



TEORIA DE PROPAGAÇÃO ACÚSTICA DE FEIXES DE AIRY DISCRETOS  
EM OCEANOS PROFUNDOS

Marcelo Diniz Santa Marinha

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Oceânica.

Orientador: Luiz Gallisa Guimarães

Rio de Janeiro  
Setembro de 2018

TEORIA DE PROPAGAÇÃO ACÚSTICA DE FEIXES DE AIRY DISCRETOS  
EM OCEANOS PROFUNDOS

Marcelo Diniz Santa Marinha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA OCEÂNICA.

Examinada por:

---

Prof. Luiz Gallisa Guimarães, D.Sc.

---

Prof. Carlos Eduardo Parente Ribeiro, D.Sc.

---

Prof. Marcos Nicolas Gallo, D.Sc.

---

Prof. Marco Antônio von Krüger, D.Sc.

---

Prof. Wagner Coelho de Albuquerque Pereira, D.Sc.

---

Prof. Alberto Garcia de Figueiredo Jr., Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
SETEMBRO DE 2018

Marinha, Marcelo Diniz Santa

Teoria de propagação acústica de feixes de Airy discretos em oceanos profundos/Marcelo Diniz Santa Marinha. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XIV, 72 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Luiz Gallisa Guimarães

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Oceânica, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 68 – 71.

1. Propagação do Campo Sonoro no Mar. 2. Métodos de Modos Normais e traçado de Raios. 3. Função de Airy. I. Guimarães, Luiz Gallisa. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Oceânica. III. Título.

Ao ler este trabalho espero que lembre dos dizeres do Papa Francisco.

A vida é como uma viagem num trem, com suas estações, suas mudanças de curso, seus acidentes ... Ao nascermos, pegamos o trem e nos encontramos com nossos pais, e acreditamos que sempre viajarão ao nosso lado, mas, em alguma estação, eles descem e nos deixam sós na viagem.

Da mesma forma, outras pessoas pegarão o trem e nos serão significativas: nossos irmãos, amigos, filhos e até mesmo o amor da nossa vida.

Muitos descerão e deixarão um vazio permanente.. outros passam tão despercebidos que nem nos damos conta que eles desocuparam seus assentos.

Esta viagem estará cheia de alegrias, tristezas, fantasias, esperas e despedidas. O êxito consiste em ter uma boa relação com todos os passageiros, dando o melhor de nós.

O grande mistério para todos é que não sabemos em qual estação desceremos. Por isso, devemos viver da melhor maneira, amar, perdoar, oferecer o melhor de nós. Assim, quando chegar o momento de desembarcar e o nosso assento estiver vazio, vamos deixar bonitas lembranças aos que continuam viajando no trem da vida!!!!

Desejo a você que a viagem em seu trem seja melhor a cada dia, com muito sucesso e amor.

Ah! E lhe agradeço por ser passageiro do meu trem.

*Dedico, especialmente, aos meus  
pais, Romeu Fernandes Santa  
Marinha (in Memoriam) e  
Nelma Diniz Fernandes, base  
sólida sobre a qual construo  
minha vida e conduzo meus  
trabalhos e a minha família.  
À minha família combustível que  
me faz mover sempre pensando  
em melhorar.*

# Agradecimentos

Agradeço antes de tudo a Deus por me possibilitar a oportunidade deste trabalho e a convivência com pessoas mais que especiais.

Ao Prof. Luiz Gallisa Guimarães pelo acolhimento, orientação, dedicação e amizade, criando as condições necessárias para o desenvolvimento deste estudo.

Ao Prof. e amigo Paulo Eduardo de Miranda Cunha por ter acreditado no trabalho e em mim, pelo apoio e pela dedicação durante todo o trabalho.

Ao amigo de curso Danian, pela parceria, dedicação e apoio durante a passagem pelo PENO.

Expresso um profundo agradecimento ao pessoal do programa de engenharia oceânica da UFRJ, e principalmente à Secretária Acadêmica (pós-graduação) Lucianita Barbosa da Silva e à Assistente Administrativo Eloisa da Silva Moreira por todo o apoio, atenção e dedicação. Elas estavam sempre atentas e prontas para ajudar.

Aos colegas de cursos que realizei nos departamentos de engenharia da COPPE. Vivemos momentos muito intensos e proveitosos juntos.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

TEORIA DE PROPAGAÇÃO ACÚSTICA DE FEIXES DE AIRY DISCRETOS  
EM OCEANOS PROFUNDOS

Marcelo Diniz Santa Marinha

Setembro/2018

Orientador: Luiz Gallisa Guimarães

Programa: Engenharia Oceânica

Motivados pelos resultados recentes na óptica em estudos e aplicações de feixes não dispersivos, fomos incentivados ao estudo da possibilidade da utilização destes feixes, na área de Acústica Submarina.

Mais especificamente, neste trabalho mostramos ser possível trabalhar com feixes, que rotulamos como feixe discreto de Airy. Estes que apresentam como principais características, os fatos de serem pouco dispersivos, de se curvarem ao longo de suas trajetórias. Além disto, pioneiramente associamos a esta teoria as principais características dos modos normais. Fato este que permite que feixes discretos de Airy propaguem-se a longas distâncias no oceano.

Em resumo, mostraremos que em oceanos profundos é possível a existência de feixes de Airy que se propagam em grandes distâncias com pouca dispersão da energia acústica e preservação de sua forma.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

THEORY OF ACOUSTIC PROPAGATION OF DISCRETE AIRY BEAMS IN  
DEEP OCEANS

Marcelo Diniz Santa Marinha

September/2018

Advisor: Luiz Gallisa Guimarães

Department: Ocean Engineering

In this work based on the propagation theory of acoustic energy by modes in deep oceans, we will show that it is possible to existence of Airy beams that propagate in large distances, with little dispersion of the acoustic energy and preservation of its form.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução e Motivações</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	5
<b>2 Características Principais da Propagação do Som no Oceano</b>	<b>6</b>
<b>3 Teoria de Propagação Ondulatória</b>	<b>12</b>
3.1 Equação de Onda Sonora . . . . .	12
3.1.1 Soluções da Equação de Onda Acústica . . . . .	15
3.2 Traçado de Raios . . . . .	17
3.2.1 Formulação Matemática . . . . .	17
3.2.2 Dinâmica de traçado de raios . . . . .	23
3.3 Modos Normais - MN . . . . .	26
3.3.1 Descrição do Método . . . . .	26
3.3.2 Método Separação de Variáveis (MSV) . . . . .	28
3.3.3 Canal Sonoro Canônico de Munk . . . . .	30
3.3.4 Modos normais na aproximação WKB . . . . .	31
3.4 A Teoria de Feixes . . . . .	38
3.4.1 O Feixe de Airy-Gauss . . . . .	38
<b>4 Propagação acústica em oceanos profundos de feixes de Airy generalizados</b>	<b>46</b>

4.1	Análise WKB para propagação modal no guia acústico canônico de Munk: . . . . .	47
4.2	Propagação de feixes discretos de Airy: Resultados Numéricos . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Discussões e Conclusões</b>	<b>65</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>68</b>

# Lista de Figuras

2.1	Generalização de perfil sonoro, adaptado de [32]. . . . .	7
2.2	Canal Sonoro de primeiro tipo associado a um perfil de velocidade $c(z)$ , com $c_o < c_z$ [15]. . . . .	9
2.3	Canal Sonoro de primeiro tipo associado a um perfil de velocidade $c(z)$ , com $c_o > c_z$ (modificado de [15]) . . . . .	10
2.4	Canal Sonoro Superficial associado a um perfil de velocidade $c(z)$ (modificado de [15]) . . . . .	10
2.5	Traçamento de raios para diferentes perfis do gradiente sonoro. . . . .	11
3.1	Métodos baseados nas soluções da equação da onda, modificado de [27].	16
3.2	Trajectoria do raio entre camadas de um meio . . . . .	18
3.3	Geometria do raio para um gradiente de velocidade positivo ( $g > 0$ ). . . . .	18
3.4	Trajectoria do raio evidenciando o ângulo complementar $\theta$ e o ponto de retorno. . . . .	20
3.5	Diagrama de raio para a aproximação de um gradiente constante por partes da velocidade do som.(Modificado de [15]) . . . . .	20
3.6	Diagrama mostrando os raios perpendiculares às frentes de ondas (modificado de [51]). . . . .	22
3.7	Geometria 2-D mostrando a localização de uma raio em relação à fonte $(r_o, z_o)$ (modificado de [32]). . . . .	24
3.8	Esboça o comportamento dos três primeiros modos da onda estacionária para um guia acústico. . . . .	27
3.9	Perfil de Munk. . . . .	30

3.10	Sistema de raios. . . . .	32
3.11	a) Intensidade do campo de onda de um feixe de Airy descrito pela equação 3.76 para $a = 0.1$ . b) Intensidade do campo normalizada. Modificado de [52] . . . . .	41
3.12	propagação do feixe de Airy(modificado de [31]). . . . .	42
3.13	propagação do feixe de Airy(modificado de [4]). . . . .	45
3.14	a) Vista transversal da propagação do feixe de Airy. b) Variação da fase da função de Airy (modificado de [4]). . . . .	45
4.1	Comparação para oceanos profundos do comportamento em função da profundidade $z$ , entre os perfis de velocidade do som “típicos” e o modelo teórico de Munk(4.4). Em a) vemos que o comportamento de ambos perfis se assemelham em “ águas das camadas mais profundas” tanto na termoclina quanto no SOFAR. Entretanto, em b) vemos que o perfil de Munk(4.4) não descreve satisfatoriamente o comportamento da velocidade sonora em “ águas rasas” no interior da camada de mistura. . . . .	49
4.2	mostra o traçado de raios para uma fonte operando com $f = 50Hz$ posicionada no SOFAR em $z_s = z_{min} = 1300m$ . Em a), b) e c) os ângulos iniciais de saída da fonte, foram os ângulos discretos modais $\theta_n$ com $n = 1, 17$ e $47$ respectivamente. Nota-se em todos estes casos, que os raios que passaram pelos pontos de retorno $z_B^{[n]}$ e $z_A^{[n]}$ após percorrem radialmente o comprimento $L_n$ , a diferença relativa percentual $\Delta\tau_n$ entre $\tau_\Gamma$ (4.9) e $\tau_n$ (4.10) é inferior a 0.5%. Mostrando uma equivalência entre as teorias modal e traçado de raios em completo acordo com [20]. . . . .	52

- 4.3 Mostra para o perfil de Munk(4.4) dentro do formalismo WKB e  $f = 50Hz$  os seguintes resultados: Em a) comportamento dos ângulos preferenciais de propagação discretos na faixa  $0 < |\theta_n| < 15^\circ$  associados a modos quando  $n$  varia entre  $0 \leq n \leq 60$ . Em b) e em c) vemos respectivamente que estes modos são pouco dispersivos já que  $c_g^{[n]} \approx c_p^{[n]}$  e sua propagação ocorre majoritariamente quase que paraxialmente na direção radial, pois  $k_z^{[Max,n]} \ll k_r^{[n]} \dots \dots \dots$  53
- 4.4 Mostra para  $f = 50Hz$  e em  $r = 0$ , o comportamento da “condição inicial”  $\Psi_n^0$  para o feixe discreto de Airy (veja Eq.4.18). Observe que para qualquer  $n$ -discreto,  $\Psi_n^0$  evanesce nas regiões classicamente proibidas e oscila  $(n + 1)$ -vezes nas regiões classicamente permitidas. . 56
- 4.5 em  $r = 0$  e  $f = 50Hz$ , mostra (em unidades arbitrárias) e em função da profundidade, o comportamento da amplitude  $|\Psi_n^0|$  da “condição inicial” para o feixe discreto de Airy (veja Eq.4.18). Observe que à medida que  $n$  cresce aparecem  $(n + 1)$  picos de intensidade igualmente espaçados em  $\lambda_n$  (veja Eq.4.21). Nota-se também, que os picos de maior intensidade ocorrem nas vizinhanças dos pontos de retorno  $z_A^{[n]}$  e  $z_B^{[n]}$  (veja figura 4.4 ) e o feixe penetra além deles evanescentemente (veja Eq.4.22). . . . . 58
- 4.6 Compara para  $f = 50Hz$ , os comprimentos de onda  $\lambda_n$  e penetração  $\sigma_n$  em função de  $n$ . Observe que os maiores valores de ambos são alcançados para os menores valores de  $n$ , e tanto  $\lambda_n$  quanto  $\sigma_n$  decaem mais lentamente quando  $n$  cresce. Nota-se também que os valores de  $\sigma_n$  são sempre superiores aos de  $\lambda_n$  (veja Eqs.4.21 e 4.22). . . . . 59
- 4.7 Pontos de retorno dos modos possíveis  $n$ , acima e abaixo de  $z_{Max}^n$ , ao longo do guia de ondas Munk  $z_{[A]}^{[B],n} \dots \dots \dots$  60
- 4.8 Modos propagantes possíveis no guia de ondas Munk tais que  $n = n_A + n_B \dots \dots \dots$  61

4.9	Mostra para o perfil de Munk(4.4) e $f = 50Hz$ , em a) as possíveis trajetórias $\Gamma_n$ dos raios acústicos associadas ao conjunto discreto de ângulos de disparo $\theta_n$ , com $0 <  \theta_n  < 15^\circ$ e $0 \leq n \leq 60$ . Observe que tais trajetórias $\Gamma_n$ delimitam as regiões classicamente permitidas e proibidas. Em b) é mostrado um mapa de cores (em dB), representando as perdas de transmissão $TL_{\Gamma_n}$ (4.24), estas relativas a um dado feixe discreto de Airy $\Phi_n$ propagando-se sobre uma dada trajetória $\Gamma_n$ . Observe que para feixes discretos de Airy $\Phi_n$ , a energia acústica se propaga nas regiões classicamente permitidas como também penetra substancialmente nas proibidas. . . . .	63
4.10	Mostra para o perfil de Munk, um mapa de cores (em dB) representando a perda por transmissão com $f = 50Hz$ descrita pela teoria de equações parabólicas[32], observe a pouca penetração da energia acústica nas regiões classicamente proibidas. . . . .	64
5.1	Domínios de aplicabilidade dos modelos baseados na teoria de raios, na teoria dos modos normais e teoria de feixes discretos de Airy, para a propagação acústica submarina(adaptado de [27]). . . . .	66

# Capítulo 1

## Introdução e Motivações

Já há muitos anos a Geofísica de exploração desenvolve estudos que nos permite obter informações valiosas sobre o interior da Terra e seus oceanos. Por exemplo, em acústica submarina e sísmica há a necessidade de informações de regiões de difícil acesso para inferências de litologias, reservatórios de água e hidrocarbonetos. Um dos métodos poderosos utilizados para tais investigações é a propagação de feixes de raios de ondas mecânicas, análoga à teoria de raios de luz amplamente utilizada na Óptica. Em geral, estes raios são agrupados formando um feixe, construído ao redor de um raio referência, denominado raio central.

Façamos agora uma rápida revisão, se possível histórica, sobre o uso do traçado de raios em diversos campos da sondagem geofísica. Neste sentido, baseado no transporte energético, uma pioneira descrição do método de traçado de raios como ferramenta matemática aplicada à propagação de ondas eletromagnéticas, foi feita por R. K. Luneburg em meados dos anos 40. Devido às semelhanças entre a sismologia e o eletromagnetismo, em 1956, V. M. Babich sugeriu o método de traçamento de raios para análise das equações da elastodinâmica em casos de meios isotrópicos e não-homogêneos [46].

Neste método de raios aplicado à sísmica, o campo de ondas em altas frequência pode ser expandido em contribuições que se propagam ao longo do raio e são denominadas ondas elementares que correspondem às ondas de compressão-P e cisalhamento-S e seus desdobramentos em ondas refletidas/transmitidas, múltiplas

e ondas convertidas [46].

Em geral, o meio a ser analisado é não-homogêneo e a solução das equações da elastodinâmica para estes meios é complexa [32]. A alternativa é considerar tal meio suavemente não-homogêneo, de forma que as ondas elásticas de alta frequência possam ser separadas em componentes  $P$ ,  $S$  independentes, fornecendo uma razoável aproximação da realidade. Metodologia esta que mesmo assim ainda se faz necessário uma discretização do meio real e heterogêneo em sucessivos meios homogêneos, como se fossem uma “superposição de lentes”, onde as características de propagação das ondas consideradas se assemelham à propagação de uma onda plana dentro destas regiões discretizadas.

Uma das principais vantagens do traçado de raios está na possibilidade de se prever a propagação da energia em modelos complicados, sem que haja grande consumo de tempo com algoritmos numéricos, se comparado com outros métodos, como diferenças finitas, por exemplo. Contudo, o método de traçado de raios tem algumas limitações pois não descreve bem os efeitos ondulatorios de dispersão e atenuação, que são fatores limitantes da sondagem geofísica [46]. Em outras palavras, estes fenômenos afetam a forma do pulso ou feixe, acarretando indesejáveis alargamentos dos mesmos devido às variações dos parâmetros dos meios em que viajam.

Mais recentemente, com o objetivo de minimizar estes efeitos indesejados, foram desenvolvidas modelos de feixes que mantêm o máximo possível sua forma original ao longo da propagação [31]. Estes estudos se baseiam na existência de ondas não-dissipativas em hidrodinâmica que preservam sua forma ao se propagar, chamadas “sólitons” [22]. Ao longo destes anos, outros trabalhos foram realizados com base nestas ondas solitárias, principalmente em estudos de propagação de feixes ópticos, resultando na construção de ressoadores ópticos como LASER [22]. De modo que, atualmente o estudo dos sólitons está presente desde do aprimoramento de pulsos em uma fibra óptica [22] até a detecção de ondas internas no oceano [45].

Por outro lado, em 1981, M. M. Popov [46] sugere o feixe gaussiano como uma proposta para a descrição da propagação acústica, em aproximações de alta

frequência, para vários perfis de velocidade do som no oceano. Entretanto, resultados posteriores mostraram que a propagação em longas distâncias bem como em ambientes com alta variabilidade introduzem uma degradação acentuada do feixe. Com intuito de minimizar estes efeitos indesejados inerentes ao feixe gaussiano, recentemente o estudo das ondas compactadas ou fracamente dispersivas (Non-Diffracting Waves NDWs), que são capazes de resistir à difração e atenuação por maiores distâncias de propagação ganhou força no campo da Óptica [31]. Em 1979, Berry e Balazs [10] demonstram teoricamente que a equação de Schrödinger, que descreve uma partícula livre, pode exibir uma solução do pacote de onda de Airy não dispersivo. Em 2010, Siviloglou e Christodoulides [53] demonstram experimentalmente que o feixe de Airy óptico apresenta-se quase livre de difração por distâncias muito superiores ao seu comprimento de onda. Por outro lado, aqui também se mostra o oceano como um grande laboratório, pois em várias situações (dentro do regime linear) pode-se modelar tsunamis como “pacotes” de Airy poucos dispersivos e excessivamente energéticos [38].

De uma maneira geral, em várias situações científicas e tecnológicas, há o interesse na geração de feixes fracamente dispersivos, portanto a escolha da função matemática que representa o feixe propagante é de fundamental importância. Por exemplo, em 2011 Salandrino [50] publicou um trabalho ainda no campo da Óptica em que utilizava uma placa perfurada segundo os zeros da função de Airy para geração de pulsos de mesmo nome. Nesta mesma linha de pensamento, em 2015 Bar-Ziv *et al.* [7] demonstraram, experimentalmente, a geração de um feixe acústico que preserva sua forma ao longo da trajetória num tanque com líquido utilizando uma placa (máscara) para geração do feixe de Airy. Por fim, mais recentemente em 2017 Shenhe [29] relata estudo teórico e experimental da geração de modos de guia de onda propagando na superfície da água. Estes modos de propagação foram modulados na direção transversal de uma maneira que satisfizeram as condições de contorno nas paredes do reservatório de água.

Já há algum tempo a pesquisa em propagação do campo sonoro no oceano [14, 46], aponta para a necessidade da utilização de uma “nova” função matemática a ser utilizada na propagação de feixes, que supere ou minimize as limitações apresentadas pelo feixe de Gauss tais como aquelas relativas à dispersão e/ou as associadas a respostas incompatíveis da teoria de Gauss para o campo sonoro em pontos de retorno e regiões de sombra e penumbra.

Desta maneira, a expectativa deste trabalho é verificar se estas propriedades ondulatórias dos feixes com o uso da função de Airy, estudadas e apresentadas em trabalhos recentes [7],[29], são também válidas em acústica oceanográfica.

Para tanto, partimos de um levantamento e estudo das principais características e formas de construção utilizadas na propagação do campo eletromagnético, mas especificamente em Óptica, visando também o entendimento da propagação do campo sonoro no oceano.

Na sequência associamos os conhecimentos já existentes na literatura sobre feixes gaussianos aos de Airy, além de usar as condições e características das teorias de raios e de modos para posteriormente estendermos todo este conjunto de conhecimento ao desenvolvimento de nossos resultados e suas possíveis aplicações.

## 1.1 Objetivos

Motivados pelos resultados recentes na óptica e na acústica, uma das metas principais alcançadas por este trabalho foi desenvolver uma teoria para a propagação do campo de ondas sonoras associado ao feixe de Airy em um guia acústico heterogêneo, modelando assim a propagação deste campo no oceano.

Em outras palavras, aplicamos e desenvolvemos procedimentos que envolveram conjuntamente o traçado de raios e a propagação por modos normais para o estudo de propagação de ondas acústicas no mar. Onde estas duas teorias foram utilizadas como suporte à construção de feixes de Airy estáveis. Que, por sua vez, vimos que tais feixes podem propagar-se em distâncias consideráveis mantendo suas características, tornando possível a recepção acurada e coerente do sinal emitido. Desta forma, expomos nos capítulos e seções a seguir a apresentação dessas ideias e consequências de seus resultados.

