

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
FABIO JOSE SCHOR

PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUÍDO DE JATOS, INCLUINDO EFEITOS DE
TEMPERATURA, A PARTIR DA MEDIÇÃO A 90°

RIO DE JANEIRO
2018



PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUÍDO DE JATOS, INCLUINDO EFEITOS DE
TEMPERATURA, A PARTIR DA MEDIÇÃO A 90°

Fábio José Schor

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Ricardo Eduardo Musafir

Rio de Janeiro
Setembro de 2018

PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUÍDO DE JATOS, INCLUINDO EFEITOS DE
TEMPERATURA, A PARTIR DA MEDIÇÃO A 90°

Fábio José Schor

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Ricardo Eduardo Musafir, D.Sc.

Prof. Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto, Dr.Ing.

Prof. Júlio Apolinário Cordioli, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2018

Schor, Fabio José

Desenvolvimento e Análise de um Modelo para Previsão do Espectro do Ruído de Jatos, Incluindo Efeitos de Temperatura / Fabio Jose Schor. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

IX, 101 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Ricardo Eduardo Musafir

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 90-93.

1. Ruído de Jato. 2. Aeroacústica. 3. Jato Quente. I. Musafir, Ricardo Eduardo II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

A Doris, minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço

Ao professor Ricardo E. Musafir, pela excelente orientação e paciência.

À minha mãe Doris Schor, pelo apoio e por me proporcionar condições de concluir o mestrado.

À Isalira P. R. Ramos, pela motivação e ajuda durante o mestrado.

Agradeço as agências de fomento FAPERJ e CNPQ.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUÍDO DE JATOS, INCLUINDO EFEITOS DE
TEMPERATURA, A PARTIR DA MEDIÇÃO A 90°

Fabio José Schor

Setembro/2018

Orientador: Ricardo Eduardo Musafir

Programa: Engenharia Mecânica

É desenvolvido um modelo para, a partir do espectro de um jato frio, a 90°, obter-se o espectro correspondente a um jato aquecido ou frio, a qualquer ângulo. O modelo utiliza a analogia de Lilley – que considera a propagação linear em um escoamento paralelo e trata os termos não lineares como fontes –, que inclui explicitamente os efeitos da interação da fonte com o escoamento, e emprega soluções analíticas existentes na literatura para o caso de escoamento uniforme nos limites de alta e baixa frequências. A solução proposta é obtida a partir de uma representação geral para a solução da equação de Lilley, que explicita os gradientes de velocidade e de temperatura, e da utilização combinada das soluções assintóticas. O modelo depende da temperatura, diâmetro do jato, do número de Mach e da frequência. Mostra-se que além dos termos correspondentes ao jato frio, o jato quente envolve novos componentes com eficiência dipolar e quadripolar, que são discutidos. A comparação dos resultados previstos pelo modelo com dados experimentais mostra que o modelo funcionou razoavelmente bem para ângulos fora do cone de silêncio. O modelo permitiu evidenciar a importância dos dipolos para números de Mach pequenos nas baixas frequências e a redução do ruído nas altas frequências devido aos efeitos da temperatura para alguns casos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

PREDICTION OF JET NOISE SPECTRUM, INCLUDING TEMPERATURE
EFFECTS, FROM MEASUREMENTS AT 90°

Fabio José Schor

September/2018

Advisors: Ricardo Eduardo Musafir.

Department: Mechanical Engineering

A model is developed to obtain, from the spectrum of a cold jet at 90°, the corresponding spectrum for a heated or cold jet at any angle. The model uses the Lilley analogy – which considers a linearized wave equation for a parallel flow and regards the nonlinear terms as sources –, which includes explicitly flow-source interaction effects, and employs analytical solutions available in the literature for the case of uniform flow in the limits of high and low frequencies. The proposed solution is obtained from a general representation for the solution of the Lilley equation, which shows explicitly the velocity and temperature gradients, and the combined use of the asymptotic solutions. The model depends on the temperature, jet diameter, Mach number and frequency. It is shown that in addition to the terms corresponding to the cold jet, the hot jet involves new components with dipole and quadrupolar efficiency, which are discussed. The comparison of the results predicted by the model with experimental data showed that the model performed reasonably well for angles outside the cone of silence. It also evidenced the importance of dipoles for small Mach numbers at low frequencies and the reduction of noise at high frequencies due to the effects of temperature for some cases.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	RUIDO DE JATO	5
2.1	RADIAÇÃO DO SOM	5
2.2	O PROBLEMA	8
2.3	A PRIMEIRA ANALOGIA.....	9
2.3.1	Lei da Oitava Potência	12
2.4	EFEITO DA TEMPERATURA NO RUIDO DO JATO	14
2.5	A INFLUÊNCIA DO ESCOAMENTO NO RUIDO DO JATO	15
2.5.1	Efeito da Refração.....	16
2.6	A ANALOGIA DE LILLEY.....	17
2.7	ANALOGIA ACÚSTICA GENERALIZADA.....	20
3	SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE LILLEY.....	22
3.1	INTRODUÇÃO	22
3.2	SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS.....	22
3.3	REPRESENTAÇÃO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LILLEY (MUSAFIR, 2005)	24
3.4	SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O LIMITE DE BAIXA FREQUÊNCIA – DOWLING ET AL (1978).....	28
3.5	SOLUÇÃO PARA O LIMITE DE ALTA FREQUÊNCIA – GOLDSTEIN (1982).....	31
3.6	RELAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DOWLING, GOLDSTEIN E MUSAFIR.....	32
4	ESTIMANDO O ESPECTRO DO RUIDO DO JATO.....	33
4.1	INTRODUÇÃO	33
4.2	EQUAÇÃO PARA FLUTUAÇÃO DE PRESSÃO.....	34
4.3	DENSIDADE ESPECTRAL DE POTENCIA $P(x, \omega)$	36
4.4	MODELAGEM DOS GRADIENTES DE VELOCIDADE E TEMPERATURA.....	40
4.5	MODELAGEM DA FONTE q	41
4.6	FATORES DE DIRECIONALIDADE.....	42
4.7	CÁLCULO DA FUNÇÃO DE DIRECIONALIDADE.....	42
4.7.1	Direcionalidade Básica da Fonte.....	44
4.8	ESTENDENDO A MODELAGEM PARA TODO O ESPECTRO.....	44
4.9	CORREÇÃO PARA A TEMPERATURA DO ESCOAMENTO UNIFORME.....	45
4.10	NIVEL DE PRESSÃO SONORA POR FAIXA DE OITAVA (NPS).....	45
5	RESULTADOS.....	47
5.1	PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUIDO DO JATO AQUECIDO A PARTIR DO JATO FRIO A 90 GRAUS, DESCONSIDERANDO OS EFEITOS DOS GRADIENTES... ..	48

5.2	PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUIDO DO JATO FRIO A PARTIR DO JATO FRIO A 90 GRAUS, DESCONSIDERANDO OS EFEITOS DO GRADIENTE.....	57
5.3	PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUIDO DO JATO AQUECIDO A PARTIR DO JATO FRIO A 90 GRAUS.....	66
5.4	PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUIDO DO JATO FRIO A PARTIR DA MEDIÇÃO A 90 GRAUS.....	75
6	DISCUSSÃO.....	84
7	CONCLUSÃO	88
	REFERÊNCIAS	90
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LILLEY (eq. (2.12))	94
	APÊNDICE B – IDENTIDADE ENTRE OPERADORES	98
	APÊNDICE C – A FORMA DA EQUAÇÃO DE LILLEY VÁLIDA NO CAMPO AFASTADO	100
	APÊNDICE D – EXPLICITANDO A SEGUNDA DERIVADA TRANSVERSAL DE G	101

1 INTRODUÇÃO

O estudo do som gerado aerodinamicamente obteve considerável interesse a partir do final dos anos 1940, como resultado do surgimento do turbo jato, que logo foi reconhecido como uma das fontes sonoras mais potentes e com grande potencial de incômodo. Além do imediato interesse em medições de ruído e em técnicas empíricas para sua redução, também se focou no entendimento do mecanismo físico pelo o qual o som é gerado.

Neste trabalho, estamos interessados na previsão do som gerado pelo escoamento de um jato livre. Assim, é necessário compreender o comportamento físico de um jato como fonte sonora. O jato de ar sai através de um bocal e interage com o meio circundante. Essa interação resulta na criação e intensificação de vórtices que se movem na direção do escoamento. Os vórtices criados rapidamente apresentam um movimento caótico, dando origem a turbulência, no qual qualquer regularidade só é percebida com o uso de técnicas estatísticas.

As flutuações de velocidade em um escoamento turbulento criam pequenas perturbações capazes de se propagar por longas distâncias para fora do escoamento. Essas pequenas perturbações — que são percebidas como som — correspondem a menos de 1% da energia do escoamento. Karabasov (2010) argumenta que o pouco entendimento da turbulência e a baixa eficiência acústica do escoamento fazem o problema do ruído gerado pelo jato ser particularmente desafiador.

Lighthill (1952) foi o primeiro a tratar com sucesso a questão do som gerado aerodinamicamente — que inclui o ruído de jato — e o seu trabalho resultou na criação do novo campo acadêmico chamado de aeroacústica. Na teoria de Lighthill, as equações de Navier-Stokes são rearranjadas em uma única equação da onda para ondas viajando em um meio homogêneo, isotrópico e em repouso; a variável é a flutuação de densidade e os efeitos devido ao escoamento são tratados como fonte.

Posteriormente, novas formulações e analogias foram desenvolvidas, como por exemplo as de Powel (1964), Lilley (1971) e Goldstein (2003). As diferentes formas de decompor os termos das equações de balanço em termos de propagação (operador e variável) e em termos fontes constituem diferentes analogias. Neste trabalho, utilizou-se a analogia de Lilley, onde as equações de balanço para escoamento paralelo são linearizadas e rearranjadas em uma única equação e as fontes são dadas pelos termos não lineares. Uma diferença em relação à analogia de Lighthill, é que agora, efeitos devido ao escoamento estão também sendo tratados no operador.

Enquanto a analogia de Lighthill tem solução analítica simples, a opção de se trabalhar com operadores mais complexos, ainda que lineares, envolve frequentemente dificuldades na busca de soluções analíticas. Essas soluções são geralmente construídas com o uso de funções de Green. A análise dos termos da solução serve de base para a interpretação do mecanismo de geração de som. Lighthill (1952) identificou que potência sonora gerada pelo escoamento é proporcional a oitava potência da velocidade e proporcional ao quadrado do diâmetro do jato, o que resultou na construção de turbinas com diâmetro maior e velocidade menor. Além disso, o vasto estudo e validação da equação de Lighthill permitiu que sua solução e interpretação de termos fontes sirvam de parâmetro de comparação para outras analogias.

A interpretação dos termos fontes é facilitada quando estes são expressos de forma que sua eficiência seja facilmente identificada, desse modo evita-se que uma possível simplificação ou cancelamento entre os termos resulte em uma análise incorreta de sua eficiência. A representação em multipolos permite também dar uma interpretação física para os termos da fonte. Os três primeiros tipos básicos de fonte são: a fonte monopolar, fonte dipolar e fonte quadripolar. Conforme a ordem do multipolo aumenta, as fontes se tornam menos eficientes, e elas passam a ter maior direcionalidade — sendo o monopolo a única fonte com irradiação omnidirecional. Quanto à interpretação física, o monopolo está associado com a inserção e remoção de massa no meio (variação do volume); o dipolo com uma distribuição de forças no meio (variação da quantidade de movimento); e o quadripolo com uma distribuição de tensões no meio. É importante ressaltar que as características da fonte determinam a frequência e características direcionais do campo gerado, e reciprocamente, as propriedades direcionais do campo podem ser usadas para se obter informações a respeito da natureza da fonte (Morse e Ingard, 1986).

Mesmo depois de mais de 60 anos da publicação do trabalho de Lighthill, os mecanismos de geração do som no jato e as hipóteses que são ou não aceitáveis ainda não são completamente compreendidos. O objetivo deste trabalho é discutir e expandir o modelo de previsão do espectro de ruído do jato quente a partir do espectro do jato frio a 90° desenvolvido por Musafir (2006), baseado na analogia de Lilley (1971). Aqui, busca-se construir um modelo para prever o espectro do jato para qualquer ângulo polar θ — onde θ é o ângulo entre o observador no campo afastado e o eixo do jato — a partir do espectro do jato frio a 90° , bem como discutir as hipóteses feitas durante a modelagem e testar o modelo.

No capítulo 2 serão introduzidos conceitos de fontes sonoras e do problema do ruído de jato, assim como os efeitos esperados ao se considerar a temperatura do jato; também serão discutidas a analogia de Lighthill (1952), a de Lilley (1971) e, brevemente, a de Goldstein (2003). No capítulo 3 será apresentado uma formulação da solução da equação de Lilley escrita para a flutuação de pressão, desenvolvida por Musafir (2005), que será utilizada como equação base para a construção do modelo de previsão. Serão também discutidas as soluções da equação de Lilley nos limites de baixas e altas frequências, para escoamento uniforme e isotérmico. No capítulo 4, será construído o modelo de previsão do espectro do ruído do jato, quente ou frio, a partir da equação para a flutuação de pressão. O modelo será testado com os dados experimentais obtidos por Brown e Bridges (2006) e os resultados da previsão serão apresentados no capítulo 5. Os resultados serão discutidos no capítulo 6, onde é enfatizada a importância de se considerar os efeitos dos gradientes de velocidade média e, no caso do jato aquecido, também o de temperatura. As previsões do jato frio para $\theta = 60^\circ$ foram razoavelmente boas para toda a faixa de número de Mach considerada (M_j entre 0,35 e 0,9); para $\theta = 45^\circ$ os resultados são satisfatórios apenas para as altas frequências. No caso do jato aquecido, as previsões para $\theta = 90^\circ$ e 60° foram boas para todo o espectro, exceto para o caso $M_j = 0,9$ e $\theta = 60^\circ$, onde houve um excesso de previsão de ruído para as baixas frequências. São também discutidas possíveis fontes de erro e correções para o modelo.

2 RUIDO DE JATO

2.1 RADIAÇÃO DO SOM

Informações a respeito do comportamento de fontes sonoras reais, como superfícies vibrantes, jatos turbulentos e fenômeno da combustão, podem ser obtidas ao se considerar fontes elementares. Uma fonte sonora é dita compacta, quando a região ocupada pela fonte é muito menor que o comprimento de onda que ela emite. Nesses casos, a fonte pode ser representada por uma fonte pontual de ordem apropriada.

O monopolo pontual é a fonte acústica mais simples, e produz um campo de pressão constituído de frentes de ondas esféricas viajando para fora da fonte com velocidade do som c , onde a amplitude decai inversamente com a distância r da fonte. O campo de pressão p_M em uma distância r gerado por um monopolo pontual especificado por $Q(t)$ é dado por (Dowling,1998):

$$p_M(r, t) = \frac{Q(t-r/c)}{4\pi r}, \quad (2.1)$$

onde t é o tempo, $t - r/c$ é o instante em que a fonte emitiu. Exemplos de fenômenos que podem ser modelados por fontes monopulares incluem: bolhas pulsantes, sirenes e combustão transiente.

A segunda fonte pontual mais simples é o dipolo. Um dipolo com direção constante localizado na origem e representado por uma força $F(t)$ produz um campo de pressão p_D dado por (Dowling,1998):

$$p_D(\mathbf{x}, t) = \frac{\cos \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{cr} \frac{\partial F(t-\frac{r}{c})}{\partial t} + \frac{F(t-\frac{r}{c})}{r^2} \right) \quad (2.2)$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{F} e o eixo do dipolo, e F é o modulo de \mathbf{F} . O dipolo também pode ser representado por dois monopolos próximos, emitindo em oposição de fase e iguais em magnitude. O fator $\cos \theta$ implica em uma direção principal de emissão. Fontes dipolares surgem a partir de forças aplicadas no fluido, e são menos eficientes como fonte sonora quando comparadas aos monopolos.

O terceiro tipo de fonte pontual a ser mencionado é o quadripolo pontual. O campo de pressão de um quadripolo p_Q especificado por T_{ij} é dado por (Dowling, 1998):

$$p_Q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{T_{ij}(t-\frac{r}{c})}{4\pi r} \quad (2.3)$$

O quadripolo pode ser convenientemente escrito na forma tensorial:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Os componentes-termos da diagonal de \mathbf{T} , são chamados de quadripolos longitudinais e os componentes fora da diagonal, de quadripolos laterais. A direcionalidade do componente T_{11} é dada pelo fator $\cos^2 \theta$ e a do componente T_{12} por $\cos \theta \sin \theta \cos \phi$, onde ϕ é o ângulo azimutal. Cada componente de um quadripolo pontual pode ser considerado como a superposição de dois dipolos de mesma magnitude e sentidos opostos. Exemplos que podem ser modelados com fontes quadripolares incluem o diapasão, o sino e o ruído de jato frio.

Na Figura 1 podemos ver uma representação da direcionalidade para as 3 fontes elementares (monopolo, dipolo e quadripolo lateral). E na figura 2 é possível ver as diferentes representações idealizadas de cada fonte.

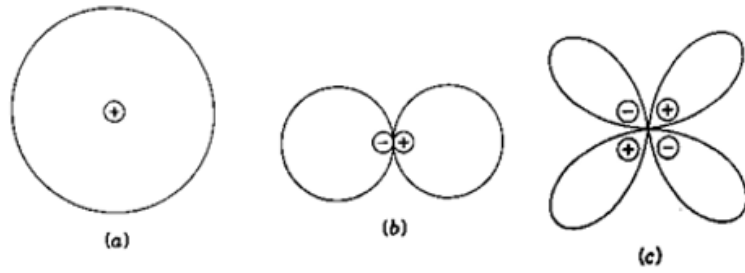


Figura 1 Direcionalidade Polar para Intensidade Sonora no Campo afastado. (a) monopolo, (b) dipolo, (c) quadripolo lateral.
 Fonte: Adaptado de Crocker (1998).

Representação com monopolos	distribuição de velocidade na superfície da esfera	Representação com uma esfera oscilante	modelo com força oscilante
<p>monopolo</p>			
<p>dipolo</p>	<p>dipolo</p>	<p>dipolo</p>	
<p>quadripolo lateral</p>	<p>quadripolo lateral</p>	<p>quadripolo lateral</p>	<p>quadripolo lateral</p> <p>quadripolo longitudinal</p>

Figura 2 Modelos idealizados para fontes esféricas: monopolo, dipolo e quadripolo. Fonte: adaptado de Crocker (1998).

2.2 O PROBLEMA

Um problema básico em aeroacústica consiste em prever o espectro do ruído de jato no campo afastado para diferentes ângulos polares θ , ângulo entre o eixo do jato e o observador. Assim, é importante conhecer os aspectos do jato que são relevantes para o processo de geração de som. Na Figura 3 é mostrada a estrutura de um jato circular com alto número de Reynolds.

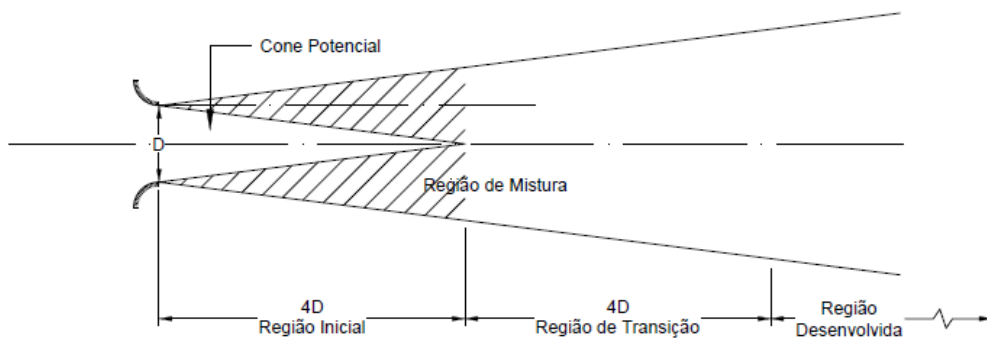


Figura 3 Jato Circular

O jato com velocidade U_j e temperatura T_j sai através do bocal com diâmetro D para um meio em repouso. Os efeitos da viscosidade fazem com que o jato seja desacelerado, ao mesmo tempo que o meio circundante é acelerado, formando uma região de mistura entre o escoamento potencial do jato e esse meio. Após um período transiente e considerando valores médios no tempo, as seguintes regiões são formadas: região inicial, região de transição e região desenvolvida.

A região inicial é caracterizada por uma região de mistura anelar turbulenta (parte hachurada da Figura 3) que cresce linearmente em ambas as direções até preencher todo o jato em aproximadamente quatro diâmetros ao longo do escoamento, e também, pelo escoamento potencial, uma região cônica, chamada de cone potencial. Os perfis de velocidade média e de flutuação de velocidade quadrática média são mostrados na Figura 4. Na linha de centro da região de mistura é onde se encontra o pico da

intensidade de turbulência que se mantém constante até o começo da região de transição (Goldstein, 1976). Na região de transição, que se estende por mais quatro diâmetros, o pico desloca-se gradualmente para o eixo do jato. Essa região é seguida pela região completamente desenvolvida, que continua a crescer.

É razoável pensar que as principais fontes sonoras estão relacionadas com as regiões com maior intensidade de turbulência. Tam (1998) argumentou que essa hipótese é válida para jatos subsônicos, onde a fina escala da turbulência é a fonte dominante de ruído. Assim, localizar as fontes no jato é importante para que se possa melhor escolher os parâmetros da modelagem, que são discutidos no Capítulo 4, como a definição da temperatura média, T_m — média entre a temperatura de saída do jato e a temperatura no campo afastado — e a velocidade de convecção da fonte, dada pela velocidade média na linha de centro da região de mistura na região inicial, $0,62U_j$ (Goldstein, 1976).

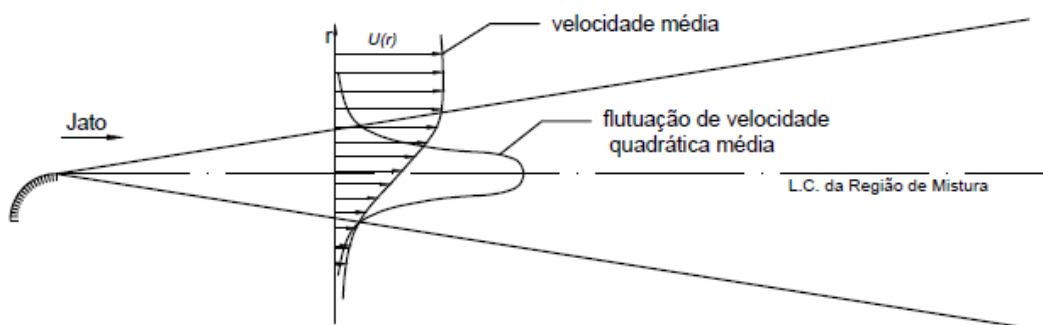


Figura 4 Perfis da velocidade média e da flutuação de velocidade quadrática média

2.3 A PRIMEIRA ANALOGIA

Lighthill (1952) foi o primeiro a abordar um procedimento geral para estimar o som gerado aerodinamicamente. Diferentemente dos estudos anteriores, em que se buscava relacionar a frequência do escoamento com a frequência do som produzido e

explicar a produção de tais frequências por teorias de instabilidade do escoamento, Lighthill desenvolveu uma teoria que focou em explicar os mecanismos de conversão da energia presente no escoamento em energia acústica.

Na analogia de Lighthill, as equações que governam as flutuações de densidade em um escoamento real são comparadas com aquelas para um meio uniforme em repouso (que coincide com a região fora do escoamento). A diferença entre esses dois conjuntos de equações é interpretada como sendo as fontes de som.

Para se obter a equação de Lighthill, primeiramente escreve-se as equações de continuidade e momentum como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

e

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (p \delta_{ij} - \tau_{ij} + \rho v_i v_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (2.5)$$

onde ρ é a densidade, v_i é o componente (i) do vetor de velocidade, p é a pressão, t é a coordenada temporal, x_i é o componente (i) da coordenada espacial, δ_{ij} é o delta de Kronecker e τ_{ij} é o componente (i, j) do tensor de viscosidade.

Tomando o divergente da eq. (2.5) e o subtraindo da derivada temporal da eq. (2.4), i.e. $\frac{\partial}{\partial x_i}$ eq. (2.5) $-$ $\frac{\partial}{\partial t}$ eq. (2.4), obtemos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (p \delta_{ij} - \tau_{ij} + \rho v_i v_j)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.6)$$

Subtraindo o termo $c_*^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i \partial x_j} \delta_{ij}$ dos dois lados da eq. (2.6), onde ρ' representa a flutuação de densidade em torno do valor médio ρ_0 e c_* é uma constante

arbitrária (usualmente escolhida como a velocidade do som a uma distância grande do escoamento), tem -se:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_*^2 \nabla^2 \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2.7)$$

onde T_{ij} é o tensor de Lighthill, dado por:

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + (p - c_*^2 \rho') \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (2.8)$$

A equação de Lighthill pode ser interpretada como uma equação para ondas se movendo em um meio homogêneo isotrópico em repouso, onde a velocidade de propagação da onda é c_* e que suporta uma distribuição quadripolar de fontes, que correspondem a uma distribuição externa de tensões, T_{ij} .

A analogia de Lighthill é formalmente exata e tem a “vantagem” do tensor T_{ij} não apenas incorporar a geração de som, mas também os efeitos da convecção e refração. Por outro lado, para determinar T_{ij} é necessário a resolução de todo o sistema de equações não lineares que governam o problema do escoamento, o que é virtualmente impossível para a maioria dos casos de interesse (Goldstein, 1976). Assim, se faz necessário adotar hipóteses simplificadoras, de tal forma que esse termo seja interpretado como uma fonte que desaparece para grandes distancias do escoamento.

Desse modo, considerando um escoamento subsônico turbulento envolto por uma atmosfera estacionária, as seguintes considerações costumam ser feitas:

- a) é possível mostrar que o termo de viscosidade, τ_{ij} , tem uma contribuição muito menos significativa do que a do tensor de Reynolds $\rho v_i v_j$, podendo ser abandonado;

- b) as aproximações acústicas podem ser aplicadas para uma região distante do escoamento, no qual o termo v_i é pequeno o suficiente para que se possa desprezar a parte quadrática do tensor de Reynolds no campo afastado;
- c) é possível desprezar a transferência de calor dentro do escoamento com temperatura ambiente, visto que os efeitos da condução do calor são da mesma ordem dos efeitos viscosos (número de Prandtl da ordem de 1). Assim, a variação de entropia será governada por $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0$, e no caso que a temperatura do jato pode ser considerada uniforme, temos um escoamento homoentrópico, de forma que a relação $(p - p_0) = c_0^2(\rho - \rho_0)$ é válida;
- d) assumir que as flutuações de densidade no termo $\rho v_i v_j$ podem ser desprezadas — hipótese que descarta uma parte significativa dos efeitos devido refração dentro do escoamento,

Uma vez aplicadas as hipóteses, o tensor de Lighthill T_{ij} é aproximado por $\rho_0 v_i v_j$ no caso de jato frio, e por $\rho_0 v_i v_j + [p - c_0^2 \rho'] \delta_{ij}$ no caso de jato quente.

2.3.1 Lei da Oitava Potência

A solução da equação de Lighthill é dada por:

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \frac{T_{ij}(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_\infty})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \quad (2.9)$$

e para o caso de campo afastado:

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_\infty^2} \frac{x_i x_j}{x^3} \int \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_\infty} \right) d\mathbf{y}. \quad (2.10)$$

Com a solução dada pela eq. (2.10) para $T_{ij} \approx \rho_0 v_i v_j$ e utilizando os dois parâmetros disponíveis para o jato frio — velocidade do escoamento, U_j , e diâmetro do jato, D —, é possível estimar a ordem de grandeza do campo sonoro irradiado, considerando-se que:

- a) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sim \omega^2 \sim \frac{U_j^2}{D^2}$ (a segunda derivada temporal é proporcional ao quadrado de uma frequência típica);
- b) $T_{ij} \sim \rho_0 U_j^2$;
- c) $\int d\mathbf{y} \sim D^3$ (o volume de integração é proporcional ao cubo do diâmetro).

Assim, da eq. (2.10), tem-se:

$$\rho' \sim \frac{\rho_0 U_j^4 D}{x c_0^4} \quad (2.11)$$

e:

$$\overline{\rho'^2} \sim \frac{\rho_0^2 U_j^8 D^2}{x^2 c_0^8} \quad (2.12)$$

O resultado acima é o celebrado resultado devido a Lighthill e confirmado experimentalmente (Dowling e Ffowcs Wiliams, 1983). Ffowcs Wiliams (1963) considerou o efeito de convecção das fontes, e obteve:

$$\overline{\rho'^2} \sim \frac{\rho_0^2 U_j^8 D^2}{x^2 c_0^8} (1 - M_c \cos \theta)^{-5} \quad (2.13)$$

onde M_c é o número de Mach convectivo, onde a velocidade de convecção das fontes é aproximada por $0.62 U_j$.

2.4 EFEITO DA TEMPERATURA NO RUIDO DO JATO

Inicialmente, pensava-se que uma elevada temperatura do jato iria reduzir o ruído, como resultado de uma diminuição da densidade na região da fonte — reduzindo o termo $\rho v_i v_j$ do tensor de Lighthill —. Entretanto, experimentos no NGTE na Inglaterra e SENCMA na França mostraram que apenas para altas velocidades que se observava uma redução de ruído, enquanto que para baixas velocidades, o aumento da temperatura implicava em um aumento de ruído (Fisher e Morfey, 1982).

Morfey (1973) obteve uma nova lei de potência ao considerar o termo que contém $\rho' - p'c_0^{-2}$. A partir da equação da energia na forma $\frac{D\rho'}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp'}{Dt}$ e da equação de Lighthill (escrita para variável p') ele obteve :

$$\overline{\rho'^2} \sim \frac{\rho_0^2 U_j^8 D^2}{x^2 c_0^8} + \frac{\rho_s^2 U_j^6 D^2}{x^2 c_0^6} \left(\frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 \quad (2.14)$$

onde ρ_s é a densidade na região da fonte.

O último termo da eq. (2.11) possui a eficiência de um dipolo, que é importante quando houver uma diferença de temperatura entre o jato e o ambiente. Sua contribuição é relevante para baixas velocidade e explica o aumento do ruído observado experimentalmente. Entretanto, a redução observada para as altas velocidades só pode ser explicada quando os efeitos da interação do som com o escoamento são considerados.

Os efeitos da temperatura no escoamento não são completamente compreendidos (Bodony, 2009) e continuam sendo estudados. Viswnathan (2004) realizou um novo experimento a fim de verificar o efeito da temperatura no campo acústico para jatos subsônicos e questionou a validade de experimentos anteriores; Tester e Morfey (2009) avaliariam os questionamentos de Viswnathan e arguiram que as diferenças observadas em relação aos experimentos anteriores tinham causas distintas e

independiam do experimento em si; Viswnathan (2010) investigou as possíveis diferenças na localização das fontes do jato frio e quente, assim como o efeito da temperatura na distribuição de fontes, concluindo que a temperatura do jato não influencia na distribuição de fontes; e concluiu também que o campo afastado para jatos subsônicos frios ou quentes estaria localizado a aproximadamente 40 diâmetros do jato.

Muitos estudos recentes utilizam métodos híbridos, em que informações sobre escoamento e turbulência são obtidos por simulações numéricas e são utilizados em conjunto com alguma analogia, como por exemplo, as de: Lew, Blaisdell e Lyrintzis (2007) e Bodony (2009) que utilizaram a analogia de Lighthill com dados do escoamento obtidos por simulação de grandes escalas (LES) para estudar os efeitos da temperatura no escoamento; Khavaran, Kenzakowski e Mielke-Fagan (2010) utilizaram simulações com as equações de Navier-Stokes médias (*RANS*) junto com a formulação de Goldstein (2003) (discutida na seção 2.7) para prever o ruído do jato quente; Victor Rosa (2018) utilizou a analogia de Lighthill com dados do escoamento obtidos por *RANS* para prever ruído do jato quente e frio.

2.5 A INFLUÊNCIA DO ESCOAMENTO NO RUIDO DO JATO

O uso de hipóteses simplificadoras para a fonte da equação de Lighthill (como as discutidas em 2.2.1) são um ponto de partida para resolução do problema do som gerado aerodinamicamente. Entretanto, o uso dessas hipóteses acaba por desconsiderar, em parte ou totalmente, efeitos importantes — como a refração e o espalhamento — que acontecem dentro do escoamento e influenciam diretamente nas previsões do espectro do ruído e nível de pressão sonora.

O experimento de Lush (1971) mostrou que os valores previstos para intensidade acústica nas altas frequências, utilizando a analogia de Lighthill, eram maiores que as medições experimentais, evidenciando que os efeitos da interação do som com o escoamento são mais importantes para frequências mais altas e próximo ao eixo do jato — quando o comprimento de onda é menor que o caminho percorrido dentro do jato. Lighthill (1952) argumentou que tais efeitos poderiam ser tratados separadamente, uma vez que o problema de geração fosse resolvido.

2.5.1 Efeito da Refração

Uma vez que o som é gerado, as ondas sonoras têm que propagar por dentro região de mistura (jato) antes de saírem e alcançarem o campo afastado. Durante este percurso, as ondas sonoras sofrem refração devido a não uniformidade do escoamento — no caso de um escoamento uniforme imerso em uma atmosfera em repouso, ainda haveria refração na interface entre os dois fluidos, devido a descontinuidade no campo de velocidade.

A Figura 5 ilustra a refração de um raio de som emitido por uma fonte pontual localizada na região de mistura, onde a velocidade da onda em qualquer ponto é obtida pela soma da velocidade do som local com a velocidade local do escoamento. Agora considerando a frente de onda AB na figura, o ponto B se move com maior velocidade em relação ao ponto A , uma vez que a velocidade local é maior em B , desse modo, em um instante posterior, o ponto B terá percorrido uma trajetória maior do que o ponto A (suas novas posições estão marcadas por A' e B'), resultando em uma mudança de direção da frente de onda — refração. Esse efeito é ainda mais proeminente para jatos

quentes, uma vez que a velocidade do som no ponto B também será maior que no ponto A .

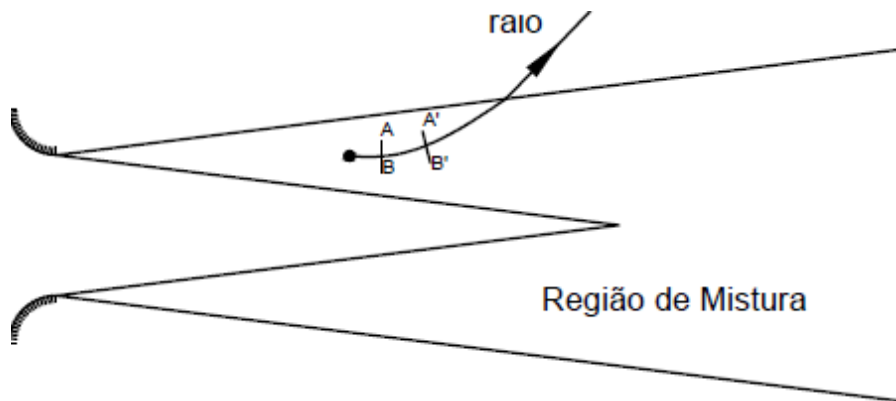


Figura 5 Frente de onda AB irradiada de uma fonte em dois instantes de tempo — situação descrita para altas frequências

Um efeito direto da refração é o fato de que menos som pode ser irradiado na direção do escoamento, criando uma região relativamente silenciosa entorno do eixo, comumente chamada de “cone de silêncio” (Ribner, 1981; Tam, 1998).

