



ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS ERROS DE MODELAGEM NO DESEMPENHO  
DE SISTEMAS DE CONTROLE

Lívia Pereira Lemos Costa

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Química.

Orientador: José Carlos Costa da Silva Pinto

Rio de Janeiro

Agosto de 2018

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS ERROS DE MODELAGEM NO DESEMPENHO  
DE SISTEMAS DE CONTROLE

Lívia Pereira Lemos Costa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA QUÍMICA.

Examinada por:

---

Prof. José Carlos Costa da Silva Pinto, D.Sc.

---

Dr. Antônio Carlos Zanin, D. Sc.

---

Dr. Mário César Melo Massa de Campos, D. Sc.

---

Prof. Maurício Bezerra de Souza Junior, D. Sc.

---

Dr. Thiago de Sá Feital, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2018

Costa, Livia Pereira Lemos

Análise da Influência dos Erros de Modelagem no Desempenho de Sistemas de Controle/ Livia Pereira Lemos Costa. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XI, 238 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: José Carlos Costa da Silva Pinto

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Química, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 211-219.

1. Controle preditivo. 2. MPC. 3. Modelagem. 4. Sintonia. 5. Desempenho. I. Pinto, José Carlos Costa da Silva. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Química. III. Título.

*À minha avó Lourdes*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas inúmeras bênçãos em minha vida.

Aos meus avós, Lourdes e Luiz, pelo amor, sabedoria e dedicação.

À minha mãe Viviane, pelo amor e ajuda incondicionais.

Ao meu marido, Cristhian, pelo companheirismo e incentivo, e ao meu filho, Bento, por encher minha vida de amor.

À minha irmã, Gláucia, e ao meu sobrinho, Levi, pelo carinho e alegria.

A toda a minha família, pelo amor e carinho.

À minha amiga Luciana, pela grande amizade e por estar sempre presente de alguma forma.

Ao meu orientador, Zé Carlos, pela orientação, apoio e confiança com que sempre pude contar.

Aos amigos da Petrobras, pela compreensão, pelas discussões técnicas e pessoais e por terem alegrado meus dias. Em especial, aos amigos Bruna, Denise, Fábio, Gregório, Jacques, Leonardo, Luiz Paulo, Mário, Marcos, Natã e Patrícia, pela longa convivência.

Aos colegas, funcionários e professores do Programa de Engenharia Química da COPPE.

À Petrobras, pelo suporte para a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS ERROS DE MODELAGEM NO DESEMPENHO DE SISTEMAS DE CONTROLE

Lívia Pereira Lemos Costa

Agosto/2018

Orientador: José Carlos Costa da Silva Pinto

Programa: Engenharia Química

O uso de sistemas de controle e otimização baseados em modelo apresenta grande potencial para aumentar a eficiência e a lucratividade de processos industriais. Por isso, é crescente o emprego e o interesse por estas técnicas. O desempenho de sistemas baseados em modelo, como no caso de controladores preditivos, depende de vários fatores que determinam a qualidade do modelo identificado e a sintonia utilizada. É importante ressaltar que, ao tratar de processos industriais complexos, a modelagem proposta para essas aplicações quase sempre envolve uma série de simplificações. Uma análise da literatura mostra que ainda há muitas questões teóricas e práticas relacionadas ao uso de controladores preditivos que precisam ser estudadas. Em especial, as relações entre a modelagem proposta e a sintonia e o desempenho de controladores não estão completamente elucidadas e exploradas. Por isso, nesta tese são analisados aspectos que relacionam a modelagem e a sintonia desses sistemas de controle, com foco no desempenho dos controladores para modelos do tipo resposta ao degrau. A partir dos estudos teóricos realizados, foram propostas novas metodologias para projeto e sintonia de controladores, bem como para a determinação da relevância de modelos. Ao longo do trabalho, os aspectos teóricos e as metodologias foram aplicados a exemplos para validação. As metodologias propostas foram aplicadas em exemplos de validação que mostraram que é possível relacionar os parâmetros de sintonia com medidas quantitativas de desempenho dos modelos, como os erros paramétricos resultantes da fase de identificação.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## INFLUENCE OF MODELLING ERRORS ON THE PERFORMANCE OF CONTROL SYSTEMS

Lívia Pereira Lemos Costa

August/2018

Advisor: José Carlos Costa da Silva Pinto

Department: Chemical Engineering

The use of model-based control and optimization systems presents high potential to increase the efficiency and profitability of industrial processes. Therefore, the use and interest in these techniques have grown up steadily. Particularly, the performance of model based systems, as predictive controllers, depends on several factors that affect the quality of the estimated model and the selected tuning procedures. It is important to notice that, when dealing with complex industrial processes, the model building process often involves a large number of simplifications. The analysis of the open literature shows that many theoretical and practical issues related to the use of predictive controllers still need to be studied. In particular, the relationship among modelling, tuning and control performance is not completely explained and explored. Thus, in this thesis the relationship between modelling and tuning issues is analyzed, focusing at the controller performance when step response models are used. Based on the theoretical studies, new methods have been proposed for controller design and tuning and for the determination of the model relevance. The proposed methods were then applied in validation examples which showed that it is possible to relate the tuning parameters with quantitative measures of model performances, such as the parameter variances estimated during the model identification phase.

## ÍNDICE

<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>X</b>
<b>LISTA DE ABREVIATURAS .....</b>	<b>XI</b>
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 2 CONTROLE E OTIMIZAÇÃO BASEADOS EM MODELO.....</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução .....	4
2.2 Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC).....	7
2.3 Identificação de Processos .....	11
2.3.1 Planejamento de Testes .....	12
2.3.2 Estrutura do Modelo .....	15
2.3.3 Estimação dos Parâmetros .....	19
2.3.4 Validação do Modelo .....	21
2.4 Sintonia de Controladores Preditivos.....	23
2.5 Comentários Finais .....	24
<b>CAPÍTULO 3 LIMITAÇÕES E DESAFIOS PARA EMPREGO DE CONTROLADORES PREDITIVOS .....</b>	<b>25</b>
3.1 Introdução .....	25
3.2 Histórico de Problemas e Necessidades em Sistemas de MPC .....	25
3.3 Metodologias com Foco no Controle.....	29
3.3.1 Controle Robusto.....	32
3.4 Comentários Finais .....	37
<b>CAPÍTULO 4 CARACTERIZAÇÃO DA INFLUÊNCIA DE ERROS DE MODELAGEM E SINTONIA NO DESEMPENHO DE SISTEMAS MPC.....</b>	<b>39</b>
4.1 Controle Preditivo Aplicado a uma Desbutanizadora – Estudo de Caso 1 .....	39
4.2 Análise da Região de Confiança– Estudo de Caso 2 .....	48
4.2.1 Caracterização do Problema Proposto com Diferentes Projetos de Experimentos	49
4.2.2 Influência da Sintonia.....	60
4.2.3 Influência do Projeto de Testes GBN em Conjunto com a Sintonia .....	64
4.2.4 Influência da Precisão dos Modelos .....	68
4.3 Comentários Finais .....	69
<b>CAPÍTULO 5 ESTUDOS ANALÍTICOS 1 – CÁLCULO DOS DESVIOS DA AÇÃO DE CONTROLE DE UM SISTEMA MPC .....</b>	<b>70</b>
5.1 Caso SISO com Horizontes Reduzidos.....	70
5.2 Caso SISO com Horizontes Ampliados.....	74
5.3 Caso SISO com Horizontes Genéricos .....	87
5.4 Caso MIMO com Horizontes Genéricos.....	90
5.5 Comentários Finais .....	98
<b>CAPÍTULO 6 ESTUDOS ANALÍTICOS 2 – CÁLCULO E ANÁLISE DOS POLOS DE UM SISTEMA MPC EM MALHA FECHADA .....</b>	<b>99</b>
6.1 Introdução .....	99
6.2 Caso SISO com Erro no Ganho .....	100
6.2.1 Condição Assintótica.....	101
6.2.2 Cálculo dos Polos do Sistema em Malha Fechada .....	107
6.2.3 Condições de Estabilidade.....	116
6.2.4 Modelagem dos polos.....	120
6.3 Caso MIMO com Erro no Ganho.....	129

6.3.1	Condição Assintótica.....	130
6.3.2	Cálculo dos Polos do Sistema em Malha Fechada .....	131
6.3.3	Condições de Estabilidade.....	133
6.3.4	Exemplos .....	135
6.4	Caso SISO Generalizado .....	147
6.4.1	Análise da Região de Confiança dos Polos do Sistema em Malha Fechada .....	150
6.5	Caso MIMO Generalizado.....	152
6.6	Proposta de Índice.....	157
6.6.1	Avaliação dos Projetos de Testes sob Enfoque do Novo Índice .....	160
6.7	Estudo Monte Carlo SISO .....	162
6.8	Propagação de Erros SISO (Casos Particulares).....	166
6.8.1	Erro no Modelo da Planta ( <i>Bias</i> ou <i>Variância</i> ).....	166
6.8.2	Sensibilidade ao Parâmetro de Sintonia .....	169
6.9	Comentários Finais .....	173
<b>CAPÍTULO 7 METODOLOGIAS.....</b>		<b>175</b>
7.1	Introdução .....	175
7.2	Projeto simplificado de controladores .....	175
7.2.1	Baseado em Aproximação para Erro por Fator Multiplicativo do Ganho.....	175
7.2.2	Baseado em Índice.....	182
7.3	Análise de um processo baseado em quatro tanques .....	185
7.4	Sintonia de MPC.....	189
7.5	Determinação de modelos relevantes.....	196
7.6	Comentários Finais .....	206
<b>CAPÍTULO 8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS ..</b>		<b>208</b>
8.1	Conclusões.....	208
8.2	Sugestões para Trabalhos Futuros .....	210
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>		<b>211</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>		<b>220</b>
<b>APÊNDICE B .....</b>		<b>224</b>
<b>APÊNDICE C .....</b>		<b>229</b>
<b>APÊNDICE D .....</b>		<b>233</b>
<b>APÊNDICE E .....</b>		<b>237</b>

# Lista de Símbolos

$\alpha_i$	Raízes do polinômio
$a_i$	Coefficientes do polinômio
$c_l$	Elementos da primeira linha da matriz de controle
$C$	Soma dos elementos da primeira linha da matriz de controle
$\Delta U$	Ações de controle nas variáveis manipuladas
$\hat{D}$	<i>Bias</i> da predição das variáveis controladas
$\hat{E}$	Erros nas variáveis controladas
$HC$	Horizonte de controle
$HP$	Horizonte de predição
$K$	Fator multiplicativo de erro de modelagem
$\underline{K}_C$	Matriz de controle
$K_p$	Ganho
$P$	Parâmetro de sintonia no caso SISO
$\underline{Q}$	Parâmetros de sintonia das variáveis controladas
$\underline{R}$	Parâmetros de sintonia das variáveis manipuladas (supressão de movimento)
$s_i$	Coefficientes do modelo de resposta ao degrau
$\underline{S}$	Matriz dinâmica
$\tau$	Constante de tempo
$x^*$	Raiz real
$\hat{Y}$	Predições em malha fechada
$\hat{Y}^*$	Predições em malha aberta
$\underline{Y}^{SP}$	<i>Setpoints</i> das variáveis controladas

## Lista de Abreviaturas

AIC	Critério de Akaike
ARX	Modelo Autorregressivo com Entradas Exógenas
ARMAX	Modelo Autorregressivo com Média Móvel e Entradas Exógenas
CLOE	<i>Closed-loop output error</i>
DMC	<i>Dynamic Matrix Control</i>
DRTO	Otimização Dinâmica em Tempo Real
FIR	Modelo de Resposta ao Impulso Finito
FPE	Erro Final de Predição
GBN	<i>Generalized Binary Noise</i>
IAE	Integral do Erro Absoluto
ISE	Integral do Erro Quadrático
ITAE	Integral do Erro Absoluto Ponderado pelo Tempo
LQG	Regulador Linear Quadrático Gaussiano
MIMO	<i>Multiple input multiple output</i>
MPC	Controle preditivo baseado em modelo
NMPC	Controle preditivo baseado em modelo não-linear
PRBS	Sinais binários pseudo-aleatórios
RPN	<i>Robustness Performance Number</i>
RTO	Otimização em Tempo Real
SISO	<i>Single input single output</i>

# Capítulo 1 Introdução

O uso de técnicas de controle avançado e otimização baseadas em modelos vem mostrando grande potencial para aumentar o lucro e a eficiência energética em unidades industriais. No entanto, para que o emprego destas técnicas seja bem sucedido, é fundamental obter modelos que representem bem o processo em questão e escolher regras de sintonia adequadas (GARCÍA *et al.*, 1989; DARBY e NIKOLAOU, 2012; GARRIGA e SOROUSH, 2010).

Em particular, controladores preditivos têm sido amplamente utilizados na indústria de processos, sobretudo nos setores químico e petroquímico (QIN e BADGWELL, 1997; QIN e BADGWELL, 2003; KOZÁK, 2014; FORBES *et al.*, 2015). Por serem baseados em modelo, o desempenho de controladores preditivos é fortemente relacionado com a qualidade dos modelos utilizados (LIU *et al.*, 2017; TUFA e KA, 2016; BADWE *et al.*, 2010). No entanto, a obtenção de modelos que representem bem o processo, com o auxílio de técnicas de identificação, muitas vezes não constitui uma tarefa simples. Em especial, na indústria de processos químicos é comum encontrar processos com características complexas, que acabam sendo representados por modelos de estrutura consideravelmente mais simples que a real (BADWE *et al.*, 2010).

Por outro lado, os parâmetros de sintonia utilizados nos esquemas de controle e otimização também afetam significativamente o desempenho dos controladores preditivos, uma vez que os cálculos executados pelo controlador são parametrizados pela sintonia particular adotada, resultando em diferentes soluções. A depender destes fatores, o sistema de controle pode otimizar e reduzir a variabilidade do processo, mas também pode provocar instabilidades (BAGHERI e KHAKI-SEDIGH, 2011).

Uma análise da literatura mostra que ainda existem muitas questões em aberto do ponto de vista teórico e prático envolvendo a relação entre os procedimentos usados para a identificação de processos e o desempenho do sistema de controle, como questões associadas à acurácia necessária, à degradação do desempenho dos modelos e à sintonia dos controladores preditivos (ASTROM e EYKHOFF, 1971; DARBY e

NIKOLAOU, 2012; ZHU *et al.*, 2013; KANO e OGAWA, 2010; FORBES *et al.*, 2015). Deve ser dada, portanto, atenção tanto para a qualidade do modelo proposto quanto para os parâmetros de sintonia adotados nos sistemas de controle, caso se deseje obter o melhor desempenho possível do sistema de controle preditivo.

Com base nesse cenário, no presente trabalho são explorados aspectos relacionados à precisão do modelo e à sintonia de modo a desenvolver uma estrutura teórica que possa contribuir com a modelagem e a análise dos modelos utilizados, bem como com a escolha da sintonia a ser empregada, tendo sempre em vista a atuação do sistema de controle. Assim, no Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica genérica sobre aspectos de controle e otimização de processos, sendo mostrado o panorama geral da área de controle e otimização baseada em modelo. Em especial, o uso da técnica de controle preditivo é abordado, mencionando-se as etapas usualmente envolvidas na aplicação de um sistema deste tipo. O Capítulo 3 trata mais especificamente das limitações encontradas para o emprego de controladores preditivos e das principais necessidades e desafios presentes nesta área. Neste capítulo são citados alguns trabalhos que tentam estabelecer relações importantes entre identificação, sintonia e desempenho do controlador. O Capítulo 4 envolve a utilização de estudos de caso em que foram explorados aspectos de identificação, sintonia e desempenho do controlador para ajudar a caracterizar os problemas que serão abordados. Em um dos estudos de caso apresentados neste capítulo é proposta uma análise com enfoque diferenciado, baseada na propagação de erros e no cálculo da região de confiança das ações do controlador. Os resultados apresentados neste capítulo servem como motivação e evidenciam a importância da modelagem e dos parâmetros de sintonia para uma atuação adequada do sistema de controle preditivo. No Capítulo 5 são apresentados os resultados de um estudo analítico baseado no cálculo dos desvios da ação de controle de um controlador preditivo. A análise é realizada tanto em problemas mais simples (SISO, com horizontes curtos) quanto em problemas mais complexos (MIMO, com horizontes genéricos). No Capítulo 6 são apresentados os resultados associados ao cálculo dos polos do sistema em malha fechada. O desenvolvimento algébrico proposto é realizado para os casos SISO e MIMO, sendo também proposta a modelagem do comportamento dos polos para casos particulares. Algumas metodologias baseadas no desenvolvimento teórico do Capítulo 6 são propostas no Capítulo 7. As aplicações envolvem o projeto e sintonia de controladores preditivos, além da detecção de modelos

relevantes e da precisão requerida. O Capítulo 8 compreende as principais conclusões obtidas e a apresentação de sugestões para trabalhos futuros.

As análises realizadas neste trabalho evidenciam e buscam quantificar a influência dos erros de modelagem e da sintonia adotada nas ações de um controlador baseado em modelo. A partir destes estudos, o maior polo em módulo do sistema em malha fechada é proposto como um índice capaz de caracterizar a estabilidade e o desempenho do sistema, sendo utilizado em grande parte das metodologias propostas de modo a orientar a escolha da sintonia na presença de erros e a determinar os modelos mais importantes em cenários multivariáveis.

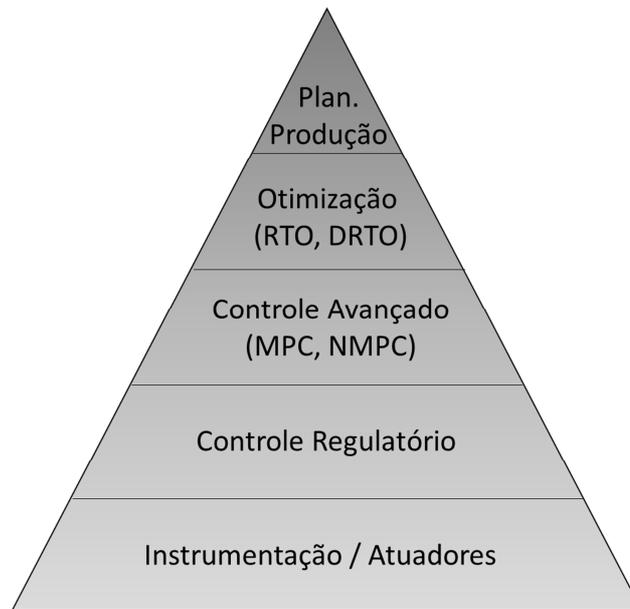
Essa tese foi desenvolvida no Laboratório de Modelagem, Simulação e Controle de Processos (LMSCP) do Programa de Engenharia Química (PEQ) da COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). O trabalho contou também com o apoio técnico da empresa Petróleo Brasileiro S.A. (Petrobras).

# Capítulo 2 Controle e Otimização Baseados em Modelo

Neste capítulo são abordados conceitos gerais sobre controle e otimização baseados em modelo. De forma mais específica, são apresentados aspectos da Teoria de Controle Preditivo Multivariável, bem como as etapas necessárias para a implementação de controladores preditivos. Não é feita, contudo, uma revisão exaustiva da área, dada a amplitude do tema e a existência de muitas compilações clássicas sobre o assunto (SEBORG *et al.*, 1989; RAY e OGUNNAIKE, 1994; LJUNG, 1999; CAMACHO e BORDONS, 2007; CAMPOS *et al.*, 2013).

## 2.1 Introdução

Processos químicos industriais apresentam estruturas de elevada complexidade e larga escala. Por isso, torna-se fundamental o emprego de estratégias de controle e otimização, que são aplicadas em vários níveis ou camadas, conforme a estrutura representada na Figura 2.1. Estruturas similares foram descritas por QIN e BAGDWELL (1997), RICHALET *et al.* (1978) e GARCÍA *et al.* (1989). Nessa estrutura, o fluxo de informação segue a direção do topo para a base. Assim, informações do planejamento de produção são transformadas em condições ótimas de operação, que geram trajetórias de referência e *setpoints*, que são por sua vez usados para orientar a operação da planta.



**Figura 2.1.** Pirâmide de automação (CAMPOS *et al.*, 2013).

Em função do cenário econômico e da estratégia comercial imposta pelo mercado, plantas industriais precisam ser capazes de operar e transitar por diferentes estados, adequando-se a mudanças da matéria-prima, do produto ou da demanda (SRINIVASAN e QIAN, 2006). Por exemplo, em plantas comerciais de polimerização a produção de lotes pode durar menos de 6 horas mesmo em plantas contínuas (WANG *et al.*, 2000; BENAMOR *et al.*, 2004). Neste sentido, o uso de controladores no nível mais básico (regulatório) é de grande utilidade, permitindo a operação eficiente, estável e segura dos processos industriais. Como as mudanças operacionais podem ser frequentes, muitos trabalhos procuram definir a melhor estratégia para a implementação de estruturas de controle global, visando à estabilização e otimização do processo em toda a região de operação (SKOGESTAD, 2000).

Sistemas de controle e otimização baseados em modelo são frequentemente implementados acima desta camada de controle regulatório. Em sistemas de controle baseados em modelo, assim como na camada de controle regulatório, faz-se a manipulação de graus de liberdade do processo com o objetivo de satisfazer a critérios operacionais. Quando o sistema é baseado em modelo, existe a vantagem adicional da atuação ocorrer também de forma preditiva e não apenas na forma de realimentação, com base no erro observado. Exemplos destes sistemas, também denominados sistemas de controle avançado, são controladores preditivos multivariáveis (MPC) e controladores preditivos multivariáveis não lineares (NMPC) (GARCÍA *et al.*, 1989).

Dependendo da implementação, na camada de controle avançado pode haver algum grau de otimização, embora sistemas de otimização em tempo real (RTO) baseados em modelos rigorosos sejam comumente implementados em uma camada acima desta. A otimização em tempo real consiste no uso dos graus de liberdade do processo para satisfazer a objetivos econômicos, tendo como base um modelo matemático do processo. Em geral, a otimização em tempo real atua em uma frequência menor que a da camada de controle avançado, frequentemente admitindo que o processo encontra-se em estado estacionário (GARCÍA *et al.*, 1989). No entanto, existem também técnicas de otimização dinâmica em tempo real (DRTO) que estão baseadas em um modelo dinâmico do processo, atuando sem a necessidade de que o processo esteja em estado estacionário (ALMEIDA, 2011; QUELHAS *et al.*, 2013).

Cada uma das camadas da pirâmide desempenha um papel complementar, com o objetivo de alcançar a estabilidade operacional, o máximo lucro, a máxima segurança, a qualidade do produto e o atendimento dos requisitos ambientais e dos limites de equipamentos (GARCÍA *et al.*, 1989). Sistemas de controle e otimização baseados em modelo, como o MPC, o RTO e o DRTO, utilizam frequentemente dados de processo em tempo real para correção (adaptação) do modelo utilizado à realidade operacional. A atualização pode ser feita de forma simples, como na forma de atualização de um sinal de *bias*, ou por meio da estimação de parâmetros do modelo e da reconciliação dos dados do processo. Além disso, os modelos podem ser fenomenológicos ou obtidos empiricamente, por meio da modelagem empírica de dados obtidos a partir de testes na planta. Desta forma, os desempenhos dos sistemas de MPC, RTO e DRTO estão sujeitos a desvios associados às incertezas de medição das variáveis da planta, aos erros de modelagem (incerteza dos parâmetros do modelo) e às perturbações do processo (KADAM *et al.*, 2007; QUELHAS *et al.*, 2013; ALMEIDA e SECCHI, 2011).

Neste trabalho pretende-se explorar os efeitos que os erros de modelagem podem causar sobre um sistema de controle preditivo, para ajudar a definir a precisão necessária para cada tipo de aplicação, auxiliando a compreender de forma quantitativa o procedimento de identificação do processo e de avaliação dos desempenhos dos modelos.

## 2.2 Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC)

O conjunto de técnicas de MPC compreende uma classe de algoritmos que gera uma sequência de ações em variáveis ditas manipuladas, visando a otimizar o comportamento futuro de um processo, previsto com o auxílio de um modelo (QIN e BADGWELL, 1997). De acordo com a literatura, o controle preditivo multivariável é uma das tecnologias de controle avançado mais utilizadas na indústria de processos (TAKATSU *et al.*, 1998; KANO e OGAWA, 2010; LEE, 2011; MAYNE, 2014; FORBES *et al.*, 2015).

Originalmente desenvolvido para atender a necessidades dos segmentos de geração de energia e refino de petróleo, a técnica de MPC já vem sendo estendida para diversas áreas, encontrando aplicações na indústria química, de alimentos, automotiva e aeroespacial (QIN e BADGWELL, 2003). Implementações industriais de sistemas de controle preditivo multivariável podem ser encontradas em trabalhos como os de RICHALET *et al.* (1978), RICHALET (1993), MORO e ODLOAK (1995), PORFÍRIO *et al.* (2003) e CAMPOS *et al.* (2013).

Desde sua origem, na década de 70, controladores preditivos vêm sendo largamente analisados na literatura, sob diferentes pontos de vista. Este tipo de controlador pode ser aplicado sem alterações conceituais muito significativas em uma grande variedade de processos, incluindo processos instáveis, não lineares, de fase não mínima e com elevado atraso de transporte (CLARKE, 1994; CAMACHO e BORDONS, 2007).

A aplicação do controlador preditivo multivariável envolve basicamente duas etapas. A primeira etapa consiste na identificação de um modelo matemático capaz de representar o processo, enquanto a segunda etapa compreende a aplicação de um algoritmo de controle preditivo adequado e sua sintonia (MACIEJOWSKI, 2002).

O controle preditivo baseado em modelo pode oferecer muitas vantagens. Por exemplo, (i) o modelo do processo considera interações dinâmicas e estáticas entre variáveis de entrada manipuladas (*inputs*), variáveis de saída controladas (*outputs*) e perturbações; (ii) as restrições nas variáveis manipuladas e controladas são consideradas de maneira sistemática no procedimento de controle; (iii) o cálculo das ações de controle pode ser coordenado com o cálculo dos *setpoints* ótimos; e (iv) bons modelos do processo podem prever problemas potenciais com considerável antecedência

(SEBORG *et al.*, 1989). Assim, a técnica de controle preditivo multivariável constitui um procedimento eficiente para o controle dos processos, capaz de trazer benefícios significativos à operação. Por isso, esta técnica vem sendo cada dia mais utilizada, apesar de algumas dificuldades práticas serem encontradas na implementação, como discutido adiante.

O MPC calcula as ações de controle que otimizam o desempenho do processo ao longo de um certo intervalo de tempo. Portanto, a teoria básica do MPC está fundamentada no modelo matemático do processo e na construção de uma função objetivo. No controle preditivo multivariável linear podem ser utilizados, por exemplo, modelos de resposta ao impulso ou ao degrau, havendo atualmente uma tendência para a utilização de modelos de representação de estado (DARBY e NIKOLAOU, 2012). De forma geral, o problema de otimização que está associado ao controle preditivo multivariável pode ser representado pela Equação (2.1).

$$\min_{\Delta \underline{U}(k)} \left\{ [\underline{Y}^{SP}(k) - \hat{\underline{Y}}(k)]^T \cdot \underline{Q} \cdot [\underline{Y}^{SP}(k) - \hat{\underline{Y}}(k)] + \Delta \underline{U}^T(k) \cdot \underline{R} \cdot \Delta \underline{U}(k) \right\}$$

sujeito a

$$\hat{\underline{Y}}(k) = \hat{\underline{Y}}^*(k) + \underline{S} \cdot \Delta \underline{U}(k) + \hat{\underline{D}}(k) \quad (2.1)$$

$$\underline{U}^{min} \leq \underline{U}(k) \leq \underline{U}^{max}$$

$$\Delta \underline{U}^{min} \leq \Delta \underline{U}(k) \leq \Delta \underline{U}^{max}$$

$$\underline{Y}^{min} \leq \hat{\underline{Y}}(k) \leq \underline{Y}^{max}$$

Nesta representação,  $\underline{Y}^{SP}$  contém a trajetória de referência das variáveis controladas ao longo do horizonte de predição  $HP$  (usualmente definida pelo RTO, por uma camada de otimização linear ou por uma regra de operação);  $\hat{\underline{Y}}$  representa a trajetória das variáveis controladas prevista pelo modelo em malha fechada;  $\hat{\underline{Y}}^*$  contém os valores preditos das variáveis controladas em malha aberta;  $\Delta \underline{U}$  são as  $M$  variações aplicadas às variáveis manipuladas ao longo do horizonte de controle  $HC$ ;  $\underline{S}$  é a matriz dinâmica do processo; e  $\hat{\underline{D}}(k) = \underline{Y}_{atual}^{medido} - \hat{\underline{Y}}_{atual}^{predito}$  é um desvio ou *bias*, que tenta corrigir imprecisões do modelo devido a perturbações dinâmicas que não foram consideradas na etapa de modelagem ou a eventuais fontes de ruído no sistema de instrumentação.  $\underline{Q}$  e  $\underline{R}$  são as matrizes que ponderam as variáveis controladas e

manipuladas, respectivamente, detalhadas na Equação (2.2). No caso da matriz  $\underline{\underline{R}}$ , os fatores de ponderação são chamados fatores de supressão de movimento.

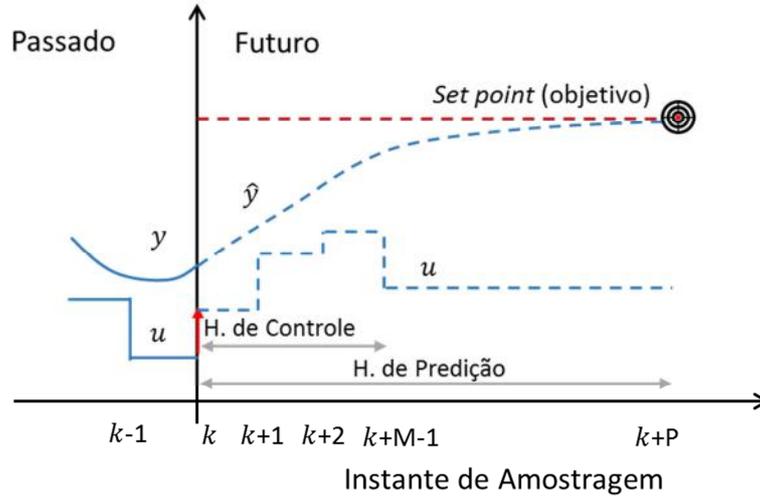
$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_{k+1} & \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} & \cdots & \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} \\ \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} & \underline{\underline{Q}}_{k+2} & \cdots & \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} & \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} & \cdots & \underline{\underline{Q}}_{k+HP} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{Q}}_{k+j} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{ny} \end{bmatrix}, j = 1, \dots, HP \quad (2.2)$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{R}}_k & \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} & \cdots & \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} \\ \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} & \underline{\underline{R}}_{k+1} & \cdots & \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} & \underline{\underline{0}}_{ny \times ny} & \cdots & \underline{\underline{R}}_{k+M-1} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{R}}_{k+j} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nu} \end{bmatrix}, j = 0, \dots, M-1$$

É importante ressaltar que as matrizes  $\underline{\underline{Q}}$  e  $\underline{\underline{R}}$  foram representadas na Equação (2.2) como matrizes diagonais por esta ser a forma mais comumente adotada na literatura de MPC e nas aplicações práticas deste algoritmo, embora estas matrizes não precisem ser necessariamente diagonais, mas sim positivas definidas.

Na representação da Equação (2.1), a restrição de igualdade corresponde ao modelo do processo e é função da matriz dinâmica  $\underline{\underline{S}}$ , caracterizando um conjunto de algoritmos de controle preditivo originados do algoritmo DMC (*Dynamic Matrix Control*) (CUTLER e RAMAKER, 1980; QIN e BADGWELL, 2003). A cada instante de amostragem  $k$ , o problema de otimização definido na Equação (2.1) deve ser resolvido. Embora o MPC calcule um conjunto de  $M$  movimentos  $\Delta \underline{\underline{U}}(k)$  ao longo do horizonte de controle do processo, apenas a primeira ação de controle é de fato implementada.

Vale notar que a função objetivo a ser minimizada (Equação (2.1)) envolve tanto o desvio das variáveis controladas em relação a seus respectivos *setpoints* quanto a medida dos movimentos das variáveis manipuladas, o que faz com que as matrizes  $\underline{\underline{Q}}$  e  $\underline{\underline{R}}$  tenham enorme importância e influenciem diretamente os resultados do controlador. Uma representação gráfica do que ocorre durante a implementação deste tipo de algoritmo de controle é ilustrada na Figura 2.2. Mais detalhes sobre a teoria e a implementação do controle preditivo multivariável podem ser encontrados em SEBORG *et al.* (1989).



**Figura 2.2.** Controle preditivo multivariável (adaptado de SEBORG *et al.*, 1989).

Em particular, para o controlador preditivo multivariável sem restrições, a Equação (2.1) é reduzida à forma da Equação (2.3) e apresenta solução analítica, na forma da Equação (2.4) (SEBORG *et al.*, 1989). Vale destacar que  $\hat{\underline{E}}(k)$  é um vetor que contém o erro em malha aberta do instante  $k + 1$  até o instante  $k + 1 + HP$ , calculado no instante  $k$ , com  $\Delta \underline{U}(k) = 0$ .

$$\min_{\Delta \underline{U}(k)} \left\{ [\underline{Y}^{SP}(k) - \hat{\underline{Y}}(k)]^T \cdot \underline{Q} \cdot [\underline{Y}^{SP}(k) - \hat{\underline{Y}}(k)] + \Delta \underline{U}^T(k) \cdot \underline{R} \cdot \Delta \underline{U}(k) \right\} \quad (2.3)$$

sujeito a

$$\hat{\underline{Y}}(k) = \hat{\underline{Y}}^*(k) + \underline{S} \cdot \Delta \underline{U}(k) + \hat{\underline{D}}(k)$$

$$\Delta \underline{U}(k) = \left( \underline{S}^T \underline{Q} \underline{S} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^T \underline{Q} \hat{\underline{E}}(k) \quad (2.4)$$

$$\hat{\underline{E}}(k) = \underline{Y}^{SP}(k) - \hat{\underline{Y}}^*(k)$$

Conforme citado anteriormente, algumas dificuldades práticas são comuns durante a implantação destes sistemas de controle. Uma destas dificuldades ocorre na etapa de identificação do processo, uma vez que representar processos complexos por meio de modelos matemáticos não constitui uma tarefa simples (CAMPOS *et al.*, 2013). Além disso, não é possível definir regras e procedimentos gerais para a etapa de modelagem, por causa das particularidades inerentes a cada processo. Outra dificuldade está relacionada à etapa de sintonia do controlador preditivo multivariável, já que,

dentre outros parâmetros, é preciso arbitrar pesos para as variáveis controladas e manipuladas do problema, com auxílio das matrizes  $\underline{Q}$  e  $\underline{R}$ .

OGUNNAIKE (1986) propôs uma interpretação estatística para a formulação de controladores preditivos baseados no algoritmo DMC. De acordo com o autor, a adequada concepção estatística destes algoritmos também ajuda a explicar o sucesso dos controladores preditivos em aplicações industriais. Nesse caso, a matriz  $\underline{Q}$  guarda vínculos com as variâncias de medição das variáveis controladas. No entanto, a estatística dos desvios observados entre medidas e previsões obtidas com o modelo depende fortemente da qualidade do modelo. Além disso, a matriz  $\underline{R}$  influencia o condicionamento da matriz a ser invertida na solução do problema sem restrições (Equação (2.4)), alterando a sensibilidade da solução a erros de modelagem. Dessa forma, na prática,  $\underline{Q}$  e  $\underline{R}$  dependem também da qualidade do modelo implementado.

### 2.3 Identificação de Processos

O uso de um modelo matemático capaz de representar bem o processo é extremamente importante para o bom desempenho de sistemas de controle e otimização baseados em modelo. Por isso, em implementações de sistemas de controle preditivo multivariável, o desenvolvimento do modelo do processo costuma ser a etapa que mais consome tempo, podendo ser responsável por até 50% do tempo total do projeto (DARBY e NIKOLAOU, 2012; RICHALET, 1993; ZHU, 1998).

Os modelos matemáticos podem ser obtidos com o auxílio de técnicas de identificação, que compreendem basicamente as seguintes etapas (CAMPOS *et al.*, 2013; ANDERSEN e KÜMMEL, 1992):

- Planejamento de testes;
- Definição da estrutura do modelo;
- Estimativa dos parâmetros do modelo;
- Validação do modelo.

A literatura relacionada ao uso de técnicas de identificação para a obtenção de modelos matemáticos do processo é extremamente extensa, abrangendo diferentes metodologias que podem ser utilizadas em cada uma das etapas que integram o processo

de identificação (AGUIRRE, 2007; LJUNG, 1999). Por isso, não se faz aqui uma revisão exaustiva do tema.

A identificação do processo pode ser conduzida em malha aberta ou fechada no âmbito do MPC. Estratégias para identificação do processo em malha aberta são mais comuns e consolidadas na prática industrial, embora seja possível encontrar algumas aplicações de identificação em malha fechada (LJUNG, 1999; MIRANDA, 2005; PITTA, 2012; KHERADMANDI e MHASKAR, 2018). A vantagem mais evidente da identificação em malha fechada é manter o processo na região desejada durante os testes de identificação, minimizando o risco de gerar produtos fora de especificação ou de instabilizar a planta. O trabalho de KARIMI e LANDAU (1998) apresentou uma comparação de desempenho entre diferentes métodos usados para identificação do processo em malha fechada, em que o método CLOE (*closed-loop output error*) apresentou resultados satisfatórios.

### 2.3.1 Planejamento de Testes

A etapa definida como planejamento de testes visa a determinar como os testes na planta devem ser executados a fim de gerar os dados que devem ser usados para permitir a discriminação dos modelos e a estimação de parâmetros precisos com o mínimo de esforço experimental (SCHWAAB e PINTO, 2011; LEVADI, 1966; MEHRA, 1974; CHALONER e VERDINELLI, 1995).

Os testes na planta são usualmente realizados na forma de degraus aplicados às variáveis independentes, embora essa forma de perturbação não seja obrigatória. A amplitude destes degraus constitui um parâmetro importante para a identificação e deve ser definida de modo a provocar a maior relação sinal/ruído possível, sem perturbar exageradamente o processo nem comprometer a segurança. Comumente, a amplitude dos degraus utilizados é escolhida com base no conhecimento prévio do processo e em dados de testes curtos realizados anteriormente, conhecidos como pré-testes (CAMPOS *et al.*, 2013; ZHU, 1998; ZHU *et al.*, 2013).

Outro fator ressaltado pelos trabalhos que tratam de projetos de testes é a frequência dos degraus aplicados ao processo. É recomendado que os degraus sejam aplicados com frequências que permitam obter um bom modelo. Em outras palavras, os sinais de entrada devem ser persistentemente excitados, de modo a estimular todo o

espectro de frequências das respostas de interesse do sistema (ASTRÖM e EYKHOFF, 1971). Por isso, algumas heurísticas baseadas no tempo de estabilização do processo foram propostas para determinar a frequência ideal de aplicação dos testes (ZHU, 1998).

Projetos de teste do tipo GBN (*Generalized Binary Noise*) (TULLEKEN, 1990) têm sido muito utilizados na literatura de identificação de processos e podem ser definidos por intermédio da amplitude e frequência dos degraus aplicados. Um caso particular de testes GBN, com a probabilidade de ocorrência de um degrau de 0.5, é o projeto de testes conhecido como sinais binários pseudo-aleatórios (PRBS) (CHEN e YU, 1997).

Vale ressaltar que muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de estimar parâmetros precisos por meio da manipulação de características geométricas da região de confiança e da minimização da correlação entre os parâmetros (ALBERTON, 2010). Essas abordagens são particularmente interessantes porque não dependem nem impõem uma forma funcional pré-especificada aos modelos. Nesse caso, a matriz de covariâncias dos parâmetros ( $V_\theta$ ) do modelo pode ser obtida a partir de dados experimentais, na forma da Equação (2.5).

$$V_\theta = \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)^T \cdot V_Z^{-1} \cdot \left( \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) \right]^{-1} \quad (2.5)$$

Na Equação (2.5),  $V$  representa as matrizes de covariância,  $\theta$  representa os parâmetros e  $Z$  contém as variáveis de projeto  $X$  e as variáveis de resposta  $Y$ , preditas com base em  $X$  e  $\theta$ . A Equação (2.5) pressupõe que os parâmetros devem ser estimados para minimizar uma função quadrática que pondera os desvios entre as variáveis preditas pelo modelo e medidas com os instrumentos do processo, cujo fator de ponderação é exatamente a matriz  $V_Z^{-1}$ . Esta equação considera ainda que as medidas experimentais estão sujeitas a desvios pequenos, tornando possível a representação linearizada dos modelos do processo (SCHWAAB e PINTO, 2007). Portanto, a Equação (2.5) deve ser interpretada como uma solução aproximada conveniente das variabilidades paramétricas.

Para modelos lineares nos parâmetros e na presença de erros experimentais normalmente distribuídos, a região de confiança dos parâmetros apresenta forma elíptica, cujas dimensões podem ser caracterizadas por combinações matemáticas dos termos da matriz de covariância dos parâmetros (SCHWAAB e PINTO, 2011).

Com isso, foram propostos alguns critérios ótimos de planejamento de testes para estimação de parâmetros precisos que se baseiam em diferentes métricas relacionadas com a matriz  $V_\theta$ . Estes critérios são conhecidos como “alfabéticos” pela forma como foram nomeados e os principais são (KIEFER, 1959; SHIRT *et al.*, 1994; FRANCESCHINI e MACCHIETTO, 2008; SCHWAAB e PINTO, 2011):

- D-ótimo: minimiza o determinante da matriz  $V_\theta$ , ou a multiplicação de seus valores característicos, que corresponde à minimização do volume da região de confiança dos parâmetros;

- A-ótimo: minimiza o traço da matriz  $V_\theta$  (soma da diagonal principal), que corresponde a minimizar a diagonal do hipercubo que circunscribe a hiper-elipsóide que define a região de confiança dos parâmetros;

- E-ótimo: minimiza a razão entre o maior e o menor valor característico da matriz  $V_\theta$ , que é a razão entre os eixos da hiper-elipsóide.

O critério alfabético mais usado é o D-ótimo, uma vez que é de fácil interpretação geométrica, é robusto a transformações matemáticas aplicadas aos parâmetros e resulta em experimentos que correspondem à replicação de um pequeno número de condições experimentais diferentes (WALTER e PRONZATO, 1990; FRANCESCHINI e MACCHIETTO, 2008). No entanto, este critério apresenta desvantagens associadas à excessiva importância dada a parâmetros aos quais o modelo é mais sensível, o que faz com que a região de confiança seja reduzida, embora a incerteza dos outros parâmetros do modelo ainda possa ser muito grande (PINTO *et al.*, 1990).

A questão da frequência de amostragem também é importante durante o planejamento de testes (LJUNG, 1999). De acordo com o Teorema de Nyquist, a frequência de amostragem deve ser ao menos 2 vezes maior que a maior frequência de interesse contida nos dados para permitir a identificação apropriada das frequências das respostas do processo, embora, na prática, seja entre 5 a 10 vezes maior (AGUIRRE, 2007).

O projeto de testes pode ainda ser desenhado para perturbar cada variável independente de cada vez ou várias variáveis simultaneamente. Neste último caso, os testes são multivariáveis e devem ser projetados para que a sequência de perturbações de cada variável não apresente correlação com as sequências das demais perturbações. Testes multivariáveis proporcionam considerável economia de tempo durante a etapa de identificação, embora seja praticamente impossível que o usuário visualmente consiga

distinguir as respostas individuais do processo para cada variável. Para isto, é necessária a utilização de um algoritmo de estimação de parâmetros (ZHU, 1998).

Pode ser necessário também utilizar estratégias de planejamento de testes com o objetivo de discriminar modelos. Neste caso, mais de um modelo pode ser capaz de descrever os dados disponíveis, sendo necessários novos dados experimentais para permitir diferenciar os modelos rivais e definir o modelo mais adequado para o processo. Admitindo-se que uma primeira aproximação é disponível para os modelos, podem ser realizadas simulações para ajudar a tarefa de planejamento dos novos testes. O tema da discriminação de modelos é tratado em vários trabalhos encontrados na literatura (HUNTER e REINER, 1965; BOX e HILL, 1967; ATKINSON e COX, 1974; BUZZI-FERRARIS e FORZATTI, 1983; SCHWAAB *et al.*, 2006; ALBERTON *et al.*, 2010; ALBERTON *et al.*, 2012).

### 2.3.2 Estrutura do Modelo

Modelos matemáticos utilizados para representar processos podem ser de origem fenomenológica ou empírica. Na modelagem fenomenológica, também conhecida como caixa branca, os modelos são originados a partir de equações que descrevem os fenômenos físicos e químicos envolvidos. Nestes modelos, os parâmetros e termos da estrutura possuem sentido físico, havendo maior poder de extrapolação (SCHWAAB e PINTO, 2007). Já na modelagem empírica, também denominada caixa preta, pode ser utilizado pouco ou nenhum conhecimento prévio sobre o comportamento do sistema, de maneira que os modelos são formulados e ajustados diretamente a partir de correlações observadas entre os dados experimentais. Estes modelos são capazes de representar sistemas de forma satisfatória, a depender da qualidade e abrangência dos dados utilizados (SÖDERSTRÖM e STOICA, 1989). É possível ainda propor uma modelagem do tipo caixa cinza, que tenta combinar as vantagens das modelagens caixa branca e caixa preta, utilizando tanto correlações empíricas observadas entre os dados experimentais como informações fenomenológicas adicionais para compor o modelo (FUNKQUIST, 1997; BOHLIN, 1994).

