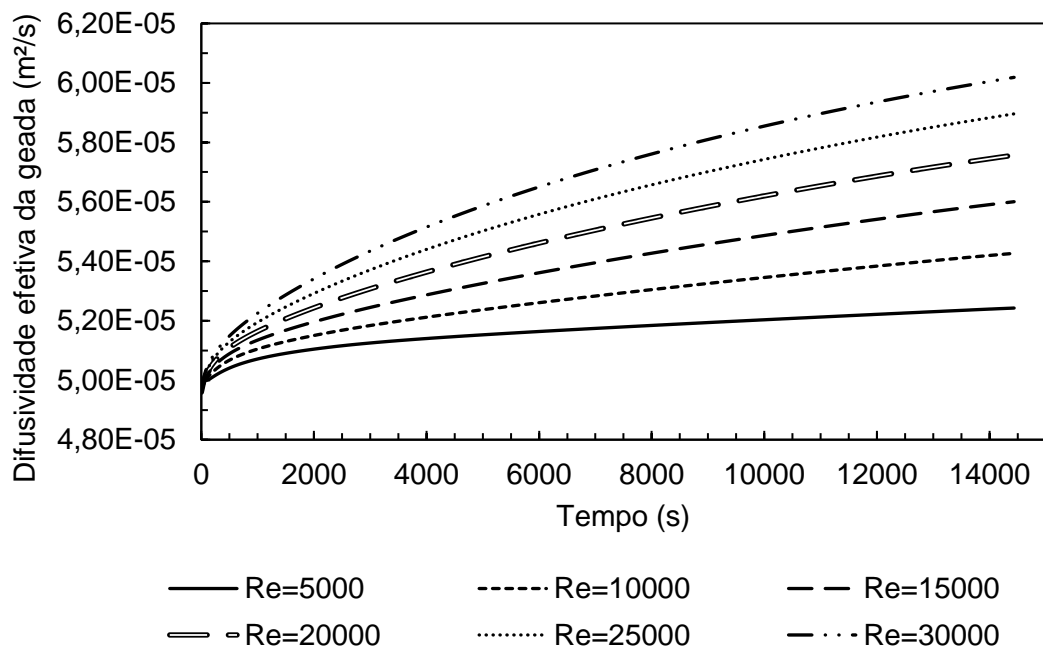
**Figura 5. 25** Influência do número de Reynolds na temperatura da superfície da geada



**Figura 5. 26** Influência do número de Reynolds na fração volumétrica de gelo na geada



**Figura 5. 27** Influência do número de Reynolds na condutividade térmica da geada



**Figura 5. 28** Influência do número de Reynolds na difusividade efetiva da geada

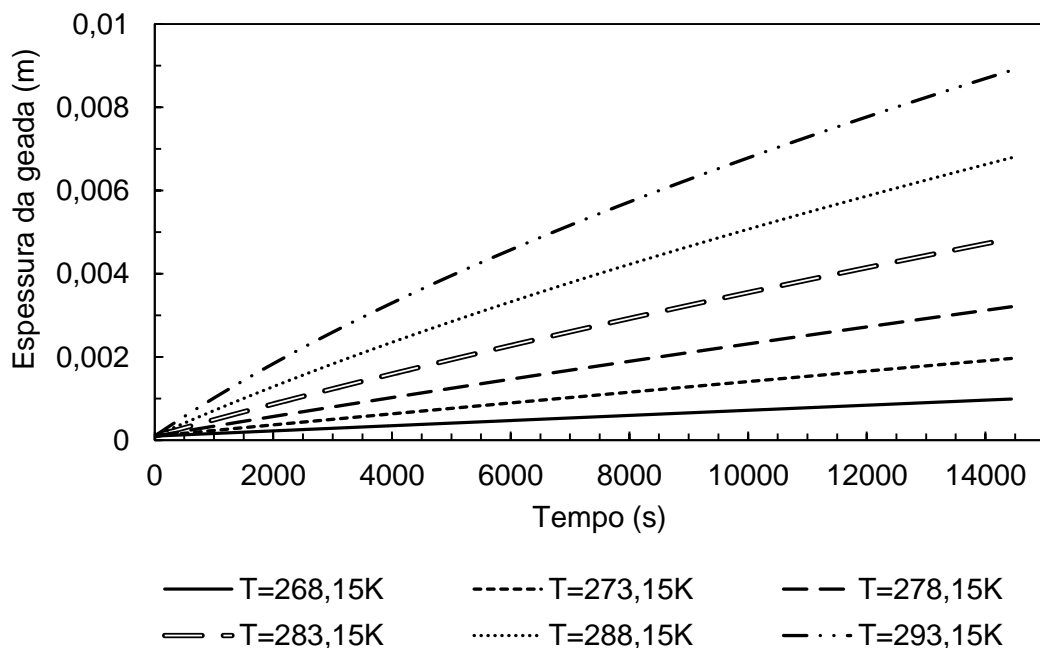
## 5.7 INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA DO AR INSUFLADO

Para a análise da influência da temperatura do ar insuflado na geada utilizaram-se as seguintes condições:  $T_p=263,15\text{ K}$ ,  $Re=7500$ ,  $UR=80\%$ ,  $t=14400\text{ s}$ ,  $D_h=0,245\text{ m}$ ,  $F_\mu=7$ , e serão mostradas na Figura 5. 29 à Figura 5. 35.

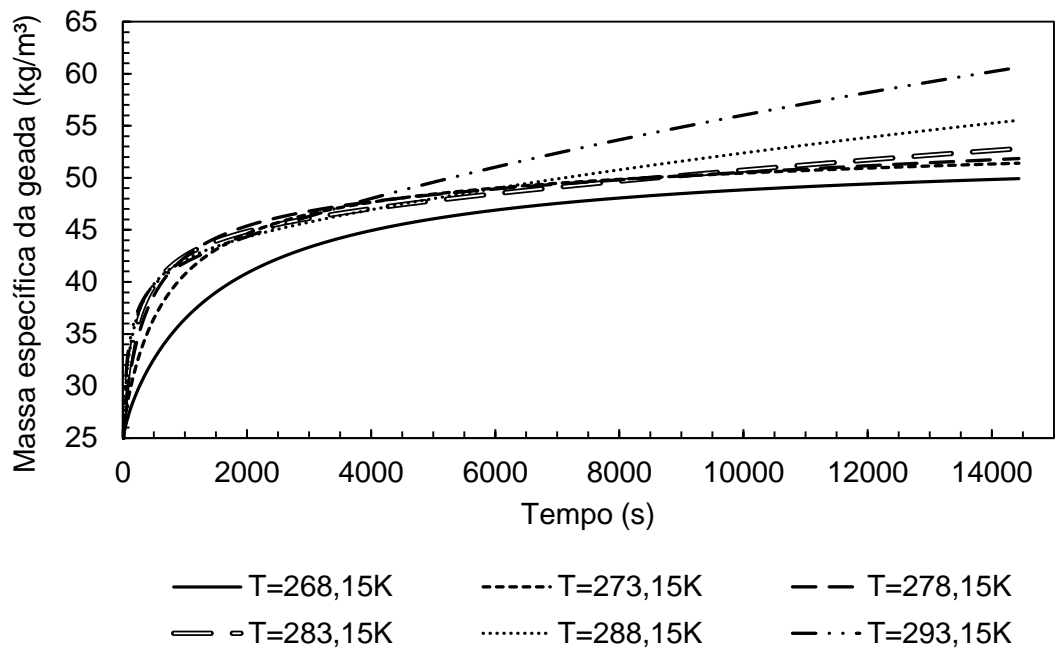
Nas Figura 5. 29 e Figura 5. 30 é possível observar a mudança da temperatura do ar afetando a geada no crescimento e na densificação da geada. Menores temperaturas do ar geram geadas menores e menos densas. E temperaturas do ar maiores, geram geadas maiores e mais densas.

Ao contrário do número de Reynolds, a temperatura do ar apresenta um aumento proporcional do crescimento da geada à medida que aumenta a temperatura do ar enquanto que para a massa específica da geada há um aumento muito maior para temperaturas maiores.

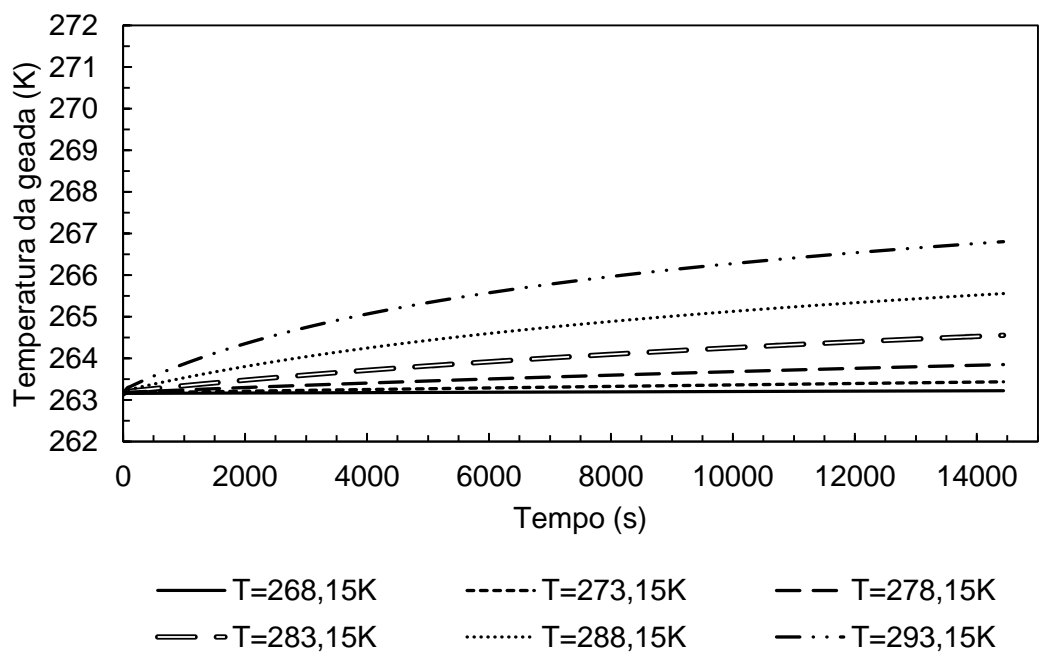
Isso também é observado por Sanchez e Brum (2004) e pode ser explicado devido à relação direta entre a temperatura do ar e o fluxo de vapor difundido na geada, responsável por incrementar a espessura e a massa específica da geada.