2.6 A ANALOGIA DE LILLEY

Lilley (1971) derivou uma equação não homogênea da onda para um meio em movimento, onde os termos não lineares são tratados como fonte. Ele argumentou que os termos lineares, que em geral são muito maiores que os termos quadráticos, não irradiam nenhum som (e estariam relacionados a propagação) e, por isso, não deveriam ser incluídos na fonte, já que estes dominariam sobre os termos quadráticos — que seriam as verdadeiras fontes sonoras (Goldstein, 2001).

Na analogia de Lilley, o escoamento é considerado paralelo, $\mathbf{v}_0 = U(x_2, x_3)\mathbf{e}_1$, e é o tipo mais complexo de escoamento que permite o rearranjo das equações de balanço em uma equação para a flutuação de pressão (ou qualquer variável que possa ser expressa como função da pressão). Além disso, as várias possibilidades de

definir a variável dependente e os termos que serão eliminados durante o rearranjo da equações permitem escrever a equação de Lilley de diferentes formas, que foram discutidas por Musafir (2007).

Neste trabalho, utilizou-se a seguinte forma da equação de Lilley, deduzida no Apêndice A, onde as variáveis foram decompostas em parte flutuante e parte média, representadas, respectivamente, pelo sobrescrito ' e subscrito 0:

$$\mathcal{L}p' = \frac{D_0^2 q}{Dt^2} + \left(2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot \right) (\mathbf{f}^* - \nabla \cdot \mathbf{T}) \quad (2.15)$$

onde \mathcal{L} é o operador linear:

$$\mathcal{L} = \frac{D_0^3}{Dt^3} + \left(2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot \right) c_0^2 \nabla$$

e:

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$$

$$q = (\gamma - 1) \mathbf{v}' \cdot \nabla p' - \nabla \cdot (c^2 \rho \mathbf{v}')$$

$$\mathbf{f}^* = \rho \mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \nabla c_0^2$$

$$\mathbf{T} = (c_0^2 \rho \mathbf{v}' \mathbf{v}')$$

Apesar da equação de Lilley considerar explicitamente os efeitos da refração, ela apresenta algumas desvantagens relacionadas com sua manipulação e características intrínsecas, como por exemplo: o fato de ser uma equação diferencial de terceira ordem com coeficientes variáveis, onde as suas soluções precisam ser buscadas numericamente, exceto para geometrias simples.

A existência de soluções não triviais para a equação homogênea, relevantes para avaliar a instabilidade de escoamento laminar e que não seriam

dependentes das fontes da equação de Lilley acarretou, por muito tempo, um questionamento de tais fontes, que foi solucionado por Goldstein e Handler (2003), que resolveram as equações de balanço linearizadas para um escoamento não paralelo em duas dimensões e mostraram que as ondas de instabilidade deveriam ser consideradas para a construção de uma solução causal, podendo ser desprezadas para escoamentos subsônicos; e também, que essas ondas não cresceriam indefinidamente em um escoamento divergente (o que acontece em um escoamento paralelo). Dessa forma, estaria “justificado” o abandono dessas soluções homogêneas — que fazem a solução crescer indefinidamente na direção do escoamento — na equação de Lilley (Dowling et al., 1978; Crighton e Gaster, 1976).

Outro ponto a ser ressaltado, é a ideia de que interação acústica com o escoamento poder ser aproximada pela simples passagem de uma onda sonora através de um escoamento médio ser demasiadamente simples, quando, na realidade, a interação de cada onda acontece com perfis de velocidade bem distintos daquele do escoamento médio, implicando em divergências mais significativas para as altas frequências — efeito de espalhamento das ondas sonoras em frequências altas e som dentro do cone do silêncio. E também, que a hipótese de escoamento unidirecional ser restritiva e não considerar a divergência do jato.

Entretanto, não há dúvidas que modelos que incorporam na analogia acústica alguma modelagem do escoamento médio melhoram significativamente a previsão do ruído gerado pelo jato (Ffowcs Williams, 1984) e que a analogia de Lighthill e sua extensão — analogia de Lilley — continuam sendo a principal ferramenta na previsão de ruído de jato (Goldstein, 2005). Como alguns exemplos do uso da analogia de Lilley: Tester e Burrin (1974) previram o nível de pressão sonora no campo afastado e a direcionalidade para uma fonte pontual estacionária em um jato circular subsônico;

Tester e Morfey (1976) encontraram soluções numéricas para fontes de ordem quadripolar e compararam com soluções analíticas nos limites de alta e baixa frequências e com dados experimentais; Mungar, Plumbee e Doak (1974) calcularam o campo acústico e direcionalidade para uma distribuição de fonte arbitrária dada pelas funções de Legendre e de Hankel; Goldstein (1982) derivou formulas para emissão em alta frequência de fontes se movendo em um escoamento unidirecional arbitrário; Balsa (1976) derivou expressões para o campo sonoro para alta frequência de singularidades convectadas em um escoamento unidimensional e as comparou com dados para um jato frio; Morfey, Zewczyk e Tester (1978) apresentaram uma nova análise dimensional para o jato quente; Khavaran e Bridges (2004) calcularam numericamente uma função de Green para prever o espectro e direcionalidade no campo afastado do ruído de jato; Morfey e Tester (2010) discutiram diferentes métodos de solução da equação de Lilley disponíveis na literatura; Powles, Tester e McAlpine (2010) estudaram o espalhamento das ondas pela turbulência; Powles e Tester (2008) estudaram o efeito de barreira por jatos quentes com aplicações em instalações.

2.7 ANALOGIA ACÚSTICA GENERALIZADA

Goldstein (2003) generalizou a abordagem de Lilley para um escoamento médio arbitrário considerando um sistema obtido das equações de balanço linearizadas com termos fontes não lineares. Em sua formulação, foi utilizada a forma convectiva das equações linearizadas de Navier-Stokes com variáveis dependentes modificadas — as perturbações do cisalhamento e do fluxo de calor foram substituídas por uma forma generalizada do tensor de Reynolds e do fluxo de entalpia de estagnação. O escoamento “base” sobre o qual essas equações são linearizadas pode ser qualquer solução de uma classe abrangente de equações não homogêneas de Navier-Stokes com fontes arbitrárias.

A analogia é construída ao se tomar o escoamento base como uma aproximação do escoamento médio do jato e tratar as tensões generalizadas e o fluxo de entalpia como fontes, pois estes compreendem os termos não lineares. Junto com a analogia, podem ser utilizadas simulações numéricas de grandes escalas (*LES*) para se obter informações do escoamento ‘base’ e um filtro é aplicado a esse escoamento para separar a parte responsável pela propagação do som. O uso de dados obtidos por simulação numérica em uma analogia constitui um método híbrido. Diferentes formas de escrever a analogia acústica generalizada têm sido usadas para prever o espectro do ruído de jato de altas velocidades, como em (Goldstein e Lieb, 2008) e (Karabasov et al., 2010) que conseguiram prever o espectro de ruído do jato frio; Afsar, Goldstein e Fagan (2011a, 2011b) que estudaram o termo de acoplamento entre as fontes devido ao cisalhamento e fluxo de entropia (jato quente) e Khavaran, Kenzakowski e Mielke-Fagan (2010) que previram o espectro do jato quente e identificaram a contribuição dos vários componentes da fonte no campo afastado.

3 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE LILLEY

3.1 INTRODUÇÃO

Esse capítulo busca, primeiramente, introduzir os fundamentos matemáticos necessários para determinar o campo sonoro em um meio infinito a partir de uma fonte pontual impulsiva, localizada no ponto \mathbf{y} e emitindo no instante τ — i.e. usar a função de Green para a construção de soluções de equações lineares não homogêneas. Posteriormente serão apresentados a forma da solução da equação de Lilley deduzida por Musafir (2005) e também serão discutidos alguns aspectos das soluções analíticas, nos limites de baixa e alta frequências, encontradas por Dowling et al. (1978) e Goldstein (1982), respectivamente. Essas soluções serão utilizadas na modelagem da previsão do ruído apresentada no Capítulo 4.

3.2 SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS

A função de Green, $G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t; \tau)$, é a solução da equação diferencial linear não homogênea, descrita pelo operador $\mathcal{L}_{(x,t)}$ e válida no domínio espacial V , na qual o termo fonte é dado por uma excitação pontual e impulsiva, $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau)$:

$$\mathcal{L}_{(x,t)}G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t; \tau) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau), \quad \mathbf{x} \in V \quad (3.1)$$

onde δ é a função de Dirac que possui a seguinte propriedade:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x)f(x - y)dx = \begin{cases} f(y), & \text{se } x_1 < y < x_2 \\ 0, & \text{se } y \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

Assumindo a existência da função G que satisfaça à eq. (3.1), é possível encontrar uma solução particular para a seguinte equação:

$$\mathcal{L}_{(x,t)}\phi(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x} \in V. \quad (3.2)$$

Para isso, multiplica-se a eq. (3.1) por $F(\mathbf{y}, \tau)$ e integra-se nas variáveis \mathbf{y} e τ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_V \mathcal{L}_{(x,t)} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t; \tau) F(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) F(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y}d\tau. \quad (3.3)$$

O operador linear $\mathcal{L}_{(x,t)}$ pode ser removido de dentro da integral na eq. (3.3), enquanto o lado direito é dado por $F(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathcal{L}_{(x,t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_V G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t; \tau) F(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y}d\tau = F(\mathbf{x}, t). \quad (3.4)$$

Comparando a eq. (3.4) com a eq. (3.2), observa-se que a solução particular para $\phi(\mathbf{x}, t)$ é:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t; \tau) F(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y}d\tau. \quad (3.5)$$

Para o caso em que a fonte da eq. (3.2) é um dipolo pontual no meio homogêneo em repouso:

$$F(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(t) \delta(\mathbf{x})), \quad (3.6)$$

a solução é dada por:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t; \tau) \left(-\frac{\partial}{\partial y_j} (f_j(\tau) \delta(\mathbf{y})) \right) d\mathbf{y}d\tau. \quad (3.7)$$

Integrando a eq. (3.7) no espaço por partes, onde $\delta(\mathbf{y}) = 0$ em $y_j = \pm\infty$, observa-se que a derivada do dipolo é transferida para a função de Green (com mudança de sinal):

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \left(\frac{\partial}{\partial y_j} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t; \tau) \right) f_j(\tau) \delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\tau. \quad (3.8)$$

A função de Green em um meio homogêneo, em repouso e infinito é função de $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ e de $(t - \tau)$, neste caso, $G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t; \tau)$ é invariante por translação:

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t; \tau) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t - \tau | 0; 0) \quad (3.9)$$

e a seguinte propriedade de simetria é válida:

$$\frac{\partial^n G(\mathbf{x}-\mathbf{y}; t-\tau|0;0)}{\partial x_i \partial x_j \dots} = (-1)^n \frac{\partial^n G(\mathbf{x}-\mathbf{y}; t-\tau|0;0)}{\partial y_i \partial y_j \dots} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{y}; t-\tau|0;0)}{\partial t} = - \frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{y}; t-\tau|0;0)}{\partial \tau} \quad (3.11)$$

Desse modo, a derivada na eq. (3.8) pode ser passada para as coordenadas do observador e retirada de dentro da integral:

$$\phi(\mathbf{x}) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_V G(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t - \tau | 0; 0) f_j(\tau) \delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\tau. \quad (3.12)$$

Para as coordenadas em que a função de Green não for invariante por translação, as derivadas não podem ser passadas diretamente para as coordenadas do observador. Assim, no caso de escoamento paralelo, a derivada em relação a coordenada transversal $\frac{\partial G}{\partial y_t}$ não pode ser escrita como $-\frac{\partial G}{\partial x_t}$.

3.3 REPRESENTAÇÃO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LILLEY

(MUSAFIR, 2005)

Musafir (2005) deduziu uma representação da solução geral da equação de Lilley em que os efeitos do escoamento médio e da temperatura do jato relacionados com a segunda derivada na direção transversal do escoamento são postos em evidência.

Desse modo, é possível aproximar a função de Green do problema geral usando as funções de Green analíticas, disponíveis na literatura, para os limites de alta e baixa frequência, considerando escoamento uniforme e isotérmico. A seguir será apresentada a dedução da solução de Musafir que será utilizada no Capítulo 4.

A análise é baseada na eq. (2.15), discutida na seção 2.6:

$$\frac{D_0^3 p'}{Dt^3} + \left(2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot \right) c_0^2 \nabla p' = \frac{D_0^2 q}{Dt^2} + \left(2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot \right) (\mathbf{f}^* - \nabla \cdot \mathbf{T}) \quad (3.13)$$

No campo afastado, a derivada espacial $\frac{\partial}{\partial x_1}$ pode ser substituída pela derivada temporal $-\frac{\alpha}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t}$ (Musafir, 2006), onde c_∞ é a velocidade do som no campo afastado e α é tratado como uma constante. Após realizar essa substituição e rearrumar os termos da eq. (3.13) (ver Apêndice C), obtém-se uma forma da equação de Lilley válida no campo afastado:

$$\mathcal{L}^* p' = (1 - M\alpha)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} q + \nabla \cdot [(1 - M\alpha)^{-2} (\nabla \cdot \mathbf{T} - \mathbf{f}^*)] \quad (3.14)$$

onde \mathcal{L}^* é o operador:

$$\mathcal{L}^* = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \cdot [(1 - M\alpha)^{-2} c_0^2 \nabla]$$

A fim de escrever os termos fontes como multipolos exatos, o que permite, na solução transferir diretamente as derivadas para função de Green (seção 3.2), a eq. (3.14) é reescrita como:

$$\mathcal{L}^* p' = (1 - M\alpha)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} q + \nabla \cdot \nabla \cdot [(1 - M\alpha)^{-2} \mathbf{T}] - \nabla \cdot [(\nabla(1 - M\alpha)^{-2} \cdot \mathbf{T}) + (1 - M\alpha)^{-2} \mathbf{f}^*], \quad (3.15)$$

A solução do problema auxiliar (3.15) para a flutuação de pressão p' é buscada a partir da função de Green $G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau)$ que satisfaça:

$$\mathcal{L}^*_{(x,t)}G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau). \quad (3.16)$$

Desse modo, p' é dado pela integral:

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V G(\mathbf{x} - \mathbf{y}|t - \tau) \left\{ \nabla_y \cdot \nabla_y \cdot [(1 - M \cos \theta)^{-2} \mathbf{T}] - \nabla_y \cdot [(\nabla_y(1 - M \cos \theta)^{-2} \cdot \mathbf{T}) + (1 - M \cos \theta)^{-2} \mathbf{f}^*] + (1 - M \cos \theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} q \right\} d\mathbf{y} d\tau, \quad (3.17)$$

onde α foi substituído por $\cos \theta$ (Musafir, 2006) e ∇_y é o operador ∇ escrito nas coordenadas das fontes.

Transferindo os operadores para a função de Green e utilizando a propriedade devida à simetria em relação à derivada temporal, conforme discutido na seção (3.2) — $G(\mathbf{x}, t|\mathbf{y}, \tau) = G(\mathbf{x}, t - \tau|\mathbf{y}, 0)$ —, obtém-se:

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \left\{ \nabla_y \nabla_y G : [(1 - M_\alpha)^{-2} \mathbf{T}] + \nabla_y G \cdot [(\nabla_y(1 - M_\alpha)^{-2} \cdot \mathbf{T}) + (1 - M_\alpha)^{-2} \mathbf{f}^*] + \frac{\partial G}{\partial t} (1 - M_\alpha)^{-1} q \right\} d\mathbf{y} d\tau, \quad (3.18)$$

onde $M_\alpha = M \cos \theta$.

A fim de analisar a segunda derivada da função de Green, utiliza-se o fato que a função de Green G também satisfaz para um observador no campo afastado:

$$\mathcal{L}^*_{(y,\tau)}G(\mathbf{x}, t - \tau|\mathbf{y}, 0) = 0. \quad (3.19)$$

Após manipular a eq. (3.19) (Apêndice D), obtemos:

$$g^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y_t^2} = c_0^{-2} (1 - M_\alpha)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \left[2\alpha (1 - M_\alpha)^{-1} \nabla_y M + \frac{\nabla_y c_0^2}{c_0^2} \right] \cdot \nabla_y G - \left(\nabla_y^2 - g^2 \frac{\partial^2}{\partial y_t^2} \right) G \quad (3.20)$$

onde a coordenada espacial \mathbf{x} é representada por um sistema genérico (x_1, x_t, x_n) , de forma que as variáveis U e c_0 possam ser escritas apenas como função da coordenada transversal x_t . Nesse sistema, o gradiente é dado por $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, g \frac{\partial}{\partial x_t}, h \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, onde $g = |\nabla x_t|$ e $h = |\nabla x_n|$. Assim, $\nabla_y U = g \frac{dU}{dy_t} \mathbf{e}_t$, onde \mathbf{e}_t é o vetor unitário na direção x_t , e G pode ser escrita como $G(x_1 - y_1, x_t, x_n - y_n, t - \tau | 0, y_t, 0, 0)$.

Uma vez que os próximos passos irão focar apenas nos termos que contém o tensor \mathbf{T} , a eq. (3.18) é escrita omitindo-se \mathbf{f}^* e q (que serão retomados mais adiante):

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \left\{ \nabla \nabla G : [(1 - M_\alpha)^{-2} \mathbf{T}] + \nabla G \cdot \left(2g\alpha(1 - M_\alpha)^{-3} \frac{dM}{dy_t} \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{T} \right) \right\} dy d\tau. \quad (3.21)$$

onde o subscrito y em ∇_y foi omitido.

Escrevendo o primeiro termo da eq. (3.21) em notação indicial:

$$\nabla \nabla G : [(1 - M_\alpha)^{-2} \mathbf{T}] = (1 - M_\alpha)^{-2} T_{ij} \frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j} \quad (3.22)$$

e utilizando a relação (3.20) no termo em que $i = j = 2$, obtém-se a seguinte expressão que contém a segunda derivada transversal de G :

$$(1 - M_\alpha)^{-2} T_{tt} g^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y_t^2} = c_0^{-2} T_{tt} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \left[2\alpha(1 - M_\alpha)^{-3} T_{tt} \nabla_y M + (1 - M_\alpha)^{-2} T_{tt} \frac{\nabla_y c_0^2}{c_0^2} \right] \cdot \nabla_y G - (1 - M_\alpha)^{-2} T_{tt} \left(\nabla_y^2 - g^2 \frac{\partial^2}{\partial y_t^2} \right) G, \quad (3.23)$$

que pode ser evidenciada na eq. (3.21):

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \left\{ \left(\nabla \nabla + \left(2\alpha(1 - M_\alpha)^{-1} \nabla M + \frac{\nabla c_0^2}{c_0^2} \right) \nabla_t \right) G : [(1 - M_\alpha)^{-2} \mathbf{T}] + \left(2g\alpha(1 - M_\alpha)^{-3} \frac{dM}{dy_t} \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{T} \right) \cdot \nabla G - \left[2\alpha(1 - M_\alpha)^{-3} T_{tt} \nabla M + (1 - M_\alpha)^{-2} T_{tt} \frac{\nabla c_0^2}{c_0^2} \right] \cdot \nabla G \right\} dy d\tau \quad (3.24)$$

onde $\nabla_t = \left(0, g \frac{\partial}{\partial y_t}, 0\right)$.

A dependência de T_{tt} associada com o cisalhamento médio é cancelada no segundo termo da eq. (3.24):

$$\left(g \frac{dM}{dy_t} \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{T} - T_{tt} \nabla M\right) \cdot \nabla G = \nabla M \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla^* G \quad (3.25)$$

onde $\nabla^* G = \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}, 0, h \frac{\partial G}{\partial y_n}\right)$.

Desse modo, a eq. (3.23) é reescrita por:

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \left\{ (\nabla \nabla)_0 G : [(1 - M_\alpha)^{-2} \mathbf{T}] + 2\alpha(1 - M_\alpha)^{-3} \nabla M \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla^* G - \right. \\ \left. (1 - M_\alpha)^{-2} T_{tt} \frac{\nabla c_0^2}{c_0^2} \cdot \nabla G \right\} d\mathbf{y} d\tau \quad (3.26)$$

onde $(\nabla \nabla)_0 = \nabla \nabla + \left(2\alpha(1 - M_\alpha)^{-1} \nabla M + \frac{\nabla c_0^2}{c_0^2}\right) \nabla_t$.

Nessa forma, $(\nabla \nabla)_0 G$ representa a solução formal para o escoamento isotérmico sem cisalhamento ($\nabla U = \nabla c_0^2 = 0$). A vantagem de se escrever a derivada $\frac{\partial^2 G}{\partial y_t^2}$ em função das derivadas das outras direções é que agora é possível passar as derivadas espaciais para a coordenadas do observador (com exceção de $\frac{\partial G}{\partial y_t}$) e conseqüentemente serem expressas, no campo afastado, por um fator de direcionalidade e uma derivada temporal.

3.4 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O LIMITE DE BAIXA FREQUÊNCIA – DOWLING ET AL (1978)

Dowling et al. (1978) abordaram o problema da geração de som em um escoamento uniforme, considerando uma região em que o escoamento se move com

velocidade uniforme $\mathbf{U} = (U_1, 0, 0)$, região R_0 , separada da região em que o meio está em repouso, região R_∞ , por uma superfície S . A analogia descrita é uma generalização da analogia de Lighthill, na qual são considerados os efeitos do escoamento. As equações (3.27a-b) representam a formulação base do problema:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} G_D(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = 0, \quad \text{se } \mathbf{x} \text{ em } R_\infty \text{ e } \mathbf{y} \text{ em } R_0 \quad (3.27a)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} G_D(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau), \quad \text{se } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ em } R_0 \quad (3.27b)$$

onde G_D é a função de Green do problema discutida por Dowling et al. (1978).

O problema recíproco — no qual as ondas sonoras emitidas a partir da posição \mathbf{x} no instante t “chegam” na posição \mathbf{y} no instante τ , e decaem conforme τ aumenta — foi resolvido por Dowling et al. (1978) no caso compacto (diâmetro do jato pequeno em comparação ao comprimento de onda) para um jato cilíndrico ($\mathbf{x} = (R, \Phi, x_1)$ e $\mathbf{y} = (\sigma, \phi, y_1)$). A sua função de Green recíproca, G_1 , é dada pela eq. (3.28).

$$G_1(\mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left\{ a_0(\omega) \left(1 - \frac{1}{4} \gamma^2 (y_2^2 + y_3^2) \right) - i \gamma a_1(\omega) (y_2 \cos \Phi + y_3 \sin \Phi) - \frac{1}{4} \gamma^2 a_2(\omega) ((y_2^2 + y_3^2) \cos 2\Phi + 2y_2 y_3 \sin 2\Phi) \right\} e^{-i\omega t^*} \quad (3.28)$$

em que os valores das constante são dados por:

$$a_0(\omega) = \frac{1}{4\pi} \quad a_1(\omega) = \frac{\rho_0(1-M_\alpha)^2 \gamma_0}{2\pi\gamma(\rho_\infty + \rho_0(1-M_\alpha)^2)} \quad a_2(\omega) = \frac{\rho_0(1-M_\alpha)^2 \gamma_0^2}{2\pi\gamma^2(\rho_\infty + \rho_0(1-M_\alpha)^2)}$$

$$\gamma = \omega \left(\frac{(1-M_\alpha)^2}{c_0^2} - \frac{\cos \theta}{c_\infty^2} \right)^{1/2} \quad \gamma_0 = \omega \frac{\sin \theta}{c_\infty} \quad t^* = t - \frac{(|\mathbf{x}| - y_1 \cos \theta)}{c_\infty}$$

$$M_\alpha = \frac{U_1 \cos \theta}{c_\infty}$$

A função de Green recíproca, G_1 , se relaciona com a função de Green, G_D , conforme:

$$G_D(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau) = \frac{\rho_\infty}{\rho_0(1-M_r)^2} G_1(\mathbf{y}, \tau | \mathbf{x}, t) \quad (3.29)$$

Uma vez definida a função de Green do problema, as derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial G_D}{\partial y_i} = -\frac{i\omega g_{iBF}^*}{4\pi|\mathbf{x}|c_\infty} e^{-i\omega t^*} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 G_D}{\partial y_i \partial y_j} = -\frac{\omega^2 D_{ijBF}^*}{4\pi|\mathbf{x}|c_\infty^2} e^{-i\omega t^*} \quad (3.31)$$

com os valores de g_{iBF}^* dados por :

$$g_{1BF}^* = \frac{\rho_\infty \cos \theta}{\rho_0(1-M_\alpha)^2} \quad g_{2BF}^* = \frac{2\rho_\infty \sin \theta \cos \phi}{\rho_\infty + \rho_0(1-M_\alpha)^2} \quad g_{3BF}^* = \frac{2\rho_\infty \sin \theta \sin \phi}{\rho_\infty + \rho_0(1-M_\alpha)^2}$$

e os de D_{ij}^* (Dowling et al.,1978) por:

$$D_{11BF}^* = \frac{\rho_\infty \cos^2 \theta}{\rho_0(1-M_\alpha)^2}$$

$$D_{22BF}^* = \frac{\epsilon^2 \rho_\infty}{2\rho_0(1-M_\alpha)^2} + \frac{\rho_\infty \sin^2 \theta \cos 2\phi}{\rho_\infty + \rho_0(1-M_\alpha)^2}$$

$$D_{33BF}^* = \frac{\epsilon^2 \rho_\infty}{2\rho_0(1-M_\alpha)^2} - \frac{\rho_\infty \sin^2 \theta \cos 2\phi}{\rho_\infty + \rho_0(1-M_\alpha)^2}$$

$$D_{13BF}^* = \frac{2\rho_\infty \cos \theta \sin \theta \sin \phi}{\rho_\infty + \rho_0(1-M_\alpha)^2}$$

$$D_{12BF}^* = \frac{2\rho_\infty \cos \theta \sin \theta \cos \phi}{\rho_\infty + \rho_0(1-M_\alpha)^2}$$

$$D_{23BF}^* = \frac{2\rho_\infty \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi}{\rho_\infty + \rho_0(1-M_\alpha)^2}$$

onde $\epsilon^2 = (1 - M_\alpha)^2 \frac{c_\infty^2}{c_0^2} - \cos^2 \theta$.

3.5 SOLUÇÃO PARA O LIMITE DE ALTA FREQUÊNCIA – GOLDSTEIN

(1982)

Goldstein (1982) derivou fórmulas para emissão sonora em alta frequência de multipolos pontuais em movimento, envoltos por um escoamento médio unidirecional arbitrário. A seguinte equação representa a formulação base do problema.

$$\mathcal{L}G_G = c_\infty^2 \frac{D}{Dt} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) \quad (3.32)$$

onde \mathcal{L} é o operador $\frac{D_0^3}{Dt^3} + \left(2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot\right) c_0^2 \nabla$, da eq. (2.15), e G_G é a função de Green.

As derivadas de G_G podem ser obtidas inspecionando as eqs. (3.15) e (5.9) de (Goldstein,1982):

$$\frac{\partial G_G}{\partial y_i} = -\frac{i\omega g_{iAF}^*}{4\pi|x|c_\infty} e^{-i\omega t^*} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 G_G}{\partial y_i \partial y_j} = -\frac{\omega^2 D_{ijAF}^*}{4\pi|x|c_\infty^2} e^{-i\omega t^*} \quad (3.34)$$

com os valores de g_{iAF}^* dados por :

$$g_{iAF}^* = \frac{v_i}{\frac{c_0}{c_\infty} (1 - M \cos \theta)}$$

e os de D_{ijAF}^* por:

$$D_{ijAF}^* = \frac{v_i v_j}{\frac{c_0}{c_\infty} (1 - M \cos \theta)}$$

onde $\mathbf{v} = (\cos \theta, \epsilon \cos \phi, \epsilon \sin \phi)$.

É importante ressaltar que a solução da equação de Lilley para as altas frequências de Goldstein é válida apenas para ângulos θ fora do cone de silêncio.

3.6 RELAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DOWLING, GOLDSTEIN E MUSAFIR

As funções de Green das eqs. (3.16), (3.27b) e (3.32) são soluções de equações diferentes — tanto o operador quanto a fonte. Dessa forma é necessário relacionar as funções G_D e G_G com G .

Após simplificar a eq. (3.32) utilizada por Goldstein para o caso de escoamento uniforme e isotérmico, obtém-se:

$$\left\{ \frac{D_0^2}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \right\} G_G = c_\infty^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau), \quad (3.35)$$

enquanto que a eq. (3.27b) utilizada por Dowling et al., pode ser escrita como:

$$\left\{ \frac{D_0^2}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \right\} G_D = c_0^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) \quad (3.36)$$

Da mesma forma, a equação utilizada neste trabalho (eq. (3.16)), pode ser escrita como:

$$\left\{ \frac{D_0^2}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \right\} G = C^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau). \quad (3.37)$$

Assim, após comparar as equações acima, conclui-se que:

$$G = \frac{c^2 G_D}{c_0^2} \quad (3.38)$$

e

$$G = \frac{c^2 G_G}{c_\infty^2}. \quad (3.39)$$

4 ESTIMANDO O ESPECTRO DO RUÍDO DO JATO

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será construído um modelo matemático seguindo os passos do modelo de Musafir (2006), que serão revistos e, em alguns pontos, modificados. O modelo é baseado na solução geral da equação de Lilley discutida na seção (3.3) (eq. (3.18)) e tem o objetivo de prever o espectro do ruído do jato para qualquer temperatura a partir do espectro do jato frio a 90° . A partir da solução para a flutuação de pressão será obtida uma formulação para a densidade espectral de potência, $\tilde{P}(\omega)$, onde será considerada a forma no domínio da frequência dos coeficientes g_i e D_{ij} , provenientes das derivadas da função de Green (discutidos nas seções 3.4-3.6). Os termos que representam os gradientes de velocidade e temperatura serão modelados. Serão obtidas expressões nos limites de baixa e alta frequências para os parâmetros do modelo, que serão combinados para que possam ser aplicados para todo o espectro. Será discutida uma aproximação para a temperatura na região das principais fontes. Finalmente, uma equação relacionando o espectro do jato quente e frio com o espectro do jato frio a 90° será apresentada. No capítulo seguinte será apresentada a comparação do modelo com dados experimentais, anteriormente (Musafir, 2006) realizada apenas para $\theta = 90^\circ$.

4.2 EQUAÇÃO PARA FLUTUAÇÃO DE PRESSÃO

A equação base do modelo é a eq. para flutuação de pressão (eq. (3.26)),

em que foram incluídos os termos fonte \mathbf{f}^* e q :

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty} C^{-2} \left\{ (\nabla \nabla)_0 G : \mathbf{T} + 2\alpha C^{-1} \nabla M \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla G^* - \left(T_{tt} \frac{\nabla c_0^2}{c_0^2} - \mathbf{f}^* \right) \cdot \nabla G + \frac{\partial G}{\partial t} C q \right\} d\mathbf{y} d\tau \quad (4.1)$$

onde $C = (1 - M_\alpha)$ e as fontes são dadas por:

$$q = (\gamma - 1) \mathbf{v}' \cdot \nabla p' - \nabla \cdot (c^2 \rho \mathbf{v}') \quad (4.2)$$

$$\mathbf{f}^* = \rho \mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \nabla c_0^2 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{T} = \rho c_0^2 \mathbf{v}' \mathbf{v}' \quad (4.4)$$

É possível mostrar que a razão entre a contribuição para o campo do primeiro termo de q e a de \mathbf{T} é da ordem de M^2 , dado que:

$$O\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}' \cdot \nabla p'\right) \simeq \omega U \frac{1}{d} \rho_0 U^2 = \frac{U}{d} U \frac{1}{d} \rho_0 U^2 = \frac{U^4}{d^2} \rho_0 \quad (4.5)$$

e

$$O(\nabla \cdot \nabla \cdot (\rho_0 c_0^2 \mathbf{v}' \mathbf{v}')) \simeq \frac{1}{d^2} \rho_0 c_0^2 U^2 = \rho_0 c_0^2 \frac{U^2}{d^2}. \quad (4.6)$$

Nesse caso, o primeiro termo de q (eq. (4.2)) pode ser desprezado para escoamentos de baixa velocidade. O segundo termo da fonte q será abandonado em um primeiro momento e reconsiderado na seção (4.5). Musafir (2006) argumentou que esse termo tem a eficiência de um quadripolo e que seria menos relevante que \mathbf{f}^* , que possui a eficiência de um dipolo. Dessa forma, a fonte q será considerada, por enquanto, nula.

Após substituir $q = 0$ e as eqs. (4.3) e (4.4) na eq. (4.1), obtemos:

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty} C^{-2} \rho c_0^2 \left\{ (\nabla \nabla)_0 G : \mathbf{uu} + 2 \cos \theta C^{-1} \nabla M \cdot \mathbf{uu} \cdot \nabla G^* - \left(u_t u_t \frac{\nabla c_0^2}{c_0^2} - \mathbf{uu} \cdot \frac{\nabla c_0^2}{c_0^2} \right) \cdot \nabla G \right\} d\mathbf{y} d\tau, \quad (4.7)$$

onde $\mathbf{uu} = \mathbf{v}'\mathbf{v}'$.

Os dois últimos termos da eq. (4.7) podem ser simplificados ao se considerar escoamento cilíndrico e paralelo:

$$2\alpha C^{-1} \nabla M \cdot \mathbf{uu} \cdot \nabla G^* = 2\alpha C^{-1} \frac{dM}{dr} \left(\frac{dG}{dy_1} u_1 u_r + \frac{dG}{d\phi} u_\phi u_r \right)$$

e

$$\left(u_r u_r \frac{\nabla c_0^2}{c_0^2} - \mathbf{uu} \cdot \frac{\nabla c_0^2}{c_0^2} \right) \cdot \nabla G = -\frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{uu} \cdot \nabla G^* = -\frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} \left(\frac{dG}{dy_1} u_1 u_r + \frac{dG}{d\phi} u_\phi u_r \right).$$

Após simplificar a eq. (4.7), obtemos:

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty} C^{-2} \rho_0 c_0^2 \left\{ (\nabla \nabla)_0 G : \mathbf{uu} + \left(\frac{dG}{dy_1} u_1 u_r + \frac{dG}{d\phi} u_\phi u_r \right) \left(2 \cos \theta C^{-1} \frac{dM}{dr} + \frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} \right) \right\} d\mathbf{y} d\tau. \quad (4.8)$$

onde foi assumido $\rho = \rho_0$.