Modelos matemáticos podem ainda ser classificados de muitas outras formas, como (AGUIRRE, 2007; SCHWAAB e PINTO, 2007):

- Lineares ou não lineares: um sistema é considerado linear se ele satisfaz o princípio da superposição; ou seja, se a resposta de um sistema a uma entrada  $u_1$  é a saída  $y_1$  e a uma entrada  $u_2$  é a saída  $y_2$ , então a resposta deste mesmo sistema a uma entrada  $(au_1 + bu_2)$  deverá ser  $(ay_1 + by_2)$ . A consideração de linearidade simplifica bastante o modelo, mas pode não ser adequada em muitos casos;

- Estáticos ou dinâmicos: modelos estáticos relacionam as variáveis sem estabelecer dependência temporal, sendo usualmente descritos por equações algébricas. Modelos dinâmicos consideram a evolução no tempo e usualmente incluem equações diferenciais (ou de diferenças, se forem discretos);

- Paramétricos ou não-paramétricos: diferentes conceitos podem ser adotados para a classificação de modelos em paramétricos ou não-paramétricos. Uma possibilidade consiste em definir modelos paramétricos como aqueles cujos parâmetros possuem alguma interpretação física;

- Parâmetros concentrados ou distribuídos: modelos a parâmetros concentrados consideram que as variáveis de interesse variam apenas no tempo, não sendo função das coordenadas espaciais, enquanto modelos a parâmetros distribuídos englobam variações no tempo e no espaço;

- Variantes ou invariantes no tempo: um sistema é invariante no tempo se um deslocamento no tempo na entrada provoca um deslocamento no tempo na saída. Assim, se a resposta de um sistema invariante a uma entrada  $u(k)$  é a saída  $y(k)$ , então a resposta deste sistema a uma entrada  $u(k - k_0)$  deverá ser  $y(k - k_0)$ . Em outras palavras, um sistema é invariante no tempo quando sua dinâmica (incluindo o ganho estático) não se altera com o tempo;

- Discretos ou contínuos: no contexto deste trabalho, os modelos serão classificados em discreto e contínuo quanto ao tempo. Assim, modelos dinâmicos contínuos são representados por equações diferenciais, contendo informação do comportamento do sistema ao longo do tempo de forma contínua, enquanto modelos dinâmicos discretos utilizam equações de diferenças que representam o comportamento do sistema em instantes discretos;

- Estocásticos ou determinísticos: nos modelos determinísticos, as variáveis e parâmetros são determinísticos, ou seja, não estão sujeitos a flutuações de caráter aleatório. Já modelos estocásticos consideram explicitamente variáveis aleatórias em sua estrutura, fazendo com que o resultado destes modelos possua também

características aleatórias e imponham interpretações probabilísticas aos resultados finais obtidos.

Geralmente, nas aplicações de controle preditivo são utilizados modelos empíricos dinâmicos, lineares e discretos, que podem ser representados, por exemplo, nas seguintes formas (CAMPOS *et al.*, 2013; AGUIRRE, 2007):

- Espaço de estado: o sistema é descrito utilizando um vetor de estados  $\underline{x}$ , que especifica a condição do sistema em um determinado instante (Equação (2.6)). Esta representação não é única, sendo possível representar o mesmo sistema com diferentes modelos no espaço de estado;

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \underline{A} \underline{x}_k + \underline{B} u_k \\ \underline{y}_k &= \underline{C} \underline{x}_k + \underline{D} u_k\end{aligned}\tag{2.6}$$

- Funções de transferência discretas: relacionam a saída atual do sistema com as saídas e entradas passadas no domínio discreto ( $z$ ), conforme mostra a Equação (2.7);

$$Y(z) = \frac{z^{-d}(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})}{(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})} U(z)\tag{2.7}$$

- Modelos polinomiais, como ARX (autorregressivo com entradas exógenas) e ARMAX (autorregressivo com média móvel e entradas exógenas): estas representações relacionam a saída atual do sistema com as saídas e entradas passadas, incluindo também na equação um ruído branco aleatório  $v(k)$ . Por isso, os modelos ARX (Equação (2.8)) e ARMAX (Equação (2.9)) pertencem à classe de modelos de “erro na equação”, em que o ruído é realimentado. Assim, apesar de  $v(k)$  ser um ruído branco, o ruído que é de fato somado à saída não é branco, mas um ruído modelado como um processo branco filtrado;

ARX:

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^m b_j u(k-j) + v(k)\tag{2.8}$$

ARMAX:

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^m b_j u(k-j) + \sum_{l=0}^p c_l v(k-l)\tag{2.9}$$

- Modelos de resposta ao degrau: relacionam a saída atual do sistema com as variações sofridas pelas entradas entre dois instantes de amostragem consecutivos no passado. Os coeficientes  $s(j)$  representam a resposta amostrada da saída ao longo do tempo devido a um degrau unitário aplicado à entrada no instante inicial e  $m$  é o número de coeficientes do modelo;

$$y(k) = \sum_{j=0}^m s(j) \Delta u(k-j) \quad (2.10)$$

$$\Delta u(k-j) = u(k-j) - u(k-j-1)$$

- Modelos de resposta ao impulso (FIR): relacionam a saída atual do sistema com as entradas passadas. Os coeficientes  $h(j)$  representam a resposta amostrada da saída ao longo do tempo devido a um impulso unitário aplicado à entrada no instante inicial e  $m$  é o número de coeficientes do modelo;

$$y(k) = \sum_{j=0}^m h(j) u(k-j) \quad (2.11)$$

As representações mais utilizadas na prática industrial são os modelos de resposta ao degrau e de resposta ao impulso (FIR), embora haja uma tendência para utilização de modelos de espaço-estado em controladores mais recentes devido à flexibilidade para representar processos estáveis, instáveis e integradores e para lidar com perturbações não medidas (DARBY e NIKOLAOU, 2012).

Na literatura de identificação de processos, modelos de resposta ao degrau são classificados como modelos não-paramétricos e possuem a vantagem de não requererem muitas especificações sobre a estrutura do modelo (como ordem e tempo morto), sendo necessário apenas definir o tempo de estabilização esperado para o processo. Estes modelos são caracterizados pelo elevado número de parâmetros, o que leva à necessidade de obter muitos dados experimentais para estimá-los (RICHALET, 1993; CAMPOS *et al.*, 2013).

Para modelos paramétricos, alguns critérios foram propostos para ajudar a escolha da ordem do modelo durante a definição da estrutura e a estimação dos parâmetros, como os critérios de Akaike (AIC) (Equação (2.12)) e do erro final de

predição (FPE) (Equação (2.13)). Estes critérios, que devem ser minimizados durante a identificação, dependem do número de parâmetros do modelo ( $N$ ), do número de dados experimentais disponíveis ( $n_\theta$ ) e da variância dos erros de modelagem ( $\sigma_{erro}^2$ ) (AKAIKE, 1974; SÖDERSTRÖM e STOICA, 1989; AGUIRRE, 2007).

$$AIC(n_\theta) = N \ln[\sigma_{erro}^2(n_\theta)] + 2 n_\theta \quad (2.12)$$

$$FPE(n_\theta) = N \ln[\sigma_{erro}^2(n_\theta)] + N \ln \left[ \frac{N + n_\theta}{N - n_\theta} \right] \quad (2.13)$$

### 2.3.3 Estimação dos Parâmetros

Uma vez definida a estrutura do modelo e obtidos os dados experimentais, deve-se ajustar os parâmetros do modelo, de modo que a predição se aproxime tanto quanto possível dos dados, respeitando as incertezas de medição, por meio de um processo denominado de estimação de parâmetros (SCHWAAB e PINTO, 2007). Para impor que a predição se aproxime dos dados experimentais, é necessário definir uma métrica (função objetivo) a ser otimizada. Uma forma de estabelecer métricas adequadas e com significado estatístico é usar o princípio da máxima verossimilhança.

Considerando que a hipótese do experimento bem-feito é válida (ou seja, que as medições não contêm erros sistemáticos e que o erro de predição é uma amostra do erro experimental), o princípio da máxima verossimilhança admite que os erros de predição obtidos são os mais prováveis, de acordo com a distribuição de probabilidades dos erros de medição  $\pi(Z)$  (ALBERTON, 2010). No caso dos dados seguirem uma distribuição normal de probabilidades, a distribuição  $\pi(Z)$  pode ser representada pela Equação (2.14).

$$\pi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \det(V_Z)}} \cdot \exp \left( - \frac{(Z^{exp} - M_Z)^T \cdot V_Z^{-1} \cdot (Z^{exp} - M_Z)}{2} \right) \quad (2.14)$$

Nesta equação,  $Z^{exp}$  é o vetor de variáveis medidas, incluindo variáveis dependentes  $Y$  e independentes  $X$ ;  $M_Z$  é o vetor da esperança dos valores de  $Z$  (valores “verdadeiros”); e  $V_Z$  é a matriz de covariâncias das variáveis  $Z$ . Adotando o princípio de

máxima verossimilhança,  $\pi(Z^{exp})$  deve ser máximo, o que significa dizer que o termo da Equação (2.15), denominado função objetivo, deve ser mínimo.

$$F_{obj} = (Z^{exp} - M_Z)^T \cdot V_Z^{-1} \cdot (Z^{exp} - M_Z) \quad (2.15)$$

Considerando que as variáveis independentes não estejam sujeitas a erros de medição, a função objetivo da Equação (2.15) se reduz à Equação (2.16), que depende apenas das variáveis de resposta  $Y$ .

$$F_{obj} = (Y^{exp} - M_Y)^T \cdot V_Y^{-1} \cdot (Y^{exp} - M_Y) \quad (2.16)$$

Admitindo o uso de um modelo perfeito, os valores “verdadeiros”  $M_Y$  podem ser obtidos com auxílio do modelo, que é capaz de retornar valores de  $Y$ , função dos parâmetros  $\Theta$  (Equação (2.17)).

$$M_Y = Y(\Theta) \quad (2.17)$$

Assim, a minimização da função objetivo descrita na Equação (2.16) pode ser alcançada por meio da estimação dos parâmetros  $\Theta^{est}$ . Logo, os valores “verdadeiros”  $M_Y$  podem ser dados pelos valores preditos  $Y^P$ , função dos parâmetros estimados  $\Theta^{est}$  (Equação (2.18)).

$$M_Y = Y^P(\Theta^{est}) \quad (2.18)$$

Portanto, simplificando a notação, a função objetivo da Equação (2.16) pode ser expressa conforme a Equação (2.19).

$$F_{obj} = (Y^{exp} - Y^P)^T \cdot V_Y^{-1} \cdot (Y^{exp} - Y^P) \quad (2.19)$$

Considerando ainda que os erros experimentais das variáveis dependentes  $Y$  não são correlacionados, a Equação (2.19) pode ser rescrita como a Equação (2.20), em que  $NE$  é o número de experimentos,  $NY$  é o número de variáveis dependentes e  $\sigma^2$  é a variância da medida.

$$F_{obj} = \sum_{i=1}^{NE} \sum_{j=1}^{NY} \frac{(y_{ij}^{exp} - y_{ij}^p)^2}{\sigma_{y_{ij}}^2} \quad (2.20)$$

Neste caso, a função objetivo (Equação (2.20)) é uma função de mínimos quadrados ponderados pela variância dos dados experimentais. Em particular, quando, além das considerações utilizadas para chegar à função objetivo da Equação (2.20), apenas uma variável dependente está sujeita a erros constantes em toda a região experimental, a Equação (2.20) resulta na Equação (2.21), conhecida como função de mínimos quadrados (SCHWAAB e PINTO, 2007).

$$F_{obj} = \sum_{i=1}^{NE} (y_i^{exp} - y_i^p)^2 \quad (2.21)$$

Assim, em um problema de estimação de parâmetros, são normalmente ajustados os parâmetros  $\theta$  por meio da minimização da função objetivo das Equações (2.19), (2.20) ou (2.21), a depender das considerações adotadas. Este ponto ótimo comumente é encontrado com o auxílio de técnicas numéricas, embora seja possível obter soluções analíticas em alguns problemas específicos, como no caso de modelos lineares nos parâmetros (SCHWAAB e PINTO, 2007).

Vale ressaltar que, se a esperança do parâmetro estimado não for igual ao valor verdadeiro, o estimador utilizado apresenta desvios sistemáticos e é denominado tendencioso ou polarizado (ALBERTON, 2010; AGUIRRE, 2007). A polarização pode acontecer, por exemplo, com o estimador de mínimos quadrados quando hipóteses consideradas na sua dedução não forem satisfeitas.

#### 2.3.4 Validação do Modelo

A etapa de validação de modelos consiste em determinar se um dado modelo é capaz ou não de representar os dados de processo para uma aplicação específica. Como o modelo não é capaz de representar exatamente o sistema real com todos os seus

detalhes, deve-se analisar se os requisitos importantes para um determinado uso estão sendo atendidos.

Uma das formas de validar um modelo é por meio da comparação entre valores preditos com o modelo e valores obtidos experimentalmente (GEVERS *et al.*, 2003). Neste caso, os dados experimentais utilizados para a validação devem ser diferentes dos dados utilizados durante a etapa de identificação, promovendo uma validação cruzada capaz de fornecer informações sobre a capacidade de generalização do modelo (SÖDERSTRÖM e STOICA, 1989). A comparação pode ser visual ou expressa com auxílio de uma métrica, como o somatório dos desvios quadráticos entre valores preditos e medidos ou o fator de correlação.

No caso de modelos dinâmicos existe a possibilidade de comparar os dados experimentais com a resposta predita por meio de simulação livre (ou predição de infinitos passos à frente), por meio da predição de um passo à frente ou por meio da predição de  $k$  passos à frente. Durante a simulação livre, parte-se do primeiro valor experimental da saída e a simulação prossegue sem que haja atualização dos valores preditos com os valores experimentais. Na simulação de um passo à frente, a cada instante, os valores preditos para a saída são atualizados com os valores medidos até o instante  $n$  e, utilizando estes valores de saída e os valores medidos das entradas, faz-se a previsão do instante seguinte  $n + 1$ . Na simulação de  $k$  passos à frente, os valores de saída são atualizados com os valores experimentais até o instante  $n$  e segue-se com a simulação até o instante  $n + k$  utilizando os valores medidos das entradas, os valores experimentais das saídas até o instante  $n$  e os valores preditos das saídas entre os instantes  $n + 1$  e  $n + k$  (AGUIRRE, 2007; LJUNG, 1999).

É importante ressaltar que o erro de predição calculado com a predição de um passo à frente é um resíduo que pode ter as mesmas características dos resíduos que foram minimizados durante o procedimento de estimação dos parâmetros, já que os valores de saída medidos normalmente fazem parte da composição do regressor, embora esta prática não seja obrigatória. Portanto, até mesmo modelos ruins podem apresentar boas predições de um passo à frente, o que faz com que o uso de predições de um passo à frente, em geral, não seja um bom teste de validação, embora seja bastante comum na literatura (AGUIRRE, 2007).

Outra forma de validação consiste na análise dos resíduos da estimação. Quanto mais próximos de um ruído branco forem estes resíduos, menos informação útil haverá nos resíduos e, portanto, maior a capacidade do modelo de fornecer uma predição

adequada. Para verificar a aleatoriedade dos resíduos, pode ser analisada a autocorrelação do resíduo e a correlação cruzada entre o resíduo e as variáveis de entrada, que pode evidenciar a existência de informações que, apesar de presentes nas variáveis de entrada, foram desconsideradas no modelo. Como estas funções de correlação identificam apenas relações lineares, também podem ser utilizadas transformações do resíduo e das variáveis de entrada para avaliar as correlações, o que pode ajudar a identificar algumas relações não-lineares, caso existam (AGUIRRE, 2007; SÖDERSTRÖM e STOICA, 1989).

## 2.4 Sintonia de Controladores Preditivos

Conforme citado anteriormente, a estrutura de controladores preditivos envolve uma série de parâmetros, como as matrizes que ponderam as variáveis controladas ( $\underline{Q}$ ) e manipuladas ( $\underline{R}$ ) e os horizontes de predição e controle. Com o advento do uso de controladores preditivos, começaram a surgir questionamentos quanto à melhor parametrização ou sintonia a ser adotada. Este é mais um ponto crítico para o sucesso do emprego de controladores preditivos baseados em modelo. Se a sintonia não for adequadamente escolhida, o controlador pode não apenas deixar de reduzir a variabilidade e proporcionar a otimização do processo, mas pode também provocar o aumento das oscilações e instabilizar a planta (BAGHERI e KHAKI-SEDIGH, 2011). Adicionalmente, muitas formulações de controladores preditivos consideram a normalização das variáveis, de modo a tratar diferentes ordens de grandeza das variáveis antes de definir a sintonia, influenciando diretamente nos valores dos parâmetros adotados. Neste trabalho, por simplicidade, não será considerada a normalização de variáveis em nenhum dos estudos e exemplos analisados.

Diferentes metodologias para a sintonia de controladores preditivos foram propostas na literatura para classes específicas de controladores (GARRIGA e SOROUSH, 2010). Algumas abordagens calculam ou definem limites para os parâmetros de sintonia com base em simplificações do problema. É o caso dos trabalhos de SHRIDHAR e COOPER (1997, 1998a, 1998b), que calculam parâmetros de sintonia para controladores sem restrições, aproximando a planta por modelos de primeira ordem com tempo morto, e de MCINTOSH *et al.* (1991), que propõem limites de acordo com o atraso e constante de tempo do processo. Também são comuns trabalhos que utilizam

um enfoque prático, com base na experiência de sintonia de controladores empregados em processos reais ou simulados, para criar regras heurísticas que apenas correlacionam dados considerados como capazes de proporcionar bons desempenhos em alguns sistemas reais (IGLESIAS *et al.*, 2006; BAGHERI e KHAKI-SEDIGH, 2011; WOJSZNIS *et al.*, 2003; LEE *et al.*, 2008; REVERTER *et al.*, 2014).

Outra abordagem utilizada consiste em definir a sintonia com auxílio da solução de um problema de otimização. Neste caso, é necessário estabelecer uma ou mais funções objetivo e o cenário a ser analisado. O problema consiste em minimizar uma certa métrica de desempenho, manipulando-se os parâmetros de sintonia com o auxílio de simulações (NERY JR *et al.*, 2010; VAN DER LEE *et al.*, 2008; ALI e ZAFIRIOU, 1993; COSTA, 2009; YAMASHITA *et al.*, 2016). Comumente são utilizados algoritmos estocásticos para resolver este problema de otimização, com o objetivo de evitar mínimos locais. Obviamente, esse procedimento deve ser resolvido no ambiente computacional e pode constituir etapa exaustiva do desenvolvimento.

Foram também propostas metodologias de sintonia robusta em que são determinadas condições ou sugeridas heurísticas para definir os parâmetros de sintonia com base na análise de estabilidade, desempenho e robustez dos sistemas de controle na presença de incertezas de modelagem. Este é o caso dos trabalhos de LEE e YU (1994), CARRAPIÇO e ODLOAK (2005), DUBAY *et al.* (2005) e TRIERWEILER e FARINA (2003). Neste último trabalho, foi proposta uma metodologia de sintonia baseada em um indicador denominado “RPN” (*Robustness Performance Number*), que expressa a dificuldade do sistema em alcançar o desempenho exigido com robustez.

## **2.5 Comentários Finais**

Neste Capítulo foram apresentados conceitos teóricos gerais importantes para a implementação de sistemas de controle e otimização baseados em modelo. Em especial, foram enfatizados os aspectos mais diretamente relacionados com sistemas de MPC. Embora tenham sido citadas várias técnicas para identificação de modelos e sintonia de controladores preditivos, poucas são as que realmente possuem ampla utilização prática ou vantagens significativas sobre outras abordagens. Além disso, o emprego de controladores envolve desafios teóricos e práticos que não são atendidos pelas metodologias existentes, como será visto no Capítulo 3.

# **Capítulo 3 Limitações e Desafios para Emprego de Controladores Preditivos**

Neste capítulo são explorados alguns aspectos que limitam ou desafiam o uso de controladores preditivos do ponto de vista acadêmico e prático. Muitas dificuldades apontadas são conhecidas há bastante tempo, embora ainda não tenham sido propostas soluções definitivas para esses problemas. Em especial, pretende-se tratar de assuntos relacionados à identificação de modelos de processo para fins de controle, garantia de qualidade do desempenho do modelo e sintonia do controlador.

## **3.1 Introdução**

Apesar da aplicação ampla e bem-sucedida de sistemas de controle preditivo na indústria química e petroquímica, ainda há muitos pontos de melhoria a serem estudados. Particularmente, a elucidação das relações existentes entre qualidade do modelo, sintonia e desempenho final do sistema de controle pode ajudar a desenvolver técnicas mais eficientes de implementação e permitir a obtenção do máximo proveito dos sistemas de MPC. Este capítulo contextualiza a motivação principal deste trabalho, mostrando que há necessidades reais de novos estudos e desenvolvimentos na área proposta.

## **3.2 Histórico de Problemas e Necessidades em Sistemas de MPC**

Já em 1971, o trabalho de ASTROM e EYKHOFF (1971) apontava que, mesmo que a principal motivação para obtenção de modelos fosse seu uso na resolução de problemas de controle, este fato costumava ser ignorado na literatura. Este trabalho questionava, então, os seguintes pontos:

- É possível fazer uma escolha racional da estrutura do modelo e do critério adotado, sabendo que os resultados da identificação serão usados em estratégias de controle?
- É necessário levar em consideração que a solução do problema de identificação não é exata ao resolver problemas de controle?
- O que significa a acurácia de um problema de identificação? Qual a acurácia necessária para garantir o desempenho em um caso particular?

Desde então, vários trabalhos foram desenvolvidos com o intuito de responder a algumas destas questões. No entanto, é surpreendente observar que mais de 40 anos depois ainda não tenha ocorrido a consolidação de soluções definitivas para estes problemas levantados. Por isso, muitos trabalhos recentes também apontam questões similares e fortemente relacionadas às questões levantadas originalmente no trabalho de ASTROM e EYKHOFF (1971).

DARBY e NICOLAOU (2012) fazem uma síntese do uso prático e acadêmico de controladores preditivos multivariáveis e citam as seguintes limitações apontadas pela literatura:

- Os projetos de testes costumam ser ineficientes;
- Há falta do uso de técnicas mais recentes para métodos de identificação;
- Há limitações de modelos de convolução (FIR ou de resposta ao degrau);
- Há limitações para a atualização dos modelos nos algoritmos de MPC tradicionais;
- O controle de plantas mal condicionadas é ruim;
- A incerteza de modelos não é explicitamente considerada;
- É necessário grande esforço para sintonia do MPC;
- É difícil a detecção e diagnóstico da degradação do desempenho do sistema de controle.

ZHU *et al.* (2013) ressaltaram a inexistência de metodologias para proporcionar a autossintonia do MPC, para determinar a precisão requerida dos modelos e para determinar os modelos “chave”; ou seja, os modelos que exercem forte influência sobre o desempenho do controlador em um cenário multivariável. Neste trabalho também foi evidenciado o desconhecimento de como relacionar a sintonia do MPC e as incertezas do modelo.

KANO e OGAWA (2010) fizeram uma pesquisa no Japão envolvendo 9 empresas, com 329 aplicações de controle preditivo, e apontaram que, embora sistemas

de MPC estejam sendo empregados com sucesso nas indústrias química e petroquímica, muitos problemas ainda precisam ser resolvidos. Os maiores problemas verificados envolvem a necessidade de identificar um modelo preciso e sintonizar o controlador adequadamente para alcançar o desempenho desejado, o que é difícil na prática devido à presença de não linearidades e mudanças frequentes nas características do processo.

Neste trabalho, KANO e OGAWA (2010) consideram que a manutenção de sistemas de MPC constitui um ponto crucial para garantir o desempenho, prevenindo a degradação. Por isso, citam como desejável o esclarecimento da relação entre acurácia dos modelos e desempenho de controle alcançável. Uma motivação para o estudo desta relação é o fato de que a tarefa de identificar um modelo multivariável não constitui uma tarefa simples, sendo importante determinar qual a precisão necessária em cada caso. Adicionalmente, segundo os autores, há a necessidade de aprimorar os métodos de modelagem e sintonia. A Tabela 3.1 resume os resultados da pesquisa apresentada por KANO e OGAWA (2010), com os principais problemas e necessidades de melhoria observados nas aplicações de MPC. As linhas destacadas em cinza nesta tabela apontam as questões mais relevantes para o presente trabalho, como será discutido adiante.

Apesar dos problemas e necessidades discutidos, controladores preditivos são algoritmos bastante robustos, capazes de lidar com grandes incertezas de modelagem (KANO e OGAWA, 2010; GEVERS *et al.*, 1996). Esta característica também foi ressaltada por HUANG *et al.* (2003), que observaram que, ainda que muitos modelos utilizados em sistemas de controle preditivo não sejam capazes de passar em um teste de validação rigoroso, os sistemas de controle que os utilizam conseguem apresentar bom desempenho. No entanto, HUANG *et al.* (2003) também destacaram que há modelos que aparentemente passariam em testes de validação; porém, quando usados em sistemas de controle, comprometem o desempenho do sistema. Esse aspecto particular do problema foi investigado detalhadamente por VEGA *et al.* (2008), que mostraram em um problema de polimerização que o bom desempenho do modelo estimado não garante necessariamente o bom desempenho do sistema de controle preditivo. O estudo de VEGA *et al.* (2008) foi validado com dados reais obtidos numa unidade piloto de polimerização.

**Tabela 3.1.** Problemas observados e necessidades de melhoria em sistemas de MPC  
(KANO e OGAWA, 2010).

<b>Problemas em Sistemas de MPC</b>	
<b>Problema: Geral</b>	
Baixa robustez na presença de erros de modelagem	26%
Dificuldade de sintonia	23%
Falta de habilidade para lidar com objetivos específicos	15%
Dificuldade de modelagem	12%
Outros	24%
<b>Problema: Manutenção</b>	
Transferência de tecnologia	44%
Resposta à degradação de desempenho	33%
Treinamento de operadores	7%
Dificuldade de sintonia	7%
Outros	9%
<b>Necessidades de melhoria: Geral</b>	
Melhorias das técnicas de modelagem	28%
Elucidação do efeito de métodos de estimação	25%
Simplificação da implementação	22%
Aumento do número de engenheiros	14%
Outros	11%
<b>Necessidades de melhoria: Teoria</b>	
Capacidade para lidar com mudanças das características do processo	26%
Esclarecimento da relação entre precisão do modelo e desempenho do sistema de MPC	24%
Capacidade para lidar com operação de partida e parada de unidades de processo	16%
Incorporação de conhecimento ao sistema de controle	16%
Capacidade para lidar com não-linearidades	13%
Outros	5%
<b>Necessidades de melhoria: Resposta a mudanças / Não-Linearidades</b>	
Capacidade para chaveamento entre múltiplos modelos lineares	28%
Aumento da robustez de sistemas de MPC lineares	25%
Uso de modelos variantes no tempo e não-lineares	18%
Incorporação de funções adaptativas em sistemas de MPC lineares	18%
Integração de outras técnicas com o sistema de MPC	11%

A capacidade do controlador lidar com incertezas de modelagem está muito relacionada com a estrutura do controlador preditivo (através, por exemplo, da ação *feedback*) e com a sintonia adotada. Por isso, na presença de erros de modelagem, deve haver um compromisso entre o desempenho e a robustez. Um comportamento rápido em malha fechada requer o uso de modelos bastante precisos. No entanto, devido às incertezas observadas e às dificuldades de modelagem, a maioria dos sistemas de MPC empregados industrialmente apresenta sintonia lenta ou pouco agressiva, de modo que o comportamento permaneça estável em diferentes pontos de operação (GARRIGA e SOROUSH, 2010). Além disso, falta conhecimento para determinar até que ponto a

sintonia pode ser acelerada, garantindo uma atuação mais rápida do sistema de controle, e para definir claramente o desempenho desejado.

### 3.3 Metodologias com Foco no Controle

Ao longo dos anos, vários trabalhos foram desenvolvidos com o objetivo de melhorar o processo de identificação, sintonia e o próprio algoritmo de controle utilizado em sistemas de MPC. Estes temas têm sido, na maioria das vezes, tratados de forma independente, embora estejam fortemente correlacionados. Além disso, é intuitivo concluir que o desenvolvimento de metodologias que melhorem cada uma das etapas envolvidas na implantação de um sistema de MPC tem o potencial de melhorar o desempenho final de todo o sistema. Neste trabalho, o interesse principal está focado nas metodologias que buscam relacionar desempenho e estrutura do sistema de controle.

Por muitos anos, pouca importância foi dada ao objetivo de controle durante a concepção de metodologias de identificação. A justificativa para tal comportamento, segundo GEVERS *et al.* (1996), é que por muito tempo o processo de identificação foi associado a uma busca pelo “sistema verdadeiro” e não a uma busca pelo modelo que produzisse a melhor “aproximação da realidade”. Uma vez reconhecido que a identificação é essencialmente uma busca por modelos aproximados, faz sentido projetar uma metodologia de identificação para atender especificamente à aplicação na qual o modelo deve ser utilizado (GEVERS *et al.*, 1996; LJUNG, 1999).

De acordo com DARBY e NIKOLAOU (2014), a estrutura do controlador deve orientar a faixa de frequências de interesse com que os sinais de teste devem ser projetados. No caso de controladores preditivos multivariáveis, todas as frequências são potencialmente importantes, uma vez que há interesse em obter boa precisão do modelo tanto em frequências altas, que direcionam as primeiras respostas do controlador, quanto em frequências baixas, utilizadas quando é necessário otimizar o desempenho econômico da planta e determinar o conjunto de restrições ativas do controlador.

SHIRT *et al.* (1994) fizeram uma comparação do desempenho de um controlador com modelos obtidos a partir de diferentes metodologias usadas para o projeto de experimentos. Conforme citado na Seção 2.3.1, as metodologias desenvolvidas para projetos de testes com o objetivo de obter um modelo dinâmico comumente têm como foco a frequência que se acredita ser a de interesse ou alguma

métrica relacionada à matriz de covariâncias dos parâmetros estimados. No entanto, o trabalho de SHIRT *et al.* (1994) mostra que, muitas vezes, a utilização de um projeto de testes baseado em métricas relacionadas à matriz de covariâncias não garante o melhor desempenho quando o modelo é utilizado em controle.

De acordo com os exemplos analisados por SHIRT *et al.* (1994), no caso ideal, em que as estruturas do modelo e das perturbações são conhecidas, a precisão dos parâmetros pode ser considerada uma métrica adequada para o bom desempenho final do sistema de controle. Entretanto, quando há incertezas a respeito das estruturas do modelo e das perturbações, obter parâmetros com boa precisão não garante o bom desempenho do sistema de controle. Esta questão torna-se bastante relevante na prática, uma vez que é grande a incerteza das estruturas do modelo e das perturbações. Além disso, a maior parte dos sistemas de MPC empregados na indústria utiliza modelos lineares para representar processos complexos.

PRONZATO (2008) destacou a relação existente entre o projeto ótimo de experimentos e o controle, apontando perspectivas para a realização de um projeto de testes voltado para o sistema de controle. De acordo com o autor, o projeto de testes pode ser definido utilizando um critério orientado ao objetivo final e baseado no custo  $C(\hat{\theta}|\bar{\theta})$  de usar o parâmetro  $\hat{\theta}$ , quando o valor verdadeiro do parâmetro é  $\bar{\theta}$ .

HUANG *et al.* (2003) fizeram uso de filtros antes de aplicar métodos de identificação, para que o modelo fosse mais adequado à aplicação de controle. No domínio da frequência, esta operação de filtragem equivale a ponderar os erros de modelagem na função objetivo utilizada para a estimação de parâmetros. Assim, o uso de pesos maiores em determinadas frequências faz com que o erro de modelagem seja menor nestas frequências. Por outro lado, o erro de modelagem nas outras frequências torna-se necessariamente maior. Este efeito é conhecido como efeito *water-bed* e, segundo os autores, pode ser importante ter um modelo mais preciso em algumas frequências críticas para garantir o bom desempenho do controlador.

ZAFIRIOU (1989) estudou condições de estabilidade e estabilidade robusta (na presença de incertezas do modelo) através da análise da contração do mapeamento (KREYSZIG, 1978) que leva controlador do instante  $k$  ao instante  $k + 1$ .

MAURATH *et al.* (1988) analisaram a estabilidade de sistemas SISO em malha fechada, na tentativa de determinar a incerteza tolerada e orientar o projeto de controladores.

REVERTER *et al.* (2014) propuseram uma metodologia para sintonia de controladores com base nos polos de um sistema equivalente, que consiste em aproximar o sistema em malha fechada por um sistema LTI (*linear time invariant*). Além disso, para simplificar a análise, a planta foi representada por um modelo de primeira ordem com tempo morto, limitando o número de polos.

SHRIDHAR e COOPER (1998a) desenvolveram uma expressão analítica para sintonizar o parâmetro de supressão de movimento com base nos conceitos de número de condicionamento e no cálculo analítico do controlador sem restrições com o processo aproximado por um modelo de primeira ordem com tempo morto no caso SISO. Os autores trabalharam também em uma extensão desta sintonia para o caso MIMO (SHRIDHAR e COOPER, 1998b).

BADWE *et al.* (2010) ressaltaram a influência de erros de modelagem no desempenho do controlador e propuseram uma forma de quantificar e distinguir estes efeitos através da análise de 3 fatores em malha fechada: o índice de sensibilidade relativa (RSI); o índice de sensibilidade de projeto (DSI); e a razão de variabilidade. É tratado também do aspecto de direcionalidade, pois foi observado que dependendo da mudança de *setpoint* realizada, o impacto do erro de modelagem pode ser diferente.

BAGHERI e KHAKI-SEDIGH (2014) desenvolveram uma forma de sintonizar para alcançar um desempenho desejado a partir da análise analítica de controlador multivariável formulado no espaço de estados, utilizando um modelo de primeira ordem com tempo morto.

GARRIGA e SOROUSH (2008) propuseram a sintonia de controladores MPC através do posicionamento dos polos do sistema em malha fechada no caso SISO. Com isso, foi utilizado o software MATHEMATICA para manipulação simbólica a fim de calcular as expressões analíticas para relacionar o posicionamento dos polos aos parâmetros de sintonia do controlador. Este trabalho apresenta semelhança com uma das análises propostas nesta tese, apresentada no Capítulo 6, uma vez que os polos em malha fechada são calculados analiticamente, porém com modelo representado por espaço de estados. No entanto, a solução encontrada para o cálculo dos polos no trabalho de GARRIGA e SOROUSH (2008) resulta em expressões grandes e complicadas, calculadas simbolicamente. Nesta tese, a solução encontrada para o cálculo dos polos do sistema em malha fechada não requer software para cálculo simbólico e resulta em expressões mais facilmente tratáveis e que permitem outras formas de extrapolação e análise.

TUFA e KA (2016) analisaram o efeito de erros de modelagem no desempenho de controladores MPC e propuseram uma forma de determinar o limite de erro a partir do qual ocorre deterioração significativa do desempenho do sistema de controle. Para isto, os índices IAE, ISE e ITAE foram avaliados em um cenário de mudança de *setpoint* e normalizados através da razão entre os índices calculados na presença de erros de modelagem e com modelo perfeito. O maior valor de índice normalizado foi considerado para verificar a deterioração do desempenho do sistema de controle.

Alguns algoritmos de controle foram projetados para garantir um desempenho adequado na presença de incertezas de modelagem. Seguem esta abordagem os sistemas baseados em controle adaptativo e controle robusto. Controladores adaptativos contêm parâmetros ajustáveis que permitem alcançar um determinado desempenho na presença de incertezas, podendo incluir estratégias de controle *feedback* e estimação de parâmetros em tempo real (YOON e CLARKE, 1994; ASTROM e WITTENMARK, 2008; OGUNNAIKE e RAY, 1994; GONÇALVES, 2017). Já os controladores robustos são razoavelmente insensíveis a diferenças entre o processo real e o modelo do processo utilizado para projetar o controlador. A ideia principal do controle robusto consiste em garantir, de acordo com uma determinada métrica (como a de horizonte infinito), que as especificações de projeto sejam satisfeitas mesmo para o pior cenário de desempenho do modelo. Uma breve revisão sobre este tema é apresentada a seguir, embora mais detalhes possam ser encontrados em SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2005).

### 3.3.1 Controle Robusto

O conceito de controlador robusto está relacionado ao fato de que o processo real não é exatamente igual ao modelo utilizado pelo controlador, o que pode resultar em perda de desempenho ou instabilidade. Esta característica é muito encontrada na prática, uma vez que os modelos identificados não são capazes de descrever perfeitamente todas as complexidades do processo. De um modo geral, controladores robustos são projetados de forma a tolerar erros na modelagem do processo (VENTIN, 2010).

Em geral, o controlador projetado para um processo nominal funciona bem para a planta nominal, mas pode apresentar resultado insatisfatório para plantas ligeiramente diferentes. No entanto, aumentar a robustez normalmente implica em projetar um

controlador menos agressivo e, portanto, de desempenho mais lento. O controle robusto busca um compromisso entre robustez e desempenho para um determinado nível de incerteza do modelo (HERZOG e KELLER, 2011).

Estudos sobre controle robusto envolvem a caracterização da incerteza do modelo do processo, a análise da robustez e a síntese de controladores robustos.

### 3.3.1.1 Incertezas do Processo

Uma vez que o conceito de controle robusto está relacionado com as incertezas de modelagem, torna-se necessário representá-las matematicamente. Neste sentido, as incertezas podem ser consideradas não estruturadas ou estruturadas. As incertezas não estruturadas podem ser representadas por uma função de transferência a ser somada ou multiplicada ao modelo original. Já as incertezas estruturadas referem-se a incertezas nos parâmetros do processo estudado e, embora sua representação seja muito mais próxima da realidade da planta, os algoritmos para análise e síntese de controladores robustos com este tipo de incertezas são muito mais complexos (HERZOG e KELLER, 2011).

### 3.3.1.2 Normas

Algumas normas são comumente utilizadas para descrever as incertezas de modelagem ou para formular o problema de otimização associado ao projeto do controlador robusto. Por exemplo, o controlador LQG (regulador linear quadrático gaussiano) é baseado na otimização da norma  $\|\cdot\|_2$ , enquanto o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  é resultado da otimização com base na norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

A norma  $\|\cdot\|_2$  de um vetor de sinais  $\mathbf{u}(t)$  pode ser definida como (HERZOG e KELLER, 2011):

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^T(t)\mathbf{u}(t)dt} \quad (3.1)$$

Interpretando a norma  $\|\cdot\|_\infty$  do ponto de vista de controle, tem-se que, no caso de um sistema SISO, esta norma equivale ao maior ganho do sistema sobre todas as

frequências; ou seja, o pico de magnitude no digrama de Bode ou o ponto mais afastado da origem no diagrama de Nyquist. No caso de sistemas multivariáveis, de modo semelhante, é possível considerar o maior valor singular da matriz de transferência como a generalização do ganho de Bode. A norma  $\|\cdot\|_\infty$  pode ainda ser interpretada como o maior fator de amplificação do sistema em resposta a uma entrada senoidal (LONGHI, 2001).

A norma  $\|\cdot\|_\infty$  de um sistema  $G$  é o maior valor singular para todas as frequências  $w$  (FISCHMAN, 1993).

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in \mathfrak{R}} \bar{\sigma}(G) \quad (3.2)$$

Utilizando o conceito de norma induzida, a norma-p induzida de um sistema matricial  $g(t)$  pode ser definida pela Equação (3.3).

$$\|g\|_{pi} = \max_{\|u\|_p \neq 0} \frac{\|y\|_p}{\|u\|_p} = \max_{\|u\|_p \neq 0} \frac{\|gu\|_p}{\|u\|_p} \quad (3.3)$$

Para a norma-2 induzida, tem-se, então:

$$\|g\|_{2i} = \max_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|gu\|_2}{\|u\|_2} = \max_{\|u\|_2=1} \|gu\|_2 \quad (3.4)$$

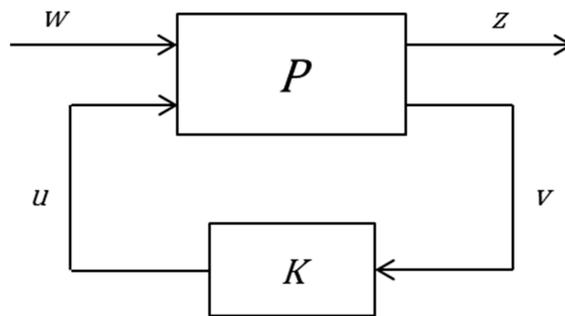
A norma-2 induzida indica o maior valor possível para amplificação do sinal de saída sobre o de entrada, quando a entrada é limitada em energia ( $\|u\|_2$ ). Para sistemas lineares e limitados, com transformada de Laplace que resulte em uma matriz de transferência estável, a norma  $\|\cdot\|_\infty$  equivale à norma-2 induzida. É importante notar que para sistemas não-lineares a norma-2 induzida existe, diferentemente da norma  $\|\cdot\|_\infty$  (LONGHI, 2001).

### 3.3.1.3 Projeto de Controladores Robustos $\mathcal{H}_\infty$

Um controlador possui estabilidade robusta quando é estável para todas as possíveis plantas, ao passo que é dito de desempenho robusto quando atende às especificações de desempenho para todas as possíveis plantas.

Considerando o controlador da Figura 3.1, a função de transferência da malha fechada (que relaciona  $w$  e  $z$ ) pode ser representada por  $F_l(P, K)$ . No projeto de um controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema ( $\|F_l(P, K)\|_\infty$ ) é minimizada para garantir estabilidade e/ou desempenho. Na prática, não é necessário obter um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo, pois, normalmente, é mais simples projetar um controlador subótimo em relação à norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Por isso, se  $\gamma_{min}$  for o valor mínimo para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  em relação a todos os possíveis controladores, o problema a ser resolvido para projetar o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser expresso pela Equação (3.5), com  $\gamma > \gamma_{min}$  (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2005).

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (3.5)$$

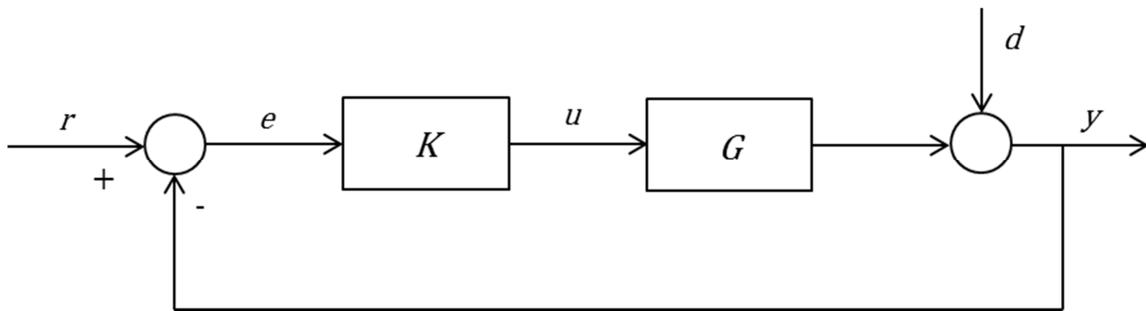


**Figura 3.1.** Representação esquemática de um controlador  $K$  atuando sobre o processo  $P$  (adaptado de SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2005).

A Equação (3.5) pode ser resolvida pelo método proposto por DOYLE *et al.* (1989) e a solução do problema se aproxima da solução ótima quando o valor de  $\gamma$  é reduzido iterativamente.

#### 3.3.1.4 Projeto de Controladores Robustos com Base na Função de Sensibilidade

Outra possibilidade no projeto de controladores robustos é a de aplicar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  a funções baseadas na função de sensibilidade. Estas funções são relevantes para diversas análises do desempenho do sistema de controle e podem ser definidas com base na Equação (3.6) e no diagrama da Figura 3.2, onde  $y$  é a variável controlada,  $d$  é uma perturbação,  $u$  é a variável manipulada,  $r$  é o valor de referência ou *setpoint*,  $e$  é o erro entre o valor da variável controlada e seu *setpoint*.



**Figura 3.2.** Diagrama esquemático de um sistema em malha fechada com um controlador  $K$  atuando sobre o processo  $G$  (adaptado de SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2005).

$$\begin{aligned}
 L &= GK \\
 S &= (1 + L)^{-1} \\
 T &= LS = 1 - S
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Na Equação (3.6),  $L$  é a matriz das funções de transferência em malha aberta,  $S$  é a matriz função de sensibilidade,  $T$  é a matriz função de sensibilidade complementar e  $I$  é a matriz identidade (VENTIN, 2010). Utilizando o conceito de função de sensibilidade, é possível projetar o controlador otimizando a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para  $S$ , com o objetivo de garantir desempenho; para  $T$ , com o objetivo de robustez e para diminuir a sensibilidade ao ruído; e para  $KS$ , com o objetivo de evitar ações de controle muito agressivas. Em geral, antes da aplicação da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , as funções  $S$ ,  $T$  e  $KS$  são ponderadas por funções peso  $W_i$  (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2005; SOUZA, 2017).