## Capítulo 2

# Características Principais da Propagação do Som no Oceano

O estudo da propagação da energia acústica através dos oceanos é complexo [32], visto ser tal fenômeno extremamente dependente das características meteorológicas, físico-químicas deste tipo de meio, da interação desta energia com as fronteiras do oceano e ainda das variações que estes fatores sofrem ao longo do tempo.

Esforços em aprimorar tal conhecimento têm propósitos, tanto acadêmicos quanto práticos, como por exemplo[27]:

- Mapeamento da superfície e subsuperfície marinha;
- Comunicação acústica;
- Posicionamento de equipamentos na superfície e fundo marinhos; etc ...

A fim de contornar as complexidades encontradas, inicialmente consideraremos aqui um modelo simplificado de oceano como um meio não-homogêneo, porém com variações regulares em relação à profundidade  $z$ , de forma que tenhamos camadas que apresentem comportamento regular e variações suaves em suas interfaces [32]. Em tal modelo, a velocidade do som variará de acordo com a camada considerada, dependendo das características das mesmas [37], como mostra a figura 1.

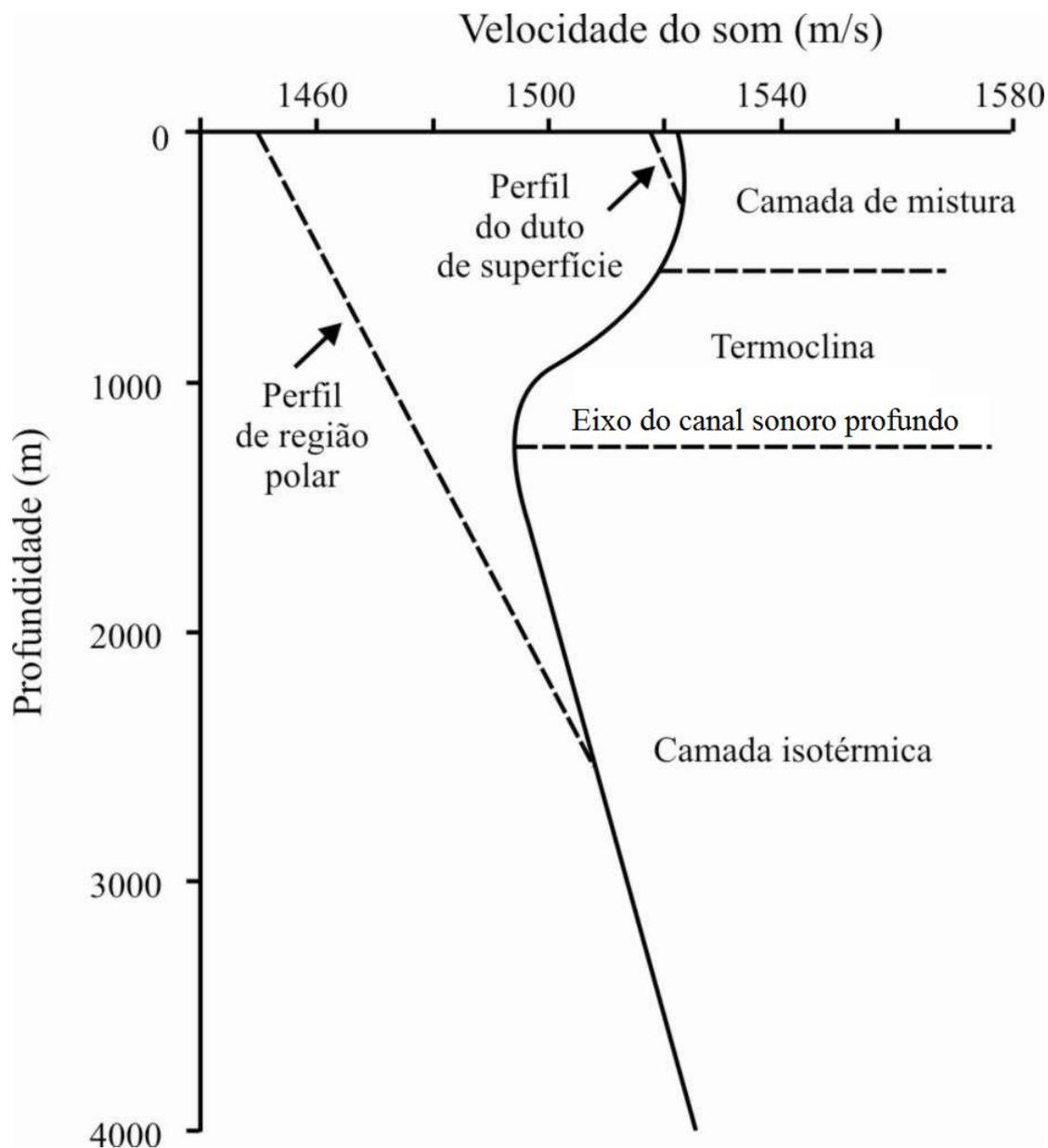


Figura 2.1: Generalização de perfil sonoro, adaptado de [32].

Por outro lado, ao longo dos últimos anos foram desenvolvidas diversas relações empíricas, denominadas perfis de velocidades, que relacionam a velocidade  $c$  do som na água com os fatores físico-químicos do meio. Estes perfis  $c$  variam de região para região do oceano, estando as mais expressivas variações, em águas rasas, relacionadas às variações sazonais, à temperatura e a salinidade, enquanto que para águas profundas, a partir de 1km de profundidade em relação à superfície, onde as variações de temperatura são desprezíveis, prevalece as variações de pressão hidrostática [15].

Por exemplo, estas características da propagação acústica são fenomenologicamente sintetizadas na relação de Mackenzie, que relaciona velocidade som  $c$  no oceano com a temperatura  $T$  e a salinidade  $S$  [27], a saber:

$$c = 1448,96 + 4,591T - 0,05304T^2 + 0,0002374T^4 + 1,34(S - 35) + 0,0163z + 0,001675z^2 - 0,01025T(S - 35) - 0,3578Tz^3. \quad (2.1)$$

A variação em profundidade  $z$  destas grandezas envolvidas com a velocidade  $c$ , permite uma classificação dos possíveis “canais do propagação do som”, da seguinte forma [32]:

1. Camada de Mistura  $\Rightarrow$  a temperatura é praticamente constante e o perfil de velocidade aumenta suavemente com a profundidade;
2. Termoclina  $\Rightarrow$  a temperatura decresce com a profundidade;
3. Camada isotérmica profunda  $\Rightarrow$  a temperatura praticamente não varia com a profundidade e a velocidade volta a crescer com o aumento da pressão com a profundidade.

Para águas profundas, considerando o modelo de camadas, é comum ocorrer um mínimo de velocidade associado à profundidade  $z_m$ , que neste trabalho coincide com a localização da fonte  $z_F$ , e que define o eixo do canal sonoro submarino (CS), como mostrado na figura 2.2.

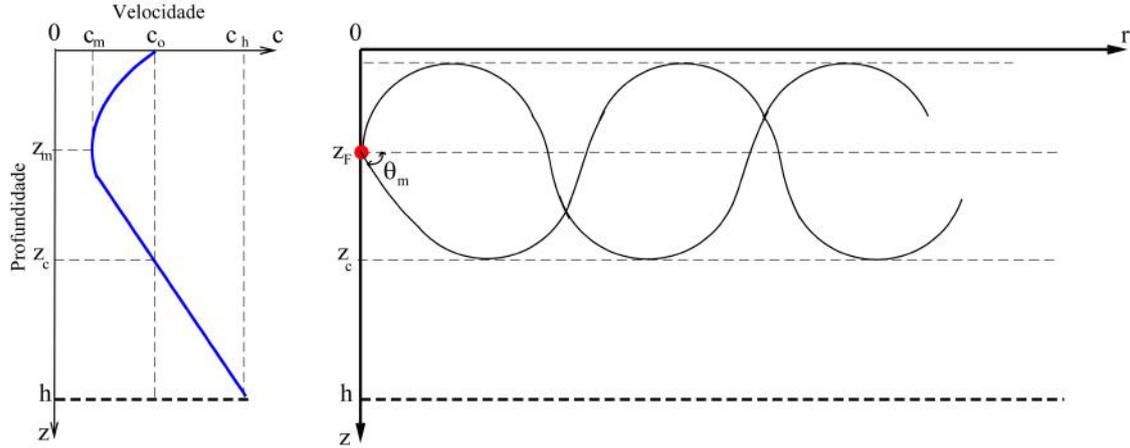


Figura 2.2: Canal Sonoro de primeiro tipo associado a um perfil de velocidade  $c(z)$ , com  $c_o < c_z$  [15].

Se a fonte sonora estiver próxima ou sobre o eixo do CS, como na figura 2.2 anterior, parte da energia propagada estará confinada no canal sonoro submarino é um típico e natural guia de ondas, formado pela estratificação do oceano. Na figura 2.2 o guia de propagação sonora é delimitado entre  $0 \leq z \leq z_c$ , de forma que o ângulo máximo  $\theta_{max}$ , que coincide com as reflexões totais nos limites do guia, é dado por:

$$\cos\theta_{max} = \frac{c_o}{c_m}. \quad (2.2)$$

Considerando ângulos pequenos e variações suaves do meio, 2.2 pode ser expandida em série de Taylor, de forma que:

$$\theta_{max} = \left[ 2 \cdot \left( \frac{c_o - c_m}{c_m} \right) \right]^{1/2}, \quad (2.3)$$

em que  $c_m$  e  $c_o$  são as velocidades do som no eixo e nos limites deste CS.

Existem dois tipos de CS que são classificados em função da relação de velocidades em 2.2, de forma que, devido às sucessivas reflexões totais, os raios fiquem confinados no interior do guia.

No caso em que  $c_o > c_h$ , o limite inferior do guia de ondas coincidirá com o fundo  $z = z_h$ , como mostrado na figura 2.3. Ou seja, para que o limite do guia seja

definido, se faz necessário que a velocidade na camada anterior seja menor do que na camada seguinte.

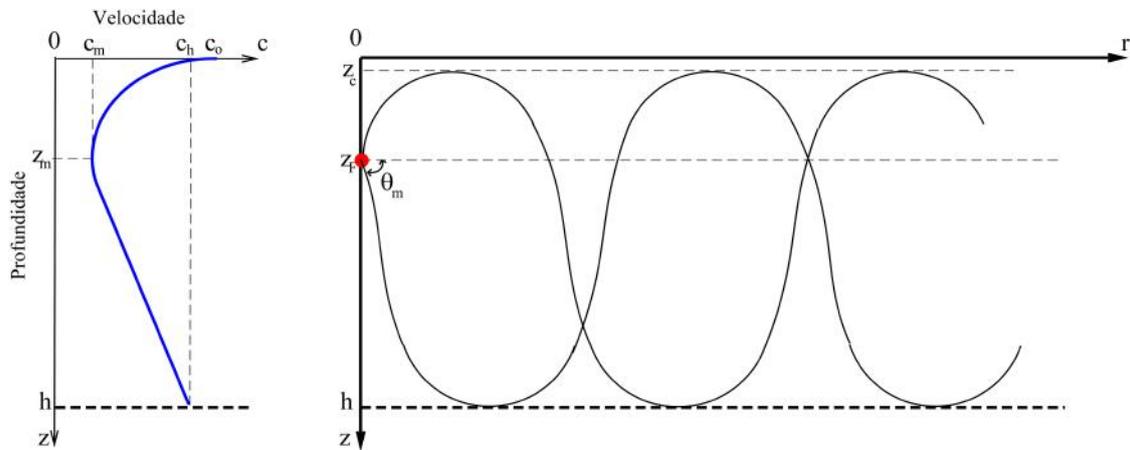


Figura 2.3: Canal Sonoro de primeiro tipo associado a um perfil de velocidade  $c(z)$ , com  $c_o > c_z$  (modificado de [15]) .

Caso particular de canal sonoro, são os canais sonoros superficiais CSS, formados próximos à superfície, como mostra a figura 2.4.

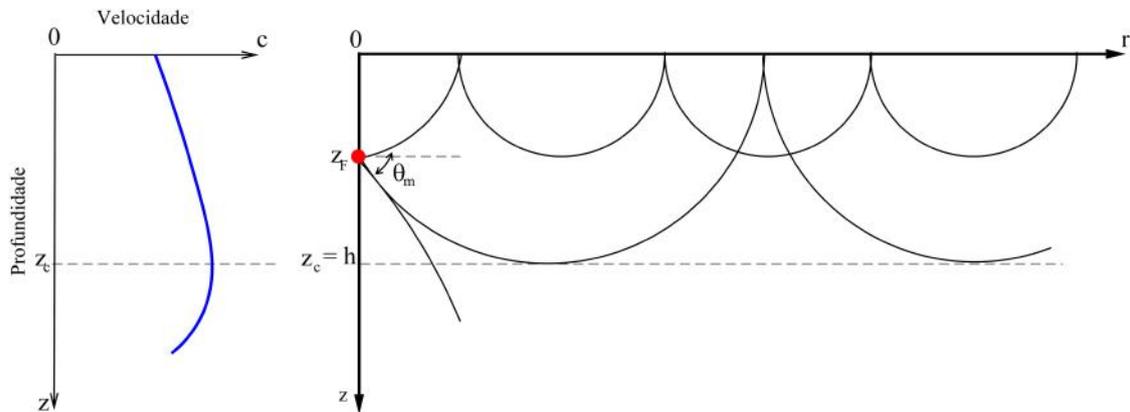


Figura 2.4: Canal Sonoro Superficial associado a um perfil de velocidade  $c(z)$  (modificado de [15]) .

No perfil de velocidade, associado à formação deste diagrama de raios, a velocidade aumenta até  $z = h$ , onde se torna máxima, passando então a diminuir à medida que a profundidade aumenta.

Mais detalhes sobre a teoria de traçado de raios serão discutidos mais a frente neste trabalho.

Por fim supondo um “fonte” posicionada na superfície, as figuras a seguir sintetizam estas ideias relacionadas à extrema sensibilidade da direção de propagação da energia acústica com o gradiente da velocidade do som em uma dada camada [32].

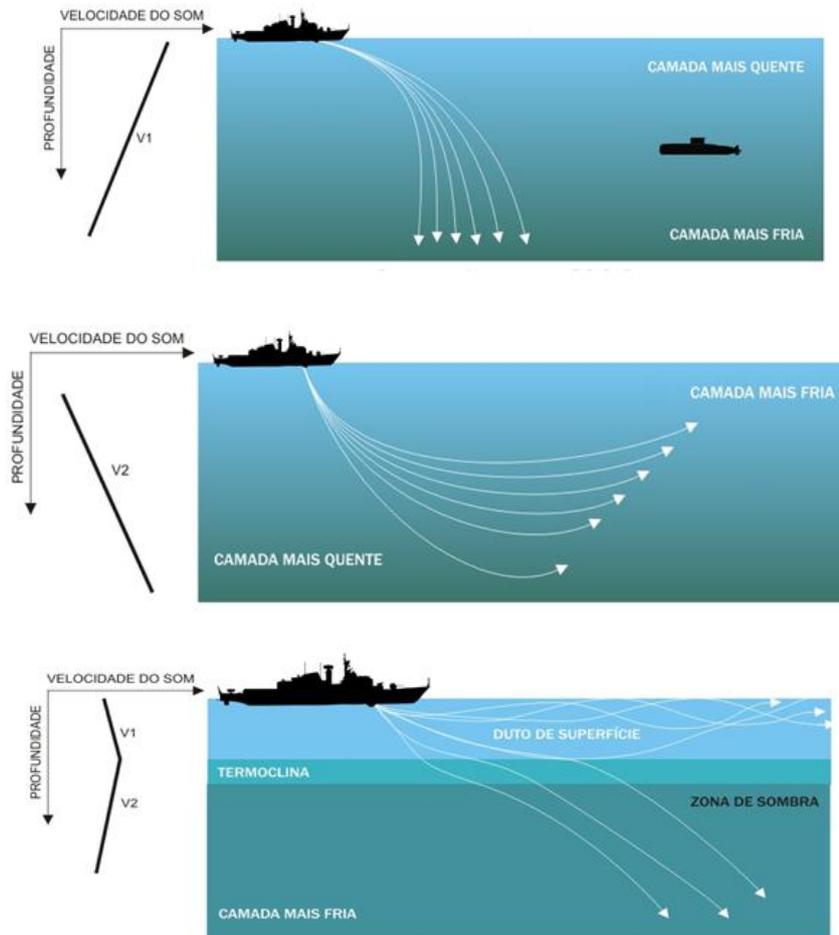


Figura 2.5: Traçamento de raios para diferentes perfis do gradiente sonoro.

Deve-se observar a relação entre a inclinação do perfil de velocidade  $c(z)$  e as trajetórias associadas à propagação do som no meio. Nota-se que, para o último perfil na figura 2.5, a velocidade apresenta um máximo. Desta forma há a formação de uma canal sonoro superficial.

A seguir, revisaremos os fundamentos físicos que regem a acústica oceanográfica.

# Capítulo 3

## Teoria de Propagação Ondulatória

### 3.1 Equação de Onda Sonora

Em uma primeira aproximação, iremos tratar o problema acústico associado a pequenas perturbações no campo de pressão  $P$  em fluidos irrotacionais[32], de modo que para partículas que se deslocam no fluido com velocidade  $\vec{v}$ , tenha-se  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . Além disso, vamos supor que a densidade  $\rho$  varia lentamente, de forma que possamos considerá-la praticamente constante ( $\rho \simeq c^{te}$ ) ou constante por partes.

Sendo assim, dentro da teoria linear obtém-se a equação de onda para um campo de pressão  $P$  [32].

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

Como  $\nabla \times \vec{v} = 0$ , podemos introduzir o potencial velocidade  $\phi$ , definido por  $\vec{v} \equiv \nabla \phi$ , para então chegarmos à equação de onda para o potencial velocidade:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = 0. \quad (3.2)$$

Por fim, sendo  $\vec{u}$  o vetor deslocamento das partículas e definindo o potencial deslocamento  $\vec{u} = \nabla \psi$ , teremos:

$$\vec{v} = \nabla \phi = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

de forma que:

$$\phi = \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Em resumo, se  $\vec{v}$  representa velocidade de partículas no meio considerado, com a condição  $\vec{v} = \nabla \phi$ , e  $\psi$  o potencial deslocamento associado ao deslocamento das partículas  $\vec{u}$  pela relação  $\vec{u} = \nabla \psi$ , podemos finalmente escrever a Eq.3.2 como :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0. \quad (3.5)$$

Até então nas relações expostas não foram consideradas as fontes, naturais ou artificiais, de produção da onda sonora. A inclusão deste fator leva a uma equação não-homogênea que, para o potencial deslocamento, se expressa[32]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = F(\vec{r}, t) \quad (3.6)$$

Com o objetivo de simplificar a solução de 3.6 utilizaremos o par de transformações de Fourier no domínio frequência-tempo juntamente com as definições da função delta de Dirac e da função de Green:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (3.7)$$

Desta forma as relações para a fonte e o potencial deslocamento, no domínio da frequência, serão expressas por:

$$F(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega; \quad (3.8)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \text{teremos:} \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi(\vec{r}, \omega) - F(\vec{r}, \omega) \right] e^{-i\omega t} d\omega = 0. \quad (3.10)$$

Utilizando a condição:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dl e^{il(\alpha - \alpha')} = \delta(\alpha - \alpha'), \quad (3.11)$$

teremos:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi(\vec{r}, \omega) - F(\vec{r}, \omega) \right] e^{i(\omega - \omega')t} d\omega = \delta(t - t'). \quad (3.12)$$

Assim:

$$\left[ \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi(\vec{r}, \omega) - F(\vec{r}, \omega) \right]_{t=t'} = 0. \quad (3.13)$$

Logo, podemos escrever a equação de Helmholtz, no domínio da frequência, para o potencial de deslocamento  $\psi$  como:

$$(\nabla^2 + k^2(r)) \psi(\vec{r}, \omega) = F(\vec{r}, \omega), \quad (3.14)$$

onde  $k$  é o número de onda associado à frequência  $\omega$  dado por :

$$k^2(r) = \frac{\omega^2}{c^2(r)}. \quad (3.15)$$

A equação de Helmholtz é o pilar da base teórica no desenvolvimento de importantes métodos, tanto analíticos quanto numéricos de solução da equação de onda, que serão revistos de forma sucinta a seguir.

### 3.1.1 Soluções da Equação de Onda Acústica

As primeiras modelagens de propagação do som no oceano foram motivadas por problemas práticos de predição com sonares em suporte a operações militares anti-submarinos durante a segunda guerra mundial [27]. Estes modelos iniciais usavam a técnica de traçado de raios numa tentativa de captar e classificar o eco na detecção acústica pelo sonar.

Evidentemente com o passar dos anos, as técnicas de estudo de propagação do som evoluíram, forçando o surgimento de classificações que possibilitassem a distinção entre modelos baseados no traçado de raios e naqueles que utilizam de alguma forma de integração numérica da equação de onda 3.14. Devido à correlação entre conceitos e entre as ferramentas matemáticas utilizadas nos métodos de aproximação, surge a classificação de tais métodos em função da distância fonte-receptor [27]. Em outras palavras, para distâncias de alguns quilômetros usa-se a aproximação dos modelos independentes da distância, onde o oceano é estratificado com suas propriedades variando apenas em relação a profundidade  $z$ . Já os modelos dependentes da distância, levam em conta variações no perfil de velocidade sonora em função de  $r$ , do azimute  $\theta$ , além da profundidade  $z$ . Dentro desse contexto, a figura 3.1 abaixo mostra uma classificação dos modelos em função da distância  $r$  entre fonte-receptor.

Sendo o objetivo deste trabalho tratar com os métodos de traçado de raios e de modos normais, e como as origens destes métodos estão associadas à ramos da Física como as Ópticas Geométrica e Ondulatória, bem como o Eletromagnetismo, a seguir detalharemos um pouco mais algumas ideias que serão bastante utilizadas ao longo deste trabalho, como por exemplo aquelas que norteiam as teorias de traçado de raios e modos normais e aproximações utilizadas em seus respectivos desenvolvimentos.