Uma vez que $\rho_0 c_0^2 = \rho_\infty c_\infty^2 = \text{constante}$, o termo $\rho_0 c_0^2$ será substituído por $\rho_\infty c_\infty^2$, a fim de se remover ρ_∞ de dentro da integral na eq. (4.8):

$$p' = \rho_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty} C^{-2} c_\infty^2 \left\{ (\nabla \nabla)_0 G : \mathbf{uu} + \left(\frac{dG}{dy_1} u_1 u_r + \frac{dG}{d\phi} u_\phi u_r \right) \left(2 \cos \theta C^{-1} \frac{dM}{dr} + \frac{1}{c_\infty^2} \frac{dc_\infty^2}{dr} \right) \right\} d\mathbf{y} d\tau. \quad (4.9)$$

4.3 DENSIDADE ESPECTRAL DE POTENCIA $\tilde{P}(\mathbf{x}, \omega)$

$$\overline{p'^2(\mathbf{x}, \Delta t)} = \overline{p'(\mathbf{x}, t)p'(\mathbf{x}, t + \Delta t)}.$$

Assim, $\overline{p'^2(\mathbf{x}, \Delta t)}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \overline{p'^2(\mathbf{x}, \Delta t)} = & \rho_\infty^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \int_{V'} C^{-4} c_\infty^4 \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \right)_0 G \right] \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y'_k \partial y'_l} \right)_0 G' \right] \overline{u_i u_j u_k u_l} + \right. \\ & \left. \left(\frac{dG}{dy_1} \frac{dG'}{dy'_1} \overline{u_1 u_r u_1 u_r} + \frac{dG}{d\phi} \frac{dG'}{d\phi'} \overline{u_\phi u_r u_\phi u_r} \right) \left(2 \cos \theta C^{-1} \frac{dM}{dr} + \frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} \right) \left(2 \cos \theta C'^{-1} \frac{dM'}{dr'} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{c_0'^2} \frac{dc_0'^2}{dr'} \right) \right\} dy dy' dt dt' \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde os termos $\overline{u_i u_j u_k u_l} = \overline{u_i u_j(\mathbf{y}, \tau) u_k u_l(\mathbf{y}', \tau')}$ representam a inter-correlação com separação espacial e temporal dos componentes da fonte. Ribner (1969) apontou que a contribuição dos termos que contem $\overline{u_i u_j u_k u_l}$ é não nula, apenas quando $ijkl$ forem iguais em pares. Desse modo, a contribuição do termo contendo o acoplamento $\overline{u_1 u_r u_\phi u_r}$, que surge devido ao quadrado do segundo termo na eq. (4.10), deve ser nula. Já o produto entre o primeiro e segundo termo da eq. (4.9) foi abandonado pela consideração de que $\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j}$ e $\frac{dG}{dy_i}$ devem estar em quadratura, visto que as transformadas de Fourier das derivadas da função de Green (eqs. (3.30), (3.31), (3.33) e (3.34)) nos limites de alta e baixa frequência, podem ser representadas por:

$$\left(\frac{\partial G(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i} \right)_0 = -\frac{ik}{4\pi|\mathbf{x}|} g_i^* e^{-i\omega t^*} \quad (4.11)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 G(\mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} \right)_0 \sim -\frac{k^2}{4\pi|\mathbf{x}|} D_{ij}^* e^{-i\omega t^*}, \quad (4.12)$$

de forma que $\left(\frac{dG}{dy_i}\right)_0$ possui uma dependência de $-i\omega$ e $\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j}\right)_0$ de $-\omega^2$, o que representa uma defasagem de 90° (quadratura) entre as duas funções. Assim, espera-se que o valor médio para o produto de duas funções em quadratura seja nulo.

Será assumido que as fontes são compactas e que podem ser representadas pelos valores típicos correspondentes à região de maior intensidade de turbulência. Assim, a eq. (4.10) pode ser simplificada conforme:

$$\begin{aligned} \overline{p'^2(\mathbf{x}, \Delta t)} = & \rho_\infty^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \int_{V'} C^{-4} c_\infty^4 \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \right)_0 G \right] \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} \right)_0 G \right] \overline{u_i u_j u_k u_l} + \right. \\ & \left. \left(\left(\frac{dG}{dy_1} \right)^2 \overline{u_1 u_r u_1 u_r} + \left(\frac{dG}{d\phi} \right)^2 \overline{u_\phi u_r u_\phi u_r} \right) \left(2 \cos \theta C^{-1} \frac{dM}{dr} + \frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} \right)^2 \right\} dy dy' d\tau d\tau', \end{aligned} \quad (4.13)$$

Uma vez que os efeitos dos gradientes da temperatura e da velocidade média foram explicitados, deve ser aceitável aproximar a função de Green pela correspondente ao caso de um escoamento uniforme em meio homogêneo (discutido nas seções 3.4 e 3.5). Nesse caso, G responde essencialmente pelo atraso temporal entre emissão e recepção, e por um fator de amplitude $(4\pi|\mathbf{x}|)^{-1}$, enquanto suas derivadas espaciais introduzem fatores de direcionalidade (que consideram os efeitos do escoamento) multiplicadas por $\frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t}$ (Musafir, 2006). Essa propriedade pode ser utilizada para efetuar as integrais em τ e τ' ao mesmo tempo que G é substituída, obtendo-se :

$$\begin{aligned} \overline{p'^2(\mathbf{x}, \Delta t)} = & \frac{\rho_\infty^2}{(4\pi|\mathbf{x}|)^2} \int_\infty \int_\infty \left\{ D_{ij} D_{kl} \left(\frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial \Delta t} \right)^4 \overline{u_i u_j u_k u_l}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \Delta t^*) + \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial \Delta t} \right)^2 \left(g_1^2 \overline{u_1 u_r u_1 u_r}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \Delta t^*) + \langle g_\phi^2 \rangle \right. \right. \\ & \left. \left. \overline{u_\phi u_r u_\phi u_r}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \Delta t^*) \right) \left(2 \cos \theta C^{-1} \frac{dM}{dr} + \frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} \right)^2 \right\} dy dy' \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde os coeficientes D_{ij} estão relacionados às segundas derivadas de G , e g_1 e g_ϕ às primeiras derivadas, todos esses incluindo o fator $C^{-2}c_\infty^2$; $\langle g_\phi^2 \rangle$ representa a média de g_ϕ^2 em relação ao ângulo azimutal; Δt^* representa a diferença de atraso temporal entre emissão e recepção para duas fontes (\mathbf{y} e \mathbf{y}'), sendo dada, no limite em que se desconsidera convecção das fontes para a aproximação de campo afastado, como:

$$\Delta t^* = \Delta t + \frac{\mathbf{y}-\mathbf{y}'}{c_\infty} \cdot \mathbf{e}_x \quad (4.15)$$

A densidade espectral de potência $\tilde{P}(\mathbf{x}, \omega)$ é obtida ao se fazer a transformada de Fourier da eq. (4.14):

$$\begin{aligned} \tilde{P} = \frac{\rho_\infty^2}{(4\pi|\mathbf{x}|)^2} \int_\infty \int_\infty \left\{ k^4 D_{ij} D_{kl} \widetilde{u_i u_j u_k u_l} \right. \\ \left. + k^2 \left(g_1^2 \widetilde{u_1^2 u_r^2} + \langle g_\phi^2 \rangle \widetilde{u_\phi^2 u_r^2} \right) \left(2 \cos \theta C^{-1} \frac{dM}{dr} + \frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} \right)^2 \right\} d\mathbf{y} d\mathbf{y}' \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde \sim representa a transformada de Fourier.

Será assumido que a dupla integral de volume da transformada de Fourier da inter-correlação das fontes pode ser representada por uma distribuição espectral única $H(\omega)$ para todos os $\widetilde{u_i u_j u_k u_l}$, multiplicada por funções C_{ijkl} que expressam a importância relativa desses termos, como é usualmente assumido — por exemplo em (Goldstein e Leib, 2008). Como as fontes estão sendo consideradas compactas, têm-se que o integrando só é significativo para valores relativamente pequenos de $|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|$ em relação ao comprimento de onda. Por outro lado, a hipótese de que pode-se trabalhar com uma fonte “típica” equivale a considerar que a integral em \mathbf{y} pode ser vista como praticamente independente da posição para as principais fontes,”. Assim, tem-se que:

$$\int_{\infty} \int_{\infty} \overline{u_i u_j u_k u_l} dy dy' = H(\omega) C_{ijkl}, \quad (4.17)$$

com os C_{ijkl} expressos por fatores adimensionais, com $C_{2222} = C_{3333} = 1$.

Desse modo, os termos dentro da integral dupla na eq. (4.16) podem ser expressos conforme:

$$\int_{\infty} \int_{\infty} D_{ij} D_{kl} \overline{u_i u_j u_k u_l} dy dy' = H(\omega) F(M, \theta, R_T, \omega); \quad (4.18)$$

$$\int_{\infty} \int_{\infty} g_1^2 \overline{u_1^2 u_r^2} dy dy' = H(\omega) g_1^2 K_1; \quad (4.19)$$

e

$$\int_{\infty} \int_{\infty} \langle g_{\phi}^2 \rangle \overline{u_{\phi}^2 u_r^2} dy dy' = H(\omega) \langle g_{\phi}^2 \rangle K_2, \quad (4.20)$$

onde $F = D_{ij} D_{kl} C_{ijkl}$; $K_1 = C_{1r1r}$; e $K_2 = C_{\phi r \phi r}$.

A densidade espectral de potência é, então, dada por:

$$\tilde{P}(\omega) = H(\omega) \frac{\rho_{\infty}^2}{(4\pi|x|)^2} \left\{ k^4 F + k^2 (g_1^2 K_1 + \langle g_{\phi}^2 \rangle K_2) \left(2 \cos \theta C^{-1} \frac{dM}{dr} + \frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} \right)^2 \right\}, \quad (4.21)$$

onde foi assumido que as derivadas $\frac{dM}{dr}$ e $\frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr}$ são constantes na região das principais fontes.

Para considerar que as fontes estão em movimento com um número de Mach de convecção M_c e que cada derivada espacial da função de Green introduz também um fator Doppler de convecção $C_c = 1 - M_{\alpha}$ (Ffowcs Williams, 1963), a eq. (4.21) deve ser modificada conforme:

$$\tilde{P}(\omega) = H(\omega) \frac{\rho_{\infty}^2}{(4\pi|x|)^2} \left\{ k^4 C_c^{-4} F + k^2 C_c^{-2} (g_1^2 K_1 + \langle g_{\phi}^2 \rangle K_2) \left(2 \cos \theta C^{-1} \frac{dM}{dr} + \frac{1}{c_0^2} \frac{dc_0^2}{dr} \right)^2 \right\}, \quad (4.22)$$

4.4 MODELAGEM DOS GRADIENTES DE VELOCIDADE E TEMPERATURA

Musafir (2006) considerou a proporcionalidade $\frac{dM}{dr}$ encontrada por Davies, Fisher e Barrat (1963) e assumiu que deveria ser razoável supor que $\frac{dT}{dr}$ tivesse um perfil semelhante ao perfil de velocidade:

$$\frac{dM}{dr} \sim \beta \frac{\omega}{c} = \beta k \quad (4.23)$$

e

$$c_0^{-2} \frac{dc_0^2}{dr} \sim \frac{\varepsilon \delta}{d} \quad (4.24)$$

onde ε e β são fatores de proporcionalidade, d é o diâmetro do jato, $\delta = \frac{c_\infty^2 - c_j^2}{\frac{1}{2}(c_\infty^2 + c_j^2)}$ é a diferença das temperaturas do campo afastado (ambiente) e nominal do jato, dividida por uma aproximação da temperatura média do jato.

Ao substituirmos $\frac{dM}{dr} \sim \beta k$ na eq. (4.22), o termo que inclui o cisalhamento médio $k^2 C_c^{-2} (g_1^2 A + \langle g_\theta^2 \rangle B) 4C^{-2} \cos^2 \theta \left(\frac{dM}{dr}\right)^2$, passa a ser modelado por $k^4 C_c^{-2} (g_1^2 K_1 + \langle g_\phi^2 \rangle K_2) 4C^{-2} \cos^2 \theta \beta^2$. Observa-se, que a dependência com k^4 é devida a uma distribuição de tensões, e é a mesma dependência que surge para o termo $(\nabla \nabla)_0 G: \mathbf{u}\mathbf{u}$, o que é esperado para jatos isotérmicos. Esses dois termos serão chamados daqui em diante de “quadripolos antigos”, por não considerarem o efeito do gradiente de temperatura.

Já para os termos que contém o gradiente de temperatura, é esperada uma dependência com k^2 , representando o dipolo previsto por Morfey (1973) para jatos quentes. Assim, sua modelagem seria um pouco mais complexa, e Musafir (2006) utilizou a seguinte relação para ε :

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 \beta k d + \varepsilon_2) / M_j \quad (4.25)$$

onde ε_1 e ε_2 são constantes e o fator $1/M_j$ foi incluído para manter uma certa similaridade entre os termos $c_0^{-2} \frac{dc_0^2}{dr}$ e $M^{-1} \frac{dM}{dr}$. A parte associada a ε_1 dará origem a um termo com eficiência quadripolar e a parte associada a ε_2 dará origem a um termo com eficiência dipolar. Ambos os componentes estarão associados com o fator dipolar k^2 . Os novos termos com eficiência quadripolar serão chamados daqui em diante de “quadripolos novos”, por estarem relacionados com o gradiente de temperatura do jato.

Substituindo na eq. (4.22) e colocando k^4 em evidência, obtemos:

$$\tilde{P}(\omega) = H(\omega) k^4 \frac{\rho_\infty^2}{(4\pi|x|)^2} \left\{ C_c^{-4} F + C_c^{-2} (g_1^2 K_1 + \langle g_\phi^2 \rangle K_2) \left(2 \cos \theta C^{-1} \beta + \frac{\delta}{M_j} \left(\varepsilon_1 \beta + \frac{\varepsilon_2}{k d} \right) \right)^2 \right\} \quad (4.26)$$

4.5 MODELAGEM DA FONTE q

Musafir (2006) arguiu que o segundo termo da fonte q (eq. (4.2)) só é relevante quando houver gradiente de temperatura, de forma que poderia ser considerado ao se aumentar o valor de ε_1 . Como essa contribuição não afetaria o termo cruzado $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, optou-se por remover o fator 2 no acoplamento de ε_1 e ε_2 . Assim, após expandir o último termo da eq. (4.26) e remover o citado fator 2, obtém-se:

$$\tilde{P}(\omega) = H(\omega) \frac{\rho_\infty^2}{(4\pi|x|)^2} k^4 \left\{ C_c^{-4} F + C_c^{-2} (g_1^2 K_1 + \langle g_\phi^2 \rangle K_2) \left[4 C^{-2} \cos^2 \theta \beta^2 + \left(\frac{\delta}{M_j} \right)^2 \left(\varepsilon_1^2 \beta^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{(k d)^2} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \beta}{k d} \right) + 4 C^{-1} \cos \theta \left(\frac{\delta}{M_j} \right) \left(\varepsilon_1 \beta + \frac{\varepsilon_2}{k d} \right) \right] \right\} \quad (4.27)$$

4.6 FATORES DE DIRECIONALIDADE

Os fatores D_{ij} são obtidos, nos limites de alta e baixa frequências a partir dos D_{ij}^* obtidos nas seções (3.4) e (3.5) e dos fatores que relacionam as diferentes funções de Green (eqs. (3.8) e (3.9)). Assim temos para a baixa e alta frequência respectivamente:

$$D_{ij_{BF}} = \frac{D_{ij_{BF}}^*}{R_T}, \quad (4.28)$$

$$D_{ij_{AF}} = D_{ij_{AF}}^*, \quad (4.29)$$

onde $R_T = \frac{\rho_\infty}{\rho_0} = \left(\frac{c_0}{c_\infty}\right)^2$.

Analogamente,

$$g_{1_{BF}} = \frac{1}{R_T} g_{1_{BF}}^*, \quad (4.30)$$

$$g_{1_{AF}} = g_{1_{AF}}^*, \quad (4.31)$$

$$\langle g_\phi^2 \rangle_{BF} = \frac{1}{2R_T^2} \langle (g_{2_{BF}}^*)^2 + (g_{3_{BF}}^*)^2 \rangle, \quad (4.32)$$

e

$$\langle g_\phi^2 \rangle_{AF} = \frac{1}{2} \langle (g_{2_{AF}}^*)^2 + (g_{3_{AF}}^*)^2 \rangle. \quad (4.33)$$

4.7 CÁLCULO DA FUNÇÃO DE DIRECIONALIDADE

Musafir (1990) fornece uma expressão geral para a direcionalidade $F = D_{ij} D_{kl} C_{ijkl}$ de um quadripolo pontual axissimétrico imerso em um escoamento paralelo, uniforme e isotérmico:

$$F(\theta, M, R_T) = (1 + B)D_{11}^2(\theta) + \{D_{22}^2(\theta) + D_{33}^2(\theta)\} + 4E(D_{12}^2(\theta) + D_{13}^2(\theta)) + r_{12}\sqrt{(1 + B)D_{11}(\theta)2(D_{22}(\theta) + D_{33}(\theta))} + r_{23}2D_{22}(\theta)D_{33}(\theta) \quad (4.34)$$

onde: $B = C_{1111} - 1$, $E = C_{1212}$, $r_{12} = \frac{C_{1122}}{\sqrt{(1+B)}}$ e $r_{23} = C_{2233}$.

Essa expressão também pode ser utilizada para o jato aquecido, quando conterà um fator adimensional de amplitude, de forma que para $\theta = 90$ e $R_T \neq 1$, F não será unitário.

Desse modo, temos que:

$$F_{BF}(\theta, M, R_T) = \frac{1}{C^4} \left\{ (1+B) \cos^4 \theta + \frac{1+r_{23}}{2} \epsilon^4 + 2r_{12} \sqrt{(1+B)} \epsilon^2 \cos^2 \theta \right\} + \frac{4}{(R_T+C^2)^2} \left\{ \left(A + \frac{1-r_{12}\sqrt{(1+B)}}{2} \right) \sin^2 2\theta + \frac{1-r_{23}}{2} \sin^4 \theta \right\}. \quad (4.35)$$

$$F_{AF}(\theta, M, R_T) = \frac{1}{R_T C^2} \{ B \cos^4 \theta + (\cos^2 \theta + \epsilon^2)^2 + 4A \epsilon^2 \cos^2 \theta \} \quad (4.36)$$

Para diminuir o número de constantes, decidiu-se por utilizar a modelagem dos C_{ijkl} discutida por Musafir (1990), baseada no fato de que a turbulência, enquanto fonte sonora, pode ser tratada como incompressível. Assim, os coeficientes r_{12} e r_{23} podem ser expressos em função de B , conforme:

$$r_{12} = -\frac{\sqrt{(1+B)}}{2} \quad r_{23} = \frac{B-1}{2} \quad (4.37)$$

Após substituir em (4.32) e (4.33), obtemos:

$$F_{BF} = \frac{1}{C^4} \left\{ (1+B) \cos^4 \theta + \frac{B+1}{4} \epsilon^4 - (1+B) \epsilon^2 \cos^2 \theta \right\} + \frac{4}{(R_T+C^2)^2} \left\{ E \sin^2 2\theta + \frac{3-B}{4} \sin^4 \theta \right\}, \quad (4.38)$$

e

$$F_{AF}(\theta, M, R_T) = \frac{1}{R_T C^2} \{ B \cos^4 \theta + (\cos^2 \theta + \epsilon^2)^2 + 4A \epsilon^2 \cos^2 \theta \}. \quad (4.39)$$

4.7.1 Direcionalidade Básica da Fonte

A direcionalidade básica $F_0(\theta)$, i.e. a direcionalidade da fonte no limite em que M_J e M_c são nulos e $R_T = 1$ é dada por (Musafir, 1990):

$$F_0(\theta) = 1 + B \cos^4 \theta + A \sin^2 2\theta, \quad (4.40)$$

onde $A = \frac{r_{12}\sqrt{(1+B)}-1}{2} + E$.

Para $A = B = 0$ a fonte é estatisticamente isotrópica. Essa hipótese será utilizada no cálculo da direcionalidade F :

$$F_{BF} = \frac{1}{C^4} \left\{ \cos^4 \theta + \frac{\epsilon^4}{4} - \epsilon^2 \cos^2 \theta \right\} + \frac{4}{(R_T + C^2)^2} \left\{ \sin^2 2\theta + \frac{3}{4} \sin^4 \theta \right\}, \quad (4.41)$$

e

$$F_{AF}(\theta, M, R_T) = \frac{1}{R_T C^2} (\cos^2 \theta + \epsilon^2)^2. \quad (4.42)$$

4.8 ESTENDENDO A MODELAGEM PARA TODO O ESPECTRO

Com o objetivo de que as funções F , g_1^2 e $\langle g_\phi^2 \rangle$ sejam válidas por todo o espectro, e não somente nos limites de alta e baixa frequência, Musafir (2006) propôs trata-las como uma combinação dos dois limites, conforme:

$$X = \frac{X_{BF} + a(kd)^n X_{AF}}{1 + a(kd)^n} \quad (4.43)$$

onde X é a quantidade em questão, e a e n são constantes a serem ajustadas.

4.9 CORREÇÃO PARA A TEMPERATURA DO ESCOAMENTO UNIFORME

A razão de temperatura R_T foi definida na seção (4.7) como:

$$R_T = \frac{c_0^2}{c_\infty^2} = \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \quad (4.44)$$

entretanto, para que seja considerada a temperatura na região das principais fontes (com maior intensidade de turbulência), Musafir (2006) aproximou a temperatura média nessa região pela média entre temperatura do jato T_J , e do meio em repouso T_∞ . Dessa forma, será utilizado um novo valor “corrigido” para R_T , conforme:

$$R_T = \frac{\frac{c_0^2 + c_\infty^2}{2}}{c_\infty^2} = \frac{R_T + 1}{2} \quad (4.45)$$

4.10 NÍVEL DE PRESSÃO SONORA POR FAIXA DE OITAVA (NPS)

Uma vez que os espectros do ruído de jato experimentais são fornecidos por faixa de terço de oitava, o NPS calculado é obtido a partir da integral de \tilde{P} por faixa de oitava. Assim, assume-se que a integral de \tilde{P} em uma faixa de frequência possa ser representada pelo valor correspondente à frequência central da faixa multiplicado pela largura de faixa Δf e pelo fator C_c^{-1} .

Desse modo, conhecendo o NPS em faixas de terço de oitava para o jato o frio a 90° , $S_{90,FRIO}$, o nível correspondente para valores arbitrários do ângulo θ e razão de temperatura R_T , $S(\theta, R_T)$, é dado por:

$$S_{\theta, R_T} = S_{90,FRIO} + 10 \log \left\{ C_c^{-5} F + C_c^{-3} (g_1^2 K_1 + \langle g_\phi^2 \rangle K_2) \left[4C^{-2} \cos^2 \theta \beta^2 + \left(\frac{\delta}{M_j} \right)^2 \left(\varepsilon_1^2 \beta^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{(kd)^2} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \beta}{kd} \right) + 4C^{-1} \cos \theta \left(\frac{\delta}{M_j} \right) \left(\varepsilon_1 \beta + \frac{\varepsilon_2}{kd} \right) \right] \right\} \quad (4.46)$$

onde $S_{90,FRIO} = 10 \log \left(\frac{\rho_{\infty}^2}{(4\pi|x|)^2} \frac{\Delta f}{p_{ref}^2} H(\omega) k^4 \right)$ e p_{ref} é a pressão de referência, geralmente escolhida como $0,2\mu\text{Pa}$.

5 RESULTADOS

O modelo de previsão foi comparado com dados experimentais do espectro do ruído de jato em faixas de 1/3 de oitavas obtidos no *NASA Glenn Research Center* por (Brown e Bridges, 2006) para diversos números de Mach. Os dados utilizados foram medidos para jatos com diâmetro $d = 0,0508m$ e, no caso do jato aquecido, $R_T = 2,88$.

Inicialmente assumiu-se que a velocidade de convecção das fontes era a mesma que a velocidade local do escoamento ($C_c = C$), entretanto essa hipótese levou a um excesso de amplificação convectiva e foi abandonada. Foi então utilizado $C_c = 1$, a fim de reduzir a amplificação. Nota-se que o fator Doppler de convecção C_c não foi considerado explicitamente por Goldstein e Lieb (2008) e Karabasov et al (2008) na amplificação convectiva.

Foram utilizados $a = 0,25$ e $n = 2$ para as constantes de interpolação discutidas na seção (2.8). Esses valores permitem uma transição suave entre as soluções correspondentes aos limites de baixa e alta frequência. Para o cálculos das funções F para as baixas e altas frequências (eq. 4.22 e 4.23) será assumido que a fonte é isotrópica, isto é, $B = 0$ e $E = -\frac{r_{12}\sqrt{(1+B)}-1}{2}$ (Musafir, 1990).

5.1 PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUÍDO DO JATO AQUECIDO A PARTIR DO JATO FRIO A 90 GRAUS, DESCONSIDERANDO OS EFEITOS DOS GRADIENTES

Em uma primeira análise escolheu-se por desconsiderar os gradientes de temperatura e velocidade média (o que implica em utilizar $K_1 = K_2 = 0$), a fim de investigar a importância desses termos. As Figuras 6-9 mostram a previsão do espectro do ruído do jato quente a partir do espectro do jato frio a 90°, onde os efeitos dos termos explicitados (gradientes de temperatura e velocidade média) foram desconsiderados. Previu-se o espectro para os ângulos θ de 90°, 60°, 45° e 30°, e números de Mach (M_j) de 0,35, 0,5, 0,7 e 0,9. Cada figura representa um conjunto de quatro gráficos, onde o número de Mach é mantido constante e o ângulo θ varia (por exemplo, a Figura 6 mostra a previsão do espectro do ruído do jato quente para $M_j = 0,35$ para os valores de $\theta = 90^\circ$ (Figura 6a), 60° (Figura 6b), 45° (Figura 6c) e 30° (Figura 6d)). Foram incluídos também os resultados de previsão que consideram apenas as soluções para as baixas e altas frequências separadamente. Nestas figuras, é possível observar que os efeitos dos gradientes são mais importantes para número de Mach pequeno e/ou ângulo polar alto. Ainda é possível identificar a falta de dipolos para as frequências mais baixas, principalmente para $M_j = 0,35$ e 0,5.

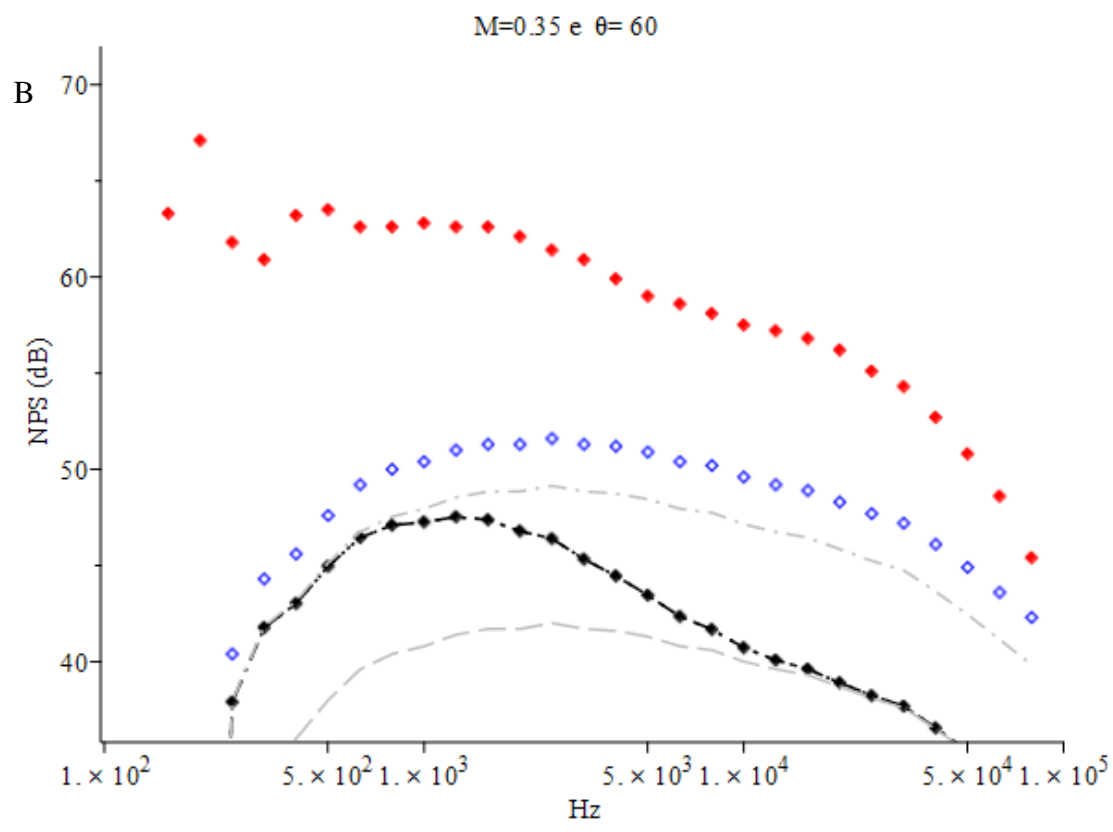
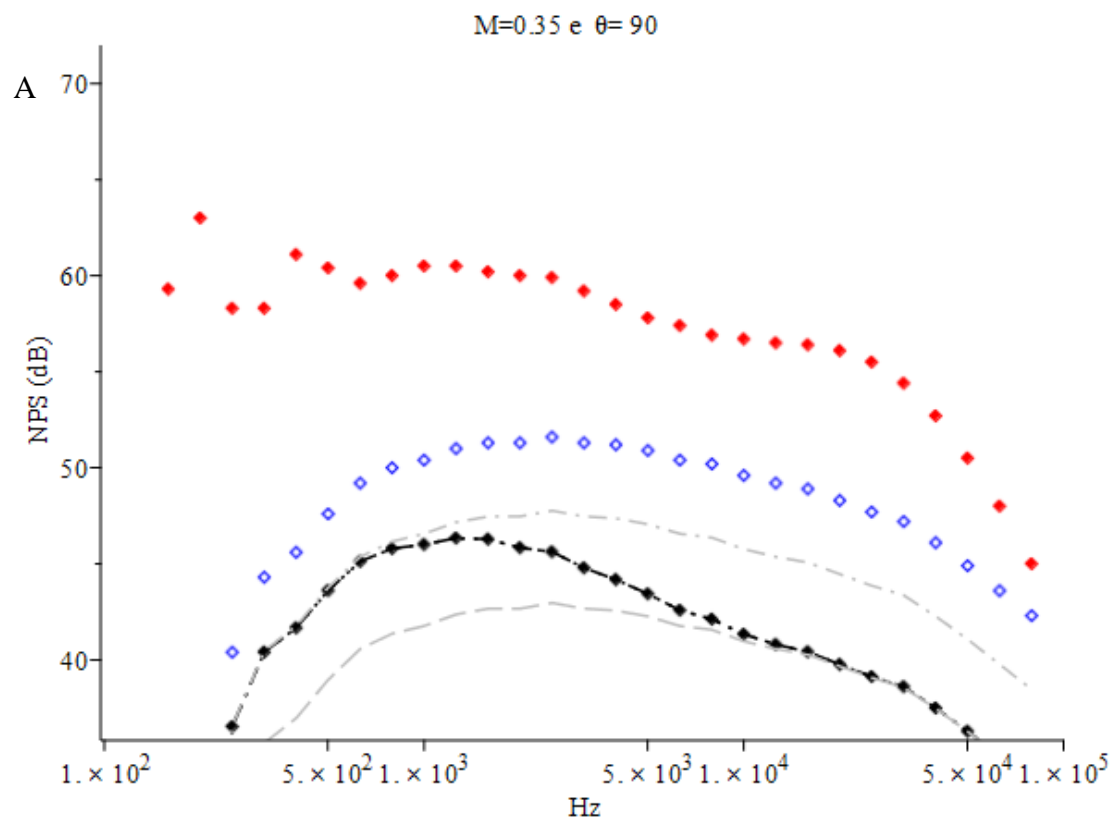


Figura 1 Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 90^\circ$ (A), 60° (B), 45° (C) e 30° (D). $M = 0,35$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão
 --- solução para baixas frequências; - · - solução para altas frequências.

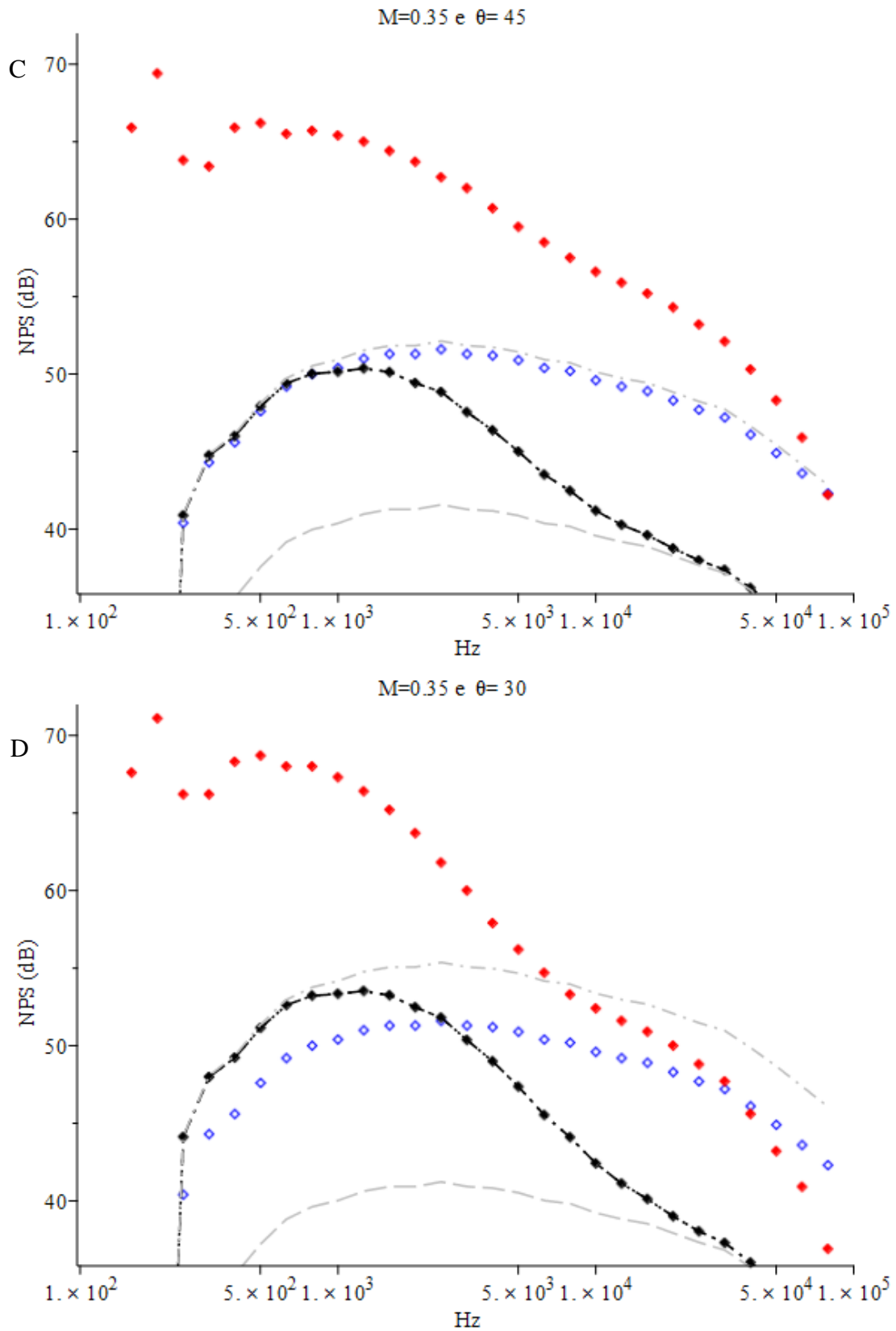


Figura 2 (continuação). Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 45^\circ$ (C) e 30° (D). $M = 0,35$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão; $---$ solução para baixas frequências; $- \cdot -$ solução para altas frequências.