### 3.3.1.5 Projeto de Controladores Robustos com Base no Valor Singular Estruturado

O valor singular estruturado ( $SSV$  ou  $\mu$ ) é uma função que permite a generalização do valor singular ( $\bar{\sigma}$ ) e do raio espectral ( $\rho$ ) (HORN e JOHNSON, 1990), sendo utilizado para determinar condições necessárias e suficientes para obter estabilidade robusta e desempenho robusto (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2005). A utilização deste conceito permite a análise da estabilidade robusta para sistemas com incerteza estruturada (VENTIN, 2010).

O valor singular estruturado de uma matriz  $M$  pode ser definido pela Equação (3.7) (DOYLE, 1982).

$$\mu(M) = \frac{1}{\min\{k_m | \det(I - k_m M \Delta) = 0\}} \quad (3.7)$$

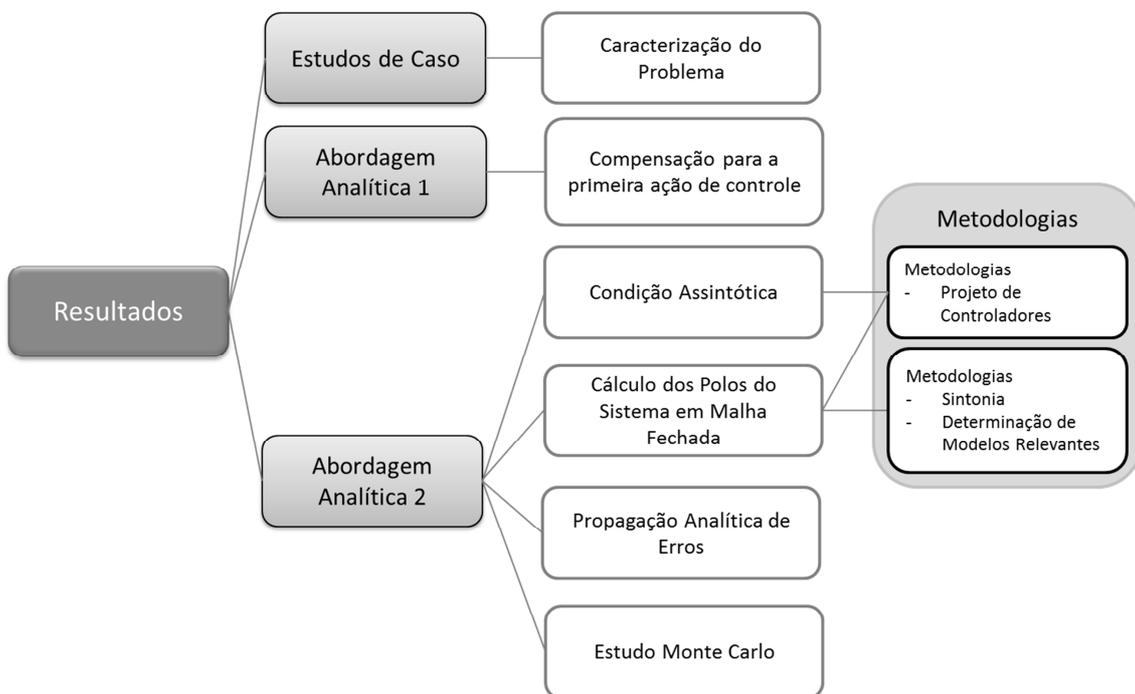
Valores elevados de  $\mu$  podem ser considerados “ruins”, pois significam que perturbações pequenas são capazes de tornar a matriz  $I - M\Delta$  singular.

Frequentemente, o projeto de controladores que minimizam a norma  $\mathcal{H}_\infty$  resulta em controladores demasiadamente conservadores. Assim, a síntese de controladores com base no valor singular estruturado busca uma otimização mais seletiva. Neste caso, uma norma baseada no valor singular estruturado é minimizada por meio de um procedimento iterativo (*DK iteration*) que envolve uma série de minimizações em relação ao controlador  $K$  e ao fator de escalonamento  $D$ . Este procedimento não garante convergência para um mínimo global nem local, porém tem apresentado bons resultados na prática (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2005; DOYLE e STEIN, 1981).

### 3.4 Comentários Finais

O histórico apresentado mostra que há muitas questões em aberto e relacionadas ao uso e desempenho de sistemas de MPC que precisam ainda ser melhoradas, a despeito dos 47 anos que se passaram após a publicação clássica de ASTROM e EYKHOFF (1971). Grande parte dos problemas apontados não é recente; porém, muitos permanecem não solucionados. O trabalho proposto pretende contribuir com alternativas de solução para algumas das dificuldades levantadas. Para isto, foram exploradas estratégias para aprimorar o entendimento das relações existentes entre qualidade do modelo, sintonia e desempenho do sistema de controle. A melhor compreensão destas relações pode fornecer subsídios importantes para o desenvolvimento de soluções para diferentes problemas associados, por exemplo, à precisão e avaliação de modelos. Os itens destacados em cinza na Tabela 3.1 são aqueles em que pode haver alguma contribuição deste trabalho, por serem mais diretamente relacionados aos temas de interesse dessa tese. Em especial, pretende-se explorar o tema definido como “esclarecimento da relação entre precisão do modelo e desempenho do sistema de MPC”.

Nos próximos Capítulos são apresentados os resultados obtidos neste trabalho, com o objetivo de relacionar e quantificar as influências dos erros de modelagem e da escolha da sintonia no desempenho de controladores MPC. Foram realizados estudos para caracterização do problema e análises teóricas envolvendo diferentes complexidades, sempre validadas por meio de exemplos. Os resultados das análises mais promissoras foram utilizados na proposição de novas metodologias para projeto e sintonia de controladores, bem como para a determinação da relevância de modelos. De forma resumida, os estudos desenvolvidos nesta tese podem ser representados pela Figura 3.3.



**Figura 3.3.** Representação esquemática dos estudos desenvolvidos nesta tese.

# **Capítulo 4 Caracterização da Influência de Erros de Modelagem e Sintonia no Desempenho de Sistemas MPC**

Neste capítulo é apresentada uma avaliação preliminar de alguns problemas discutidos no Capítulo 3, relacionados ao emprego de controladores preditivos e à associação existente entre o desempenho do controlador, a sintonia adotada e a modelagem do processo.

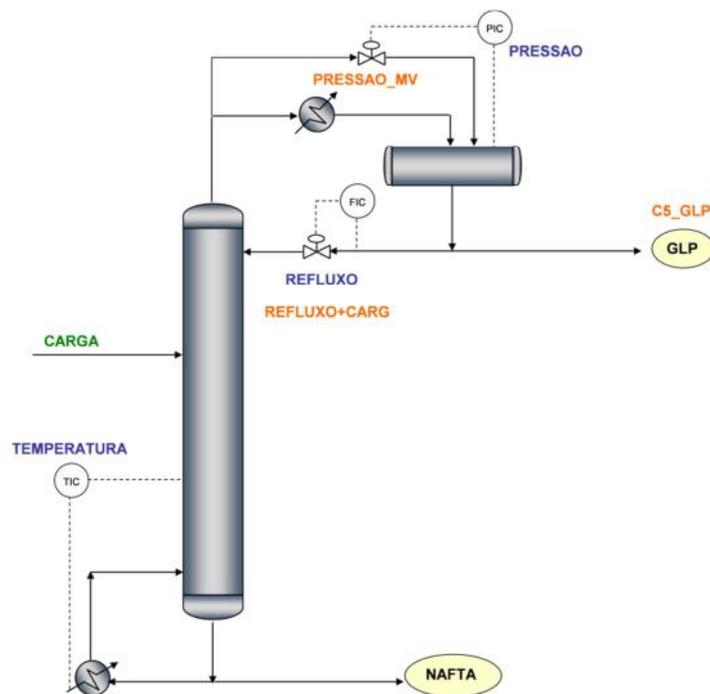
Dois estudos de caso foram utilizados para caracterizar alguns dos problemas enfrentados durante a implementação de um controlador preditivo e, portanto, a relevância do estudo proposto. O primeiro estudo de caso envolve a aplicação de um controlador preditivo em uma coluna desbutanizadora na presença de erros de modelagem. Neste exemplo, foram testados erros em diferentes regiões do modelo, na tentativa de caracterizar a existência ou não de regiões em que as incertezas de modelagem ofereceriam maior impacto sobre o desempenho do controlador. O segundo estudo de caso consiste na aplicação de um controlador preditivo em um caso SISO, com processo de primeira ordem com tempo morto. Neste exemplo, foi realizado um projeto de testes para identificação do modelo e aplicação do controle na presença de um ruído branco na variável de saída controlada. Para cada caso estudado, foram caracterizadas as regiões de confiança das ações do controlador e da variável controlada, bem como a influência do projeto de testes e da sintonia na forma desta região.

## **4.1 Controle Preditivo Aplicado a uma Desbutanizadora – Estudo de Caso 1**

Este estudo de caso teve como objetivo avaliar o efeito dos erros de modelagem sobre o desempenho de controladores preditivos multivariáveis, utilizando como

exemplo o modelo de uma coluna desbutanizadora presente em uma unidade de processamento de gás natural (UPGN). A carga da desbutanizadora é uma corrente de líquido de gás natural (LGN) que deve ser fracionada em dois produtos: o gás liquefeito de petróleo (GLP) e a nafta. O GLP, que sai no topo da coluna, é composto pelos hidrocarbonetos mais leves, que são basicamente o etano, o propano, os butanos e, em menor quantidade, os pentanos. A nafta, que sai no fundo da coluna, contém pentanos e hidrocarbonetos mais pesados da carga. A operação ideal desta coluna desbutanizadora, composta por 32 estágios de separação, consiste em maximizar a produção de GLP, que é o produto de maior valor agregado, e garantir o atendimento da sua especificação, que limita o teor de pentanos.

Neste exemplo, conforme mostra a Figura 4.1, há 3 variáveis manipuladas, 3 controladas e 1 perturbação. As variáveis manipuladas são os *setpoints* da temperatura do prato 18, da vazão de refluxo e da pressão de topo. As variáveis controladas são o teor de pentanos no GLP (C5\_GLP), que garante a especificação do produto; a soma da vazão de refluxo com a carga, por questões hidráulicas específicas desta torre; e a saída do controlador de pressão de topo, uma vez que, neste sistema em particular, a válvula em que o controlador de pressão atua opera frequentemente em ponto próximo da saturação. A perturbação principal é a vazão de carga. O problema simula a operação real de um processo da Petrobras.



**Figura 4.1.** Exemplo de coluna desbutanizadora com variáveis utilizadas pelo MPC.

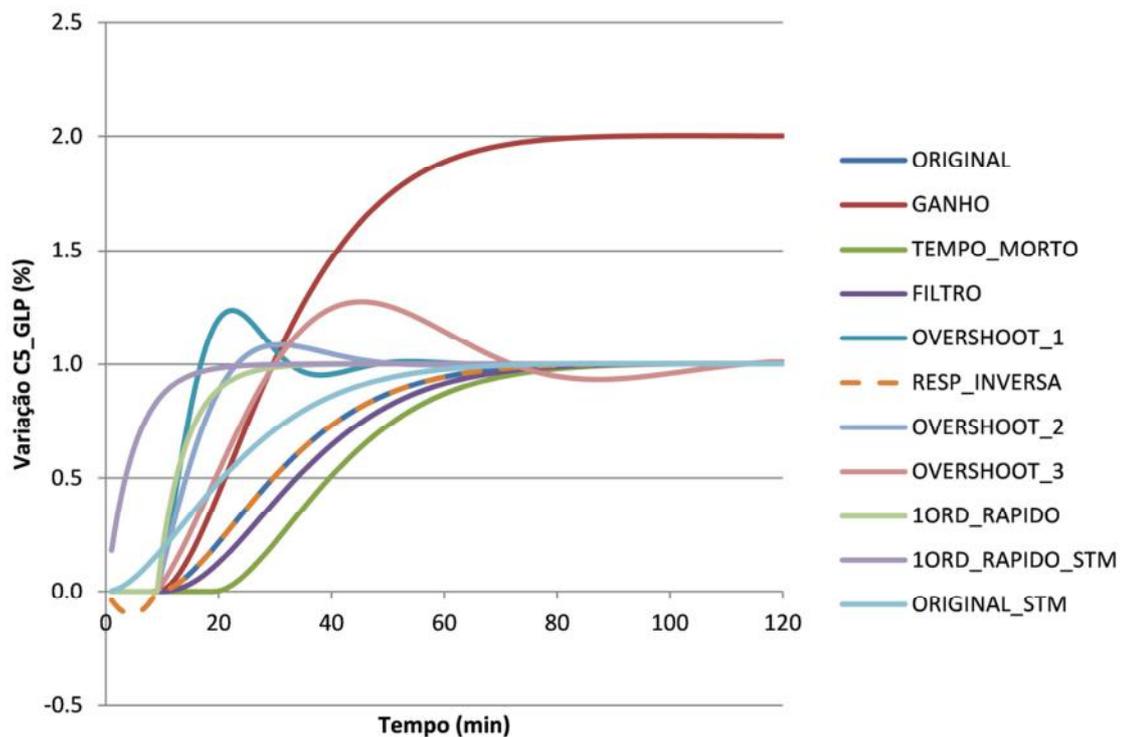
Para realizar as simulações deste estudo de caso, foi utilizado o programa BRLumina, da Petrobras, que simula a atuação de um controlador preditivo sobre um processo simulado (CAMPOS *et al.*, 2013). O controlador utilizado neste ambiente foi o CPM (Controlador Preditivo Multivariável), da Petrobras, que é um controlador baseado no algoritmo DMC com restrições (CAMPOS *et al.*, 2013). Foram utilizados modelos de resposta ao degrau para simular o processo e configurar o controlador preditivo. Em todos os casos simulados, a sintonia adotada para o controlador foi a mesma, com a priorização da variável controlada mais importante, o teor de pentanos no GLP. Considerando o tempo de estabilização do processo igual a 120 minutos, os horizontes de predição e controle foram mantidos em 180 e 60 minutos, respectivamente, conforme heurística recomendada para o controlador utilizado. De acordo com esta heurística, o horizonte de predição deve ser definido como um tempo de estabilização e meio, enquanto o horizonte de controle deve ser igual à metade do tempo de estabilização (CAMPOS *et al.*, 2013).

Foi simulado um caso base da ação do controlador, em que o modelo utilizado pelo MPC foi idêntico ao modelo da planta, e vários cenários com diferenças entre o modelo fornecido ao MPC e o modelo da planta. Nos cenários avaliados, os erros introduzidos nos modelos foram impostos à variável controlada C5\_GLP, que é a variável mais importante do exemplo proposto. As demais variáveis controladas (e respectivos modelos) permaneceram inalteradas. Portanto, os resultados serão analisados principalmente em termos do comportamento apresentado pela variável C5\_GLP. Os cenários simulados partiram de um teor de 1.6% de pentanos no GLP, que ultrapassa o limite máximo estabelecido para esta variável. Assim, espera-se que o controlador, em todos os casos, atue no sentido de enquadrar o teor de pentanos em até 1.3%.

Um resumo dos cenários testados é apresentado na Tabela 4.1. Os diferentes modelos referenciados nesta tabela podem ser observados na Figura 4.2, por intermédio das repostas do modelo, quando a variável manipulada TEMPERATURA é perturbada e a variável controlada C5\_GLP é observada em malha aberta. Os modelos apresentados na Figura 4.2 são os modelos de resposta ao degrau e indicam o quanto a variável controlada C5\_GLP varia ao longo do tempo, considerando a aplicação de um degrau unitário na variável manipulada TEMPERATURA no instante de tempo zero.

**Tabela 4.1.** Cenários avaliados da ação do MPC no caso 1.

	<b>Modelo MPC</b>	<b>Modelo Planta</b>
<b>Cenário Base</b>	Modelo Original (ORIGINAL)	Modelo Original (ORIGINAL)
<b>Cenário 1</b>	Modelo Original Multiplicado por 2 (GANHO)	Modelo Original (ORIGINAL)
<b>Cenário 2</b>	Modelo com Tempo Morto aumentado em 10 unidades de tempo em relação ao Original (TEMPO_MORTO)	Modelo Original (ORIGINAL)
<b>Cenário 3</b>	Modelo Original (ORIGINAL)	Modelo Original Multiplicado por 2 (GANHO)
<b>Cenário 4</b>	Modelo Original (ORIGINAL)	Modelo com Tempo Morto aumentado em 10 unidades de tempo em relação ao Original (TEMPO_MORTO)
<b>Cenário 5</b>	Modelo Original Filtrado (FILTRO)	Modelo Original (ORIGINAL)
<b>Cenário 6</b>	Modelo Original (ORIGINAL)	Modelo Original Filtrado (FILTRO)
<b>Cenário 7</b>	Modelo com Overshoot 1 (OVERSHOOT_1)	Modelo Original (ORIGINAL)
<b>Cenário 8</b>	Modelo Original (ORIGINAL)	Modelo com Overshoot 1 (OVERSHOOT_1)
<b>Cenário 9</b>	Modelo com Resposta Inversa (RESP_INVERSA)	Modelo Original (ORIGINAL)
<b>Cenário 10</b>	Modelo Original (ORIGINAL)	Modelo com Resposta Inversa (RESP_INVERSA)
<b>Cenário 11</b>	Modelo com Overshoot 2 (OVERSHOOT_2)	Modelo Original (ORIGINAL)
<b>Cenário 12</b>	Modelo Original (ORIGINAL)	Modelo com Overshoot 2 (OVERSHOOT_2)
<b>Cenário 13</b>	Modelo com Overshoot 3 (OVERSHOOT_3)	Modelo Original (ORIGINAL)
<b>Cenário 14</b>	Modelo Original (ORIGINAL)	Modelo com Overshoot 3 (OVERSHOOT_3)
<b>Cenário 15</b>	Modelo de 1ª ordem com Dinâmica mais Rápida (1ORD_RAPIDO)	Modelo Original (ORIGINAL)
<b>Cenário 16</b>	Modelo Original (ORIGINAL)	Modelo de 1ª ordem com Dinâmica mais Rápida (1ORD_RAPIDO)
<b>Cenário 17</b>	Modelo de 1ª ordem com Dinâmica mais Rápida sem Tempo Morto (1ORD_RAPIDO_STM)	Modelo Original sem Tempo Morto (ORIGINAL_STM)
<b>Cenário 18</b>	Modelo Original sem Tempo Morto (ORIGINAL_STM)	Modelo de 1ª ordem com Dinâmica mais Rápida sem Tempo Morto (1ORD_RAPIDO_STM)



**Figura 4.2.** Comparação entre modelos utilizados para a relação TEMPERATURA x C5\_GLP (o gráfico mostra o comportamento do C5\_GLP mediante um degrau unitário na TEMPERATURA).

O modelo original foi obtido a partir de dados reais da planta, enquanto os outros modelos foram gerados arbitrariamente através de manipulação do modelo original de modo a fornecer as características desejadas para o estudo proposto.

Os modelos de resposta ao degrau utilizados durante as simulações e apresentados na Figura 4.2 podem ser aproximadamente descritos pelas funções de transferência das Equações (4.1) a (4.11), em que  $Y(S)$  representa a variável dependente C5\_GLP e  $U(S)$  representa a variável independente TEMPERATURA:

- Modelo original (ORIGINAL)

$$Y(S) = \frac{1.02}{(16.6 S + 1)(16.6 S + 1)} e^{-9s} U(S) \quad (4.1)$$

- Modelo original com ganho multiplicado por 2 (GANHO)

$$Y(S) = \frac{2.04}{(16.6 S + 1)(16.6 S + 1)} e^{-9s} U(S) \quad (4.2)$$

- Modelo original com tempo morto aumentado em 10 unidade de tempo (TEMPO\_MORTO)

$$Y(S) = \frac{1.02}{(16.6 S + 1)(16.6 S + 1)} e^{-19 S} U(S) \quad (4.3)$$

- Modelo original sem tempo morto (ORIGINAL\_STM)

$$Y(S) = \frac{1.02}{(16.6 S + 1)(16.6 S + 1)} U(S) \quad (4.4)$$

- Modelo original filtrado (FILTRO)

$$Y(S) = \frac{1.02}{(16.6 S + 1)(16.6 S + 1)(14 S + 1)} e^{-9 S} U(S) \quad (4.5)$$

- Modelo com overshoot 1 (OVERSHOOT\_1)

$$Y(S) = \frac{2.04 S + 1.02}{20 S^2 + 4 S + 1} e^{-9 S} U(S) \quad (4.6)$$

- Modelo com overshoot 2 (OVERSHOOT\_2)

$$Y(S) = \frac{4.61 S + 1.02}{45.25 S^2 + 9.05 S + 1} e^{-9 S} U(S) \quad (4.7)$$

- Modelo com overshoot 3 (OVERSHOOT\_3)

$$Y(S) = \frac{5.05 S + 1.02}{148.45 S^2 + 9.9 S + 1} e^{-9 S} U(S) \quad (4.8)$$

- Modelo com resposta inversa (RESP\_INVERSA)

$$Y(S) = \frac{1.02 (-8.15 S + 1)}{(13.3 S + 1)(13.3 S + 1)} U(S) \quad (4.9)$$

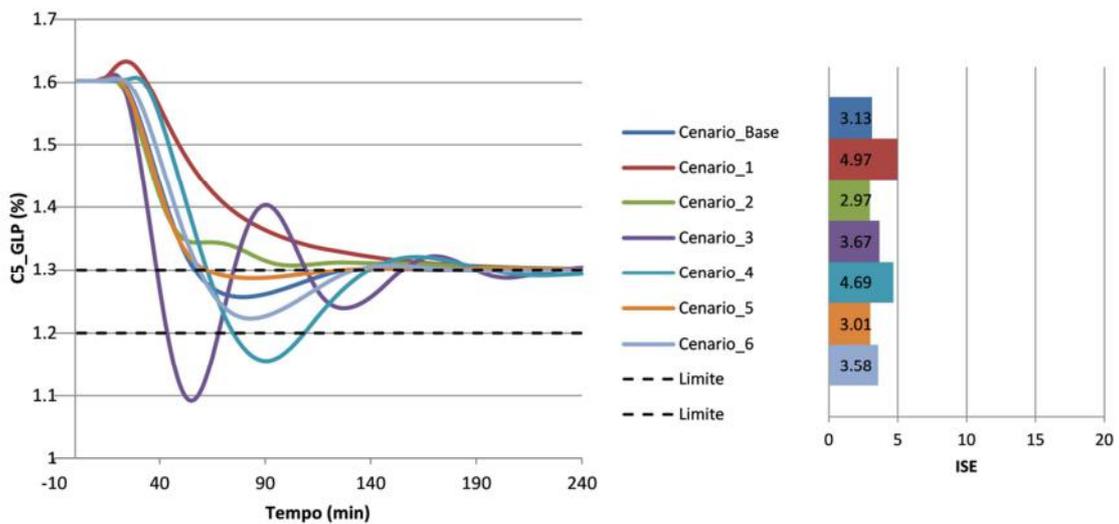
- Modelo de 1ª ordem com dinâmica mais rápida (1ORD\_RAPIDO)

$$Y(S) = \frac{1.02}{(5.2 S + 1)} e^{-9 S} U(S) \quad (4.10)$$

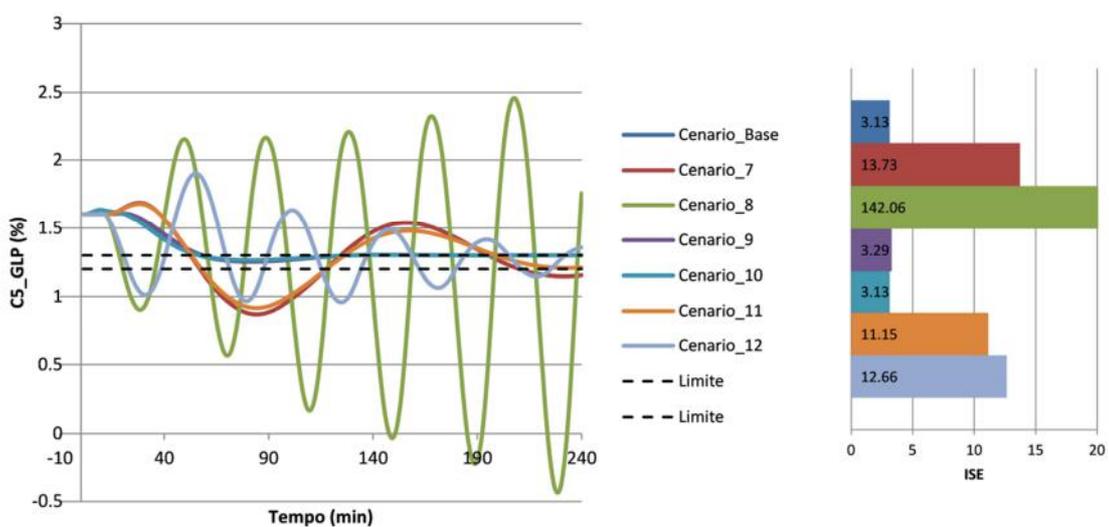
- Modelo de 1ª ordem com dinâmica mais rápida sem tempo morto (1ORD\_RAPIDO\_STM)

$$Y(S) = \frac{1.02}{(5.2 S + 1)} U(S) \quad (4.11)$$

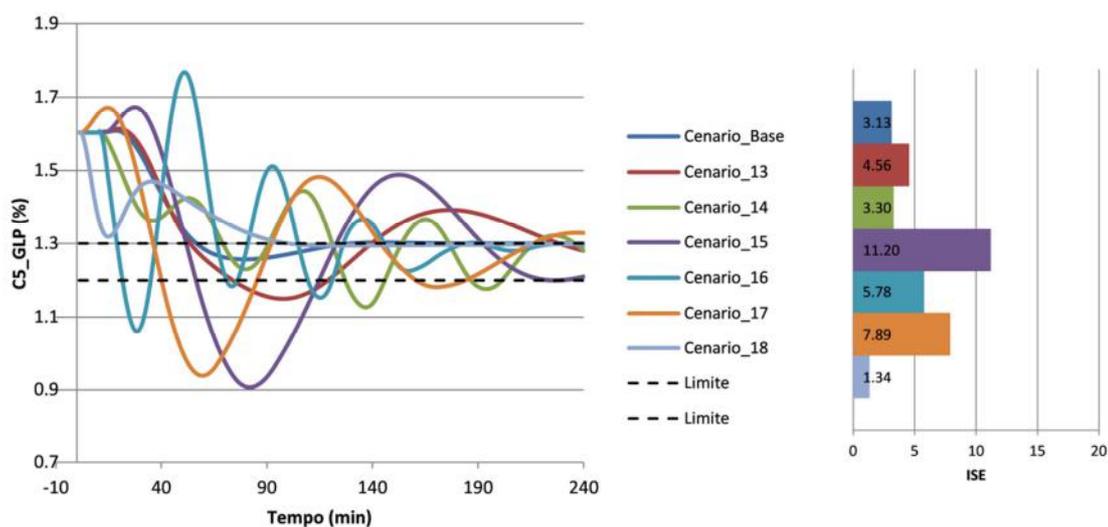
Foram realizadas simulações em malha fechada dos cenários apresentados na Tabela 4.1 durante 4 horas e os resultados obtidos serão apresentados a seguir em termos do comportamento da variável controlada C5\_GLP e do índice ISE (integral do erro quadrático) desta variável. Dessa forma, é possível avaliar como as diferenças entre os modelos podem afetar o desempenho do controlador em um problema bastante simples. Para possibilitar uma melhor visualização, os resultados das simulações dos 18 cenários foram divididos em 3 gráficos (Figuras 4.3, 4.4 e 4.5).



**Figura 4.3.** Trajetória e índice ISE da variável C5\_GLP nos cenários 1 a 6 no Estudo de Caso 1.



**Figura 4.4.** Trajetória e índice ISE da variável C5\_GLP nos cenários 7 a 12 no Estudo de Caso 1.



**Figura 4.5.** Trajetória e índice ISE da variável C5\_GLP nos cenários 13 a 18 no Estudo de Caso 1.

É inicialmente necessário destacar que os desempenhos obtidos são muito distintos e muito sensíveis aos erros de modelagem, mesmo em um problema muito simples. Em algumas situações, os resultados são inclusive instáveis. Portanto, as observações feitas a respeito da robustez desses controladores precisam ser devidamente contextualizadas (PEREZ, 2012).

De acordo com os testes realizados, o desempenho do MPC apresenta os piores resultados quando o modelo utilizado pelo controlador é, de maneira geral, de resposta mais lenta que o modelo da planta (Cenários 8, 12, 14 e 16). Este fato deve fazer com que o controlador tenha ações mais severas que o necessário, provocando oscilações e até mesmo instabilidade, como no Cenário 8, o que parece justificar abordagens conservadoras de sintonia, como discutido por GARRIGA e SOROUSH (2010). De outra forma, quando o controlador apresenta resposta mais rápida que a planta, o desempenho também é bastante afetado, embora, as oscilações provocadas sejam, em geral, de amplitudes e frequências menores do que nos casos anteriores. Portanto, a identificação das velocidades características dos processos são fundamentais para o bom desempenho do MPC, assim como ocorre no controle PID clássico.

Em relação ao tempo morto, nos casos analisados, o desempenho foi pior quando o tempo morto do modelo utilizado pelo controlador foi menor que o da planta (com a planta mais lenta, Cenário 4) do que no caso inverso (Cenário 2). A

sensibilidade ao tempo morto constitui um problema clássico da teoria de controle e é relevante para o desempenho do MPC (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007).

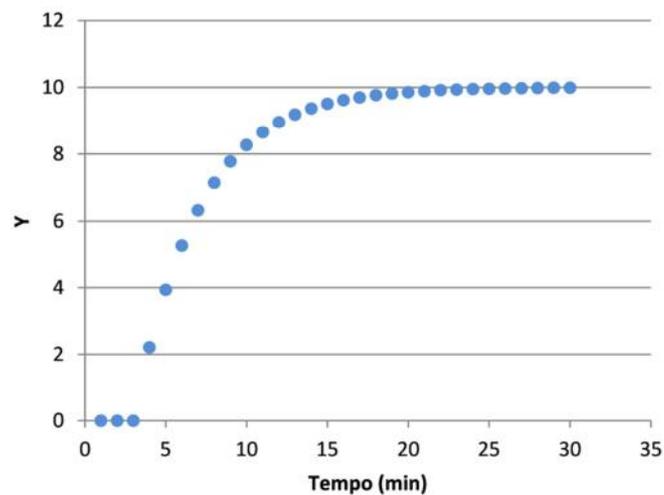
Alterações no ganho do modelo também provocaram perda de desempenho de controlador, sobretudo com ganho da planta maior que o ganho utilizado pelo controlador (Cenário 3). Neste caso, assim como no caso em que o controlador utiliza modelos de dinâmica mais lenta que a da planta, o controlador fez uso de ações maiores que as necessárias, prejudicando o desempenho. Esse também constitui um problema clássico da teoria de controle (TUFA e KA, 2016).

Nos cenários analisados, a degradação de desempenho do controlador foi mais significativa em função de erros na dinâmica do que no ganho estático dos modelos. No entanto, uma análise mais criteriosa deve ser feita, uma vez que este comportamento pode mudar em função da amplitude dos erros estabelecidos. Na comparação entre os cenários 15 e 17 e entre os cenários 16 e 18, pode-se perceber que o problema de desempenho devido a erros na dinâmica do processo são mais significativos nos casos em que o modelo apresenta tempo morto (Cenários 15 e 16) do que nos casos sem tempo morto (Cenários 17 e 18). Os resultados deste estudo poderiam ser usados de modo a orientar a estimação de parâmetros durante a etapa de identificação do modelo de processo a ser utilizado pelo algoritmo de MPC. O que é surpreendente é que aparentemente, em um cenário de sintonia não conservadora, como foi usado neste exemplo, o MPC é sensível a todos os problemas clássicos de teoria de controle de processos em um sistema muito simples. Isso torna o cenário desalentador e talvez indique que uma das principais missões do MPC seja a adaptação automática do sistema de controle às não linearidades do processo real ou a adaptação automática genérica em cenários de sintonia conservadora.

Diante dos resultados obtidos, este estudo de caso pode ser convenientemente utilizado em outras análises mais profundas, com o objetivo de estabelecer um vínculo quantitativo entre os problemas de controle e identificação. De qualquer forma, o estudo mostra que a importância do modelo talvez seja subdimensionada nos estudos de simulação, que tendem sempre de alguma forma a propor estruturas de modelo de referência que são frequentemente similares às do modelo utilizado para representar a planta. O estudo mostra que pequenas diferenças existentes entre o modelo de referência e a planta, no entanto, podem causar grandes mudanças no comportamento do processo.

## 4.2 Análise da Região de Confiança– Estudo de Caso 2

O objetivo deste estudo de caso é verificar como a propagação dos erros de modelagem e do ruído pode afetar o desempenho de controladores preditivos, com auxílio da análise das regiões de confiança das variáveis de processo sob a atuação deste tipo de controlador. Para facilitar a análise do problema proposto, foi utilizado um modelo SISO, com o processo definido pela função de resposta ao degrau da Figura 4.6, equivalente a uma função de transferência com ganho estático igual a 10, constante de tempo igual a 4 e tempo morto de 3 minutos, tendo sido estes parâmetros adotados arbitrariamente. Modelos de primeira ordem com tempo morto são modelos simples, embora encontrem ampla gama de aplicações, sendo frequentemente utilizados para representar processos químicos.



**Figura 4.6.** Modelo do processo do Estudo de Caso 2 - Resposta da variável controlada  $Y$  a um degrau na variável manipulada  $U$ .

Neste estudo, considerou-se que a variável de saída  $Y$  está sujeita a erros que seguem uma distribuição uniforme de probabilidades, com variância igual a 0.01. Considerando que a variável  $Y$  pode apresentar variações típicas de 10 unidades, a escolha deste valor para a variância significa que a variável  $Y$  possui incerteza de  $\pm 2\%$  desta amplitude. Vale ressaltar que a variável  $Y$  está sempre sujeita a erros deste tipo, seja durante a realização do projeto de experimentos ou durante a aplicação do controlador. O controlador preditivo implementado considerou o caso sem restrições, para o qual é possível obter solução analítica, conforme apresentado na Seção 2.2. Neste

estudo de caso foi adotado um horizonte de controle igual a 10 e de predição igual a 30 instantes de amostragem. Nos cenários em que os parâmetros  $Q$  e  $R$  não foram alterados, foram adotados de modo arbitrário valores base de 1 e 0.1, respectivamente.

Foi estabelecido também um cenário para observar o comportamento do controlador. O cenário escolhido consistiu na realização de uma mudança de *setpoint* da variável controlada  $Y$ , com aumento de 5 unidades no instante 30 minutos e simulação da atuação do controlador por mais 80 minutos. Estes valores garantem uma mudança significativa da variável controlada  $Y$ , compatível com o modelo que a relaciona com a variável manipulada  $U$ , além de uma inicialização adequada e tempo suficiente para a atuação do controlador. O objetivo principal é mostrar em um exemplo simples que o desempenho do modelo e do controlador não estão necessariamente acoplados.

#### 4.2.1 Caracterização do Problema Proposto com Diferentes Projetos de Experimentos

O primeiro teste realizado visou à caracterização da influência dos erros de modelagem sobre o desempenho do controlador, utilizando diferentes projetos de experimentos para a variável manipulada  $U$ . A duração total dos testes foi de 155 minutos, que é superior a 5 vezes o tempo de estabilização do processo, sendo os 30 minutos iniciais destinados à inicialização. Em todos os testes, os degraus aplicados à variável  $U$  foram sempre unitários. Foram testadas 4 possibilidades para o projeto de experimentos (Figura 4.7):

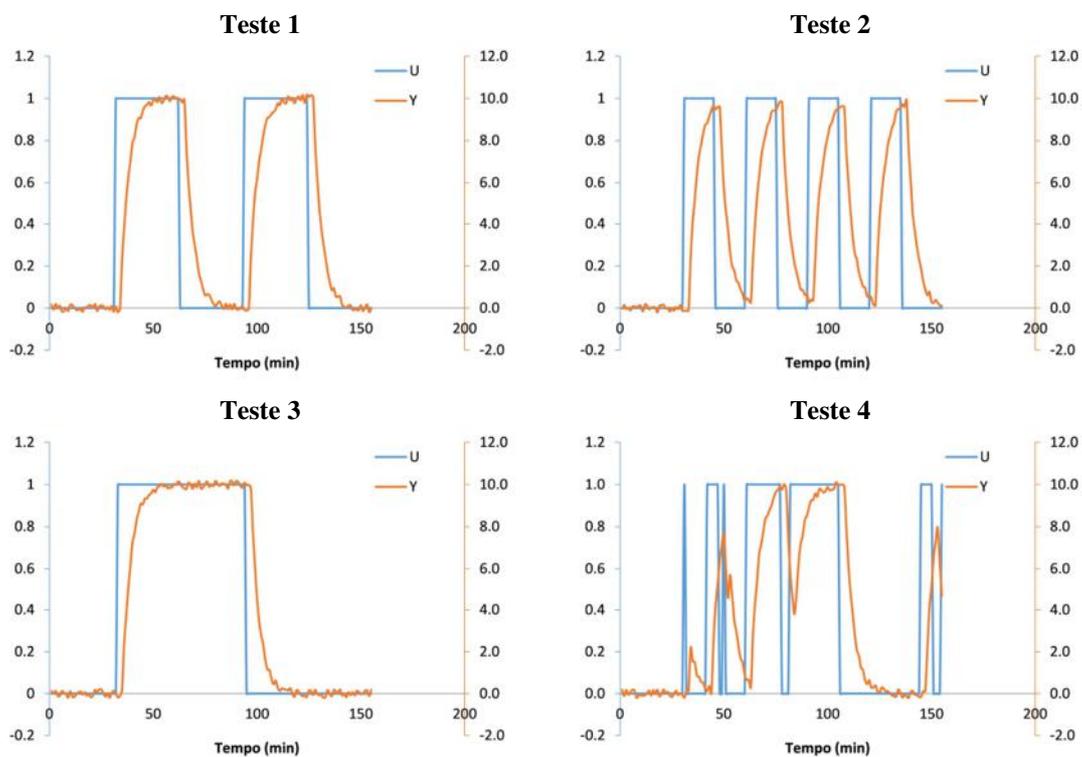
- Teste 1: 4 degraus unitários igualmente espaçados, sendo um a cada 30 minutos. Neste teste, o intervalo entre cada degrau é maior que o tempo de estabilização do processo, o que faz com que a variável  $Y$  atinja o estado estacionário entre cada degrau. Este projeto de testes explora o maior número de degraus em  $U$ , de modo que a variável  $Y$  atinja o estado estacionário dentro do tempo total de teste estipulado;

- Teste 2: 6 degraus unitários igualmente espaçados, sendo um a cada 15 minutos. Durante este teste, um novo degrau é aplicado em  $U$  antes que a resposta da variável  $Y$  estabilize devido a um degrau anterior em  $U$ . A variável  $Y$  só atinge o estado estacionário após o último degrau aplicado, até que complete o tempo total de teste;

- Teste 3: 2 degraus unitários igualmente espaçados, sendo um a cada 60 minutos. Neste teste, assim como no teste 1, os degraus são aplicados em intervalos maiores do que o tempo de estabilização do processo. Porém, no teste 3 os intervalos

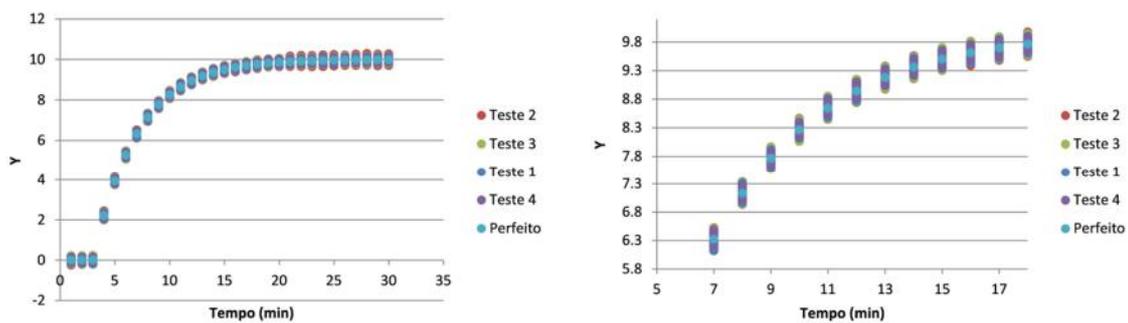
são ainda maiores, o que faz com que a variável  $Y$  fique mais tempo em estado estacionário após um degrau e com que menos degraus possam ser aplicados à variável  $U$  dentro do tempo total de teste;

- Teste 4: projeto de experimentos GBN, com degraus unitários e probabilidade de chaveamento de 0.9. Neste teste, os degraus são aplicados aleatoriamente durante todo o tempo de teste. Esta aleatoriedade depende da definição da probabilidade de chaveamento; ou seja, da probabilidade de aplicação de um novo degrau, que pode ser considerada como um parâmetro de sintonia desta modalidade de teste.



**Figura 4.7.** Testes realizados para identificação do modelo dinâmico no Estudo de Caso 2.

Cada projeto de teste foi aplicado 500 vezes ao processo representado pela Figura 4.6 e o modelo de resposta ao degrau foi identificado em cada caso através de um procedimento de estimação de parâmetros, conforme descrito na Seção 2.3.3. Com isso, para cada projeto de teste, foram identificados 500 modelos diferentes, o que permitiu construir a região de confiança do modelo identificado em cada caso. O conjunto de todos os modelos identificados para cada projeto de teste pode ser observado na Figura 4.8 em termos da resposta de  $Y$  a um degrau unitário em  $U$  em duas escalas diferentes, para melhor visualização.



**Figura 4.8.** Região de confiança dos modelos de resposta ao degrau identificados a partir de diferentes projetos de testes no Estudo de Caso 2.

Visualmente, as regiões de confiança dos modelos estimados utilizando diferentes projetos de teste parecem suficientemente próximas. Ainda assim, pode-se notar que foi possível obter a região mais estreita ao utilizar o projeto de teste 4, enquanto a região mais larga foi obtida quando se utilizou o projeto de teste 2. Os resultados podem ser analisados também sob o ponto de vista da matriz de correlação dos parâmetros em cada caso.

Como foi identificado um modelo de resposta ao degrau com 30 coeficientes, cada modelo é composto por 30 parâmetros “s” que podem ser analisados por meio das respectivas matrizes de correlação (Figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12). Na matriz de covariâncias, a diagonal principal representa a variância de cada parâmetro e os demais valores representam a covariância de cada par de parâmetros. Para melhor visualização, os valores diferentes de zero das matrizes de correlação e de covariâncias foram destacados em azul.



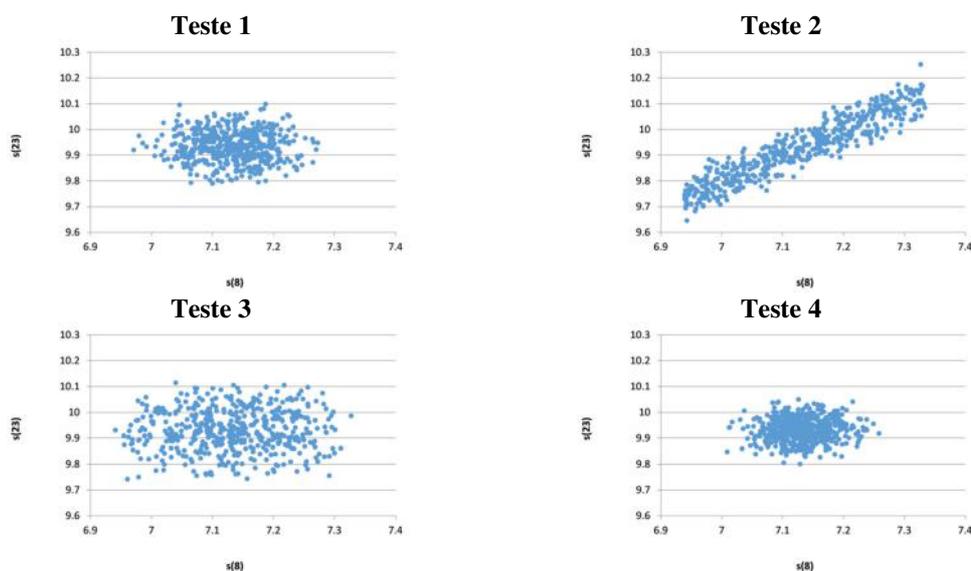






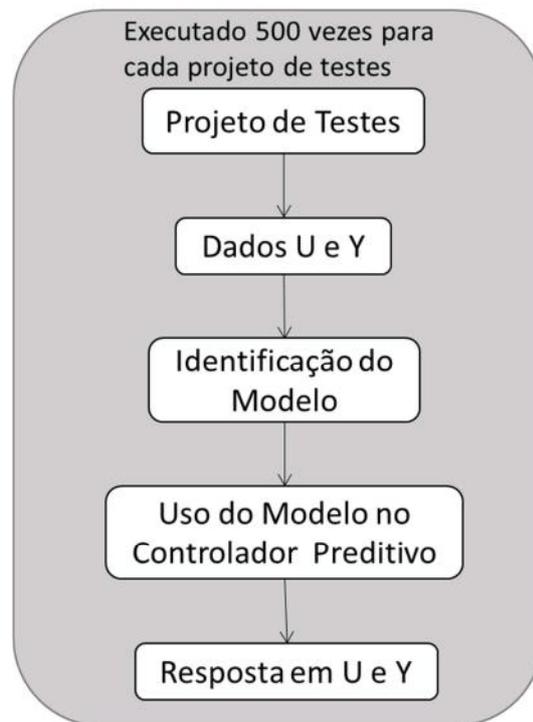
Considerando a qualidade dos parâmetros estimados, os melhores resultados foram obtidos com o projeto de testes 4, que apresentou menor variância dos parâmetros, apesar da correlação entre parâmetros não ser exatamente zero. Neste caso, os valores de correlação foram muito pequenos e não chegaram a prejudicar a estimação. O projeto de testes 1 também apresentou resultado satisfatório, embora com maior variância dos parâmetros, quando comparado ao projeto de testes 4. No caso do projeto de testes 1, a matriz de correlação foi diagonal, não havendo correlação entre os parâmetros, o que é uma característica desejável. O projeto de testes 1 possui esta propriedade em função dos intervalos entre os degraus aplicados à variável  $U$  terem sido maiores do que o tempo de estabilização do processo, o que permitiu a estimação de cada parâmetro adequadamente. No entanto, a variação de frequências no projeto de testes 4 permite a estimação mais precisa dos parâmetros do modelo.