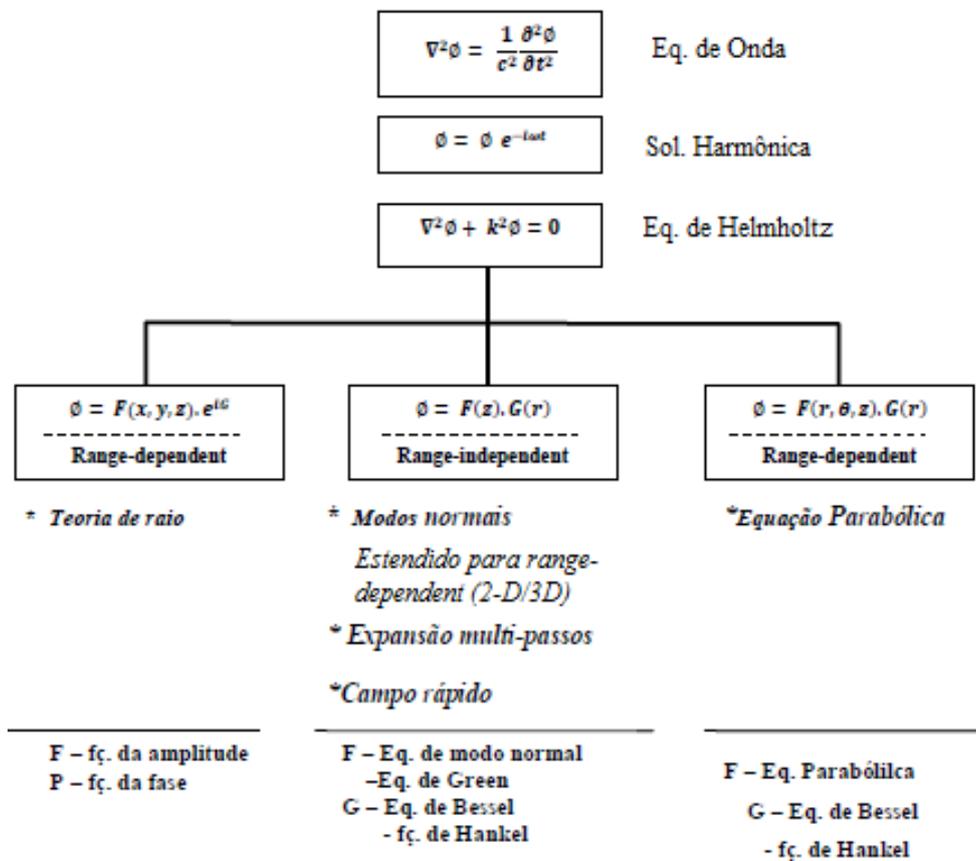


Figura 3.1: Métodos baseados nas soluções da equação da onda, modificado de [27].

## 3.2 Traçado de Raios

A teoria dos raios é um método para obter soluções de equações de onda. A teoria pode ser considerada um caso particular do método assintótico para altas frequências denominado WKBJ, sigla sugerida em função dos nomes dos primeiros proponentes do método: Wentzel, Kramers, Brillouin e Jeffreys. Portanto, a teoria de raios se vale de soluções expressas por uma série, denominada série de raios para o limite de altas frequências e foi originalmente desenvolvida em coordenadas cartesianas, porém por motivos funcionais do traçamento de raios foi também adaptada em relação a um referencial em movimento, denominado coordenadas de raio central, que são abordadas no texto a seguir.

### 3.2.1 Formulação Matemática

Por simplicidade e para introdução de algumas ideias Físicas, vamos, inicialmente considerar o meio horizontalmente estratificado, limitado pela superfície e pelo fundo perfeitamente planos, ao longo do qual hipoteticamente admitimos que a velocidade do som é uma função apenas da profundidade  $c = c(z)$ . Além disso, para uma dada frequência  $f$ , definindo o comprimento de onda  $\lambda = c/f$ , tem-se que uma condição necessária, mas não suficiente, para a aplicação do método tem-se que [14]:

$$\frac{\lambda}{c} \left| \frac{dc}{dz} \right| \ll 1. \quad (3.16)$$

Em outras palavras, se faz necessário trabalhar com altas frequências e (ou) gradientes suaves do perfil  $c$ , para que a validade 3.16 seja verificada.

Por outro lado, segue da lei de Snell que:

$$\frac{\cos\theta_1}{c_1} = \frac{\cos\theta_2}{c_2} = c_o = c^{te}. \quad (3.17)$$

Desta maneira, a diferencial da equação 3.17 satisfaz,

$$dc = -c_o \cdot \cos\theta d\theta. \quad (3.18)$$

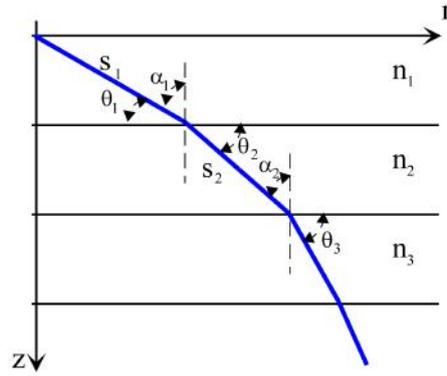


Figura 3.2: Trajetória do raio entre camadas de um meio .

Se considerarmos o perfil de velocidade linear, o que é razoável ocorrer entre camadas pouco espessas em que  $c$  varia suavemente, poderemos escrever:

$$c(z) = c_o + gz. \quad (3.19)$$

Por exemplo, a figura(3.3) a seguir dá uma visão geométrica dos raios associado a um gradiente de velocidade positivo ( $g > 0$ ).

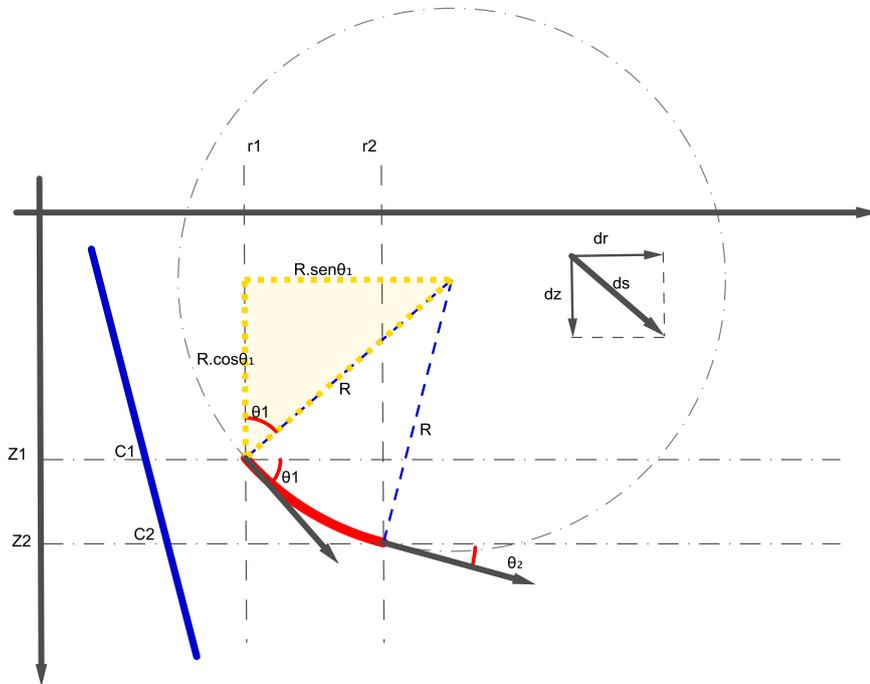


Figura 3.3: Geometria do raio para um gradiente de velocidade positivo ( $g > 0$ ).

Ainda dentro desta linha de raciocínio, derivando também 3.19, obtemos que:

$$dc = g \cdot dz. \quad (3.20)$$

Combinando 3.3 e 3.20:

$$dz = -\frac{c_o \cdot \text{sen}\theta}{g} d\theta. \quad (3.21)$$

Segue da Fig.3.3 que podemos supor que “raios infinitesimais” estão associados a comprimento de arco, isto é:

$$\text{sen}\theta = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{R \cdot d\theta}, \quad (3.22)$$

portanto, após comparar com 3.21 vemos que a circunferência descrita na Fig.3.3 possui um raio  $R$  dado por:

$$R = -\frac{c_o}{g}. \quad (3.23)$$

Em outras palavras, o raio de curvatura do raio em certa profundidade, é inversamente proporcional ao gradiente  $g$  da velocidade do som em relação à profundidade. O sinal negativo expressa que o ângulo decresce com o aumento da velocidade do som. Portanto, quando  $g > 0$ , então  $R < 0$  e teremos refrações ascendentes do raio. Por outro lado, quando  $g < 0$ , então  $R > 0$  e as refrações do raio serão descendentes. Se o gradiente  $g$  é constante, então a trajetória do raio será um arco de círculo. No caso de termos um ponto de retorno do raio, antes que este atinja o fundo, teremos algo semelhante ao fenômeno de reflexão total na Óptica. Portanto, o ângulo de refração neste ponto, associado ao ângulo crítico  $\theta$ , será igual a zero. Assim:

$$\cos\theta = \frac{c_1}{c_2}. \quad (3.24)$$

Então, fica claro que para traçarmos a trajetória do raio se faz necessário o conhecimento do perfil  $c(z)$  a priori.

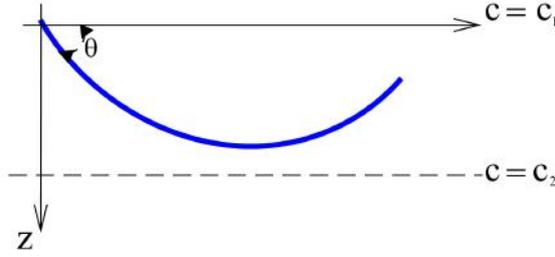


Figura 3.4: Trajetória do raio evidenciando o ângulo complementar  $\theta$  e o ponto de retorno.

Por exemplo, a figura 3.5 a seguir mostra de forma geral, a relação de um perfil de velocidade com a trajetória do raio ao longo das camadas horizontais em relação à profundidade e ao alcance horizontal, a saber:

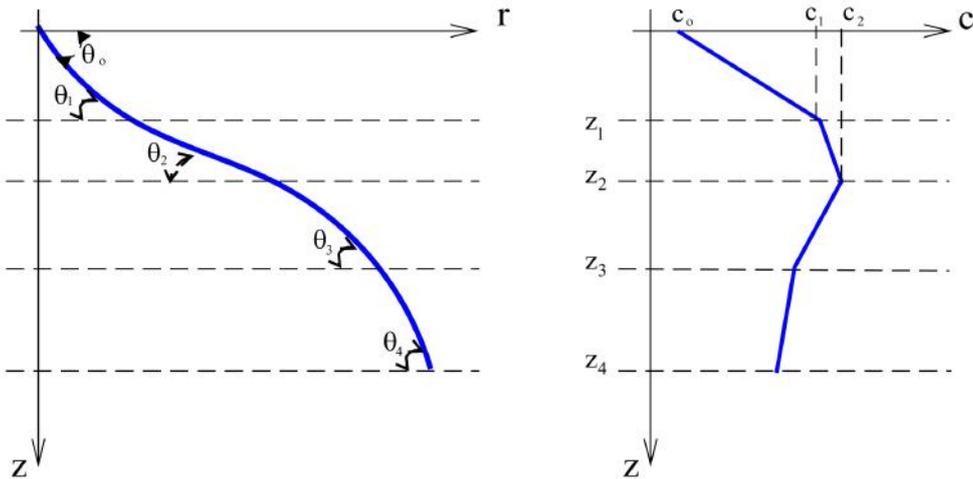


Figura 3.5: Diagrama de raio para a aproximação de um gradiente constante por partes da velocidade do som. (Modificado de [15]).

Para análise da distância horizontal que o raio alcança (*range*), utilizaremos o detalhe na figura 3.3, que mostra o elemento de raio, de onde podemos escrever que:

$$tg\theta_1 = \frac{dz}{dr}. \quad (3.25)$$

De forma que, considerando  $r_0 = 0$  e  $z_0 = z_1$ , tem-se que:

$$r = \left| \int_{z_1}^z \frac{dz}{tg\theta_1} \right|. \quad (3.26)$$

Definindo o índice de refração relativo  $n(z) = \frac{c_1}{c(z)}$ , reescreveremos a lei de Snell como:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\theta_1}{n(z)}. \quad (3.27)$$

Segue então, da identidade trigonométrica  $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$  e das relações 3.27 e 3.26, que podemos reescrever o *alcance radial* como:

$$r(\theta, z) = \cos\theta \left| \int_{z_1}^z (n^2(z) - \cos^2\theta)^{-1/2} dz \right|. \quad (3.28)$$

Além disso, se definirmos  $\theta_1 = \theta_{i-1}$ , usar a relação 3.27 em que  $n(z) = c_{i-1}/c(z)$ , podemos generalizar 3.28 para:

$$r(\theta, z) = \frac{1}{\cos\theta_{i-1}} \left| \frac{1}{a_i} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \cos\theta \, d\theta \right| = \frac{1}{\cos\theta_{i-1}} \left| \frac{1}{a_i} (\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1}) \right|, \quad (3.29)$$

onde  $a_i = (c_i - c_{i-1}) / (c_i \cdot h_i)$  é o gradiente da velocidade do som na i-ésima camada de propagação.

Com essas ideias em mente, vamos agora desenvolver a teoria de traçado de raios a partir da equação de Helmholtz (3.14) homogênea em coordenadas cartesianas  $\vec{r} = (x, y, z)$ , a saber :

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \quad (3.30)$$

relembrando que  $k$  é o número de onda, e que nesse caso cartesiano, o operador laplaciano é expresso por:

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.31)$$

No regime de altas frequências, vamos propor a seguinte solução assintótica de 3.30:

$$\psi(\vec{r}) \approx e^{-i\omega\tau(\vec{r})} \sum_j^{\infty} \frac{A_j(\vec{r})}{(-i\omega)^j}. \quad (3.32)$$

A relação 3.32 é denominada série de raios [46].

Se somente o primeiro termo (termo de ordem zero) da expansão da série assintótica 3.32 for considerado, temos que [46]:

$$\psi(\vec{r}) = A_o(\vec{r})e^{-i\omega(\tau(\vec{r}))}, \quad (3.33)$$

que para meios com gradientes de perfil de velocidade suaves, apresenta um comportamento similar ao de uma onda plana.

Por outro lado, as ditas *frentes de onda* são superfícies ou regiões no espaço para as quais a variação “temporal” de 3.33,  $t = \tau(\vec{r})$  é constante[46].

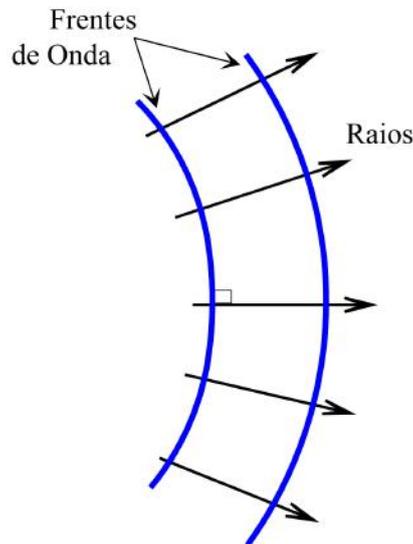


Figura 3.6: Diagrama mostrando os raios perpendiculares às frentes de ondas (modificado de [51]).

Por fim, inserindo 3.33 e suas derivadas em 3.30, obtemos a equação da *eikonal*[46]:

$$[\nabla\tau]^2 = \frac{1}{c^2}, \quad (3.34)$$

bem como a *equação de transporte*:

$$2\nabla A_o \cdot \nabla\tau + A_o\nabla^2\tau = 0. \quad (3.35)$$

Essas duas relações são fundamentais no método de raios. A eikonal representa uma EDO não linear de primeira ordem para o cálculo do tempo de trânsito  $\tau$ , que pode ser resolvida por métodos numéricos. Enquanto 3.35 quando resolvida ao longo do raio ela é reduzida a uma EDO de primeira ordem para a amplitude  $A_o$  e pode ser solucionada analiticamente.

### 3.2.2 Dinâmica de traçado de raios

A *dinâmica do traçado de raios*[46] envolve um conjunto de equações que visam resolver a eikonal e a equação de transporte, de forma a obter informações de como a trajetória do raio varia em função de perturbações de grandezas como o ângulo inicial.

Neste sentido, vamos reescrever a eikonal em coordenadas cilíndricas centradas no raio, onde  $r = r(s)$  denota a distância horizontal,  $z$  a profundidade,  $s$  o comprimento de arco do raio e  $c(r, z)$  a velocidade de propagação do som.

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c(r, z)} \frac{dr}{ds} \right) = \frac{1}{c^2(r, z)} \nabla c(r, z). \quad (3.36)$$

Por conveniência, é comum utilizar as variáveis auxiliares  $(\xi, \rho)$  com a finalidade de trabalhar com um sistema de primeira ordem, de forma que 3.36 reduz-se a:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= c\rho(s), \\ \frac{d\rho}{ds} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial r}, \\ \frac{dz}{ds} &= c\xi(s), \\ \frac{d\xi}{ds} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial z}.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Portanto, o vetor tangente ao raio:

$$\vec{t} = c [\rho(s), \xi(s)]\tag{3.38}$$

e o vetor normal ao raio,

$$\vec{n} = -c [\xi(s), \rho(s)].\tag{3.39}$$

formam uma base ortogonal que acompanha a trajetória do raio [46].

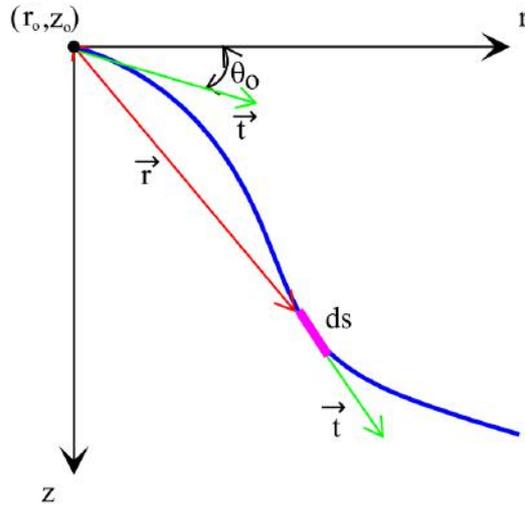


Figura 3.7: Geometria 2-D mostrando a localização de uma raio em relação à fonte  $(r_o, z_o)$ (modificado de [32]).

Sendo assim, a função eikonal 3.34 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{c^2} = \nabla\tau \cdot \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{c^2}, \quad (3.40)$$

ou equivalentemente,

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{c} \quad (3.41)$$

nos fornecendo que,

$$\tau(s) = \tau(0) + \int_0^s \frac{1}{c(s')} ds'. \quad (3.42)$$

Esta integral fornece o valor do *tempo de trânsito*  $\tau$  ao longo do raio.

Na literatura [47] podemos encontrar algoritmos para o traçamento de raios. Por exemplo, na *Ocean Acustical Library* (oalib), são disponibilizadas rotinas em Matlab e Fortran para a geração de traçado de raios. Entretanto, preferimos desenvolver nossos próprios códigos numéricos, tanto em Fortran quanto na linguagem simbólica Maple. Fato este nos permitiu ganhar um pouco mais de maturidade na área. Passemos agora a discutir outro método fundamental para soluções de problemas em acústica oceanográfica, que é a teoria dos modos normais.

## 3.3 Modos Normais - MN

### 3.3.1 Descrição do Método

É bem sabido da literatura [14, 15, 32], que o método de traçado de raios apresenta limitações ao passar em regiões de sombra, de cáustica e pontos de retorno. Em outras palavras, como o número de regiões de cáustica e sombra pode se ampliar com o aumento da distância à fonte, a aplicabilidade da teoria de raios para grandes distâncias fica por vezes comprometida. Além disso, a teoria de raios também falha para baixas frequências, ou seja, quando o comprimento de onda sonora se torna comparável com a escala vertical da variação da velocidade do som. Estes fatos nos motiva a recorrermos a outras soluções possíveis para a equação de Helmholtz.

Neste sentido, Ahluwalia e Keller [2] em uma abordagem inicial e simplificada do problema, obtiveram uma expressão para o campo sonoro em função de “oscilações naturais” (modos) de um guia, que tem a limitação de atender somente casos com fundos perfeitamente planos. Em outras palavras, neste nível de aproximação, o método é associado a um modelo de vibrações em meio homogêneo limitado por superfícies, ditas “guia de ondas”, que permitam o aparecimento de ondas estacionárias [27]. Abordagem esta, muito semelhante aquela adotada no estudo dos modos de vibração de uma corda com suas extremidades fixas. Contudo, se nos interessa o estudo do campo acústico propagado a grandes distâncias da fonte, os modos mais significantes serão aqueles que não interagem com o fundo, pois estes não estarão susceptíveis as perdas devidas a estas interações.

De uma maneira geral, o *método de modos normais* expressa o campo sonoro como uma soma de onda estacionárias (os modos). Porém, nosso interesse se concentra no estudo do campo a grandes distâncias da fonte, então os modos significantes para isto serão aqueles que interagem pouco com o fundo [15] e ao longo deste trabalho admitiremos como aproximação inicial que o oceano é ilimitado.

No caso da direção vertical  $z$ , as “frequências espaciais” de vibração fornecem os comprimentos de onda à uma onda estacionária modal. Percebe-se da figura 3.8, que tais modos são frações da distância  $h$  entre as “superfícies refletoras”, e que o índice modal “ $n$ ” conta o número de nodos (zeros) desta onda.