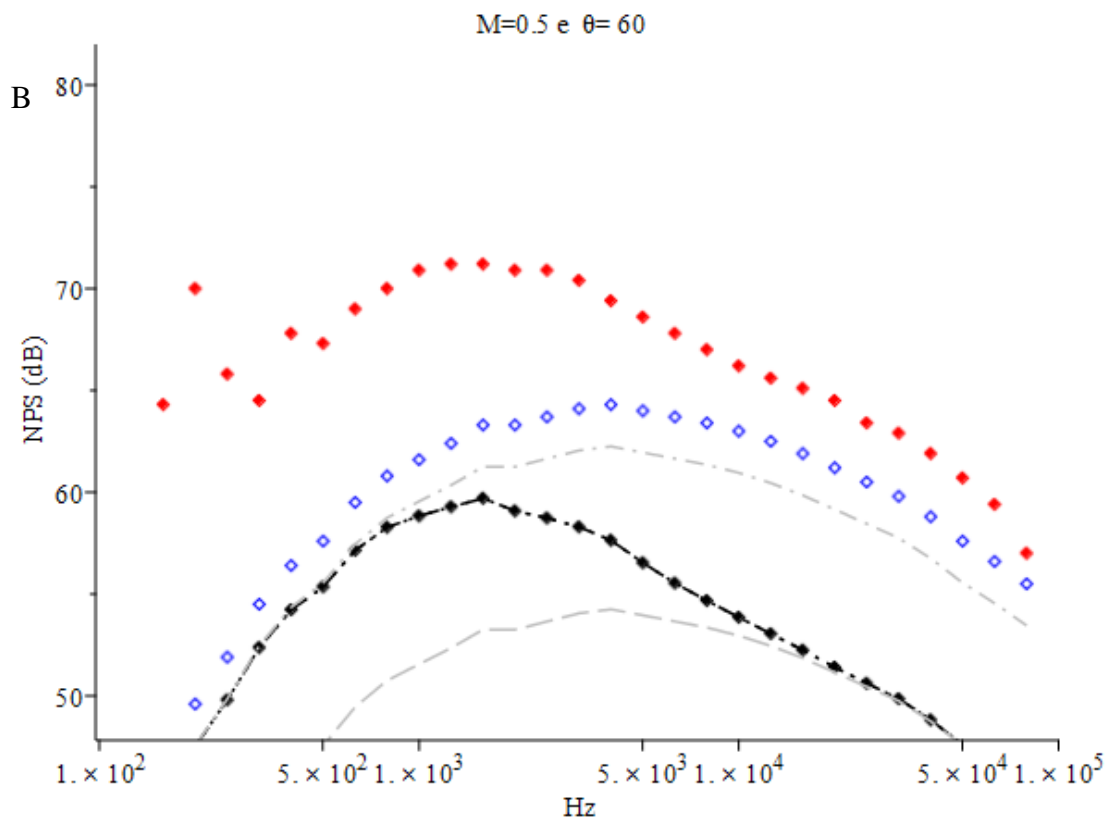
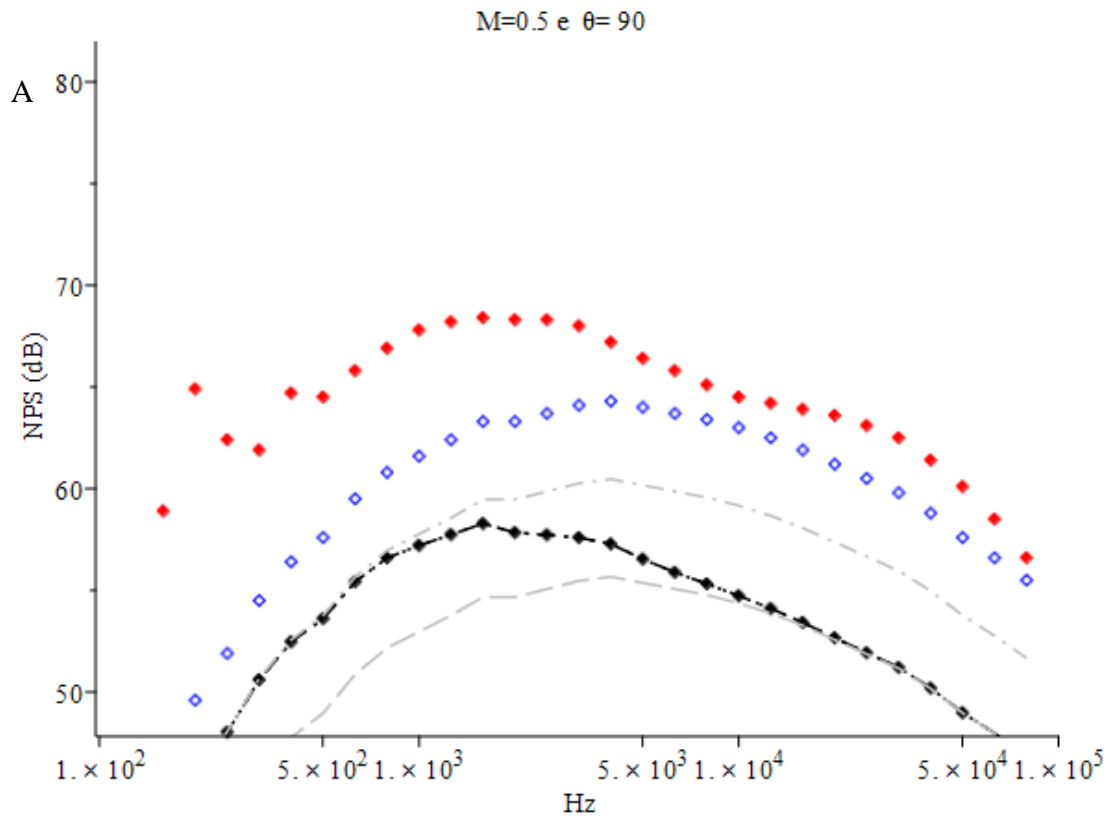


Figura 7 Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 90^\circ$ (A), 60° (B), 45° (C) e 30° (D). $M = 0,5$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão; $---$ solução para baixas frequências; $- \cdot -$ solução para altas frequências.

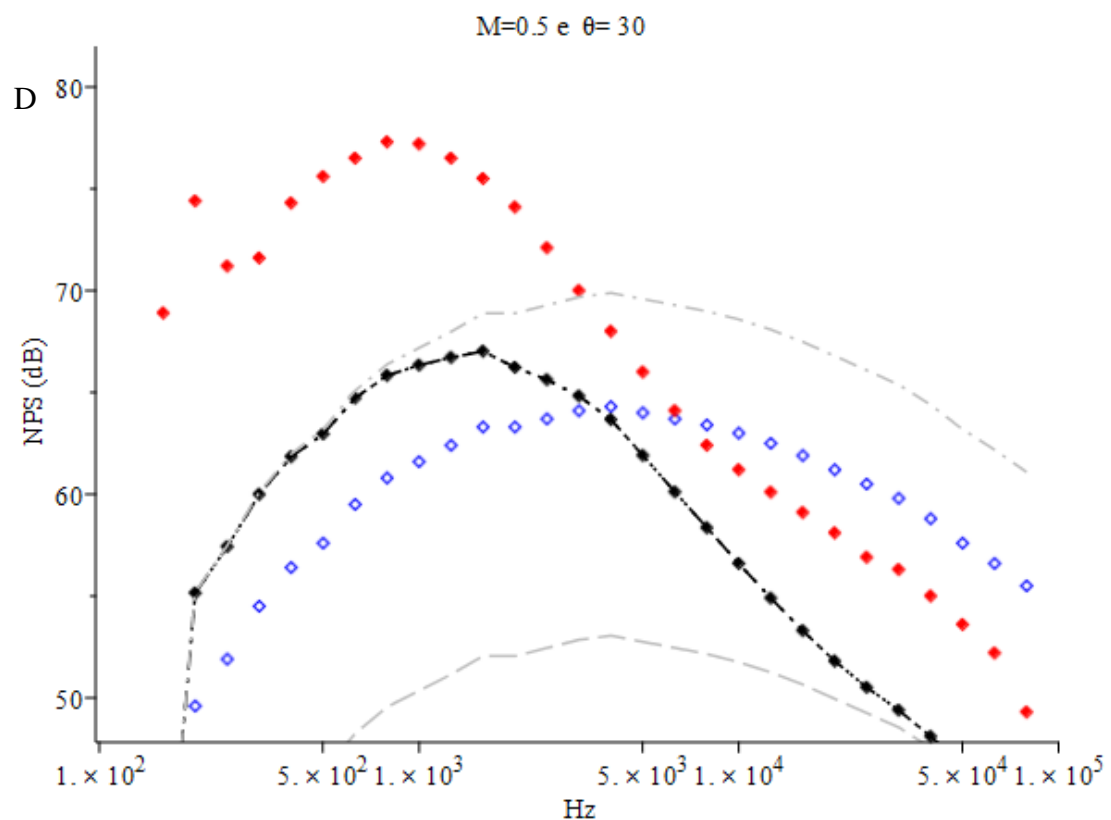
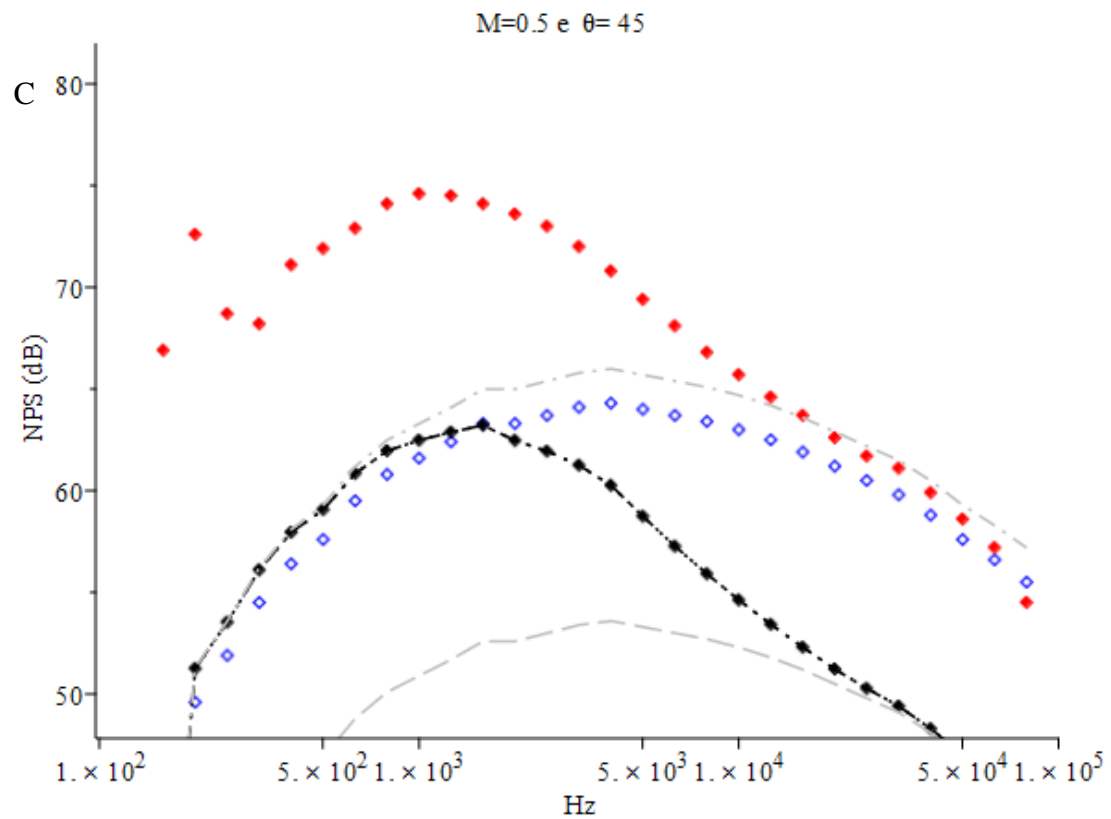


Figura 7 (continuação). Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 45^\circ$ (C) e 30° (D). $M = 0,5$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão; $- \cdot -$ solução para baixas frequências; $- -$ solução para altas frequências.

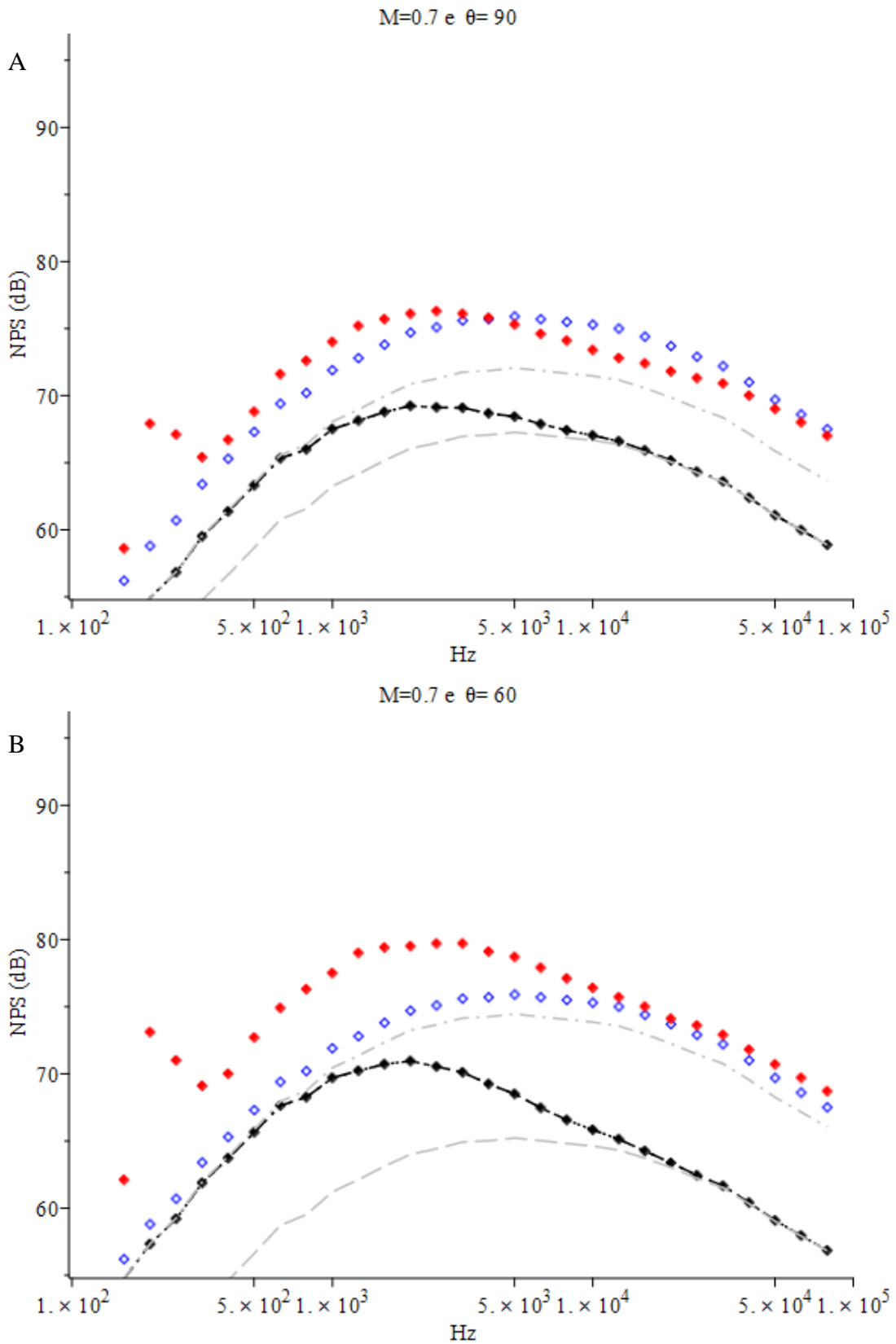


Figura 8 Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 90^\circ$ (A), 60° (B), 45° (C) e 30° (D). $M = 0,7$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão, $---$ solução para baixas frequências; $- - -$ solução para altas frequências.

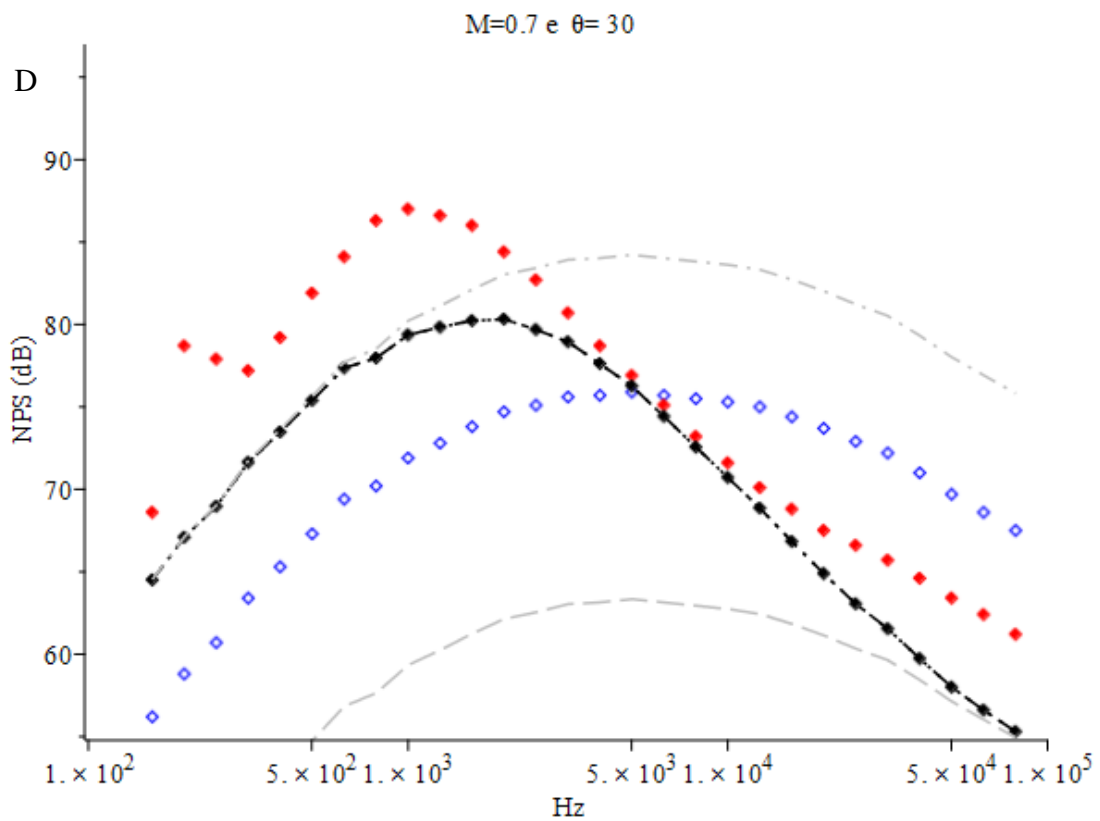
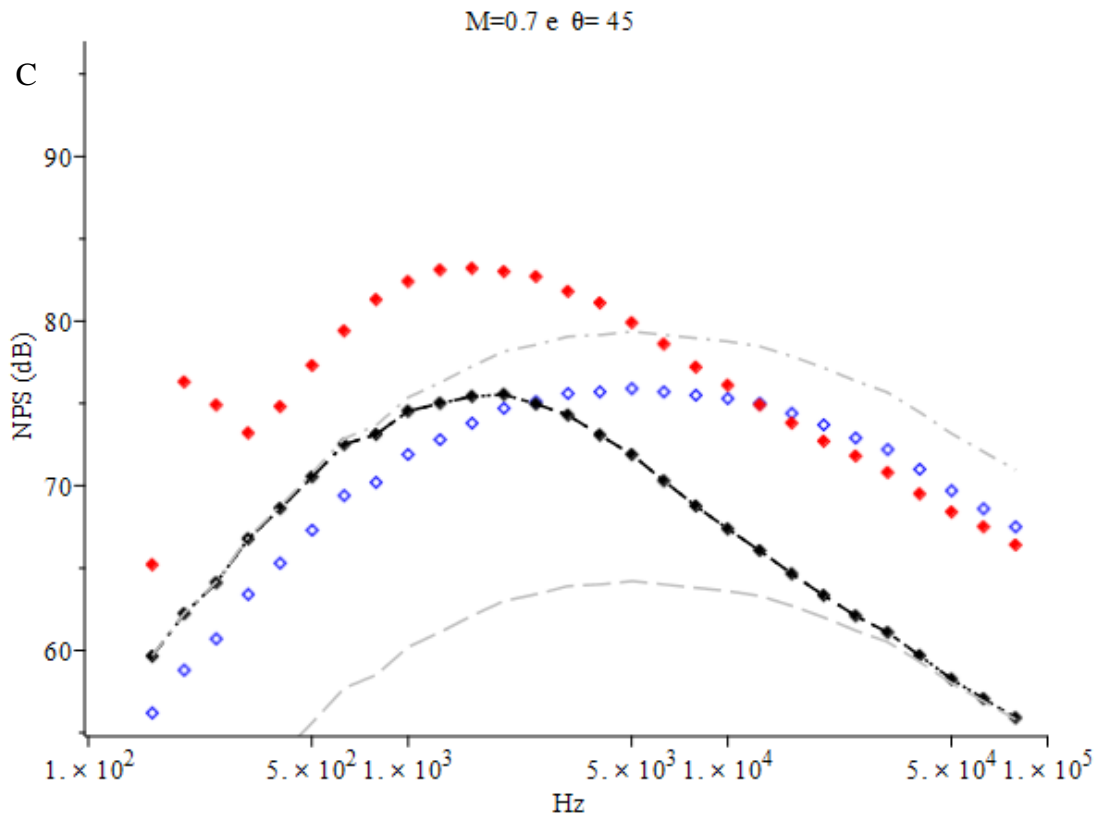


Figura 8 (continuação). Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 45^\circ$ (C) e 30° (D). $M = 0,7$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão, $---$ solução para baixas frequências; $- \cdot -$ solução para altas frequências.

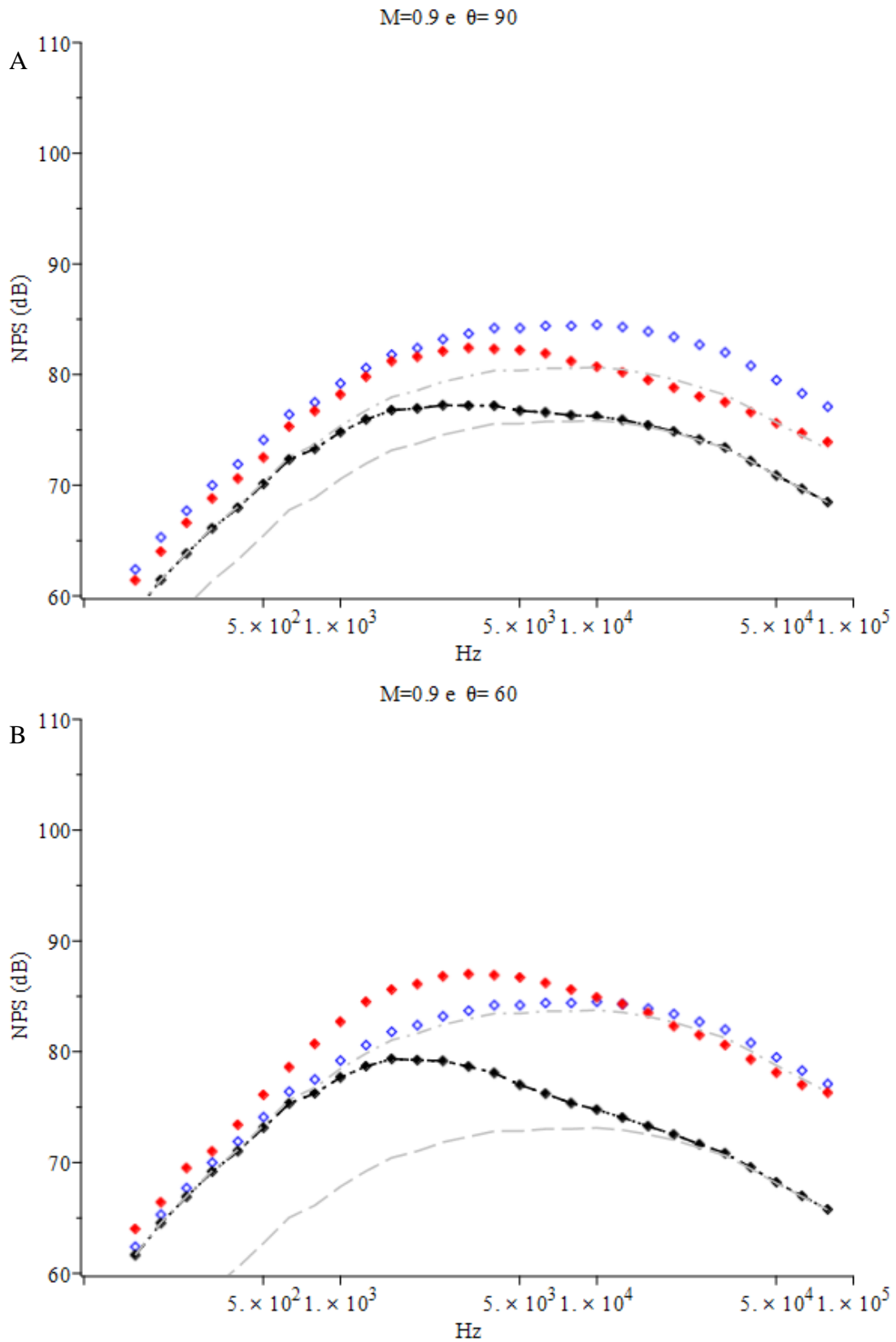


Figura 9 Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 90^\circ$ (A), 60° (B), 45° (C) e 30° (D). $M = 0,9$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão; $---$ solução para baixas frequências; $---$ solução para altas frequências.

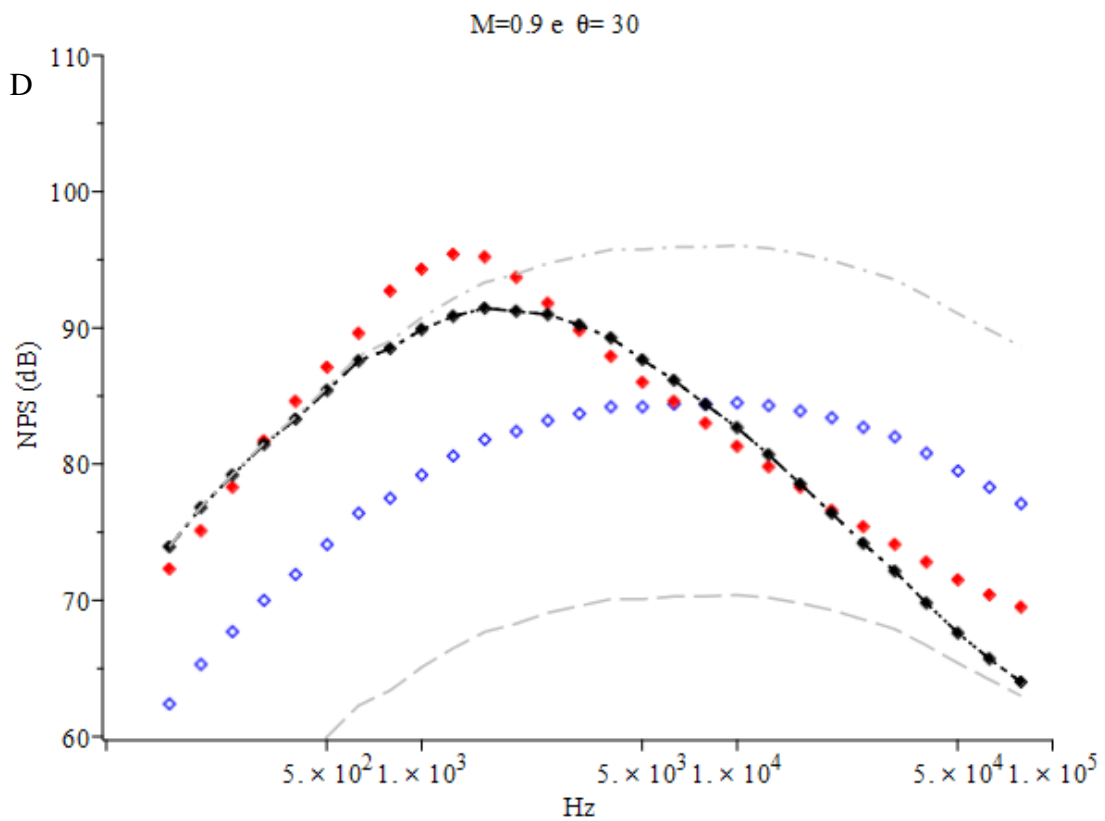
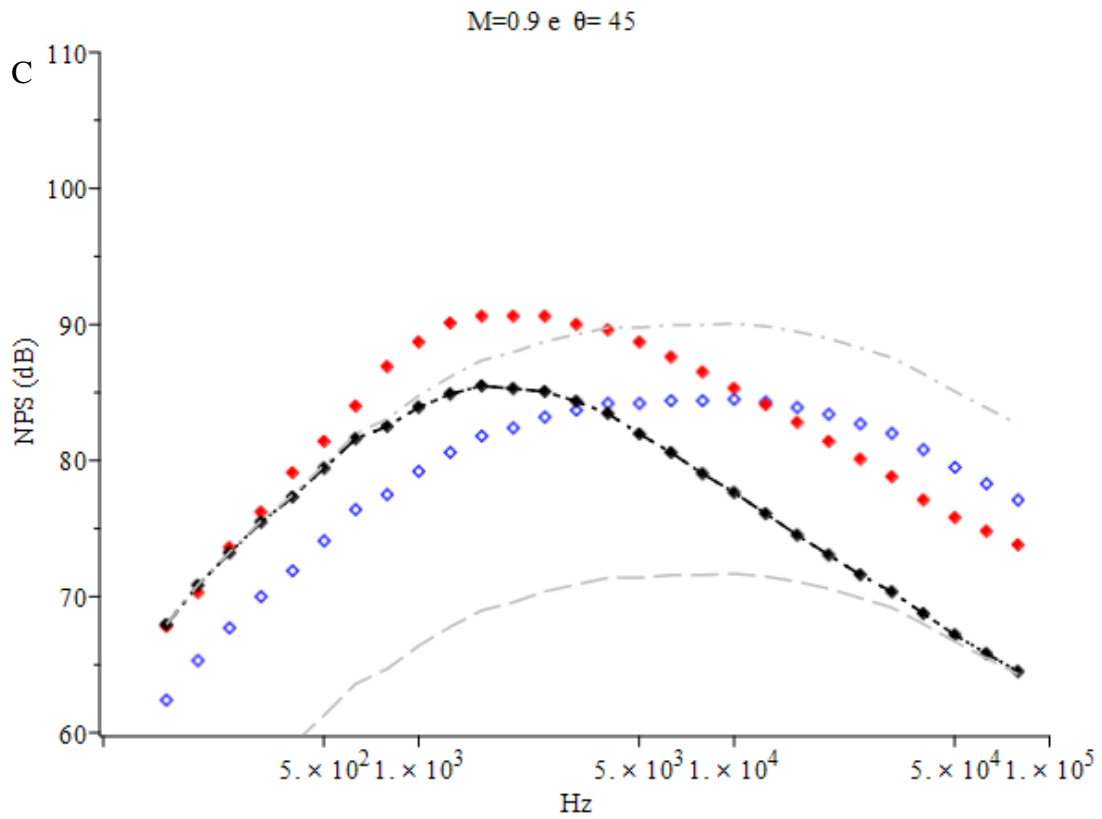


Figura 9 (continuação). Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 45^\circ$ (C) e 30° (D). $M = 0,9$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão; $---$ solução para baixas frequências; $- \cdot -$ solução para altas frequências.

5.2 PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUÍDO DO JATO FRIO A PARTIR DO JATO FRIO A 90 GRAUS, DESCONSIDERANDO OS EFEITOS DO GRADIENTE

As Figuras 10-13 mostram a previsão do espectro do ruído do jato frio a partir do espectro do jato frio a 90°, onde os efeitos do termo explicitado (gradientes de velocidade médio) foram desconsiderados. Previu-se o espectro para os ângulos θ de 60°, 45° e 30°, e números de Mach (M_J) de 0,35, 0,5, 0,7 e 0,9. Cada figura representa um conjunto de três gráficos, onde o número de Mach é mantido constante e o ângulo θ varia (por exemplo, a Figura 10 mostra a previsão do espectro do ruído do jato frio para $M_J = 0,35$ para os valores de $\theta = 60^\circ$ (Figura 10a), 45° (Figura 10b) e 30° (Figura 10c)). Foram incluídos também os resultados de previsão que consideram apenas as soluções para as baixas e altas frequências separadamente. Nestas figuras, observa-se que as previsões do ruído utilizando apenas a solução para as baixas frequências ficaram razoavelmente boas para $\theta = 60^\circ$ e 45° ; e para $\theta = 30^\circ$ apenas nas baixas frequências.