Os modelos obtidos com o projeto de teste 2 apresentaram forte correlação entre os pares de parâmetros  $s(1)$  e  $s(16)$ ,  $s(2)$  e  $s(17)$ , ...,  $s(8)$  e  $s(23)$ , ...,  $s(15)$  e  $s(30)$ , como pode ser observado na Figura 4.13. Isto foi devido ao curto intervalo igualmente espaçado entre os degraus aplicados à variável  $U$  neste teste, o que fez com que a resposta do processo em termos da variável  $Y$  fosse pobre em algumas frequências, provocando a correlação observada entre os parâmetros. Graficamente, uma comparação entre os resultados dos parâmetros  $s(8)$  e  $s(23)$  para os 4 projetos de teste é apresentada na Figura 4.13 e confirma o resultado obtido. Portanto, parece claro que a boa identificação dos parâmetros do modelo impõe a excitação independente das frequências do processo.



**Figura 4.13.** Correlação entre os parâmetros  $s(8)$  e  $s(23)$  do modelo de resposta ao degrau identificado a partir de diferentes projetos de testes no Estudo de Caso 2.

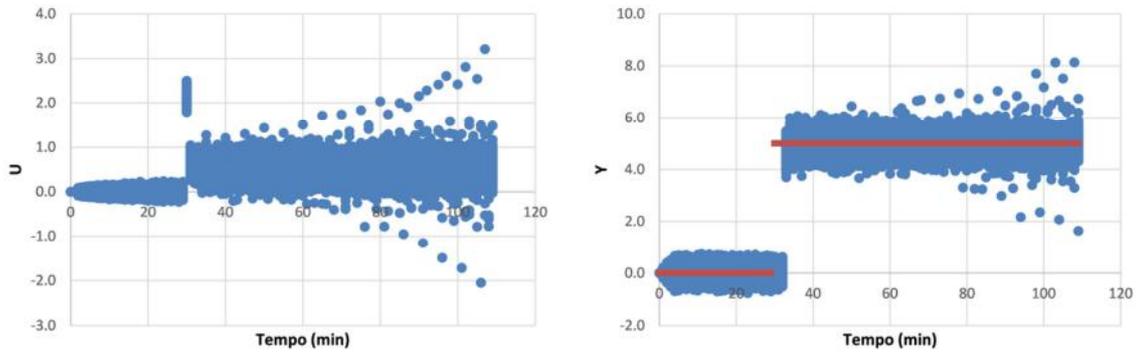
Uma vez obtidos modelos utilizando diferentes projetos de testes, a etapa seguinte consistiu em verificar o comportamento de cada um destes modelos, quando utilizados em um controlador preditivo. Para montar a região de confiança das ações de controle, em cada uma das vezes em que o projeto de testes foi aplicado ao processo foi identificado um modelo e este modelo foi utilizado em um controlador preditivo sem restrições. Este procedimento está representado no diagrama da Figura 4.14. Além disso, para permitir a comparação dos resultados, o procedimento foi executado também considerando um controlador baseado em modelo perfeito; ou seja, um modelo idêntico ao da planta. Neste caso, a região de confiança obtida foi a menor possível, sendo resultado apenas do erro existente na medição da variável controlada  $Y$  durante a aplicação do algoritmo de controle preditivo.



**Figura 4.14.** Procedimento utilizado para determinar a região de confiança para cada projeto de testes no Estudo de Caso 2.

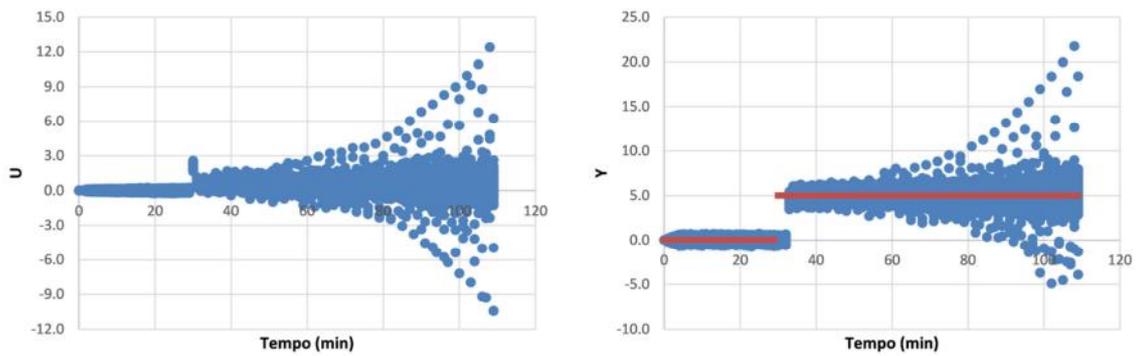
As Figuras 4.15 a 4.19 mostram os resultados individuais obtidos para as regiões de confiança, considerando os diferentes projetos de testes propostos e mantendo inalterados os parâmetros de sintonia ( $Q = 1$  e  $R = 0,1$ ). A Figura 4.20 mostra todos os resultados das regiões de confiança obtidas nos projetos de teste propostos em um mesmo gráfico para melhor comparação.

### Teste 1



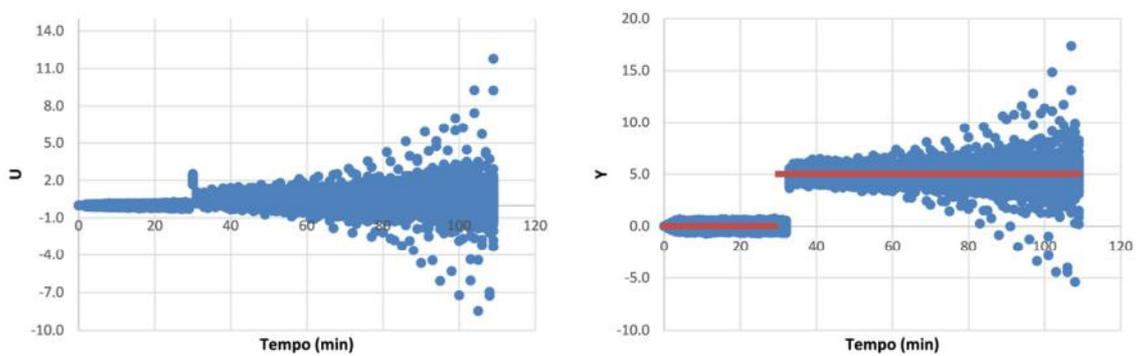
**Figura 4.15.** Regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada com modelo identificado a partir do projeto de teste 1 no Estudo de Caso 2.

### Teste 2



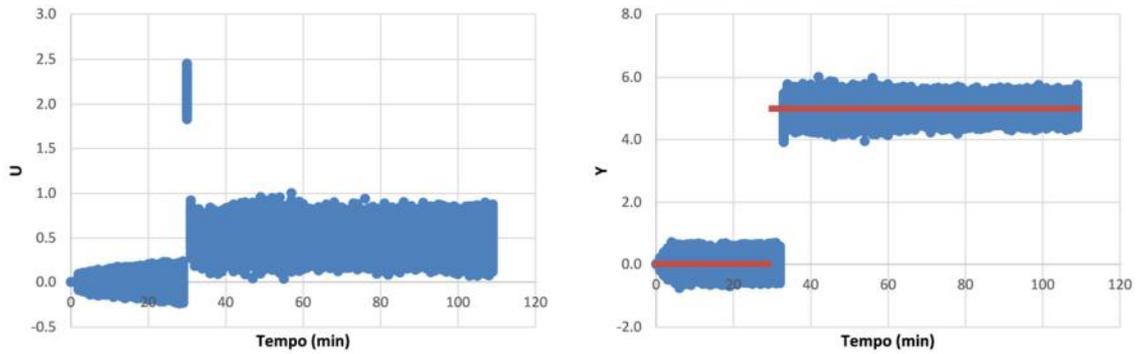
**Figura 4.16.** Regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada com modelo identificado a partir do projeto de teste 2 no Estudo de Caso 2.

### Teste 3



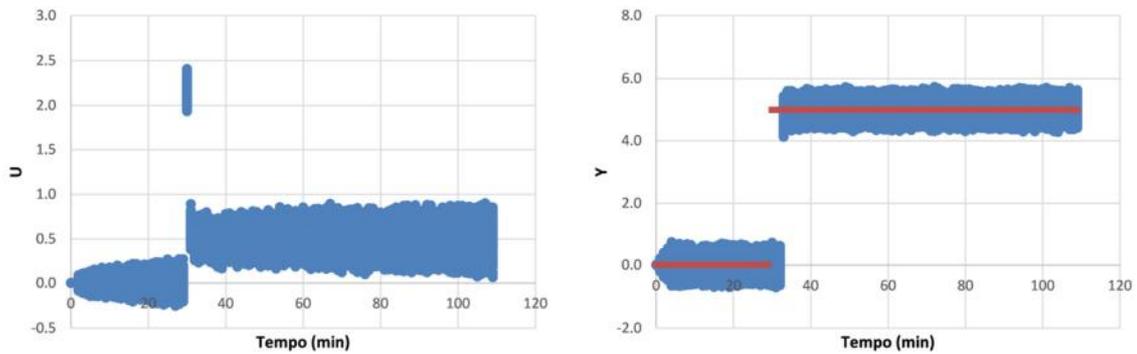
**Figura 4.17.** Regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada com modelo identificado a partir do projeto de teste 3 no Estudo de Caso 2.

#### Teste 4

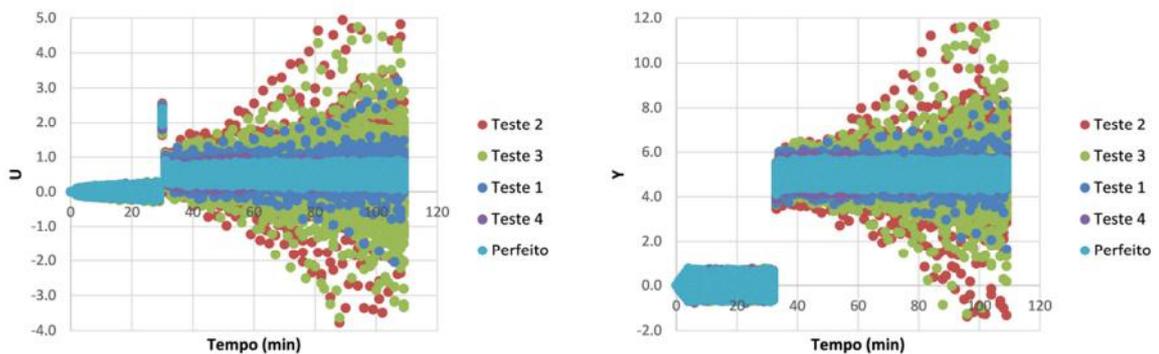


**Figura 4.18.** Regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada com modelo identificado a partir do projeto de teste 4 no Estudo de Caso 2.

#### Modelo Perfeito



**Figura 4.19.** Regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada com modelo perfeito e erro em Y durante a simulação do controlador no Estudo de Caso 2.



**Figura 4.20.** Regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada com modelo identificado com dados obtidos a partir de diferentes projetos de teste no Estudo de Caso 2.

Com base nos resultados apresentados nas Figuras 4.15 a 4.20, o projeto de teste executado para a identificação do modelo a ser utilizado em um controlador preditivo é capaz de afetar o desempenho final do sistema de controle. Nos casos simulados, quanto maior foi a precisão do modelo utilizado pelo controlador, menor foi a região de confiança obtida, como era esperado, indicando a menor variabilidade do processo. Nas condições do exemplo simulado, apenas o projeto de teste 4 foi capaz de resultar em uma região de confiança com ausência de instabilidade. Esta foi a resposta que mais se aproximou da resposta obtida com um modelo perfeito. Os piores resultados foram os obtidos a partir dos projetos de testes 2 e 3, o que já poderia ser esperado, uma vez que estes também foram os piores projetos de testes em termos de variância (maior variância dos parâmetros) e correlação dos parâmetros do modelo estimado. Isso parece estabelecer uma vez mais o vínculo entre o problema de controle e o problema de identificação. Deve ser observado, em particular, que a Figura 4.8 indica que os desempenhos de todos os modelos identificados podem ser considerados excelentes, o que indica a enorme sensibilidade do controlador a pequenas incertezas de modelagem no cenário proposto neste estudo de caso.

É interessante notar que, neste exemplo, o desempenho do sistema de controle utilizando diferentes projetos de teste seguiu o comportamento esperado, tendo em vista os resultados obtidos para a variância e a correlação dos parâmetros do modelo estimado em cada caso. No entanto, é importante ressaltar que foi fixada a sintonia do controlador e que a única fonte de erro deste exemplo foi o erro na variável controlada  $Y$ , não havendo características como a existência de perturbações não medidas ou a presença de não linearidades que exigissem idealmente uma estrutura de modelo mais complexa. É surpreendente que modelos tão similares na identificação resultem em desempenhos tão distintos no controle, reforçando observações de VEGA *et al.* (2008) e a necessidade de avaliar o problema de modelagem com o máximo rigor.

#### 4.2.2 Influência da Sintonia

Outro ponto verificado foi a influência dos parâmetros de sintonia do controlador sobre a região de confiança das variáveis manipulada e controlada. Para isto, foi utilizado o projeto de testes 1, que apresentou resultados adequados, embora não tenham sido os melhores resultados descritos na Seção 4.2.1. O parâmetro de

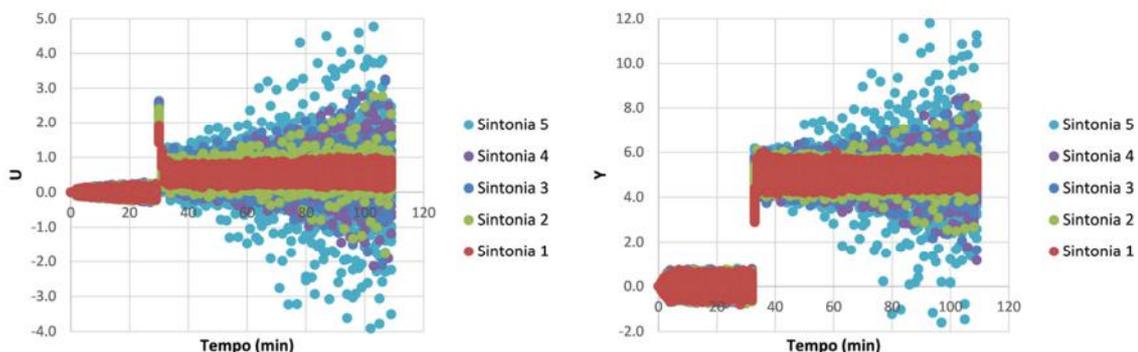
sintonia que pondera a variável controlada ( $Q$ ) foi modificado, conforme mostra a Tabela 4.2, mantendo-se o parâmetro de sintonia ( $R$ ) fixo. O mesmo foi feito em relação ao parâmetro de sintonia que pondera a variável manipulada  $U$ , também denominado parâmetro de supressão de movimento ( $R$ ), como mostrado na Tabela 4.3. O procedimento da Figura 4.14 foi, então, realizado para cada um dos casos de diferentes sintonias avaliados. Os valores dos parâmetros mostrados nas Tabelas 4.2 e 4.3 foram escolhidos arbitrariamente de modo que fossem testados cenários com sintonias mais rápidas e mais lentas quando comparadas com a sintonia base adotada na Seção 4.2.1. Os resultados da análise da influência da sintonia na forma proposta são apresentados nas Figuras 4.21 e 4.22.

**Tabela 4.2.** Variação do parâmetro de sintonia  $Q$  no Estudo de Caso 2.

SINTONIA	$Q$	$R$
Sintonia 1	0.1	0.1
Sintonia 2	0.5	0.1
Sintonia 3	1	0.1
Sintonia 4	2	0.1
Sintonia 5	10	0.1

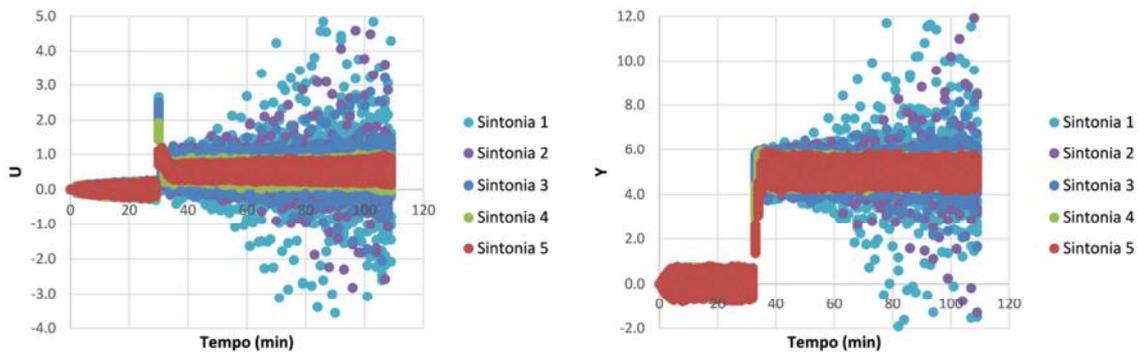
**Tabela 4.3.** Variação do parâmetro de sintonia  $R$  no Estudo de Caso 2.

SINTONIA	$Q$	$R$
Sintonia 1	1	0.01
Sintonia 2	1	0.05
Sintonia 3	1	0.1
Sintonia 4	1	1
Sintonia 5	1	10



**Figura 4.21.** Regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada utilizando diferentes valores dos parâmetros de sintonia  $Q$  (Tabela 4.2) no Estudo de Caso 2.

O primeiro caso testado consistiu em variar o parâmetro de sintonia  $Q$ , que pondera a variável controlada  $Y$ , de acordo com a Tabela 4.2. De acordo com a Figura 4.21, o parâmetro de ponderação das variáveis controladas apresenta forte influência sobre as regiões de confiança estudadas. Assim, dependendo do valor adotado para o parâmetro  $Q$ , é possível obter resultados de regiões de confiança que apresentem instabilidades ou não, para um mesmo projeto de testes. Os resultados obtidos mostram que, como era esperado, quanto mais rápida é a sintonia (com valores altos de  $Q$ ), maior é a tendência à instabilidade e, portanto, mais espalhada é a região de confiança. O resultado confirma a sensibilidade do desempenho do sistema em relação à dinâmica do controlador, justificando implementações conservadoras.



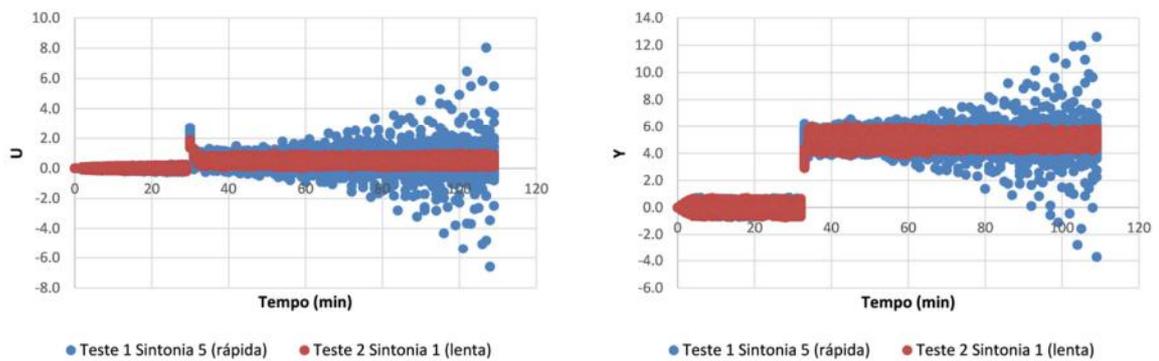
**Figura 4.22.** Regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada utilizando diferentes valores dos parâmetros de sintonia  $R$  no Estudo de Caso 2.

Em um segundo estudo, foi feita a análise de sensibilidade ao parâmetro de sintonia  $R$ , que pondera a variável manipulada  $U$ , de acordo com a Tabela 4.3. Resultado similar ao obtido pela variação do parâmetro  $Q$  foi obtido com a variação do parâmetro  $R$ . Da mesma forma, foi possível verificar forte efeito sobre as regiões de confiança analisadas. Quanto mais rápida foi a sintonia (com valores baixos de  $R$ ), maior foi a tendência de instabilizar o processo (Figura 4.22).

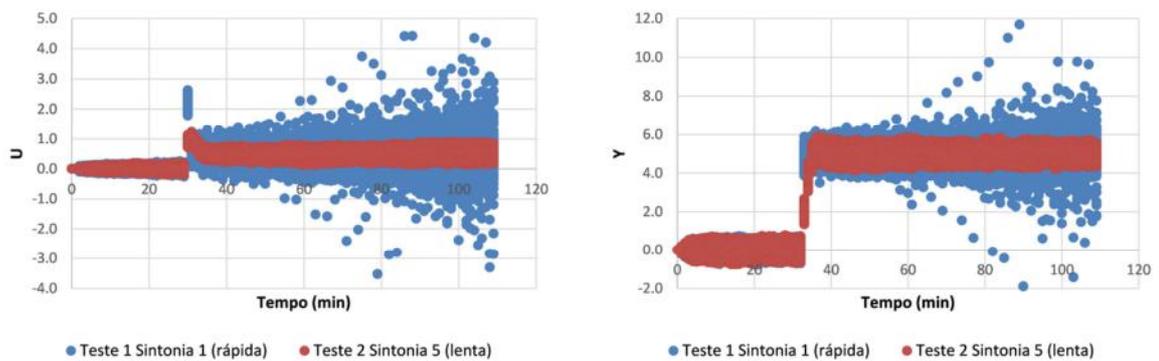
Estes resultados também estão de acordo com os resultados esperados, segundo a interpretação proposta por OGUNNAIKE (1986), já que, quanto maiores forem os valores de  $R$ , menores devem ser os números de condicionamento da matriz  $(\underline{S}^T \underline{Q} \underline{S} + \underline{R})$ , que aparece na Equação (2.4). Com isso, menor deve ser a influência dos erros em  $\underline{S}$  sobre as ações de controle  $\Delta \underline{U}(k)$  resultantes (OGUNNAIKE, 1986). Na verdade, no

caso SISO os parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$  são correlacionados, de forma que o resultado da aplicação do controlador depende da relação  $Q/R$ .

Como os resultados da sensibilidade das regiões de confiança aos parâmetros de sintonia foram bastante significativos, optou-se por realizar estudos em que um projeto de testes de qualidade superior foi utilizado com uma sintonia rápida (sintonia 5 da Tabela 4.2 ou sintonia 2 da Tabela 4.3) e um projeto de testes de qualidade inferior foi utilizado com uma sintonia lenta (sintonia 1 da Tabela 4.2 ou sintonia 5 da Tabela 4.3). Os resultados são apresentados nas Figuras 4.23 e 4.24.



**Figura 4.23.** Regiões de confiança com projetos de teste 1 (superior) e 2 (inferior) e sintonias 5 (rápida) e 1 (lenta) em relação a  $Q$  no Estudo de Caso 2.



**Figura 4.24.** Regiões de confiança com projeto de teste 1 (superior) e 2 (inferior) e sintonias 1 (rápida) e 5 (lenta) em relação a  $R$  no Estudo de Caso 2.

As Figuras 4.23 e 4.24 mostram que, ao utilizar um projeto de teste considerado adequado com sintonia rápida, é possível obter um desempenho final de controle pior do que quando se utiliza um projeto de testes não tão bom, porém com uma sintonia mais lenta. É importante ressaltar que, nesta análise, o desempenho está sendo medido

visualmente pelo volume da região de confiança e, por isso, afirma-se que nos exemplos estudados um projeto de teste pior com sintonia mais lenta apresentou desempenho melhor do que um projeto de teste melhor com sintonia mais rápida. No entanto, podem haver outros critérios para medir o desempenho do sistema. Dessa forma, embora o projeto de testes afete sobremaneira o desempenho do processo, a sintonia adequada do controlador pode de alguma forma compensar o mau desempenho da etapa de identificação, estando a ela correlacionada.

Outro aspecto importante a ser considerado é que este exemplo envolve um caso do tipo SISO e que, portanto, os parâmetros de sintonia ponderam as parcelas da função objetivo, mas não têm a função adicional de ponderar a importância relativa entre diferentes variáveis controladas ou manipuladas. Além disso, como foi citado, no caso SISO os parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$  se comportam como um único parâmetro. Sendo assim, a abordagem de um caso MIMO pode introduzir considerável complexidade adicional à análise.

O principal ponto desta análise é mostrar que a sensibilidade em relação aos parâmetros de sintonia é tão importante que pode até mesmo fazer com que um modelo pior do ponto de vista de aderência ao modelo real e da variância dos parâmetros apresente comportamento superior a de outros modelos melhores. Apesar de utilizar uma formulação bastante simples, este estudo de caso mostrou que o desempenho do controlador pode ser consideravelmente diferente, a depender dos erros de modelagem e da sintonia adotada, motivando o desenvolvimento de novas teorias e metodologias capazes de quantificar estas relações.

#### 4.2.3 Influência do Projeto de Testes GBN em Conjunto com a Sintonia

Para avaliar a influência do projeto de experimentos utilizado para obtenção do modelo matemático usado em um controlador preditivo, foi utilizado o procedimento anteriormente descrito para obtenção das regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada, que caracteriza aparentemente melhor as possíveis ações de controle na presença de erros. No entanto, houve a necessidade da criação de métricas que permitissem distinguir mais facilmente o resultado dos planos experimentais propostos. A primeira métrica utilizada para a variável controlada  $Y$  consistiu na soma dos erros

quadráticos observados entre o valor da variável  $Y$  em cada instante de amostragem e o valor do *setpoint* determinado, conforme mostra a Equação (4.12).

$$ISE = \sum (Y - Y^{SP})^2 \quad (4.12)$$

Uma segunda métrica foi definida a partir da matriz de covariâncias dos parâmetros do modelo, baseada no plano experimental utilizado. Esta métrica foi definida como o produto dos valores característicos da matriz de covariância e reflete a qualidade do modelo gerado em termos de variância e covariância dos parâmetros estimados.

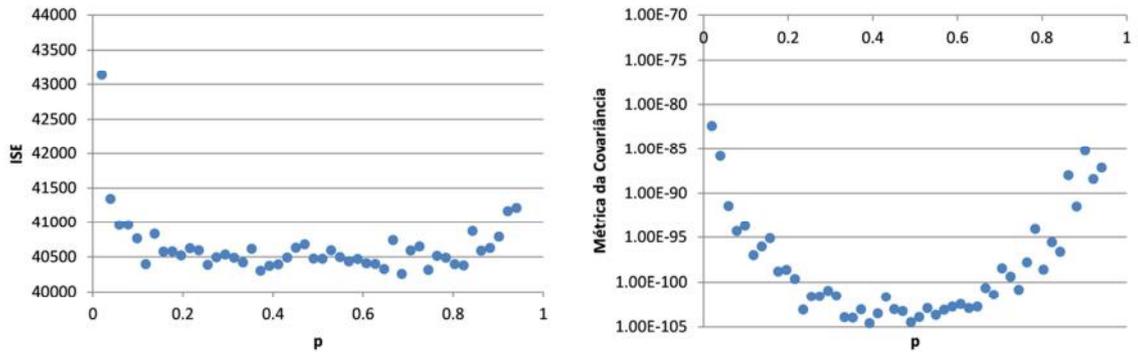
Os planos experimentais testados foram do tipo GBN, já que esta modalidade de testes apresentou resultados adequados nos estudos realizados nas seções anteriores, é bastante conhecida na academia e na indústria e possibilita a variação da probabilidade de ocorrência de um degrau. Deste modo, a depender da probabilidade escolhida, é possível obter testes semelhantes ao teste 3, com poucos degraus, e testes que contêm muitos degraus, como os aplicados durante o teste 4. Por isso, ao todo foram realizados testes com 48 probabilidades diferentes, variando de 0.02 a 0.94. O procedimento apresentado na Figura 4.14 foi utilizado para esta nova análise, com base em 48 projetos de testes.

Com o objetivo de avaliar se os resultados obtidos dependem da sintonia adotada, estes 48 projetos de experimentos foram avaliados em 3 cenários de sintonia diferentes:

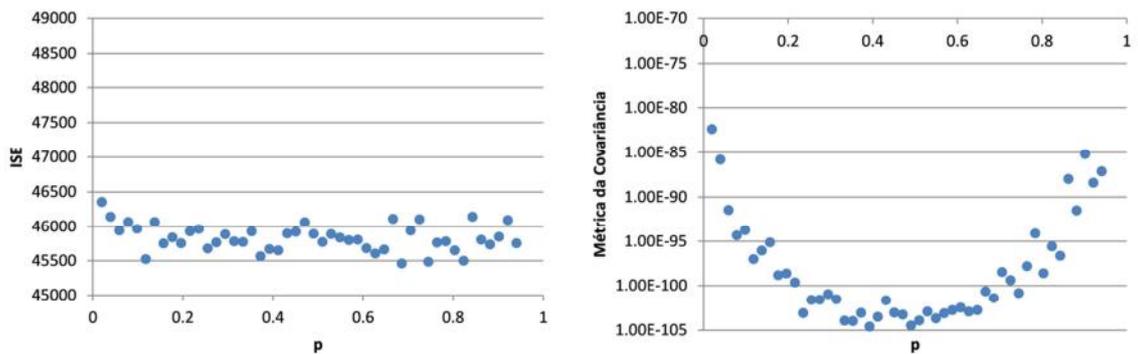
- Sintonia base ou intermediária:  $Q = 1$  e  $R = 0.1$ , já que estes foram os valores intermediários para os parâmetros de sintonia testados nas Tabelas 4.2 e 4.3;
- Sintonia rápida:  $Q = 1$  e  $R = 0.01$ , já que estes foram os valores de sintonia rápida mostrados na Tabela 4.3;
- Sintonia lenta:  $Q = 1$  e  $R = 10$ , já que estes foram os valores de sintonia lenta testados na Tabela 4.3.

Dentro da análise proposta, a métrica ISE reflete o desempenho do sistema de controle, enquanto a métrica da matriz de covariâncias dos parâmetros do modelo estimado reflete apenas a qualidade do modelo identificado. Os resultados das métricas obtidas com diferentes probabilidades para o teste GBN sob a ação de sintonias

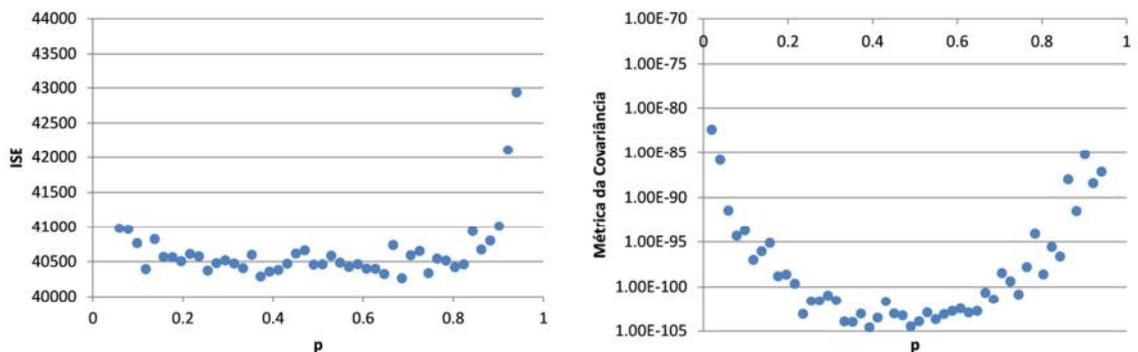
intermediária, lenta e rápida podem ser verificados nas Figuras 4.25, 4.26 e 4.27, respectivamente.



**Figura 4.25.** Desempenho do controlador e qualidade do modelo utilizando diferentes projetos de teste GBN na etapa de identificação (sintonia base,  $Q = 1$  e  $R = 0.1$ ).



**Figura 4.26.** Desempenho do controlador e qualidade do modelo utilizando diferentes projetos de teste GBN na etapa de identificação (sintonia lenta,  $Q = 1$  e  $R = 10$ ).



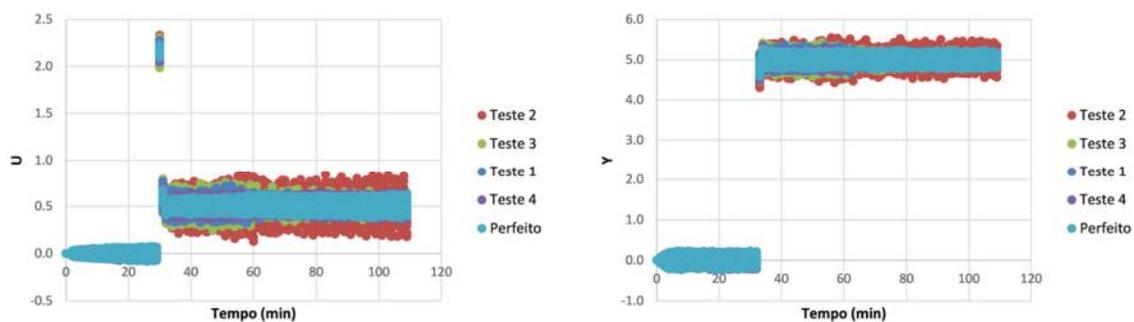
**Figura 4.27.** Desempenho do controlador e qualidade do modelo utilizando diferentes projetos de teste GBN na etapa de identificação (sintonia rápida,  $Q = 1$  e  $R = 0.01$ ).

Como era esperado, a métrica relacionada à covariância apresentou o mesmo comportamento quando se variou a probabilidade de chaveamento do teste GBN em todos os casos de sintonia testados, já que ela é calculada após a estimação de parâmetros do modelo; ou seja, em uma etapa anterior à aplicação do controlador preditivo, não sendo afetada por parâmetros do controlador. Já em relação à métrica proposta para  $Y$ , é possível afirmar que, de acordo com os resultados apresentados, os parâmetros de sintonia são capazes de mudar significativamente a sensibilidade do ISE em relação ao projeto de testes utilizado.

A julgar apenas pela qualidade dos parâmetros estimados, é desejável trabalhar com testes GBN com probabilidade de chaveamento em torno de 0.5, pois este é o valor em que a métrica estabelecida para a matriz de covariância dos parâmetros é mínima. Ao analisar o comportamento do sistema sob a ação de um controlador preditivo, no entanto, este resultado pode ser consideravelmente diferente. Ao adotar uma sintonia base intermediária ( $Q = 1$  e  $R = 0.1$  - Figura 4.25), parece haver uma faixa em que a probabilidade do projeto de teste GBN não afeta o desempenho do controlador. Porém, é possível verificar uma degradação do desempenho ao utilizar probabilidades extremas de chaveamento (muito elevadas ou muito baixas). Com a sintonia mais "lenta" ( $Q = 1$  e  $R = 10$  - Figura 4.26), o planejamento experimental utilizado na etapa de identificação praticamente não afeta o desempenho final do controlador preditivo, tendo sido observado apenas um valor de probabilidade do teste GBN (igual 0.02) em que o sistema de controle apresentou instabilidade. Já o uso de uma sintonia mais "rápida" ( $Q = 1$  e  $R = 0.01$  - Figura 4.27) faz com que o desempenho do controlador seja cada vez mais dependente da qualidade do modelo e, portanto, do planejamento experimental adotado. Neste caso, a forma assumida pela curva da métrica ISE parece tender à forma da curva da métrica da covariância com o aumento da agressividade da sintonia. É interessante observar ainda que para os valores de sintonia adotados, a sintonia lenta foi a que resultou em maiores valores para a métrica ISE; ou seja, a variável controlada apresentou comportamento bastante lento para alcançar o *setpoint* estabelecido e a qualidade do modelo não foi capaz de influenciar esta velocidade imposta pela sintonia. A partir dos resultados obtidos, novamente, parece haver claro vínculo quantitativo entre medidas de desempenho da etapa de identificação e da etapa de controle.

#### 4.2.4 Influência da Precisão dos Modelos

Na Seção 4.2.1 foi observado como diferentes projetos de testes utilizados para a identificação podem resultar em diferentes modelos e, conseqüentemente, em comportamentos diferentes do sistema controlado. O problema abordado na Seção 4.2.1 adotou como base a consideração de que a variável controlada  $Y$  esteve sujeita a erros com uma distribuição uniforme de probabilidades e variância igual a 0.01. Nesta Seção, os mesmos projetos de testes foram utilizados para comparação do comportamento do sistema em malha fechada, em um cenário em que a variável controlada  $Y$  estava sujeita a erros da mesma natureza considerada anteriormente, porém com variância igual a 0.001. Com a mesma metodologia empregada anteriormente (Figura 4.14), foram obtidas as regiões de confiança para as ações de controle e para a variável controlada, com os diferentes projetos de teste conduzidos na nova condição de variância da variável controlada. A Figura 4.28 apresenta os resultados em um mesmo gráfico, para melhor comparação.



**Figura 4.28.** Regiões de confiança das variáveis manipulada e controlada com modelo identificado com dados obtidos a partir de diferentes projetos de teste no estudo de caso 2 e sujeitos a variância de medida em  $Y$  igual a 0.001.

Os resultados da Figura 4.28 mostram que, ao considerar uma variância menor para a variável controlada  $Y$ , os desempenhos do sistema em malha fechada foram bastante semelhantes, independentemente do projeto de testes utilizados. Isto ocorre principalmente porque, com uma variância de medida menor, os modelos identificados foram mais precisos e próximos do modelo perfeito, reforçando ainda mais a importância da precisão dos modelos para aplicação final no sistema de controle. Sendo assim, parece óbvio que a qualidade de medição afeta o desempenho da etapa de

identificação e, por conseguinte, o desempenho final do MPC, por meio de incertezas dos parâmetros estimados para o modelo.

### **4.3 Comentários Finais**

Os resultados preliminares apresentados ajudam a caracterizar o problema e a estabelecer a conexão existente entre os erros de modelagem, a sintonia e o desempenho de controladores preditivos, motivando os desenvolvimentos dos próximos capítulos. Particularmente, observou-se que os erros de medição, os projetos experimentais de teste, os modelos obtidos e a sintonia proposta afetam de maneira sinérgica e conjunta o desempenho final do MPC. Com base nesses estudos, sugere-se que estes fatores sejam analisados conjuntamente, tendo como referência um cenário básico de aplicação em que relações quantitativas possam ser obtidas de forma analítica.

# Capítulo 5 Estudos Analíticos 1 – Cálculo dos Desvios da Ação de Controle de um Sistema MPC

Neste capítulo é abordado o cálculo analítico dos desvios da ação de um controlador preditivo na presença de erros de modelagem e a forma como estes desvios podem ser compensados por meio da sintonia do controlador. Os estudos começam com a abordagem de casos simples, como a análise de controladores SISO com horizontes reduzidos e, ao longo deste capítulo, vão aumentando de complexidade e abrangência, até chegar à análise de controladores MIMO com horizontes genéricos. Os resultados são usados para propor procedimentos de sintonia de controladores MPC, com o objetivo de torná-los menos sensíveis a erros de modelagem.

## 5.1 Caso SISO com Horizontes Reduzidos

Para iniciar os estudos propostos nesta abordagem, foi adotado o problema mais simples possível, de modo a facilitar a dedução das expressões e a interpretação das conclusões subsequentes.

Assim, considerando o caso SISO sem restrições, com horizontes de controle e predição iguais a 1 e um modelo de processo descrito por um modelo de puro ganho, com 1 coeficiente, a Equação (2.4) fica reduzida a:

$$\Delta U_0 = \frac{s_1 \cdot e_0}{s_1^2 + \frac{r}{q}} \quad (5.1)$$

Neste caso, os parâmetros de sintonia  $r$  e  $q$  estão correlacionados e devem ser tratados como um parâmetro único  $P = r/q$ , obtendo-se a expressão:

$$\Delta U_0 = \frac{s_1 \cdot e_0}{s_1^2 + P} = \frac{s_1 \cdot (y^{SP} - y_0)}{s_1^2 + P} \quad (5.2)$$

Linearizando a expressão anterior, em que  $\Delta U_0$  é função do modelo do processo  $s_1$ , da medição da variável controlada  $y_0$  e do parâmetro de sintonia  $P$ , tem-se:

$$\Delta U_0 = f(s_1, y_0, P)$$

$$\delta(\Delta U_0) = \frac{\partial f}{\partial s_1} \cdot \delta s_1 + \frac{\partial f}{\partial y_0} \cdot \delta y_0 + \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \delta P \quad (5.3)$$

$$\delta(\Delta U_0) = \left( \frac{(P - s_1^2) \cdot (y^{SP} - y_0)}{(s_1^2 + P)^2} \right) \cdot \delta s_1 - \left( \frac{s_1}{(s_1^2 + P)} \right) \cdot \delta y_0$$

$$- \left( \frac{s_1 \cdot (y^{SP} - y_0)}{(s_1^2 + P)^2} \right) \cdot \delta P \quad (5.4)$$

Para que a primeira ação de controle em um cenário de erro de modelagem seja a mesma de um cenário com modelo perfeito, pode-se fazer  $\delta(\Delta U_0) = 0$  na expressão anterior e calcular a variação de sintonia  $\delta P$  que deve ser utilizada para compensar o erro do modelo  $\delta s_1$  e do erro de medição  $\delta y_0$ , resultando na seguinte expressão:

$$\delta P = \left( \frac{(P - s_1^2)}{s_1} \right) \cdot \delta s_1 - \left( \frac{(P + s_1^2)}{(y^{SP} - y_0)} \right) \cdot \delta y_0 \quad (5.5)$$

Considerando, em um primeiro momento, apenas os erros de modelagem, ou seja, fazendo  $\delta y_0 = 0$ , tem-se:

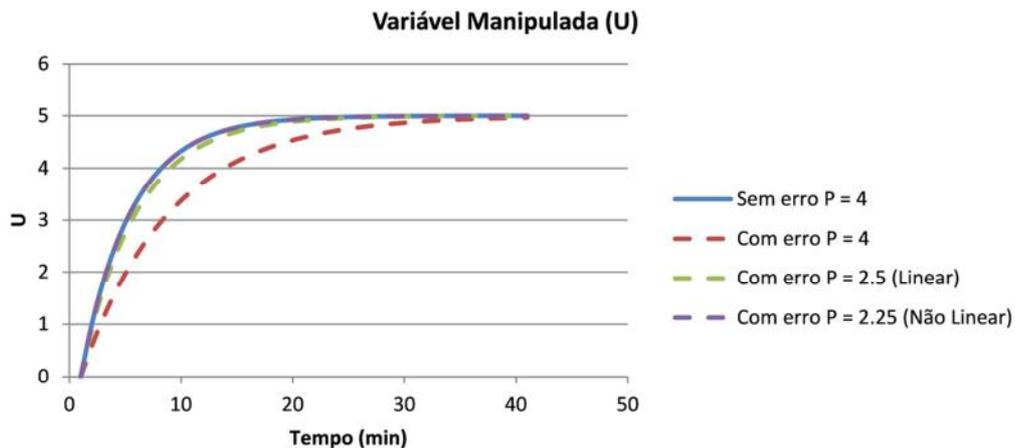
$$\delta P = \left( \frac{(P - s_1^2)}{s_1} \right) \cdot \delta s_1 \quad (5.6)$$

Seguindo as mesmas premissas, é possível calcular a variação de sintonia  $\delta P$  que deve ser utilizada para compensar o erro do modelo  $\delta s_1$  diretamente da expressão não linear (Equação (5.2)) e manter a primeira ação de controle inalterada ( $\delta(\Delta U_0) = 0$ ). Desconsiderando os erros de medição ( $\delta y_0 = 0$ ), chega-se a:

$$\delta P = \left( \frac{P - s_1^2}{s_1} \right) \cdot \delta s_1 - \delta s_1^2 \quad (5.7)$$

As expressões dadas pelas Equações (5.6) e (5.7) são muito importantes porque estabelecem relações quantitativas que mostram como a sintonia apropriada do controlador pode eliminar os erros de modelagem. Essas expressões podem ser usadas para compensar os erros de modelagem dentro do cenário simplificado que foi admitido. As correções de sintonia propostas foram aplicadas, então, a exemplos numéricos da atuação de um controlador preditivo simples (caso SISO, com horizontes de controle e predição iguais a 1 e modelo de puro ganho com 1 coeficiente), como foi proposto nas expressões apresentadas.