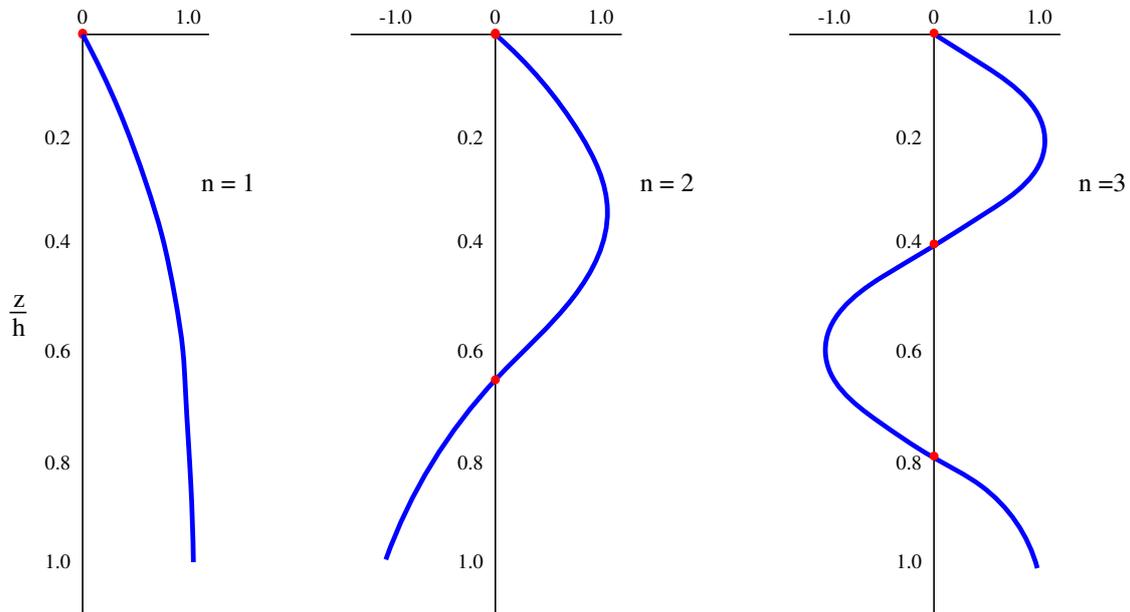


Figura 3.8: Esboça o comportamento dos três primeiros modos da onda estacionária para um guia acústico.

Em geral, aplica-se os MN para os modelos “*range-independent*”. Entretanto, caso a variabilidade do perfil de velocidade seja suave radialmente, o oceano pode ser aproximado por uma sucessão de guias dependentes apenas da profundidade. Resolve-se, então separadamente a equação de Helmholtz em cada “intervalo” para posteriormente se conectar as solução nas “fronteiras”, dando origem assim ao método de modo acoplados, que representa uma solução modal em cenários tipo *range-dependent* [27]. Para estes casos mais simples, podemos solucionar o problema através da técnica do método de separação de variáveis, que passamos a discutir a seguir.

### 3.3.2 Método Separação de Variáveis (MSV)

Mostraremos aqui a partir da equação de Helmholtz 3.30, em coordenadas cilíndrica, supondo que a velocidade  $c$  do som, a densidade  $\rho$  sejam dependentes somente da profundidade  $z$ , e uma fonte pontual localizada a uma profundidade  $z = z_s$ , é possível escrever explicitamente o campo de deslocamento  $\psi$ , satisfazendo a seguinte equação:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \psi = -\frac{\delta(r) \delta(z - z_s)}{2\pi r}. \quad (3.43)$$

Portanto, primeiramente usando a separação de variáveis na equação homogênea de Helmholtz, admitindo para isto uma possível solução com simetria azimutal da forma  $\psi(r, z) = Z(z)R(r)$ , satisfaz:

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) \right] + \frac{1}{Z} \left[ \rho(z) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{dZ}{dz} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} Z \right] = 0. \quad (3.44)$$

A única forma da relação anterior 3.44 ser satisfeita é fazendo com que um dos termos entre colchetes se iguale a uma constante  $k_{rm}$ , assim:

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{dZ}{dz} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_{rm}^2 \right) Z_n = 0, \quad (3.45)$$

com as condições de contorno que a pressão  $P = \rho\omega^2\psi$  se anule na superfície ( $z = 0$ ) e seja máxima a uma dada profundidade  $z = h$ .

A equação anterior 3.45 com estas condições de contorno, também denominada equação modal, se torna um problema de *Sturm-Liouville*.

Desta forma, de posse das propriedades do problema de Sturm-Liouville, podemos aplicá-las aqui ao problema da equação modal, [27, 32], ou seja:

- a equação modal tem um número infinito de soluções, as quais têm semelhança com os modos de uma corda vibrante;
- os modos são caracterizados por funções  $Z_n(z)$  que descrevem a variabilidade vertical da pressão e uma constante de propagação horizontal  $k_{r,n}$ . Sendo estas constantes de propagação horizontais, análogas às frequências espaciais discretas de vibração de uma corda com extremidades fixas, ou melhor dizendo,;
- $Z_n(z)$  é uma auto-função e  $k_{r,n}^2$  é o seu autovalor;
- o  $n$ -ésimo modo tem  $n$  zeros no intervalo  $[0, h]$ , e os autovalores correspondentes  $k_{r,n}$  são todos reais e crescentes de forma que  $k_{r,1}^2 > k_{r,2}^2 > \dots$ ;
- Além disso, todos os autovalores são menores que  $\left(\frac{\omega}{c_{min}}\right)^2$  onde  $c_{min}$  é o menor valor da velocidade de propagação do som no problema;
- Por fim, os modos do problema de Sturm-Liouville são ortogonais, ou seja,

$$\int_0^h \frac{Z_m(z)Z_n(z)dz}{\rho(z)} = \delta_{mn}. \quad (3.46)$$

Portanto, os modos formam uma base completa ortogonal permitindo descrever o campo de pressão como uma série infinita de funções, conhecida como a “séries de resíduos” [32], a saber:

$$p(r, z) = \frac{i}{4\rho(z_s)} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z_s)Z_n(z)H_o^{(1)}(k_{r,n}r). \quad (3.47)$$

Apliquemos a seguir este formalismo ao problema de propagação do som em oceanos profundos.

### 3.3.3 Canal Sonoro Canônico de Munk

Como comentado anteriormente, Munk [44] ciente de que a temperatura e a salinidade produzem camadas de água com densidades diferentes, sugeriu sintetizar estes efeitos na seguinte fórmula explícita para o perfil de velocidade sonora:

$$\frac{c(z) - c_o}{c_o} = \epsilon(e^\eta - \eta - 1), \quad (3.48)$$

onde  $c_o$  é a velocidade no eixo do canal  $z = z_o$ ,  $\eta = 2\frac{z-z_o}{L}$ ,  $L$  é a largura efetiva do canal,  $\epsilon = \frac{L}{2} \cdot 1,14 \cdot 10^{-2}$  é a fração de incremento da velocidade adiabática na escala de profundidade.

Vemos de 3.48 que para profundidades próximas à superfície tal que  $\eta \gg 1$ , temos  $c(z) - c_o \approx \epsilon c_o e^\eta$ , ou seja, nestas regiões a velocidade do som aumenta exponencialmente, enquanto que para águas ultra profundas onde  $\eta \ll 1$ , tem-se  $c(z) - c_o \approx -\epsilon c_o \eta$ , de modo que a velocidade decresce linearmente. Munk denominou este comportamento do perfil 3.48 de “Canal Sonoro Canônico” [15].

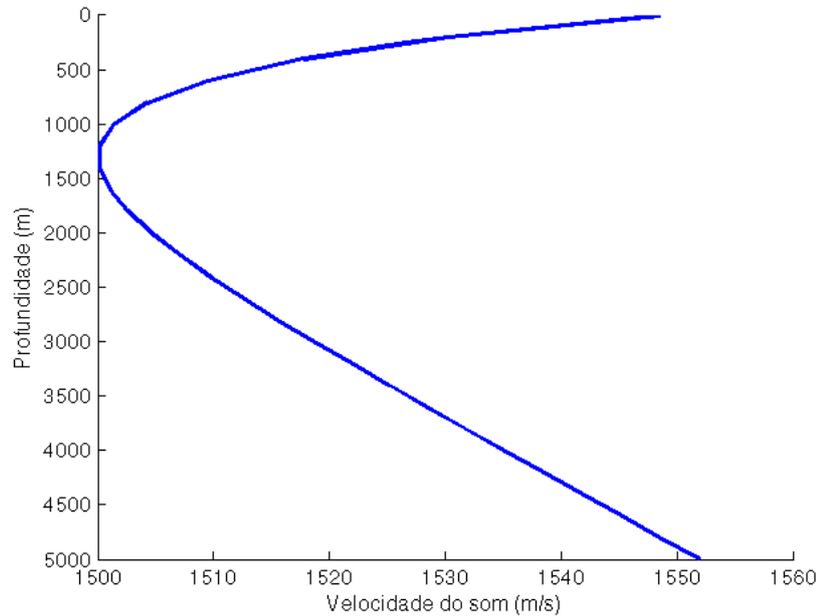


Figura 3.9: Perfil de Munk.

Ao longo deste trabalho utilizaremos o perfil de Munk figura 3.9 não só como perfil de velocidade no traçamento dos raios, bem como na análise do problema modal, que neste caso também terá de ser analisado de forma aproximativa que passamos a detalhar um pouco mais a seguir.

### 3.3.4 Modos normais na aproximação WKB

Em analogia com o conceito de índice de refração  $n$  na óptica, podemos redefinir  $k(z) = k_o \cdot n(z)$ , em que  $k_o$  é o número de onda relativo à uma profundidade de referência  $z = z_o$  (frequentemente adotada no eixo do canal) de forma que podemos reescrever a equação de onda como:

$$\psi'' + k_o^2 \gamma^2(z) \psi = 0. \quad (3.49)$$

Onde o “índice” de refração vertical relativo  $\gamma_l$  é dado por,

$$\gamma_l = \left[ n^2(z) - \frac{k_r^2}{k_o^2} \right]^{1/2}. \quad (3.50)$$

Inicialmente iremos supor  $k_o \gg 1$  e que as soluções de 3.50 sejam aproximadamente da forma  $\exp(\pm i k_o \gamma z)$ , e que no caso mais geral de meios não homogêneos[15] tenhamos  $\psi$  dado por:

$$\psi(z) = \left[ \frac{\gamma(z_o)}{\gamma(z)} \right]^{1/2} \exp \left[ \pm i k_o \int_{z_o}^z \gamma dz \right]. \quad (3.51)$$

A expressão 3.51 é dita uma solução assintótica aproximada da equação de onda 3.49. Vemos também de 3.51 que o método falha para pontos em que  $\gamma(z) = 0$ , ou seja, o método diverge nos pontos de retorno.

No caso de uso do método WKB para análise do campo sonoro em um guia de ondas, devemos atentar para os seguintes tipos de modos possíveis, dependendo da região tratada.

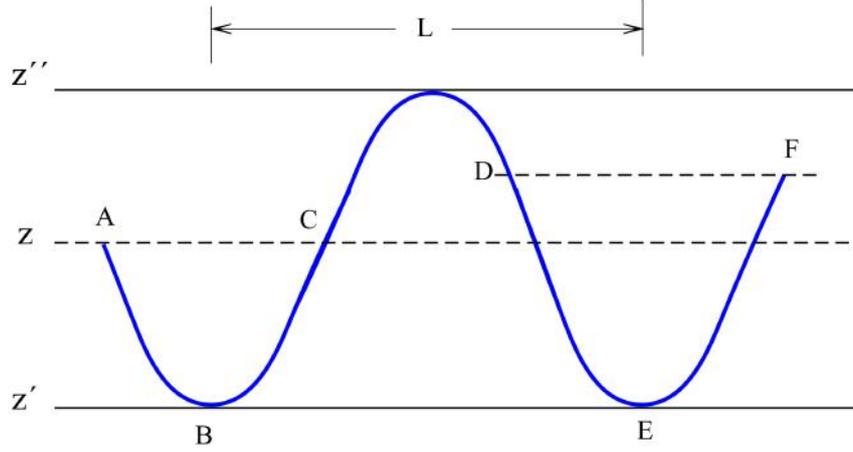


Figura 3.10: Sistema de raios.

Assim:

- $0 < z < z'_l$  - região limitada pela superfície livre e o ponto de retorno (profundidade  $z'_l$ , em que  $\gamma_l = 0$ );
- $z''_l < z < z'_l$  - região limitada por dois pontos de retorno em que  $\gamma_l(z'_l) = \gamma_l(z''_l) = 0$ ;
- $z''_l < z < h$  - região limitada por ponto de retorno e o fundo;
- $0 < z < h$  - região entre a superfície e o fundo.

Em uma primeira análise, somente dois tipos de modos, os que não interagem com o fundo, serão analisados neste trabalho. Nestes casos, a solução geral para o segundo tipo de modo para uma região de campo constante,  $z'' < z < z'$  ( $\gamma$  é real) e  $z < z'$  ( $\gamma$  é imaginário) pode ser escrita, a partir de 3.51, por:

$$\psi(z) = \gamma^{-1/2} \left[ C_1 \exp \left( ik_o \int_{z'}^z \gamma dz \right) + C_2 \exp \left( -ik_o \int_{z'}^z \gamma dz \right) \right], \quad z'' < z < z', \quad (3.52)$$

$$\psi(z) = \gamma^{-1/2} C_3 \exp \left( -k_o \int_{z'}^z |\gamma| dz \right), \quad z < z', \quad (3.53)$$

Usando condições de contorno para a superfície, para o fundo e interfaces das lâminas d'água, é possível determinar as expressões para as constantes  $C_1$  e  $C_2$ , a saber:

$$C_1 = C_3 e^{i\pi/4}, \quad C_2 = C_3 e^{-i\pi/4}. \quad (3.54)$$

Assim, 3.52 pode ser reescrita:

$$\tilde{\psi}(z) = 2C_3 \gamma^{-1/2} \cos \left( k_o \int_z^{z'} \gamma dz + \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.55)$$

Podemos escolher qualquer outro ponto fixo de  $z$  como limite inferior na integral ao invés de  $z'$ , desde que as constantes arbitrárias  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  tenham seus valores alterados. Para obter modos do primeiro tipo a condição  $z = 0$  deve ser satisfeita e em  $z = z''$  para o segundo tipo de modo. No primeiro caso devemos ter  $\psi(0) = 0$ , de forma que:

$$k_o \int_0^{z'} \gamma dz = \pi \left( l - \frac{1}{4} \right), \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (3.56)$$

A expressão a esquerda da igualdade em 3.56 é denominada integral de fase.

Para obter modos do segundo tipo, assumiremos  $k_o z'' \gg 1$ , ou seja, o ponto de retorno é suficientemente distante da superfície de forma que os modos não interagem com este último. A condição  $z = z''$  pode ser interpretada como uma onda refletida nesta profundidade com defasagem de fase de  $\pi/2$  em relação a onda incidente.

Assim:

$$\begin{aligned} & \cos \left( k_o \int_z^{z'} \gamma dz + \frac{\pi}{4} \right) = \\ & \frac{1}{2} \exp \left( i k_o \int z^{z'} \gamma dz - \frac{i\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \exp \left( -i k_o \int z^{z'} \gamma dz + \frac{i\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

A condição de que razão do primeiro expoente com o segundo deve ser de  $e^{i\pi/2}$  nos leva à equação seguinte:

$$k_o \int_z^{z'} \gamma dz = l + \frac{\pi}{2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

De 3.52 podemos, então obter a equação para as auto-funções(modos normais):

$$\tilde{\psi}(z) = 2C_3 \gamma^{-1/2} \cos \left( k_o \int_{z'}^z \gamma dz + \pi/4 \right), \quad (3.59)$$

Ainda em 3.59 sendo  $\gamma_l$  determinado em função de  $k_r$  a partir da relação,

$$\gamma_l = \left[ n^2(z) + \frac{k_r^2}{k_o} \right]^{1/2}. \quad (3.60)$$

A determinação da constante  $C_3$  se faz a partir da condição de normalização, ou seja,  $\int_0^h \psi_l^2 dz = 1$ . Assim:

$$4C_3 \int_0^{z_l} \gamma^{-1} \cos^2 \left( k_o \int_z^{z'} \gamma_l + \pi/4 \right) dz = 1.$$

Fazendo  $\cos^2 \left( k_o \int_z^{z'} \gamma_l + \pi/4 \right) dz = 1/2$ :

$$2C_3 \int_0^{z_l} \left[ n^2(z) + \frac{k_r^2}{k_o} \right]^{-1/2} dz = 1. \quad (3.61)$$

Fazendo a comparação com a representação utilizada na teoria de raios. De 3.28:

$$r = \cos \theta_1 \left[ \int \left( n^2(z) + \frac{k_r^2}{k_o} \right)^{-1/2} dz \right]. \quad (3.62)$$

Logo:

$$D_l = 2\cos\theta_1 \int \left( n^2(z) + \frac{k_r^2}{k_o^2} \right)^{-1/2} dz, \quad (3.63)$$

em que, para  $z = 0$ ,  $\theta_1 = \arccos\left(\frac{k_r}{k_o}\right)$ .

Por comparação de 3.61 e 3.63:

$$C_3^2 = \cos\left(\frac{\theta}{D}\right). \quad (3.64)$$

Substituindo 3.59 em 3.47:

$$\psi(r, z) = 4\pi i \sum_l 2C_3^2 \gamma_l(z)^{-1/2} \gamma_l(z_l)^{-1/2} \cos\left(k_o \int_z^{z_l} \gamma dz + \pi/4\right) \cos\left(k_o \int_{z_l}^{z'} \gamma dz + \pi/4\right) H_o^1(k_r)$$

$$\psi(r, z) = 4\pi i \sum_l \frac{\cos\theta_l H_o^1}{k_o D_l \gamma_l(z)^{1/2} \gamma_l(z_l)^{1/2}} \cos\left(k_o \int_z^{z_l} \gamma dz + \pi/4\right) \cos\left(k_o \int_{z_l}^{z'} \gamma dz + \pi/4\right)$$

$$\psi(r, z) = 4\pi i \sum_l \frac{\xi_l H_o^1}{k_o D_l \gamma_l(z)^{1/2} \gamma_l(z_l)^{1/2}} \cos\left(k_o \int_z^{z_l} \gamma dz + \pi/4\right) \cos\left(k_o \int_{z_l}^{z'} \gamma dz + \pi/4\right), \quad (3.65)$$

em que  $\xi_l = k_{rl}^2$ .

A correspondência entre cada modo normal e o sistema de raios pode ser verificada a partir da análise da equação 3.65. Nesta equação, se os cossenos forem substituídos por somas expoentes, a função de Hankel por representações assintóticas, uma expressão de modos consistiria de quatro termos. A fase de cada termo, da por:

$$\varphi_l(r, z, z_l) = \xi_l \pm k_o \int_z^{z'} \gamma_l dz \pm k_o \int_{z_l}^{z'} \gamma_l dz. \quad (3.66)$$

Sendo os raios linhas ortogonais às frentes de onda, de sorte que o vetor  $\vec{e}$  tangente a um raio tem a mesma direção de  $\nabla\varphi$ , onde:

$$\vec{e} = \frac{\nabla\varphi_l}{|\nabla\varphi_l|}. \quad (3.67)$$

De 3.66, temos que:

$$\nabla r\varphi_l = k_{rl},$$

$$\nabla z\varphi_l = \mp k_o\gamma_l \mp k_o (n^2(z) - \cos^2\theta_l)^{1/2},$$

com,

$$n(z)\cos\theta_l(z) = cte, \quad (3.68)$$

que é a lei de Snell para uma raio que atravessa o limite entre dois meios distintos.

Uma outra forma de correlacionar a duas teorias se faz associando a superposição de modos normais de ordens próximas, de forma a definir um máximo local do campo sonoro (interferência construtivas de modos). Assim, se deslocarmos para além deste ponto, com a mesma profundidade da camada estudada, os modos se tornarão defasados, e a intensidade do campo diminuirá. Contudo, se realizarmos o mesmo descolamento, porém variando também a profundidade, haverá outro ponto em que os modos estarão em fase novamente. Estes locais em que os modos estão em fase correspondem a um raio.

A variação da fase  $\varphi_l(r, z, z_l)$  pode ser estimada, para um número grande de modos em que a variação WKB é válida, por  $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$  e a interferência construtiva ocorrerá para defasagens entre modos igual a  $2\pi m$ , sendo  $m$  um inteiro.

Derivando 3.66, considerando 3.60 e usando  $\xi_l = k_o \cos \xi_l$ , obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_l}{dl} &= r \frac{d\xi}{dl} \pm \frac{d\xi}{dl} \cos \theta_l \int_z^{z'} [n^2(z) - \cos^2 \theta_l]^{-1/2} dz \\ &\pm \frac{d\xi}{dl} \cos \theta_l \int_{z_1}^{z'} [n^2(z) - \cos^2 \theta_l]^{-1/2} dz = 2\pi m. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Diferenciando a equação 3.58:

$$\frac{d\xi}{dl} \cos \theta_l \int_{z''}^{z'} [n^2(z) - \cos^2 \theta_l]^{-1/2} dz = \pi. \quad (3.70)$$

Comparando esta última relação com 3.28, vemos que ambas estão relacionadas com as distâncias horizontais coberta pelo raio. Assim, denominando  $L$  a distância coberta por um ciclo do raio, as distâncias horizontais, que são mostradas na figura 3.10, serão expressas por:

$$\begin{aligned} \cos \chi_l \int_z^{z'} [n^2(z) - \cos^2 \theta_l]^{-1/2} dz &= r_{DE} = r_{EF}, \\ \cos \chi_l \int_{z_1}^{z'} [n^2(z) - \cos^2 \theta_l]^{-1/2} dz &= r_{AB} = r_{BC}, \\ \cos \chi_l \int_{z''}^{z'} [n^2(z) - \cos^2 \theta_l]^{-1/2} dz &= r_{DE} = L/2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

## 3.4 A Teoria de Feixes

O traçado de raios tem sido amplamente utilizado em problemas que envolvem propagação de ondas, em particular na sismologia. Basicamente o método, que pode ser considerado um problema clássico em Física, consiste na propagação de um feixe de raios, emitidos por uma fonte, através de um meio. A grandeza física estudada, como por exemplo, o campo de pressão ou o deslocamento de partículas, são computados pela soma das contribuições de cada feixe, numa determinada localização.