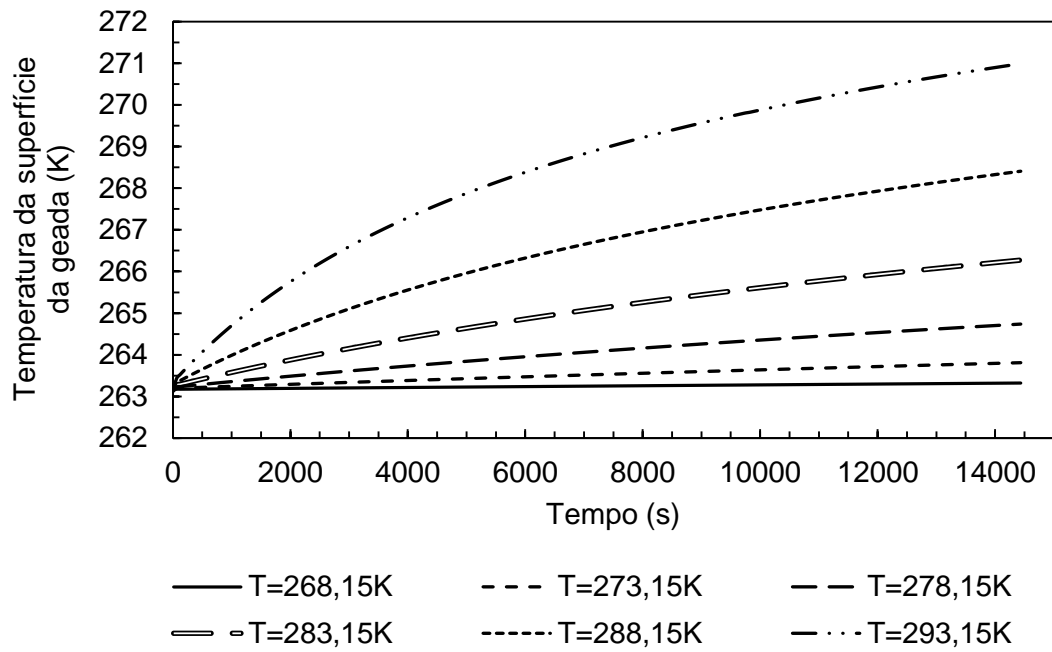
**Figura 5. 29** Influência da temperatura do ar na espessura da geada



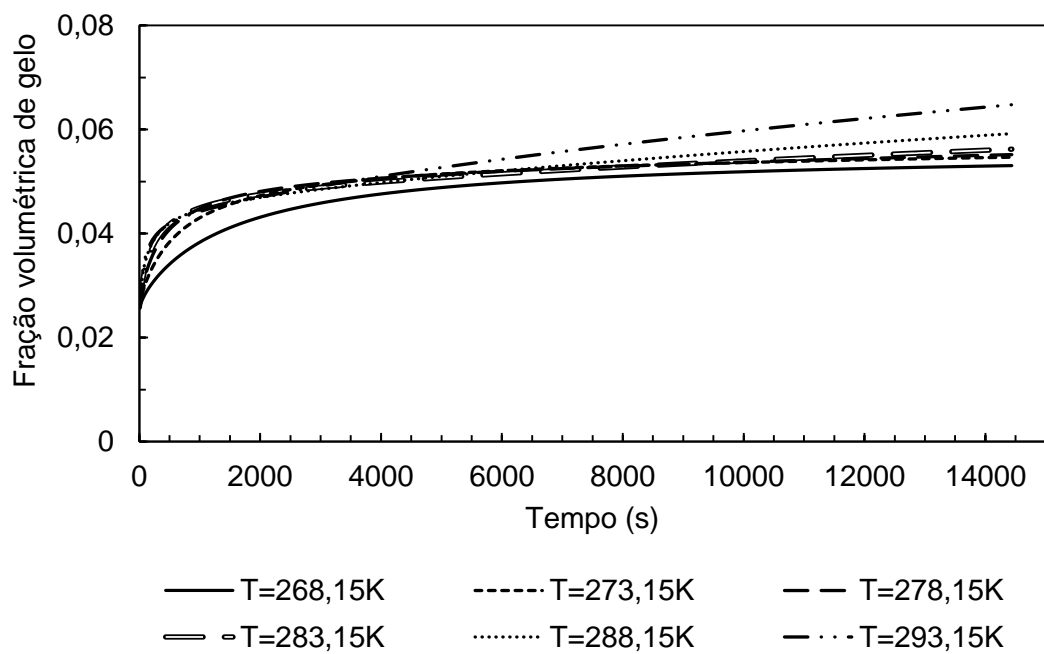
**Figura 5. 30** Influência da temperatura do ar na massa específica da geada



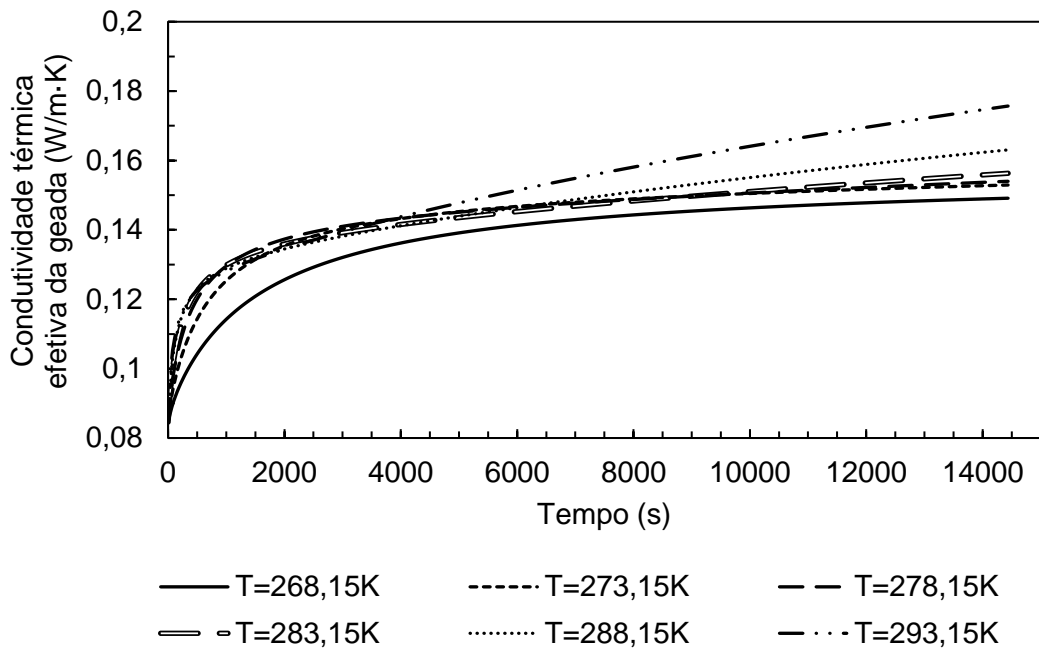
**Figura 5. 31** Influência da temperatura do ar na temperatura da geada



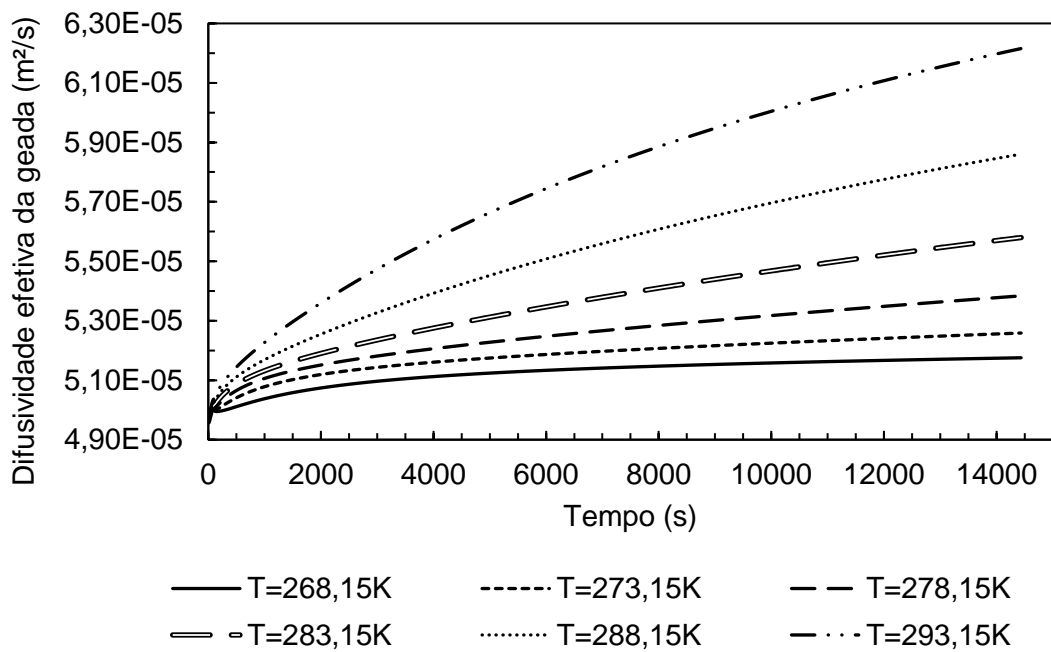
**Figura 5. 32** Influência da temperatura do ar na temperatura da superfície da geada



**Figura 5. 33** Influência da temperatura do ar na fração volumétrica de gelo na geada



**Figura 5. 34** Influência da temperatura do ar na condutividade térmica da geada



**Figura 5. 35** Influência da temperatura do ar na difusividade efetiva da geada



Na Figura 5. 31 e na Figura 5. 32 é possível verificar que em menores temperaturas do ar, a temperatura da superfície e da camada da geada se mantém menor, e aproximadamente constante, e para maiores temperaturas do ar, a temperatura da geada tem aumentos maiores. O mesmo acontece para a condutividade térmica efetiva da geada (Figura 5. 34) e difusividade efetiva da geada (Figura 5. 35).

É possível observar também, que a condutividade térmica e massa específica seguem o mesmo padrão de comportamento, que também é o mesmo da fração volumétrica de gelo na geada (Figura 5. 33). Isso porque tanto a condutividade térmica, quanto a massa específica, são funções da fração volumétrica de gelo e de ar, dentro da camada da geada.

Assim como o número de Reynolds, conclui-se que à medida que se teve um aumento da temperatura do ar, também aumentou-se todas as variáveis em análise.

## 5.8 INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA DA SUPERFÍCIE DA PLACA

Para a análise da influência da temperatura da superfície da placa na geada utilizaram-se as seguintes condições:  $T_{\infty}=283,15$  K,  $Re=7500$ ,  $UR=80\%$ ,  $t=14400$  s,  $D_h=0,245$  m,  $F_{\mu}=7$ , e serão mostradas da Figura 5. 36 à Figura 5. 42.

Pelas Figura 5. 36 e Figura 5. 37, observa-se a grande influência da temperatura da placa no crescimento e densificação da geada. Porém, diferentemente da influência do número de Reynolds e da influência da temperatura do ar, a temperatura da placa influencia essas duas variáveis inversamente. Quanto menor a temperatura da placa, maior será a espessura da geada, e menor será sua massa específica. E quanto maior a temperatura mais densa e menos espessa será a geada. Tso, Cheng e Lai (2006) também observaram que a espessura da geada é maior onde a temperatura da parede é menor.

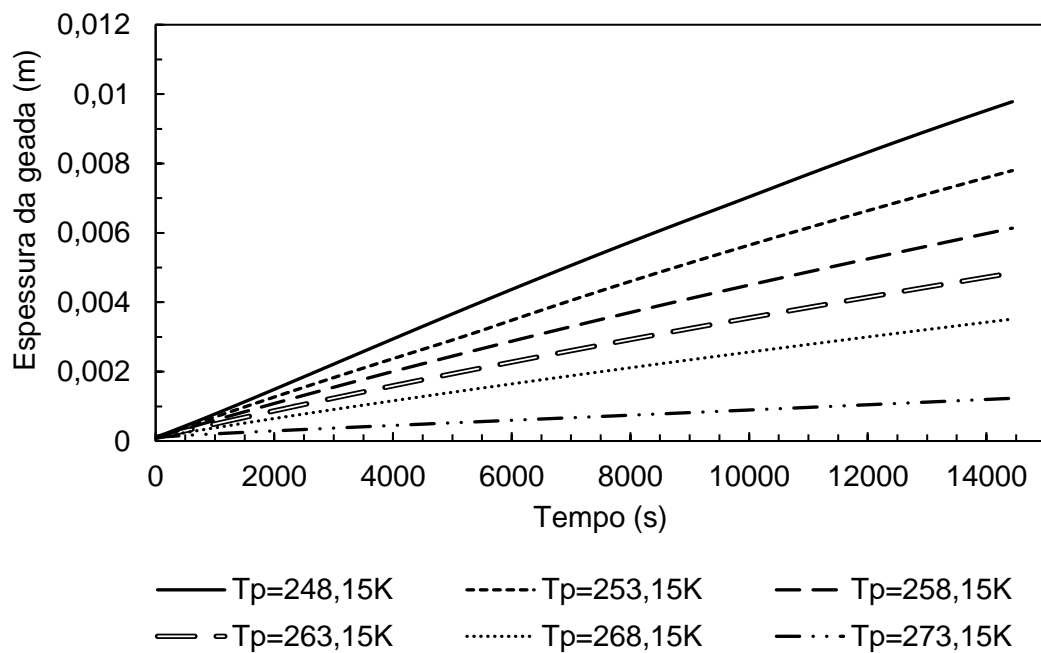
A Figura 5. 38 e a Figura 5. 39 mostram a influência das temperaturas da placa na temperatura da camada da geada e na superfície da geada, respectivamente. Observa-se que nas temperaturas mais altas as temperaturas se mantiveram aproximadamente constantes e para as temperaturas menores há um aumento da temperatura com o tempo.