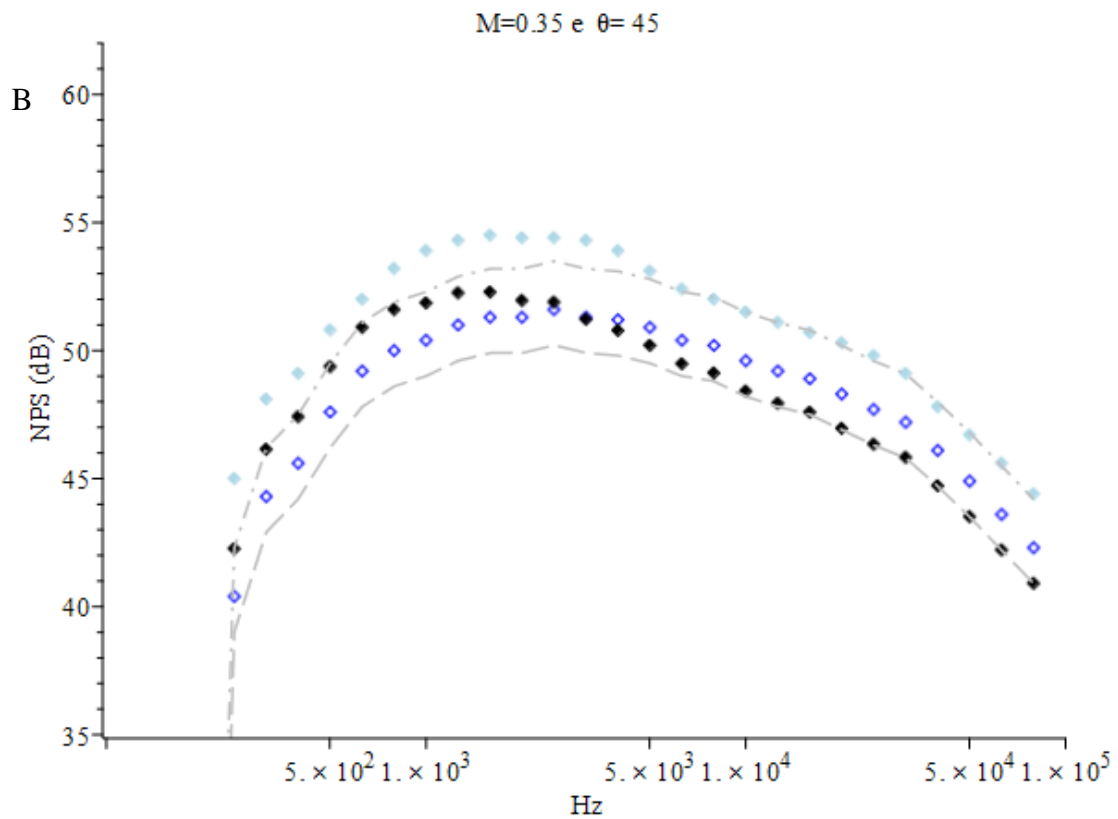
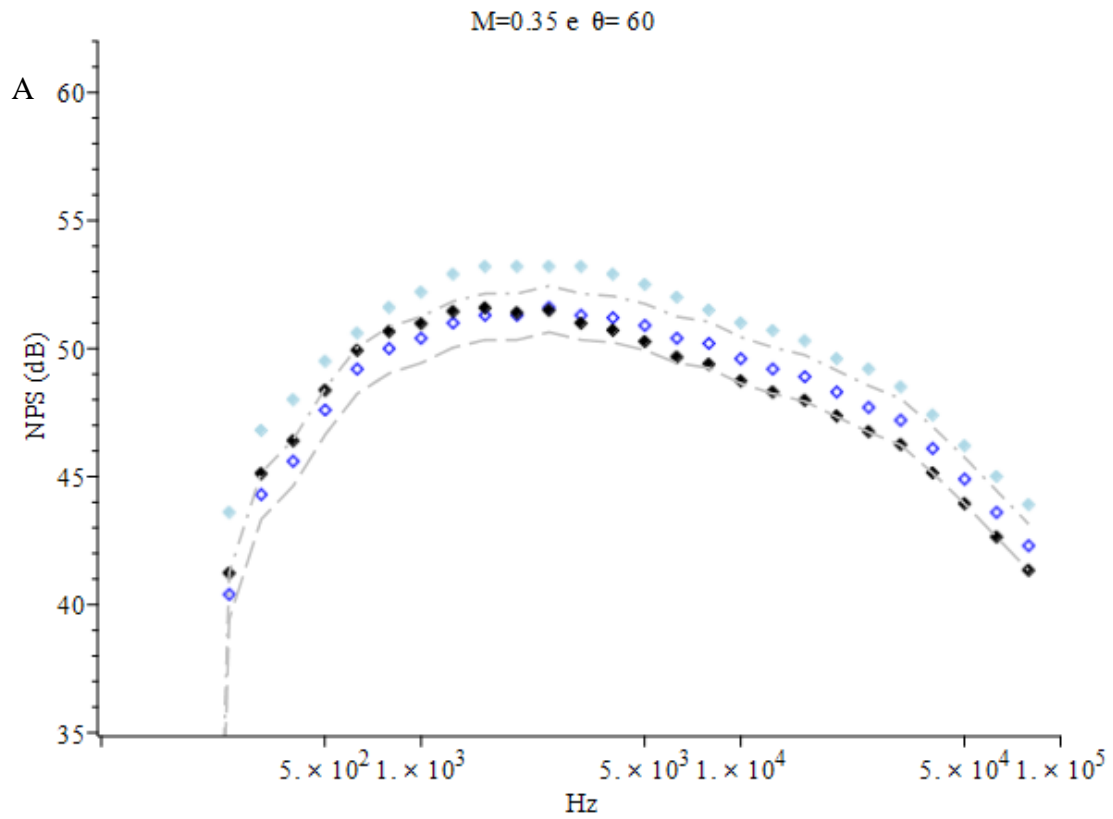


Figura 10 Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 60^\circ$ (A), 45° (B) e 30° (C).
 $M = 0,35, K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 - - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

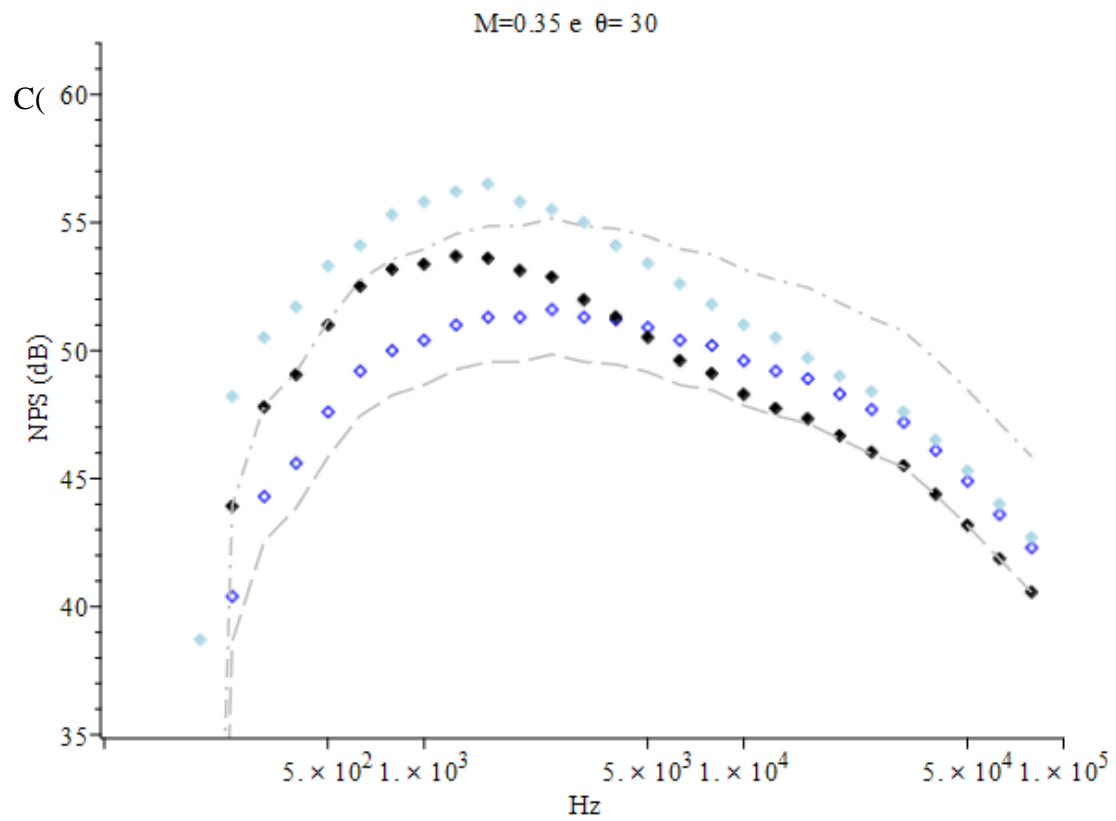


Figura 10 (continuação). Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 30^\circ(\text{C})$.
 $M = 0,35, K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 - - - solução para baixas frequências; — — solução para altas frequências.

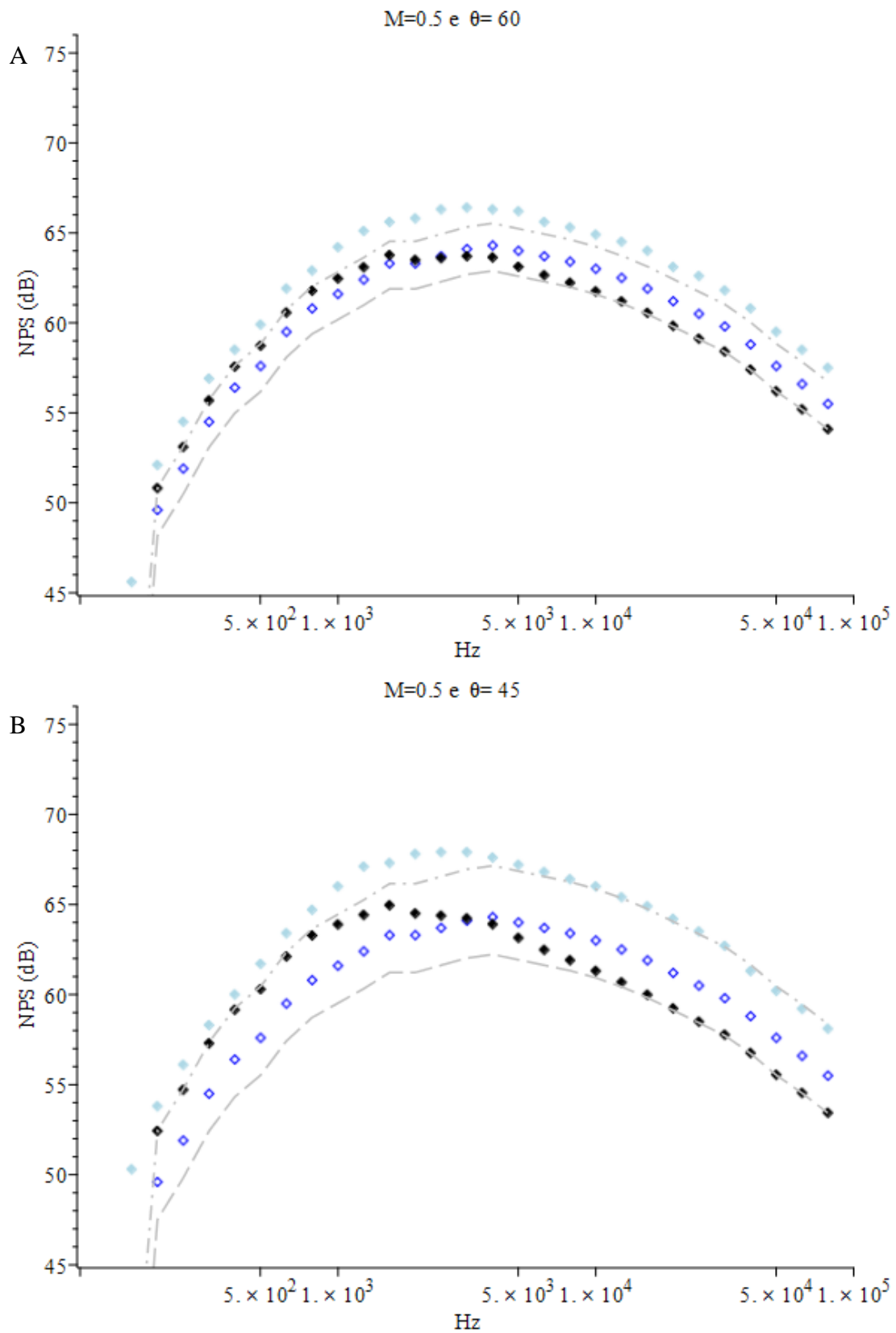


Figura 11 Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 60^\circ$ (A), 45° (B) e 30° (C).
 $M = 0,5$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 - - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

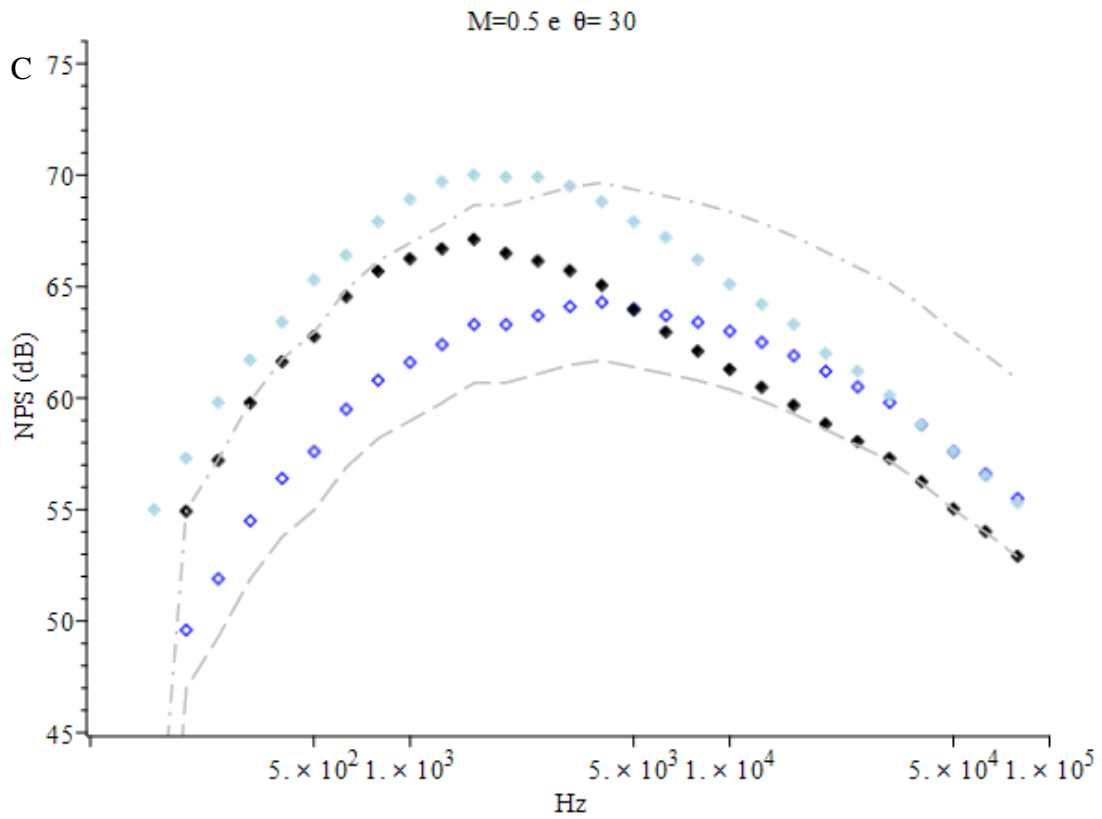


Figura 11 (continuação). Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 30^\circ$.
 $M = 0,5$, $K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 - - - solução para baixas freqüências; - - - solução para altas freqüências.

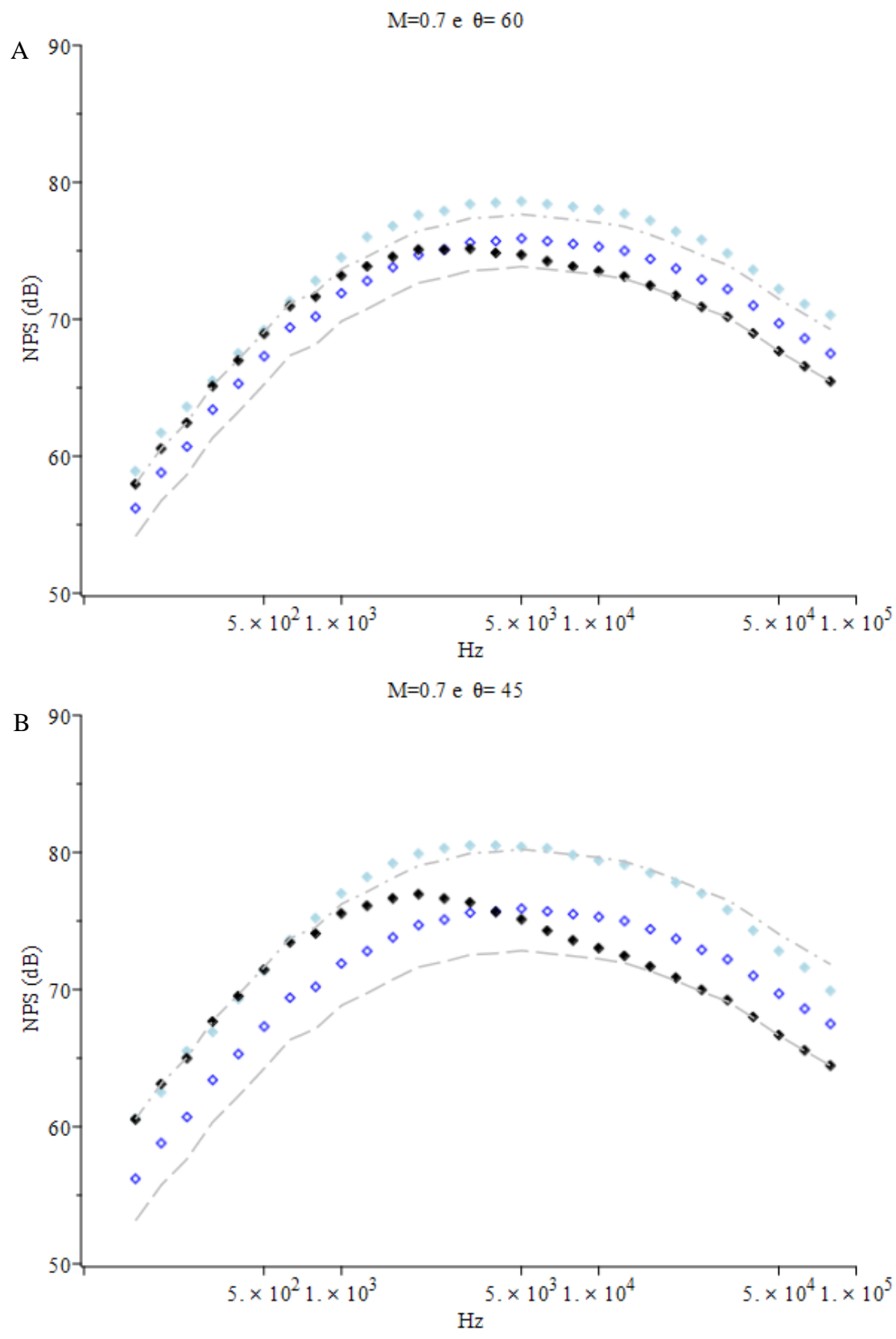


Figura 12 Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 60^\circ$ (A), 45° (B) e 30° (C).
 $M = 0,7, K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 --- solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

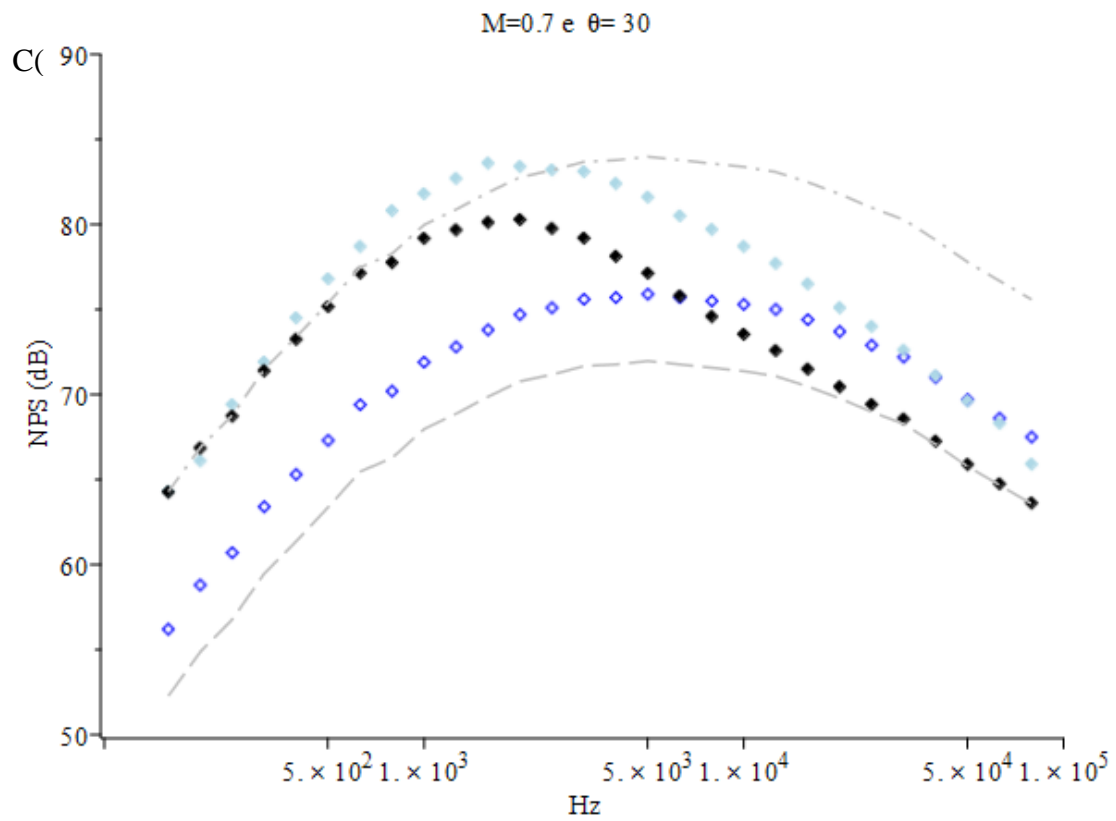


Figura 12 (continuação). Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 30^\circ(\text{C})$.
 $M = 0,7, K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 - - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

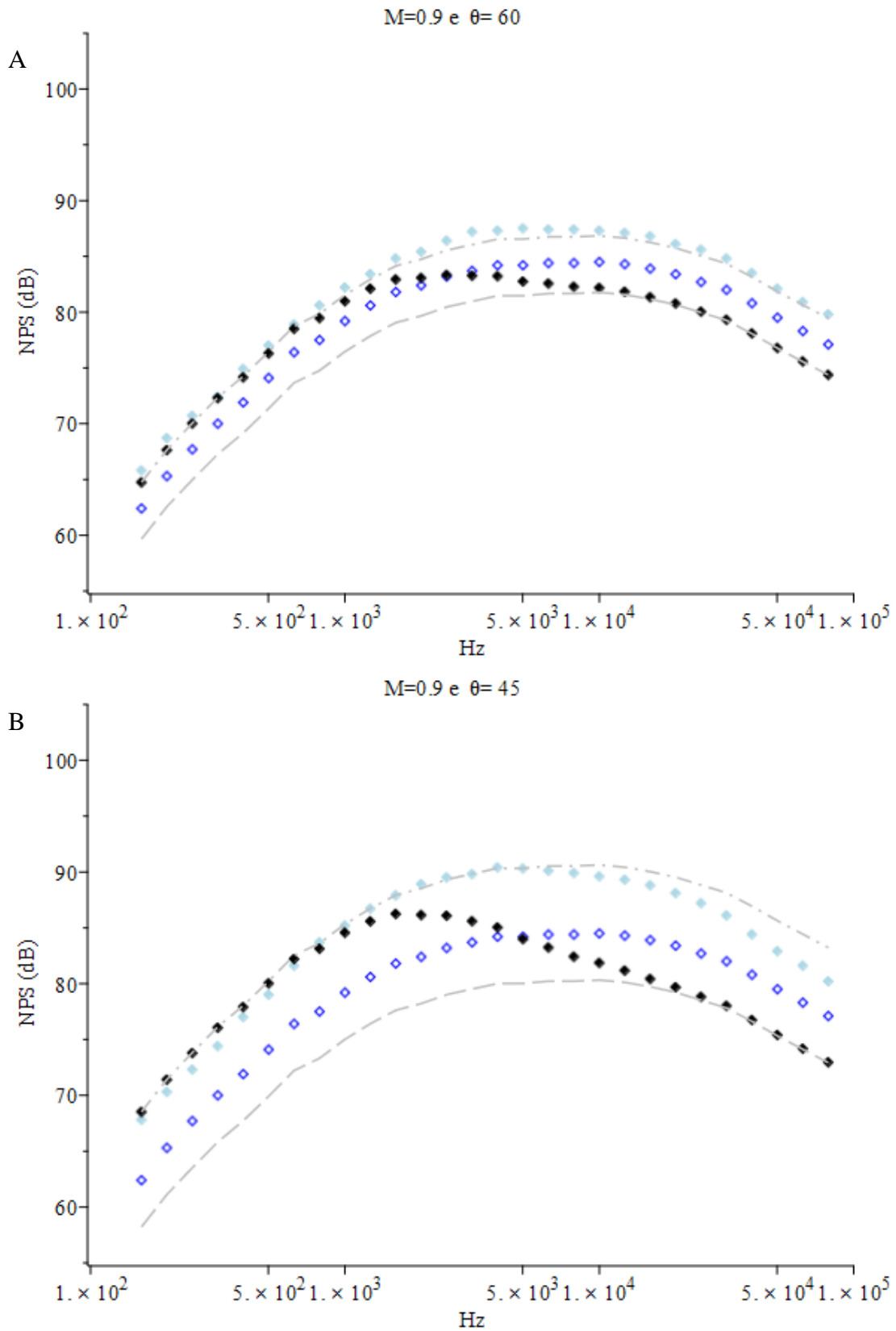


Figura 13 Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 60^\circ$ (A), 45° (B) e 30° (C).
 $M = 0,9, K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 --- solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

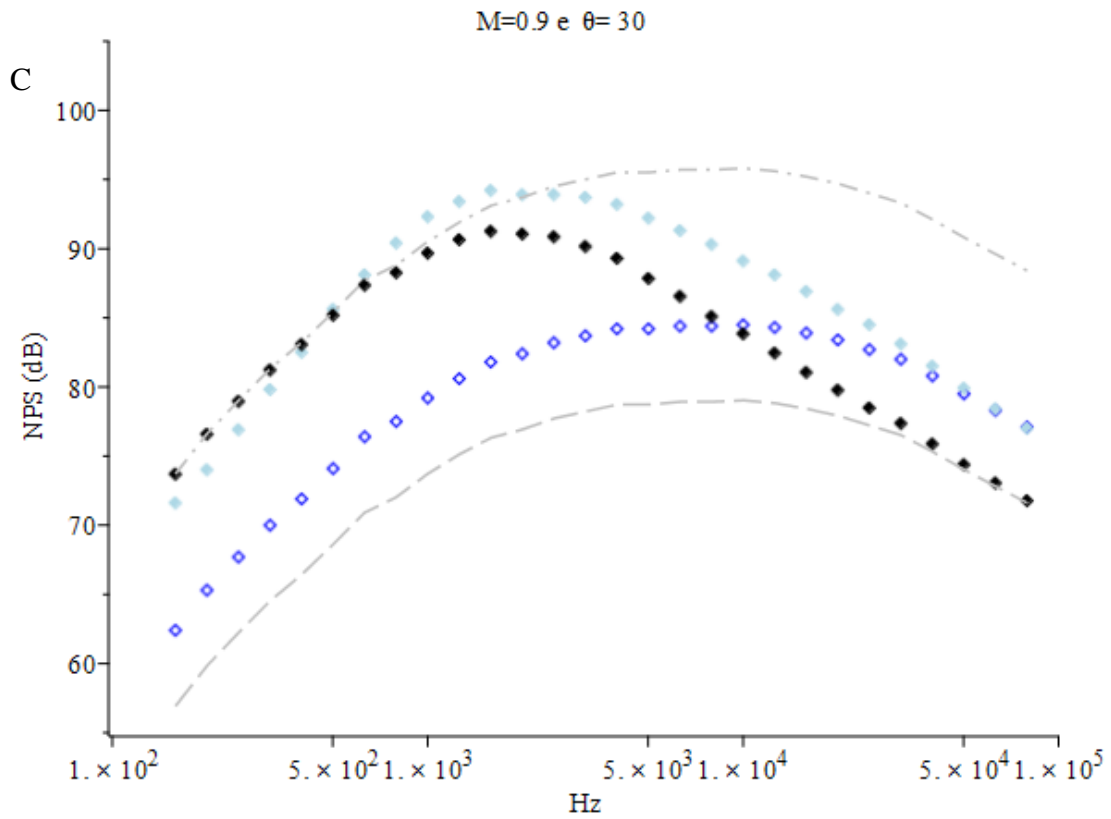


Figura 13 (continuação). Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 30^\circ(\text{C})$.
 $M = 0,9, K_1 = K_2 = 0$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 - - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

5.3 PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUIDO DO JATO AQUECIDO A PARTIR DO JATO FRIO A 90 GRAUS

Em seguida, os parâmetros K_1 , K_2 , β , ε_1 e ε_2 foram ajustados para melhorar a previsão do espectro do ruído do jato aquecido. Durante esses ajustes, foi necessário supor que ε_2 seria função de M_J , de modo que os dipolos fossem mais importantes para baixas velocidade, como apontado por Fisher e Morfey (1982). As Figuras 14-17 mostram a previsão do jato aquecido na qual foram escolhidos $K_1 = 0,2$, $K_2 = 0,2$, $\beta = 2$, $\varepsilon_1 = 0,8$ e $\varepsilon_2(M_J) = 1,53 - 1,61M_J$. Essas figuras incluem também os resultados que consideram apenas os quadripolos antigos e novos (não considera os dipolos); apenas os quadripolos antigos (não considera o gradiente de temperatura); e os resultados de previsão que consideram apenas as soluções para as baixas e altas frequências separadamente. Para $\theta = 90^\circ$ e 60° , o modelo funcionou bem, exceto para o caso em que $M_J = 0,9$ e $\theta = 60^\circ$, onde houve um excesso de previsão principalmente para as baixas frequências; é possível observar que a previsão só foi possível com a combinação das soluções de altas e de baixas frequências; e a importância dos dipolos introduzidos com a modelagem de ε_2 . Para $\theta = 45^\circ$ e 30° e $M_J = 0,35$ e $0,5$, o modelo funcionou apenas para baixas frequências. Para $\theta = 45^\circ$ e 30° e $M_J = 0,7$ e $0,9$ houve um excesso na previsão que é moderado para as baixas frequências e significativo para as altas.

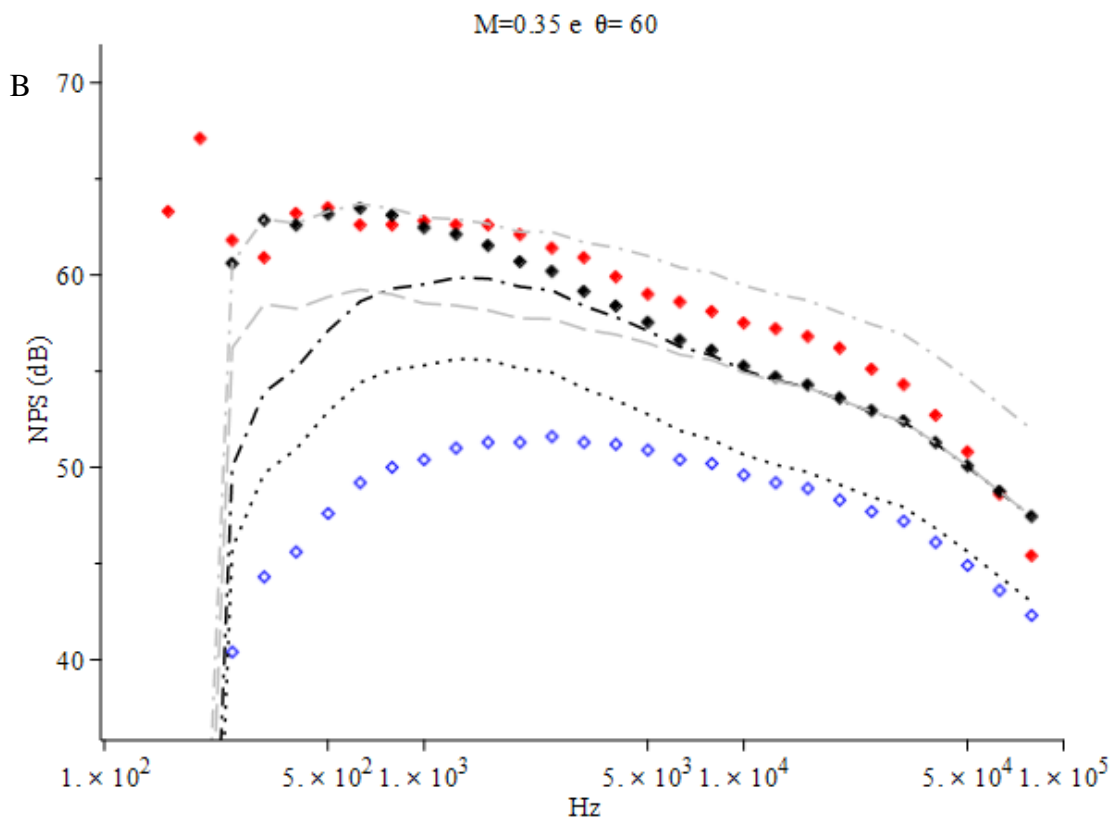
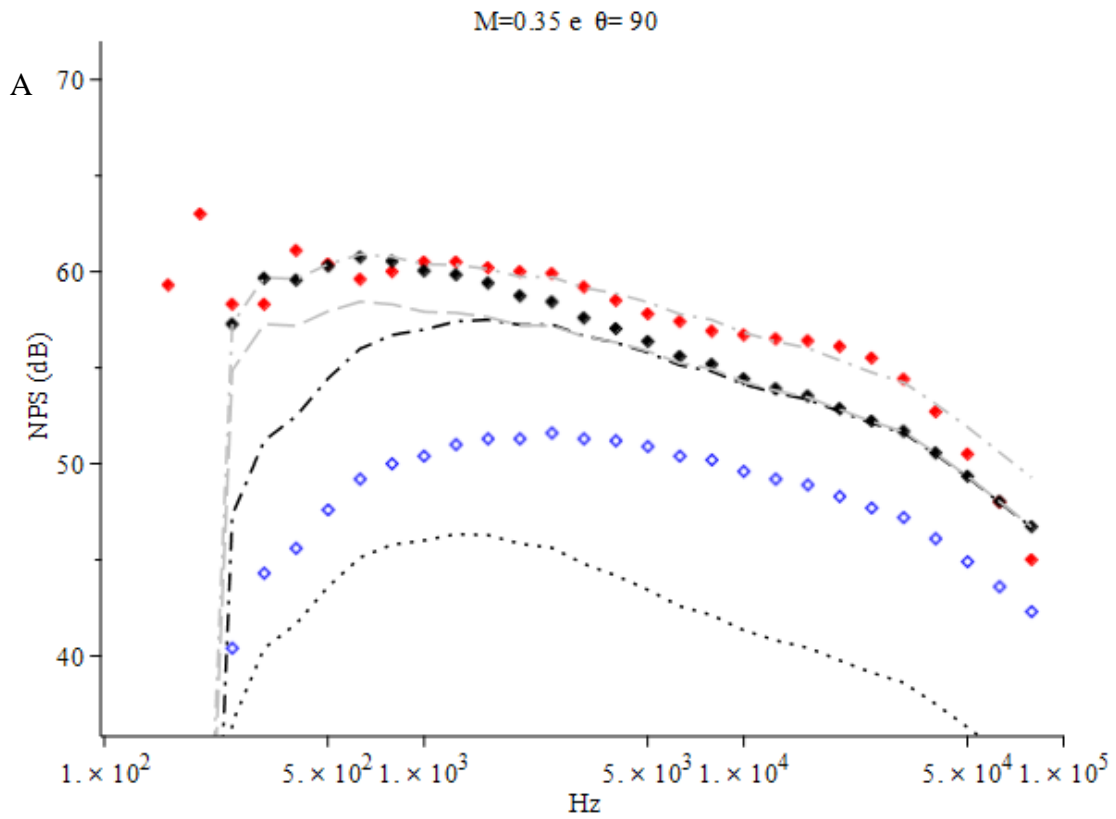


Figura 14 Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 90^\circ$ (A), 60° (B), 45° (C) e 30° (D). $M = 0,35$; $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $\beta = 2$; $\varepsilon_1 = 0,8$; $\varepsilon_2 = 1,0$.

\diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão;
 \cdots quadripolos antigos; $- \cdot -$ quadripolos antigos e novos
 $- - -$ solução para baixas frequências; $- - -$ solução para altas frequências.