Teorias de feixe menos formais têm sido utilizadas em problemas de acústica oceânica. Por exemplo, Bucker [17] desenvolveu uma teoria de feixe baseada nas leis de espalhamento, para o meio homogêneo, que permite o feixe evoluir com o aumento do comprimento do arco. Esta teoria utiliza equações diferenciais que são integráveis, que nos permitem inferir sobre a evolução da largura e da curvatura do feixe.

Embora a teoria de raios ofereça vantagens em relação a outros métodos (diferença e elementos finitos) muito comuns na literatura, apresenta falhas em regiões ao longo da trajetória em que a amplitude e a dispersão do raio tornam-se singulares, como por exemplo nas regiões de cáusticas [46]. Neste sentido, Cerveny [19] expõe um exemplo demonstrando o comportamento da função de Airy na vizinhança de uma cáustica para soluções representadas por uma soma (integral) sobre feixes gaussianos. Portanto, a teoria de raios assintótica requer, para representar o campo de onda na vizinhança das singularidades ao longo da propagação, formas de onda mais gerais [14] como por exemplo, a função de Airy, que será analisada em mais detalhes nas sessões a seguir .

### 3.4.1 O Feixe de Airy-Gauss

Historicamente o feixe de Airy atraiu muita atenção em estudos envolvendo a Óptica e Acústica. Em algumas aplicações nestas áreas de estudo verificou-se que o feixe, quando representado por funções de Airy, retém sua intensidade e “acelera”, ao longo de uma trajetória parabólica, durante a propagação [7, 29, 53]. Tais ob-

servações, a princípio, contradizem o tratamento clássico da equação de Schrödinger que sugere que todo pacote de onda, representando o movimento de partículas livres, com diferentes velocidades, muda sua forma ao longo de sua propagação no espaço [10].

Em 1987, Durnin et al [26] mostraram em seus trabalhos a existência de ondas “isentas” de difração (non diffracting waves - N.D.Ws) de Bessel. Para este tipo de feixe as ondas são localizadas, mas diferentemente das ondas planas, a intensidade do campo é não uniforme no plano perpendicular à direção de propagação e, ainda, a parte principal da densidade de potência pode ser concentrada em uma área finita [31]. São por estes motivos que estes feixes são denominados “espacialmente localizados”.

Outras configurações dos feixes localizados são: o feixe de Bessel de ordens mais elevadas, feixe de Mathieu e o feixe de Airy [31].

No caso do feixe de Airy, em 1979 Berry e Balazs [10] publicaram um trabalho teórico, na área da Óptica, chamando a atenção para o importante fato da possibilidade do feixe de Airy “acelerar”, mesmo que na ausência de um potencial externo. Este feixe, além de guardar a forma transversal do pulso, como os feixes de Bessel e o Gaussiano, propaga seu *spot* segundo uma trajetória parabólica, dando assim a conclusão de ser um feixe “auto-acelerado”. Alguns anos mais tarde, em 2007 Christodoulides [53] publicou resultados de estudos realizados com o feixe de Airy na área da Óptica e apontou possíveis aplicações envolvendo o pacote de ondas de Airy. A investigação sobre a dinâmica do feixe de Airy “livre de difração” nas configurações de dimensões 1D e 2D, mostraram que esta classe de ondas pode reter suas características de intensidade ao longo da propagação em distâncias bem superiores aos valores de seu comprimento de onda [53].

Passemos agora a rever alguns fundamentos da teoria de feixes.

A solução de onda plana pode ser escrita como:

$$\psi(r) = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (3.72)$$

sendo,

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Por outro lado, tem-se que a seguinte EDP é similar à equação de schrödinger, a saber:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2 \psi, \quad (3.73)$$

onde  $\nabla_{\perp}^2$  é o operador laplaciano transversal à direção de propagação.

Para o caso com simetria em relação à direção de propagação  $z$ , o campo  $\psi$  é função somente da coordenada transversal  $x$  e da direção de propagação  $z$ , o que torna possível escrever  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

Desta forma uma solução geral de 3.73 pode ser escrita dentro da aproximação paraxial [51] como:

$$\psi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k_x) e^{\frac{ik_x^2 z}{2k} + ik_x x} \cdot dk_x, \quad (3.74)$$

em que:

$$\tilde{\psi}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{ik_x x} dx, \quad (3.75)$$

onde  $\psi(x, 0)$  é a distribuição do campo em  $z = 0$  e  $\tilde{\psi}(k_x)$  corresponde a sua transformada de Fourier [51].

Soluções para equação 3.74 em termos da função de Airy foram analisadas independentemente por Kalnins e Miller em 1974 e por Berry e Balazs em 1979 no contexto da Mecânica Quântica [33] [10]. Eles introduziram o feixe de Airy que apresentava como principais características os fatos de não apresentar paridade de simetria em relação à origem, propagar no espaço livre sem distorção e exibir um deslocamento transversal parabólico peculiar ao longo da distância de propagação. A existência deste deslocamento lateral motivou Berry e Balazs a adotarem o termo

*acelerado* para descrever o pacote de Airy.

Siviloglou [52] com o objetivo de estudar a dinâmica da potência finita do feixe de Airy decaindo exponencialmente. Neste sentido, fez primeiramente uma parametrização em relação a uma escala arbitrária transversal  $x_o$ , de forma a termos a coordenada transversal normalizada representada por  $s = \frac{x}{x_o}$  e a distância normalizada  $\xi = \frac{z}{kx_o^2}$ , com  $k = \frac{2\pi n}{\lambda_o}$ .

Então, o feixe de Airy, em  $z = 0$ , pode ser expresso da seguinte forma [52]:

$$\psi(s, 0) = A_i(s)e^{as}. \quad (3.76)$$

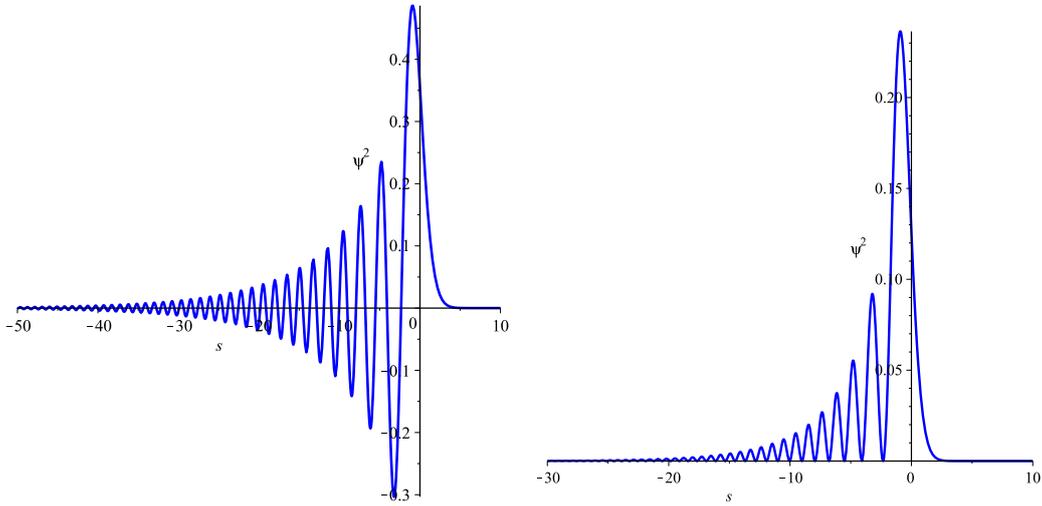


Figura 3.11: a) Intensidade do campo de onda de um feixe de Airy descrito pela equação 3.76 para  $a = 0.1$ . b) Intensidade do campo normalizada. Modificado de [52]

O fator de decaimento  $a$  tem de ser positivo para possibilitar interpretações físicas aceitáveis. Note que a função de Airy  $A_i$  decai rapidamente para  $s \rightarrow \infty$ , mas para  $s \rightarrow -\infty$  a função oscila e o decaimento é bem mais lento. Então, quando um fator de decaimento gaussiano é introduzido, ele faz  $\psi(s, 0) \rightarrow 0$  no limite também de  $s \rightarrow -\infty$ , o que assegura que o campo seja integrável em 2D, isto é, que haja fluxo propagante com potência finita.

Na figura 3.74 sintetizamos essas ideias, notando-se que, o pacote de onda de Airy agora tem uma modulação gaussiana na direção transversal à propagação.

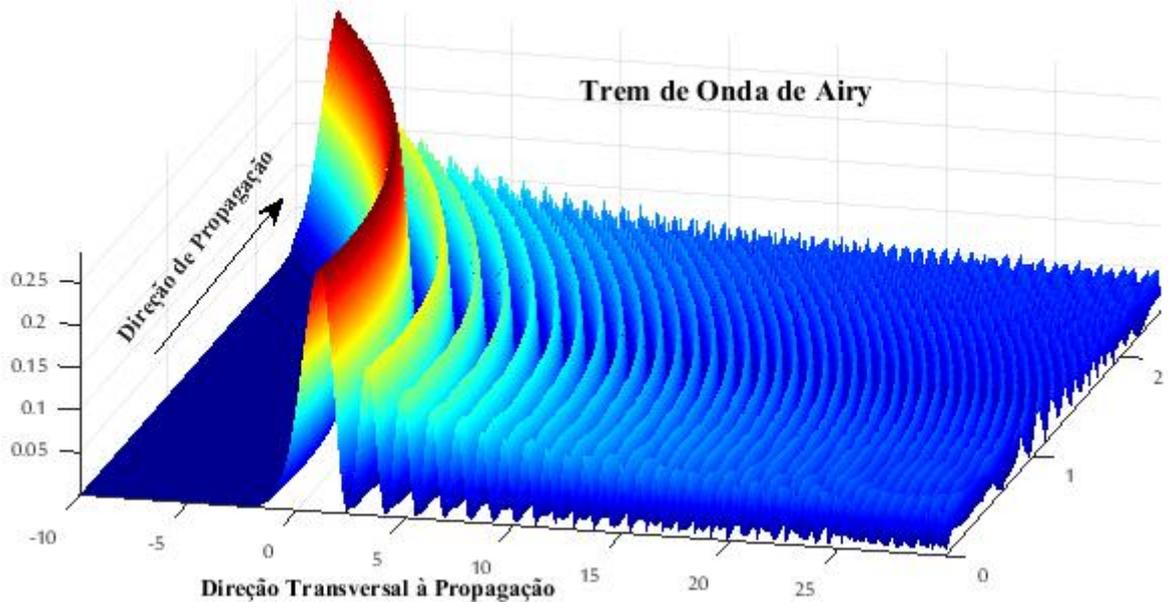


Figura 3.12: propagação do feixe de Airy(modificado de [31]).

Bandres e Vega [5] introduziram em 2007 modelos de feixe de Airy, tentando aprimorar um pouco mais os feixes generalizados Airy-Gauss. Na análise Óptica da propagação do feixe que eles propuseram, adotaram uma incidência no plano  $(x_1, z_1)$ , de um campo de bombeio inicial transversal com a seguinte forma [5] :

$$\psi_1(x_1, \kappa_1, \delta_1, S_1, q_1) = Ai\left(\frac{x_1 + \delta_1}{\kappa_1}\right) \exp\left[iS_1\left(\frac{x_1 + \delta_1}{\kappa_1}\right) + i\frac{1}{3}S_1^3\right] \exp\frac{ikx_1^2}{2q_1}, \quad (3.77)$$

onde os parâmetros  $\kappa_1, S_1, \delta_1, q_1$  são quantidades complexas em situações gerais. O parâmetro de escala  $\kappa_1$  controla a frequência espacial das oscilações transversais do campo. O parâmetro complexo  $S_1$  possibilita que a incidência do campo  $\psi_1$  tenha decaimento. Enquanto que o parâmetro também complexo  $q_1$  prevê característica inicial Gaussiana. Paralelamente, o parâmetro  $\delta_1$  introduz um deslocamento lateral na função de Airy e no termo de fase linear, mas não afeta a modulação Gaussiana. A relação 3.77 reduz-se à um feixe de Airy com energia finita quando  $\delta_1 = 0$  e  $q_1 = \infty$  e aquele que não consegue conservar energia quando  $S_1 = 0$  [5].

Usando a integral de difração de Huygens [51], é possível prever a propagação do feixe através do sistema “Óptico” de matrizes ABCD, de forma que:

$$\psi_2(x_2, \kappa_2, \delta_2, S_2, q_2) = Ai \left( \frac{x_2 + \delta_2}{\kappa_2} \right) \exp \left[ iS_2 \left( \frac{x_2 + \delta_2}{\kappa_2} \right) + i\frac{1}{3}S_2^3 \right] GB(x_2, q_2) \quad (3.78)$$

onde:

$$GB(x_2, q_2) = \exp \frac{1}{\sqrt{A + B/q_1}} \frac{ikx_2^2}{2q_2} \quad (3.79)$$

é o campo Gaussiano, e as relações de transformação para os parâmetros  $\kappa_2, \delta_2, S_2$  e  $q_2$ , a partir do plano de incidência  $z_1$  ao plano de saída  $z_2$ , são:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad \kappa_2 = \kappa_1(A + B/q_1) \quad (3.80)$$

$$S_2 = S_1 + \frac{B}{2k\kappa_1\kappa_2} \quad \delta_2 = \delta_1(A + B/q_1) - \frac{B}{2k\kappa_1}(S_1 + S_2) \quad (3.81)$$

As relações 3.80 e 3.78 permitem que um feixe Airy Gauss seja propagado através de um sistema ABCD real ou complexo. Neste formalismo, também nota-se que o campo de saída tem a mesma estrutura matemática do campo de entrada, o que evidencia que o feixe é invariante sobre transformações ópticas paraxiais, preservando assim a sua forma durante a propagação. Mas explicitamente [5], se fizermos  $\delta_1 = 0$  e  $q_1 = \infty$ :

$$U_2(x_2) = Ai \left( \frac{x_2 + \delta_2}{\kappa_1 A} \right) \exp \left[ iS_2 \left( \frac{x_2 + \delta_2}{\kappa_1 A} \right) + i\frac{1}{3}S_2^3 \right] \frac{1}{\sqrt{A}} \exp \frac{iCkx_2^2}{2A}, \quad (3.82)$$

onde, em termos dos elementos da matriz de transferência ABCD tem-se [5]:

$$S_2 = S_1 + \frac{B}{2k\kappa_1^2 A}, \quad \delta_2 = -\frac{B}{2k\kappa_1} \left( S_1 + \frac{B}{4k\kappa_1^2 A} \right). \quad (3.83)$$

Por exemplo, para a propagação do feixe através do espaço livre ao longo de  $z \geq 0$ , tendo como ponto inicial  $z = 0$ , a matriz de transferência entre os planos em  $z_1$  e  $z_2$  será representada  $[A, B, C, D] = [1, z, 0, 1]$ . Logo das relações 3.80 e 3.78 obtemos que:

$$q_2(z) = q_1\mu, \quad \kappa_2(z) = \kappa_1\mu, \quad (3.84)$$

$$S_2 = S_1 + \left( \frac{1}{2k\kappa_1^2} \right) \frac{z}{\mu} \quad e \quad \delta_2 = \delta_1 + \left( \frac{S_1}{q_1} - \frac{S_1}{k\kappa_1} \right) z - \left( \frac{1}{4k^2\kappa_1^3} \right) \frac{z^2}{\mu}, \quad (3.85)$$

com  $\mu = \mu(z) = (1 + z/q_1)$  [5].

Isto é melhor compreendido fisicamente observando a figura 3.13, que mostra a propagação do feixe generalizado Airy-Gauss para a distância de  $0.2z_R$ , onde  $z_R = kw_1^2/2$  é a distância de Rayleigh associada à modulação inicial Gaussiana de largura  $w_1$ .

Observa-se nesta figura que para pequenos valores de  $|\kappa_1|$ , o feixe AiG exhibe um desvio lateral pelo menos até a faixa onde o feixe permanece essencialmente livre de difração, mostrando que o feixe mesmo no espaço livre se curva quando “acelerado” [5].

Nota-se também da figura 3.14, que a seção transversal inicial do feixe, correspondente à amplitude e aos perfis de fase no plano  $z = 0$ , não se distorcem muito ao longo da propagação, veja figura 3.14.

No capítulo seguinte, mostraremos de forma pioneira que esses resultados envolvendo feixes de Airy propagando em meios Ópticos, podem ser generalizados para o transporte de energia acústica em oceanos profundos.

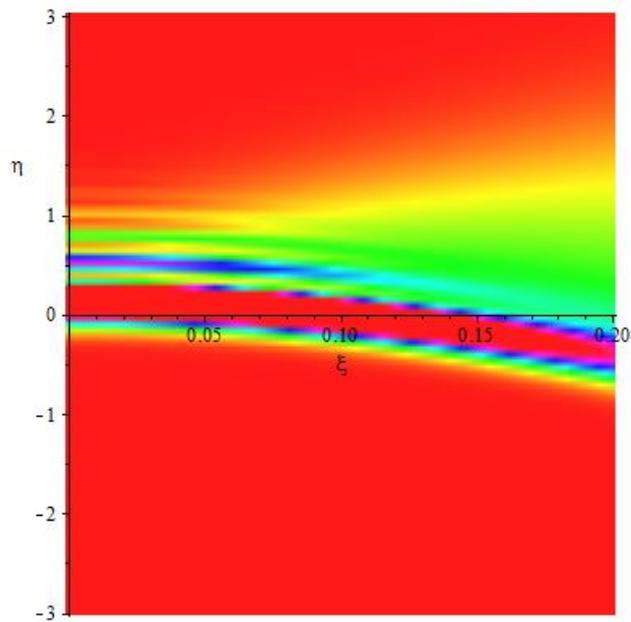


Figura 3.13: propagação do feixe de Airy(modificado de [4]).

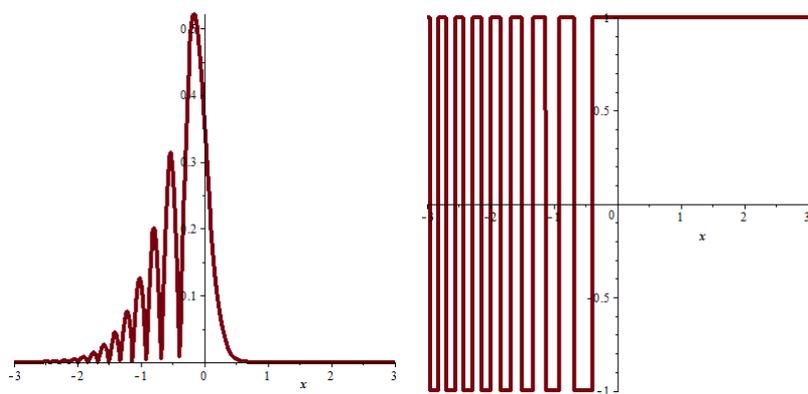


Figura 3.14: a) Vista transversal da propagação do feixe de Airy. b) Variação da fase da função de Airy (modificado de [4]).

## Capítulo 4

# Propagação acústica em oceanos profundos de feixes de Airy generalizados

Vimos nos capítulos anteriores, algumas limitações da aplicabilidade da teoria de raios para grandes distâncias devido as singularidades ao longo da trajetória, além da exigência de utilização de altas frequências nos levam a necessidade de recorrer a outras soluções possíveis da equação de onda, como por exemplo a teoria WKB, onde vimos, na Eq.3.66, que nesta teoria os modos estão associados a saltos na fase  $\varphi_l(r, z, z_l)$  de  $2\pi m$ , sendo  $m$  um inteiro. Além disso, conectando as ideias destas duas teorias assintóticas, WKB e traçamento de raios, podemos interpretar os modos normais como um sistema de raios [15], de tal forma que para cada modo normal exista um conjunto de raios preferenciais, os quais têm trajetórias definidas em pontos de interferência construtiva de modos vizinhos. Em outras palavras, a correlação entre as duas teorias se faz associando a superposição de modos normais de ordens próximas, de forma a definir um máximo local do campo sonoro (interferência construtivas de modos). Assim, se deslocarmos para além deste ponto, com a mesma profundidade da camada estudada, os modos se tornarão defasados em virtude de “descasamento” de suas velocidades de fase, e a intensidade do campo diminuirá.

Contudo, se realizarmos o mesmo deslocamento, porém variando também a profundidade, haverá outro ponto em que os modos estarão em fase novamente. Veremos que estes locais, em que os modos estão em fase, correspondem a um comprimento de interferência modal. Então, é necessária atenção para que, na construção do modelo, o comprimento de onda de um ciclo de raio esteja concordando com a fase de modos vizinhos.

Por outro lado, motivados por resultados semelhantes tanto teóricos [11] quanto experimentais em outras áreas envolvendo propagação de ondas como por exemplo, a óptica [50], acústica submarina [7] e ondas oceânicas [29], desenvolvemos um modelo teórico que, utilizando a associação das teorias citadas acima, descreva acuradamente a propagação de feixes de Airy em um guia de ondas sonoro em um oceano profundo e ilimitado. Para tanto e por razões pedagógicas, nas seções a seguir revisitaremos as *teorias assintóticas WKB* de propagação acústica por modos e *traçamento de raios* em oceanos profundos, bem como mostraremos que sob certas condições, estas teorias fornecem resultados equivalentes e que é plausível se tirar proveito disto para desenvolver uma modelo de propagação baseado em feixes discretos de Airy.