Também se observa o aumento discrepante da massa específica da geada para a temperatura da placa igual a 273,15 K, isso porque se deve a uma temperatura de ponto triplo, e há provavelmente a presença de água líquida condensando, não sendo somente ar dessublimando como seria em todos os outros casos.

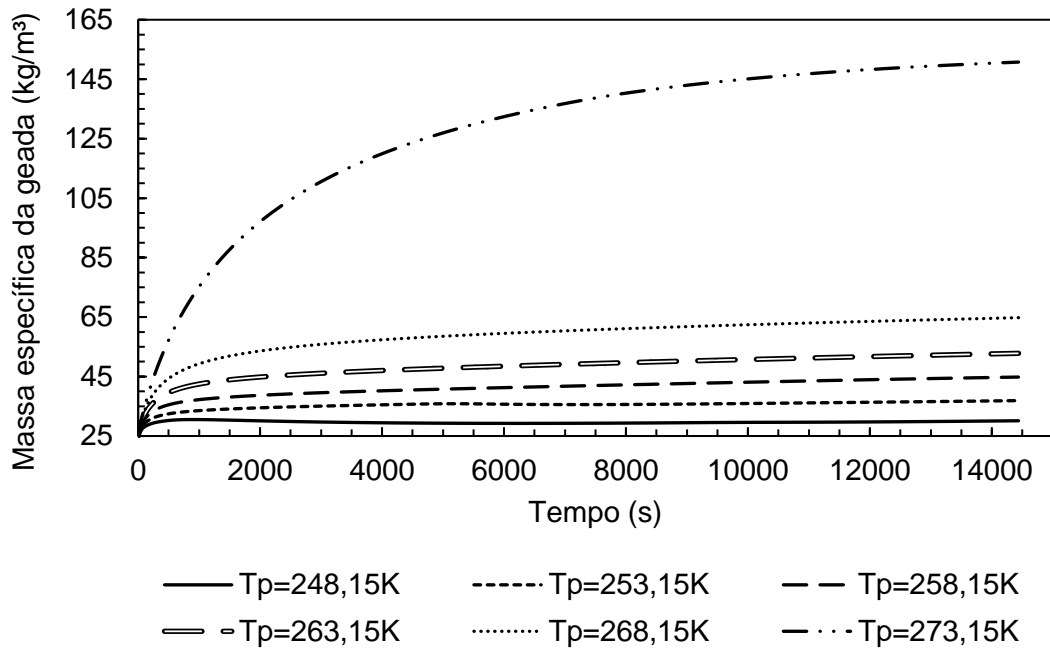
Essas observações podem ser feitas também na Figura 5. 40, onde se tem a fração volumétrica de gelo, e o mesmo padrão é observado para a condutividade térmica da geada (Figura 5. 41), onde, para menores temperaturas, a condutividade térmica se manteve aproximadamente constante.

Do mesmo modo se comporta a difusividade efetiva da geada (Figura 5. 42), e para a temperatura mais baixa, se observou o crescimento e depois uma leve queda da difusividade, porém quase insignificante, nos tempos iniciais.

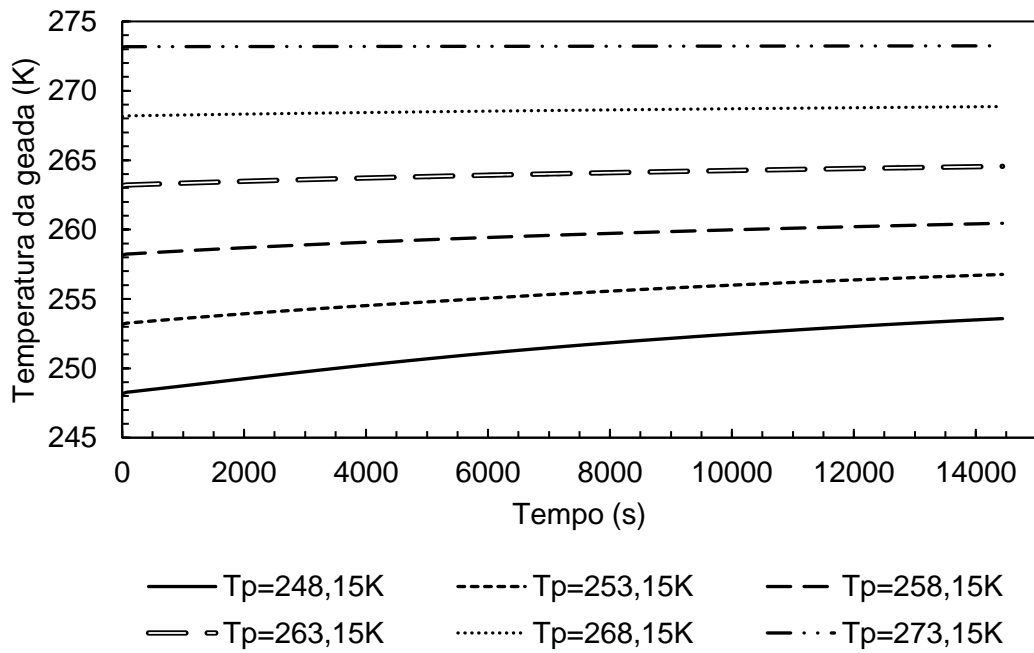
Portanto, a temperatura da placa tem grande influencia no crescimento da geada quanto menor for essa temperatura, o restante das variáveis, por sua vez, cresce à medida que a temperatura da placa também crescer.



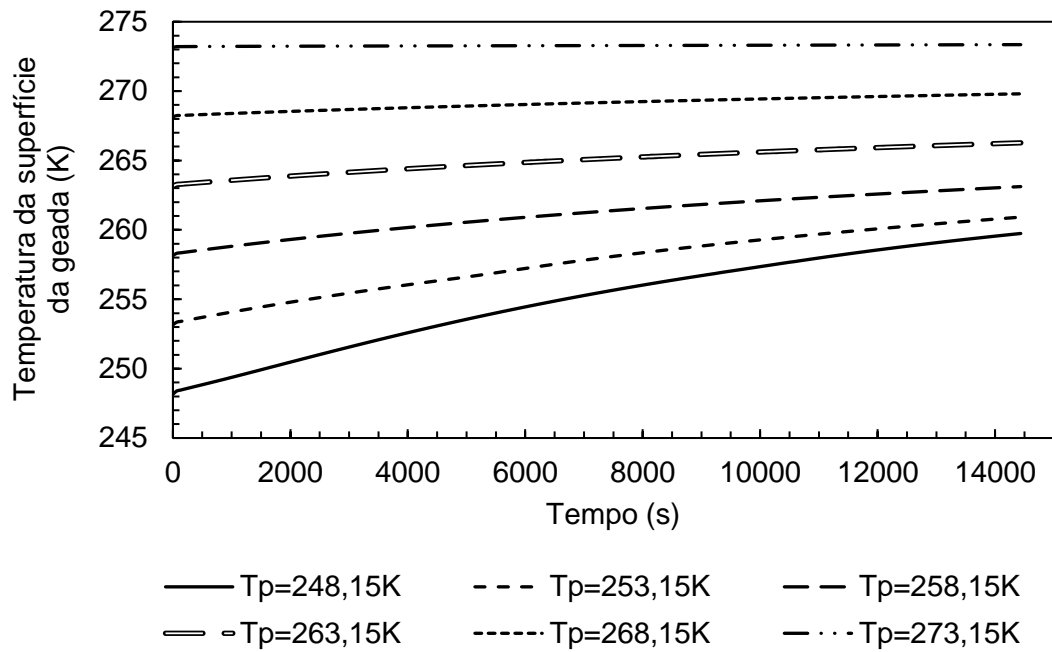
**Figura 5. 36** Influência da temperatura da placa na espessura da geada



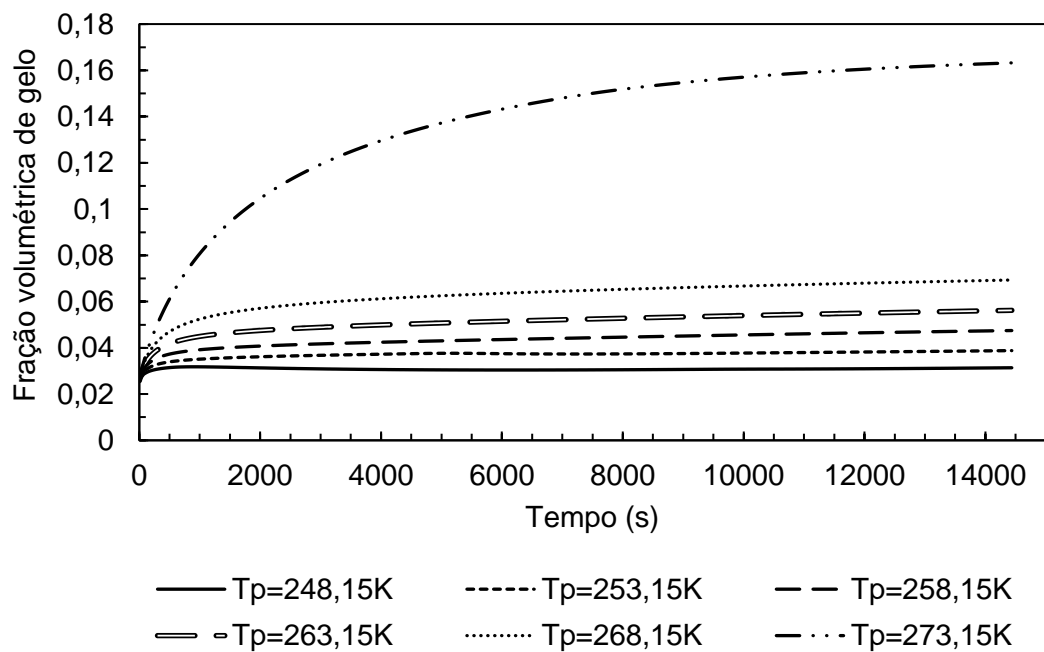
**Figura 5. 37** Influência da temperatura da placa na massa específica da geada