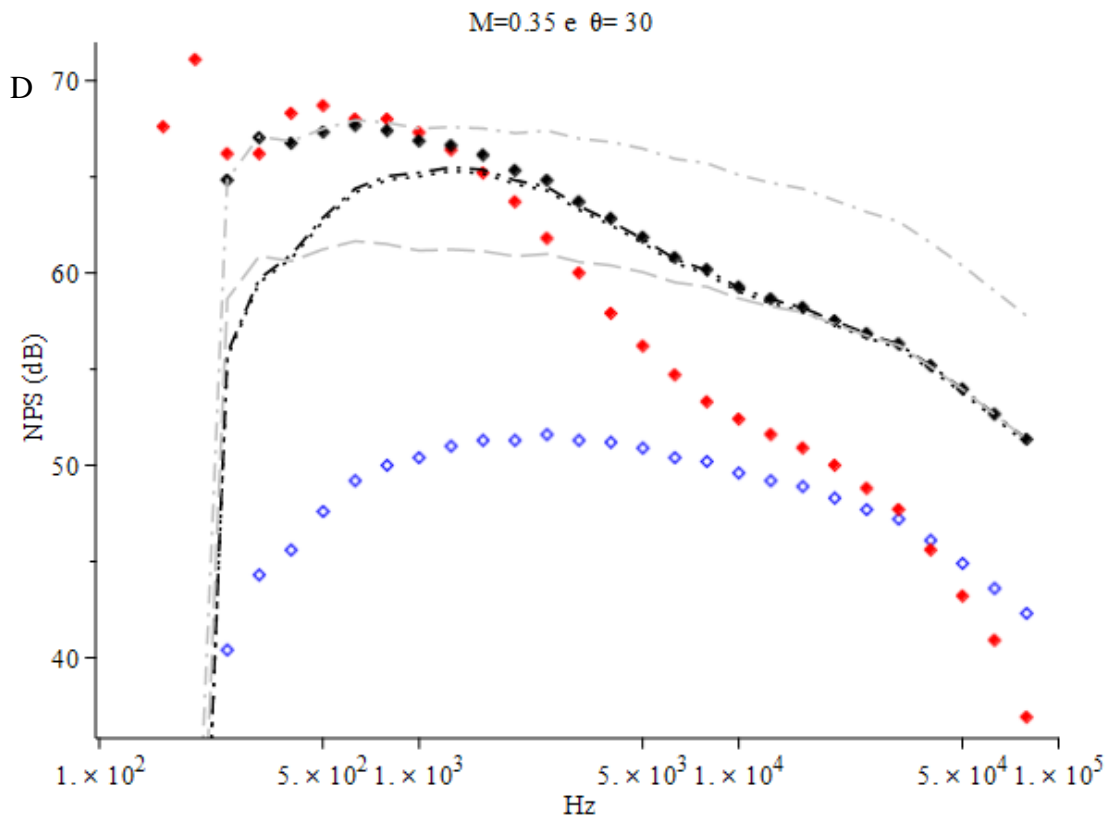
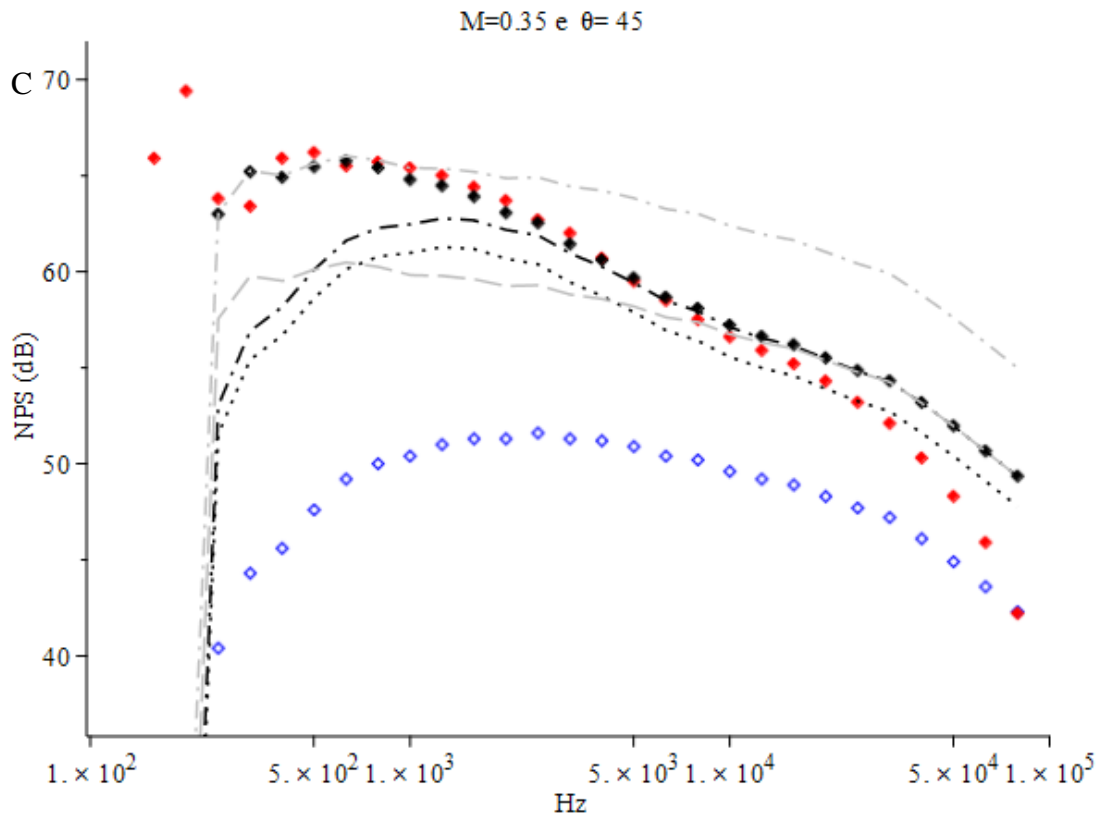


Figura 14 (continuação) Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 45^\circ$ (C) e 30° (D). $M = 0,35$; $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $\beta = 2$; $\varepsilon_1 = 0,8$; $\varepsilon_2 = 1,0$.

\diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão;
 \cdots quadripolos antigos; $-\cdot-$ quadripolos antigos e novos
 $---$ solução para baixas frequências; $- - -$ solução para altas frequências.

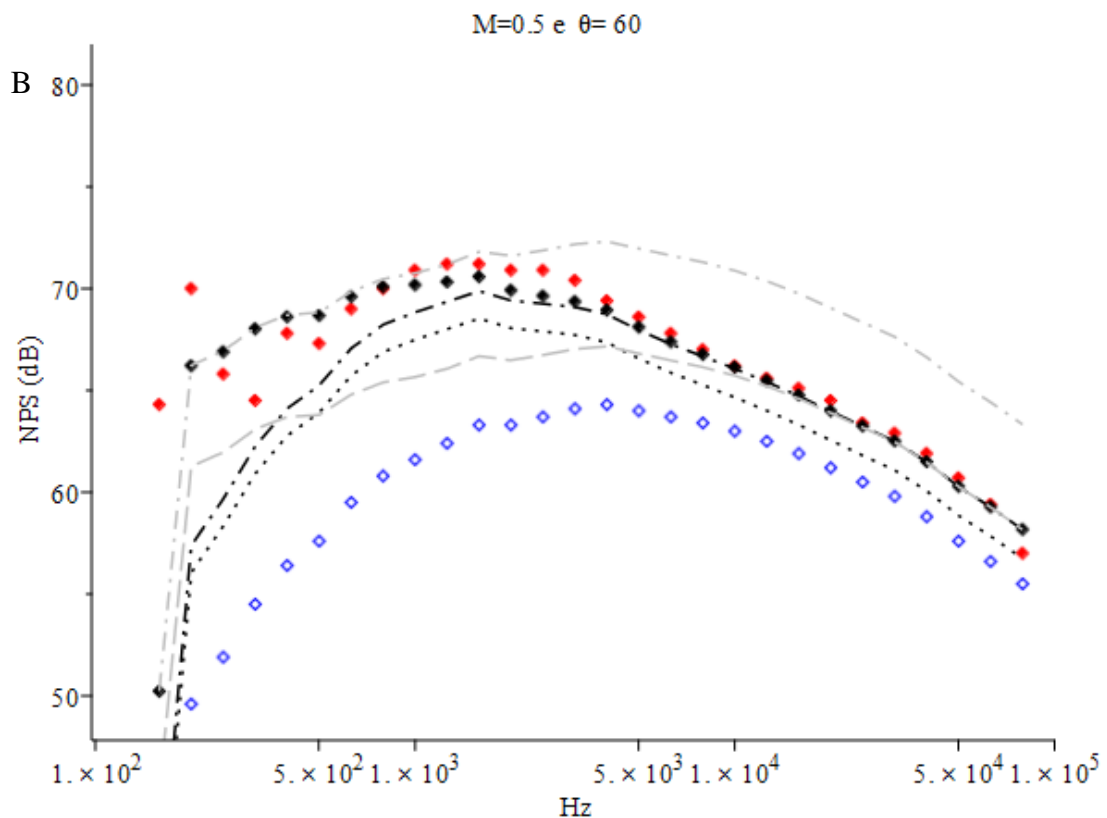
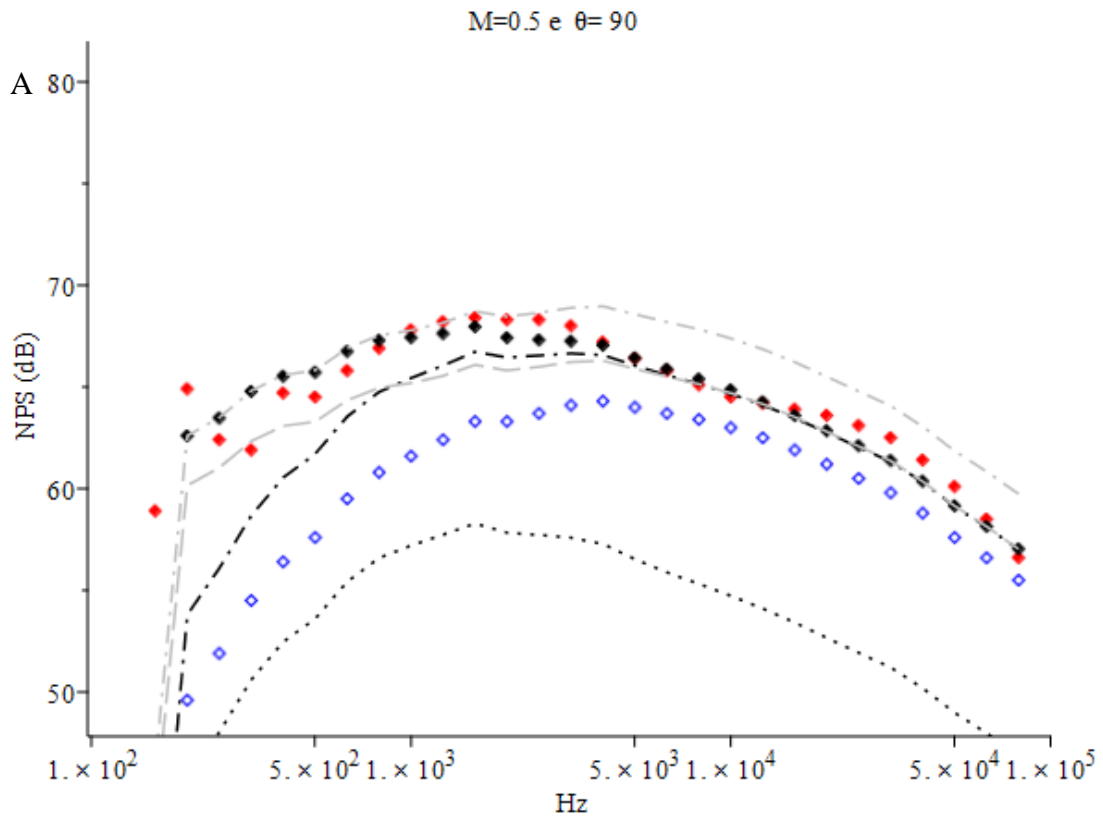


Figura 15 Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 90^\circ$ (A), 60° (B), 45° (C) e 30° (D). $M = 0,5$; $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $\beta = 2$; $\varepsilon_1 = 0,8$; $\varepsilon_2 = 0.7$.

\diamond jato frio, 90° ; $\color{red}\blacklozenge$ jato quente; \blacklozenge previsão;
 \cdots quadripolos antigos; $-\cdot-$ quadripolos antigos e novos
 $---$ solução para baixas frequências; $- - -$ solução para altas frequências.

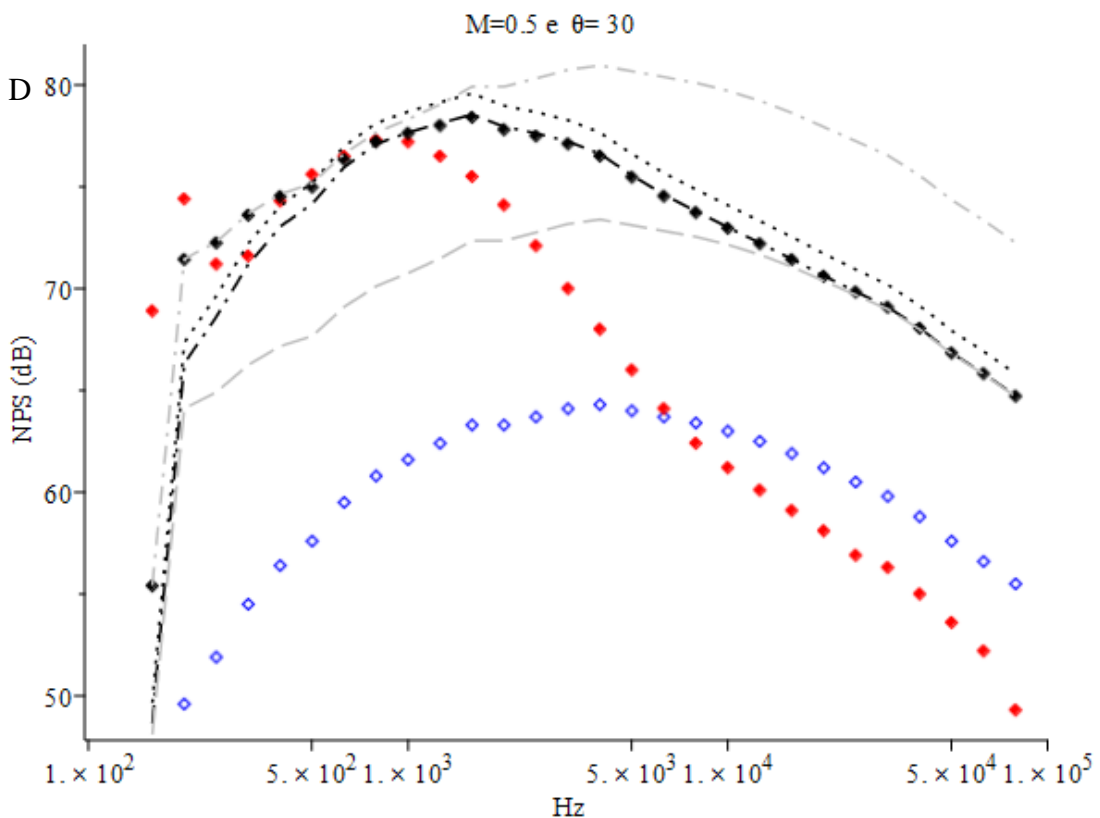
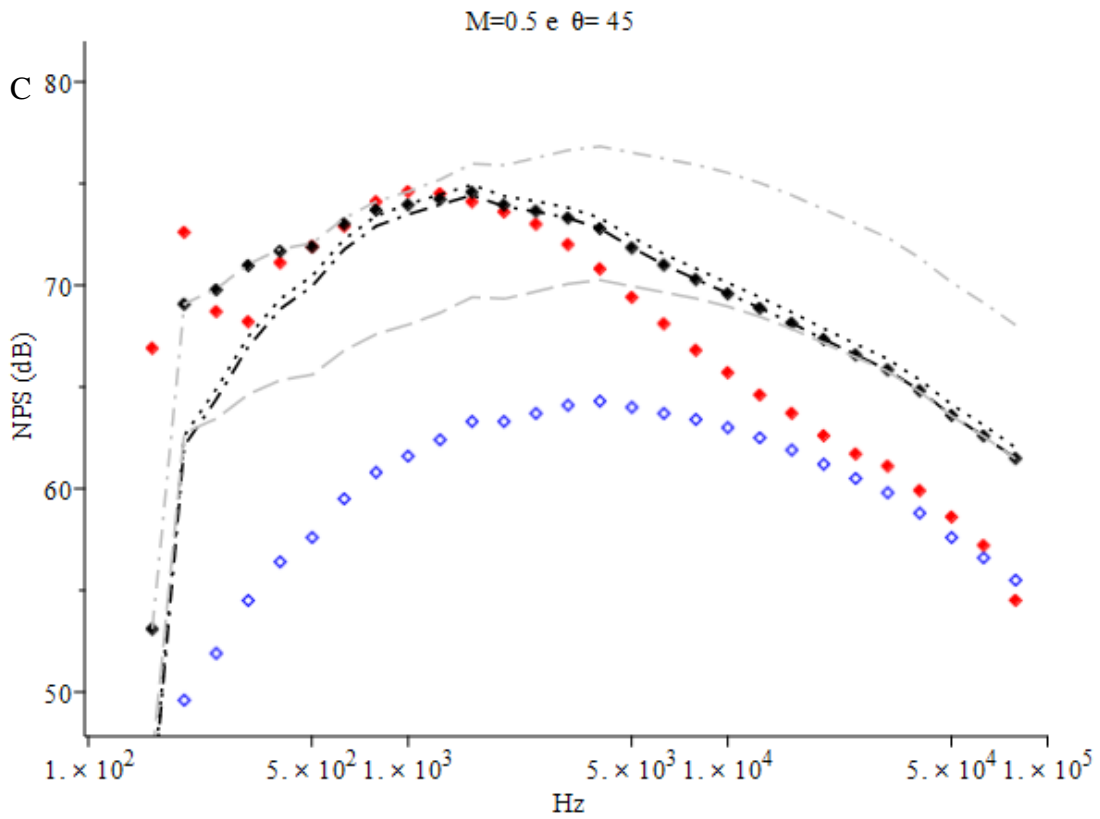


Figura 15 (continuação) Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 45^\circ$ (C) e 30° (D). $M = 0,5$; $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $\beta = 2$; $\varepsilon_1 = 0,8$; $\varepsilon_2 = 0,7$.

- ◆ jato frio, 90° ; ◆ jato quente; ◆ previsão;
- quadripolos antigos; - · - quadripolos antigos e novos
- - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

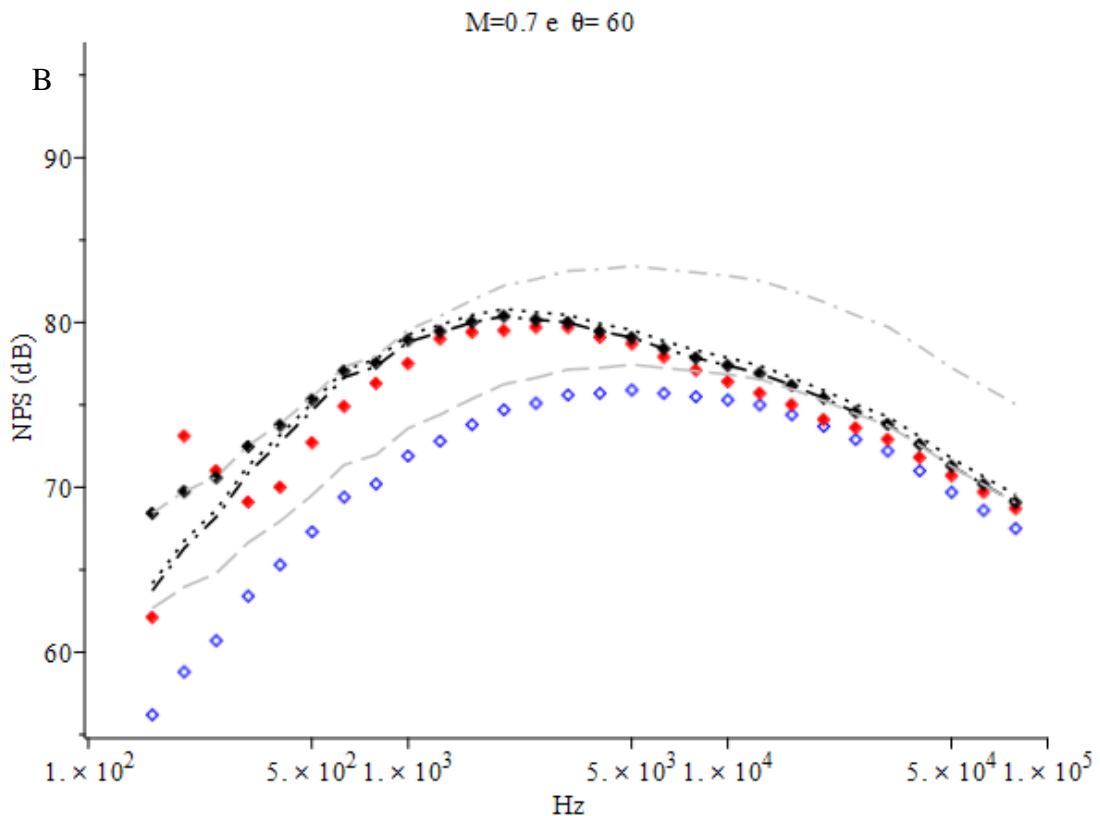
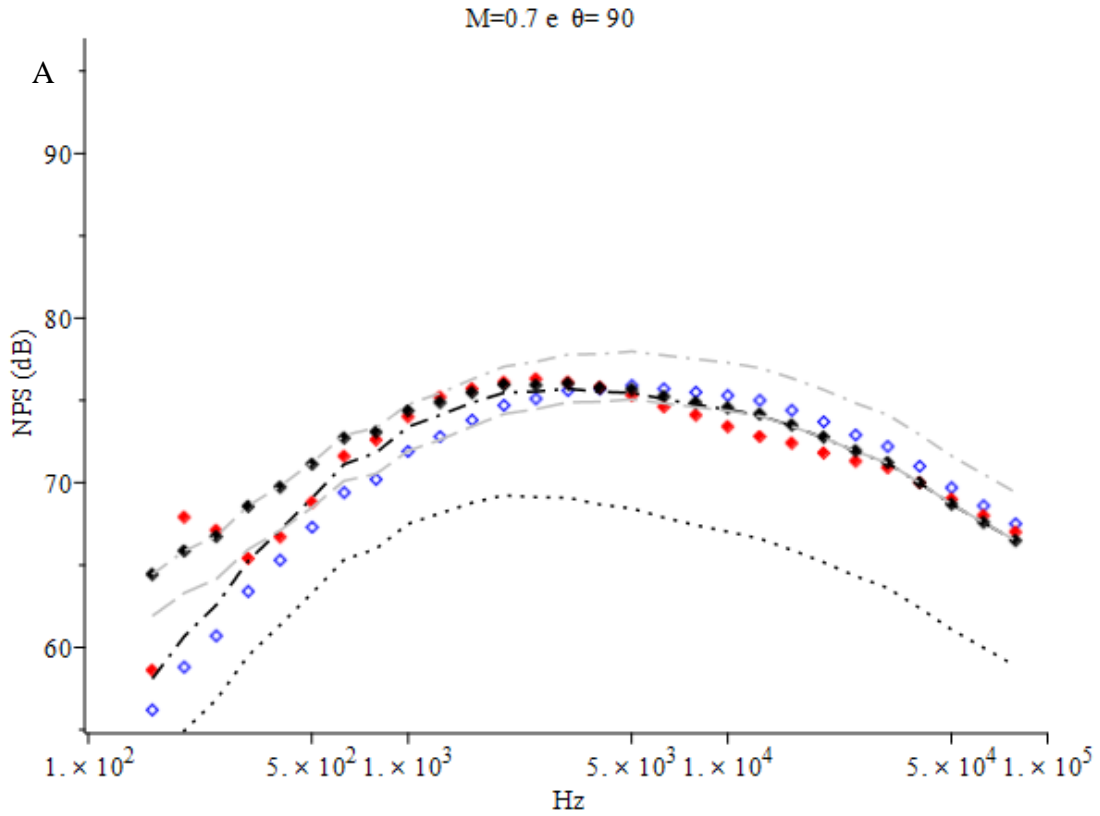


Figura 16 Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 90^\circ$ (A), 60° (B), 45° (C) e 30° (D). $M = 0,7$; $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $\beta = 2$; $\varepsilon_1 = 0,8$; $\varepsilon_2 = 0,4$.

\diamond jato frio, 90° ; $\color{red}\blacklozenge$ jato quente; \blacklozenge previsão;
 \cdots quadripolos antigos; $-\cdot-$ quadripolos antigos e novos
 $---$ solução para baixas frequências; $---$ solução para altas frequências.

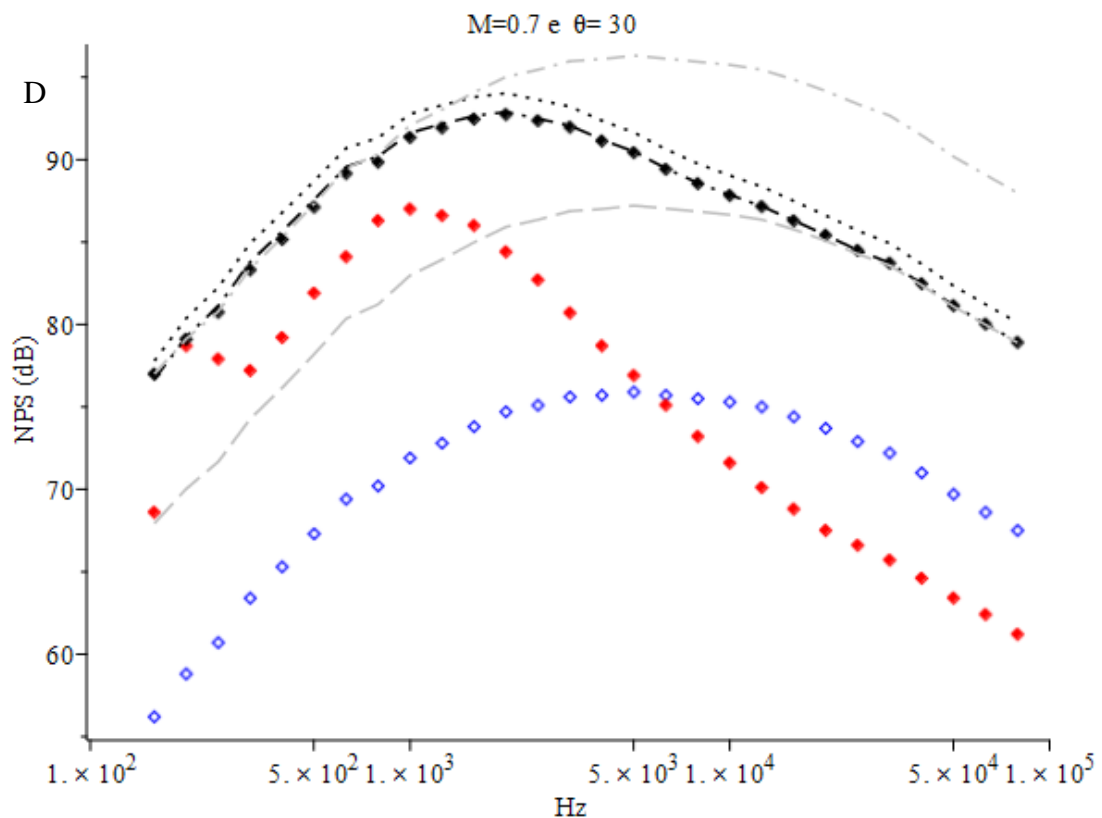
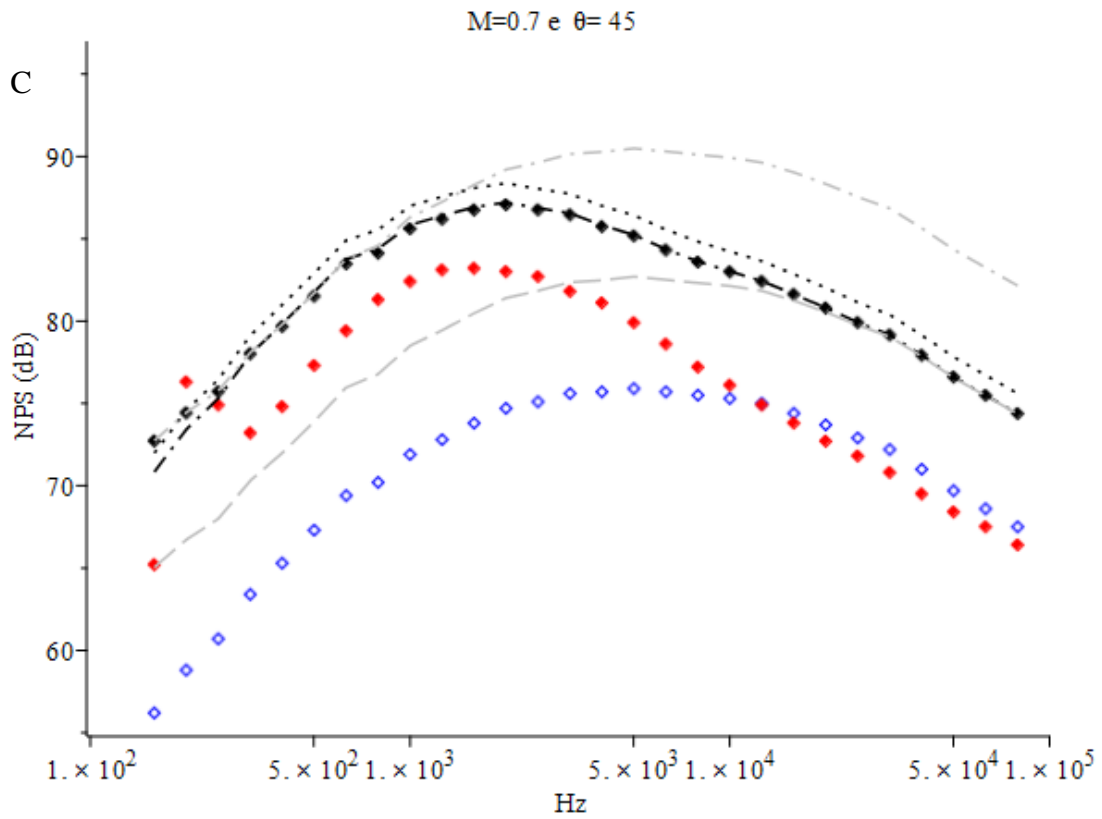


Figura 16 (continuação) Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 45^\circ$ (C) e 30° (D). $M = 0,7$; $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $\beta = 2$; $\varepsilon_1 = 0,8$; $\varepsilon_2 = 0,4$.

- ♦ jato frio, 90° ; ♦ jato quente; ♦ previsão;
- quadripolos antigos; - · - quadripolos antigos e novos
- - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

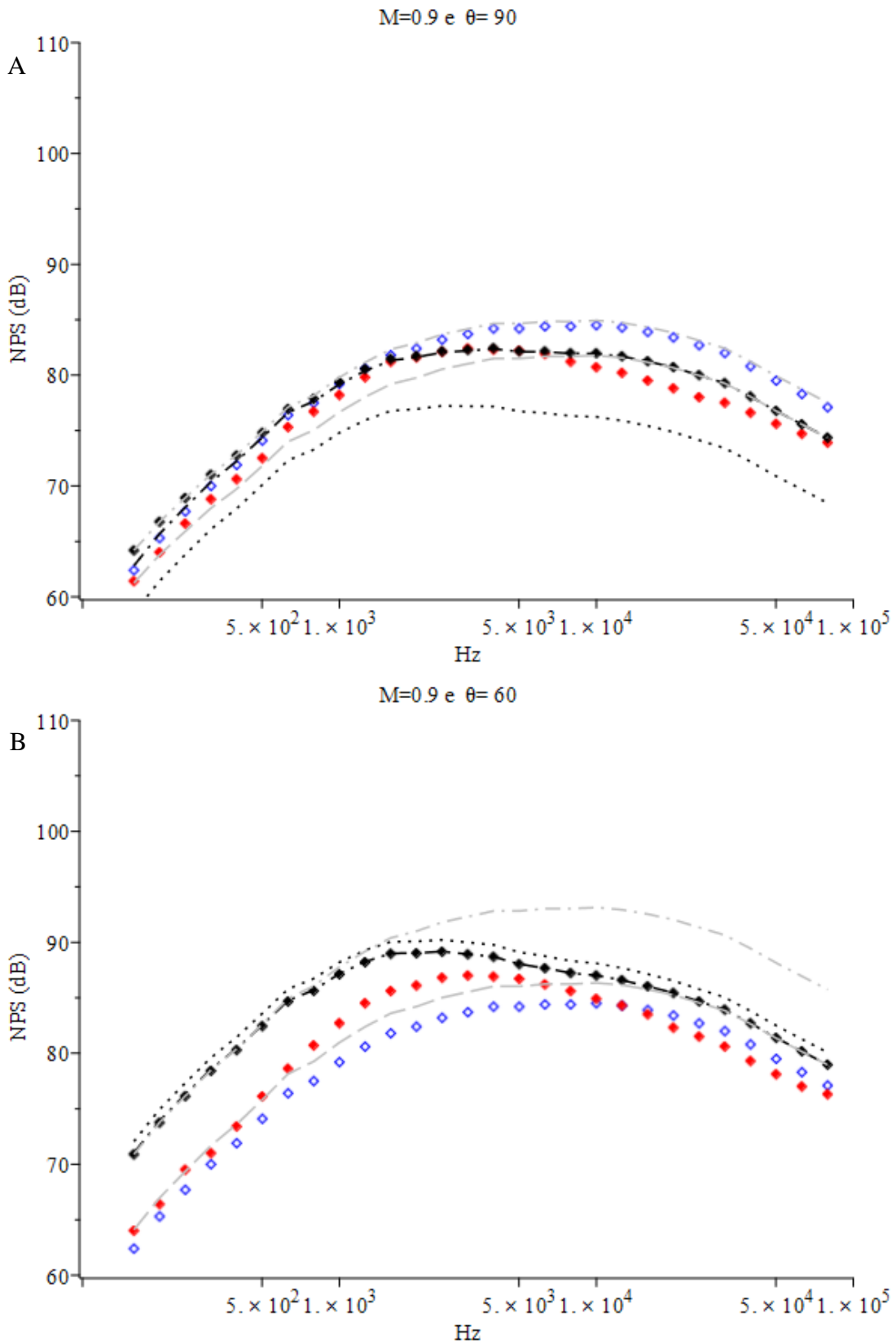


Figura 17 Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 90^\circ$ (A), 60° (B), 45° (C) e 30° (D). $M = 0,9$; $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $\beta = 2$; $\varepsilon_1 = 0,8$; $\varepsilon_2 = 0,1$.

- \diamond jato frio, 90° ; $\color{red}\diamond$ jato quente; \blacklozenge previsão;
- \cdots quadripolos antigos; $-\cdot-$ quadripolos antigos e novos
- $---$ solução para baixas frequências; $---$ solução para altas frequências.

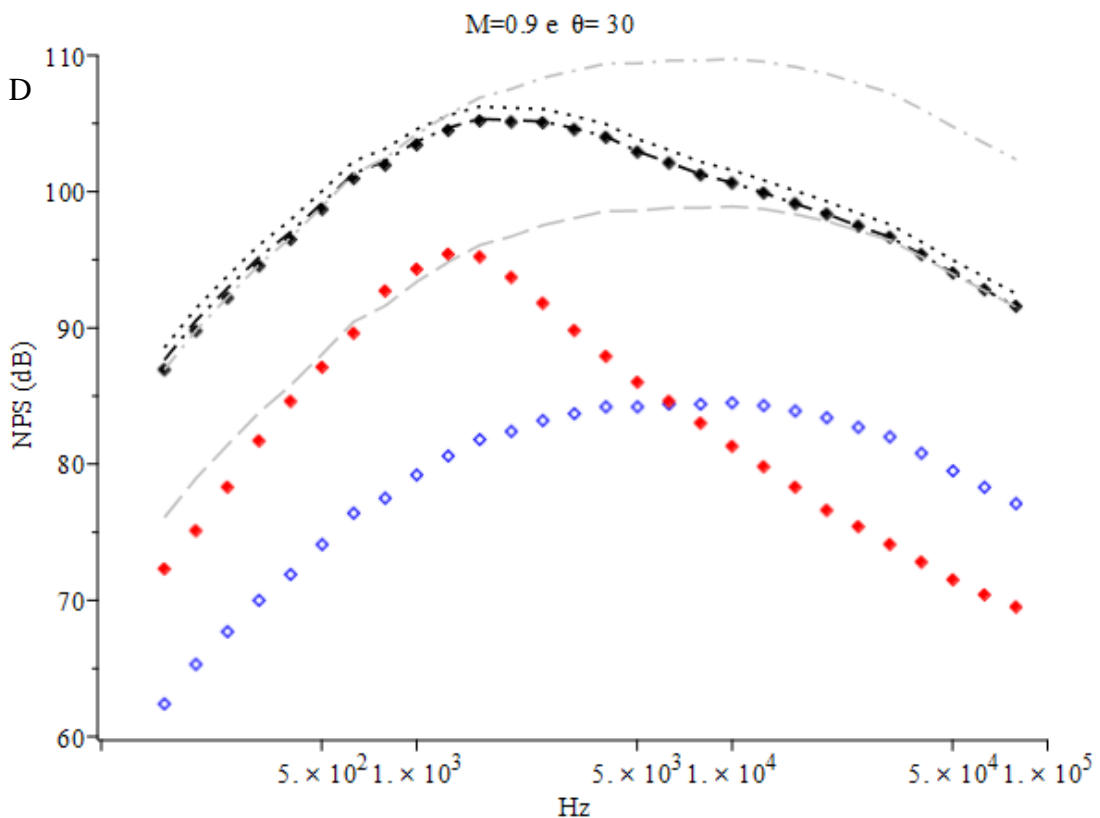
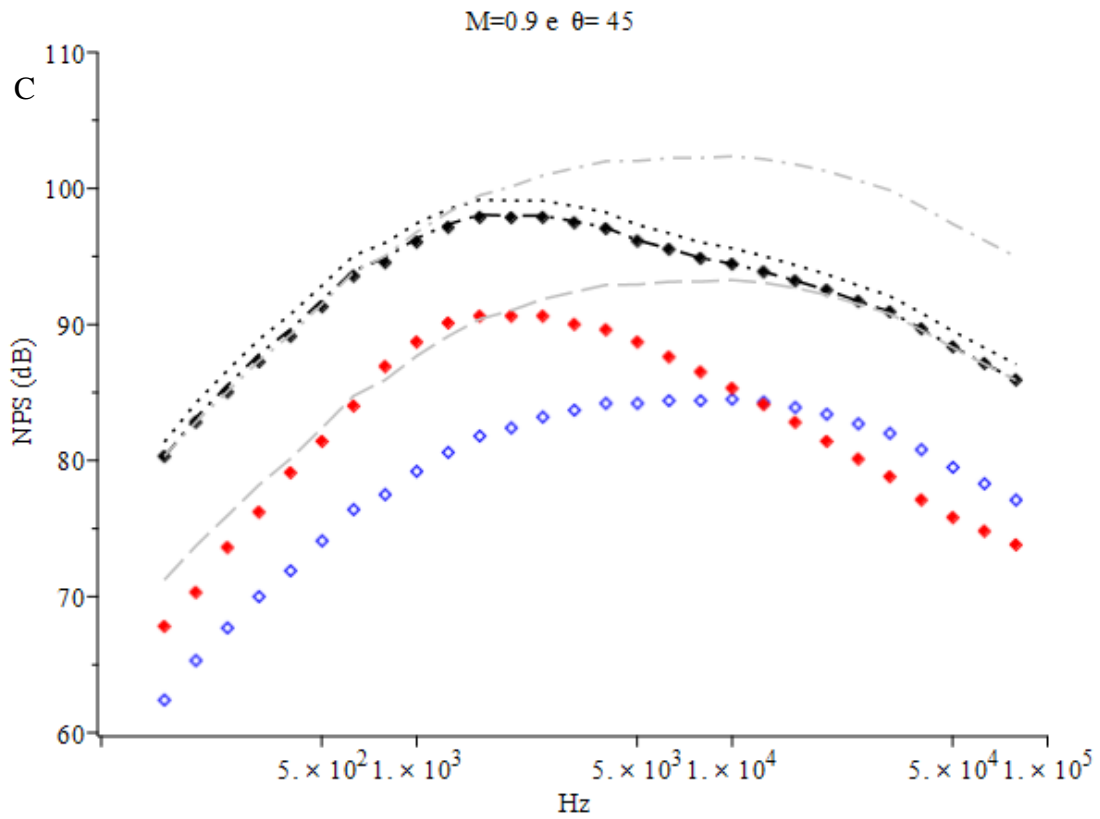


Figura 17 (continuação) Previsão do espectro do ruído do jato quente para $\theta = 45^\circ$ (C) e 30° (D). $M = 0,9$; $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $\beta = 2$; $\varepsilon_1 = 0,8$; $\varepsilon_2 = 0,1$.

\diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato quente; \blacklozenge previsão;
 \cdots quadripolos antigos; $- \cdot -$ quadripolos antigos e novos
 $- \cdot -$ solução para baixas frequências; $- -$ solução para altas frequências.

5.4 PREVISÃO DO ESPECTRO DO RUIDO DO JATO FRIO A PARTIR DA MEDIÇÃO A 90 GRAUS

No caso do jato frio, ajustou-se os parâmetros K_1 , K_2 e β . As Figuras 18-21 mostram a previsão para $K_1 = 0,1$, $K_2 = 0,1$, $\beta = 2$. É possível observar que para $\theta = 60^\circ$, a solução de baixas frequências funcionou razoavelmente bem; para $\theta = 45$ a previsão para as altas frequências funcionou bem; e houve uma leve sobrestimativa para as baixas; para $\theta = 30^\circ$ houve um excesso de previsão tanto para as altas, quanto para as baixas frequências.

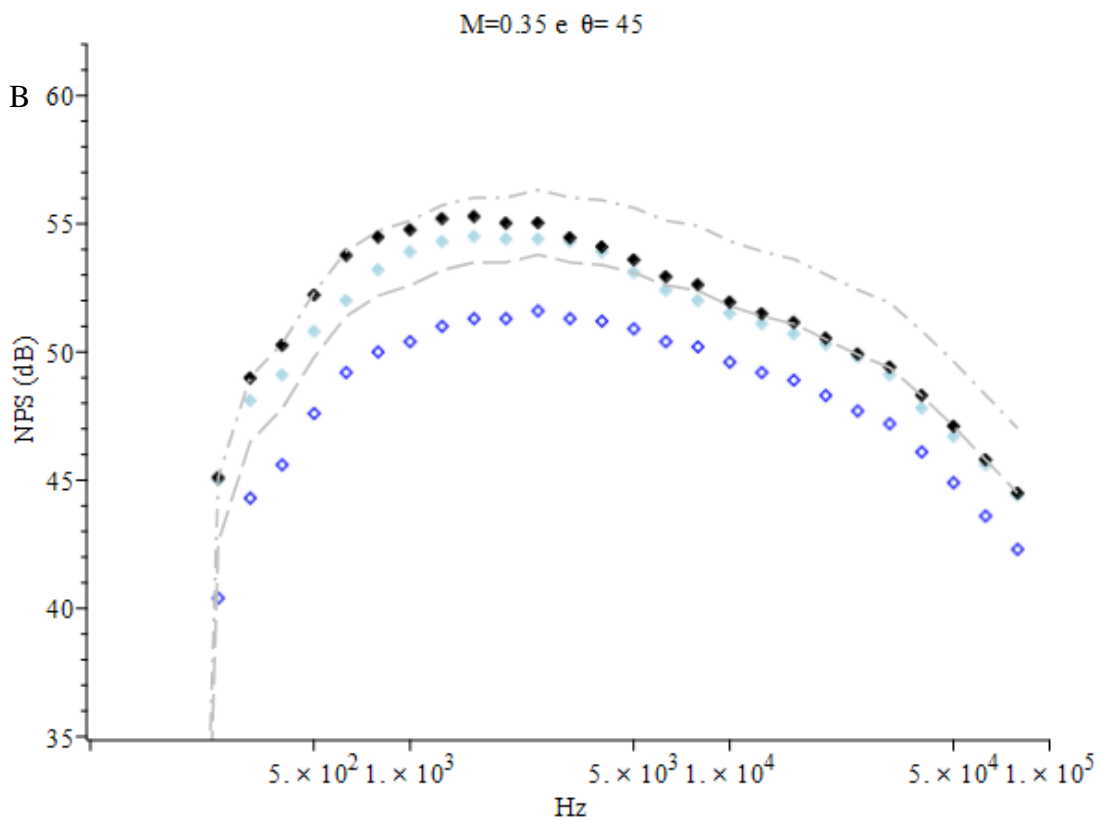
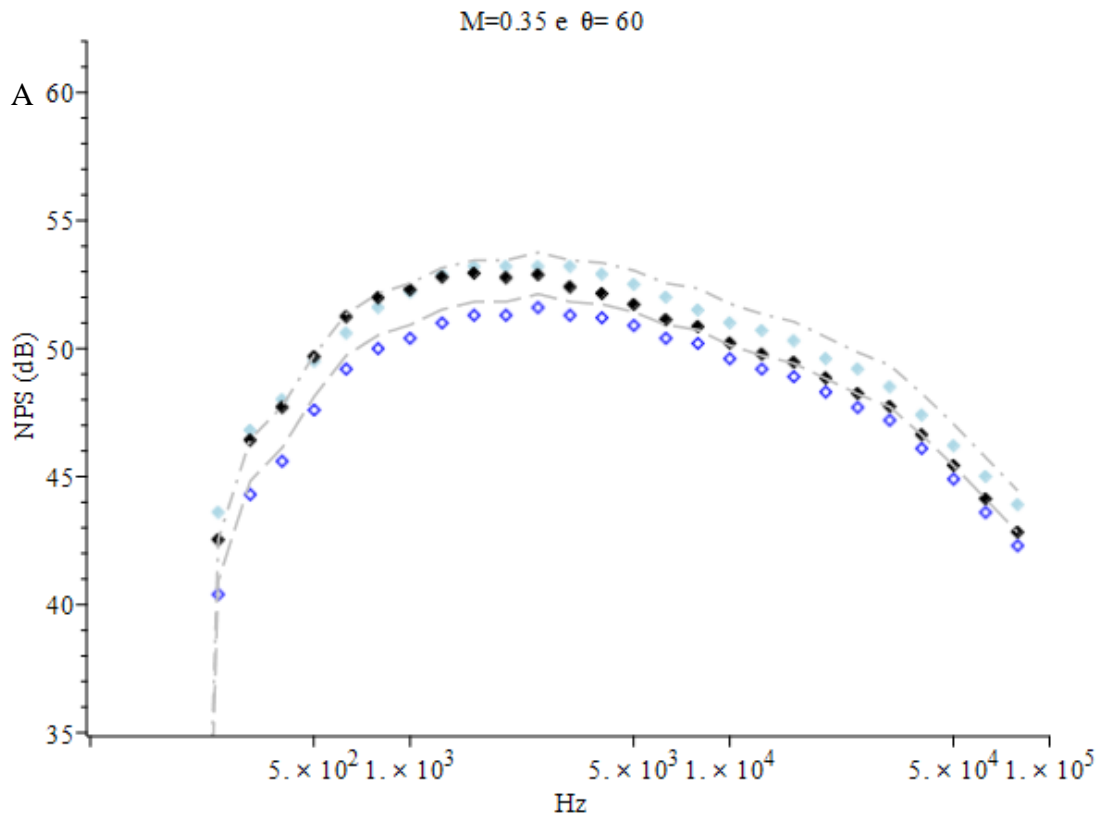


Figura 18 Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 60^\circ$ (A), 45° (B) e 30° (C).
 $M = 0,35$; $K_1 = 0,1$; $K_2 = 0,1$; $\beta = 2$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão,
 - - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

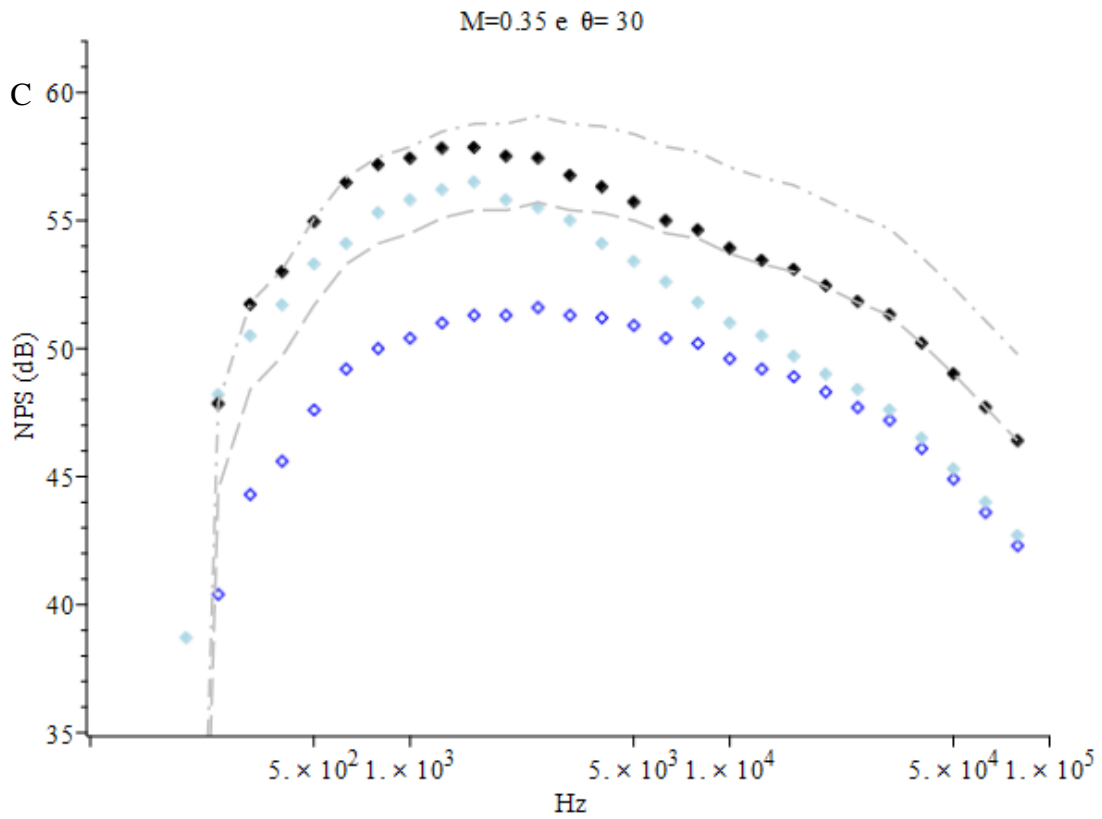


Figura 18 (continuação) Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 30^\circ$ (C).
 $M = 0,35$; $K_1 = 0,1$; $K_2 = 0,1$; $\beta = 2$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão,
 - - - solução para baixas frequências; — — solução para altas frequências.

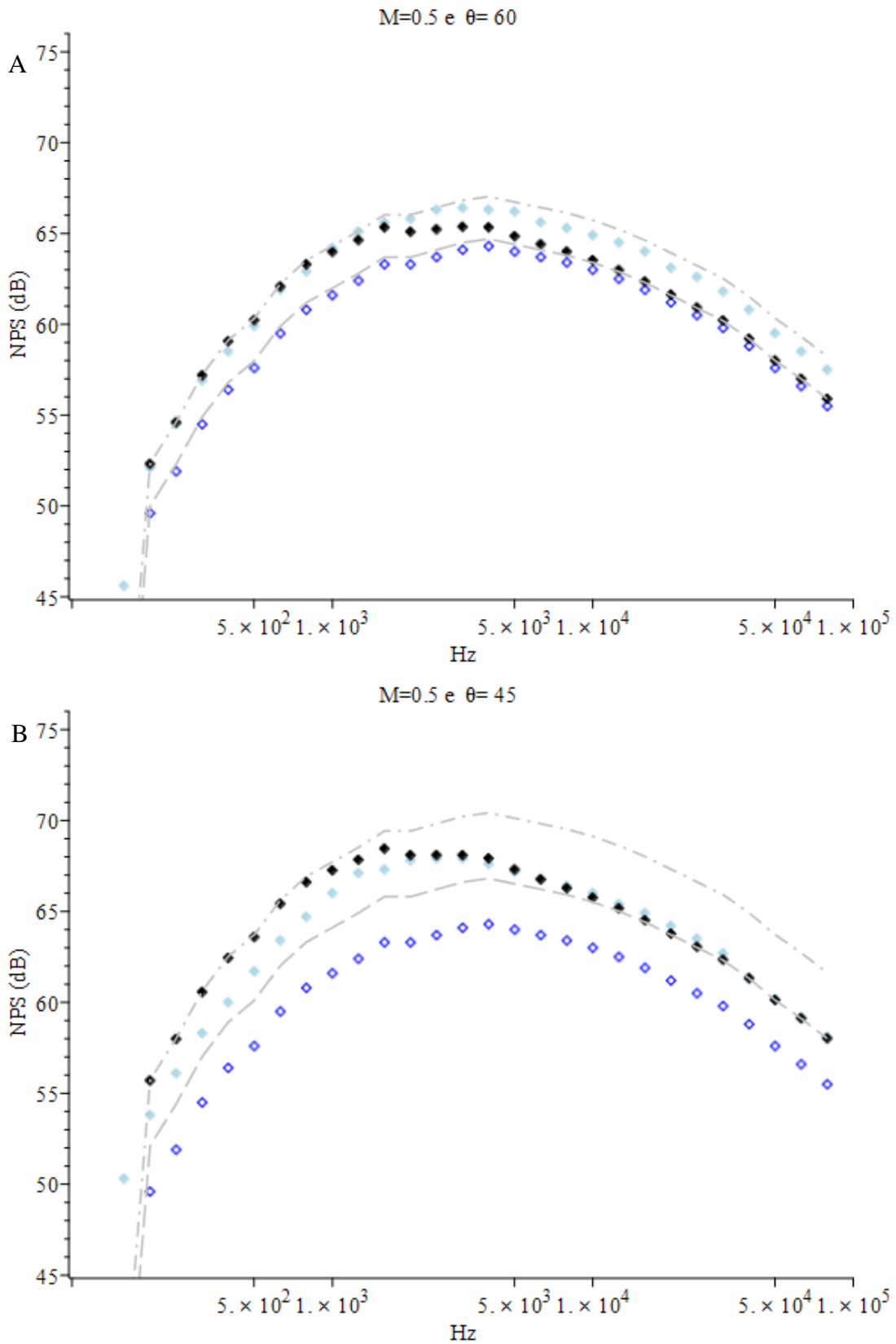


Figura 19 Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 60^\circ$ (A), 45° (B) e 30° (C).
 $M = 0,5$; $K_1 = 0,1$; $K_2 = 0,1$; $\beta = 2$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 - - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

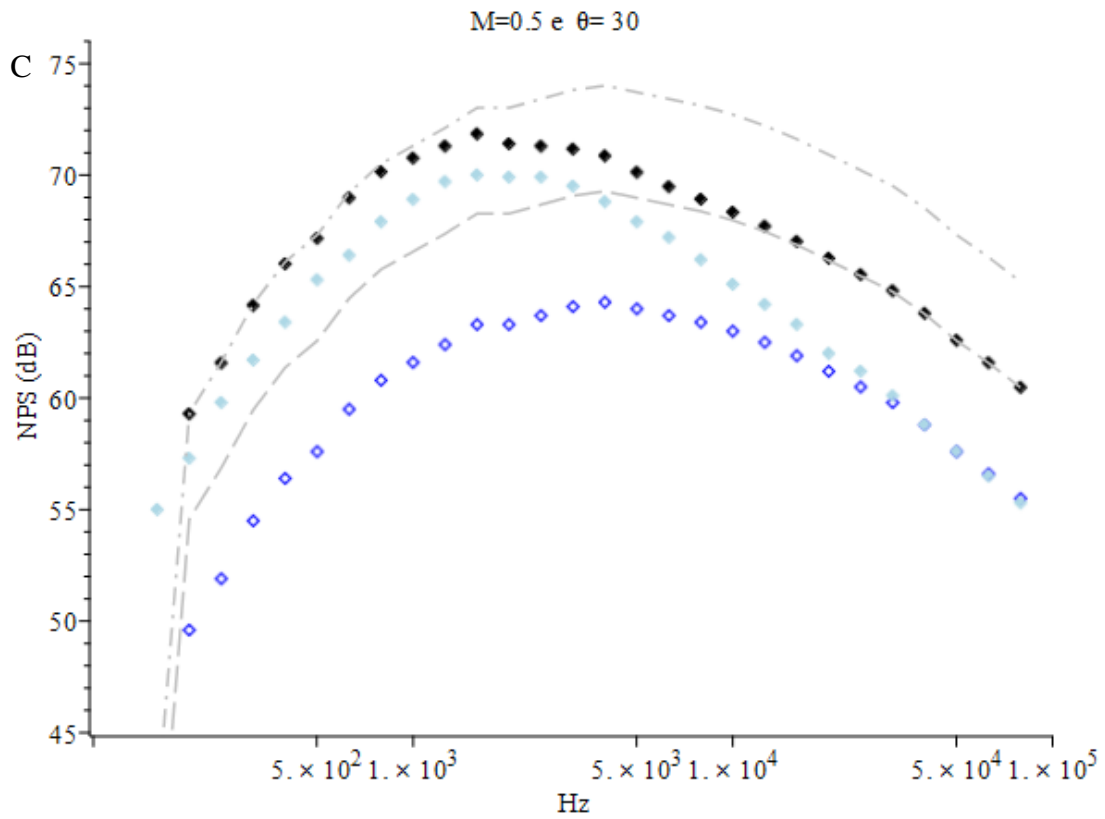


Figura 19 (continuação) Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 30^\circ$ (C).
 $M = 0,5$; $K_1 = 0,1$; $K_2 = 0,1$; $\beta = 2$. ◆ jato frio, 90° ; ◆ jato frio; ◆ previsão;
 - - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

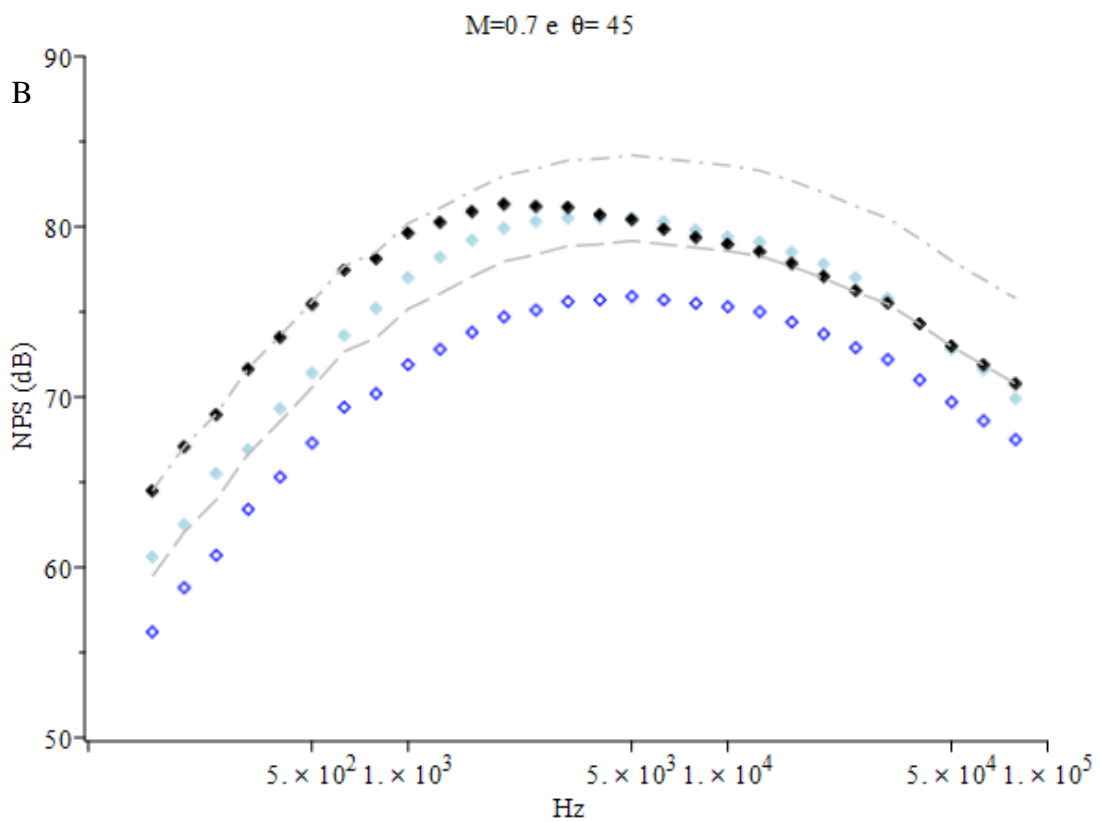
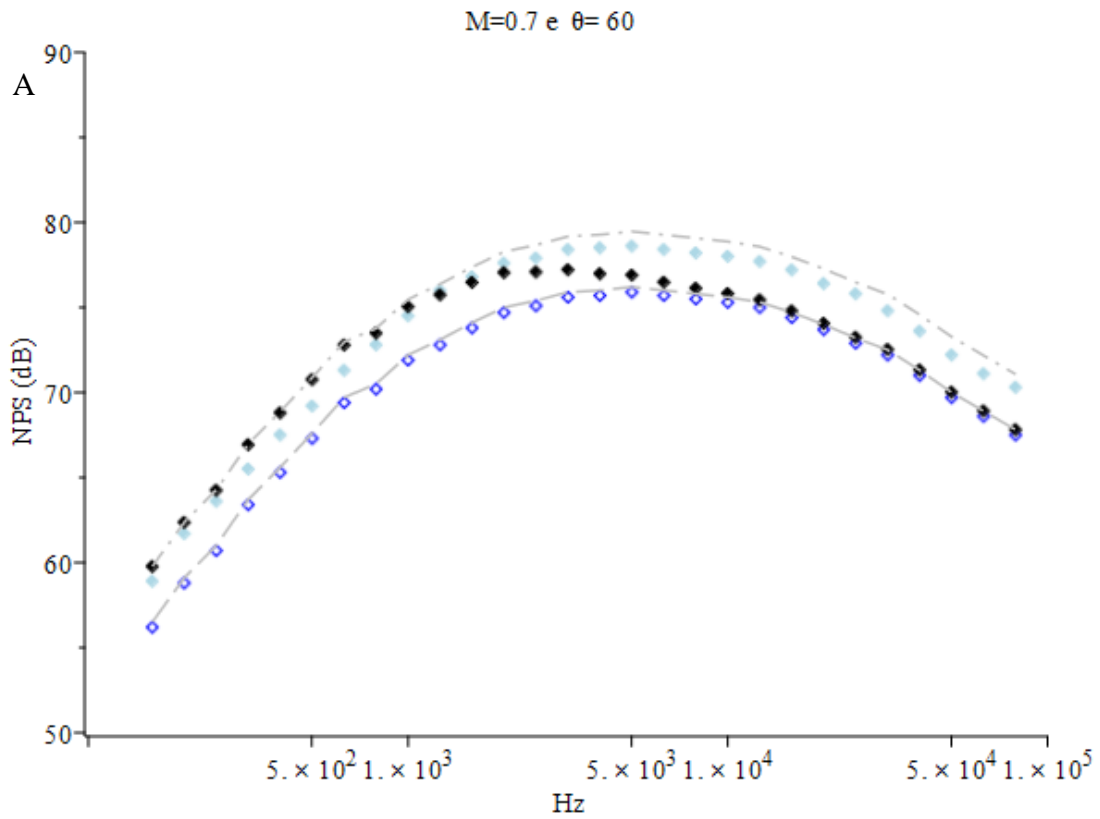


Figura 20 Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 60^\circ$ (A), 45° (B) e 30° (C).
 $M = 0,7$; $K_1 = 0,1$; $K_2 = 0,1$; $\beta = 2$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão;
 - - - solução para baixas frequências; — — — solução para altas frequências.

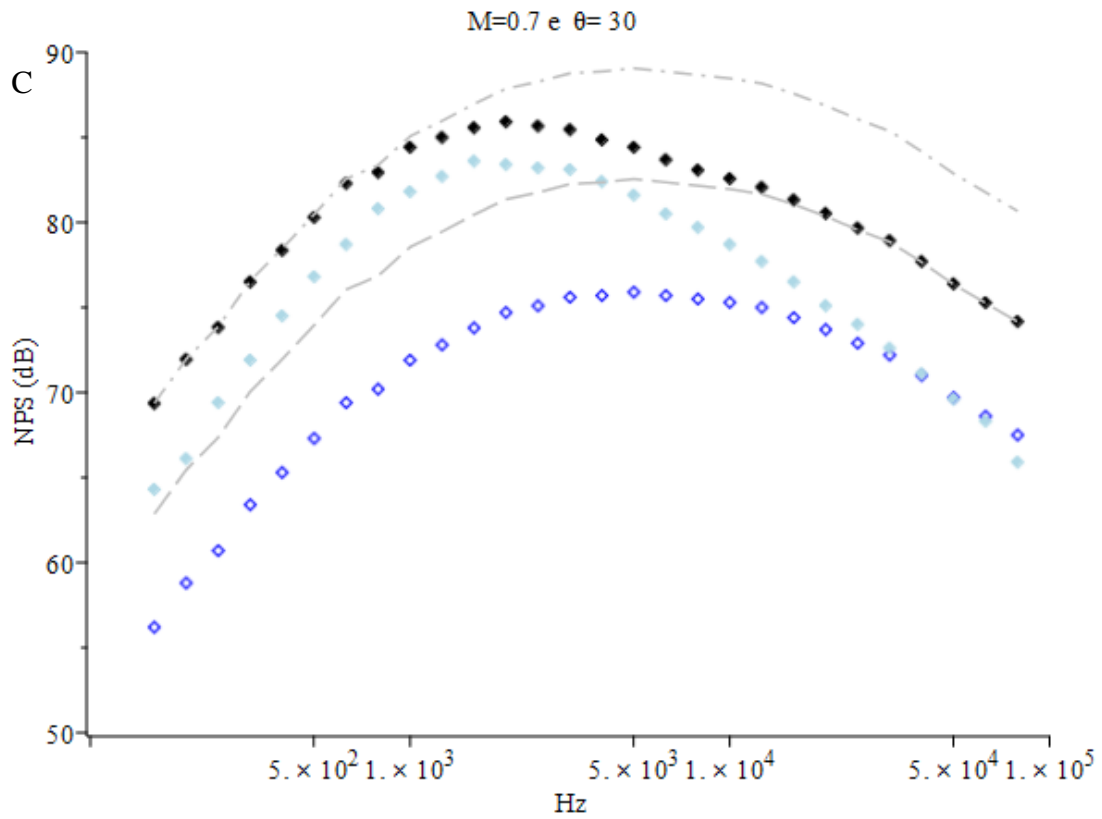


Figura 20 (continuação) Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 30^\circ(\text{C})$
 $M = 0,7$; $K_1 = 0,1$; $K_2 = 0,1$; $\beta = 2$. ♦ jato frio, 90° ; ◆ jato frio; ◆ previsão;
 - - - solução para baixas frequências; - - - solução para altas frequências.

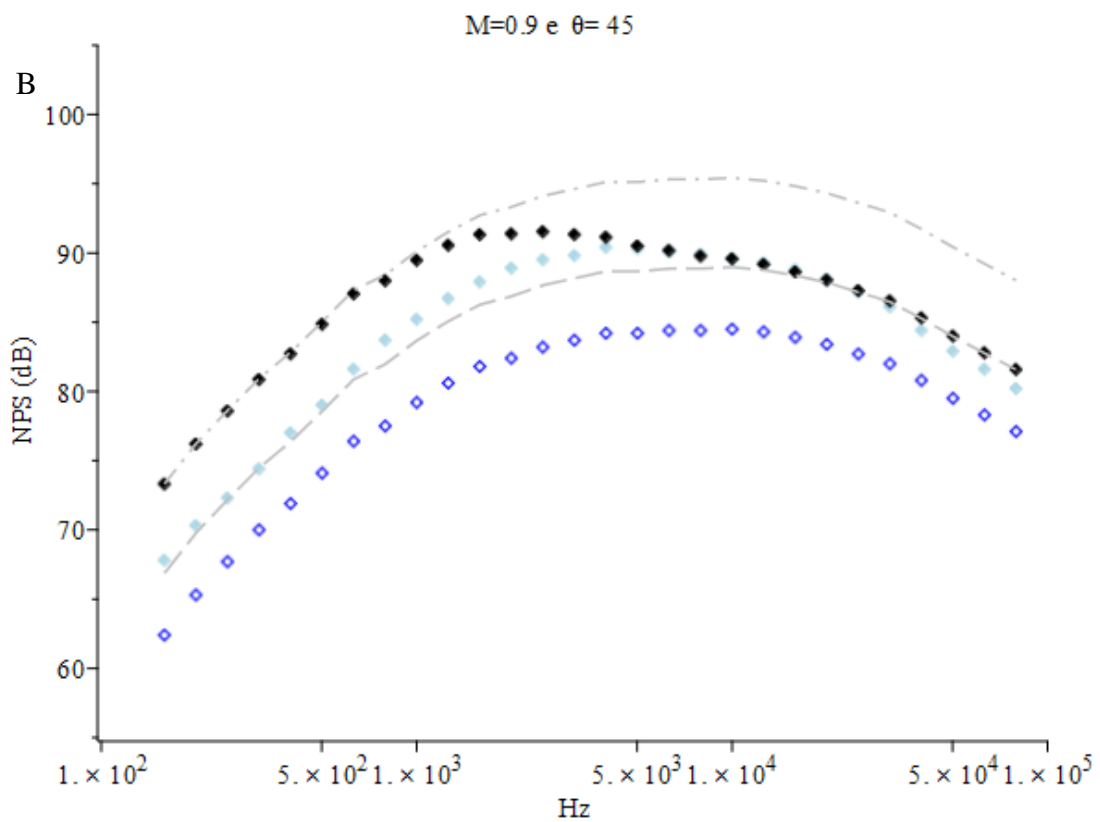
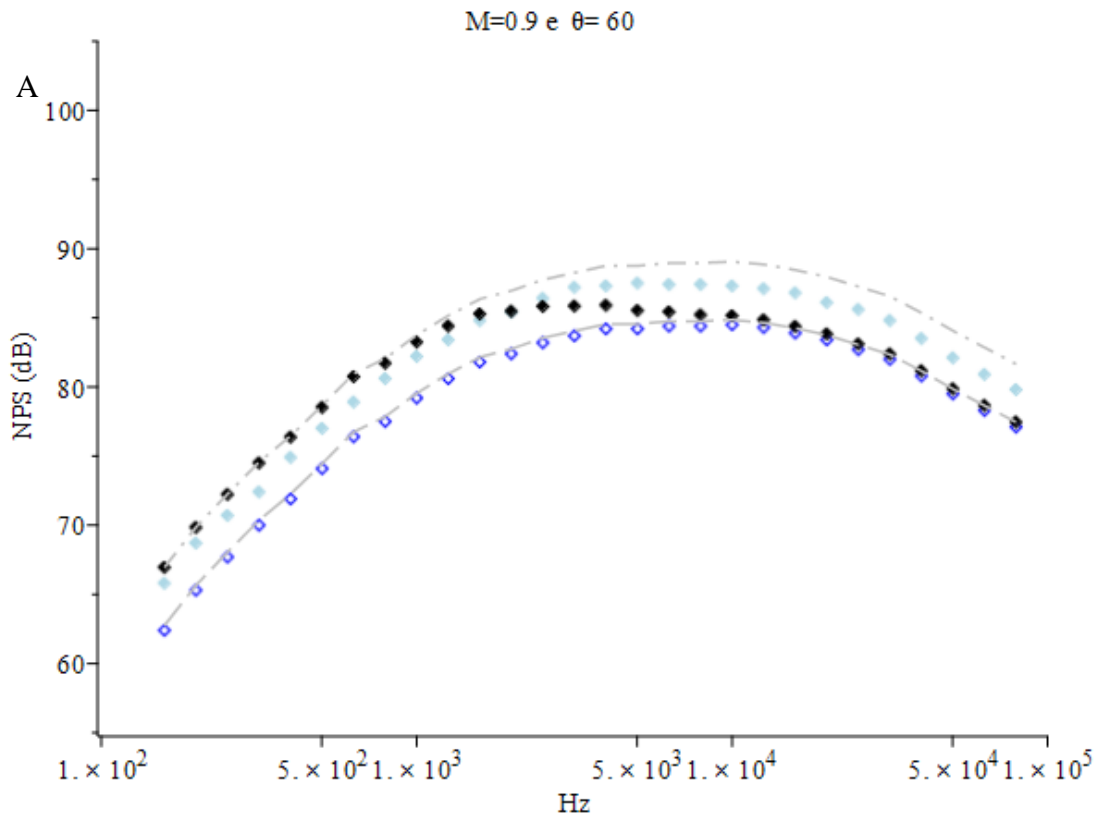


Figura 21 Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 60^\circ$ (A), 45° (B) e 30° (C).
 $M = 0,9$; $K_1 = 0,1$; $K_2 = 0,1$; $\beta = 2$. \diamond jato frio, 90° ; \blacklozenge jato frio; \blacklozenge previsão,
 - - - solução para baixas frequências; — — solução para altas frequências.