## 4.1 Análise WKB para propagação modal no guia acústico canônico de Munk:

Campos sonoros harmônicos (variação temporal  $\exp(-i\omega t)$ ) se propagando em um oceano com densidade  $\rho(\vec{r})$  e perfil de velocidade sonora  $c(\vec{r})$ , tem-se que a pressão acústica  $P$  no domínio  $-f$  da frequência se comporta como  $P = \rho\omega^2\Phi$  [32], onde  $\omega = 2\pi f$  é a frequência circular. Por outro lado, dentro deste formalismo os campos de deslocamento acústicos  $\Phi$ , gerados por *fontes pontuais*, são as soluções propagantes da eq. de onda de Helmholtz a seguir [32]:

$$\left( \nabla^2 + \left[ \frac{\omega}{c(\vec{r})} \right]^2 \right) \Phi = A\delta(\vec{r} - \vec{r}_s). \quad (4.1)$$

Com  $A(\omega)$  a amplitude do sinal emitido por uma *fonte posicionada* em  $\vec{r} = \vec{r}_s$ . Em oceanos profundos, devido à simetria azimutal do problema, iremos adotar o sistema de coordenadas cilíndricas polares, tal que a profundidade do oceano é representada pelo eixo de simetria  $z$ , enquanto  $r$  é a distância radial a este eixo. Além disso, uma vez que em águas profundas ocorre uma maior variabilidade do perfil de velocidade do som com a profundidade  $z$  que em relação à distância  $r$  [32], podemos admitir  $c(\vec{r}) \approx c(z)$  onde  $r$  pode variar por algumas dezenas de quilômetros e  $z$  alguns milhares de metros. Nestas condições a solução geral da Eq.4.1 pode ser descrita pela seguinte transformada de Hankel [32]:

$$\Phi(r, z, z_s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_r \psi(z, z_s) k_r H_0^1(k_r r), \quad (4.2)$$

onde  $H_0^1$  é a função de Hankel de primeiro tipo e ordem zero, solução esta compatível com a *condição de radiação de Sommerfeld* em coordenadas cilíndricas [32]. Além disso, a *função de Green vertical*  $\Psi$  satisfaz à seguinte equação diferencial [32]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \left[ \left( \frac{\omega}{c(z)} \right)^2 - k_r^2 \right] \psi = A \delta(z - z_s). \quad (4.3)$$

Infelizmente no caso do perfil canônico de Munk (veja figura.4.1), descrito pela equação 4.4 abaixo [32]:

$$c(z) \equiv c_{\min} \left( 1 + \epsilon \left[ 2 \frac{(z - z_{\min})}{L} - 1 + \exp \left( -2 \frac{(z - z_{\min})}{L} \right) \right] \right), \quad (4.4)$$

não é possível resolver explicitamente a equação diferencial(4.3). Porém, podemos ganhar alguma intuição física sobre o problema, restringindo inicialmente nossa análise a profundidades abaixo da camada de mistura (veja Fig.4.1), isto é, nesta primeira abordagem do problema não levaremos em conta efeitos de reflexão do som na superfície do oceano, bem como faremos uso de métodos aproximativos assintóticos e semi-clássicos como a teoria WKB [32].

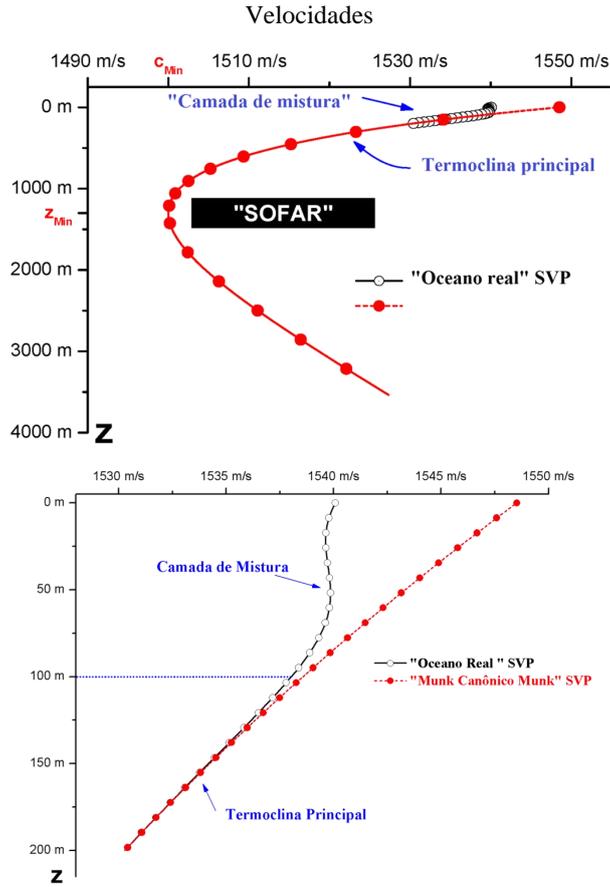


Figura 4.1: Comparação para oceanos profundos do comportamento em função da profundidade  $z$ , entre os perfis de velocidade do som “típicos” e o modelo teórico de Munk(4.4). Em a) vemos que o comportamento de ambos perfis se assemelham em “ águas das camadas mais profundas” tanto na termoclina quanto no SOFAR. Entretanto, em b) vemos que o perfil de Munk(4.4) não descreve satisfatoriamente o comportamento da velocidade sonora em “ águas rasas” no interior da camada de mistura.

Por exemplo, dentro desta aproximação sabe-se que os modos propagantes estão associados a valores discretos  $k_r \rightarrow k_r^{[n]}$  do número de onda radial [32], tal que  $k_r^{[n]}$  deve satisfazer o *critério de quantização de Bohr-Sommerfeld*, isto é:

$$\int_{z_A}^{z_B} dz k_z^{[n]}(z) = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi ; n = 0, 1, \dots, n_{\max} , \quad (4.5)$$

onde para qualquer um dos  $n$  dentre os  $(n_{\max} + 1)$  possíveis inteiros positivos, definimos  $k_z^{[n]}$  como o número de onda discreto vertical, a saber:

$$k_z^{[n]}(z) \equiv \sqrt{\left(\frac{\omega}{c(z)}\right)^2 - k_r^{[n]2}}, \quad (4.6)$$

Paralelamente, na Eq.(4.5) tem-se que os limites de integração  $z_A$  e  $z_B$  são os *pontos de retorno clássicos*, os quais são as soluções reais de:

$$k_z^{[n]}(z_A) = 0 = k_z^{[n]}(z_B). \quad (4.7)$$

Desta maneira, define-se a região  $z_A \leq z \leq z_B$  onde a onda acústica é propagante como *classicamente permitida* às oscilações, enquanto que as regiões *classicamente proibidas* delimitadas por  $z \leq z_A$  e  $z_B \leq z$ , são aquelas onde o som evanesce. Observa-se também da Eq.4.6, que  $k_z^{[n]}$  atinge o seu valor máximo  $k_z^{[\text{Max},n]}$  no SOFAR quando  $z = z_{\min}$ .

Encontramos na literatura[32] que no SOFAR, valores típicos que caracterizam sua profundidade e velocidade sonora são respectivamente da ordem de  $z_{\min} = 1300m$  e  $c_{\min} = 1500m/s$ . Associados a estes parâmetros podemos definir  $f_c$  a *frequência de corte* do guia de Munk como:

$$f_c \equiv \frac{c_{\min}}{2z_{\min}}, \quad (4.8)$$

sendo  $f_c$  a *menor frequência abaixo da qual não pode haver ondas propagantes no interior do guia*. Ao longo de todo este trabalho, adotaremos uma frequência de  $f = 50Hz$ , valor operacional este que é cerca de oitenta vezes superior à frequência de corte de um guia típico de Munk. Além disso usaremos também aqui neste trabalho (veja Fig.4.1), os seguintes valores para águas profundas [32] que caracterizam os parâmetros do perfil de Munk(4.1), isto é, explicitamente adotaremos[32]  $L = z_{\min} = 1300m$  e  $\epsilon = 0.00737$ .

Por outro lado, em meados de 1983 Chapman e Ellis[20] mostraram dentro do formalismo WKB que raios que após passarem (ao menos uma vez) pelos pontos de retorno  $z_A$  e  $z_B$ , é possível se relacionar suas trajetórias a um conjunto específico de modos adjacentes. Em outras palavras, em analogia com  $\tau_\Gamma$  o *tempo de trânsito*[32],

$$\tau_\Gamma \equiv \int_\Gamma \frac{d\ell}{c}, \quad (4.9)$$

que no oceano um raio sonoro gasta para percorrer uma trajetória de comprimento  $\Gamma$ , tem-se similarmente que neste guia de onda para dois modos adjacentes quaisquer  $n$  e  $n + 1$ , a *escala de tempo*  $\tau_n$  necessária para se *percorrer radialmente meio comprimento de interferência modal*  $L_n$  é dada por[20]:

$$\tau_n \equiv \frac{L_n}{c_g^{[n]}}, \quad (4.10)$$

de modo que, em *situações de baixa dispersão do campo sonoro*[20] tem-se  $\tau_\Gamma \approx \tau_n$  (veja figura 4.2). Onde na equação (4.10),  $L_n$  satisfaz[32],

$$L_n \equiv \frac{\pi}{k_r^{[n]} - k_r^{[n+1]}}, \quad (4.11)$$

bem como denota-se a *velocidade de grupo modal*  $c_g^{[n]}$  pela seguinte expressão[20]:

$$c_g^{[n]} = \frac{\partial \omega}{\partial k_r^{[n]}}. \quad (4.12)$$

Analogamente, para uma dada frequência  $\omega$  define-se a *velocidade de fase modal*  $c_p^{[n]}$  como [20, 32],

$$c_p^{[n]} \equiv \frac{\omega}{k_r^{[n]}}. \quad (4.13)$$

A figura 4.2 mostra a comparação do tempo de trânsito calculado utilizando a teoria de modos juntamente com o método semi-clássico WKB e pelo método de traçado de raios clássico.

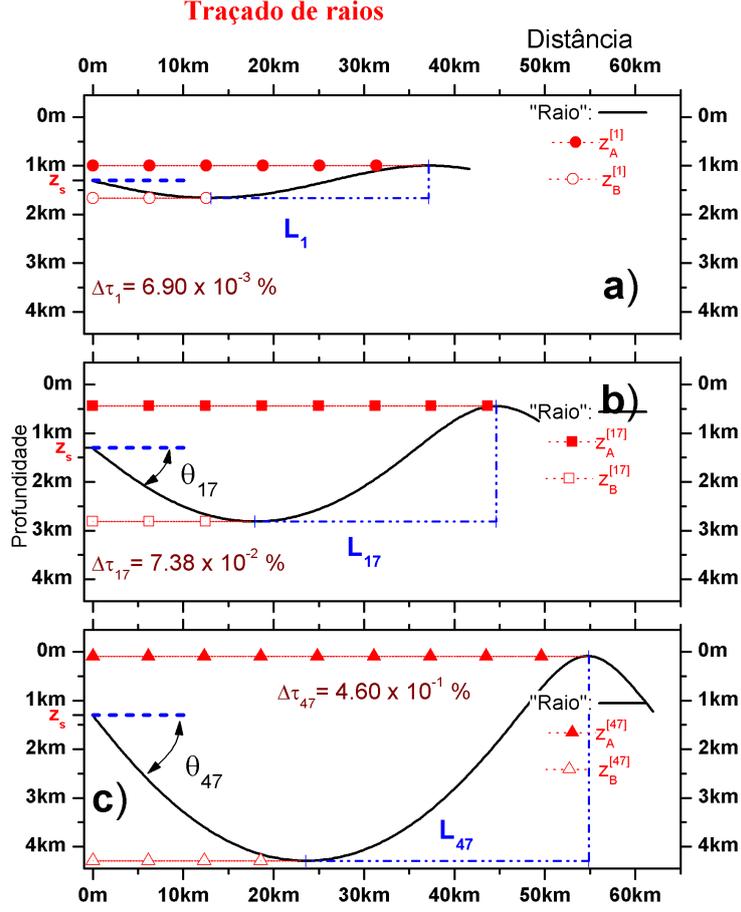


Figura 4.2: mostra o traçado de raios para uma fonte operando com  $f = 50Hz$  posicionada no SOFAR em  $z_s = z_{min} = 1300m$ . Em a), b) e c) os ângulos iniciais de saída da fonte, foram os ângulos discretos modais  $\theta_n$  com  $n = 1, 17$  e  $47$  respectivamente. Nota-se em todos estes casos, que os raios que passaram pelos pontos de retorno  $z_B^{[n]}$  e  $z_A^{[n]}$  após percorrem radialmente o comprimento  $L_n$ , a diferença relativa percentual  $\Delta\tau_n$  entre  $\tau_\Gamma(4.9)$  e  $\tau_n(4.10)$  é inferior a 0.5%. Mostrando uma equivalência entre as teorias modal e traçado de raios em completo acordo com [20].

Além disso para um dado modo  $n$ , nota-se das Eqs.(4.6, 4.7 e 4.13) que nos pontos de retorno  $z_A \mapsto z_A^{[n]}$  e  $z_B \mapsto z_B^{[n]}$  a velocidade sonora se iguala à velocidade de fase modal, isto é:

$$c(z_A) = c_p^{[n]} = c(z_B). \quad (4.14)$$

Portanto para cada modo  $n$ , na vizinhança dos pontos de retorno  $z_A^{[n]}$  e  $z_B^{[n]}$  a frente de onda se desloca com velocidade similar ao perfil de velocidade sonora  $c$  naquelas regiões. Por outro lado, em relação ao plano  $z = z_s$  (paralelo à superfície)

onde se localiza a fonte e contém  $k_r^{[n]}$ , podemos associar uma visão geométrica complementar dos modos (veja Figs.4.1 e 4.3) relacionando  $k_r^{[n]}$  a *ângulos de disparo discretos*  $\theta_n$ , a saber:

$$\theta_n \equiv \arccos\left(\frac{c_{\min}}{c_p^{[n]}}\right). \quad (4.15)$$

A figura 4.3-a mostra a relação entre estes ângulos de disparo e os modos preferenciais de ordem  $n$ . Deve-se notar que a variação dos ângulo, feita de 0 a 15°, não é linear e que, para a construção do traçado de feixe de raios, esta variação foi utilizada para cima e para baixo em relação a posição da fonte  $z_{\min}$ .

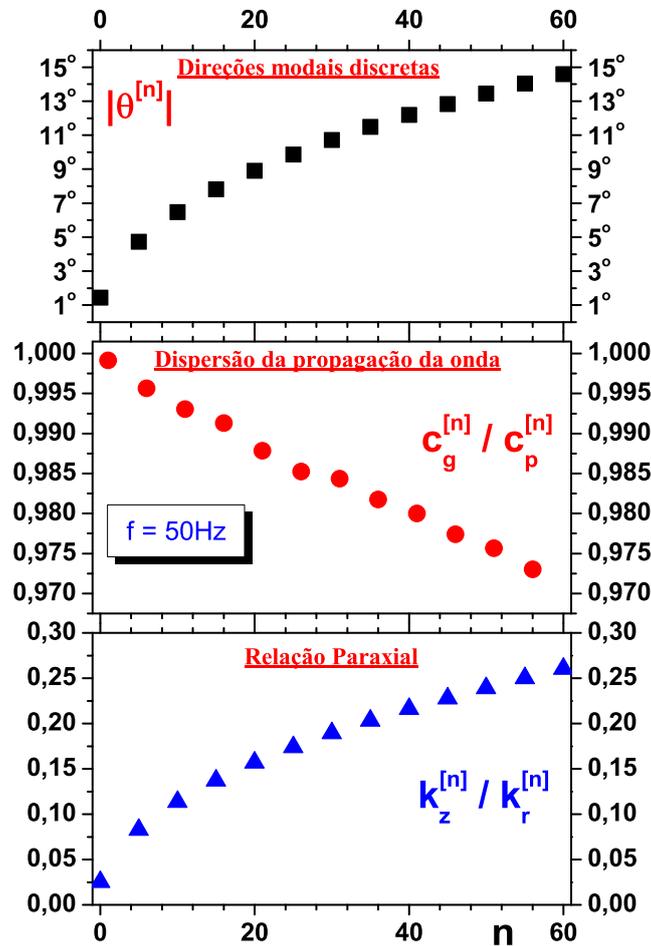


Figura 4.3: Mostra para o perfil de Munk(4.4) dentro do formalismo WKB e  $f = 50\text{Hz}$  os seguintes resultados: Em a) comportamento dos ângulos preferenciais de propagação discretos na faixa  $0 < |\theta_n| < 15^\circ$  associados a modos quando  $n$  varia entre  $0 \leq n \leq 60$ . Em b) e em c) vemos respectivamente que estes modos são pouco dispersivos já que  $c_g^{[n]} \approx c_p^{[n]}$  e sua propagação ocorre majoritariamente quase que paraxialmente na direção radial, pois  $k_z^{[\text{Max},n]} \ll k_r^{[n]}$ .

Na figura 4.3-b, é mostrado a relação entre as velocidades de fase  $c_f$  e de grupo  $c_g$ , que estão associadas à dispersão dos raios, para cada modo propagante. Esta relação é praticamente linear se compararmos os modos propagantes  $n$  longo da distância de propagação. Ou seja, temos uma dispersão praticamente nula para os raios associados a estes modos, o que nos leva a concluir que uma feixe construído a partir destes raios apresentaria também uma dispersão bastante pequena.

Ainda na figura 4.3-c temos uma relação, ainda para os modos de propagação preferenciais, entre os vetores de onda na direções radial  $k_r$  e de  $z$  (que se refere a profundidade)  $k_z$ . Em geral a literatura apresenta a construção de traçado de raios condicionados à teoria paraxial, ou seja, o vetor de ondas na direção transversal à direção de propagação deve tender a ser o menor possível, de forma a manter a energia do pacote de ondas propagante confinado o máximo possível em torno do eixo de propagação, por mais tempo, ou por uma distância maior possível. Então se associarmos a propagação de raios à propagação dos modos, esperamos que os modos que viajam maiores distâncias sejam àqueles em que  $k_r$  seja dominante em relação a  $k_z$ .

Com essas ideias em mente, tentaremos agora a analisar o problema de como deve se comportar um *feixe de Airy que possua características similares aos modos propagantes* em um guia acústico de Munk.

## 4.2 Propagação de feixes discretos de Airy: Resultados Numéricos

Vimos na seção anterior que modos não dispersivos propagando-se paraxialmente [20] podem ser associados a raios que ficam delimitados entre as regiões classicamente permitidas e proibidas (veja figuras 4.3 e 4.2). Motivados por estes resultados, passemos agora discutir a possibilidade de existência de *feixes discretos de Airy* em oceanos profundos. Para tanto, sabendo que para um dado modo  $k_r^{[n]}$  associado ao perfil de Munk(4.4), nossa proposta é que o campo de deslocamento discreto

$\Phi_n(r, z)$  solução da equação de onda(4.1) se comporte como:

$$\Phi_n(r, z) \equiv \frac{\psi_n(r, z) e^{i(k_r^{[n]}r + k_z^{[n]}(z - z_s))}}{\sqrt[4]{r^2 + (z - z_s)^2}}. \quad (4.16)$$

Observamos na Eq.4.16 acima, que tanto a condição de radiação de Sommerfeld como o comportamento singular da função de Green na vizinhança da fonte são satisfeitos.

Por outro lado, supondo que  $\psi_n(r, z)$  varie mais rapidamente em profundidade que radialmente, a teoria paraxial de feixes nos diz que  $\psi_n$  satisfaz assintoticamente a seguinte equação diferencial tipo Schrödinger:

$$2i k_r^{[n]} \frac{\partial}{\partial r} \psi_n(r, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_n(r, z) \approx 0. \quad (4.17)$$

A princípio desde dos anos 80, a teoria de feixes mostra que a função de Airy [10] pode ser solução da EDP(4.17). Entretanto, por apresentar um lento decaimento e possuírem apenas um ponto retorno, as funções de Airy não são de quadrado integrável, de modo que tais tipo de feixe não preservam a energia propagante em meios ilimitados.

Para superar esta forte restrição deste tipo feixe, por exemplo costuma-se convoluir feixes de Airy com os de Gauss[6]. Porém, aqui por estarmos abordando o *problema dos modos do guia de Munk*, adotaremos uma estratégia diferente que consiste em *correlacionar dois feixes de Airy no SOFAR*, um associado à região entre a superfície e SOFAR delimitada pelas profundidades  $0 \leq z \leq z_{\min}$  e outra, tal que a propagação ocorra entre o SOFAR e o oceano profundo onde  $z_{\min} \leq z < \infty$ .

A figura 4.4 nos dá uma ideia da construção exposta acima. Nela é mostrado o perfil-guia delimitando a oscilação de dois modos, o fundamental ( $m = 0$ ) e o de segunda ordem ( $m = 2$ ). Há de se observar também a delimitação das duas regiões, a proibida e a permitida a oscilações. Os pontos  $z_A$  e  $z_B$ , que são limites do perfil, definem, portanto, os pontos de retorno dos raios associados a estes modos.