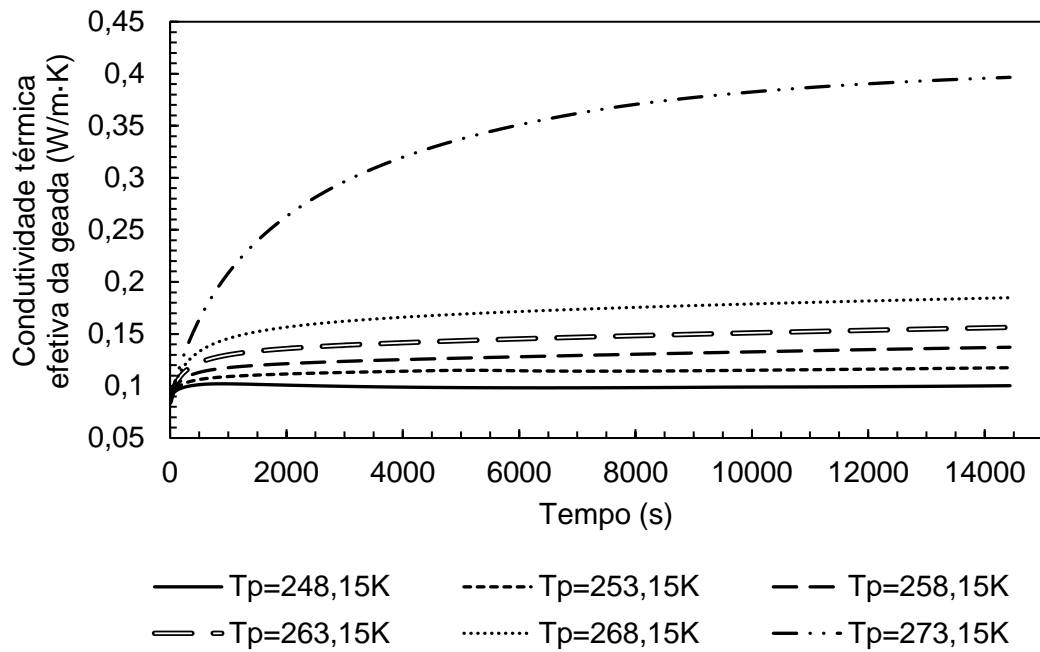
**Figura 5. 38** Influência da temperatura da placa na temperatura da geada



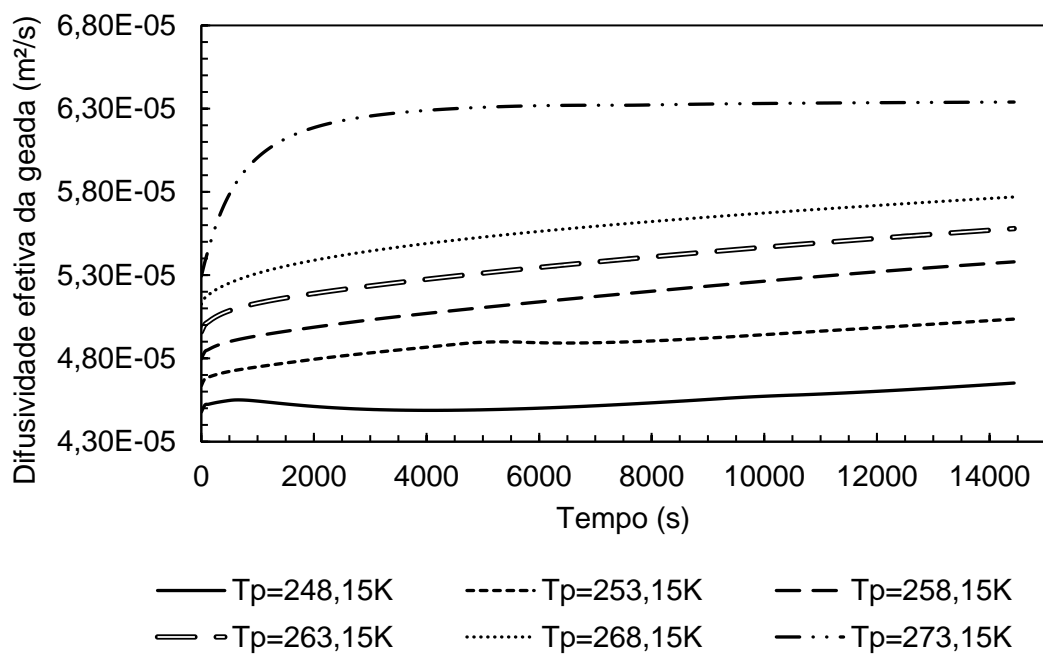
**Figura 5. 39** Influência da temperatura da placa na temperatura da superfície da geada



**Figura 5. 40** Influência da temperatura da placa na fração volumétrica de gelo da geada



**Figura 5. 41** Influência da temperatura da placa na condutividade térmica da geada



**Figura 5. 42** Influência da temperatura da placa na difusividade efetiva da geada

## 5.9 INFLUÊNCIA DA UMIDADE RELATIVA DO AR

Para a análise da influência da umidade relativa do ar na geada utilizaram-se as seguintes condições:  $T_{\infty}=278,15$  K,  $T_p=263,15$  K,  $Re=7500$ ,  $t=14400$  s,  $Dh=0,245$  m,  $F_{\mu}=7$ , e serão mostradas da Figura 5. 43 à Figura 5. 49.

A Figura 5. 43 e a Figura 5. 44 mostram a influência da umidade relativa no crescimento e densificação da geada, onde é possível verificar que umidades relativas mais altas resultam em geadas com menores espessuras porém mais densas, enquanto que menores umidades relativas, produzem geadas menos densas e de maiores espessuras.

Assim como a temperatura da placa, a umidade relativa tem influência inversamente proporcional para o crescimento da camada de geada em relação à sua densificação.

Observa-se crescimento proporcional à medida que diminui a umidade relativa, e o aumento da massa específica é mais significativo medida que aumenta a umidade relativa.

Assim como o crescimento da geada, as temperaturas da camada da geada (Figura 5. 45) e da superfície da geada (Figura 5. 46) aumentam quanto menores forem as umidades relativas. As figuras estão na mesma escala, e é possível verificar que as temperaturas da superfície em relação à camada da geada variam entre um e dois graus kelvin.

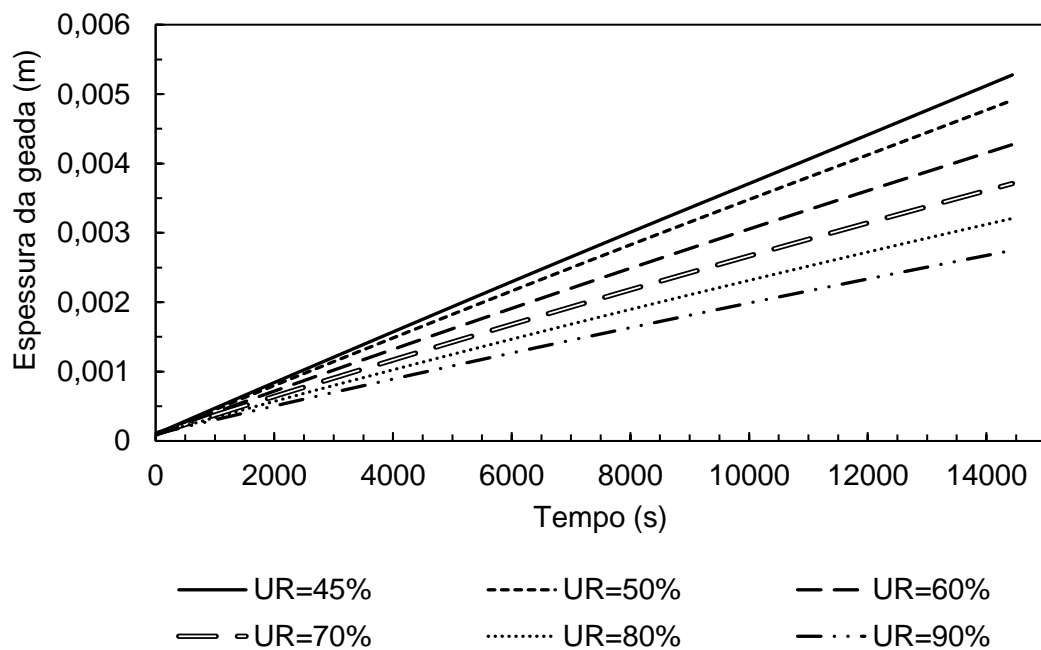
Como a geada fica mais densa, ela não necessariamente precisa crescer tanto, e quando cresce mais, não necessariamente ficará mais densa. O mesmo é observado com relação à influência do fator de resistência à difusão, onde, tanto a umidade relativa quanto o fator de resistência à difusão tiveram o mesmo comportamento em menores valores e maiores valores (de  $F_{\mu}$  e de UR).

No entanto, Lee, Kim e Lee (1997) observaram que com o aumento da umidade relativa, aumentou-se a transferência de massa, obtendo-se uma camada de geada mais espessa. A temperatura da superfície da geada também aumentou com a umidade relativa do ar, devido ao incremento da resistência térmica condutiva.

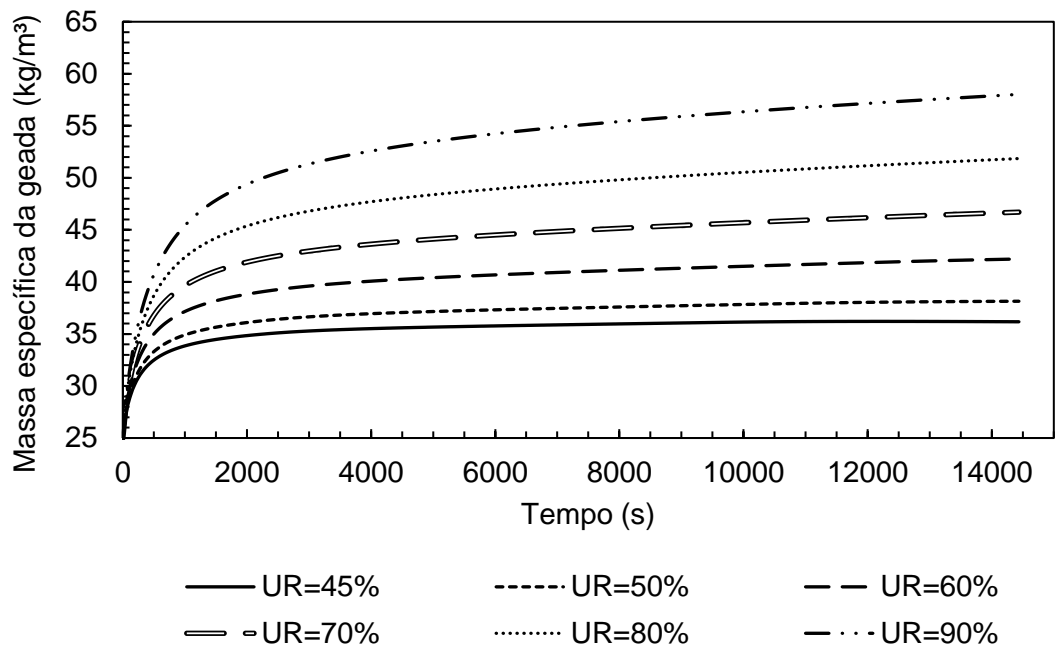
As Figura 5. 47, Figura 5. 48 e Figura 5. 49 mostram o aumento da fração volumétrica de gelo, condutividade térmica e difusividade efetiva com o tempo,

respectivamente, e é possível verificar seus aumentos à medida que a umidade relativa aumenta.