No primeiro exemplo, o controlador foi aplicado a um processo de ganho unitário, sendo que o ganho do modelo utilizado pelo controlador foi igual a 0.5. Neste caso, foi adotada uma sintonia base ( $P = 4$ ) e estabelecido um cenário de mudança de *setpoint* ( $y^{SP} = 5$ ). Os valores base para os parâmetros utilizados neste cenário foram escolhidos arbitrariamente. As ações de controle podem ser observadas na Figura 5.1 em cenários de modelo perfeito e de presença de erro de modelagem com diferentes sintonias.

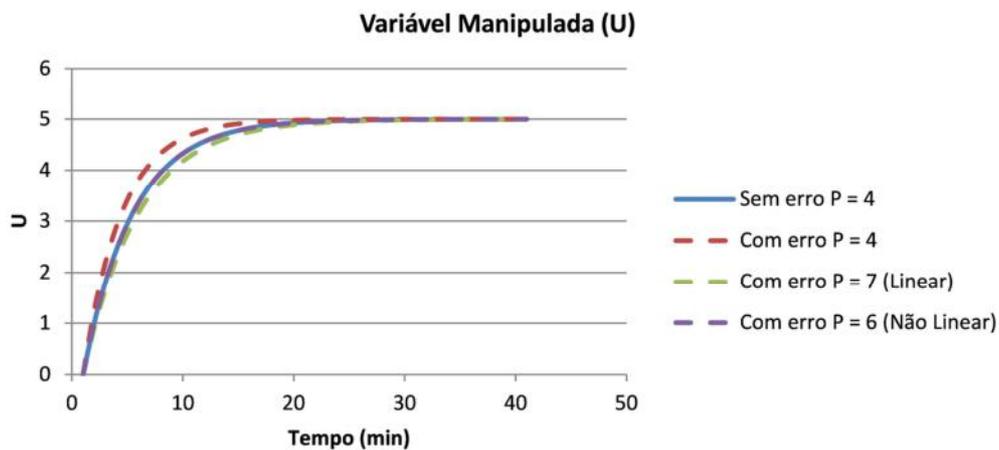


**Figura 5.1.** Comparação das ações de controle em um cenário em que o ganho do modelo corresponde à metade do valor do ganho real do processo.

De acordo com a Figura 5.1, o erro de modelagem implica em uma diferença de desempenho quando a mesma sintonia é empregada. No entanto, ao utilizar as variações de sintonia sugeridas pelas expressões deduzidas nas Equações (5.6) e (5.7), é possível

verificar e quantificar que a sintonia proposta foi capaz de compensar os erros de modelagem. Além disso, a utilização da sintonia obtida pela expressão não linear foi capaz de reproduzir exatamente o mesmo desempenho que seria obtido ao utilizar um modelo perfeito, embora a compensação apontada pela expressão linear já permita chegar a um resultado bem próximo e satisfatório. Portanto, a sintonia proposta foi de fato útil para remover a incerteza do modelo.

O mesmo procedimento foi aplicado a um segundo exemplo, muito semelhante ao primeiro, com a diferença de que o ganho do modelo utilizado pelo controlador foi considerado igual a 2, enquanto o ganho do processo real permaneceu igual a 1. Neste caso, diferentemente do exemplo anterior, o ganho do modelo adotado foi maior do que o ganho do processo. Os resultados são apresentados na Figura 5.2.



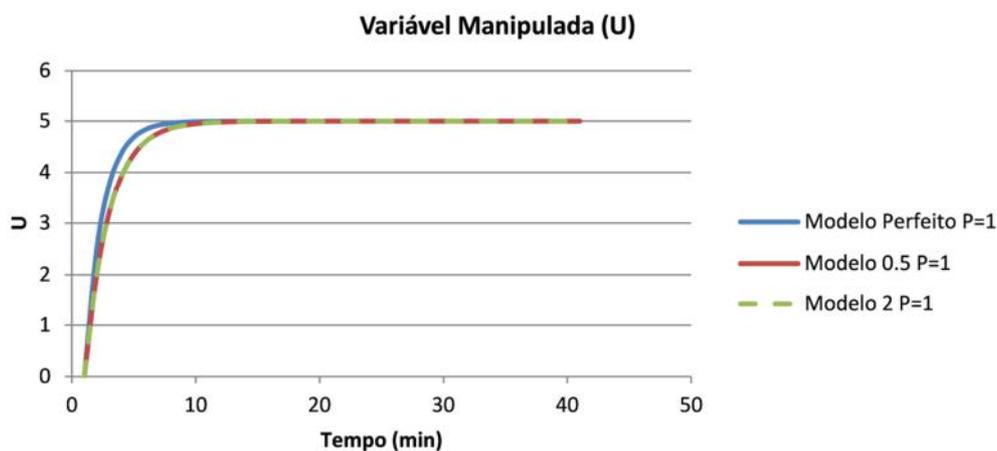
**Figura 5.2.** Comparação das ações de controle em um cenário em que o ganho do modelo corresponde ao dobro do valor do ganho real do processo.

As conclusões obtidas a partir da Figura 5.2 são as mesmas do exemplo anterior; ou seja, as sintonias obtidas pelas expressões desenvolvidas foram capazes de compensar o erro de modelagem proposto, resultando em um desempenho muito próximo do obtido com um modelo perfeito no cenário traçado.

Ao observar a expressão linearizada (Equação (5.6)) usada para compensação dos erros de modelagem, nota-se que quanto maior for o ganho ( $s_1$ ), menor deve ser a necessidade de mudança de sintonia para compensar um determinado erro  $\delta s_1$  absoluto. Ainda de acordo com a Equação (5.6), quando  $P = s_1^2$ , o controlador deve apresentar o mesmo resultado do modelo perfeito, mesmo na presença de erro de modelagem. Dessa forma, vê-se que há uma sintonia que torna o controlador insensível aos erros de

modelagem. Esse resultado aparentemente ainda não foi relatado na literatura e pode levar a novos procedimentos de sintonia de controladores MPC.

Foi realizado um teste de aplicação numérica deste resultado nos mesmos exemplos anteriores. Assim, para um processo de ganho 1, a sintonia menos sensível a erros de modelagem consistiria em adotar  $P = 1$ . Esta passou a ser a nova sintonia base, tendo sido utilizada também como sintonia nos casos em que o ganho do modelo utilizado pelo controlador foi igual a 0.5 e 2. Os resultados numéricos da Figura 5.3 mostraram que as ações de controle realmente foram pouco afetadas pelos erros de modelagem no cenário proposto, tendo sido surpreendentemente menos afetadas do que nos exemplos anteriores, quando a sintonia era mais lenta ( $P = 4$ ). Fica assim patente o vínculo quantitativo existente entre o erro de modelagem e a sintonia do controlador MPC.



**Figura 5.3.** Comparação das ações de controle em diferentes cenários de erros de modelagem com sintonia insensível.

## 5.2 Caso SISO com Horizontes Ampliados

Ao aplicar as expressões de variação de sintonia para compensação dos erros de modelagem em cenários um pouco mais complexos, como modelos de primeira ordem e horizonte de predição diferente de 1, os resultados não garantem a correta compensação, já que as premissas de dedução das expressões não podem ser atendidas simultaneamente. Este resultado leva à necessidade de dedução de expressões um pouco mais complexas. Partindo novamente do cálculo analítico das ações de um controlador

preditivo, considerando o caso SISO, com horizonte de controle igual a 1, mas adotando agora um horizonte de predição um pouco maior (igual a 2) e um modelo de processo descrito por um modelo de primeira ordem, representado por um modelo de resposta ao degrau com 2 coeficientes, tem-se:

$$\Delta U_0 = \frac{s_1 \cdot (y^{SP} - y_0) + s_2 \cdot (y^{SP} - y_1)}{(s_1^2 + s_2^2) + P} \quad (5.8)$$

Considerando  $y_1 \approx y_0$ :

$$\Delta U_0 = \frac{(s_1 + s_2) \cdot (y^{SP} - y_0)}{(s_1^2 + s_2^2) + P} \quad (5.9)$$

Neste caso, linearizando a expressão da Equação (5.9), em que  $\Delta U_0$  é função do modelo do processo representado pelos parâmetros  $s_1$  e  $s_2$ , da medição da variável controlada  $y_0$  e do parâmetro de sintonia  $P$ , tem-se:

$$\delta(\Delta U_0) = \frac{\partial f}{\partial s_1} \cdot \delta s_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2} \cdot \delta s_2 + \frac{\partial f}{\partial y_0} \cdot \delta y_0 + \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \delta P \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \delta(\Delta U_0) = & \left( \frac{(P - s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2) \cdot (y^{SP} - y_0)}{(s_1^2 + s_2^2 + P)^2} \right) \cdot \delta s_1 \\ & + \left( \frac{(P - s_2^2 + s_1^2 - 2s_1s_2) \cdot (y^{SP} - y_0)}{(s_1^2 + s_2^2 + P)^2} \right) \cdot \delta s_2 \\ & - \left( \frac{s_1 + s_2}{(s_1^2 + s_2^2 + P)} \right) \cdot \delta y_0 - \left( \frac{(s_1 + s_2) \cdot (y^{SP} - y_0)}{(s_1^2 + s_2^2 + P)^2} \right) \cdot \delta P \end{aligned} \quad (5.11)$$

Para que a primeira ação de controle seja a mesma em um cenário em que os únicos erros presentes são os erros de modelagem, ou seja,  $\delta(\Delta U_0) = 0$  e  $\delta y_0 = 0$ , chega-se à seguinte expressão linearizada de compensação pela sintonia:

$$\delta P = \left( \frac{P - s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2}{s_1 + s_2} \right) \cdot \delta s_1 + \left( \frac{P - s_2^2 + s_1^2 - 2s_1s_2}{s_1 + s_2} \right) \cdot \delta s_2 \quad (5.12)$$

A partir da Equação (5.12) é possível verificar que há valores de sintonia  $P$  para os quais os erros nos parâmetros  $s_1$  ou  $s_2$  não precisam ser compensados, conforme as Equações (5.13) e (5.14), respectivamente:

$$P = s_1^2 - s_2^2 + 2s_1s_2 \quad (5.13)$$

$$P = s_2^2 - s_1^2 + 2s_1s_2 \quad (5.14)$$

De outra forma, partindo da Equação (5.9) e admitindo que o erro pode ser representado por um fator multiplicativo  $K$ , em que  $s_i^{modelo} = K \cdot s_i^{real}$ , pode-se igualar as ações de controle a fim de encontrar a sintonia  $P'$  capaz de compensar um erro de modelagem deste tipo, conforme mostram as Equações (5.15) e (5.16). É importante ressaltar que o fator multiplicativo  $K$  que caracteriza o erro nesta análise é capaz de representar bem um tipo de erro muito comum na modelagem de processos reais, que é o erro no ganho, devido à elevada complexidade e a não linearidades existentes.

$$\frac{(s_1 + s_2) \cdot (y^{SP} - y_0)}{(s_1^2 + s_2^2) + P} = \frac{K \cdot (s_1 + s_2) \cdot (y^{SP} - y_0)}{K^2 \cdot (s_1^2 + s_2^2) + P'} \quad (5.15)$$

$$P' = s_1^2 \cdot (K - K^2) + s_2^2 \cdot (K - K^2) + K \cdot P \quad (5.16)$$

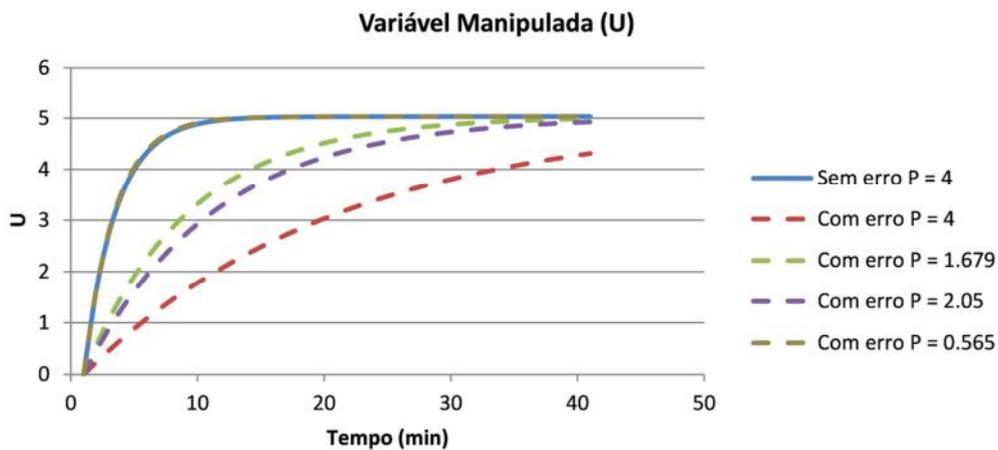
A Equação (5.16) pode ainda ser reescrita na forma da Equação (5.17), que representa uma parábola.

$$P' = -(s_1^2 + s_2^2) \cdot K^2 + (s_1^2 + s_2^2 + P)K \quad (5.17)$$

A parábola representada pela Equação (5.17) possui raízes localizadas em  $K = 0$  e  $K = (s_1^2 + s_2^2 + P)/(s_1^2 + s_2^2)$ . Isto significa que, quando o fator  $K$  que multiplica o modelo é menor do que zero ou maior do que  $(s_1^2 + s_2^2 + P)/(s_1^2 + s_2^2)$ , a compensação dos erros de modelagem por meio de mudanças de sintonia requer valores de  $P'$  negativos. Isto não é possível na formulação do controlador preditivo, onde o parâmetro de sintonia  $P$  deve ser sempre positivo. Valores de  $K$  menores que zero, em geral, não são esperados em uma identificação de modelos na forma de resposta ao degrau, já que isto significaria uma inversão de ganho (embora isso possa ocorrer (FARENZENA,

2003)). Por outro lado, erros maiores que  $(s_1^2 + s_2^2 + P)/(s_1^2 + s_2^2)$  podem ser mais comumente encontrados. Mais adiante, será visto em exemplos práticos que, quando  $K > (s_1^2 + s_2^2 + P)/(s_1^2 + s_2^2)$ , não é possível melhorar o desempenho do controlador atuando apenas na sintonia, conforme já indica a Equação (5.17). Esses resultados mostram que, em situações mais complexas, existem limites rígidos que definem se é possível compensar os erros de modelagem por meio da sintonia do controlador.

Foram feitos testes aplicando as compensações de sintonia sugerida nas Equações (5.12), (5.13) e (5.16) e os resultados são apresentados a seguir. A planta utilizada no primeiro exemplo foi um modelo de primeira ordem sem tempo morto escolhido arbitrariamente, com ganho igual a 1 e constante de tempo igual a 0.4. Foi adotado horizonte de controle igual a 1 e horizonte de predição igual a 2, conforme utilizado na dedução das equações consideradas. Partiu-se também de uma sintonia base arbitrária, em que  $P = 4$ . O erro de modelagem utilizado neste exemplo consistiu em adotar para o controlador um modelo de primeira ordem sem tempo morto, com ganho igual a 0.1 (escolhido arbitrariamente) e constante de tempo igual a 0.4 (idêntica à do processo real). Os resultados da comparação das ações de controle podem ser observados na Figura 5.4.

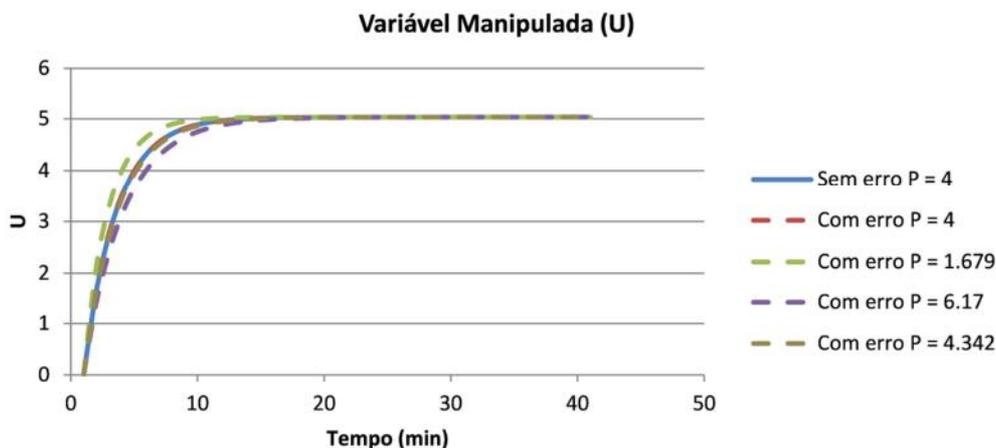


**Figura 5.4.** Comparação das ações de controle em um cenário com horizonte ampliado em que o ganho do modelo é 10 vezes menor do que o valor do ganho do processo real.

A compensação de sintonia  $P = 1.679$  foi produzida pela Equação (5.13) e apresentou resultado bastante superior, quando comparado ao resultado obtido sem compensação de sintonia, embora este resultado não possa ser generalizado. Afinal, esta

sintonia preocupa-se apenas em eliminar a componente de erro do parâmetro  $s_1$ . A sintonia com  $P = 2.05$  foi a sugerida pela Equação (5.12) e aproximou um pouco o resultado daquele que seria obtido com modelo perfeito, embora não tenha compensado completamente o erro do modelo. Já a sintonia  $P = 0.565$ , obtida por meio da Equação (5.16), apresentou um resultado muito satisfatório, tendo levado a resposta do controlador a valores muito próximos dos que seriam obtidos com um modelo perfeito. Fica mais uma vez mostrado em um cenário mais complexo a relação quantitativa existente entre sintonia e erro de modelagem.

O segundo exemplo testado foi idêntico ao primeiro, a não ser pelo ganho do modelo utilizado no controlador, que passou a ser igual a 2, escolhido de modo que fosse maior do que o ganho do processo real. Os resultados podem ser verificados na Figura 5.5. Neste exemplo, a sintonia com  $P = 1.679$  foi calculada de acordo com a Equação (5.13); a sintonia com  $P = 6.17$  foi obtida com a Equação (5.12); e a sintonia com  $P = 4.432$  foi dada pela Equação (5.16). Mais uma vez, os resultados foram melhores para a sintonia calculada por esta última equação, reforçando a adequação da solução proposta.



**Figura 5.5.** Comparação das ações de controle em um cenário com horizonte ampliado em que o ganho do modelo é o dobro do ganho do processo real.

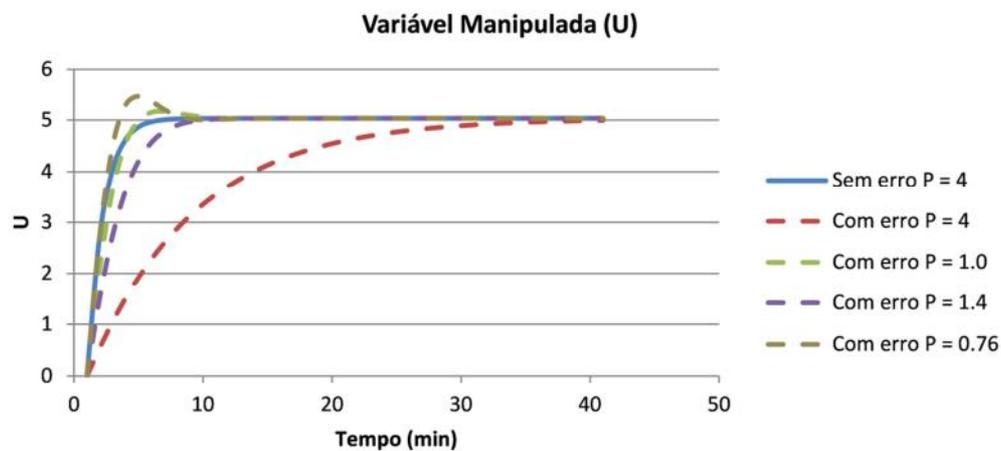
É possível estender a Equação (5.16) para horizontes de predição maiores, utilizando as mesmas considerações. Neste caso, considerando, por exemplo, um horizonte de predição igual a 5, a compensação da sintonia passa a tomar a forma da Equação (5.18):

$$P' = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2) \cdot (K - K^2) + K \cdot P \quad (5.18)$$

Ou, de forma mais geral, para um horizonte de predição  $HP$ :

$$P' = \sum_{i=1}^{HP} s_i^2 \cdot (K - K^2) + K \cdot P \quad (5.19)$$

Para testar a compensação de sintonia em um cenário de horizonte de predição um pouco maior, foi utilizada uma planta representada por um modelo de primeira ordem sem tempo morto arbitrário, com ganho e constante de tempo iguais a 1. Foi adotado horizonte de controle igual a 1 e horizonte de predição igual a 5, além de uma sintonia base com  $P = 4$ , também escolhidos arbitrariamente. O erro de modelagem utilizado neste exemplo consistiu em adotar para o controlador um modelo de primeira ordem sem tempo morto, com ganho arbitrário igual a 0.1 e constante de tempo igual à do processo real.

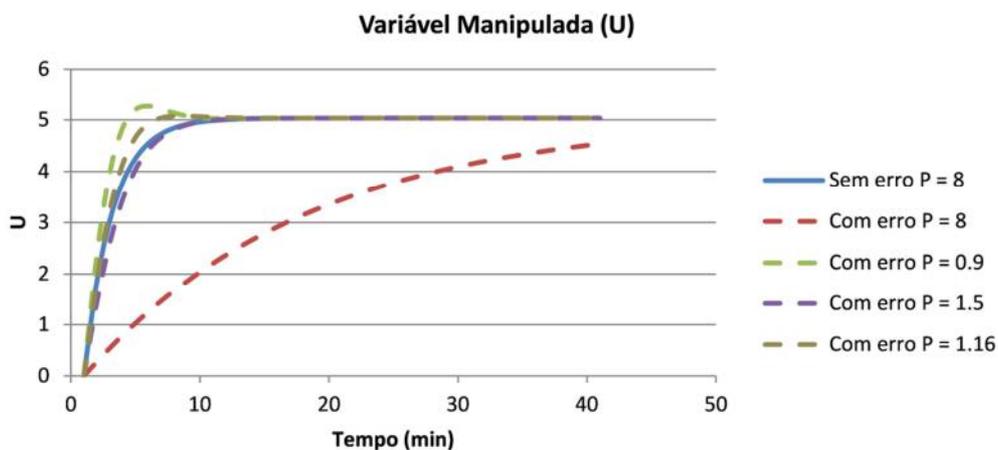


**Figura 5.6.** Comparação das ações de controle em um cenário de horizonte de predição igual a 5 em que o ganho do modelo é 10 vezes menor do que o valor do ganho do processo real.

A sintonia com  $P = 0.76$  foi calculada pela Equação (5.18), enquanto as demais foram arbitradas para tentar reproduzir o comportamento do sistema utilizando um modelo perfeito no controlador. Neste caso, a utilização da sintonia proposta pela Equação (5.18) aproximou a resposta da que seria obtida com o modelo perfeito, quando comparada com a resposta sem correção da sintonia ( $P = 4$ ). No entanto, o resultado não foi tão aderente quanto os obtidos nos exemplos anteriores, com

horizontes de predição iguais a 1 ou 2. Esse resultado provavelmente se deve ao fato de que apenas uma ação de controle é igual à do modelo perfeito e ao fato de que as respostas não se mantêm constantes ao longo de todo o horizonte de predição.

Com base no que foi exposto, foi utilizado outro exemplo, com horizonte de predição igual a 5 e com todas as condições idênticas ao do último exemplo, com exceção da sintonia base, sendo adotado  $P = 8$ , com o objetivo de testar uma sintonia mais lenta. Os resultados são apresentados na Figura 5.7. Neste exemplo, a sintonia proposta pela Equação (5.18) ( $P = 1.16$ ) foi capaz de compensar melhor os erros de modelagem em relação ao exemplo anterior. As demais sintonias foram arbitradas para investigação. O motivo desta mudança de comportamento pode ser o fato de que, ao aumentar o horizonte de predição, fica mais difícil atender à hipótese feita anteriormente, de que  $y_{HP} \approx y_{HP-1} \approx \dots \approx y_1 \approx y_0$ . Além disso, esta condição fica ainda mais distante de ser atendida quando se utiliza uma sintonia base rápida, quando comparado a uma sintonia base mais lenta, havendo portanto uma lenta degradação do procedimento, à medida que os horizontes de controle e predição aumentam.

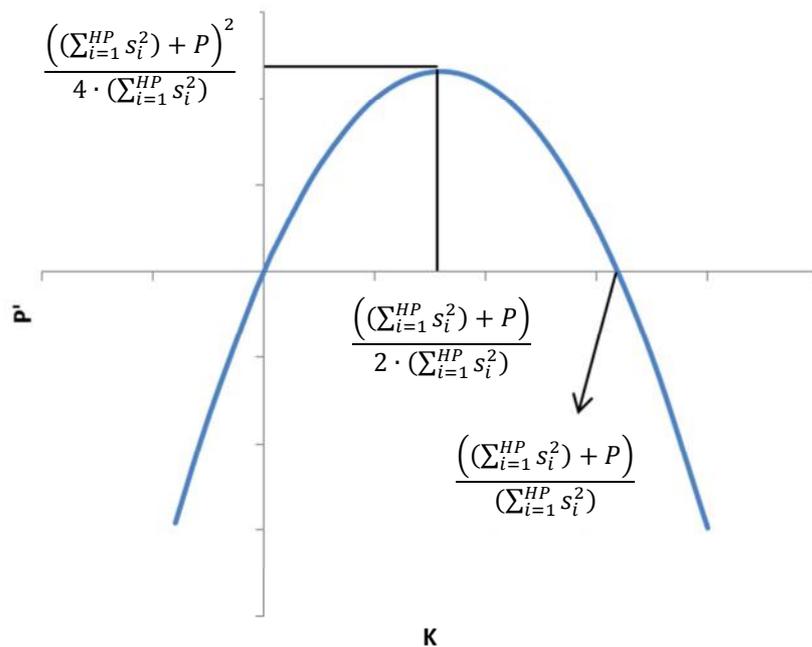


**Figura 5.7.** Comparação das ações de controle em um cenário de horizonte de predição igual a 5 em que o ganho do modelo é 10 vezes menor do que o valor do ganho do processo real e a sintonia base é mais lenta.

Ainda que a Equação (5.18) possua limitações, é possível estendê-la para um horizonte de predição  $HP$  genérico, tomando a forma mais geral da Equação (5.20).

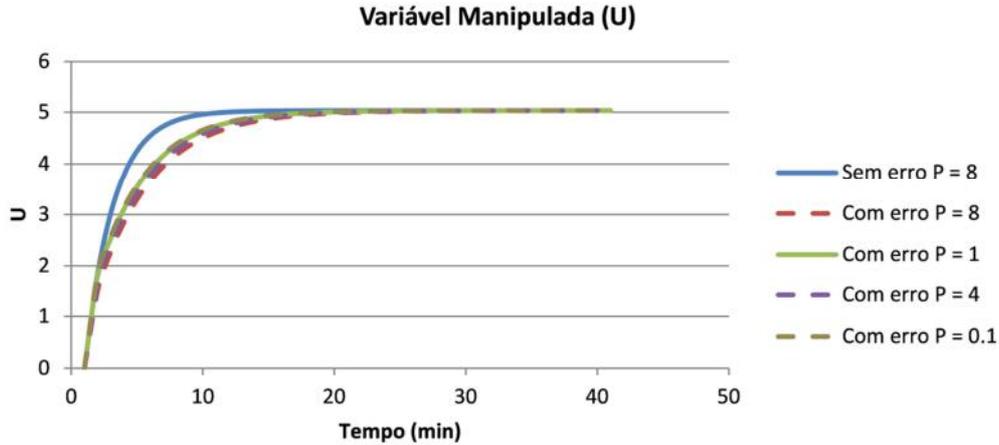
$$P' = -\left(\sum_{i=1}^{HP} s_i^2\right) \cdot K^2 + \left(\left(\sum_{i=1}^{HP} s_i^2\right) + P\right) K \quad (5.20)$$

A Equação (5.20) representa uma parábola, conforme mostra a Figura 5.8. De acordo com essa equação, há uma faixa de incertezas de modelagem (ou de parâmetros  $K$ ) em que o projeto de sintonia pode ser usado para compensar os erros de identificação, sendo a correção impossível fora desta faixa, impondo um limite máximo para o erro de modelagem.



**Figura 5.8.** Representação gráfica da Equação (5.20).

Em um exemplo arbitrário em que a planta é representada por um modelo de primeira ordem sem tempo morto, com ganho e constante de tempo iguais a 1 e o controlador possui horizonte de controle igual a 1, horizonte de predição igual a 5 e parâmetro de sintonia  $P$  igual a 8, pode-se verificar com o auxílio da Equação (5.18) que, quando o fator  $K$ , que representa o erro de modelagem, é maior do que 3, a compensação de sintonia levaria  $P'$  para valores menores do que zero, que não são possíveis na formulação do controlador preditivo. Foram, então, realizadas simulações adotando um modelo de ganho igual a 3 para ser utilizado pelo controlador (ou seja,  $K = 3$ ). Os resultados podem ser verificados na Figura 5.9.



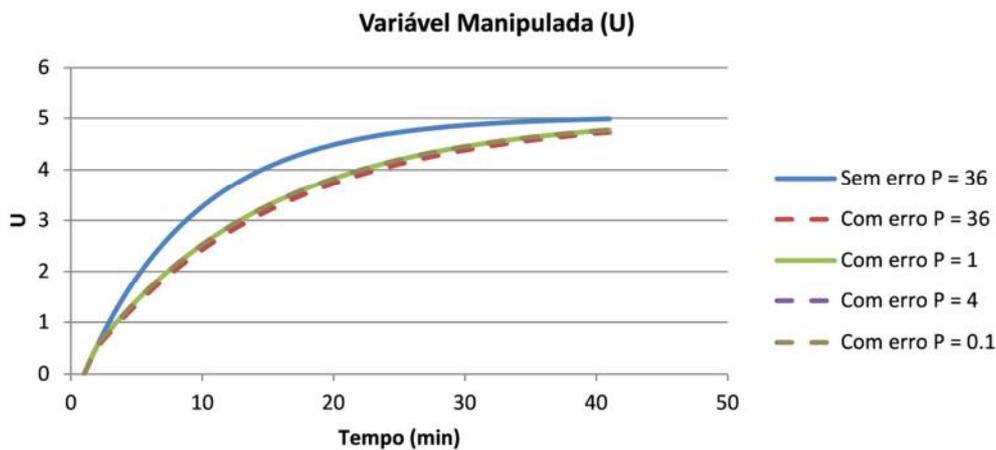
**Figura 5.9.** Comparação das ações de controle em um cenário de horizonte de previsão igual a 5 em que o ganho do modelo é 3 vezes maior do que o valor do ganho do processo real.

Na tentativa de chegar ao mesmo desempenho alcançado com o modelo perfeito, foram arbitrados valores de sintonia cada vez menores. Esta escolha tende a tornar a resposta mais rápida. No entanto, para este nível de erro de modelagem ( $K = 3$ ), reduzir o parâmetro de sintonia  $P$  praticamente não afetou a resposta do controlador, não tornando a resposta mais rápida. Na verdade, como  $K = 3$  é raiz da Equação (5.20), à medida em que  $P$  tende a zero, a resposta se aproxima da resposta obtida com modelo perfeito e  $P$  igual a 8. Neste caso, para valores de  $K$  maiores do que 3 também é possível notar insensibilidade à redução do valor do parâmetro  $P$ , e a resposta alcançada não se aproxima da resposta obtida com o modelo perfeito e  $P = 8$ .

Com base nestes resultados e com o objetivo de calcular o desempenho mais rápido que um controlador com um modelo que apresente um fator  $K$  de erro pode alcançar, pode-se fazer  $P' = 0$  e isolar  $P$  na Equação (5.20). Assim, tem-se que, dado um fator de erro do modelo utilizado pelo controlador igual a  $K$ , o desempenho mais rápido possível seria a resposta do controlador utilizando um modelo perfeito e a sintonia  $P$  dada pela Equação (5.21). Sendo assim, observa-se que o erro de modelagem impõe uma velocidade máxima para o sistema de controle, com o objetivo de compensação dos erros de modelagem. Esse resultado parece justificar de forma quantitativa as abordagens conservadoras de sintonia de controladores MPC.

$$P = \left( \sum_{i=1}^{HP} s_i^2 \right) \cdot K - \left( \sum_{i=1}^{HP} s_i^2 \right) = \left( \sum_{i=1}^{HP} s_i^2 \right) \cdot (K - 1) \quad (5.21)$$

Em um exemplo similar ao anterior, porém com  $K = 10$ , observa-se que o desempenho máximo que poderia ser alcançado seria aquele com modelo perfeito e  $P$  igual a 36, a menos por simplificações impostas no processo de dedução, conforme pode ser observado na Figura 5.10.



**Figura 5.10.** Comparação das ações de controle considerando o máximo desempenho possível em um cenário em que o ganho do modelo é 10 vezes maior do que o ganho do processo real.

Com base na Equação (5.21), pode-se dizer que, já que o erro de modelagem é inevitável, seria desejável que ao menos este erro satisfizesse a Equação (5.22) (ou a Equação (5.23)), para que ainda houvesse alguma margem de compensação por meio da sintonia. Essas equações estabelecem metas quantitativas para a etapa de identificação, como discutido adiante.

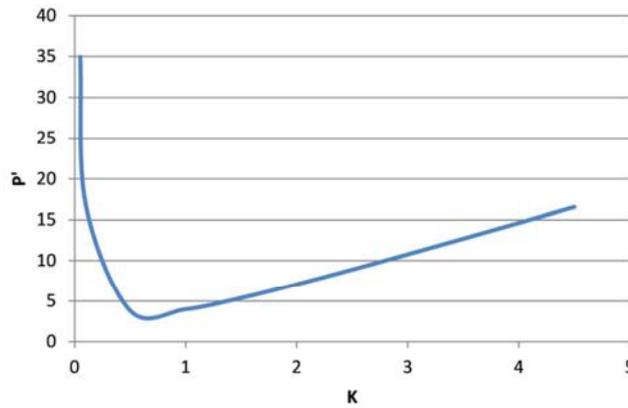
$$0 < K < \frac{\left( \left( \sum_{i=1}^{HP} s_i^2 \right) + P \right)}{\left( \sum_{i=1}^{HP} s_i^2 \right)} \quad (5.22)$$

$$0 < K < 1 + \frac{P}{\left( \sum_{i=1}^{HP} s_i^2 \right)} \quad (5.23)$$

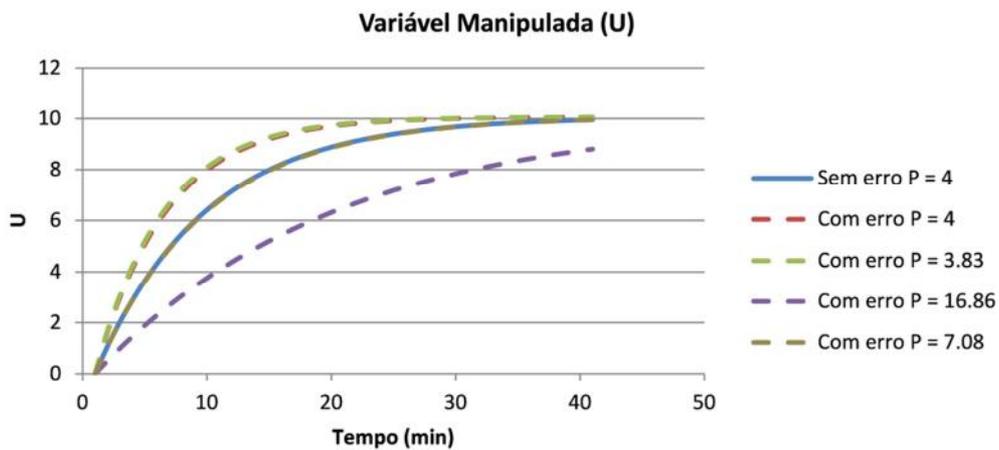
De acordo com a Equação (5.23), é possível concluir e quantificar que, quanto maior for o valor do parâmetro de sintonia  $P$ , que corresponde à sintonia adotada  $a$

*priori*, maior será a faixa de erros de modelagem que poderá ser compensada para alcançar o mesmo resultado que seria obtido utilizando um controlador com modelo perfeito. Ainda segundo a Equação (5.23), observa-se que o aumento da faixa de erros de modelagem tolerados e passíveis de compensação ocorre para modelo cujos parâmetros  $s_i$  sejam numericamente menores e para menores horizontes de predição. O limite inferior para o fator  $K$  dado pela Equação (5.23) é intuitivo do ponto de vista prático, já que utilizar um modelo que erra o sentido do ganho do processo inviabiliza a atuação do controlador no sentido correto, mesmo considerando o *bias* utilizado para correção presente na formulação do controlador preditivo.

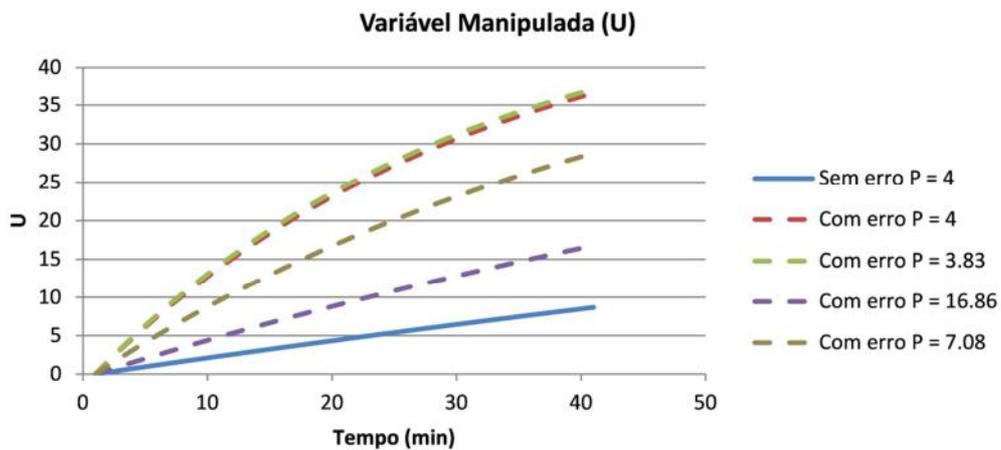
Em aplicações reais, não se conhece o modelo exato da planta, mas sim um modelo levantado na etapa de identificação e sujeito a erros. Assim, os valores dos parâmetros  $s_i$  que representam a planta real não são conhecidos para serem utilizados nas expressões desenvolvidas. No entanto, pode-se ter uma expectativa dos erros de modelagem do modelo identificado e que será usado pelo controlador. Arbitrando um exemplo numérico para mostrar como este cálculo pode ser feito na prática, considerou-se que o modelo identificado foi um modelo de primeira ordem sem tempo morto, com ganho igual a 1 e constante de tempo igual a 0.4, sujeito a um fator de erro multiplicativo entre 0.05 e 4.5, e que a aplicação fará uso de um controlador com horizonte de controle igual a 1, horizonte de predição igual a 2 e parâmetro de sintonia  $P$  igual a 4. É possível, então, através da Equação (5.19), chegar a uma região de parâmetros de sintonia capazes de compensar os erros de modelagem, conforme mostra a Figura 5.11. Esta nova região, diferentemente da parábola já apresentada na Figura 5.8, leva em consideração que o modelo real da planta é desconhecido; portanto, os parâmetros  $s_i$  da Equação (5.19) mudam a cada ponto, dependendo do fator de erro  $K$ . No problema proposto, se for esperado que o erro de modelagem ocorra por um fator entre 0.1 e 2, por exemplo, a curva indica que o parâmetro  $P'$  deveria ser escolhido entre 3.83 e 16.86. Considerando, então, que o erro ocorre por um fator  $K = 2$ , ou seja, planta com ganho 0.5 e modelo do controlador com ganho 1, foi realizado um teste aplicado das sintonias sugeridas (Figura 5.12). O mesmo exercício foi realizado considerando o erro por um fator 10; ou seja, planta com ganho 0.1 e modelo do controlador com ganho 1 (Figura 5.13). Considerando ainda o caso que aponta para a utilização do maior parâmetro de sintonia, foi testado o erro por um fator 0.1; ou seja, planta com ganho 10 e modelo do controlador com ganho 1 (Figuras 5.14 e 5.15).



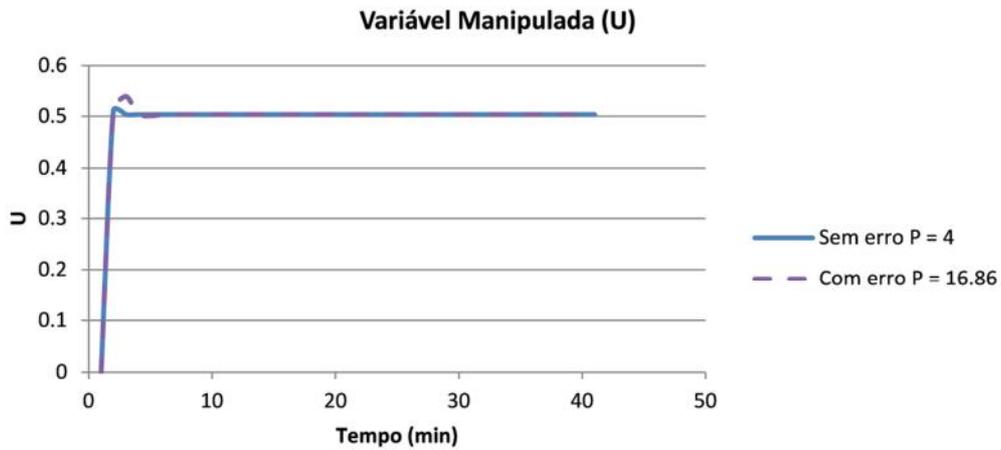
**Figura 5.11.** Região de parâmetros de sintonia para compensação dos erros de modelagem no exemplo proposto, com o fator de erro  $K$  entre 0.05 e 4.5.



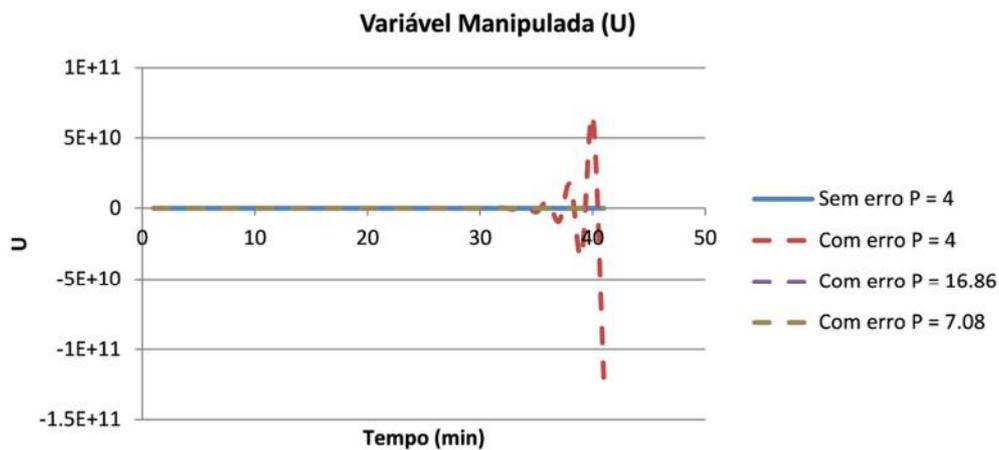
**Figura 5.12.** Comparação das ações de controle para fator de erro  $K = 2$  em diferentes cenários de sintonia.



**Figura 5.13.** Comparação das ações de controle para fator de erro  $K = 10$  em diferentes cenários de sintonia.



**Figura 5.14.** Comparação das ações de controle para fator de erro  $K = 0.1$  nos melhores cenários de sintonia.



**Figura 5.15.** Comparação das ações de controle para fator de erro  $K = 0.1$  em diferentes cenários de sintonia.

Nos gráficos das Figuras 5.12 a 5.15 foram testados 4 cenários de sintonia, em que a sintonia com parâmetro  $P$  igual a 4 foi a sintonia base escolhida. A sintonia com  $P$  igual a 7.08 seria a mais recomendada, de acordo com a Equação (5.19) e o gráfico de  $P' \times K$  para um fator de erro igual a 2. A sintonia com  $P$  igual a 3.83 foi o menor valor sugerido de sintonia dentro da faixa proposta de fatores de erro. A sintonia com  $P$  igual a 16.86 foi o maior valor sugerido na faixa de fatores de erros considerada, correspondendo à sintonia capaz de compensar um erro ocasionado por um fator  $K$  igual a 0.1.