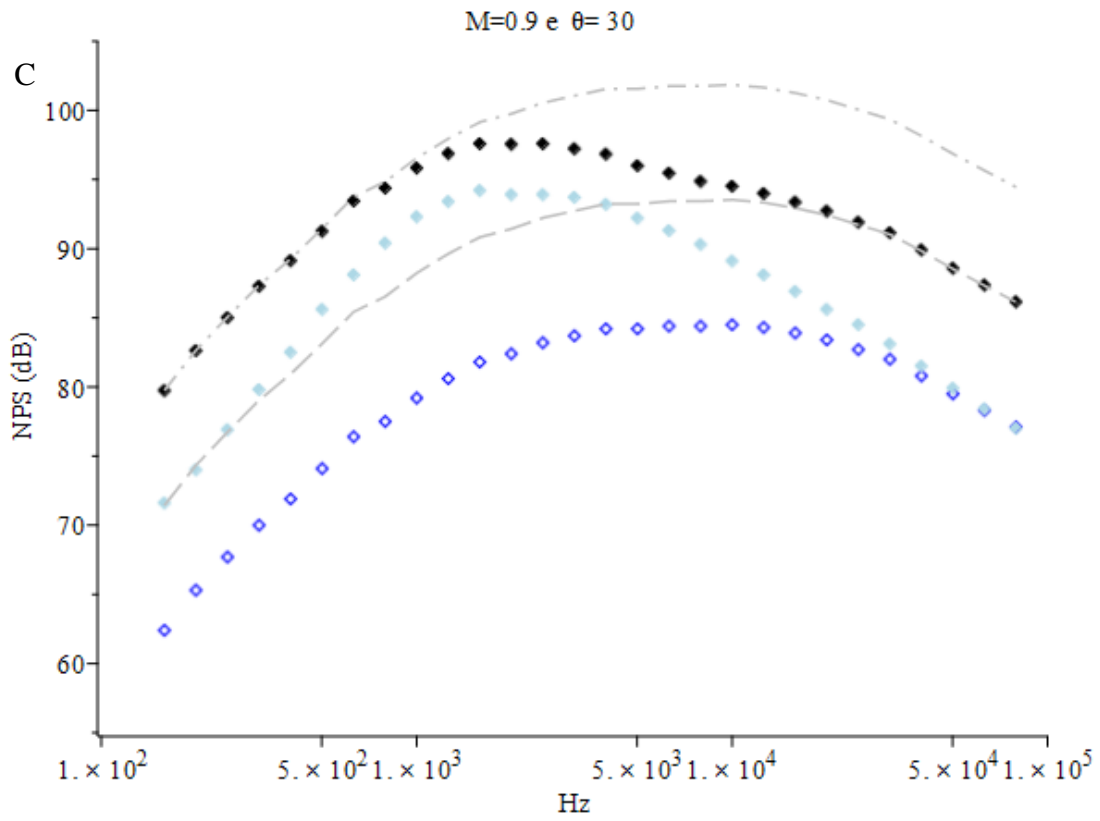


Figura 21 (continuação) Previsão do espectro do ruído do jato frio para $\theta = 30^\circ$ (C).
 $M = 0,9$; $K_1 = 0,1$; $K_2 = 0,1$; $\beta = 2$. ◆ jato frio, 90° ; ◆ jato frio; ◆ previsão;
 - - - solução para baixas frequências; — — solução para altas frequências.

6 DISCUSSÃO

Analisando os gráficos do capítulo anterior, pode-se observar que o modelo falhou em prever o espectro do ruído para as altas frequências para ângulos $\theta = 30^\circ$ e 45° , para o caso do jato aquecido, e $\theta = 30^\circ$, para o caso do jato frio. Isso pode ser atribuído ao fato que a solução utilizada para as altas frequências (seção 3.5) não é válida para ângulos polares dentro do cone de silêncio. Fisher e Morfey (1982) discutiram o ângulo crítico que delimita a região do cone do silêncio — região em que as ondas sonoras vindas do escoamento são atenuadas antes de escaparem para o meio externo. Esse ângulo crítico θ_c é dado por:

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\frac{c_0}{c_\infty} + M_s} = \frac{1}{\sqrt{R} + M_s},$$

onde M_s é o número de Mach na posição da fonte, $M_s = 0,6M_j$.

A Tabela 1 e 2 mostram os ângulos críticos para os jatos aquecido e frio, respectivamente, para os diferentes números de Mach utilizados neste trabalho. Observa-se que a solução para as alta frequência não é válida, para o caso do jato aquecido, quando $\theta = 30^\circ$ e 45° e , para o caso do jato frio, quando $\theta = 30^\circ$.

Tabela 1 Ângulo crítico para o jato aquecido

M_J	$\cos \theta_c$	θ_c
0,35	0,62	51,40°
0,5	0,59	53,79°
0,7	0,55	56,52°
0,9	0,52	58,84°

Tabela 2 Ângulo crítico para o jato frio

M_J	$\cos \theta_c$	θ_c
0,35	0,83	33,90°
0,5	0,77	39,6°
0,7	0,70	45,6°
0,9	0,65	49,5°

Fisher e Morfey (1982) propuseram uma correção para que a solução seja válida dentro do cone de silêncio. A solução para os casos em que $\theta < \theta_c$ deveria ser multiplicada por um fator com a forma de $e^{-|K_t|y_t}$, que introduz um decaimento exponencial adicional, onde y_t é a distância entre a fonte e a interface do jato com o meio circundante e $|K_t|$ é um coeficiente que é função da frequência ω ; do ângulo crítico θ_c ; do número de Mach; da razão de temperatura R_T . Essa correção leva em consideração a predominância dos efeitos de refração dentro do cone de silêncio, que não foi considerada neste trabalho.

Também se assumiu a compacidade das fontes. Essa hipótese desconsidera a distância entre duas fontes dentro do escoamento e sua possível interferência ($\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ na eq. (4.15)). Entretanto, conforme a frequência aumenta, o comprimento de onda diminui, e a interferências entre as fontes passa a ser mais significativa, de forma a não poder mais ser desprezada, efeito que aumenta com a velocidade do jato. Assim, seria necessário incluir a modelagem do termo $e^{-k(\mathbf{y}-\mathbf{y}') \cdot \mathbf{e}_x}$, que surge ao se fazer a transformada de Fourier das inter-correlações $\overline{u_i u_j u_k u_l}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \Delta t^*)$ na eq. (4.14) e que

afetará as funções C_{ijkl} que passarão a depender do ângulo θ , do número de Mach e da frequência.

Além disso, para o caso do jato aquecido, o modelo falhou em prever o espectro para as baixas frequências para números de Mach $M_J = 0,7$ e $0,9$ e ângulos $\theta = 30^\circ$ e 45° (e 60° para $M_J = 0,9$); e para o caso do jato frio, para ângulos $\theta = 30^\circ$ e 45° , o que pode ser atribuído a um excesso de amplificação convectiva. Nesse caso, seria necessário averiguar se uma redução do fator Doppler convectivo C reduziria esse excesso de previsão.

Neste trabalho, foi escolhido considerar a fonte como isotrópica para não enfatizar ainda mais a emissão na direção do escoamento. Para isso tem-se $B = A = 0$ e $r_{12} = r_{23} = -0,5$.

É possível observar nos gráficos da previsão do jato aquecido para $\theta = 90^\circ$ (Figuras 14a, 15a, 16a e 17a), os efeitos esperados devido ao aumento da temperatura do jato discutidos por Fisher e Morfey (1982): para $M = 0,35$ e $0,5$, os dipolos parecem dominar por todo o espectro, onde houve um aumento de ruído em relação ao jato frio; para $M = 0,7$ houve um aumento de ruído para as baixas frequências, sendo atribuído aos dipolos, e uma redução de ruído para as altas frequências, sendo atribuída a diminuição da contribuição de “quadripolos antigos” devido a redução da densidade na região da fonte ; para $M = 0,9$ a perda de “quadripolos antigos” são mais importantes, havendo uma redução do ruído por todo o espectro.

Diferentemente do modelo de Musafir (2006), em que buscou-se atrelar os valores de ε_1 e ε_2 , de forma a “limitar” a quantidade de novos quadripolos e dipolos, com $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$, decidiu-se por manter ε_1 constante e variar ε_2 com o número de Mach , a fim de diminuir os efeitos dos dipolos conforme o número de Mach aumenta

Além disso, o valor de β foi ajustado empiricamente, contrariando o valor experimental de 4,5 encontrado por Davies, Fisher e Barrat (1963) e que foi utilizado por Musafir. Nota-se que para $\theta = 90^\circ$ a eq. (4.46) reduz-se a:

$$S_{90,RT} = S_{90,FRIO} + 10 \log \left\{ D + \langle g_\phi^2 \rangle > K_2 \left[\left(\frac{\delta}{M_j} \right)^2 \left(\varepsilon_1^2 \beta^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{(kd)^2} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \beta}{kd} \right) \right] \right\}, \quad (6.1)$$

onde o efeito do termo contendo β^2 pode ser, a grosso modo, limitado ao se escolher o valor para ε_1 , o que não acontece no caso geral representado pela eq. (4.46) devido ao termo contendo $4C^{-2} \cos^2 \theta \beta^2$ que não é afetado pelo ε_1 . Assim, foi escolhido $\beta = 2$ com objetivo de limitar a contribuição desse termo.

O modelo possui o atrativo de explicitar o nível de pressão sonora por faixa de terço de oitava do jato frio a 90° na equação da previsão (eq. 4.46), de forma que os outros termos da equação funcionam como uma “correção” em função da temperatura e do ângulo polar. Entretanto, precisa ainda ser aperfeiçoado para incluir os efeitos de refração e não compacidade que afetam as altas frequências. Sugere-se investigar também uma redução da amplificação convectiva para as baixas frequências.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, discutiu-se inicialmente o problema do som gerado aerodinamicamente, os aspectos físicos do jato, e as características das fontes sonoras mais elementares. Em seguida foram apresentadas algumas das analogias acústicas utilizadas para formular o problema, em especial a analogia acústica de Lighthill, com as simplificações mais usuais, bem como os efeitos de temperatura e refração e a analogia de Lilley.

Uma vez formulado o problema, discutiu-se algumas das soluções existentes para a equação de Lilley. No capítulo 2, introduziu-se a solução de equações lineares não homogêneas e as propriedades matemáticas necessárias para sua resolução; discutiu-se uma representação da solução da equação de Lilley para flutuação de pressão do problema, válida no campo afastado, obtida por Musafir (2005) a partir de um problema auxiliar, onde os gradientes de velocidade média e temperatura foram explicitados de forma que a função de Green pode ser aproximada para o caso de escoamento uniforme e isotérmico; apresentou-se as funções de Green que satisfazem a equação de Lilley nos limites de alta e baixa frequências para escoamento isotérmico e uniforme disponíveis na literatura; mostrou-se como essas diferentes funções de Green se relacionam com a função de Green do problema auxiliar.

O modelo desenvolvido por Musafir (2006) foi revisto e expandido para a prever o espectro do ruído do jato para diferentes ângulos polares e razões de temperatura a partir do espectro do jato frio a 90° e as diferentes hipóteses utilizadas foram discutidas.

Finalmente, testou-se a equação de previsão com os dados experimentais obtidos por Brown e Bridges (2006) para diferentes números de Mach. Concluiu-se que o modelo funcionou razoavelmente bem para ângulos fora do cone de silêncio e que evidenciou algumas das tendências esperadas, como a importância dos dipolos para números de Mach pequenos nas baixas frequências e a redução do ruído devido aos efeitos da temperatura (diminuição da contribuição dos chamados “quadripolos antigos”). Entretanto, o modelo falhou em prever o espectro, tanto nas baixas quanto nas altas frequências, para ângulos pequenos e elevado número de Mach. Sugere-se então a inclusão, na solução de altas frequências, dos fatores do tipo $e^{-|K_t|y_t}$ para considerar a refração dentro do cone de silêncio, bem como uma análise mais detalhada dos efeitos ligados à possível não compactidade das fontes. Outras questões que também podem ser investigadas são a conveniência de introduzir uma redução na amplificação convectiva para as baixas frequências, o uso de fontes não estatisticamente isotrópicas e considerar, mesmo para fontes compactas, que as propriedades variam com a posição no jato.

REFERÊNCIAS

- AFSAR, M. Z.; GOLDSTEIN, M. E.; FAGAN, A. “*Enthalpy-Flux/Momentum-Flux Coupling in the Acoustic Spectrum of Heated Jets*”, The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 49, No 11, pp. 2522-2531, 2011a.
- AFSAR, M. Z.; GOLDSTEIN, M. E.; FAGAN, A. “*The Influence of “Enthalpy Flux-Momentum Flux” Coupling on the Acoustic Spectrum of Heated Jets*”, Proceedings of the 49th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Orlando, Jan. 2011b.
- BALSA, T. F. “*The Far Field of High Frequency Convected Singularities in Sheared Flows, with an Application to Jet-Noise Prediction*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 74, pp. 193-208, 1976.
- BODONY, D. J. “*Heating Effects on the Structure of Noise Sources of High-Speed Jets*”, Proceedings of the 47th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Orlando, Jan. 2009.
- BROWN, C.; BRIDGES, J. “*Small Hot Jet Acoustic Rig Validation*”, NASA TM 2006-214234, 2006.
- CRIGHTON, D. G.; GASTER, M. “*Stability of Slowly Diverging Jet Flow*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 77, part 2, pp. 397-413, 1976.
- CROCKER, M. J. “*Introduction*” In: CROCKER, M. J. “*Handbook of Acoustics*”, Nova Iorque, John Wiley & Sons, pp. 3-19, 1998.
- DAVIES, P. O. A. L.; FISHER, M. J.; BARRAT, M. J. “*The Characteristics of the Turbulence in the Mixing Region of a Round Jet*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 13, No 3, pp. 337-367, 1963, “*Corrigendum*” in Journal of Fluid Mechanics, Vol. 13, No 4, pp. 559, 1963.
- DOWLING A. P. “*Steady-State Radiation from Sources*” In: CROCKER, M. J. “*Handbook of Acoustics*”, Nova Iorque, John Wiley & Sons, pp. 99-117, 1998.
- DOWLING A. P.; FLOWCS WILLIAMS J. E.; GOLDSTEIN M. E. “*Sound Production in a Moving Stream*”, Phil. Trans. Royal Soc. London, A 288, pp. 321-349, 1978.
- DOWLING, A. P.; FLOWCS WILLIAMS J. E. “*Sound and Sources of Sound*”, 1ª Edição Chichester, Ellis Horwood Limited, pp.321, 1983.
- FLOWCS WILLIAMS, J. E. “*The Acoustic Analogy—Thirty Years On*”, Journal of Applied Mathematics, Vol. 32, No 1-3, pp. 113-124, 1984.
- FLOWCS WILLIAMS J. E. “*The Noise from Turbulence Convected at High Speed*”, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 255, No. 1061, pp. 469-503, 1963.
- FISHER, M. J; MORFEY, C. L. “*Jet Noise*” In: WHITE, R. G; WALKER, J. G. “*Noise and Vibration*”, 1ª Edição Chichester, Ellis Horwood Ltd., pp. 307-336, 1982.
- GOLDSTEIN M. E. “*Aeroacoustics*”, 1ª Edição Nova Iorque, McGrawHill, pp. 293, 1976.

- GOLDSTEIN M. E. “*High Frequency Sound Emission From Moving Point Multipole Source Embedded in Arbitrary Transversely Sheared Mean Flows*”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 80, pp. 499-522, 1982.
- GOLDSTEIN, M. E. “*An Exact Form of Lilley’s Equation with a Velocity Quadrupole/Temperature Dipole Source Term*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 443, pp. 231-236, 2001.
- GOLDSTEIN, M. E.; “*A Generalized Acoustic Analogy*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 488, pp. 315-333, 2003.
- GOLDSTEIN, M. E.; “*On Identifying the True Sources of Aerodynamic Sound*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 526, pp. 337-347, 2005.
- GOLDSTEIN, M. E.; HANDLER, L. M. “*The Role of Instability Waves in Predicting Jet Noise*”, Proceedings of the 9th Aeroacoustics Conference and Exhibit, Hilton Head, Maio 2003.
- GOLDSTEIN, M. E.; LIEB, S. J. “*The Aeroacoustics of Slowly Diverging Supersonic Jets*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 600, pp. 291-337, 2008.
- KARABASOV S. S. “*Understanding Jet Noise*”, Phil. Trans. Royal Soc. London, A 368, pp. 3593-3608, 2010.
- KARABASOV, S. A.; AFSAR, M. Z.; HYNES, T.P. et al; “*Using .Large Eddy Simulation within an Acoustic Analogy Approach for Jet Noise Modelling*”, Proceedings of the 14th Aeroacoustics Conference, Vancouver, Maio 2008.
- KHAVARAN, A.; BRIDGES, J. “*Modelling of Turbulence Generated Noise in Jets*”, Proceedings of the 10th Aeroacoustics Conference, Manchester, Maio 2004.
- KHAVARAN, A.; KENZAKOWSKI, D. C.; MIELKE-FAGAN, A. F. “*Hot Jets and Sources of Jet Noise*”, International Journal of Aeroacoustics, Vol. 9, No. 4 & 5, pp. 491-532, 2010.
- LEW, P. T.; BLAISDELL, G. A.; LYRINTZIS, A. S. “*Investigation of Noise Sources in Turbulent Hot Jets Using Large Eddy Simulation Data*”, Proceedings of the 45th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Jan. 2007.
- LIGHTHILL, M. J. “*On Sound Generated Aerodynamically. I. General Thoery*”, Proceeding of Royal Soc., Vol. a211, No. 1107, pp. 564-587, 1952.
- LILLEY, G. M. “*Sound Generation in Shear Flow Turbulence*”, Fluid Dynamics Trans., Vol. 6, pp. 405-420, 1971.
- LUSH, P. A. “*Measurements of Subsonic Jet Noise and Comparison with Theory*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 46, No. 3, pp. 477-500, 1971.
- MORFEY, C. L. “*Amplification of Aerodynamic Noise by Convected Flow Inhomogeneities*”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, No. 4, pp. 391-397, 1973.
- MORFEY, C. L.; ZEW CZYK, V. M.; TESTER, B. J. “*New Scaling Laws for Hot And Cold Jet Mixing Noise Based on a Geometric Acoustics Model*”, Journal of Sound and Vibrations, Vol. 61, No. 2, pp. 255-292, 1978.

- MORSE, P. M.; INGARD, K. U. “*Theoretical Acoustics*”. 1ª Edição New Jersey, Princeton University Press, pp. 927, 1986.
- MUNGAR, P.; PLUMBEE, H. E.; DOAK, P.E. “*Analysis of Acoustic Radiation in a Jet Flow Environment*”, Journal of Sound and Vibrations, Vol. 36, No. 1, pp. 21-52, 1974.
- MUSAFIR, R. E. “*Geração de Ruído por Jatos Turbulentos*”, Tese MSc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1984.
- MUSAFIR, R. E. “*On the Source Terms in Lilley’s Equation*”, Acta Acustica, Vol. 93, No. 2, pp. 263-274, 2004.
- MUSAFIR, R. E. “*Properties of Solutions of Lilley’s Equation*”, Proceedings of the 12th International Congress on Sound and Vibration, Lisboa, Julho 2005.
- MUSAFIR, R. E. “*Relating Far Field Noise Spectra of Cold and hot Jets*”, Proceedings of the 13th International Congress on Sound and Vibration, Vienna, Julho 2006.
- MUSAFIR, R. E. “*Ruído de Jato: Modelagem e Interpretação das Correlações no Campo Afastado*”, Tese DSc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.
- POWEL, A. “*Aerodynamic and Jet Noise*” In: CROCKER, M. J. “*Handbook of Acoustics*”. 1ª Edição Nova Iorque, John Wiley & Sons, pp. 273-284, 1998.
- POWEL, A. “*Theory of Vortex Sound*”, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 36, No. 1, pp. 117-195, 1964.
- POWLES, C. J.; TESTER, B. J. “*Asymptotic and Numerical Solutions for Shielding of Noise Sources by Parallel Coaxial Jet Flows*”, Proceedings of the 14th Aeroacoustics Conference, Vancouver, Maio 2008.
- POWLES, C. J.; TESTER, B. J.; MCALPINE, A. “*A Weak-Scattering Model for Turbine-Tone Haystacking Outside the Cone of Silence*”, International Journal of Aerocoustics, Vol. 10, No. 1, pp. 17-50, 2011.
- RIBNER, H. S. “*On Spectra and Directivity of Jet Noise*”, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 35, No 4, pp. 614-616, 1963.
- RIBNER, H. S. “*Perspectives on Jet Noise*”, The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 19, No 12, pp. 1513-1526, 1981.
- RIBNER, H. S. “*Quadrupole Correlations Governing the Pattern of Jet Noise*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 38, No 1, pp.1-24, 1969.
- ROSA, V. “*RANS-based Prediction of Noise from Isothermal and Hot Subsonic Jets*”, thesis PhD, Institute of Sound and Vibration Research/ University of Southampton, Southampton, 2018.
- TAM, C. K. W. “*Jet Noise: Since 1952*”, Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 10, pp. 393-405, 1998.
- TESTER, B. J.; BURRIN, R. H. “*On Sound Radiation from Sources in Parallel Sheared Jet Flows*”, Proceedings of the 12th Aerospace Sciences Meeting, Washington, Jan.-Fev. 1974.

TESTER, B. J.; MORFEY, C. L. “*Developments in Jet Noise Modelling —Theoretical Predictions and Comparisons with Measured Data*”, Journal of Sound and Vibrations, Vol. 46, No. 1, pp. 79-103, 1976.

TESTER, B. J.; MORFEY, C. L. “*Jet Mixing Noise: A Review of Single Stream Temperature Effects*”, Proceedings of the 15th Aeroacoustics Conference, Miami, Maio 2010.

TESTER, B. J.; MORFEY, C. L. “*Solving the Lilley Equation with Quadrupole and Dipole Sources*”, International Journal of Aeroacoustics, Vol. 9, No. 4 & 5, pp. 419-460, 2010.

VISWANATHAN, K. “*Aeroacoustics of Hot Jets*”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 516, pp. 39-82, 2004.

VISWANATHAN, K. “*Distributions of Noise Sources in Heated and Cold Jets: Are they Different?*”, Proceedings of the 16th Aeroacoustics Conference, Stockholm, Junho 2010.

APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LILLEY (eq. (2.12))

As seguintes considerações serão utilizadas durante a dedução da equação de Lilley:

- i) escoamento paralelo: $\mathbf{v}_0 = U(x_2, x_3)\mathbf{e}_1$ o que implica em $\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0$ e $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 = 0$;
- ii) as propriedades médias das variáveis (N) do jato são funções apenas de x_2 e x_3 : $\frac{\partial(N)}{\partial x_1} = 0$, onde N pode ser a temperatura, pressão, velocidade média, etc.
- iii) a pressão média é considerada constante: $\nabla p_0 = 0$.

A dedução começa a partir das equações de balanço reescritas conforme:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A1})$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla p = 0, \quad (\text{A2})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt}. \quad (\text{A3})$$

Após substituir a eq. da energia (A3) na eq. da continuidade (A1), obtém-se:

$$\frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot \rho c^2 \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho c^2 = 0. \quad (\text{A4})$$

A eq. (A4) é então manipulada, conforme:

- a) as variáveis p e \mathbf{v} são decompostas em parte média e parte flutuante e simplificada com as hipóteses (i) – (iii):

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla(p') + \mathbf{v}' \cdot \nabla(p') + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \rho c^2 - \mathbf{v}' \cdot \nabla \rho c^2 = 0; \quad (\text{A4.b})$$

- b) a eq. (A4.b) é reescrita como:

$$\frac{D_0 p'}{Dt} + \nabla \cdot \rho c^2 \mathbf{v}' = -\mathbf{v}' \cdot \nabla(p') + \mathbf{v}' \cdot \nabla \rho c^2; \quad (\text{A4.c})$$

c) c^2 é expandido como $c_0^2 + c^{2'}$ e considera-se gás perfeito, $c^2 = \gamma RT = \frac{\gamma p}{\rho}$:

$$\frac{D_0 p'}{Dt} + \nabla \cdot \rho c_0^2 \mathbf{v}' = q. \quad (\text{A5})$$

onde $q = (\gamma - 1) \mathbf{v}' \cdot \nabla(p') - \nabla \cdot \rho c^{2'} \mathbf{v}'$.

A equação da quantidade de movimento (A2) é manipulada, conforme:

a) o termo $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ é escrito como $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D\mathbf{v}'}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_0$ e introduzido na eq. (A2):

$$\frac{D\rho\mathbf{v}'}{Dt} - \mathbf{v}' \frac{D\rho}{Dt} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \nabla p = 0; \quad (\text{A2.b})$$

b) substitui-se a eq. (A1) na eq. (A2.b):

$$\frac{D\rho\mathbf{v}'}{Dt} + \mathbf{v}' \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \nabla p = 0; \quad (\text{A2.c})$$

c) multiplica-se a eq. (A2.c) pelo fator c_0^2 e reescreve-se o resultado para os termos expandidos conforme :

$$c_0^2 \frac{D_0 \rho \mathbf{v}'}{Dt} + c_0^2 \rho \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + c_0^2 \nabla p' = -c_0^2 \nabla \cdot \rho \mathbf{v}' \mathbf{v}'; \quad (\text{A2.d})$$

d) observando que $c_0^2 \frac{D_0 \rho \mathbf{v}'}{Dt} = \frac{D_0 c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{Dt} - \rho \mathbf{v}' \frac{D_0 c_0^2}{Dt}$ e que $\frac{D_0 c_0^2}{Dt}$ é nulo:

$$\frac{D_0 c_0^2}{Dt} = \frac{\partial c_0^2}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla c_0^2 = U(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} c_0^2 = 0,$$

a eq. (A2.d) é simplificada:

$$\frac{D_0 c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{Dt} + c_0^2 \rho \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + c_0^2 \nabla p' = \mathbf{f}, \quad (\text{A6})$$

onde $\mathbf{f} = -\nabla \cdot c_0^2 \rho \mathbf{v}' \mathbf{v}' + \rho \mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \nabla c_0^2$.

São feitas as seguintes manipulações nas eqs. (A5) e (A6)

a) Aplica-se o operador $\frac{D_0}{Dt}$ na eq. (A5) e o operador $\nabla \cdot$ na eq. (A6):

$$\frac{D_0^2 p'}{Dt^2} + \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot \rho c_0^2 \mathbf{v}' = \frac{D_0}{Dt} q \quad (\text{A5.b})$$

$$\nabla \cdot \frac{D_0 c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{Dt} + \nabla \cdot (c_0^2 \rho \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}_0) + \nabla \cdot (c_0^2 \nabla p') = \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (\text{A6.b})$$

e após simplificar os termos $\nabla \cdot \frac{D_0 c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{Dt}$ e $\nabla \cdot (c_0^2 \rho \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}_0)$ da eq. (A6.b) conforme:

$$\nabla \cdot \frac{D_0 c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{Dt} = \frac{D_0 (\nabla \cdot c_0^2 \rho \mathbf{v}')}{Dt} + \nabla U \cdot \frac{\partial c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{\partial x_1},$$

e:

$$\nabla \cdot (c_0^2 \rho \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_0^2 \rho v_j' \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c_0^2 \rho v_j' \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial c_0^2 \rho v_j'}{\partial x_1} \frac{\partial U}{\partial x_j} = \nabla U \cdot \frac{\partial c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{\partial x_1},$$

obtem-se:

$$\frac{D_0 (\nabla \cdot c_0^2 \rho \mathbf{v}')}{Dt} + 2 \nabla U \cdot \frac{\partial c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{\partial x_1} + \nabla \cdot (c_0^2 \nabla p') = \nabla \cdot \mathbf{f}; \quad (\text{A6.c})$$

b) subtrai-se a eq. (A6.c) da eq. (A5.b):

$$\frac{D_0^2 p'}{Dt^2} - 2 \nabla U \cdot \frac{\partial c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{\partial x_1} - \nabla \cdot (c_0^2 \nabla p') = \frac{D_0}{Dt} q - \nabla \cdot \mathbf{f}; \quad (\text{A7})$$

c) aplica-se o operador $\frac{D_0}{Dt}$ na eq. (A7):

$$\frac{D_0^3 p'}{Dt^3} - \frac{D_0}{Dt} \left(2 \nabla U \cdot \frac{\partial c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{\partial x_1} \right) - \frac{D_0}{Dt} (\nabla \cdot (c_0^2 \nabla p')) = \frac{D_0^2}{Dt^2} q - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot \mathbf{f}, \quad (\text{A7.b})$$

e após substituir $\frac{D_0}{Dt} \left(2 \nabla U \cdot \frac{\partial c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{\partial x_1} \right) = \left(2 \nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \frac{D_0 c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{Dt}$ na eq. (A7.b), obtemos:

$$\frac{D_0^3 p'}{Dt^3} - \left(2 \nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \frac{D_0 c_0^2 \rho \mathbf{v}'}{Dt} - \frac{D_0}{Dt} (\nabla \cdot (c_0^2 \nabla p')) = \frac{D_0^2}{Dt^2} q - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot \mathbf{f}; \quad (\text{A7.c})$$

d) introduz-se a variável \mathbf{v}'_T , dada por $\mathbf{v}'_T = (0, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3)$ nas eqs. (A7.c) e (A6):

$$\frac{D_0^3 p'}{Dt^3} - \left(2 \nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \frac{D_0 c_0^2 \rho \mathbf{v}'_T}{Dt} - \frac{D_0}{Dt} (\nabla \cdot (c_0^2 \nabla p')) = \frac{D_0^2}{Dt^2} q - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (\text{A7.d})$$

e

$$\frac{D_0 c_0^2 \rho v_T'}{Dt} + c_0^2 \nabla p' = \mathbf{f}; \quad (\text{A8})$$

e) multiplica-se a eq. (A8) por $\left(2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ e soma-se o resultado com a eq. (A7.d),

obtendo-se a equação de Lilley na forma da eq. (2.12),

$$\frac{D_0^3 p'}{Dt^3} + \left(2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot\right) c_0^2 \nabla p' = \frac{D_0^2}{Dt^2} q + \left(2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{D_0}{Dt} \nabla \cdot\right) \mathbf{f}. \quad (\text{A9})$$

APÊNDICE B – IDENTIDADE ENTRE OPERADORES

Este apêndice procura mostrar como que o operador espacial pode ser substituído por um operador que contém uma derivada temporal no campo afastado. Para isso, utiliza-se uma fonte pontual dipolar representado por uma força $\mathbf{F}\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_\infty}\right)$ em um meio em repouso e homogêneo, em que a solução para a flutuação da pressão é dada por:

$$p'(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{F_i\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_\infty}\right)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \quad (\text{B1})$$

Observando que para o campo afastado ($|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) e para \mathbf{y} dentro da região da fonte ($|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$), as seguintes aproximações são válidas:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = (|\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2)^{1/2} \approx |\mathbf{x}| \left(1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^2} + O\left(\frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|^2}\right)\right) \approx |\mathbf{x}| - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|}$$

e

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}| - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|}} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left(1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^2}\right) \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^3} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|}.$$

Após expandir a equação (B1) e utilizar as aproximações acima, obtém-se:

se:

$$p'(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\dot{F}_i\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_\infty} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_\infty |\mathbf{x}|}\right)}{4\pi|\mathbf{x}|c_\infty} + \frac{F_i\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_\infty} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_\infty |\mathbf{x}|}\right)}{4\pi|\mathbf{x}|^2 c_\infty} \right) \frac{\partial |\mathbf{x}|}{\partial x_i},$$

que para o campo afastado ($|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$), pode ser aproximado por:

$$p'(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\partial}{\partial t} \frac{F_i\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_\infty} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_\infty |\mathbf{x}|}\right)}{4\pi|\mathbf{x}|c_\infty} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|}. \quad (\text{B2})$$

Assim, após comparar as eqs. (B1) e (B2), temos que a seguinte identidade é válida em um meio em repouso e homogêneo para o campo afastado:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cong -\frac{1}{c_\infty} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial t}$$

Para o caso de escoamento paralelo $U(x_2, x_3)$, a identidade ainda é válida na direção \mathbf{e}_1 , pois nessa direção as propriedades não variam, e obtemos (2.13):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cong -\frac{\cos \theta}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t}$$

APENDICE C – A FORMA DA EQUAÇÃO DE LILLEY VÁLIDA NO CAMPO
AFASTADO

Após expandir os operadores $\frac{D_0}{Dt}$ na equação de Lilley (2.12), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^3 p' + \left[2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \nabla \cdot\right] (c_0^2 \nabla p') = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 q + \\ \left[2\nabla U \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \nabla \cdot\right] (-\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}^*). \end{aligned} \quad (C1)$$

Utiliza-se a identidade entre operadores no campo afastado $\frac{\partial}{\partial x_1} \cong -\frac{\alpha}{c_\infty} \frac{\partial}{\partial t}$

na eq. (C1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - M_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\right)^3 p' - \left[2\nabla M_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - M_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \cdot\right] (c_0^2 \nabla p') = \left(\frac{\partial}{\partial t} - M_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 q - \\ \left[2\nabla M_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - M_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \cdot\right] (-\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}^*), \end{aligned} \quad (C1.b)$$

onde $M_\alpha = \frac{U\alpha}{c_\infty}$.

Após isolar o operador $\frac{\partial}{\partial t}$ e simplificar, a eq. (C1.b) é escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p' - [2(1 - M_\alpha)^{-3} \nabla M_\alpha \cdot + (1 - M_\alpha)^{-2} \nabla \cdot] (c_0^2 \nabla p') = \frac{\partial}{\partial t} (1 - M_\alpha)^{-1} q - \\ [2(1 - M_\alpha)^{-3} \nabla M_\alpha \cdot + (1 - M_\alpha)^{-2} \nabla \cdot] (-\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}^*). \end{aligned} \quad (C1.c)$$

Após substituir a seguintes relação na eq. (C1.c):

$$(2(1 - M_\alpha)^{-3} \nabla M_\alpha \cdot + (1 - M_\alpha)^{-2} \nabla \cdot) (c_0^2 \nabla p') = \nabla \cdot [(1 - M_\alpha)^{-2} (c_0^2 \nabla p')]$$

obtém-se a eq. (2.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p' - \nabla \cdot [(1 - M_\alpha)^{-2} (c_0^2 \nabla p')] = \frac{\partial}{\partial t} (1 - M_\alpha)^{-1} q + \nabla \cdot [(1 - M_\alpha)^{-2} (\nabla \cdot \mathbf{T} - \\ \mathbf{f}^*)]. \end{aligned} \quad (C2)$$

APENDICE D – EXPLICITANDO A SEGUNDA DERIVADA TRANSVERSAL DE

G

A eq. (3.13) é pode ser escrita com o operador expandido conforme:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \nabla(1 - M_\alpha)^{-2} \cdot c_0^2 \nabla G - (1 - M_\alpha)^{-2} \nabla \cdot c_0^2 \nabla G = 0. \quad (\text{E.1})$$

Após multiplicar a eq. (E.1) por $(1 - M_\alpha)^2$, e substituir $\nabla(1 - M_\alpha)^{-2} = -2\alpha(1 - M_\alpha)^{-3} \nabla M$ e $\nabla \cdot c_0^2 \nabla G = \nabla c_0^2 \cdot \nabla G + c_0^2 \nabla^2 G$, obtém-se:

$$(1 - M_\alpha)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - 2\alpha(1 - M_\alpha)^{-1} \nabla M \cdot (c_0^2 \nabla G) - \nabla c_0^2 \cdot \nabla G - c_0^2 \nabla^2 G = 0. \quad (\text{E.2})$$

A eq. (E.2) é multiplicada por c_0^{-2} e o termo $g \frac{\partial^2 G}{\partial y_t^2}$ é somado dos dois lados, para se obter eq. (3.15):

$$c_0^{-2} (1 - M_\alpha)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - 2\alpha(1 - M_\alpha)^{-1} \nabla M \cdot \nabla G - c_0^{-2} \nabla c_0^2 \cdot \nabla G - \left(\nabla^2 - g \frac{\partial^2}{\partial y_t^2} \right) G = g \frac{\partial^2 G}{\partial y_t^2} \quad (\text{E.3})$$