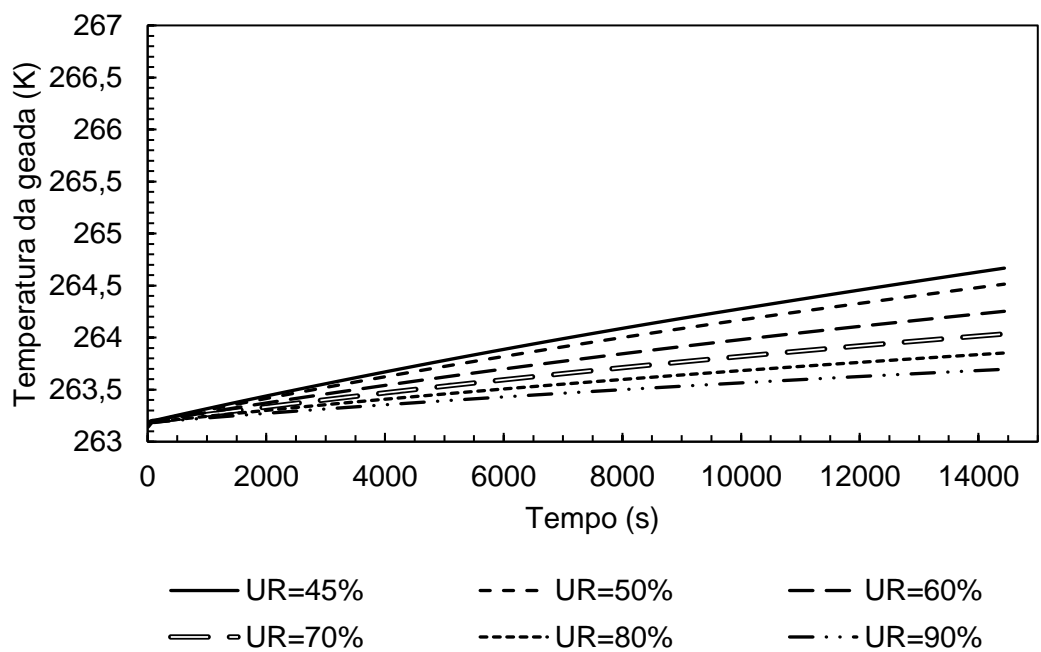
Portanto, a umidade relativa do ar, tem influência contrária nas temperaturas e crescimento da geada, onde à medida que se diminui a umidade relativa, aumentam os valores dessas propriedades, e para o restante das variáveis, massa específica, fração volumétrica de gelo, condutividade e difusividade, à medida que se aumenta a umidade relativa, aumentam-se as propriedades.



**Figura 5. 43** Influência da umidade relativa na espessura da geada

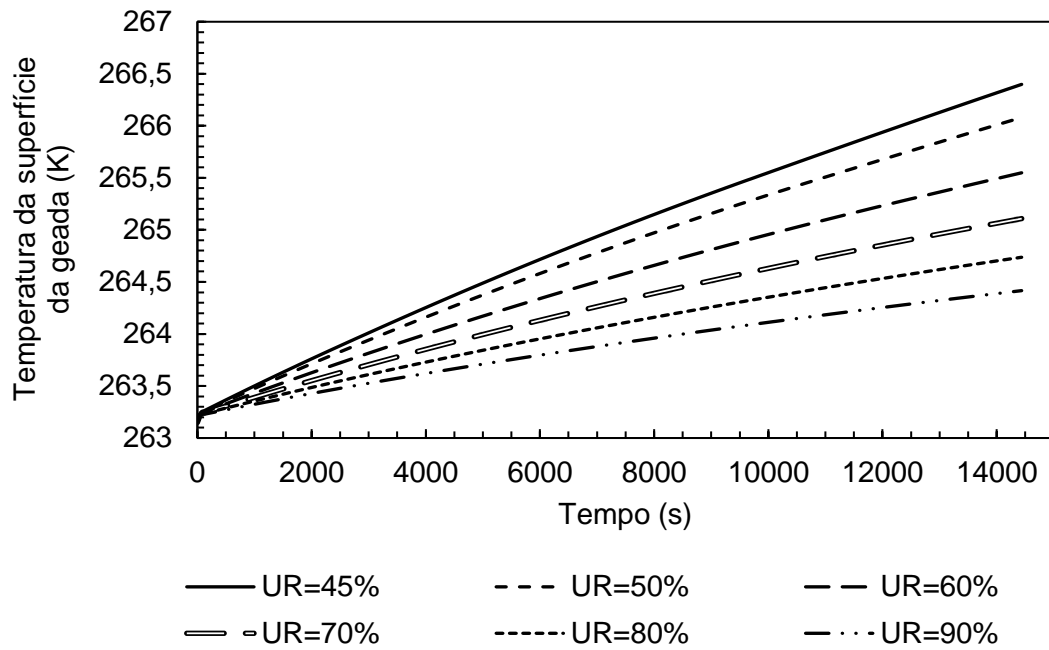


**Figura 5. 44** Influência da umidade relativa na massa específica da geada

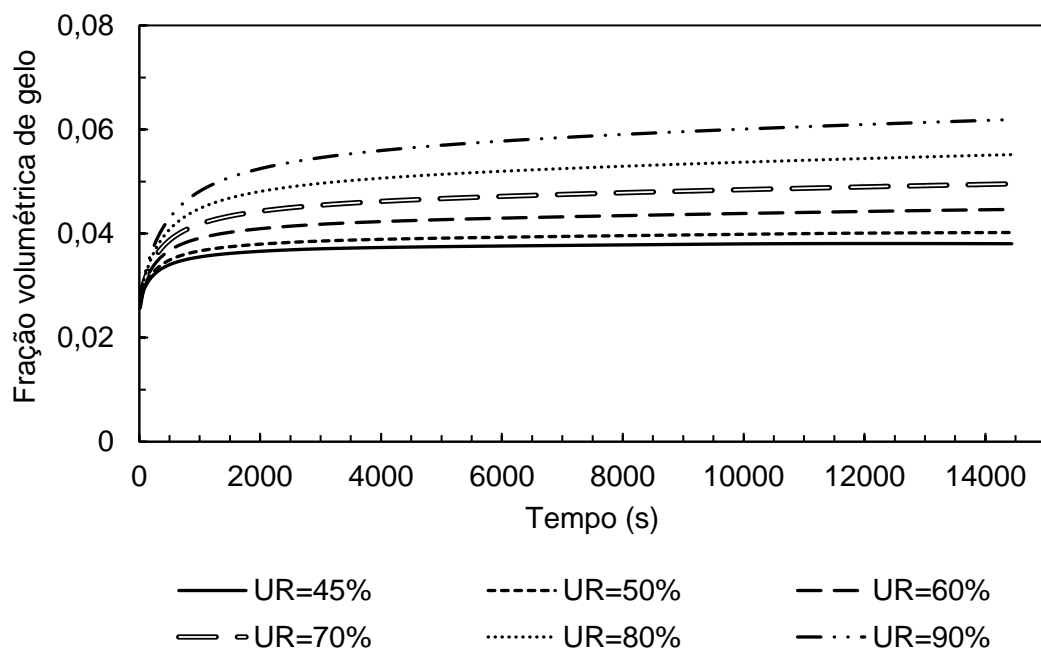


**Figura 5. 45** Influência da umidade relativa na temperatura da geada

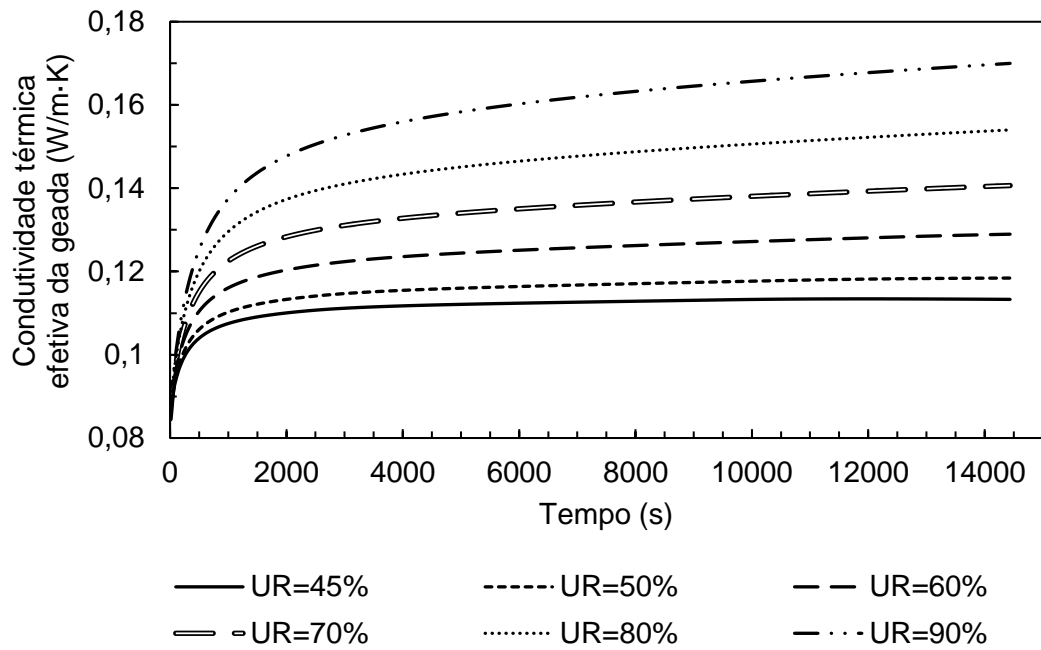




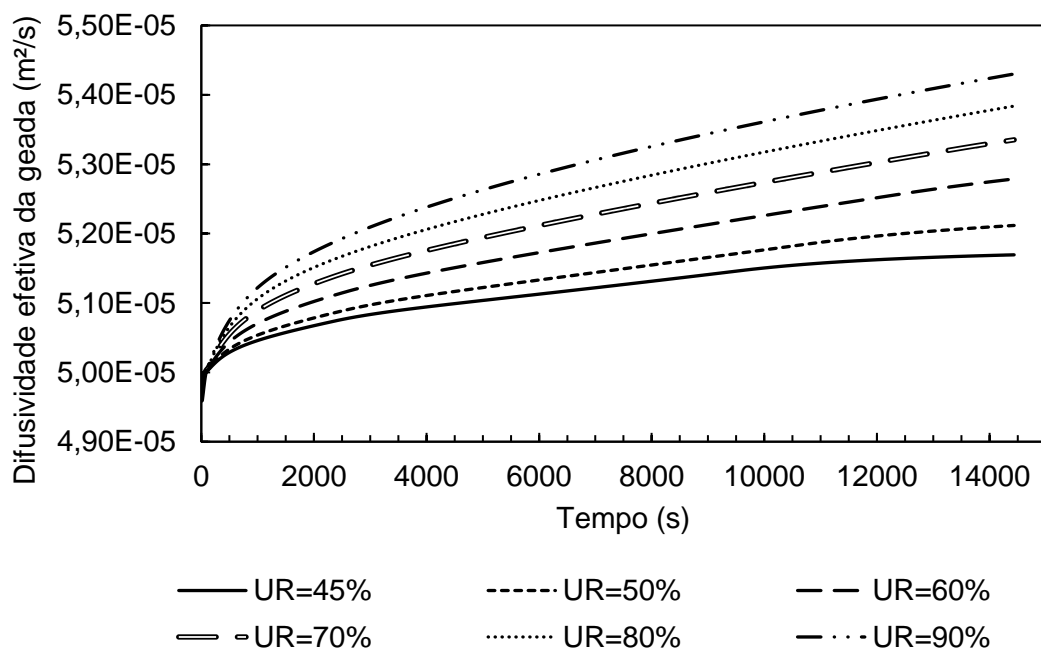
**Figura 5. 46** Influência da umidade relativa na temperatura da superfície da geada