Como em um cenário real não se sabe exatamente o fator de erro, até porque se este valor exato fosse conhecido, bastaria corrigir o modelo pelo fator indicado para passar a trabalhar com um modelo perfeito, torna-se muito mais realista e palpável para o engenheiro definir a faixa de fatores de erro esperada. Além disso, como a planta real é muito mais complexa e dinâmica que os modelos pelas quais as mesmas são representadas em geral, é possível que realmente haja erros por fatores diferentes ao longo da operação do controlador. Dada a faixa de erros, pode-se verificar com o auxílio da Equação (5.19) a faixa de parâmetros de sintonia  $P$  capazes de compensar os erros apontados. Pelos estudos até então realizados, o maior valor de  $P$  sugerido pela faixa é o valor indicado para a aplicação, já que este corresponde ao menor valor de  $P$  capaz de trazer resultados satisfatórios ao longo de toda a faixa de fatores de erro projetada. Utilizar sintonias com valores maiores que este poderá tornar o desempenho do controlador mais lento desnecessariamente, enquanto a utilização de sintonias com valores menores que este pode provocar desempenho ruim, com oscilações ou até mesmo instabilidades. Por isso, no último exemplo, para fatores de erro variando entre 0.1 e 2.0, a solução ideal seria adotar o parâmetro de sintonia  $P = 16.86$ , já que o desempenho foi satisfatório em toda a faixa. A utilização de valores menores para o parâmetro  $P$  levou a oscilação ( $P = 7.08$ ) e instabilidade ( $P = 4$  e  $P = 3.83$ ) no caso em que o fator de erro  $K$  adotado foi igual a 10.

Os resultados mostram que a Equação (5.19) pode ser usada como referência para o projeto do controlador e que uma expectativa de incerteza de modelagem induz a definição de uma faixa adequada de sintonia. Uma postura conservadora pode recomendar o uso do maior valor da faixa.

### 5.3 Caso SISO com Horizontes Genéricos

Considerando agora um controlador SISO com horizontes de predição e controle genéricos, e que o erro de modelagem pode ser caracterizado por um fator escalar  $K$ , que multiplica o modelo de processo real ( $S^{modelo} = K \cdot S^{real}$ ), tem-se que o  $\Delta U$  ideal, calculado com o processo real, seria dado pela Equação (5.24), enquanto o  $\Delta U$  calculado com o modelo, diferente da planta, seria dado pela Equação (5.25).

$$\Delta \underline{U}^{real}(k) = \left( \underline{S}^{realT} \underline{Q} \underline{S}^{real} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^{realT} \underline{Q} \hat{\underline{E}}^{real}(k) \quad (5.24)$$

$$\Delta \underline{U}^{modelo}(k) = \left( \underline{S}^{modeloT} \underline{Q} \underline{S}^{modelo} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^{modeloT} \underline{Q} \hat{\underline{E}}^{modelo}(k) \quad (5.25)$$

Admitindo que todo o erro pode ser compensado apenas por mudanças no parâmetros  $R$ , mantendo o parâmetro  $Q$  inalterado, e igualando-se as expressões das Equações (5.24) e (5.25) para que as ações de controle sejam as mesmas quando o modelo é perfeito e na presença de erros de modelagem, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left( \underline{S}^{realT} \underline{Q} \underline{S}^{real} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^{realT} \underline{Q} \hat{\underline{E}}^{real}(k) \\ &= \left( \underline{S}^{modeloT} \underline{Q} \underline{S}^{modelo} + \underline{R}' \right)^{-1} \underline{S}^{modeloT} \underline{Q} \hat{\underline{E}}^{modelo}(k) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Como  $\underline{S}^{modelo} = K \cdot \underline{S}^{real}$ , a Equação (5.26) pode ser rescrita na forma da Equação (5.27).

$$\begin{aligned} & \left( \underline{S}^{realT} \underline{Q} \underline{S}^{real} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^{realT} \underline{Q} \hat{\underline{E}}^{real}(k) \\ &= \left( K^2 \underline{S}^{realT} \underline{Q} \underline{S}^{real} + \underline{R}' \right)^{-1} K \underline{S}^{realT} \underline{Q} \hat{\underline{E}}^{modelo}(k) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Simplificando a Equação (5.27), considerando a hipótese de que  $\hat{\underline{E}}^{real}(k) = \hat{\underline{E}}^{modelo}(k)$  e fazendo  $\underline{S}^{real} = \underline{S}$ :

$$\left( \underline{S}^T \underline{Q} \underline{S} + \underline{R} \right)^{-1} = \left( K^2 \underline{S}^T \underline{Q} \underline{S} + \underline{R}' \right)^{-1} K \quad (5.28)$$

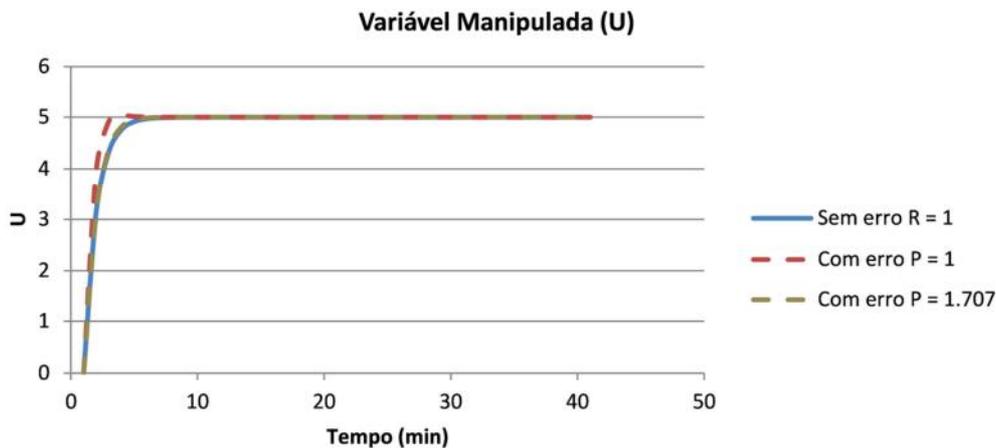
Isolando o novo parâmetro de sintonia  $R'$ :

$$R' = K(1 - K) \cdot \left( \underline{S}^T \underline{Q} \underline{S} \right) + K \cdot R \quad (5.29)$$

A Equação (5.28) já admite algumas simplificações, uma vez que, após as hipóteses assumidas, esta equação consiste simplesmente em igualar os ganhos do controlador (matrizes  $\underline{K}_C$ ) utilizando dois modelos diferentes ( $\underline{S}^{real}$  ou  $\underline{S}^{modelo}$ ), sem

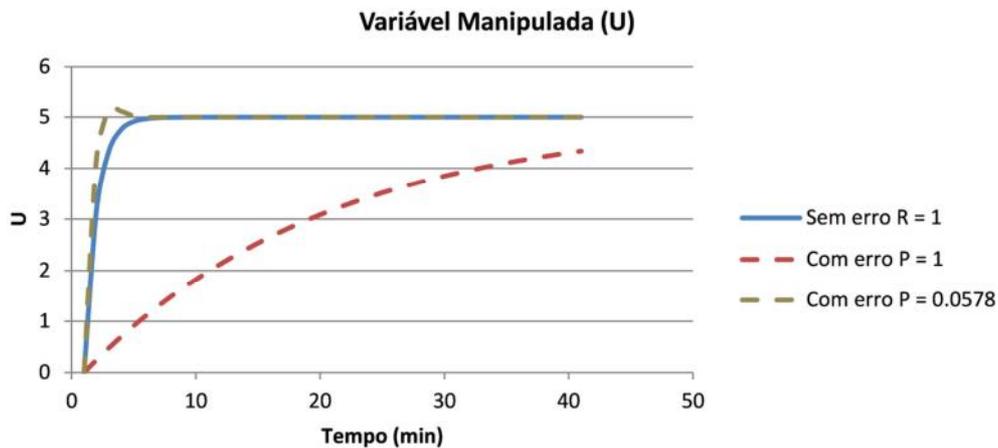
considerar a influência da ação *feedback* do controlador, por exemplo, o que faz com que o resultado da compensação proposta por esta equação não seja exato. Focando na primeira ação de controle, que é a que efetivamente é implementada, pode-se, em termos práticos, calcular o novo parâmetro de sintonia  $R'$  pela Equação (5.29) considerando apenas a primeira linha (ou o primeiro elemento, no caso SISO com horizontes iguais a 1) da matriz  $\begin{pmatrix} \underline{\underline{S}}^T & \underline{\underline{Q}} & \underline{\underline{S}} \end{pmatrix}$  e o primeiro elemento da matriz  $R$ . Deve-se notar que a Equação (5.18) é, na verdade, um caso particular da Equação (5.29), para horizonte de controle igual a 1.

Aplicando a Equação (5.29) a um exemplo arbitrário, foi utilizado um controlador com horizonte de predição igual a 5 e horizonte de controle igual a 3 sobre um processo de primeira ordem sem tempo morto com ganho 1 e constante de tempo igual a 0.4. O erro do modelo utilizado pelo controlador consiste em um fator  $K = 0.5$ ; ou seja, o controlador utiliza um modelo de primeira ordem sem tempo morto, com ganho 0.5 e constante de tempo 0.4. Adotando ainda como base os parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$  iguais a 1, tem-se, pela Equação (5.29), que o valor do parâmetro  $R'$  a ser utilizado para compensar o erro proposto deve ser igual a 1.707. Na Figura 5.16 é possível observar que o uso de  $R'$  igual a 1.707, conforme sugerido pela Equação (5.29), foi capaz de compensar de forma bastante satisfatória o erro de modelagem existente, validando o procedimento proposto.



**Figura 5.16.** Comparação das ações de controle com horizontes genéricos e fator de erro de modelagem  $K = 0.5$ .

Testando a expressão desenvolvida em um caso extremo, foi adotado o mesmo exemplo anterior, porém com o fator  $K = 0.01$ ; ou seja, o ganho do modelo utilizado pelo controlador é 100 vezes menor do que o ganho do processo real. Neste caso, a Equação (5.29) sugere que seja adotado um novo parâmetro  $R' = 0.0578$ . De acordo com os resultados da Figura 5.17, a modificação do parâmetro  $R$  foi capaz de aproximar bastante a resposta do controlador da resposta que seria obtida com um modelo perfeito, mesmo em uma condição extrema de erro. No entanto, é importante ressaltar que as deduções realizadas para compensação de sintonia admitem uma série de hipóteses e simplificações que podem limitar a aplicação a problemas diferentes. Apesar disso, é patente a utilidade das expressões derivadas, que estabelecem vínculos quantitativos fortes entre os parâmetros de sintonia do MPC e as incertezas do modelo de referência.



**Figura 5.17.** Comparação das ações de controle com horizontes genéricos e fator de erro de modelagem  $K = 0.01$ .

## 5.4 Caso MIMO com Horizontes Genéricos

Considerando um caso MIMO genérico e que os modelos utilizados pelo controlador diferem do processo real por um fator multiplicativo (que pode ser diferente para cada par manipulada x controlada):

$$s_{ij}^{modelo} = k_{ij} \cdot s_{ij}^{real}, \quad (5.30)$$

em que  $i$  é o índice da variável controlada e  $j$  é o índice da variável manipulada. Admitindo ainda que a matriz dinâmica construída com base no modelo com erro pode ser relacionada com a matriz dinâmica construída com base no processo real por meio da Equação (5.31):

$$\underline{\underline{S}}^{modeloT} = \underline{\underline{Mk}} \cdot \underline{\underline{S}}^{realT}, \quad (5.31)$$

onde  $T$  representa a operação de transposição,  $S^{modelo}$  é a matriz dinâmica com erros de modelagem,  $S^{real}$  é a matriz dinâmica real do processo e  $Mk$  é a matriz que representa a transformação imposta pelo erros de modelagem. Considerando-se também que todo o erro deve ser compensado apenas por mudanças na matriz  $R$ , mantendo a matriz  $Q$  inalterada, aplicando a Equação (5.31) na Equação (5.26), que também é válida para o caso MIMO, e igualando as ações de controle na presença e na ausência de erros de modelagem:

$$\begin{aligned} & \left( \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} + \underline{\underline{R}} \right)^{-1} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\hat{E}}}^{real}(k) \\ & = \left( \underline{\underline{Mk}} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} \underline{\underline{Mk}}^T + \underline{\underline{R'}} \right)^{-1} \underline{\underline{Mk}} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\hat{E}}}^{modelo}(k) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Simplificando a Equação (5.32), considerando  $\underline{\underline{\hat{E}}}^{real}(k) = \underline{\underline{\hat{E}}}^{modelo}(k)$  e isolando  $\underline{\underline{R'}}$ :

$$\left( \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} + \underline{\underline{R}} \right)^{-1} = \left( \underline{\underline{Mk}} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} \underline{\underline{Mk}}^T + \underline{\underline{R'}} \right)^{-1} \underline{\underline{Mk}} \quad (5.33)$$

$$\left( \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} + \underline{\underline{R}} \right)^{-1} \underline{\underline{Mk}}^{-1} = \left( \underline{\underline{Mk}} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} \underline{\underline{Mk}}^T + \underline{\underline{R'}} \right)^{-1} \quad (5.34)$$

$$\underline{\underline{Mk}} \left( \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} + \underline{\underline{R}} \right) = \left( \underline{\underline{Mk}} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} \underline{\underline{Mk}}^T + \underline{\underline{R'}} \right) \quad (5.35)$$

$$\underline{\underline{R'}} = \underline{\underline{Mk}} \left( \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} + \underline{\underline{R}} \right) - \left( \underline{\underline{Mk}} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} \underline{\underline{Mk}}^T \right) \quad (5.36)$$

A Equação (5.36) fornece a nova matriz  $\underline{\underline{R'}}$  que deve ser usada para compensar as diferenças provocadas pelos erros de modelagem.

Diferentemente do caso SISO, em que  $Mk$  era o próprio fator de erro de modelagem  $K$ , no caso MIMO  $Mk$  é uma matriz cujos elementos dependem tanto dos fatores de erros de modelagem  $k_{ij}$  quanto dos próprios coeficientes dos modelos. Da mesma forma, para compensar os erros de modelagem, a matriz  $\underline{\underline{R'}}$  deixa de ser necessariamente uma matriz diagonal, mesmo quando a matriz  $\underline{\underline{R}}$  original é diagonal. Além disso, no caso MIMO, mesmo que apenas um dos modelos apresente erro, a interligação entre as variáveis manipuladas e controladas faz com que haja a necessidade de usar uma matriz  $\underline{\underline{R'}}$  mais densamente povoada para que se obtenha o mesmo resultado em todas as variáveis. Esse é um resultado relevante, dado que o erro de predição de uma única variável pode perturbar as trajetórias dinâmicas de todas as variáveis.

A Equação (5.36) foi aplicada em um exemplo arbitrário MIMO com 2 variáveis controladas e 2 variáveis manipuladas, com horizonte de predição igual a 5 e de controle igual a 1. A Equação (5.37) mostra o modelo real do processo utilizado.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11}(S) & P_{12}(S) \\ P_{21}(S) & P_{22}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} & \frac{2}{0.5S + 1} \\ 1 & 0.5 \\ \frac{1}{0.2S + 1} & \frac{1}{0.4S + 1} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

em que a função de transferência  $P_{ij}$  relaciona a variável controlada  $i$  com a variável manipulada  $j$ . Já o modelo utilizado pelo controlador foi o descrito pela Equação (5.38).

$$M = K \circ P$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}(S) & K_{12}(S) \\ K_{21}(S) & K_{22}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

onde  $\circ$  é o produto de Hadamard (multiplicação elemento a elemento).

As matrizes com os parâmetros de sintonia originais utilizados no exemplo foram as seguintes:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

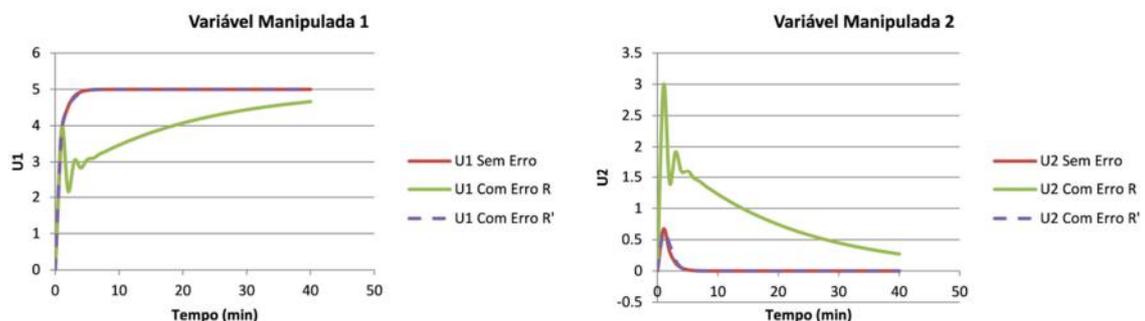
Neste exemplo, a matriz  $\underline{Mk}$  fica conforme a Equação (5.40).

$$\underline{Mk} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.7193 & 0.0359 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

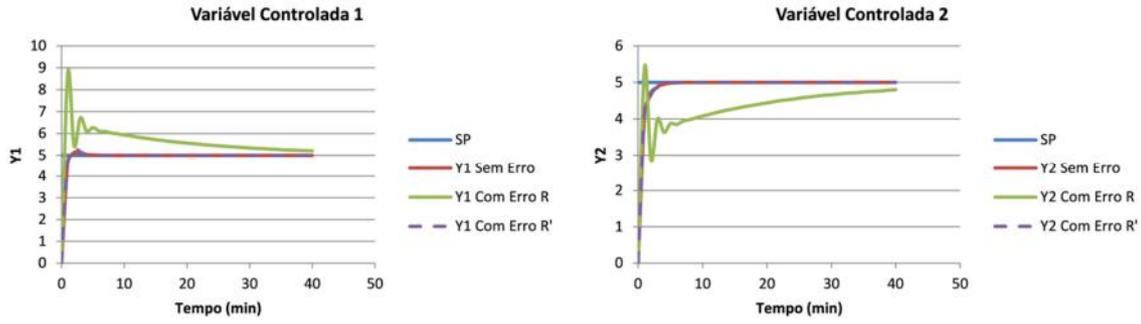
e a matriz  $\underline{R}'$ , calculada pela Equação (5.36), pode ser expressa pela Equação (5.41).

$$\underline{R}' = \begin{bmatrix} 2.9536 & 2.2461 \\ 4.4646 & 3.6841 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

O controlador foi então testado nos seguintes cenários para comparação: i) sem erro de modelagem, com sintonia pelas matrizes  $Q$  e  $R$ ; ii) com erro de modelagem, com sintonia pelas matrizes  $Q$  e  $R$ ; iii) com erro de modelagem, com sintonia pelas matrizes  $Q$  e  $R'$ . Os resultados destes cenários podem ser observados nas Figuras 5.18 e 5.19.



**Figura 5.18.** Variáveis manipuladas em um exemplo MIMO em que o processo real é dado pela Equação (5.37) e o modelo é dado pela Equação (5.38), com sintonia base e sintonia sugerida pela Equação (5.36).



**Figura 5.19.** Variáveis controladas em um exemplo MIMO em que o processo real é dado pela Equação (5.37) e o modelo é dado pela Equação (5.38), com sintonia base e sintonia sugerida pela Equação (5.36).

Neste exemplo, os erros presentes nos 4 modelos utilizados pelo controlador puderam ser compensados por meio da alteração da matriz  $R$  de parâmetros de sintonia, de acordo com a Equação (5.36). A princípio, ao trabalhar com outros valores para os horizontes de controle e predição, apenas a dimensão do problema e das matrizes dos parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$  seriam alteradas. É possível, ainda, que o desenvolvimento proposto seja válido também para erros de modelagem de outra natureza como erros na determinação do tempo morto ou na dinâmica do processo. Para isto, bastaria calcular a matriz  $\underline{\underline{Mk}} = \underline{\underline{S}}^{modeloT} \cdot (\underline{\underline{S}}^{realT})^{-1}$ , ou, utilizando a pseudoinversa,  $\underline{\underline{Mk}} = \underline{\underline{S}}^{modeloT} \cdot \underline{\underline{S}}^{real} \cdot (\underline{\underline{S}}^{realT} \cdot \underline{\underline{S}}^{real})^{-1}$ , que atenda à transformação imposta pelos erros de modelagem. Com  $\underline{\underline{Mk}}$ ,  $\underline{\underline{S}}^{real}$  e uma sintonia base proposta (matrizes  $\underline{\underline{Q}}$  e  $\underline{\underline{R}}$ ), é possível calcular, com o auxílio da Equação (5.36), a matriz  $\underline{\underline{R'}}$  capaz de compensar os erros.

De outra forma, considerando que todo o erro deve ser compensado não mais por mudanças na matriz  $R$ , mas sim por mudanças na matriz  $Q$ , mantendo a matriz  $R$  inalterada, pode-se aplicar novamente a Equação (5.31) na Equação (5.26):

$$\begin{aligned} & \left( \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}}^{real} + \underline{\underline{R}} \right)^{-1} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \hat{\underline{\underline{E}}}^{real}(k) \\ & = \left( \underline{\underline{Mk}} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q'}} \underline{\underline{S}}^{real} \underline{\underline{Mk}}^T + \underline{\underline{R}} \right)^{-1} \underline{\underline{Mk}} \underline{\underline{S}}^{realT} \underline{\underline{Q}} \hat{\underline{\underline{E}}}^{modelo}(k) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Simplificando a Equação (5.42), considerando  $\underline{\hat{E}}^{real}(k) = \underline{\hat{E}}^{modelo}(k)$  e isolando  $\underline{Q}'$ :

$$\left(\underline{S}^{realT} \underline{Q} \underline{S}^{real} + \underline{R}\right)^{-1} = \left(\underline{Mk} \underline{S}^{realT} \underline{Q}' \underline{S}^{real} \underline{Mk}^T + \underline{R}\right)^{-1} \underline{Mk} \quad (5.43)$$

$$\left(\underline{S}^{realT} \underline{Q} \underline{S}^{real} + \underline{R}\right)^{-1} \underline{Mk}^{-1} = \left(\underline{Mk} \underline{S}^{realT} \underline{Q}' \underline{S}^{real} \underline{Mk}^T + \underline{R}'\right)^{-1} \quad (5.44)$$

$$\underline{Mk} \left(\underline{S}^{realT} \underline{Q} \underline{S}^{real} + \underline{R}\right) = \left(\underline{Mk} \underline{S}^{realT} \underline{Q}' \underline{S}^{real} \underline{Mk}^T + \underline{R}\right) \quad (5.45)$$

$$\underline{Mk} \underline{S}^{realT} \underline{Q}' \underline{S}^{real} \underline{Mk}^T = \underline{Mk} \left(\underline{S}^{realT} \underline{Q} \underline{S}^{real} + \underline{R}\right) - \underline{R} \quad (5.46)$$

$$\underline{Q}' = \underline{S}^{real} \left(\underline{S}^{realT} \underline{S}^{real}\right)^{-1} \underline{Mk}^{-1} \left[\underline{Mk} \left(\underline{S}^{realT} \underline{Q} \underline{S}^{real} + \underline{R}\right) - \underline{R}\right] \underline{Mk}^{T-1} \left(\underline{S}^{realT} \underline{S}^{real}\right)^{-1} \underline{S}^{realT} \quad (5.47)$$

A Equação (5.47) fornece a nova matriz  $\underline{Q}'$  que deve ser usada para compensar as diferenças provocadas pelos erros de modelagem. O uso da matriz  $Q'$  é capaz de compensar os erros da mesma forma que o uso da matriz  $R'$  calculada pela Equação (5.36), produzindo exatamente os mesmos resultados finais nas variáveis manipuladas e controladas. Afinal, tanto a Equação (5.47) quanto a Equação (5.36) foram obtidas ao aplicar a Equação (5.31) na Equação (5.26), admitindo as mesmas premissas. Da mesma forma que foi observado com a matriz  $R'$ , a matriz  $Q'$  não é diagonal devido ao efeito multivariável. Para compensar todos os efeitos, é necessário popular a matriz  $Q'$ , que deixa de ser uma matriz diagonal, mesmo no caso em que a matriz  $Q$  é diagonal.

Retornando à compensação da sintonia por meio da matriz  $R'$  com o objetivo de esclarecer o motivo pelo qual esta matriz pode resultar em uma matriz não diagonal, foi implementado um exemplo arbitrário de MPC 2x2, onde não há acoplamento entre as variáveis. Neste caso, a variável manipulada 1 influencia apenas a variável controlada 1 e a variável manipulada 2 influencia apenas a variável controlada 2. Os horizontes de controle e predição utilizados foram iguais a 1 e 5, respectivamente.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11}(S) & P_{12}(S) \\ P_{21}(S) & P_{22}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} & 0 \\ 0 & \frac{0.5}{0.4S + 1} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

onde a função de transferência  $P_{ij}$  relaciona a variável controlada  $i$  com a variável manipulada  $j$ . Já o modelo utilizado pelo controlador foi o descrito pela Equação (5.49).

$$M = K \circ P$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}(S) & K_{12}(S) \\ K_{21}(S) & K_{22}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

onde  $\circ$  é o produto de Hadamard (multiplicação elemento a elemento). As matrizes com os parâmetros de sintonia originais, utilizados no exemplo, foram as seguintes:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Neste exemplo, a matriz  $\underline{\underline{Mk}}$  ganha a forma da Equação (5.51):

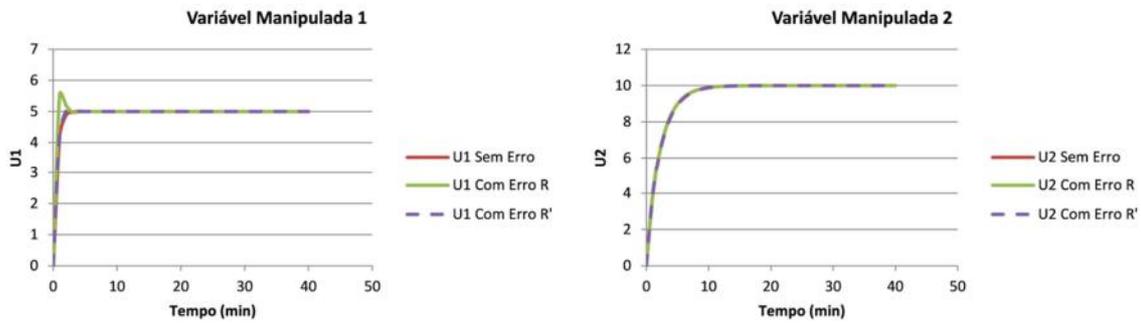
$$\underline{\underline{Mk}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

e a matriz  $\underline{\underline{R'}}$ , calculada pela Equação (5.36), fica conforme a Equação (5.52).

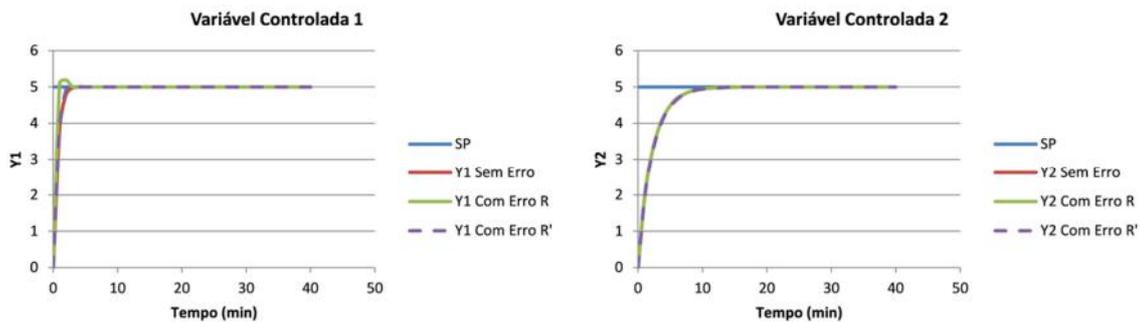
$$\underline{\underline{R'}} = \begin{bmatrix} 1.7070 & 0 \\ 0 & 2.0948 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Como era esperado, no caso desacoplado a matriz  $\underline{\underline{R'}}$  continuou sendo uma matriz diagonal. O controlador foi testado para comparação nos mesmos cenários

observados no exemplo anterior e os resultados podem ser observados nas Figuras 5.20 e 5.21.



**Figura 5.20.** Variáveis manipuladas em um exemplo MIMO desacoplado, com sintonia base e sintonia sugerida pela Equação (5.36).



**Figura 5.21.** Variáveis controladas em um exemplo MIMO desacoplado, com sintonia base e sintonia sugerida pela Equação (5.36).

Neste exemplo, como não havia acoplamento entre as variáveis, a matriz  $\underline{\underline{R'}}$  calculada para corrigir os erros de modelagem impostos foi uma matriz diagonal (Equação (5.52)). Neste caso, os valores da diagonal  $\underline{\underline{R'}}$  que foram obtidos são os mesmos que seriam obtidos ao analisar os dois casos SISO separadamente, mostrando a consistência do procedimento proposto.

Aparentemente, os resultados obtidos com o procedimento proposto são satisfatórios para os exemplos analisados. No entanto, é muito importante ressaltar que o procedimento desenvolvido para compensação dos erros de modelagem baseado na análise da resposta analítica garante apenas que a primeira ação de controle permaneça inalterada, considerando ainda que o processo se inicia em uma condição de estado estacionário. Nos exemplos utilizados, tem-se a impressão de que toda a resposta está

sendo compensada, mas isto se deve ao fato de que, com a constante de tempo baixa e com os horizontes e tempos de amostragem utilizados, a resposta do controlador concentra-se na primeira ação, que já leva a variável controlada para um valor próximo do *setpoint* informado. Assim, quando a primeira ação é compensada pela Equação (5.36) ou pela Equação (5.47), a parte mais importante da ação de controle está sendo compensada, resultando em trajetórias similares.

Ao utilizar a compensação em problemas com constantes de tempo do processo maiores, por exemplo, as hipóteses podem não ser satisfeitas de forma tão precisa. Como resultado, a trajetória do controlador com a compensação pode permanecer diferente da trajetória ideal (sem erros de modelagem). Esta pode constituir uma limitação importante da compensação de sintonia desenvolvida no presente Capítulo, principalmente do ponto de vista prático. Nesse caso, é necessário manter a coerência entre os tempos de amostragem, o tempo característico do processo e os horizontes de controle e predição do controlador.

## **5.5 Comentários Finais**

Neste Capítulo foram apresentados alguns cálculos simplificados para auxiliar no entendimento das relações entre sintonia, erros de modelagem e comportamento do controlador. Para os casos mais simples, foi possível quantificar estas influências sob a consideração de algumas hipóteses. O desenvolvimento apresentado neste capítulo prosseguiu no sentido de buscar sintonias capazes de compensar os erros de modelagem. Algumas expressões foram calculadas para tal e aplicadas a exemplos simples, com resultados satisfatórios.

Mesmo com o cenário simples empregado e as hipóteses feitas, a possibilidade de quantificar o limite para os erros de modelagem como função da sintonia do controlador (como mostrado na Equação (5.23)) e de calcular uma sintonia menos sensível a erros de modelagem (como mostrado na Figura 5.3), é bastante interessante e desejável.

# Capítulo 6 Estudos Analíticos 2 – Cálculo e Análise dos Polos de um Sistema MPC em Malha Fechada

Neste capítulo é abordado o cálculo analítico dos polos de um controlador preditivo em malha fechada. O sistema é analisado na presença de erros de modelagem e sob a influência dos parâmetros de sintonia. Os resultados são usados para propor procedimentos de sintonia de controladores MPC, com o objetivo de torná-los menos sensíveis aos erros de modelagem.

## 6.1 Introdução

Para avaliar os impactos dos erros de modelagem e da sintonia no desempenho de um controlador preditivo, foi considerado um controlador preditivo sem restrições utilizando um modelo de resposta ao degrau, cujas ações podem ser calculadas de acordo com a Equação (2.4). Para facilitar os cálculos, esta equação pode ser rescrita em função da matriz de controle  $\underline{K}_C$ , conforme a Equação (6.1).

$$\begin{aligned}\Delta \underline{U}(k) &= \underline{K}_C \hat{\underline{E}}(k) \\ \underline{K}_C &= \left( \underline{S}^T \underline{Q} \underline{S} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^T \underline{Q} \\ \hat{\underline{E}}(k) &= \underline{Y}^{SP}(k) - \hat{\underline{Y}}^*(k)\end{aligned}\tag{6.1}$$

Conforme citado na Seção 2.2, como o modelo utilizado não é perfeito, há diferença entre as previsões que norteiam as ações do controlador e os valores reais que a variável controlada assume. Para isto, a formulação de controladores preditivos conta com um ajuste de *bias*, que reposiciona a trajetória das previsões a cada instante, de

acordo com o valor real medido. O *bias* ( $\hat{D}(k)$ ) é calculado de acordo com a Equação (6.2) e somado ao longo de toda a trajetória predita, conforme mostra a Equação (6.3).

$$\hat{D}(k) = \underline{Y}_{atual}^{medido} - \underline{Y}_{atual}^{predito} \quad (6.2)$$

$$\hat{Y}(k) = \hat{Y}^*(k) + \underline{S} \cdot \Delta \underline{U}(k) + \hat{D}(k) \quad (6.3)$$

A ação de realimentação (*feedback*) do controlador preditivo ocorre em parte por meio do *bias*, uma vez que através dele a informação medida retorna ao controlador, afetando as ações de controle seguintes. Com isso, o *bias* contribui para que o controlador preditivo não deixe *offset*. No entanto, o *bias* também pode contribuir para que o comportamento do controlador preditivo seja instável (realimentação positiva). Assim, espera-se que o estudo das expressões que dão origem ao valor calculado do *bias* e/ou da ação de controle possam fornecer informação sobre o desempenho do controlador como função do erro de modelagem e da sintonia adotada.

Deve-se ressaltar ainda que, para simplificar os cálculos realizados, neste trabalho foi considerado que os modelos de resposta ao degrau que representam o processo real e o modelo utilizado pelo controlador são compostos por um número de coeficientes igual ao horizonte de predição adotado para o controlador.

## 6.2 Caso SISO com Erro no Ganho

Neste estudo, por simplicidade, será considerado inicialmente o caso SISO e que o erro de modelagem pode ser representado por um fator multiplicativo  $K$ , onde  $s_i^{modelo} = K \cdot s_i^{real}$  (para todo  $i$ ). Além disso, será admitido que o valor de *setpoint* da variável controlada é constante.

Se as ações de controle forem calculadas algebricamente a cada instante, sendo o *bias* e o comportamento real da planta também recalculados a cada instante, conforme a dedução apresentada no Apêndice A, chega-se a uma outra forma de calcular o comportamento do sistema MPC em malha fechada (Equação (6.4)) e o *bias* correspondente (Equação (6.5)).

$$\Delta U_j = CY^{SP} W_j \quad (6.4)$$

onde  $W_j = 1 - \sum_{i=1}^j X_i W_{j-i}$

e  $X_i = K \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i} + (1 - K)Cs_i$

$$D_j = (1 - K)CY^{SP} \sum_{i=1}^j s_i W_{j-i} \quad (6.5)$$

onde  $W_j = 1 - \sum_{i=1}^j X_i W_{j-i}$

e  $X_i = K \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i} + (1 - K)Cs_i$

As expressões apresentadas nas Equações (6.4) e (6.5) foram testadas de forma quantitativa, comparando os resultados obtidos com aqueles obtidos ao resolver o problema de controle de maneira clássica, em um *loop* em que o controlador e o processo são calculados a cada instante. Os resultados mostraram que é possível chegar exatamente aos mesmos valores quantitativos das ações de controle e de *bias*.

### 6.2.1 Condição Assintótica

Analisando a condição assintótica da Equação (6.4), observa-se que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $X_i = Cs$ , onde  $s$  é o ganho estático unitário do modelo que representa a planta real (último coeficiente). Portanto,  $W_n = (1 - Cs)^n$ . Logo, uma condição suficiente, mas não necessária, em que  $W_n$  converge e, portanto,  $\Delta U_n$  e  $D_n$  convergem (ou seja, o comportamento do controlador não é instável) pode ser dada pela Equação (6.6), introduzida neste trabalho.

$$\begin{aligned} |1 - Cs| < 1 \quad \text{ou} \\ 0 < Cs < 2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

A condição suficiente de convergência da Equação (6.6) foi aplicada a dois exemplos diferentes para fins de validação e os resultados são apresentados a seguir. Para facilitar a nomenclatura, o produto  $Cs$  será tratado como um índice denominado *Ind*.

*Exemplo 6.1: SISO com horizontes iguais a 1*

Como primeiro exemplo, foi simulado um controlador SISO com horizontes de controle e predição iguais a 1 aplicado a um modelo de puro ganho, representado pelo coeficiente  $s_1$ . Trata-se, portanto, de um exemplo extremamente simples, com o objetivo de validar e estabelecer condições ainda mais específicas e esclarecedoras que relacionem sintonia e erro de modelagem em sistemas de MPC. Nestas condições, a Equação (6.6) pode ser escrita como:

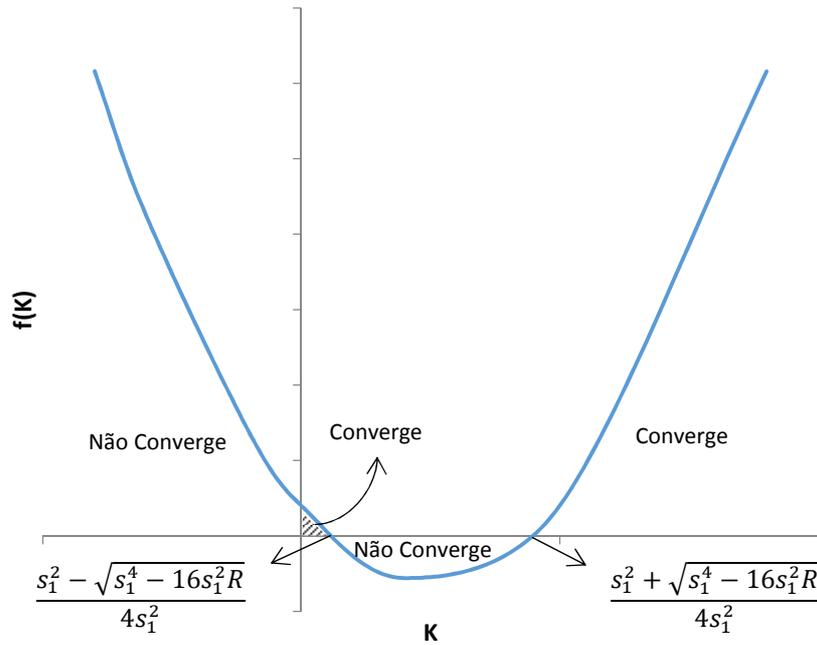
$$0 < ((K^2 s_1^2 + R)^{-1} K s_1^2) < 2 \quad (6.7)$$

Isolando as duas inequações da Equação (6.7), chega-se às expressões das Equações (6.8) e (6.9).

$$\begin{aligned} ((K^2 s_1^2 + R)^{-1} K s_1^2) > 0 \quad \text{ou} \\ K > 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

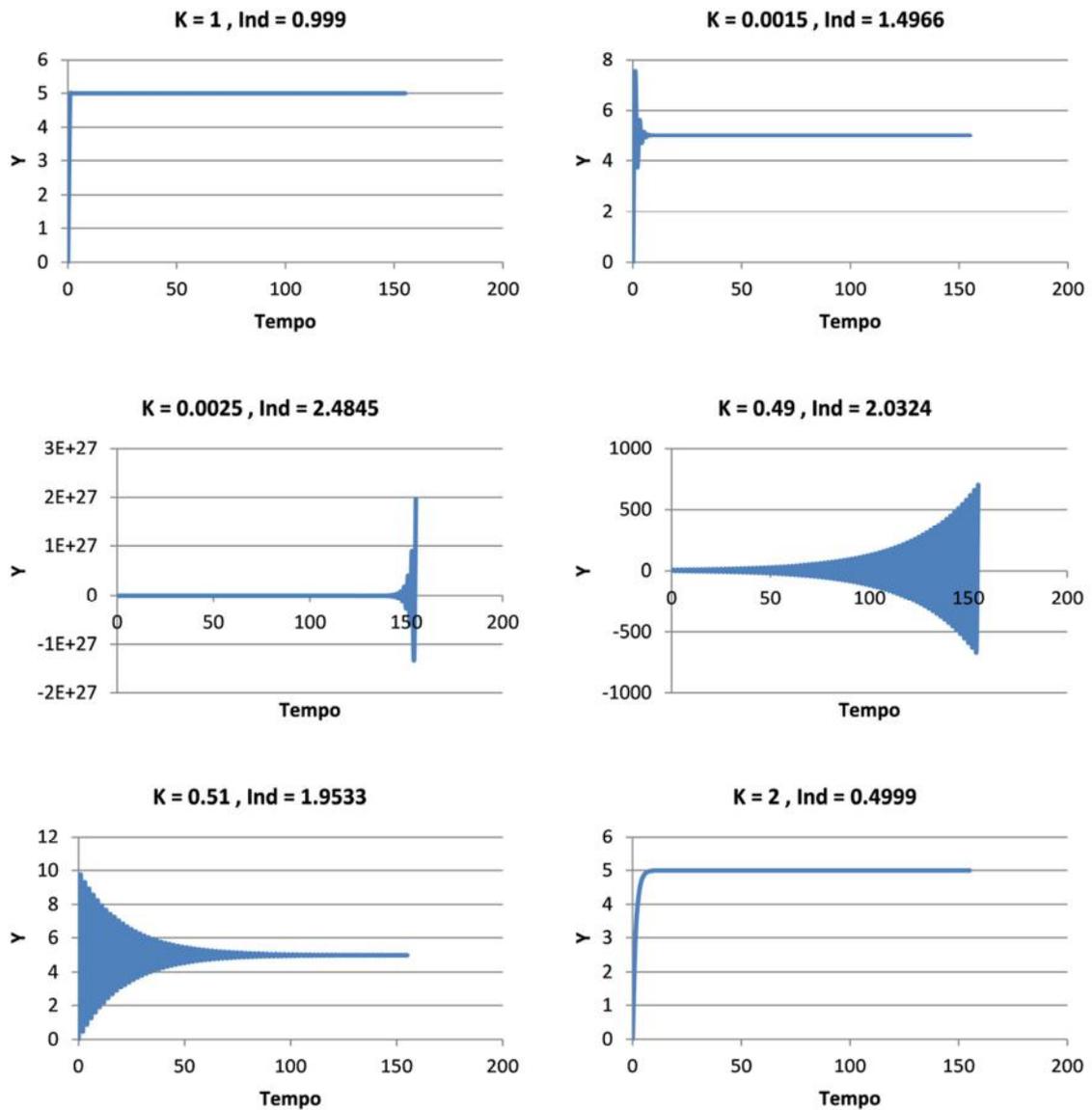
$$\begin{aligned} ((K^2 s_1^2 + R)^{-1} K s_1^2) < 2 \quad \text{ou} \\ 2K^2 s_1^2 - K s_1^2 + 2R > 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Uma vez arbitrados  $s_1$  e  $R$ , a Equação (6.9) determina uma parábola (Figura 6.1) que define a região em que o fator  $K$  deve estar para que o controlador tenha desempenho estável (juntamente com a condição da Equação (6.8)). As raízes da Equação (6.9) em função de  $s_1$  e  $R$  são iguais a  $\frac{s_1^2 - \sqrt{s_1^4 - 16s_1^2 R}}{4s_1^2}$  e  $\frac{s_1^2 + \sqrt{s_1^4 - 16s_1^2 R}}{4s_1^2}$ . Esses resultados são similares em certa medida aos resultados mostrados no Capítulo anterior e mostram que há limites bem estabelecidos para que o controlador assimile os erros de modelagem.



**Figura 6.1.** Região de convergência suficiente em um caso SISO com horizontes iguais a 1 e erro de modelagem expresso por um fator multiplicativo  $K$ .

Assim, se  $s_1 = 1$ ,  $R = 0.001$ , as raízes da Equação (6.9) são 0.00201 e 0.497992. Isto significa que o controlador pode apresentar comportamento instável quando o modelo utilizado possui valor de  $s_1$  entre 0.00201 e 0.497992 (ou seja,  $0.00201 < K < 0.497992$ ). Pela Equação (6.8), o mesmo acontece para  $K < 0$  ou  $s_1 < 0$ . Por outro lado, quando  $s_1$  é maior que 0 e menor que 0.00201 ou maior que 0.497992, o controlador tem comportamento estável. Estas condições foram testadas em um cenário de mudança de *setpoint* da variável controlada, embora o valor de *setpoint* não afete a análise, e os resultados (Figura 6.2) confirmam a validade das conclusões obtidas. Na Figura 6.2 também pode ser observado o valor do parâmetro *Ind* que, de acordo com a Equação (6.6), deveria estar entre 0 e 2 para garantir a convergência do controlador.