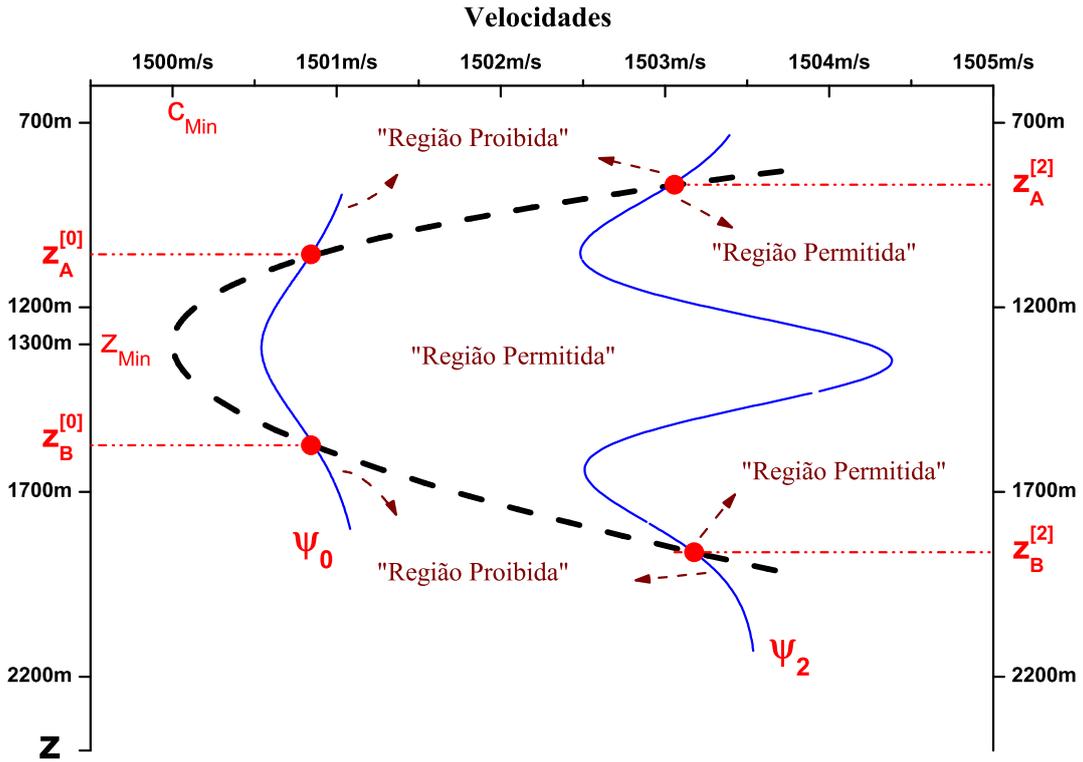


Figura 4.4: Mostra para  $f = 50Hz$  e em  $r = 0$ , o comportamento da “condição inicial”  $\Psi_n^0$  para o feixe discreto de Airy (veja Eq.4.18). Observe que para qualquer  $n$ -discreto,  $\Psi_n^0$  evanesce nas regiões classicamente proibidas e oscila  $(n + 1)$ -vezes nas regiões classicamente permitidas.

Se analisarmos a figura 4.4 e a compararmos a forma da função de Airy mostrada no capítulo 4 deste trabalho, veremos que os modos propagantes são formados pela composição de duas funções de Airy posicionadas com suas partes oscilantes coincidindo com a região permitida do perfil-guia de Munk e a parte evanescente “penetrando” na região proibida.

Esta construção foi uma forma encontrada para contornar a dificuldade de trabalhar com uma função não integrável, como a função de Airy, e também possibilitou o ajuste da função que representaria os modos de forma adequada em relação ao guia de ondas. Assim, a associação destas funções se fez de modo que a parte evanescente de cada uma delas, ou seja a parte positiva que não oscila, coincidissem com a região classicamente proibida. A parte oscilante das funções foram ajustadas para que seus máximos interferissem e ficassem confinados na região interna do guia de Munk.

Além disso, em analogia com o problema de Schrödinger na Mecânica Quântica, exigiremos que o fluxo de energia acústica seja preservado em  $z = z_{\min}$ , acarretando que a “derivada logarítmica do feixe” seja preservada em  $z = z_{\min}$ . Sendo assim em analogia com [10], exigiremos que o feixe ao iniciar a propagação em  $r = 0$ , possa ser descrito pela seguinte *composição de funções de Airy relacionadas ao  $n$ -ésimo modo do perfil de Munk*, a saber:

$$\psi_n^0(z) = \psi_n(r = 0, z) = A_n \begin{cases} Ai\left(\frac{z_A - z}{\lambda_n}\right) & \text{se } 0 < z \text{ e } z < z_{\min} \\ B_n Ai\left(\frac{z_A - z}{\lambda_n}\right) & \text{se } z_{\min} < z \end{cases} \quad (4.18)$$

onde  $Ai(u)$  a função de Airy de argumento  $u$ ,  $A_n$  sendo uma constante de normalização arbitrária e os pontos de retorno  $z_A^{[n]}$  e  $z_B^{[n]}$  associados ao perfil de Munk(4.4), são calculados dentro aproximação WKB discutida na seção anterior (veja Eq.4.7). Além disso, como consequência da continuidade de  $\Psi_n^0$  e sua derivada em  $z = z_{\min}$ , tem-se que  $B_n$  satisfaz à Eq.(4.19) abaixo,

$$B_n = \frac{Ai\left(-\frac{z_{\min} - z_A}{\lambda_n}\right)}{Ai\left(-\frac{z_B - z_{\min}}{\lambda_n}\right)}, \quad (4.19)$$

enquanto que,  $\lambda_n$  o comprimento de onda do feixe de Airy (veja Figs.4.4 e 4.5), é a  $n$ -ésima solução real da equação transcendental(4.20), a saber:

$$Ai\left(\frac{z_A - z_{\min}}{\lambda_n}\right) Ai'\left(\frac{z_{\min} - z_B}{\lambda_n}\right) = -Ai\left(\frac{z_{\min} - z_B}{\lambda_n}\right) Ai'\left(\frac{z_A - z_{\min}}{\lambda_n}\right), \quad (4.20)$$

onde denotamos  $Ai'(u)$  como sendo a primeira derivada da função de Airy  $Ai(u)$  em relação ao argumento  $u$ .

Observamos da figura 4.5 que quando a profundidade  $z$  varia, que para um dado  $n$  a amplitude do feixe de Airy inicial  $|\Psi_n^0|$  apresenta  $(n+1)$  valores de pico espaçados de  $\lambda_n$ . Neste sentido, temos que dentro da aproximação WKB, uma estimativa para  $\lambda_n$  é dada por:

$$\lambda_n \approx \left( \frac{2 \left[ \sqrt{(z_{\min} - z_A^{[n]})^3} + \sqrt{(z_B^{[n]} - z_{\min})^3} \right]}{3\pi (n + 1/2)} \right)^{2/3}. \quad (4.21)$$

Vemos da equação 4.21 e das figuras (4.5 e 4.6) que quando  $n$  cresce o valor de  $\lambda_n$  diminui.

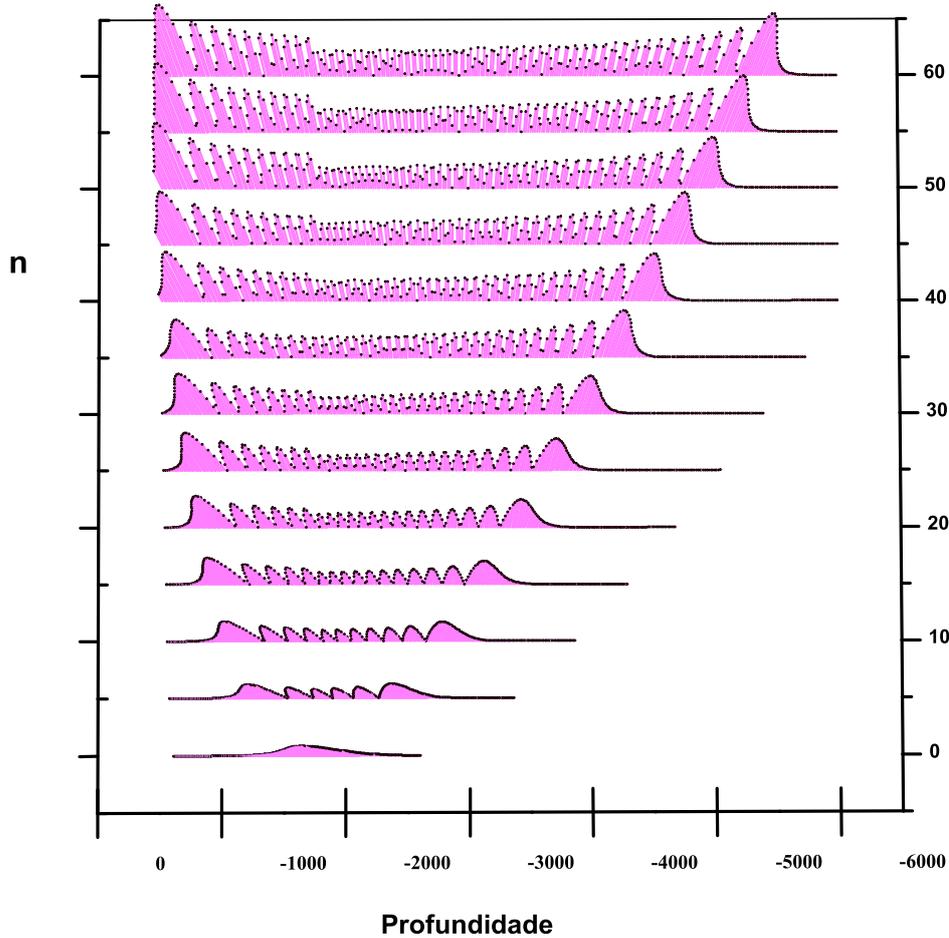


Figura 4.5: em  $r = 0$  e  $f = 50Hz$ , mostra (em unidades arbitrárias) e em função da profundidade, o comportamento da amplitude  $|\Psi_n^0|$  da “condição inicial” para o feixe discreto de Airy (veja Eq.4.18). Observe que à medida que  $n$  cresce aparecem  $(n + 1)$  picos de intensidade igualmente espaçados em  $\lambda_n$  (veja Eq.4.21). Nota-se também, que os picos de maior intensidade ocorrem nas vizinhanças dos pontos de retorno  $z_A^{[n]}$  e  $z_B^{[n]}$  (veja figura 4.4 ) e o feixe penetra além deles evanescentemente (veja Eq.4.22).

Além disso nota-se também tanto na figura 4.4 quanto na figura 4.5, que na vizinhança de ambos pontos de retorno  $z_A^{[n]}$  e  $z_B^{[n]}$ , que o feixe  $\Psi_n^0$  atinge sua amplitude máxima antes de evanescer.

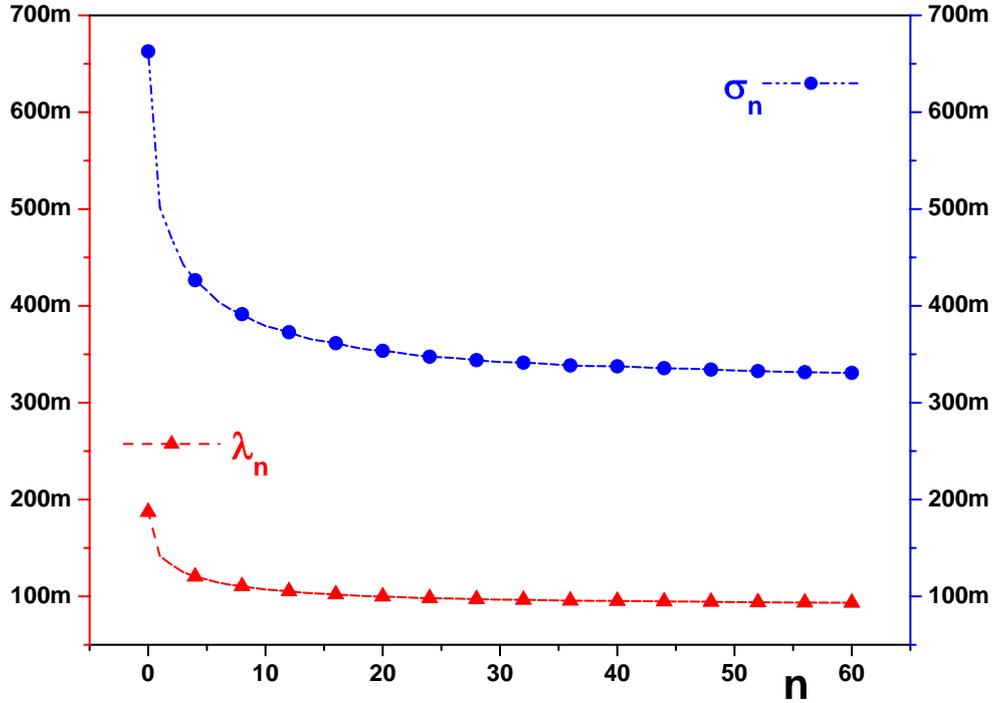


Figura 4.6: Compara para  $f = 50Hz$ , os comprimentos de onda  $\lambda_n$  e penetração  $\sigma_n$  em função de  $n$ . Observe que os maiores valores de ambos são alcançados para os menores valores de  $n$ , e tanto  $\lambda_n$  quanto  $\sigma_n$  decaem mais lentamente quando  $n$  cresce. Nota-se também que os valores de  $\sigma_n$  são sempre superiores aos de  $\lambda_n$  (veja Eqs.4.21 e 4.22).

Novamente usando o método WKB, podemos obter uma estimativa de quanto o feixe penetra na região de penumbra até cair para um valor em torno de 30% de sua amplitude máxima, para tanto denotamos por  $\sigma_n$  este comprimento de penetração, a saber:

$$\sigma_n \approx \lambda_n \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[ 1 + \frac{(2\pi)^{2/3}}{2} \right] \approx 3.54 \lambda_n. \quad (4.22)$$

Desta forma, podemos concluir que a energia acústica (veja figuras 4.5 e 4.6) penetra na região de penumbra significativamente uma distância superior ao triplo do comprimento de onda  $\lambda_n$ . O comportamento da faixa de abrangência da onda

esvanecente  $\sigma_n$  que é máxima, em torno de 650m, para  $n = 0$  e chega a um valor em torno de 350m para  $n = 60$ .

Ainda das figuras 4.5 e 4.6 vemos que quanto maior o número de modos menores serão os comprimentos de onda modais  $\lambda_n$  e que, conseqüentemente, o número de modos  $n$  aumenta com a profundidade (ou a largura do perfil de Munk). Esse aumento de número de modos se faz até o limite em que passaremos do regime discreto de modos para um regime contínuo, de forma semelhante ao poço de potencial da Mecânica Quântica.

A figura 4.7 mostra o comportamento dos máximos de maior intensidade  $z_{MAX}^n$  dos modos nos limites do guia e os relaciona aos pontos  $z_{30\%}^n$  em que as ondas evanescentes de cada modo tendem a zero. Este regime evanescente corresponde a cerca de 30% do valor da largura do pico principal relacionado aos modos de cada lado da fronteira do guia.

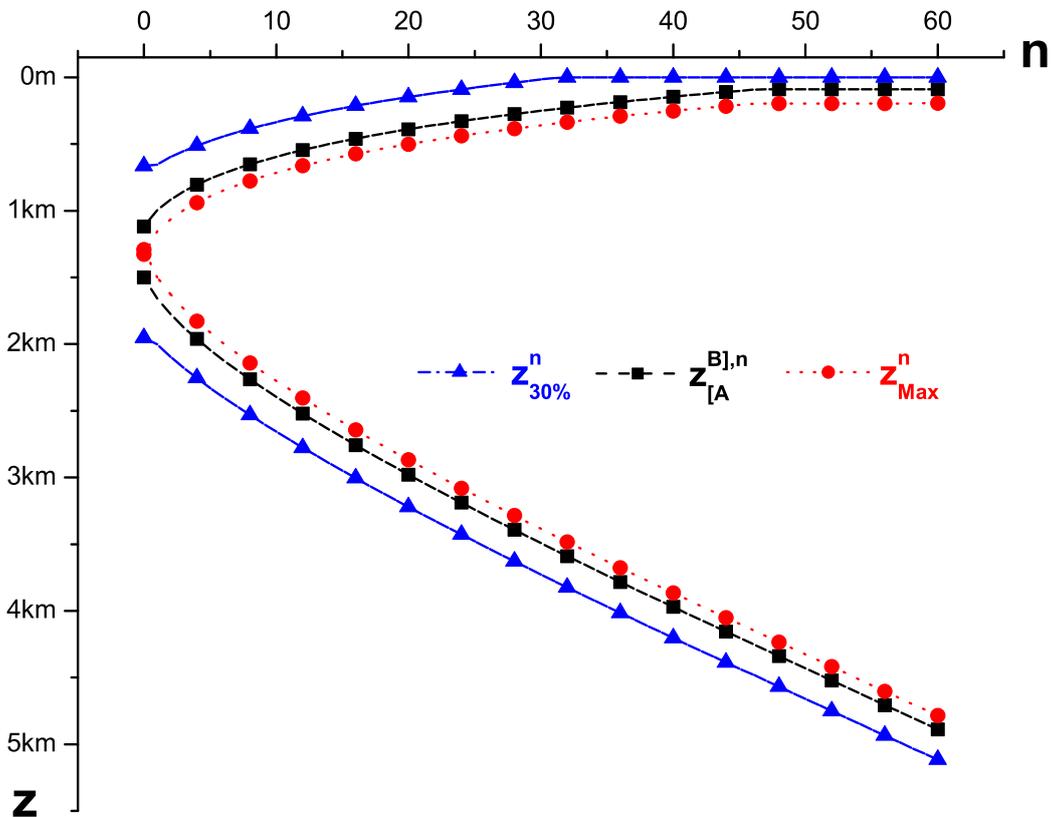


Figura 4.7: Pontos de retorno dos modos possíveis  $n$ , acima e abaixo de  $z_{MAX}^n$ , ao longo do guia de ondas Munk  $z_{[A]}^{[B],n}$ .

A soma dos números de modos acima do ponto mínimo do perfil  $n_A$  com os números de modos abaixo do mesmo ponto de referência  $n_B$  nos leva ao número de modos total  $n$ , como mostrado na figura 4.8.

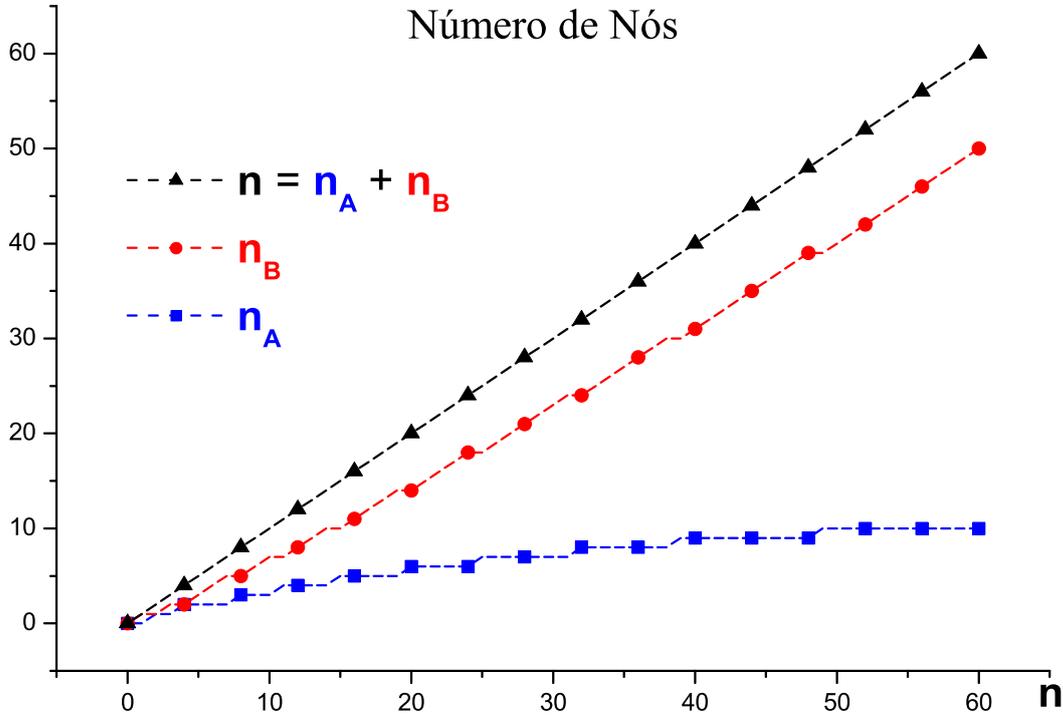


Figura 4.8: Modos propagantes possíveis no guia de ondas Munk tais que  $n = n_A + n_B$ .

Ainda na figura 4.8 podemos associar as inclinações de cada uma das curvas aos comportamentos dos pontos de máximos dos modos  $z_{[A]}^{[B],n}$  e das larguras das faixas  $z_{30\%}^n$  mostrados na figura 4.7.

Por fim de modo similar à teoria desenvolvida em [10], mostra-se que para a condição inicial  $\Psi_n^0$ (4.18), a “envoltória”  $\Psi_n$  do campo  $\Phi_n$ (4.16) satisfaz à seguinte equação:

$$\Psi_n(r, z) = A_n \begin{cases} Ai \left( - \left[ z + r^2 \left( 4z_{\min} k_r^{[n]^2} \lambda_n^3 \right)^{-1} - z_A^{[n]} \right] \lambda_n^{-1} \right) & \text{se } 0 \leq z \leq z_{\min} \\ B_n Ai \left( \left[ z - r^2 \left( 4z_{\min} k_r^{[n]^2} \lambda_n^3 \right)^{-1} - z_B^{[n]} \right] \lambda_n^{-1} \right) & \text{se } z_{\min} < z \end{cases} \quad (4.23)$$

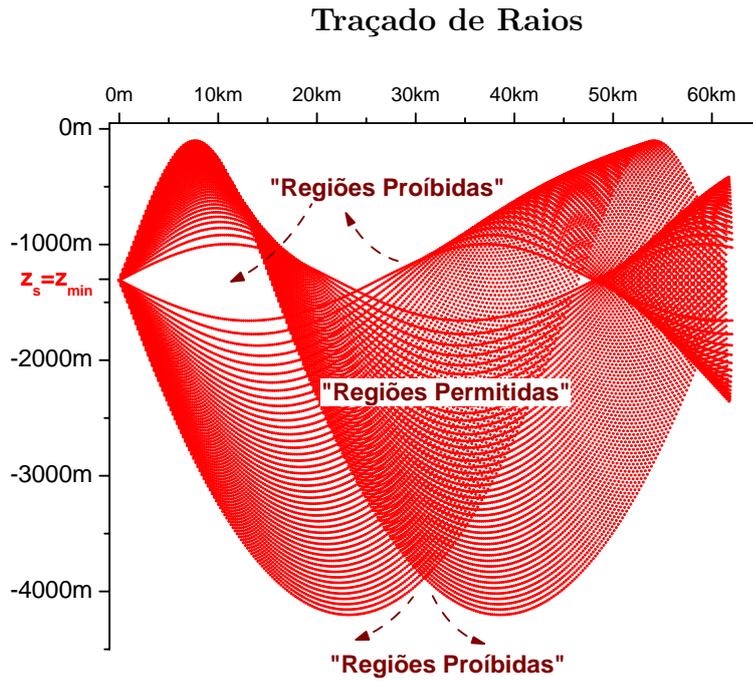
Por outro lado vimos nas seções anteriores que além da extrema sensibilidade do feixe à condição inicial  $\Psi_n^0(4.18)$ ,  $\Phi_n(4.16)$  apresenta comportamento destinto ao se propagar em regiões classicamente permitidas ou proibidas, ou seja na primeira o feixe pode oscilar bastante enquanto na outra ele sempre evanesce.