**Figura 5. 47** Influência da umidade relativa na fração volumétrica de gelo na geada



**Figura 5. 48** Influência da umidade relativa na condutividade térmica da geada



**Figura 5. 49** Influência da umidade relativa na difusividade efetiva da geada

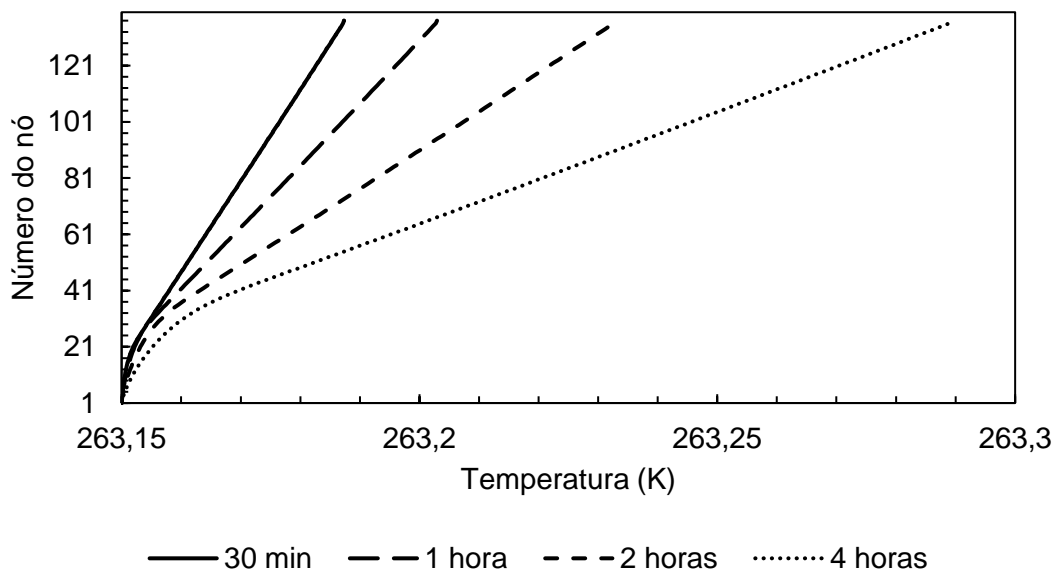
## 5.10 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO POR VOLUME

Para a análise do comportamento da temperatura e da massa específica da geada por volume utilizaram-se as condições a seguir (Figura 5. 50 à Figura 5. 57):

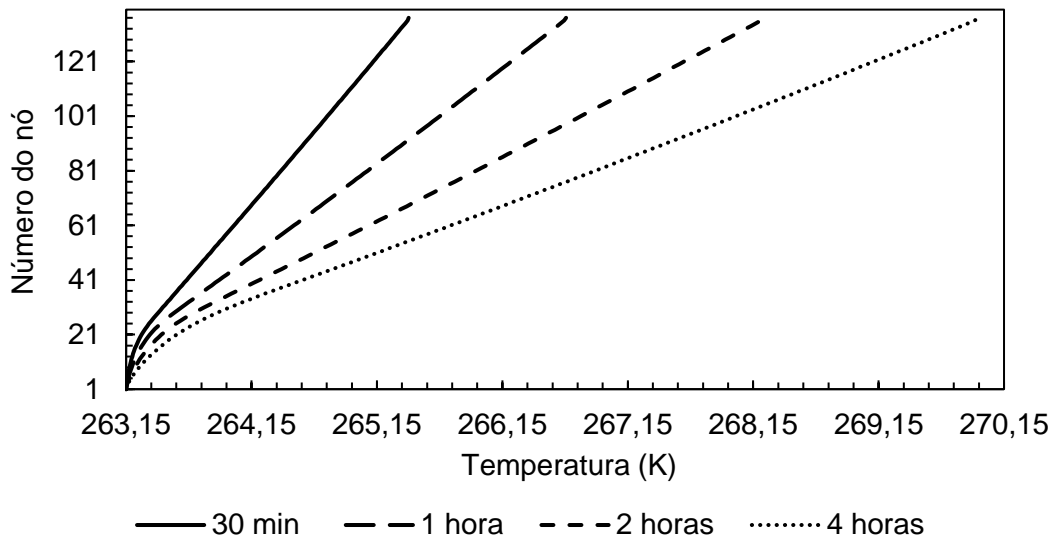
- Caso 1:  $T_{\infty}=278,15$  K,  $T_p=263,15$  K,  $Re=7500$ ,  $v_{\infty}=2,4$ ms/,  $UR=80\%$ ,  $t=14400$  s,  $F\mu=7$
- Caso 2:  $T_{\infty}=293,15$  K,  $T_p=263,15$  K,  $Re=7500$ ,  $v_{\infty}=2,4$ ms/,  $UR=80\%$ ,  $t=14400$  s,  $F\mu=7$
- Caso 3:  $T_{\infty}=283,15$  K,  $T_p=248,15$  K,  $Re=7500$ ,  $v_{\infty}=2,4$ ms/,  $UR=80\%$ ,  $t=14400$  s,  $F\mu=7$
- Caso 4:  $T_{\infty}=283,15$  K,  $T_p=268,15$  K,  $Re=7500$ ,  $v_{\infty}=2,4$ ms/,  $UR=80\%$ ,  $t=14400$  s,  $F\mu=7$

Do caso 1 para o caso 2, foi mudada a temperatura do ar insuflado, mantendo-se todas as outras condições iguais. E do caso 3 para o caso 4, mudou-se a temperatura da placa, mantendo-se todas as outras condições iguais.

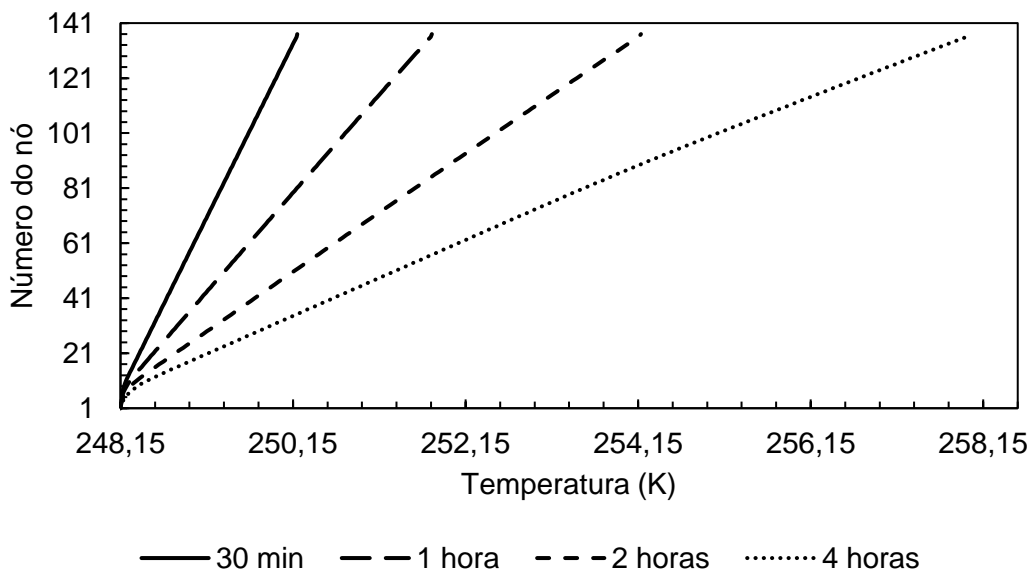
Para todos os casos, o comportamento apresentado crescente nas temperaturas da placa em direção ao ar (Figura 5. 50 à Figura 5. 53), mostrando a evolução em cada volume com o passar do tempo, onde as menores temperaturas se mantiveram próximas à placa, onde se tem as menores temperaturas e maiores próximas à interface com o ar, onde se tem as maiores temperaturas.



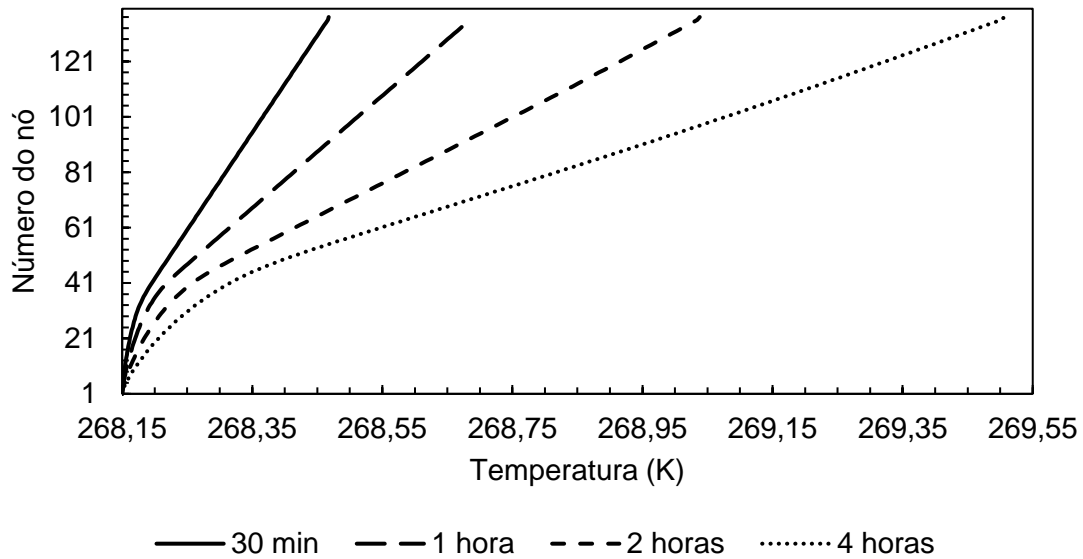
**Figura 5. 50** Comportamento da temperatura da geada em cada volume para o caso 1



**Figura 5. 51** Comportamento da temperatura da geada em cada volume para o caso 2



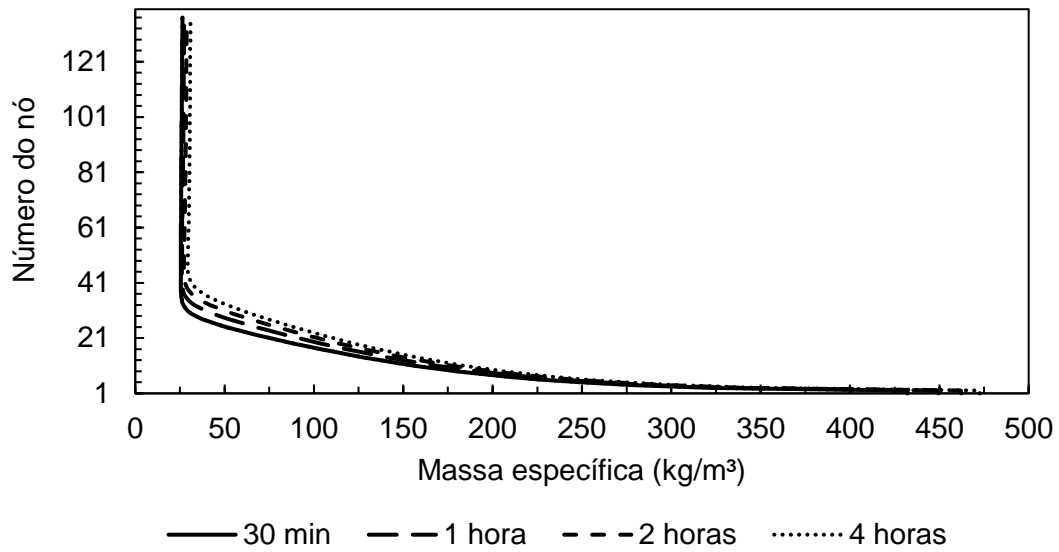
**Figura 5. 52** Comportamento da temperatura da geada em cada volume para o caso 3