**Figura 6.2.** Variável controlada em um cenário SISO com horizontes iguais a 1 e diferentes erros de modelagem

Um aspecto interessante é que, quando  $R$  é suficientemente grande, a Equação (6.9) não possui raízes reais e o controlador não instabiliza para nenhum valor de  $K$  maior que zero (condição de convergência da Equação (6.8)). A condição de  $R$  em que a condição da Equação (6.9) é sempre satisfeita pode ser expressa pela Equação (6.10).

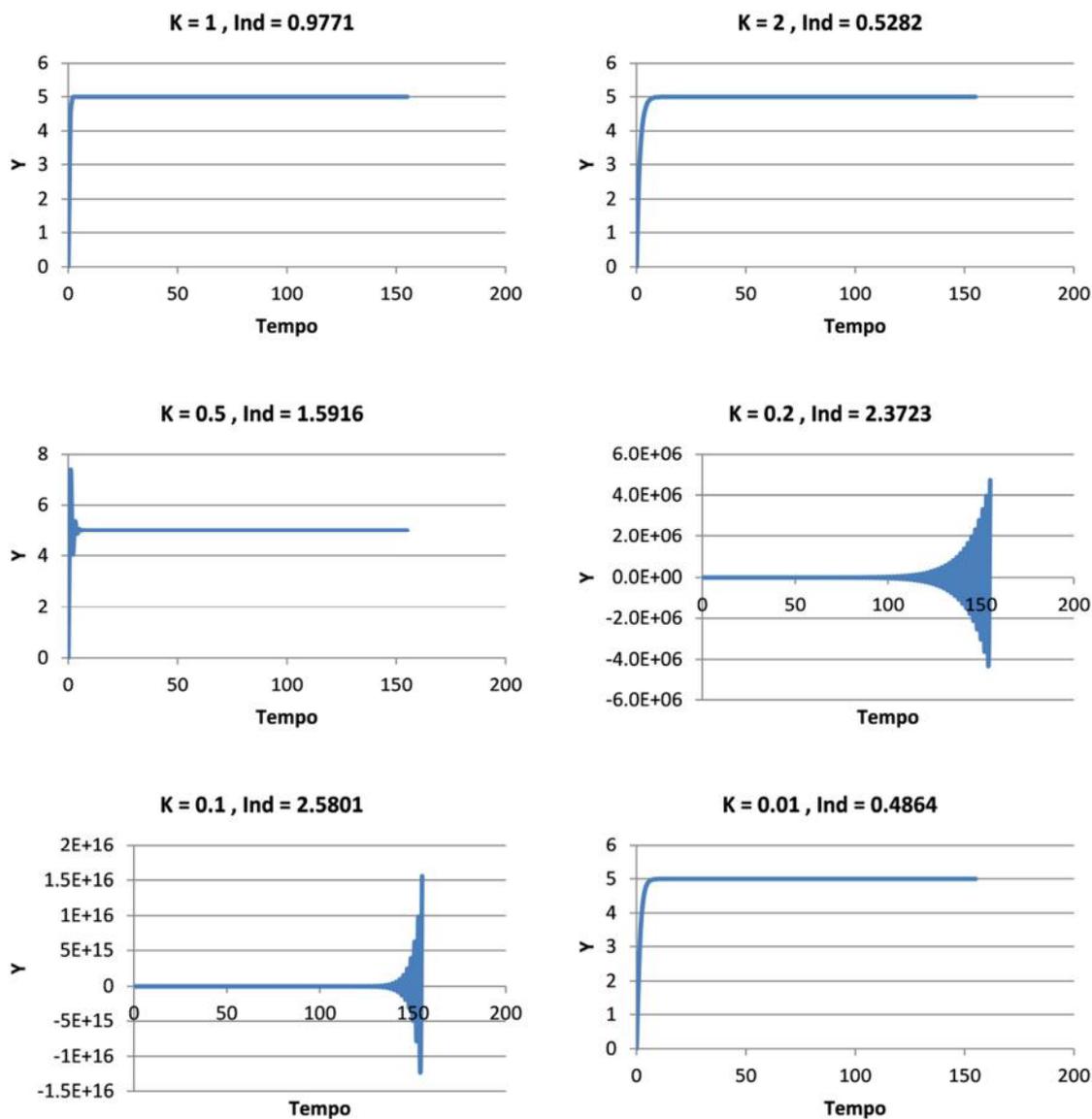
$$s_1^4 - 16s_1^2R < 0 \quad \text{ou} \quad R > \frac{s_1^2}{16} \quad (6.10)$$

Aplicando a Equação (6.10) no exemplo anterior, tem-se que quando  $R$  é maior que 0.0625, o controlador não instabiliza para nenhum valor de  $K$  maior que zero. Esse resultado é muito importante porque permite estabelecer valores bem definidos para os parâmetros de sintonia do controlador, de modo a torná-lo insensível aos erros de modelagem.

#### *Exemplo 6.2: SISO com horizontes maiores que 1*

A validade da Equação (6.6), considerando a condição estabelecida para o parâmetro  $Ind$ , também foi testada em casos SISO com modelos de primeira ordem sem tempo morto e horizontes maiores que 1 em um cenário de mudança de *setpoint* da variável controlada. Para isto, foi utilizado um exemplo arbitrário em que um controlador foi aplicado a uma planta representada por um processo com ganho 1 e constante de tempo 0.4, com horizonte de predição igual a 5 e horizonte de controle igual a 3. Os resultados podem ser observados na Figura 6.3, considerando os parâmetros de sintonia  $Q = 1$  e  $R = 0.1$ , também adotados arbitrariamente. Este exemplo também apresentou resultados satisfatórios em relação ao que era esperado pela Equação (6.6). No entanto, é importante lembrar que a condição obtida por esta equação é uma condição assintótica e apenas suficiente (mas não necessária) de convergência.

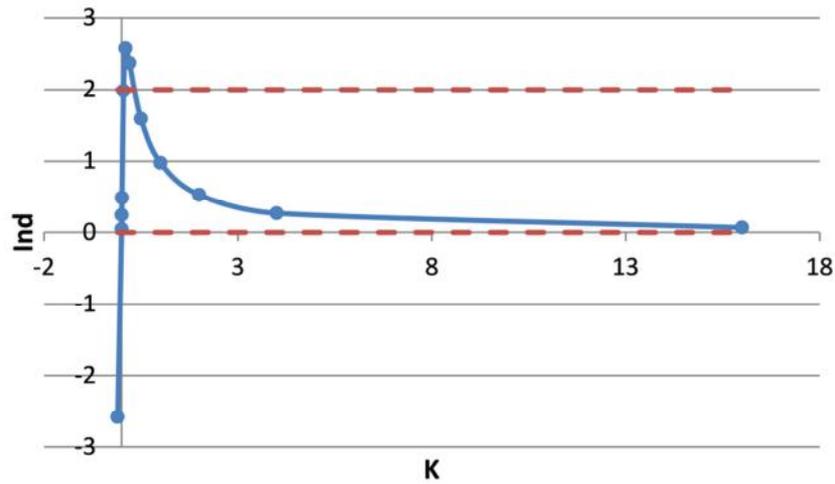
Foi realizada ainda uma análise de sensibilidade baseada neste exemplo para avaliar como o parâmetro proposto  $Ind$  varia com o fator de erro de modelagem  $K$ , mostrada na Tabela 6.1 e na Figura 6.4. O resultado da Figura 6.4 reflete o comportamento esperado em termos de estabilidade, ao verificar para que valores do fator de erro de modelagem  $K$ , o valor de  $Ind$  obedece aos limites de estabilidade da Equação (6.6). Neste exemplo, é interessante e surpreendente observar como um modelo com ganho 10 vezes menor do que o ganho do processo real pode apresentar desempenho pior do que um modelo com ganho 100 vezes menor do que o ganho do processo real. Isto pode ser observado na Figura 6.3, em termos da trajetória da variável controlada, e na Figura 6.4, em termos do valor de  $Ind$ , reforçando a capacidade do índice  $Ind$  em caracterizar o desempenho do sistema controlado.



**Figura 6.3.** Variável controlada em um cenário SISO com horizontes ampliados e diferentes erros de modelagem

**Tabela 6.1.** Influência de  $K$  em  $Ind$

<b>K</b>	<b>Ind</b>	<b>K</b>	<b>Ind</b>
-0.1	-2.5801	0.2	2.3723
0.001	0.0491	0.5	1.5916
0.005	0.2449	1	0.9771
0.01	0.4864	2	0.5282
0.05	1.9846	4	0.2702
0.1	2.5801	16	0.068



**Figura 6.4.** Influência de  $K$  em  $Ind$ .

### 6.2.2 Cálculo dos Polos do Sistema em Malha Fechada

Retornando à Equação (6.4), uma análise mais rigorosa da convergência pode ser obtida utilizando a transformada  $z$ , conforme desenvolvido a seguir. Para analisar a convergência de  $\Delta U_j$ , é analisada a convergência de  $W_j$ , uma vez que este é o único fator em  $\Delta U_j$  capaz de divergir. O termo  $W_j$  envolve uma soma de convolução, que pode ser expressa conforme mostra a Equação (6.11).

$$W_j = 1 - \sum_{i=1}^j X_i W_{j-i} \quad (6.11)$$

$$W = 1 - X * W$$

Aplicando a transformada  $z$  à Equação (6.11), tem-se:

$$\begin{aligned} T\{W\} &= T\{1 - X * W\} \\ W(z) &= T\{1\} - X(z) \cdot W(z) \\ (1 + X(z)) \cdot W(z) &= T\{1\} \\ (1 + X(z)) \cdot W(z) &= \frac{z}{z-1} \\ W(z) &= \frac{z}{(z-1)(1+X(z))} \end{aligned} \quad (6.12)$$

com

$$X(z) = X_1 z^{-1} + X_2 z^{-2} + X_3 z^{-3} + \dots + X_{HP} z^{-HP} + X_{HP} z^{-HP-1} + \dots \quad (6.13)$$

ou

$$X(z) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i z^{-i}, \text{ com } X_i = X_{HP} \text{ para } i = HP, \dots, \infty$$

Substituindo a Equação (6.13) na Equação (6.12), tem-se:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{z}{(z-1)(1 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i z^{-i})} \\ W(z) &= \frac{z}{z + (\sum_{i=1}^{\infty} X_i z^{-i+1}) - 1 - (\sum_{i=1}^{\infty} X_i z^{-i})} \\ W(z) &= \frac{z}{z + (\sum_{i=1}^{\infty} X_i z^{-i+1}) - 1 - (\sum_{i=1}^{\infty} X_i z^{-i})} \\ W(z) &= \frac{z}{z + (X_1 - 1)z^0 + (X_2 - X_1)z^{-1} + (X_3 - X_2)z^{-2} + \dots + (X_{HP} - X_{HP-1})z^{-HP+1} + (X_{HP} - X_{HP})z^{-HP} + \dots} \end{aligned} \quad (6.14)$$

A Equação (6.14) pode ser escrita como:

$$W(z) = \frac{z}{z + (X_1 - 1)z^0 + (\sum_{i=1}^{HP-1} (X_{i+1} - X_i)z^{-i})} \quad (6.15)$$

Multiplicando a Equação (6.15) por  $z^{HP-1}/z^{HP-1}$ :

$$W(z) = \frac{z^{HP}}{z^{HP} + (X_1 - 1)z^{HP-1} + (\sum_{i=1}^{HP-1} (X_{i+1} - X_i)z^{HP-1-i})} \quad (6.16)$$

Com base na Equação (6.16), tem-se que  $W(z)$  possui  $HP$  zeros iguais a zero e  $HP$  polos, raízes da equação característica (Equação (6.17)).

$$z^{HP} + (X_1 - 1)z^{HP-1} + \left( \sum_{i=1}^{HP-1} (X_{i+1} - X_i)z^{HP-1-i} \right) = 0 \quad (6.17)$$

Chamando de  $\alpha_i$  as raízes da Equação (6.17), observa-se que se  $|\alpha_i| < 1 \forall i$ , ou seja, se todos os polos estão dentro do círculo unitário, então  $W(z)$  converge e, portanto, o comportamento do controlador é estável. De outro modo, se houver ao menos uma

raiz cujo módulo esteja fora do círculo unitário, o comportamento do controlador é instável. Portanto, a Equação (6.17) pode ser usada para fins de projeto do controlador MPC.

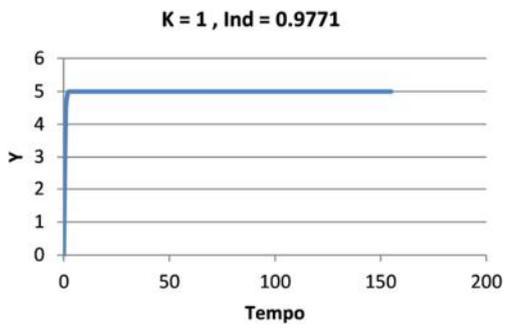
É importante ressaltar que a Equação (6.17) possui ordem  $HP$  porque, anteriormente, foi feita a hipótese de que o número de coeficientes do modelo de resposta ao degrau é igual ao horizonte de predição. Em uma abordagem mais genérica, que não considere esta hipótese, mas considere que o número de coeficientes do modelo é menor do que o horizonte de predição, a ordem da Equação (6.17) seria igual ao número de coeficientes do modelo ( $N$ ), uma vez que o termo  $X_N$  se anularia em todas as parcelas em que  $z$  aparece elevado a um expoente maior ou igual a  $N$  na Equação (6.14). Assim, em um caso genérico, o sistema em malha fechada deve apresentar  $N$  polos.

Utilizando premissas e deduções diferentes, MAURATH *et al.* (1988) e DUBAY *et al.* (2005) chegaram a equações características similares à Equação (6.17), desenvolvida neste trabalho, para um sistema SISO em malha fechada. No entanto, na presente tese, a Equação (6.17) é generalizada para uma ampla variedade de problemas SISO e MIMO, bastando modificar a forma como  $X_i$  é calculado, como será mostrado nas próximas seções.

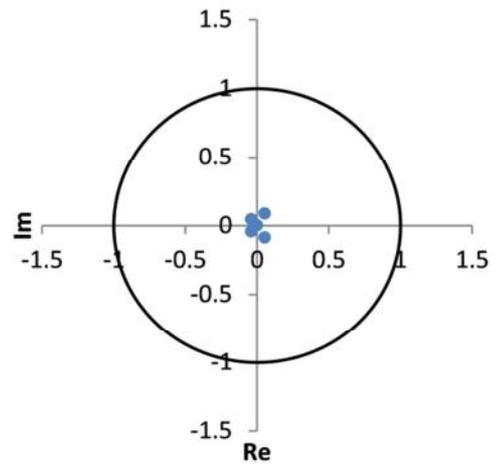
As conclusões obtidas com o auxílio da Equação (6.17) são aplicadas a exemplos a seguir, em que podem ser observados lado a lado o comportamento do sistema em malha fechada e os polos deste sistema. Para ilustrar os exemplos, foi proposto um cenário de mudança de *setpoint* da variável controlada. No entanto, é importante ressaltar que este cenário não afeta os polos do sistema em malha fechada.

### *Exemplo 6.3: SISO com horizontes curtos*

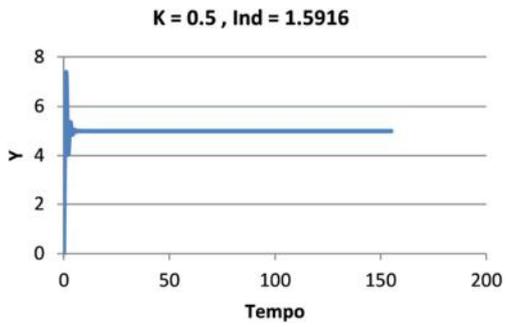
Neste exemplo, o MPC é aplicado a uma planta representada por um modelo de primeira ordem sem tempo morto, com ganho 1 e constante de tempo 0.4. Os horizontes empregados neste exemplo foram iguais a 3 e 5 para controle e predição, respectivamente. O parâmetro de sintonia  $Q$  foi fixado em 1 e o parâmetro  $R$  em 0.1. Foram utilizados diferentes modelos para serem utilizados pelo controlador, caracterizados pelo fator  $K$  de erro de modelagem em relação ao modelo perfeito. Os parâmetros do controlador, bem como do modelo e do processo real, foram definidos arbitrariamente. Os resultados em termos de comportamento do sistema sob a ação do MPC e em termos dos polos podem ser observados na Figura 6.5.



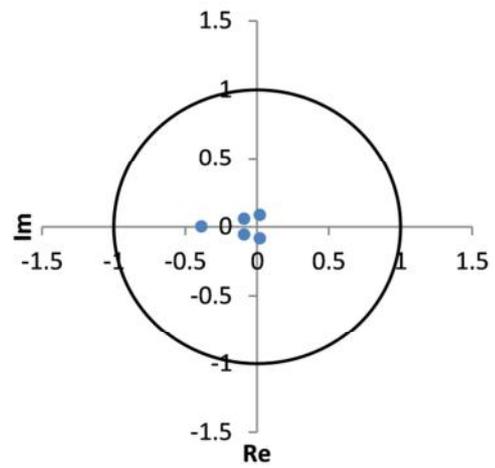
**(1a)**



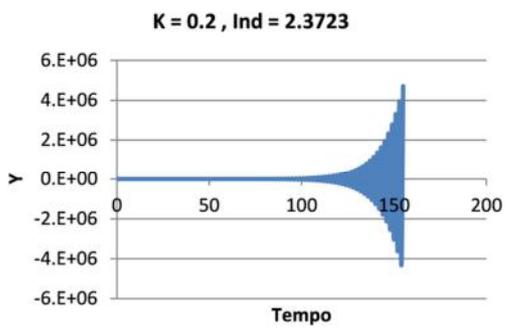
**(1b)**



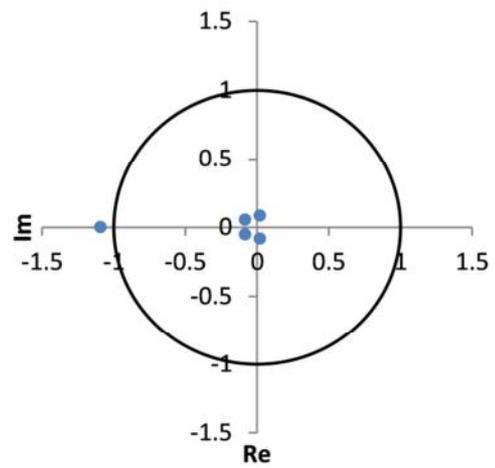
**(2a)**



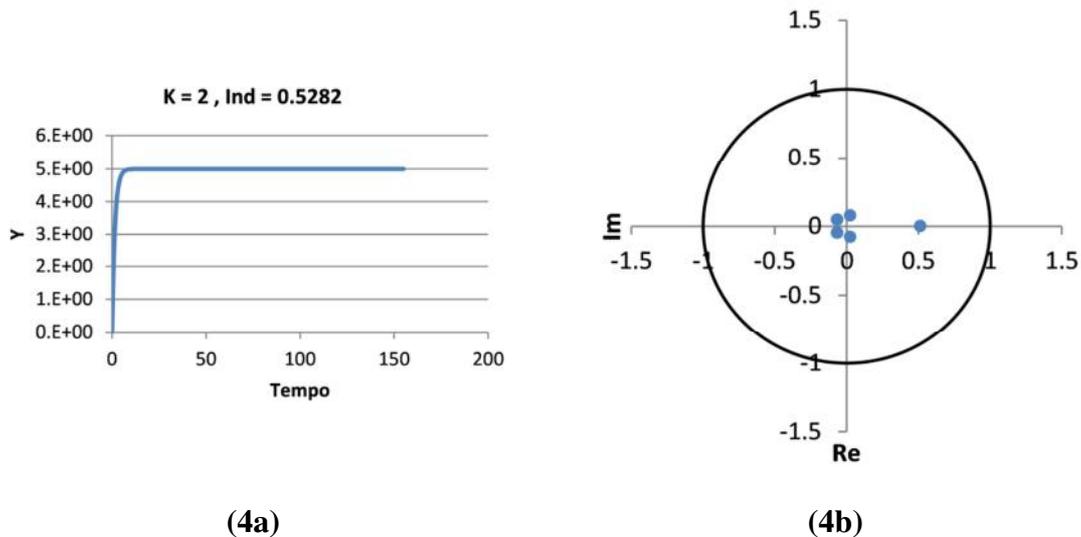
**(2b)**



**(3a)**



**(3b)**

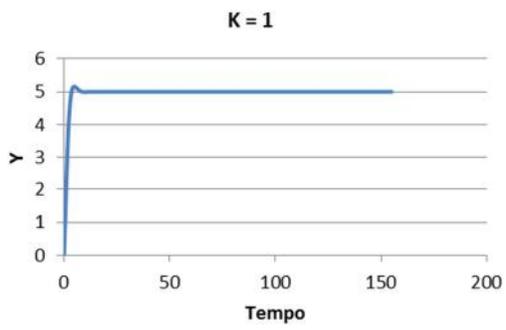


**Figura 6.5.** Comportamento e polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.3.

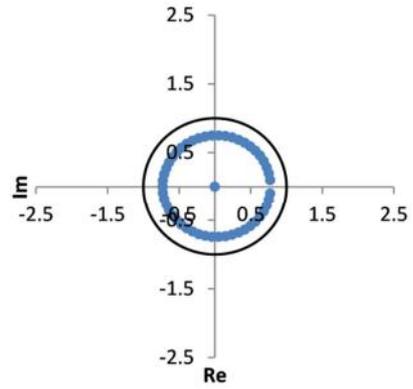
Na Figura 6.5 é possível confirmar os resultados esperados para o comportamento do sistema em malha fechada quando comparados com os polos. Dentro dos cenários testados, houve apenas um caso de instabilidade, quando  $K = 0.2$ , que resultou também em um dos polos fora do círculo unitário (Figura 6.5 – 3a e 3b). Portanto, a Figura 6.5 parece validar a propriedade da Equação (6.17) e seu uso para fins de sintonia do MPC.

*Exemplo 6.4: SISO com horizontes longos*

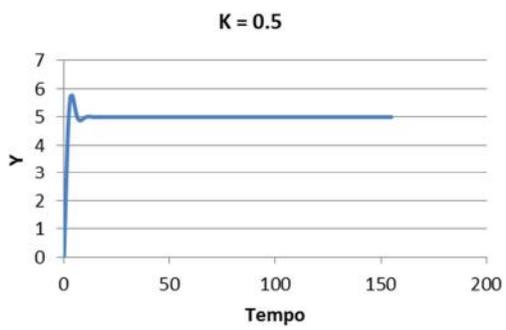
Considerando um processo representado por um modelo de primeira ordem sem tempo morto, com ganho 1 e constante de tempo 4, foi aplicado um MPC com horizontes de controle e predição iguais a 30 e a 50, respectivamente. Os parâmetros de sintonia utilizados foram  $Q = 1$  e  $R = 0.1$ . Neste exemplo também foram utilizados diferentes modelos pelo controlador; ou seja, foram empregados diferentes fatores de erro de modelagem  $K$ . Novamente, os parâmetros que caracterizam o controlador, o modelo e o processo real foram escolhidos arbitrariamente. Os resultados do MPC aplicado a este exemplo podem ser observados na Figura 6.6.



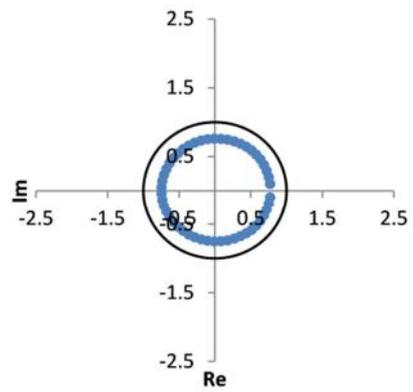
**(1a)**



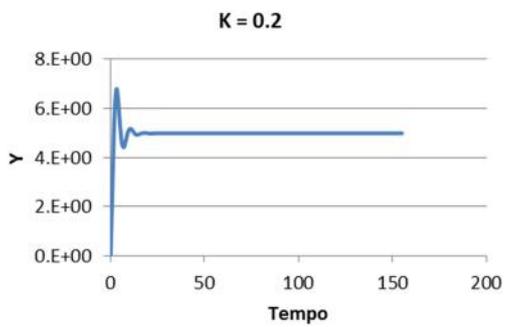
**(1b)**



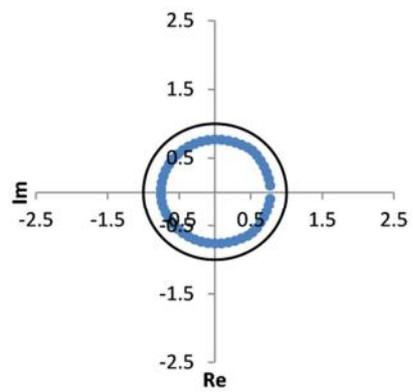
**(2a)**



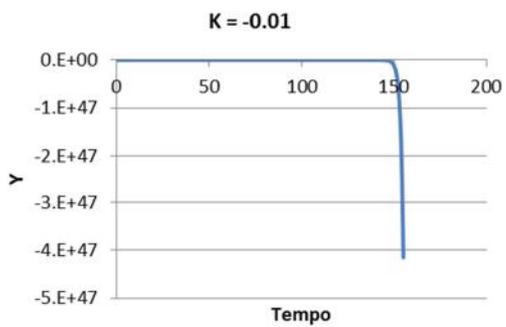
**(2b)**



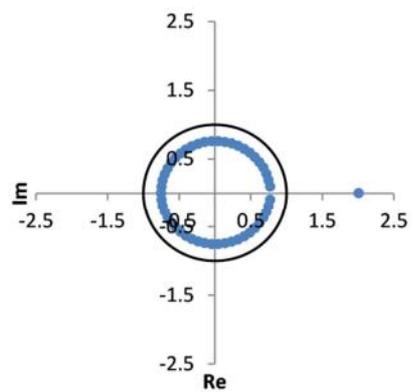
**(3a)**



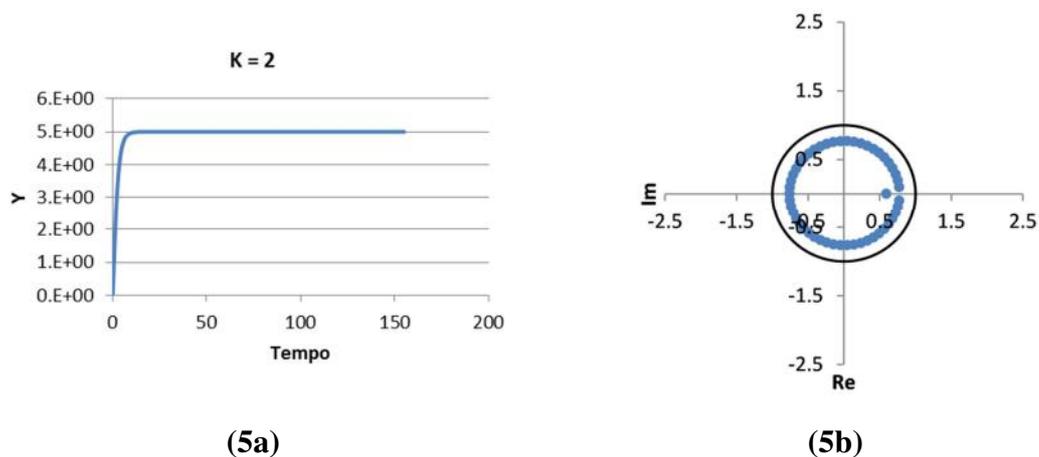
**(3b)**



**(4a)**



**(4b)**



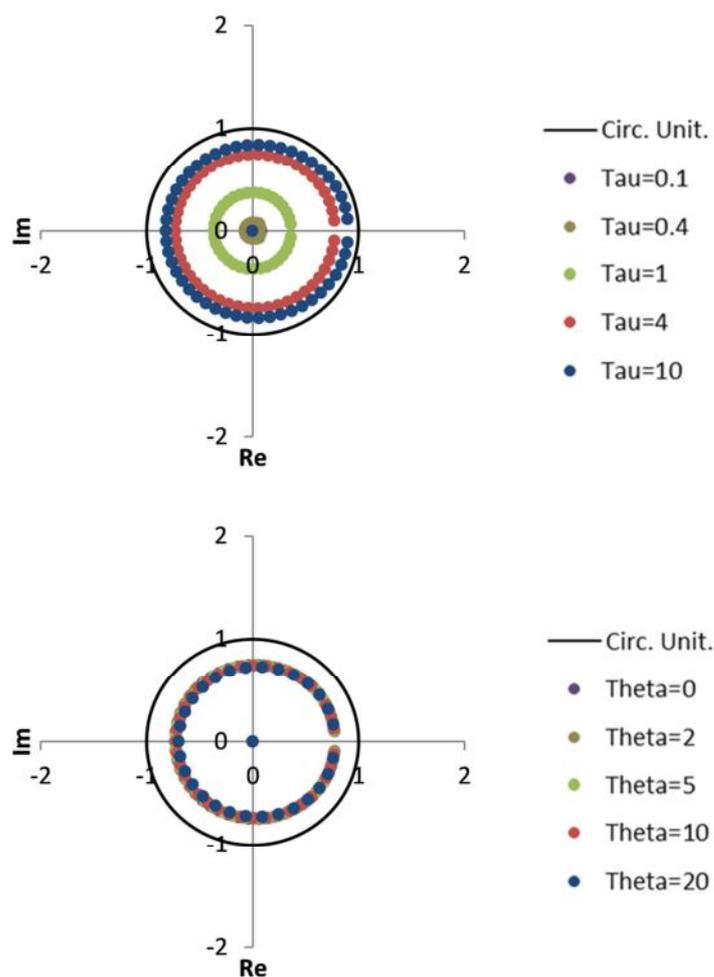
**Figura 6.6.** Comportamento e polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.4.

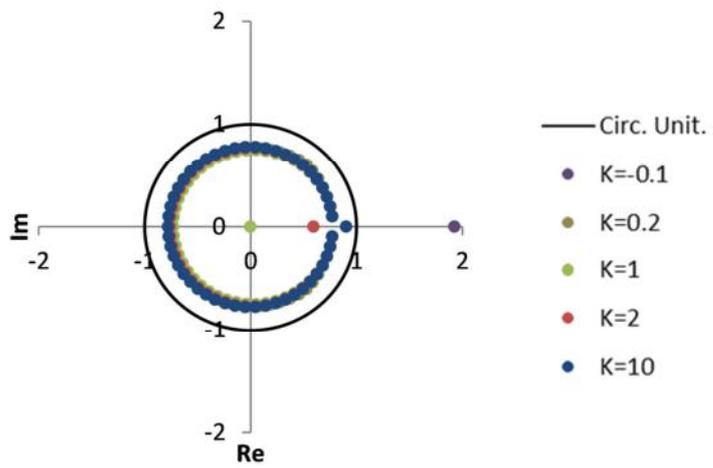
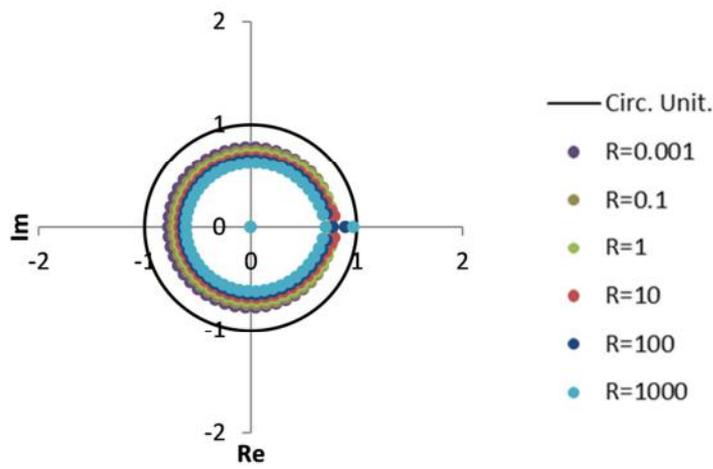
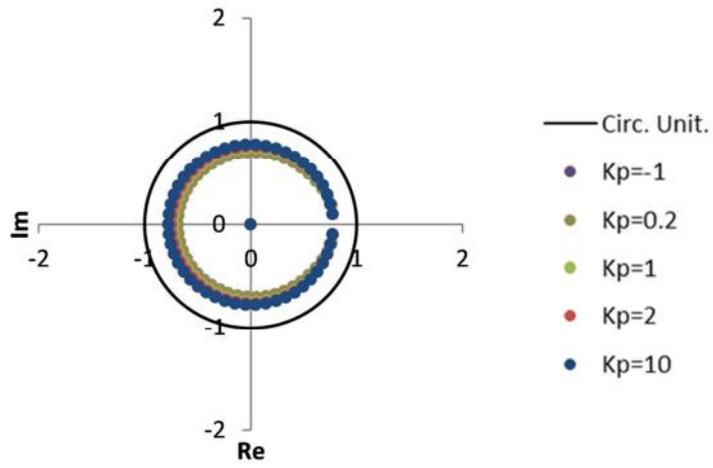
Neste exemplo, é curioso observar que, ao utilizar horizontes de predição longos, a maioria dos *HP* polos do sistema em malha fechada quando visualizados graficamente formam aproximadamente um círculo centrado em zero. Mais curioso ainda foi notar que, neste caso específico, quando um polo tende a sair do círculo formado pelos polos ou do círculo unitário, este polo corresponde a uma raiz real da equação característica. Novamente, os resultados confirmam o que era esperado; ou seja, só houve polo fora do círculo unitário no caso em que o comportamento do sistema foi instável (Figura 6.6 – 4a e 4b), confirmando a validade e a relevância da Equação (6.17).

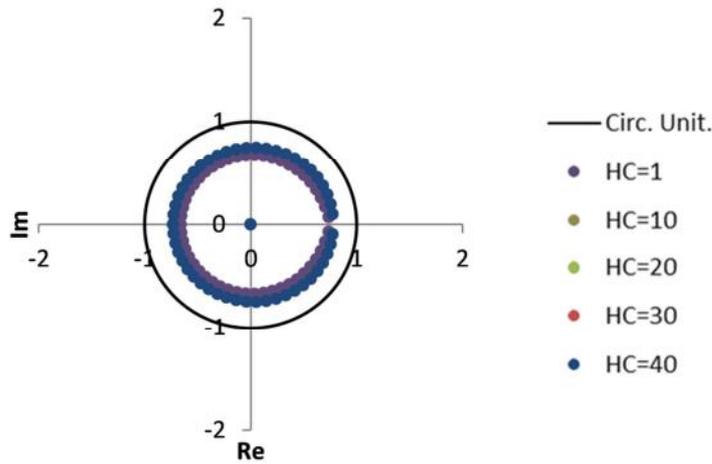
#### *Exemplo 6.5: Análise de Sensibilidade no caso SISO*

Para verificar a influência de diferentes parâmetros nos polos do sistema em malha fechada, foi realizada uma análise de sensibilidade a partir de um caso base arbitrado. O caso base consistiu na aplicação de um MPC a um processo de primeira ordem sem tempo morto com ganho 1 e constante de tempo 4. Os horizontes de controle e predição do caso base foram iguais a 30 e 50, respectivamente, e a sintonia consistiu em adotar  $Q = 1$  e  $R = 0.1$ . Como base foi ainda utilizado um modelo perfeito para o controlador, ou seja, fator  $K$  igual a 1. A análise de sensibilidade verificou a influência da constante de tempo, do tempo morto e do ganho do processo, além do parâmetro de sintonia  $R$ , do horizonte de controle e do erro de modelagem  $K$  sobre os polos calculados.

É importante ressaltar que, no caso da sensibilidade em relação à constante de tempo, ao tempo morto e ao ganho do processo, estes parâmetros foram alterados tanto no processo real que representa a planta quanto no modelo utilizado pelo controlador, uma vez que o caso base considera um modelo perfeito. Além disso, como no caso SISO os parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$  estão correlacionados, a sensibilidade foi avaliada apenas em relação ao parâmetro  $R$ . Na Figura 6.7,  $\tau$  é a constante de tempo,  $\theta$  é o tempo morto,  $K_p$  é o ganho do processo real,  $R$  é o parâmetro de supressão de movimento do controlador,  $K$  é o fator multiplicativo de erro de modelagem e  $HC$  é o horizonte de controle.







**Figura 6.7.** Análise de sensibilidade dos polos em relação a diferentes parâmetros.

De acordo com a Figura 6.7, o único parâmetro que afetou significativamente o raio da circunferência formada pelos polos do sistema foi a constante de tempo. O tempo morto influenciou o número de polos localizados no zero, embora os outros polos tenham continuado com a mesma característica. Já o parâmetro de sintonia  $R$  e o fator de erro de modelagem  $K$  não influenciaram a maioria dos polos que formam um círculo, mas influenciaram significativamente um dos polos, que sai do círculo formado pelos outros polos e parece percorrer o eixo real, podendo até mesmo sair do círculo unitário. Assim, pela análise realizada, há indícios de que os fatores que apresentam maior potencial para influenciar a estabilidade do sistema são o parâmetro de sintonia  $R$  e o fator de erro de modelagem  $K$ .

### 6.2.3 Condições de Estabilidade

Seria interessante calcular a região que limita as raízes da Equação (6.17) a partir dos coeficientes desta equação, para determinar com mais facilidade as condições de estabilidade do controlador. Para isto, dentre alguns critérios existentes, será utilizado o critério de Lagrange (Equação (6.18)). Alternativamente, o mesmo resultado poderia ser obtido com o uso do teorema de Gershgorin (HIRST e MACEY, 1997).

$$|\alpha| \leq \max \left\{ 1, \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \right\} \quad (6.18)$$

onde  $a$  são os coeficientes do polinômio

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_i z^i + \dots + a_0$$

Como, pela Equação (6.17),  $a_n = 1$ , a condição da Equação (6.18) pode ser tratada como:

$$|\alpha| \leq \max \left\{ 1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right\} \quad (6.19)$$

onde  $a$  são os coeficientes do polinômio

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_i z^i + \dots + a_0$$

Aplicando a condição da Equação (6.19) na Equação (6.17), é possível analisar pelo menos quatro casos particulares, dependendo do modelo da planta e do controlador. Os casos particulares identificados são analisados a seguir. É importante ressaltar que para estes casos particulares ou para qualquer outro caso genérico, é sempre possível e mais preciso determinar a estabilidade por meio do cálculo dos polos diretamente da Equação (6.17).

*Caso 1:  $X$  é uma sequência crescente, com  $X_1 > 1$*

Neste caso particular, é possível calcular o somatório dos módulos dos coeficientes de acordo com a Equação (6.20).

$$\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = X_1 - 1 + X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_{HP} - X_{HP-1} = X_{HP} - 1 \quad (6.20)$$

Assim, uma condição em que o sistema controlado é estável pode ser dada pela Equação (6.21).

$$\begin{aligned}
X_{HP} - 1 &< 1 \\
\text{ou} \\
X_{HP} &< 2
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Como a sequência é crescente e  $X_1 > 1$ , chega-se a:

$$1 < X_{HP} < 2 \tag{6.22}$$

*Caso 2: X é uma sequência crescente, com  $X_1 < 1$*

Neste caso, o somatório dos módulos dos coeficientes segue a Equação (6.23).

$$\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 1 - X_1 + X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_{HP} - X_{HP-1} = 1 - 2X_1 + X_{HP} \tag{6.23}$$

Assim, uma condição em que o controlador estabiliza pode ser dada pela Equação (6.24).

$$\begin{aligned}
1 - 2X_1 + X_{HP} &< 1 \\
\text{ou} \\
X_{HP} - 2X_1 &< 0
\end{aligned} \tag{6.24}$$

*Caso 3: X é uma sequência decrescente, com  $X_1 > 1$*

Particularizando o somatório dos coeficientes para o Caso 3, chega-se à Equação (6.25).

$$\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = X_1 - 1 - X_2 + X_1 - X_3 + X_2 + \dots - X_{HP} + X_{HP-1} = 2X_1 - X_{HP} - 1 \tag{6.25}$$

Logo, neste caso, uma condição em que o controlador é estável pode ser definida pela Equação (6.26).

$$2X_1 - X_{HP} - 1 < 1 \quad (6.26)$$

ou

$$2X_1 - X_{HP} < 2$$

*Caso 4: X é uma sequência decrescente, com  $X_1 < 1$*

Neste último caso particular analisado, o somatório dos coeficientes segue a Equação (6.27).

$$\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 1 - X_1 - X_2 + X_1 - X_3 + X_2 + \dots - X_{HP} + X_{HP-1} = 1 - X_{HP} \quad (6.27)$$

Neste caso, uma condição em que o sistema controlado é estável pode ser expressa pela Equação (6.28).

$$1 - X_{HP} < 1 \quad (6.28)$$

ou

$$X_{HP} > 0$$

De modo mais específico, como a sequência é decrescente e  $X_1 < 1$ , a condição fica:

$$0 < X_{HP} < 1 \quad (6.29)$$

Os casos particulares analisados podem ser encontrados ao tratar de modelos de resposta ao degrau que sejam sempre crescentes ou decrescentes, o que é relativamente comum. Em todos os outros casos, o recomendado é verificar a estabilidade pela análise dos polos calculados pela Equação (6.17).

#### 6.2.4 Modelagem dos polos

Nos exemplos estudados, as raízes da Equação (6.17) (polos do sistema em malha fechada) apresentaram um padrão de comportamento definido, formando aproximadamente uma circunferência centrada em zero. Pelas análises de sensibilidade realizadas (Figura 6.7), observa-se ainda que o raio desta circunferência (ou seja, o módulo das raízes) parece ser pouco afetado por alguns dos parâmetros estudados, especialmente pelos erros de modelagem ( $K$ ). Porém, uma das raízes reais ( $x^*$ ) parece “fugir” da circunferência quando este parâmetro varia. E é justamente esta raiz que faz com que o desempenho do controlador seja tão diferente e possa até mesmo instabilizar. Seria de grande utilidade conhecer como esta raiz real é influenciada pelos parâmetros do problema de controle. Por isso, este trabalho propõe uma modelagem simplificada para o cálculo desta raiz.

O desenvolvimento descrito a seguir é válido apenas para o caso particular em que o modelo é de primeira ordem sem tempo morto e o erro de modelagem é devido a um fator multiplicativo do ganho ( $K$ ). Assim, o polinômio característico (Equação (6.17)) foi modelado considerando que suas raízes formam aproximadamente uma circunferência e que há ao menos uma raiz real que pode estar ou não sobre esta circunferência. Para tal, foi admitido que o polinômio da Equação (6.17) poderia ser escrito na forma da Equação (6.30).

$$(z - x^*) \left( z^{HP-1} + r\phi z^{HP-2} + r^2\phi z^{HP-3} + r^3\phi z^{HP-4} + \dots \right) + \dots + r^{HP-2}\phi z + r^{HP-1}\phi = 0 \quad (6.30)$$

Desenvolvendo a Equação (6.30) chega-se a:

$$z^{HP} + (r\phi - x^*)z^{HP-1} + r(r\phi - \phi x^*)z^{HP-2} + r^2(r\phi - \phi x^*)z^{HP-3} + \dots + \dots + r^3(r\phi - \phi x^*)z^{HP-4} + \dots = 0 \quad (6.31)$$

$$+ \dots + r^{HP-2}(r\phi - \phi x^*)z + r^{HP-1}(-\phi x^*)$$

Comparando os coeficientes da Equação (6.31) aos coeficientes da Equação (6.17) obtém-se a igualdade da Equação (6.32) e o sistema da Equação (6.33).

$$\frac{(X_3 - X_2)}{(X_2 - X_1)} = \frac{(X_4 - X_3)}{(X_3 - X_2)} = \frac{(X_5 - X_4)}{(X_4 - X_3)} = \dots = r \quad (6.32)$$

$$\begin{cases} r\phi - x^* = X_1 - 1 \\ r(r\phi - \phi x^*) = X_2 - X_1 \end{cases} \quad (6.33)$$

Do sistema da Equação (6.33) é possível chegar à equação que fornece o valor de  $x^*$  em função de  $r$ ,  $X_1$  e  $X_2$  (Equação (6.34)). De forma equivalente, pode-se obter  $x^*$  em função de  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  (Equação (6.35)).

$$x^{*2} + (X_1 - 1 - r)x^* + (r - rX_1 + X_2 - X_1) = 0 \quad (6.34)$$

$$x^{*2} + \left( \frac{-X_1^2 + X_1 + X_1X_2 - X_3}{X_2 - X_1} \right) x^* + \left( \frac{X_1^2 + X_2^2 - X_1X_2 - X_1X_3 - X_2 + X_3}{X_2 - X_1} \right) = 0 \quad (6.35)$$

Retornando à Equação (6.32), é possível ainda fazer uma aproximação (Equações (6.36) a (6.39)), de modo que  $r$  seja função apenas da constante de tempo do processo, considerando um processo de primeira ordem sem tempo morto.

$$X_{i+1} - X_i = K \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i+1} + (1-K)C s_{i+1} - K \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i} + (1-K)C s_i \quad (6.36)$$

$$X_{i+1} - X_i = K \sum_{l=1}^{HP} c_l (s_{l+i+1} - s_{l+i}) + (1-K)C (s_{i+1} - s_i) \approx C (s_{i+1} - s_i)$$

$$r = \frac{(X_{i+2} - X_{i+1})}{(X_{i+1} - X_i)} \approx \frac{C(s_{i+2} - s_{i+1})}{C(s_{i+1} - s_i)} = \frac{(s_{i+2} - s_{i+1})}{(s_{i+1} - s_i)} \quad (6.37)$$

$$r \approx \frac{(s_{i+2} - s_{i+1})}{(s_{i+1} - s_i)} = \frac{K_p [(1 - e^{-(i+2)/\tau}) - (1 - e^{-(i+1)/\tau})]}{K_p [(1 - e^{-(i+1)/\tau}) - (1 - e^{-(i)/\tau})]} \quad (6.38)$$

$$r \approx \frac{(e^{-(i+1)/\tau} - e^{-(i+2)/\tau})}{(e^{-(i)/\tau} - e^{-(i+1)/\tau})}$$

Fazendo, por exemplo,  $i = 1$  na Equação (6.38), tem-se:

$$r \approx \frac{(e^{-2/\tau} - e^{-3/\tau})}{(e^{-1/\tau} - e^{-2/\tau})} \quad (6.39)$$

É interessante notar que se a aproximação da Equação (6.39) for válida, o raio ( $r$ ) ou módulo aproximado da maior parte das raízes da equação característica depende apenas da constante de tempo do modelo. Além disso, o valor deste módulo nunca será maior do que 1. Portanto, se houver instabilidade, ela estará relacionada com o módulo da raiz ou raízes reais ( $x^*$ ). Esta constatação está de acordo com o que foi observado anteriormente na análise de sensibilidade (Figura 6.7) e parece validar o procedimento analítico proposto.