Para contornar um pouco essas dificuldades inerentes a este tipo de feixe, usaremos a estratégia de associarmos à cada modo  $n$  do perfil de Munk a trajetória  $\Gamma \mapsto \Gamma_n$  de um raio com ângulo de disparo  $\theta_n$ , e que ao menos ao longo de sua propagação tenha percorrido *radialmente meio comprimento de interferência modal*  $L_n$  (veja Fig.4.2). Com isto, esperamos ter garantido uma menor dispersão do feixe, bem como seja mantida a validade da aproximação paraxial (veja Fig.4.3). Neste sentido, nos fornece uma boa visão física quantitativa sobre o comportamento do feixe  $\Phi_n(4.16)$  ao se propagar sobre  $\Gamma_n$ , o cálculo de suas “perdas por transmissão”  $TL_{\Gamma_n}$ , a saber[32]:

$$TL_{\Gamma_n} \equiv 20 \log_{10} \left( \left| \frac{\Phi_n(r(\Gamma_n), z(\Gamma_n))}{\Phi_n^s} \right| \right), \quad (4.24)$$

onde  $\Phi_n^s$  é o valor de referência do feixe ao equivalente em pressão irradiada de  $1\mu\text{Pa}$  à uma distância de  $r = 1m$  além da posição da fonte em  $z = z_s$ [32]. Sendo assim dentro da aproximação WKB, para primeiramente caracterizar as regiões classicamente permitidas e proibidas do guia de Munk com  $f = 50\text{Hz}$ , foram traçadas as trajetórias  $\Gamma_n$  dos raios com ângulos de disparo  $\theta_n$  que percorreram ao menos uma distância radial de  $L_n$  (veja figura 4.9.a). Posteriormente, calculamos sobre os pontos das trajetórias  $\Gamma_n$  (veja figura 4.9.b) os valores da  $TL_{\Gamma_n}(4.24)$ . Como os comprimentos de onda  $\lambda_n$  e penetração  $\sigma_n$  variam com  $n$  (veja figura 4.6), várias regiões do guia de Munk podem ser “sonificadas”, não só aquelas classicamente permitidas mas também grandes extensões das regiões proibidas (veja Fig4.9.a e b).

a)



b)

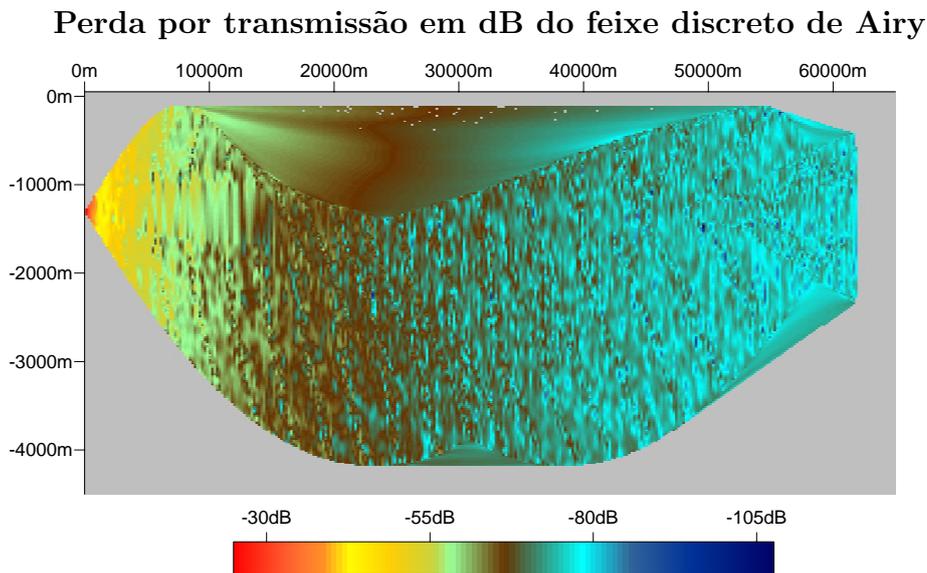


Figura 4.9: Mostra para o perfil de Munk(4.4) e  $f = 50Hz$ , em a) as possíveis trajetórias  $\Gamma_n$  dos raios acústicos associadas ao conjunto discreto de ângulos de disparo  $\theta_n$ , com  $0 < |\theta_n| < 15^\circ$  e  $0 \leq n \leq 60$ . Observe que tais trajetórias  $\Gamma_n$  delimitam as regiões classicamente permitidas e proibidas. Em b) é mostrado um mapa de cores (em dB), representando as perdas de transmissão  $TL_{\Gamma_n}$ (4.24), estas relativas a um dado feixe discreto de Airy  $\Phi_n$  propagando-se sobre uma dada trajetória  $\Gamma_n$ . Observe que para feixes discretos de Airy  $\Phi_n$ , a energia acústica se propaga nas regiões classicamente permitidas como também penetra substancialmente nas proibidas.

Por fim, cabe aqui salientar um pouco mais o pioneirismo e relevância da presente teoria de feixes de Airy ser capaz de sonificar por meio de uma calda evanescente regiões classicamente proibidas. Por exemplo, observa-se na literatura [32] que mesmo na descrição da propagação sonora por meio de equações parabólicas, a sonificação das regiões classicamente proibidas é bastante tênue. Vemos isto na figura 4.10, modificada a partir de códigos retirados da OALIB <sup>1</sup>. Tal figura, foi gerada com características semelhantes às utilizadas na construção do feixe discreto de Airy, e permite a comparação entre as duas teorias utilizadas, a de equações parabólicas em fig. 4.10 e a teoria de feixe de Airy discreto exposta na fig.4.9.

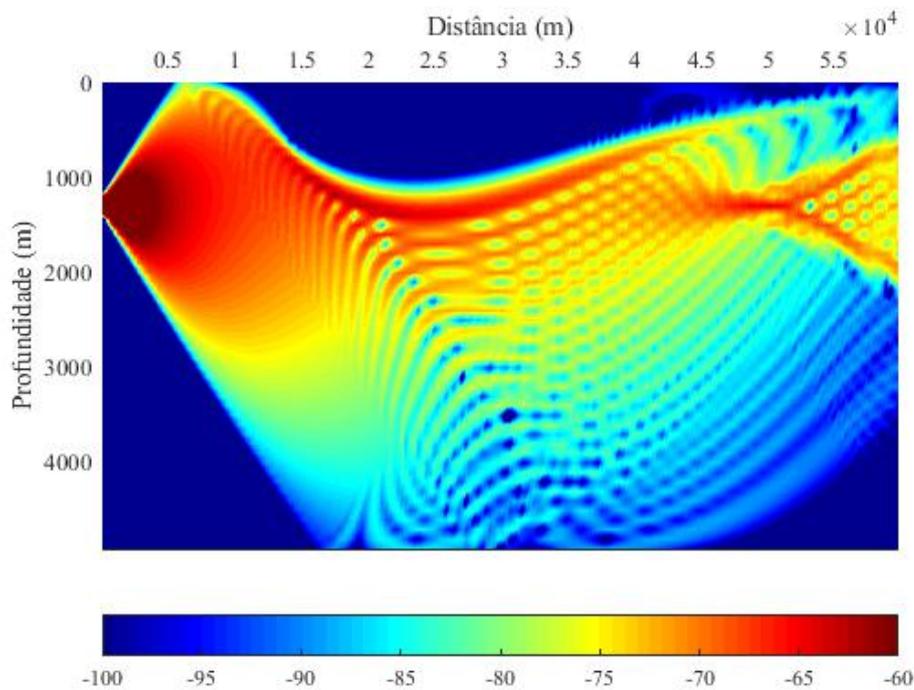


Figura 4.10: Mostra para o perfil de Munk, um mapa de cores (em dB) representando a perda por transmissão com  $f = 50\text{Hz}$  descrita pela teoria de equações parabólicas[32], observe a pouca penetração da energia acústica nas regiões classicamente proibidas.

No próximo capítulo iremos sumarizar nossos principais resultados bem como tentaremos discutir as possíveis perspectivas futuras deste trabalho.

<sup>1</sup> A *Ocean Acoustics Library* (OALIB) oferece vasto material na área de acústica submarina e o código utilizado na geração da figura 4.10 foi retirado do endereço eletrônico <http://oalib.hlsresearch.com/Other/demo/>.

# Capítulo 5

## Discussões e Conclusões

Neste trabalho, baseados nas ideias pioneiras de Berry e Balazs [10, 11] desenvolvemos um modelo que mostra ser possível feixes de Airy se propagarem a longas distâncias sonificando vastas regiões de um oceano profundo (veja Fig.4.9). Para tanto, utilizamos técnicas para propagação do campo de pressão que, embora façam uso de teorias há muito conhecidas como a teoria de raios, WKB e de modos, utilizamos também alguns outros conceitos da Física Quântica[10]. Neste sentido com a utilização da função de Airy, construímos um feixe pouco dispersivo que penetra em regiões de cáustica e de sombras. De modo que, na construção do modelo tivemos primeiramente que adequar tais feixes às características fundamentais dos modos propagantes do guia acústico de Munk(4.4). Mais explicitamente falando, nesta etapa calculamos dentro do formalismo WKB(4.5) os números de onda radiais discretos  $k_r^{[n]}$  e respectivos pontos de retorno ( $z_A^{[n]}$  e  $z_B^{[n]}$ ) associados a um dado modo  $n$  do guia de Munk (veja Figs.4.4 e 4.5). Em seguida, para usar a equivalência entre as teorias de modo e raios [20], associamos à cada  $k_r^{[n]}$  direções  $\theta_n$  preferenciais de saída de cada raio a partir de uma fonte posicionada em  $z = z_s$  (veja Figs.4.3, 4.4 e 4.5).

Por fim como mostra a figura 4.9, analisamos para  $f = 50Hz$  a propagação do feixe discreto de Airy (veja equações 4.16 e 4.23) ao longo da trajetória  $\Gamma_n$  de cada um destes raios particulares, e verificamos que a energia acústica se propaga nas regiões classicamente permitidas e penetra substancialmente nas classicamente proibidas

(veja figura 4.9), fato que não é previsto (veja figura 4.10) em modelos citados na literatura [47], que serviram inclusive como referência inicial para o desenvolvimento deste trabalho.

Observando o comportamento assintótico do feixe discreto de Airy (veja Eqs.4.16 e 4.23), cabe aqui também salientar que espera-se que no limite de "águas rasas" ( $|z - z_s| \ll r$ ), as perdas deste tipo de feixe de Airy decaiam com o quadrado da distância fonte receptor, diferentemente da perda por divergência cilíndrica (do inverso da distância) apresentada pela teoria de modos.

A figura 5.1 mostra uma comparação do modelo desenvolvido neste trabalho com os já estabelecidos que envolvem a teoria de raios e de modos normais.

Tipo de modelo	Aplicações							
	Águas rasas				Águas profundas			
	Baixa frequência		Alta frequência		Baixa frequência		Alta frequência	
	<i>RI</i>	<i>RD</i>	<i>RI</i>	<i>RD</i>	<i>RI</i>	<i>RD</i>	<i>RI</i>	<i>RD</i>
Teoria de raios								
Modos normais								
Feixe Discretos de Airy								

Alta frequência -  $> 500\text{hz}$

*RI* - Range-independent

Baixa frequência -  $< 500\text{hz}$

*RD* - Range-dependent



Aplicações sem restrições teóricas ou práticas



Limitações teóricas ou excessivo tempo computacional



Sem aplicação

Figura 5.1: Domínios de aplicabilidade dos modelos baseados na teoria de raios, na teoria dos modos normais e teoria de feixes discretos de Airy, para a propagação acústica submarina(adaptado de [27]).

Por outro lado, apesar de seu custo computacional ser um pouco elevado (algumas horas em um notebook com um processador I5 intel com 32GB ram), pois o cálculo do feixe discreto de Airy na equação 4.24 requer previamente o uso de alguns métodos numéricos (em precisão estendida) tanto no desenvolvimento da teoria WKB quanto no traçamento posterior dos raios relativos a estes dados, acreditamos

que a presente teoria de feixe discreto de Airy possa aprimorar a acurácia em alguns problemas de inversão em tomografia acústica oceanográfica [36]. Mais explicitamente falando, mostramos aqui que os feixes de Airy discretos transportam energia acústica tanto em regiões classicamente permitidas como em proibidas com tempos modais equivalentes a tempos de trânsito (veja figura 4.2), podemos desta forma usar este fato para adaptarmos os algoritmos usuais da tomografia por tempo de trânsito [14, 36, 46] aos dados obtidos de amplitude e tempo com a presente teoria de feixes discretos de Airy. Desenvolvimentos futuros estes que acreditamos poder aplicar não só em acústica submarina e áreas afins, como à comunicação acústica no oceano como também na sondagem sísmica de sub-superfície. Esforços neste sentido estão sendo feitos e planejados para serem publicados brevemente.

# Referências Bibliográficas

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. No. 55. Courier Corporation, 1964.
- [2] AHLUWALIA, D. S., AND KELLER, J. B. Exact and asymptotic representations of the sound field in a stratified ocean. In *Wave Propagation and Underwater Acoustics*. Springer, 1977, pp. 14–85.
- [3] ALDA, J. Laser and gaussian beam propagation and transformation. *Encyclopedia of optical engineering* (2003), 999–1013.
- [4] BANDRES, M. A., AND GUTIERREZ-VEGA, J. C. Airy-gauss beams and their transformation by paraxial optical systems. *Optics Express* 15, 25 (2007), 16719–16728.
- [5] BANDRES, M. A., AND GUTIÉRREZ-VEGA, J. C. Airy-gauss beams and their transformation by paraxial optical systems. *Optics Express* 15, 25 (2007), 16719–16728.
- [6] BANDRES, M. A., AND GUTIÉRREZ-VEGA, J. C. Airy-gauss beams and their transformation by paraxial optical systems. *Optics Express* 15, 25 (2007), 16719–16728.
- [7] BAR-ZIV, U., POSTAN, A., AND SEGEV, M. Observation of shape-preserving accelerating underwater acoustic beams. *Physical Review B* 92, 10 (2015), 100301.
- [8] BARNES, F., AND PAVANI, S. R. P. Optical waveguide analysis using beam propagation method. *Term Paper for Introduction to Optoelectronics* (2006).
- [9] BAXLEY, P. A., BUCKER, H., AND PORTER, M. B. Comparison of beam tracing algorithms. In *Proceedings of the 5th European Conference on Underwater Acoustics, Lyon* (2000), pp. 27–32.
- [10] BERRY, M., AND BALAZS, N. Nonspreading wave packets. *Am. J. Phys* 47, 3 (1979), 264–267.

- [11] BERRY, M. V. Tsunami asymptotics. *New Journal of Physics* 7, 1 (2005), 129.
- [12] BESIERIS, I. M., AND SHAARAWI, A. M. A note on an accelerating finite energy airy beam. *Optics letters* 32, 16 (2007), 2447–2449.
- [13] BESIERIS, I. M., SHAARAWI, A. M., AND ZIOLKOWSKI, R. W. Nondispersive accelerating wave packets. *American Journal of Physics* 62, 6 (1994), 519–521.
- [14] BLEISTEIN, N. *Mathematics of modeling, migration and inversion with Gaussian beams*. 2008.
- [15] BREKHOVSKIKH, L. M., LYSANOV, Y. P., AND BEYER, R. T. *Fundamentals of ocean acoustics*. Springer, 2001.
- [16] BROKY, J., SIVILOGLOU, G. A., DOGARIU, A., AND CHRISTODOULIDES, D. N. Self-healing properties of optical airy beams. *Opt. Express* 16, 17 (Aug 2008), 12880–12891.
- [17] BUCKER, P. H. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.* (1987), 1349–1359.
- [18] BUTKOV, E. *Física Matemática*. LTC, Rio de Janeiro, 1998.
- [19] CERVENY, V. *Seismic ray theory*. Cambridge university press, 2005.
- [20] CHAPMAN, D. M., AND ELLIS, D. D. The group velocity of normal modes. *The Journal of the Acoustical Society of America* 74, 3 (1983), 973–979.
- [21] CHEN, R.-P., AND YING, C.-F. Beam propagation factor of an airy beam. *Journal of Optics* 13, 8 (2011), 085704.
- [22] CRAIK, A. D. The origins of water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 36 (2004), 1–28.
- [23] CUNHA, P. E. M. *Imageamento sísmico por propagação de ondas no limite de altas e baixas frequências*. PhD thesis, COPPE-UFRJ, 2005.
- [24] DEAN, ROBERT G., D. R. A. *Advanced Series on Ocean Engineering - Water Wave Mechanics for Engineers and scientists*.
- [25] DIRAC, P. A. M. *The principles of quantum mechanics*. No. 27. Oxford university press, 1981.

- [26] DURBIN, J., MICELI JR, J., AND EBERLY, J. Diffraction-free beams. *Physical review letters* 58, 15 (1987), 1499.
- [27] ETTER, P. C. *Underwater acoustic modeling and simulation*. CRC Press, 2013.
- [28] FEYNMAN, R. P., AND HIBBS, A. R. *Quantum mechanics and path integrals*, vol. 2. McGraw-Hill New York, 1965.
- [29] FU, S., ZHOU, J., LI, Y., SHEMER, L., AND ARIE, A. Dispersion management of propagating waveguide modes on the water surface. *Physical review letters* 118, 14 (2017), 144501.
- [30] GOODMAN, J. W. *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [31] HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E., ZAMBONI-RACHED, M., AND RECAMI, E. *Non-diffracting Waves*. John Wiley & Sons, 2013.
- [32] JENSEN, F. B. *Computational ocean acoustics*. Springer Science & Business Media, 1994.
- [33] KALNINS, E. G., AND MILLER JR, W. Lie theory and separation of variables. 5. the equations  $iut + u_{xx} = 0$  and  $iut + u_{xx} - c/x^2u = 0$ . *Journal of Mathematical Physics* 15, 10 (1974), 1728–1737.
- [34] KEMBLE, E. C. The fundamental principles of quantum mechanics.
- [35] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Course of Theoretical Physics Vol 3 Quantum Mechanics*. Pergamon Press, 1958.
- [36] MARIN, F. O., RODRÍGUEZ, O. C., GUIMARÃES, L. G., AND RIBEIRO, C. E. P. Modal inversion by using parameterization with chebyshev polynomials. *Revista Brasileira de Geofísica* 34, 3 (2016), 385–392.
- [37] MEDWIN, HERMAN, C. C. S. *Fundamentals of acoustical oceanography*. Academic Press, 1998.
- [38] MEI, C. C. *The applied dynamics of ocean surface waves*, vol. 1. World scientific, 1989.
- [39] MEI, CHIANG C., S. M. Y. D. K. P. *Advanced Series on Ocean Engineering - Theory and Applications of Ocean Surface Waves*, vol. 23. World Scientific, 2000.
- [40] MERZBACHER, E. Quantum mechanics.

- [41] MESSIAH, A. *Quantum mechanics*. vol. i., 1958.
- [42] MICKELSON, A. *Physical optics*. Springer Science and Business Media, 2012.
- [43] MULLER-KIRSTEN, H. J. *Introduction to quantum mechanics: Schrodinger equation and path integral*. World Scientific, 2006.
- [44] MUNK, W. H. Sound channel in an exponentially stratified ocean, with application to sofar. *The Journal of the Acoustical Society of America* 55, 2 (1974), 220–226.
- [45] OSBORNE, A. *Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform*, vol. 97. Academic Press, 2010.
- [46] POPOV, M. M. *Ray theory and Gaussian beam method for geophysicists*. Eudfba, 2002.
- [47] PORTER, M. B., AND BUCKER, H. P. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields. *The Journal of the Acoustical Society of America* 82, 4 (1987), 1349–1359.
- [48] RODRIGUEZ, O. C. The trace and traceo ray tracing programs. *SiPLAB Web page: [www.siplab.fct.ualg.pt/models.shtml](http://www.siplab.fct.ualg.pt/models.shtml)* (2008).
- [49] RODRIGUEZ-LARA, B. M. On optical weber waves and weber-gauss beams. *arXiv preprint arXiv:0911.2295* (2009).
- [50] SALANDRINO, A., AND CHRISTODOULIDES, D. Airy plasmons defeat diffraction on the surface. *Physics* 4 (2011), 69.
- [51] SIEGMAN, A. E. *LASERS*. University Science Books, 1989.
- [52] SIVILOGLOU, G. Accelerating optical airy beams.
- [53] SIVILOGLOU, G. A., AND CHRISTODOULIDES, D. N. Accelerating finite energy airy beams. *Optics Letters* 32, 8 (2007), 979–981.
- [54] TAYLOR, J. R. *Mecânica Clássica*. Bookman, Porto Alegre, 2013.
- [55] UNNIKRISHNAN, K., AND RAU, A. Uniqueness of the airy packet in quantum mechanics. *American Journal of Physics* 64, 8 (1996), 1034–1035.
- [56] VALLEE, O., AND SOARES, M. *Airy functions and applications to physics*. Imperial College Press, 2004.
- [57] YARIV, A. *Optical Electronics*. Holt Rinehart and winston, 1985.

- [58] ZILIO, S. C. *Óptica Moderna Fundamentos e Aplicações*. IFSC-USP Fotônica, São Carlos, 2009.