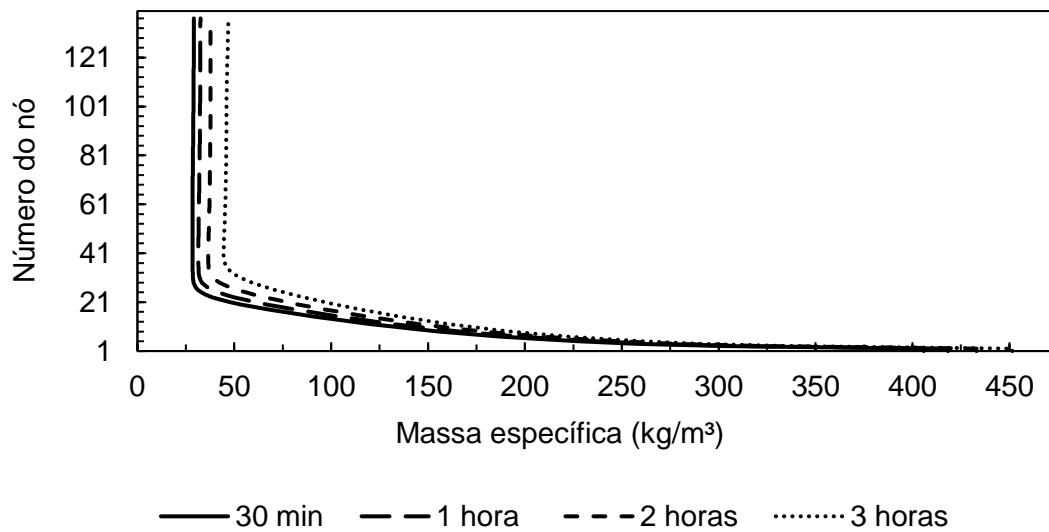
**Figura 5. 53** Comportamento da temperatura da geadas em cada volume para o caso 4

Já a massa específica (Figura 5. 54 à Figura 5. 57) tende a permanecer constante dos volumes finais até os volumes próximos ao nó 40 para os casos 1 e 4 e dos volumes finais até os volumes próximos ao nó 20 para os casos 2 e 3, onde para todos os casos, mostra que a densificação ocorre nos nós próximos à parede, chegando a maiores valores de massa específica para os maiores tempos. Sendo assim, é possível verificar que a densificação ocorre a medida que o vapor d'água é permeado por entre à geadas.

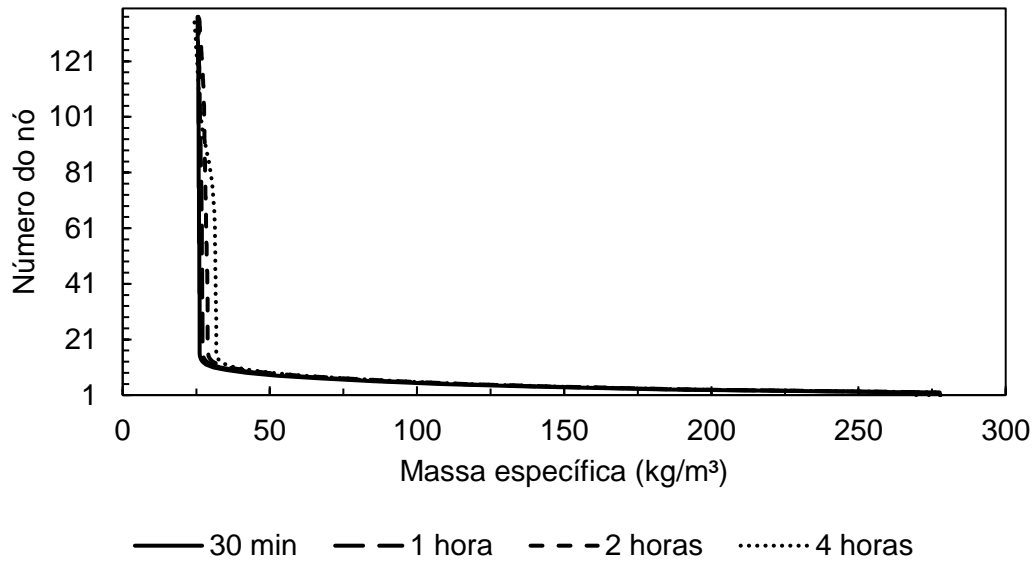
A massa específica da geadas, que apresenta um comportamento oposto à porosidade da geadas, apresenta, portanto, um comportamento coerente e condizente com Luer e Beer (2000) e com Sanchez (2003), que apresentaram uma porosidade maior na superfície da geadas.



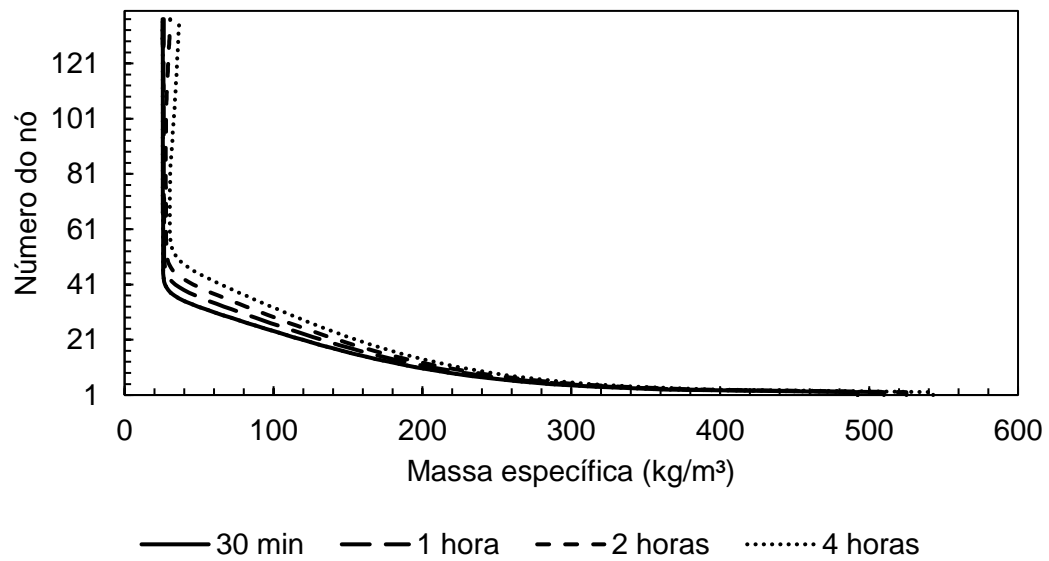
**Figura 5. 54** Comportamento da massa específica da geada em cada volume para o caso 1



**Figura 5. 55** Comportamento da massa específica da geada em cada volume para o caso 2



**Figura 5. 56** Comportamento da massa específica da geada em cada volume para o caso 3



**Figura 5. 57** Comportamento da massa específica da geada em cada volume para o caso 4

## CAPÍTULO VI

### 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

#### 6.1 CONCLUSÕES

Foi apresentado um modelo físico para simular o crescimento e densificação da camada de geada formada por depósito de vapor d'água numa superfície fria, sendo este vapor proveniente do ar úmido quando submetido a um processo de transferência de calor e massa.

A formulação apresentada conduz a um sistema de equações diferenciais parciais cuja não-linearidade decorre da forte dependência da temperatura e da fração volumétrica de gelo e conseqüentemente das propriedades termofísicas. E, portanto, a formulação é resolvida de maneira acoplada.

Por esse motivo, o modelo proposto se mostra completo para prever o crescimento e densificação da geada. Além disso, a estrutura da geada é tratada como meio poroso usando a formulação da média volumétrica local para resolução.

Verificou-se que o número de Nusselt provoca variações significativas nos resultados, e após o estudo com resultados experimentais da literatura fez-se a escolha pela equação de Petukhov e Popov (1963) e fator de atrito de Haaland (1983), a qual considera superfície rugosa, por se tratar de uma equação com erros relativos mais baixos. Além de mostrar melhores aproximações do que outras equações consideradas, a rugosidade ainda não tinha sido considerada anteriormente em outros estudos com geada.

Para a proposta para a equação de difusividade feita por Le Gall, Grillo e Jallut (1997) observou-se que as soluções numéricas foram mais estáveis que a equação proposta por Tao, Besant e Rezkallah (1993).

A equação de Le Gall, Grillo e Jallut (1997) que generaliza o fator de resistência a difusão não foi possível ser empregado devido à dificuldade de aplicação, além das variáveis necessárias estarem em diferentes condições.

Encontrou-se uma grande influência deste fator e a escolha de  $F_{\mu}$  foi de grande importância para a validação da simulação com os dados experimentais. Por isso, foi



apresentado um estudo que evidencia a importância do fator de resistência à difusão mássica.

Assim, foi possível verificar a extrema dependência, do valor assumido, em relação à espessura e massa específica da geada. E para os resultados gerados optou-se por utilizar os valores médios para  $F\mu$ .

Verificou-se que a espessura inicial considerada tem influência a partir de um certo valor e que abaixo disso ( $1 \cdot 10^{-4}$  m), não influencia significativamente na espessura da geada.

O simulador apresentou resultados de acordo com os dados experimentais e permite observar as variações temporais da espessura da geada e suas propriedades, tais como massa específica, condutividade térmica efetiva, fração volumétrica de gelo, coeficiente de difusão de vapor na geada.

E assim, verificou-se que a espessura da geada varia significativamente em baixos e médios números de Reynolds. Para valores elevados de números de Reynolds, a espessura se mostra mais insensível. Quanto maior a temperatura do ar insuflado, maior sua influência no crescimento, em baixas temperaturas do ar, a espessura da geada tem menor sensibilidade. Já a umidade relativa e temperatura da placa apresentam dependência linear no crescimento.

O mesmo comportamento é observado para as temperaturas da camada da geada, superfície da geada e difusividade efetiva da geada.

A massa específica é influenciada mais significativamente em maiores umidades relativas e em maiores temperaturas do ar. Sendo menos sensível quando a temperatura do ar ou umidade relativa são baixas. A mudança no número de Reynolds afeta proporcionalmente a massa específica da geada, quanto maior for, assim como a temperatura da placa. No entanto, caso a temperatura da placa seja igual ou maior do que zero, ela influenciará enormemente na massa específica devido ao aparecimento de água líquida, no entanto, este modelo não visou tratar esse fenômeno.

O mesmo comportamento é observado para a fração volumétrica de gelo na geada e da condutividade térmica efetiva da geada.

Em todos os resultados, com exceção do caso em que a temperatura da superfície considerada é igual a 273,15 K, possivelmente seriam observados o padrão

de formação de geada classificado por de Hayashi et. al (1977), onde não é considerado haver água líquida nem temperatura da superfície igual à temperatura de ponto triplo.

## 6.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Devido à dificuldade de aplicação dos fatores de resistência à difusão tidos na literatura, torna-se necessário usar o modelo em um estudo que desenvolvesse uma equação para  $F_{\mu}$  com o apoio de dados experimentais, que, por exemplo, dependa da umidade relativa do ar, temperatura do ar e temperatura da placa, para que seja de mais fácil aplicação. Ou ainda, que fosse dependente essencialmente de fração volumétrica de gelo e temperatura.

Assim, o ideal seria a comparação experimental para que se pudesse desenvolver uma equação semi-empírica para  $F_{\mu}$ . Porém, caso não estejam disponíveis aparatos experimentais, pode-se usar o simulador para gerar um banco de dados para os valores assumidos por  $F_{\mu}$  para reproduzir os dados experimentais e assim usando as diversas técnicas de inferência estatística produzir uma correlação mais geral para este fator.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AOKI, K., KATAYAMA, K., HAYASHI, Y. A Study on Frost Formation (The Process of Frost Formation involving the Phenomena of Water Permeation and Freezing). *Bulletin of JSME*, v. 26, n. 211, p. 87-93, 1983.

AURACHER, H. Effective Thermal Conductivity of Frost. *Heat and mass transfer in refrigeration*, Stuttgart, p.285-301, 1987.

ASHRAE, Handbook - 2007 *Fundamentals*, The American society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc, Atlanta, G.A., 2007.

ASME *Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer*, The American Society of Mechanical Engineers, ASME V&V 20-2009.

BERGMAN, T. L., Lavine, A.S., Incropera, F.P., Dewitt, D.P. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. 7. ed. Rio de Janeiro: Johnwiley & Sons., 2014.

BRÈQUE, F., NEMER, M. Frosting modeling on a cold flat plate: Comparison of the different assumptions and impacts on frost growth predictions, *International Journal of Refrigeration*, v. 69, p. 340–360, 2016.

BRIAN, P.L.T., REID, R.C., SHAH, Y.T. Frost deposition on cold surfaces, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, v. 9, n.3, p. 375–380, 1970.

CELIK, I. B., GHIA, U., ROACHE, P. J., FREITAS, C. J., COLEMAN, H., RAAD, P. E., 2008, "Procedure for Estimation and Reporting of Uncertainty Due to Discretization in CFD Applications". *Journal of Fluids Engineering*, v.130, n.7, (July), pp.078001-1-078001-4.

CHEN, H; THOMAS, L; BESANT, R W. Measurement of frost characteristics on heat exchanger fins, part II: Data and analysis. *ASHRAE Transactions*, v. 105, n. 2, p. 294-302, 1999.

CHEN, H.; THOMAS, L.; BESANT, R. W., Modeling frost characteristics on heat exchanger fins: Part I: Numerical model. *ASHRAE Transactions*, v. 106, n. 2, p. 357-367, 2000a.

CHEN, H., THOMAS, L.; BESANT, R. W. Modeling frost characteristics on heat exchanger fins: Part II: Model validation and limitations. *ASHRAE Transactions*, v. 106, n. 2, p. 368-376, 2000b.

CHEN, H.; THOMAS, L.; BESANT, R. W. Fan Supplied Heat Exchanger Fin Performance under Frosting Conditions, *International Journal of Refrigeration*, v. 26, n. 1, p.140-149, 2003.

COLEBROOK, C. F. Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws. *Journal of the ICE*, v. 11, n. 4, p. 133-156, 1939.

DIETENBERGER, M. A. Generalized Correlation of the Water Frost Thermal-Conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 26, n. 4, p. 607-619, 1983.

FLETCHER, N.H. *The Chemical Physics of Ice*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1970.

GNIELINSKI, V. New equations for heat and mass transfer in turbulent pipe and channel flow. *International Chemical Engineering*, v. 16, n. 2, p. 359-68, 1976.

GURNEY, C. Surface forces in liquids and solids, *Proc. Phys. Soc*, v. 62, p.639-648, 1949.

HAALAND, S. E. Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. *Journal of Fluids Engineering*, v. 105, p. 89–90, 1983.

HAYASHI, Y., AOKI, A., ADACHI, A., HORI, K. Study of Frost Properties Correlating with Frost Formation Types. *Journal of Heat Transfer*, v. 97, p. 239-245, 1977.

HERMES, C. J. L. An analytical solution to the problem of frost growth and densification on flat surfaces, *International Journal of Heat Mass Transfer*, v. 55, p. 7346–7351, 2012.

HERMES, C. J. L., PIUCCO, R. O., BARBOSA JR., J. R., MELO, C. A study of frost growth and densification on flat surfaces, *Experimental Thermal and Fluid Science*, v. 33, p. 371-379, 2009.

HOBBS, p.v. *Ice Physics*. 1 ed., Clarendon Press, Oxford, 1974.

ISMAIL, K. A. R., SALINAS, C. S. Modeling of frost formation over parallel cold plates, *International Journal of Refrigeration*, v. 22, n. 5, p. 425-441, 1999.

JONES, B. W., PARKER, J.D. Frost Formation With Varying Environmental Parameters. *Journal of Heat Transfer*, v.97, p. 255-259, 1975.

KANDULA, M. Effective thermal conductivity of frost considering mass diffusion and eddy convection. *Special Topics & Reviews in Porous Media — An International Journal*, v. 1, n.4, p. 321-336, 2010.

KOBAYASHI, T. On the habit of snow crystals artificially produced at low pressures. *Journal Met. Soc. Japan*, v.36, p. 193-208, 1958.

LE GALL, R. Experimental study and modelling of frost formation in heat exchangers, Ph.D. thesis (in French). Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, 1994.

LE GALL, R.; GRILLOT, J. M.; JALLUT, C. Modelling of Frost Growth and Densification. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 40, n. 13, p. 3177-3187, 1997.

LEE, K.-S., JHEE, S., YANG, D.-K. Prediction of the frost formation on a cold flat surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, n. 20, p. 3789-3796, 2003.

LEE, K.S., KIM, W.S., LEE, T.H. A One-Dimensional Model for Frost Formation on a Cold Flat Surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 40, n. 18, p. 4359-4365, 1997.

LEE, J., LEE, K-S. The behavior of frost layer growth under conditions favorable for desublimation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 120, p. 259–266, 2018.

LEE, Y.; RO, S. Analysis of the frost growth on a flat plate by simple models of saturation and supersaturation. *Experimental Thermal and Fluid Science*, v. 29, n. 6, p. 685-696, 2005.

LUER, A.; BEER, H. Frost Deposition in a Parallel Plate Channel under Laminar Flow Conditions. *International Journal Thermal Science*, v. 39, pp. 85-95. 2000.

MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. 2.ed. Rio de Janeiro, LTC, 2013.

MAO, Y., BESANT, R., REZKALLAH, K., Measurement and correlations of frost properties with airflow over a flat plate. *ASHRAE Transactions*, v.98, p. 65-78,1992.

MEZEDUR, M. M., KAVIANY, M., MOORE, W. Effect of pore structure, randomness and size on effective mass diffusivity. *AIChE Journal*, v. 48, p. 15-24, 2002

NA, B., WEBB, R. L. A fundamental understanding of factors affecting frost nucleation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, n. 20, p. 3797-3808, 2003.

NA, B.; WEBB, R. L. Mass transfer on and within a frost layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, n. 5, pp.899-911, 2004a.

NA, B.; WEBB, R. L. New model for frost growth rate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.47, n.5, pp. 925-936, 2004b.

NEGRELLI, S., CARDOSO, R.P., HERMES, C.J.L. A finite-volume diffusion-limited aggregation model for predicting the effective thermal conductivity of frost, *International Journal of Heat Mass Transfer*, v. 101,p. 1263-1272, 2016.

O'NEAL, D. L.; TREE, D. R. Measurement of Frost Growth and Density in a Parallel Plate Geometry. *Ashrae Journal-American Society of Heating Refrigerating and Air-Conditioning Engineers*, v. 26, n. 5, p. 56-56, 1984.

O'NEAL, D. L.; TREE, D. R. A review of frost formation in simple geometries. *ASHRAE Transactions*, v. 91, n. 2, pp. 267-281, 1985.

PADHMANABHAN, S.K., FISHER, D.E., CREMASCHI, L., MOALLEM, E. Modeling nonuniform frost growth on a fin-and-tube heat exchanger, *International Journal of Refrigeration*, v. 34, p. 2018–2030, 2011.

PADKI, M. M., SHERIF, S. A., AND NELSON, R. M. A Simple Method For Modeling The Frost Formation Phenomenon in Differents Geometries. *ASHRAE Transactions*, v. 95, n. 2, p. 1127-1137, 1989.

PARISH, H.C.; SEPSY, C.F. A Numerical Analysis of The Frost Formation Under Forced Convection. *ASHRAE Transactions*, v. 78, n. 2231, p. 236-251, 1972.

PATANKAR, S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor & Francis. Hemisphere Publishing Corporation, New York. 1980.

PERRY R. H., *Chemical Engineer's Handbook*, McGraw-Hill, 1994.

PETUKHOV, B. S. POPOV, V. N. Teplofiz. Vysok. Temperatur. *High Temperature Heat Physics*, p. 69-83, v.1, n. 1, 1963.

PETUKHOV, B. S. *Heat Transfer and Friction in Turbulent Pipe Flow with Variable Physical Properties*. High Temperature Institute. Academy of Science of the USSR, p. 503-564. Moscow. USSR, 1970

PIUCCO, R.O., HERMES, C.J.L., MELO, C., BARBOSA JR., J.R. A study of frost nucleation on flat surfaces, *Experimental Thermal and Fluid Science*, v. 32 pp. 1710–1715, 2008.

SAHIN, A. Z., An experimental study on the initiation and growth of frost formation on a horizontal plate. *Experimental Heat Transfer: A Journal of Thermal Energy Generation, Transport, Storage, and Conversion*, v. 7, n. 2, p. 101-119, 1994

SAMI, S. M., DUONG, T. Mass and Heat Transfer During Frost Growth. *ASHRAE Transactions*, v. 95, n. 1, pp 158-165, 1989.

SÁNCHEZ, Jorge Alex Gatica. *Um Modelo para Crescimento da Geada*. 97 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

SÁNCHEZ, J. A. G., BRUM, N. C. L., Formação de Geada sobre superfícies. In: Braz. Soc. of Mechanical Sciences and Engineering - ABCM. *Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering- ENCIT*. Rio de Janeiro, 2004.

SANDERS, C. T. *The influence of frost formation and defrosting on the performance of air coolers*, PhD thesis, Technische Hogeschool, Delft (Netherlands), 1974.

TAO, Y. X.; BESANT, R. W.; MAO, Y. Characteristics of frost growth on a at plate during the early growth period, *ASHRAE Transactions*, v. 99, n.1, pp. 746-753, 1993.

TAO, Y. X.; BESANT, R. W.; REZKALLAH, K. S. A Mathematical Model for Predicting the Densification and Growth of Frost on a Flat Plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 36, n. 2, p. 353-363, 1993.

TSO, C. P., CHENG, Y. C., LAI, A. C. K. An improved model for predicting performance of finned tube heat exchanger under frosting condition, with frost thickness variation along fin. *Applied Thermal Engineering*, v. 26, n. 1, p. 111-120, 2006.

THOMAS, L., CHEN, H., BESANT, R. W. Measurement of frost characteristics on heat exchanger fins part I: Test facility and instrumentation, *ASHRAE Transactions*, v. 105, n. 2, pp. 283-293, 1999.

WANG, W. GUO, Q. C., LU, W. P., FENG, Y. C., NA, W., A generalized simple model for predicting frost growth on cold flat plate, *International Journal of Refrigeration*, v. 35, p. 475–486, 2012

WHITAKER S. Simultaneous Heat, Mass and Momentum Transfer in Porous Media: *A Theory of Drying. Advances in Heat Transfer* (Edited by J.P. Hartnett and T. F. Irvine Jr.) vol 13, pp. 119-203. Academic Press, New York, 1977.

YONKO, J. D.; SEPSY, C. F. An investigation of the thermal conductivity of frost while forming on a horizontal plate. *ASHRAE Transactions*, v. 73, n. 2, pp. 2043-2053, 1967.

YOSIDA, Z., Physical Studies on Deposited Snow. I. *Thermal Properties, Applied Physics Section*, Institute of Low Temperatures Science, 1955

YUN, R., KIM, Y., MIN, M. Modeling of frost growth and frost properties with airflow over a flat plate, *International Journal of Refrigeration*, v. 25, n. 3, p. 362–371, 2002.