A seguir, as Equações (6.35) e (6.39) são aplicadas a exemplos para verificar se estas equações resultam em boas aproximações para o módulo das raízes e para a raiz real. Em todos os exemplos, o sistema de MPC foi aplicado a um processo de primeira ordem sem tempo morto e foram adotados arbitrariamente horizontes de controle e predição iguais a 30 e 50, respectivamente. Os parâmetros de sintonia do controlador, do modelo e do processo real foram escolhidos arbitrariamente nos exemplos 6.6 a 6.11, de modo a enriquecer a análise realizada.

#### *Exemplo 6.6*

No primeiro exemplo, o MPC foi aplicado a um processo com ganho 1 e constante de tempo 4. Os parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$  empregados foram iguais a 1 e para o modelo utilizado pelo controlador foi adotado o valor de ganho igual a -0,1. Empregando as Equações (6.35) e (6.39), obtêm-se os valores da Tabela 6.2 para módulo dos polos e polos reais.

**Tabela 6.2.** Resultados para Exemplo 6.6

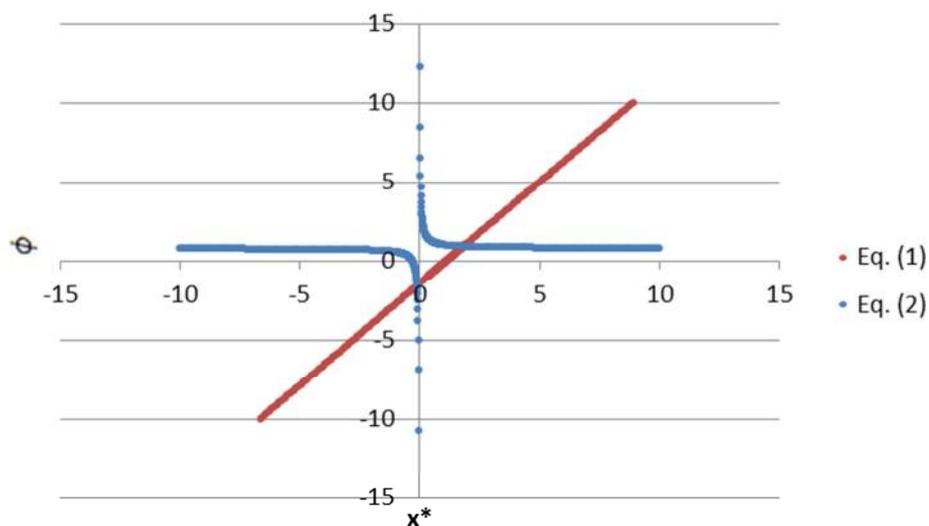
$r$	0.7788		
$x_1^*$	1.4256	$\phi_1$	0.3561
$x_2^*$	0.5014	$\phi_2$	-0.8304

As raízes reais da equação característica deste exemplo calculadas utilizando com o procedimento “roots” do software Matlab (MATLAB, 2010) são iguais a 1.4256 e -0.7372. Ou seja, a raiz  $x_1^*$  calculada pela aproximação proposta realmente é um polo

deste exemplo. No entanto, a raiz  $x_2^*$  não aparece no cálculo do Matlab e, como foi de fato verificado, não consiste em uma raiz da equação característica original. Analisando o módulo da maioria das raízes, tem-se que os valores são aproximadamente iguais ao valor de  $r$  encontrado com a aproximação proposta.

Portanto, neste exemplo, o procedimento de modelagem proposto foi capaz de encontrar uma das raízes reais, que neste caso seria a de maior interesse, por apresentar módulo maior do que 1. No entanto, este procedimento apontou um outro valor real aparentemente espúrio como raiz do polinômio. Isto pode ter sido observado devido a erros numéricos ou da aproximação proposta.

Ao observar o sistema da Equação (6.33), vê-se que as raízes correspondem à interseção entre uma reta e uma hipérbole de assíntotas  $\phi = 0$  e  $x^* = r$ . Para ilustrar o problema resolvido, neste exemplo, o sistema da Equação (6.33) pode ser visualizado graficamente na Figura 6.8, em que cada uma das duas soluções reais do sistema intercepta um lado diferente da hipérbole.



**Figura 6.8.** Sistema para calcular as raízes reais no Exemplo 6.6

### Exemplo 6.7

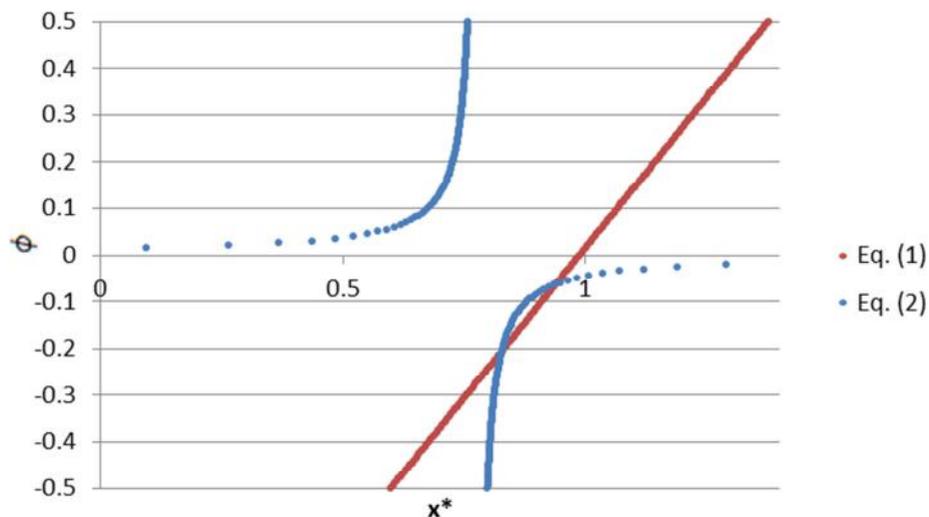
Este exemplo é idêntico ao primeiro, a não ser pelo fato do modelo utilizado pelo controlador ter valor de ganho igual a 0.001. Com auxílio das Equações (6.35) e (6.39), os valores da Tabela 6.3 foram obtidos para módulo dos polos e polos reais. Neste caso, as raízes calculadas com o procedimento do Matlab foram iguais a 0.9402 e

0.8240. Ou seja, as raízes calculadas pela aproximação proposta foram muito próximas das raízes calculadas pelo procedimento numérico usando a equação completa, bem como o valor de módulo das outras raízes.

**Tabela 6.3.** Resultados para Exemplo 6.7

$r$	0.7788		
$x_1^*$	0.9402	$\phi_1$	-0.064
$x_2^*$	0.8283	$\phi_2$	-0.2072

O sistema da Equação (6.33) pode ser visualizado graficamente para este exemplo na Figura 6.9, onde as duas soluções reais do sistema interceptam o mesmo lado da hipérbole.



**Figura 6.9.** Sistema para calcular as raízes reais no Exemplo 6.7

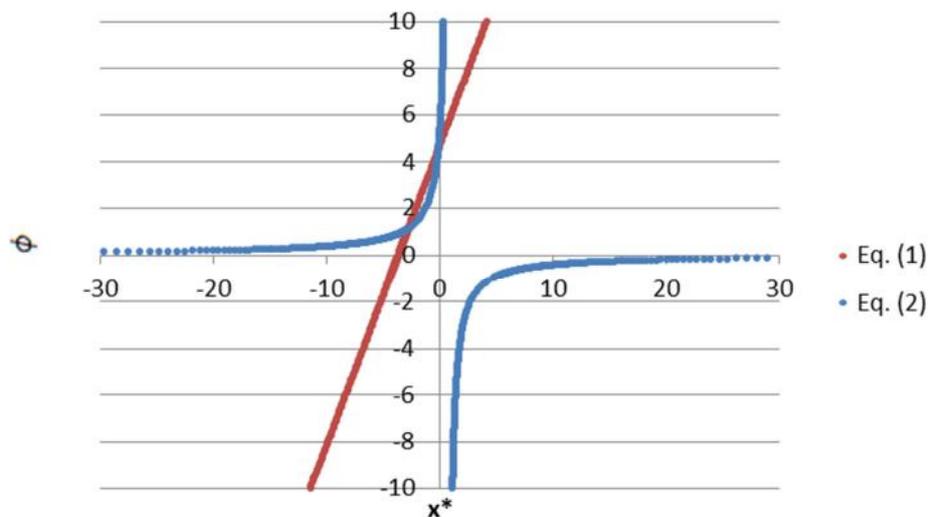
### Exemplo 6.8

Com o objetivo de continuar validando a aproximação proposta e entender as limitações da mesma, foram ainda utilizados outros exemplos. Neste novo exemplo, o MPC foi aplicado a um processo de ganho 1 e constante de tempo 4. Porém, foi adotado um ganho diferente (igual a 0.1) para o modelo utilizado pelo controlador. Os parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$  foram definidos como 1 e 0.001, respectivamente. Com isso, a aproximação proposta levou aos resultados da Tabela 6.4.

**Tabela 6.4.** Resultados para Exemplo 6.8

$r$	0.7788		
$x_1^*$	-2.7345	$\phi_1$	1.1256
$x_2^*$	-0.0978	$\phi_2$	4.5112

Comparando os resultados da Tabela 6.4 com os resultados calculados com o auxílio do procedimento programado em Matlab, apenas uma das raízes ( $x_1^*$ ) foi de fato encontrada, enquanto a outra não configurava raiz do problema original, situação semelhante à observada no exemplo 1. A Figura 6.10 apresenta a visualização gráfica do sistema resultante da aproximação proposta neste exemplo e mostra novamente as duas soluções interceptando um mesmo lado da hipérbole.



**Figura 6.10.** Sistema para calcular as raízes reais no Exemplo 6.8

### Exemplo 6.9

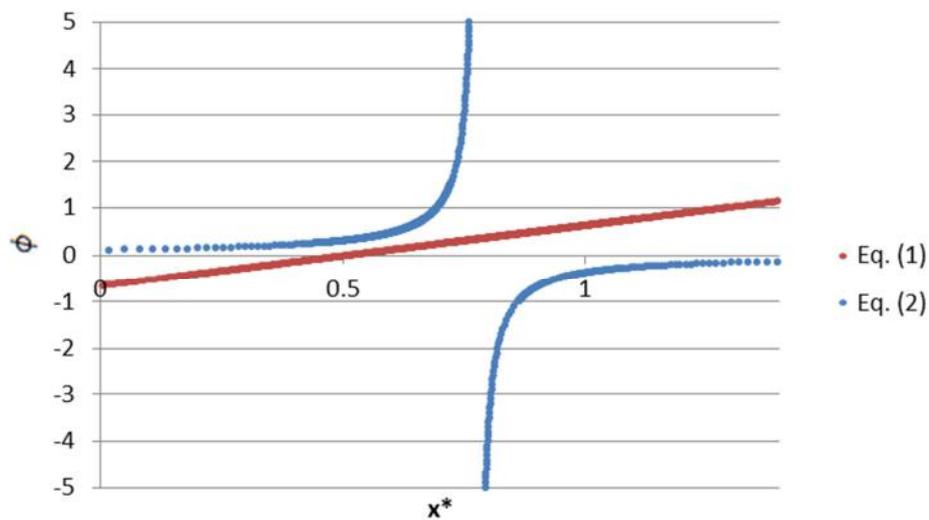
Neste exemplo, o MPC foi aplicado ao mesmo processo dos exemplos anteriores, com ganho 1 e constante de tempo 4, porém o modelo utilizado pelo controlador foi perfeito, ou seja, idêntico ao modelo que representa o processo real. Os parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$  adotados neste exemplo foram iguais a 1.

A aproximação proposta, neste caso, não resultou em qualquer valor de raiz real, conforme pode ser observado na Tabela 6.5. Já os resultados obtidos pelo procedimento

implementado em Matlab apresentaram raízes reais iguais a 0 e -0.6959. Neste exemplo, uma das raízes reais possui módulo semelhante ao módulo das raízes complexas encontradas pela aproximação e a outra raiz real é igual a zero. O sistema resolvido pela aproximação neste exemplo pode ser visualizado graficamente na Figura 6.11 e não apresenta interseção da reta com a hipérbole no plano real.

**Tabela 6.5.** Resultados para Exemplo 6.9

$r$	0.7788		
$x_1^*$	$0.6488+0.2198i$	$\phi_1$	$0.1670+0.2823i$
$x_2^*$	$0.6488-0.2198i$	$\phi_2$	$0.1670-0.2823i$



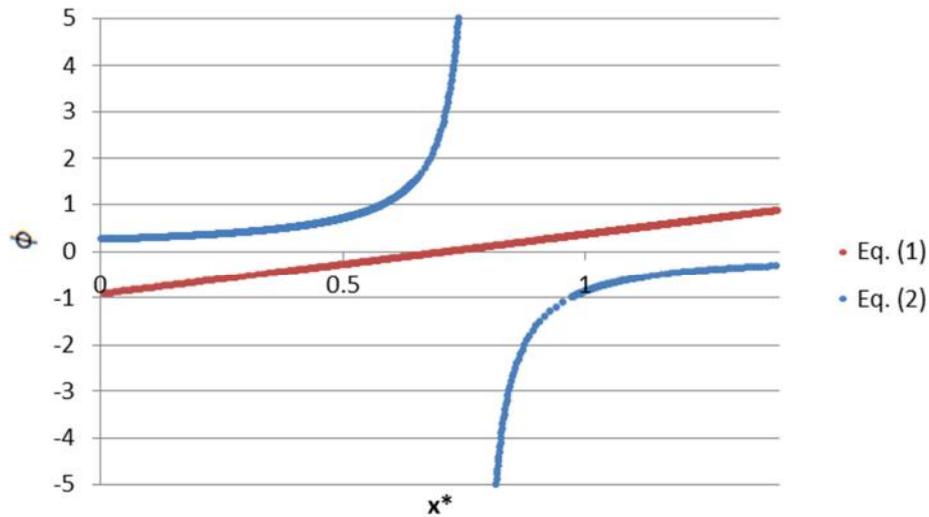
**Figura 6.11.** Sistema para calcular as raízes reais no Exemplo 6.9

### Exemplo 6.10

Este exemplo é idêntico ao anterior (Exemplo 6.9), a não ser por apresentar erro no modelo utilizado pelo controlador, com ganho igual a 0.1. De acordo com a aproximação proposta, este exemplo também não resultaria em qualquer raiz real, conforme pode ser observado na Tabela 6.6. As raízes calculadas pelo Matlab também foram todas complexas, confirmando o resultado obtido com a aproximação proposta. A Figura 6.12 ilustra o sistema resolvido neste exemplo, com ausência de interseção entre a reta e a hipérbole.

**Tabela 6.6.** Resultados para Exemplo 6.10

$r$	0.7788		
$x_1^*$	0.7513+0.3877i	$\phi_1$	0.0353+0.4979i
$x_2^*$	0.7513-0.3877i	$\phi_2$	0.0353-0.4979i



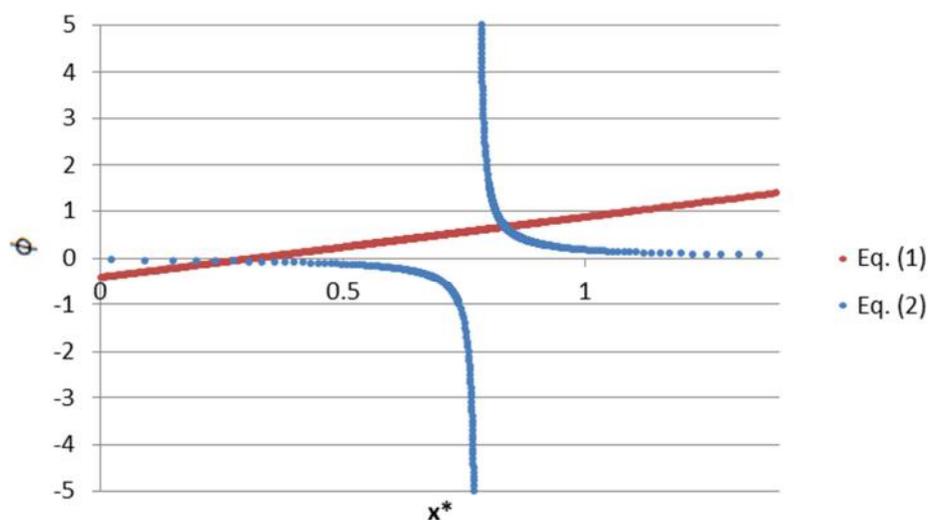
**Figura 6.12.** Sistema para calcular as raízes reais no Exemplo 6.10

*Exemplo 6.11*

Este exemplo é idêntico aos Exemplos 6.9 e 6.10 a não ser pelo modelo utilizado pelo controlador, com ganho igual a 4. Com o procedimento proposto, foram calculados os resultados da Tabela 6.7. Pelo procedimento implementado em Matlab, as raízes reais obtidas foram iguais a 0.8367 e -0.7550, confirmando a raiz  $x_1^*$  e invalidando a raiz  $x_2^*$  da Tabela 6.7. O sistema resolvido pode ser observado na Figura 6.13, em que cada uma das duas soluções reais intercepta um lado diferente da hipérbole.

**Tabela 6.7.** Resultados para Exemplo 6.11

$r$	0.7788		
$x_1^*$	0.8366	$\phi_1$	0.6529
$x_2^*$	0.2703	$\phi_2$	-0.0743



**Figura 6.13.** Sistema para calcular as raízes reais no Exemplo 6.11

Observando graficamente o sistema da Equação (6.33) para os Exemplos 6.6 a 6.11 (Figuras 6.8 a 6.13), é possível deduzir que apenas um “lado” da hipérbole é de interesse, de forma que, quando a reta corta os dois lados, uma das raízes apontadas é espúria (como nos Exemplos 6.6 e 6.11). Quando a reta corta dois pontos do mesmo “lado” da hipérbole, dois comportamentos foram observados: as duas raízes são efetivamente encontradas ao resolver o polinômio completo (como no Exemplo 6.7); ou uma raiz é espúria (como no Exemplo 6.8). Por outro lado, quando não há raízes reais (como no Exemplo 6.10) ou quando a única raiz real que não pode ser explicada pelo segundo fator da Equação (6.30) é igual a zero (como no Exemplo 6.9), a reta não corta a hipérbole e, portanto, nenhuma raiz real é encontrada.

Apesar das características observadas em relação à capacidade da aproximação proposta em calcular ou não uma raiz espúria, não foi possível aferir de forma definitiva quando uma raiz é verdadeira. Outro aspecto observado a partir dos exemplos, mas que não pôde ser provado nem generalizado, foi que as raízes reais que a aproximação proposta foi capaz de calcular foram sempre as raízes cujo módulo é maior do que o raio  $r$ . Admitindo que esta conjectura é verdadeira, a aproximação proposta pode ser considerada suficiente para aplicações práticas, na medida em que é capaz de prever as raízes que por ventura saiam do círculo unitário, provocando instabilidade (que constituiria o pior caso). Por isso, na Seção 7.2.1, a aproximação proposta será utilizada para o projeto de controladores preditivos.

Na tentativa de melhorar a aproximação proposta, foi proposto um modelo ligeiramente diferente para a equação característica, considerando diretamente a existência de duas raízes reais. Dessa forma, foi admitida a seguinte forma para o polinômio que representa a equação característica:

$$(z - x_1^*)(z - x_2^*) \left( z^{HP-2} + r\phi z^{HP-3} + r^2\phi z^{HP-4} + r^3\phi z^{HP-5} + \dots \right) = 0 \quad (6.40)$$

$$+ \dots + r^{HP-3}\phi z + r^{HP-2}\phi$$

Desenvolvendo a Equação (6.40) e comparando seus coeficientes com os da Equação (6.17) obtém-se:

$$\frac{(X_4 - X_3)}{(X_3 - X_2)} = \frac{(X_5 - X_4)}{(X_4 - X_3)} = \frac{(X_6 - X_5)}{(X_5 - X_4)} \dots = r \quad (6.41)$$

$$\begin{cases} r\phi - (x_1^* + x_2^*) = X_1 - 1 \\ r^2\phi - (x_1^* + x_2^*)r\phi + x_1^*x_2^* = X_2 - X_1 \\ r(r^2\phi - (x_1^* + x_2^*)r\phi + x_1^*x_2^*\phi) = X_3 - X_2 \end{cases} \quad (6.42)$$

Resolvendo o sistema da Equação (6.42), é possível calcular as raízes  $x_1^*$  e  $x_2^*$ . No entanto, ao aplicar a Equação (6.42) nos exemplos propostos, as raízes  $x_1^*$  e  $x_2^*$  calculadas coincidem com as raízes calculadas com o sistema definido pela Equação (6.33), não havendo vantagem aparente no uso da Equação (6.42).

### 6.3 Caso MIMO com Erro no Ganho

Nesta Seção, os cálculos realizados anteriormente para o caso SISO são estendidos para o caso MIMO. Da mesma forma que no caso SISO, os modelos utilizados pelo controlador são diferentes dos modelos que representam a planta real por um fator multiplicativo. Vale ressaltar que, no caso MIMO, os fatores de erro de modelagem multiplicativos podem ser diferentes para cada par formado entre variável manipulada e variável controlada.

Para o caso MIMO, a dedução das expressões para cálculo das ações de controle e do *bias* do MPC foi realizada da mesma forma que no caso SISO (Apêndice A). De modo a facilitar o entendimento e os desenvolvimentos a partir destas equações, o

problema pode ser tratado de forma muito parecida com o que havia sido equacionado para o caso SISO. Para isto, houve a necessidade de definir algumas matrizes aumentadas no caso MIMO.

Assim, o comportamento do sistema MPC em malha fechada pode ser definido pela Equação (6.43) e o *bias* do controlador pode ser computado pela Equação (6.44), sendo  $\circ$  o produto de Hadamard (multiplicação elemento a elemento). Aparentemente, é a primeira vez que as Equações (6.43) e (6.44) são apresentadas na literatura.

$$\Delta \underline{U}_j = \underline{W}_j \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

onde  $\underline{W}_j = \underline{I} - \sum_{i=1}^j \underline{X}_i \underline{W}_{j-i}$  (6.43)

$$\text{e } \underline{X}_i = \underline{C} \left( \underline{F}_k \circ \underline{S}p_i \right) + \underline{C} \underline{S}b_i - \underline{C} \left( \underline{F}_k \circ \underline{S}b_i \right)$$

$$\underline{D}_j = \left( \sum_{i=1}^j \left( \underline{S}b_i - \left( \underline{F}_k \circ \underline{S}b_i \right) \right) \underline{W}_{j-i} \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

(6.44)

$$\text{onde } \underline{W}_j = \underline{I} - \sum_{i=1}^j \underline{X}_i \underline{W}_{j-i}$$

$$\text{e } \underline{X}_i = \underline{C} \left( \underline{F}_k \circ \underline{S}p_i \right) + \underline{C} \underline{S}b_i - \underline{C} \left( \underline{F}_k \circ \underline{S}b_i \right)$$

A dedução das expressões e as definições das matrizes “aumentadas”  $\underline{Y}^{SP}$ ,  $\underline{F}_k$ ,  $\underline{S}p_i$ ,  $\underline{S}b_i$  e  $\underline{C}$  são apresentadas no Apêndice B. Assim como no caso SISO, as Equações (6.43) e (6.44) foram testadas e são capazes de produzir exatamente os mesmos resultados quantitativos que um MPC simulado da forma usual.

### 6.3.1 Condição Assintótica

Da mesma forma que no caso SISO, é possível analisar a condição assintótica da Equação (6.43). Assim, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\underline{X}_j = \underline{C} \underline{S}b_j$ , sendo que  $\underline{S}b_j$  contém os ganhos estáticos unitários do modelo que representa a planta real (último coeficiente dos modelos de resposta ao degrau). Analogamente ao caso SISO, uma condição suficiente para a convergência de  $\underline{W}_n$  e, portanto, para a convergência de  $\Delta \underline{U}_n$  e  $\underline{D}_n$  pode ser dada pela Equação (6.45), desenvolvida neste trabalho.

$$\| \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{b}}_n \| < 1 \quad (6.45)$$

A Equação (6.45) envolve a escolha de uma norma para a matriz quadrada  $\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{b}}_n$ . Como, para uma matriz quadrada, o raio espectral ( $\rho$ ) é menor do que qualquer outra norma calculada para esta matriz (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2005), optou-se por verificar a desigualdade da Equação (6.45) por meio do raio espectral da matriz  $\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{b}}_n$  (KREYSZIG, 1978), embora essa norma seja menos conservadora do que qualquer outra norma escolhida.

$$\rho(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{b}}_n) < 1 \quad (6.46)$$

O raio espectral da matriz  $\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{b}}_n$  será tratado como um índice denominado *IndM1*.

### 6.3.2 Cálculo dos Polos do Sistema em Malha Fechada

Assim como foi desenvolvido para o caso SISO, uma análise mais rigorosa da convergência da Equação (6.43) pode ser obtida por meio da aplicação da transformada  $z$ . Como a Equação (6.43) é muito semelhante à Equação (6.4), correspondente ao caso SISO, todo o procedimento empregado é bastante parecido com o que foi anteriormente desenvolvido.

No caso MIMO, continua sendo possível analisar a convergência de  $\underline{\underline{\Delta U}}_j$  a partir da convergência de  $\underline{\underline{W}}_j$ , que é o único fator em  $\underline{\underline{\Delta U}}_j$  capaz de provocar a divergência e, conseqüentemente, a instabilidade do controlador. O termo  $\underline{\underline{W}}_j$  envolve uma soma de convolução, conforme mostra a Equação (6.47).

$$\underline{\underline{W}}_j = \underline{\underline{I}} - \sum_{i=1}^j \underline{\underline{X}}_i \underline{\underline{W}}_{j-i} \quad (6.47)$$

$$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{X}} * \underline{\underline{W}}$$

Aplicando a transformada  $z$  à Equação (6.47), tem-se:

$$\begin{aligned}
 T\{\underline{W}\} &= T\{\underline{I} - \underline{X} * \underline{W}\} \\
 \underline{W}(z) &= T\{\underline{I}\} - \underline{X}(z) \cdot \underline{W}(z) \\
 (\underline{I} + \underline{X}(z)) \cdot \underline{W}(z) &= T\{\underline{I}\} \\
 (\underline{I} + \underline{X}(z)) \cdot \underline{W}(z) &= \frac{z}{z - \underline{I}} \\
 \underline{W}(z) &= \frac{z}{(z - \underline{I})(\underline{I} + \underline{X}(z))}
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

com

$$\begin{aligned}
 \underline{X}(z) &= \underline{X}_1 z^{-1} + \underline{X}_2 z^{-2} + \underline{X}_3 z^{-3} + \dots + \underline{X}_{HP} z^{-HP} + \underline{X}_{HP} z^{-HP-1} + \dots \\
 \text{ou} \\
 \underline{X}(z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \underline{X}_i z^{-i}, \text{ com } \underline{X}_i = \underline{X}_{HP} \text{ para } i = HP, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

Substituindo a Equação (6.49) na Equação (6.48), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \underline{W}(z) &= \frac{z}{(z - \underline{I})(\underline{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \underline{X}_i z^{-i})} \\
 \underline{W}(z) &= \frac{z}{z + (\sum_{i=1}^{\infty} \underline{X}_i z^{-i+1}) - \underline{I} - (\sum_{i=1}^{\infty} \underline{X}_i z^{-i})} \\
 \underline{W}(z) &= \frac{z}{z + (\sum_{i=1}^{\infty} \underline{X}_i z^{-i+1}) - \underline{I} - (\sum_{i=1}^{\infty} \underline{X}_i z^{-i})} \\
 \underline{W}(z) &= \frac{z}{z + (\underline{X}_1 - 1)z^0 + (\underline{X}_2 - \underline{X}_1)z^{-1} + (\underline{X}_3 - \underline{X}_2)z^{-2} + \dots + (\underline{X}_{HP} - \underline{X}_{HP-1})z^{-HP+1} + (\underline{X}_{HP} - \underline{X}_{HP})z^{-HP} + \dots}
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

A Equação (6.50) pode ser escrita como:

$$\underline{W}(z) = \frac{z}{z + (\underline{X}_1 - \underline{I})z^0 + (\sum_{i=1}^{HP-1} (\underline{X}_{i+1} - \underline{X}_i)z^{-i})} \tag{6.51}$$

Multiplicando a Equação (6.51) por  $z^{HP-1}/z^{HP-1}$ :

$$\underline{\underline{W}}(z) = \frac{z^{HP}}{z^{HP} + (\underline{\underline{X}}_1 - \underline{\underline{I}}) z^{HP-1} + \left( \sum_{i=1}^{HP-1} (\underline{\underline{X}}_{i+1} - \underline{\underline{X}}_i) z^{HP-1-i} \right)} \quad (6.52)$$

Da Equação (6.52), tem-se que a equação característica de  $\underline{\underline{W}}(z)$  no caso MIMO é o seguinte polinômio matricial, desenvolvido neste trabalho.

$$z^{HP} + (\underline{\underline{X}}_1 - \underline{\underline{I}}) z^{HP-1} + \left( \sum_{i=1}^{HP-1} (\underline{\underline{X}}_{i+1} - \underline{\underline{X}}_i) z^{HP-1-i} \right) = 0 \quad (6.53)$$

### 6.3.3 Condições de Estabilidade

Da mesma forma que no caso SISO, é possível estabelecer condições baseadas na Equação (6.53) para que as raízes da nova equação característica estejam dentro do círculo unitário, o que garantiria a convergência de  $\underline{\underline{W}}(z)$  e, conseqüentemente, a convergência de  $\underline{\underline{U}}$  e  $\underline{\underline{D}}$  e, portanto, a estabilidade do controlador.

A seguir são descritas duas condições de convergência, conforme proposto no trabalho de NGO e ERICKSON (1997).

#### *Condição 1*

Considerando o polinômio matricial  $\underline{\underline{A}}(z) = \underline{\underline{I}}z^n + \underline{\underline{A}}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \underline{\underline{A}}_2z^2 + \underline{\underline{A}}_1z + \underline{\underline{A}}_0$ , define-se a matriz  $\underline{\underline{B}} = [\underline{\underline{A}}_0 \quad \underline{\underline{A}}_1 \quad \dots \quad \underline{\underline{A}}_n]$ . Se  $\|\underline{\underline{B}}\|_\infty < 1$ , então todas as raízes do determinante de  $\underline{\underline{A}}(z)$  estão estritamente dentro do círculo unitário. Esta é uma condição suficiente de convergência. A métrica  $\|\underline{\underline{B}}\|_\infty$  será calculada para a equação característica (Equação (6.53)) e será denominada *IndM2* nos exemplos.

## Condição 2

Considerando o polinômio matricial  $\underline{\underline{A}}(z) = \underline{\underline{I}}z^n + \underline{\underline{A}}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \underline{\underline{A}}_2z^2 + \underline{\underline{A}}_1z + \underline{\underline{A}}_0$ , define-se a matriz  $\underline{\underline{B}}_T = [\underline{\underline{A}}_0^T \quad \underline{\underline{A}}_1^T \quad \dots \quad \underline{\underline{A}}_n^T]$ . Se  $\|\underline{\underline{B}}_T\|_\infty < 1$ , então todas as raízes do determinante de  $\underline{\underline{A}}(z)$  estão estritamente dentro do círculo unitário. Esta é outra condição suficiente de convergência. A métrica  $\|\underline{\underline{B}}_T\|_\infty$  será calculada para a equação característica (Equação (6.53)) e será denominada *IndM3* nos exemplos. A partir da primeira condição de convergência, é possível afirmar que, se  $\sum \|\underline{\underline{A}}_i\|_\infty < 1$ , então as raízes do determinante de  $\underline{\underline{A}}(z)$  estão estritamente dentro do círculo unitário. Esta nova condição é mais conservadora do que a condição anterior, com  $\|\underline{\underline{B}}_T\|_\infty < 1$ . Vale notar que, quando os coeficientes  $\underline{\underline{A}}_i$  são escalares, esta condição é uma das condições de Jury (NGO e ERICKSON, 1997).

Do mesmo modo, a partir da segunda condição de convergência, tem-se que, se  $\sum \|\underline{\underline{A}}_i^T\|_\infty < 1$ , então as raízes do determinante de  $\underline{\underline{A}}(z)$  estão estritamente dentro do círculo unitário. Novamente, esta é uma condição mais conservadora do que a condição anterior, com  $\|\underline{\underline{B}}_T\|_\infty < 1$ , e pode também ser vista como uma extensão das condições de Jury para polinômios matriciais. Mais detalhes podem ser obtidos no trabalho de NGO e ERICKSON (1997).

Dada a Equação (6.53), é possível ainda calcular diretamente as raízes deste polinômio matricial e verificar se há raízes fora do círculo unitário, que provocam instabilidade do controlador. O algoritmo utilizado para o cálculo destas raízes é destacado a seguir (NGO e ERICKSON, 1997).

Dado um polinômio matricial da forma  $\underline{\underline{A}}(z) = \underline{\underline{I}}z^n + \underline{\underline{A}}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \underline{\underline{A}}_2z^2 + \underline{\underline{A}}_1z + \underline{\underline{A}}_0$ , onde  $\underline{\underline{A}}_i$ 's são matrizes  $m \times m$ , então as raízes do determinante de  $\underline{\underline{A}}(z)$  são os valores característicos da seguinte matriz:

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}}(z) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}}_m & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}}_m & \vdots & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \vdots & \underline{\underline{0}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \underline{\underline{I}}_m \\ -\underline{\underline{A}}_0 & -\underline{\underline{A}}_1 & \cdots & \cdots & -\underline{\underline{A}}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (6.54)$$

onde  $\underline{\underline{0}}$  é uma matriz  $m \times m$  de elementos iguais a zero e  $\underline{\underline{I}}_m$  é uma matriz identidade  $m \times m$ . Desta forma, é possível calcular os polos do sistema MIMO em malha fechada e estabelecer outro índice a ser acompanhado, definido como a maior raiz da equação característica em módulo. Este novo índice, válido também para o caso SISO, será denominado *IndM4* e é o maior polo em módulo do sistema.

#### 6.3.4 Exemplos

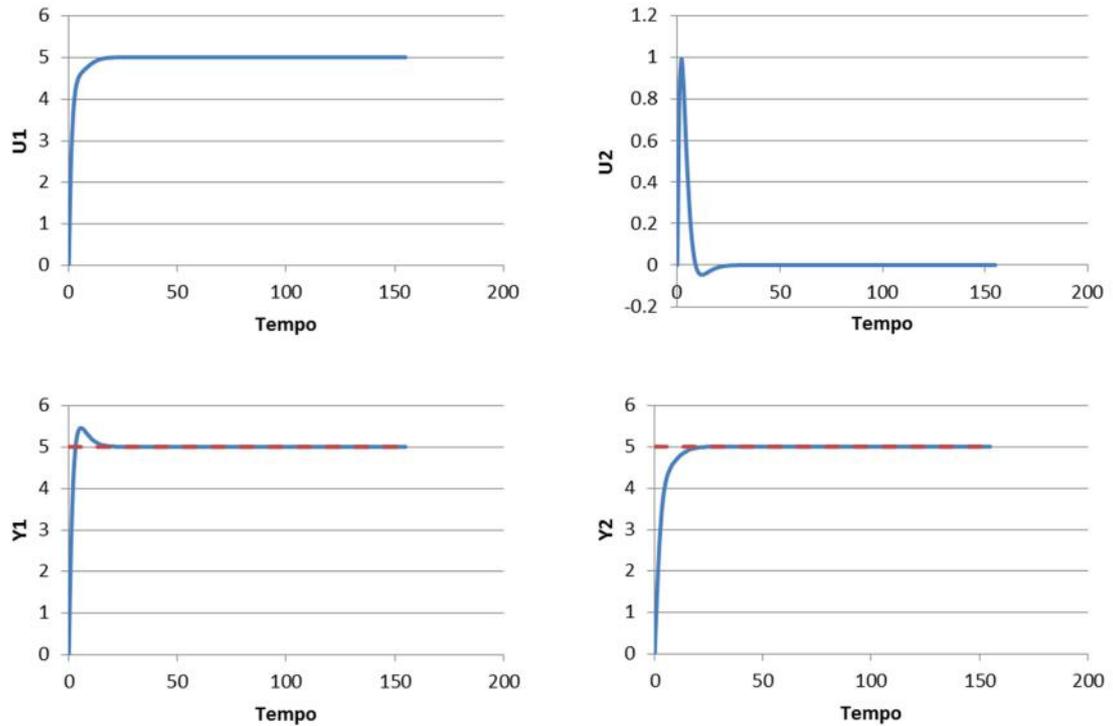
A teoria e os conceitos desenvolvidos para o caso MIMO serão testados nos exemplos arbitrários a seguir para um processo com 2 variáveis manipuladas e 2 variáveis controladas. Em todos os exemplos, foram admitidos horizontes de controle e predição iguais a 30 e 50, respectivamente. Os exemplos simulam um cenário de mudança de *setpoint* das variáveis controladas para observar o comportamento do MPC, embora este cenário não influencie os resultados obtidos para os polos do sistema em malha fechada.

##### *Exemplo 6.12*

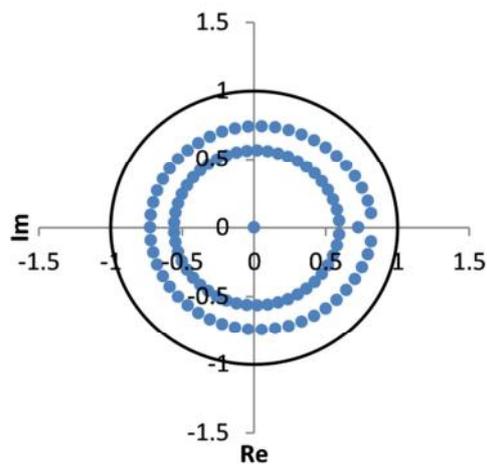
No primeiro exemplo, o modelo utilizado pelo controlador foi idêntico ao modelo que representa a planta real (Equação (6.55)). Os parâmetros de sintonia  $Q$  foram definidos iguais a 1 em relação a todas as controladas, enquanto os parâmetros de supressão de movimento  $R$  foram iguais a 2 para todas as manipuladas.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} & \frac{1}{2S + 1} \\ \frac{2}{5S + 1} & \frac{0.5}{0.4S + 1} \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

A Figura 6.14 mostra o comportamento das variáveis de processo sob a ação do sistema de MPC. Já os polos do sistema em malha fechada podem ser observados na Figura 6.15 e os valores dos índices propostos são apresentados na Tabela 6.8.



**Figura 6.14.** Comportamento das variáveis sob atuação do MPC no Exemplo 6.12.



**Figura 6.15.** Polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.12.

**Tabela 6.8.** Índices – Exemplo 6.12

Índice	Valor
<i>IndM1</i>	0.7182
<i>IndM2</i>	1.0121
<i>IndM3</i>	1.2553
<i>IndM4</i>	0.8239

Neste exemplo, o comportamento do controlador foi estável, não tendo sido observado nenhum polo fora do círculo unitário, o que já era esperado. Dentre os índices propostos, *IndM2* e *IndM3* apresentaram valores maiores do que 1, apesar do processo não ter instabilizado. Este comportamento pode acontecer, já que as condições do *IndM2* e do *IndM3* são apenas condições suficientes de convergência. Ou seja, é possível que o sistema seja estável ainda que os valores destes índices sejam superiores a 1, como foi observado neste exemplo. Vale ressaltar ainda que o índice *IndM4* é o mais rigoroso de todos, embora também seja o mais custoso de se calcular.

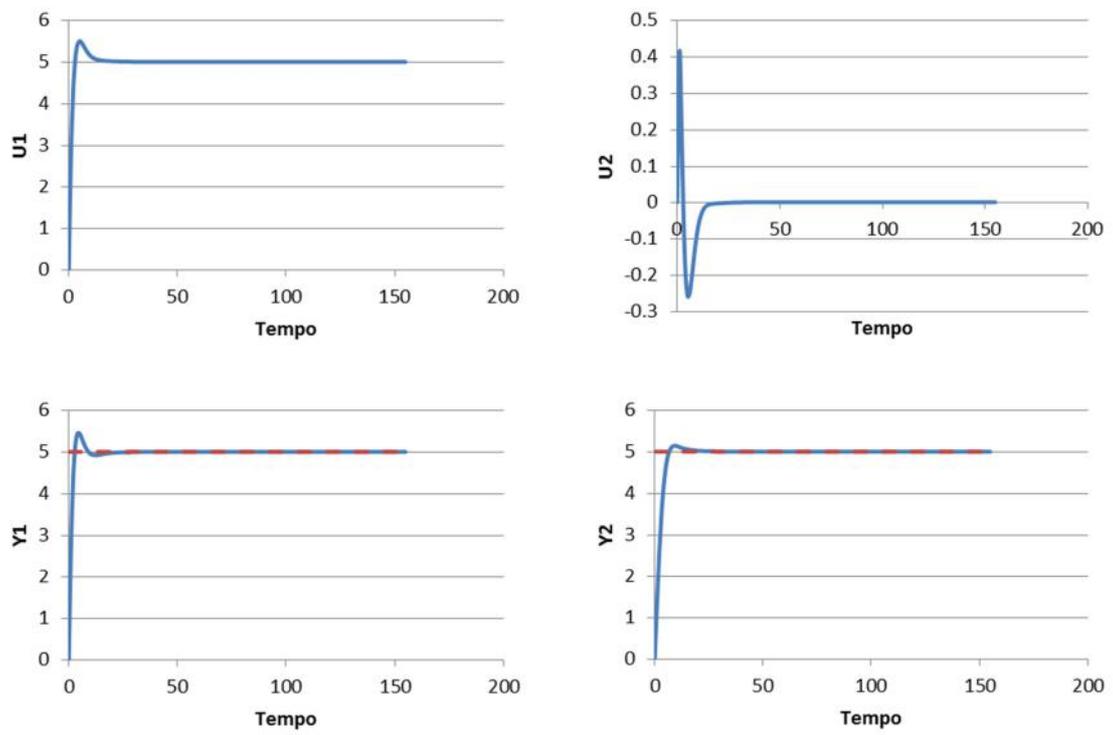
#### Exemplo 6.13

Neste exemplo, foi incorporado erro de modelagem por meio de fatores multiplicativos, sendo o processo real expresso pela Equação (6.56) e o modelo utilizado pelo controlador expresso pela Equação (6.57). Os parâmetros de sintonia adotados foram os mesmos do Exemplo 6.12.

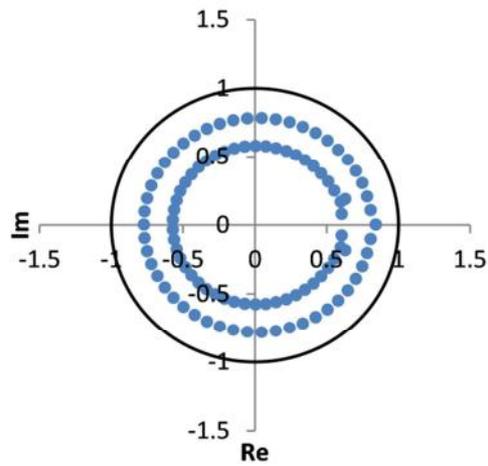
$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} & \frac{1}{2S + 1} \\ \frac{2}{5S + 1} & \frac{0.5}{0.4S + 1} \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} & \frac{0.4}{2S + 1} \\ \frac{4}{5S + 1} & \frac{0.75}{0.4S + 1} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

O comportamento do processo sob a atuação do MPC, os polos do sistema em malha fechada e os índices calculados podem ser observados nas Figuras 6.16 e 6.17 e na Tabela 6.9, respectivamente.



**Figura 6.16.** Comportamento das variáveis sob atuação do MPC no Exemplo 6.13.



**Figura 6.17.** Polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.13.

**Tabela 6.9.** Índices – Exemplo 6.13

<b>Índice</b>	<b>Valor</b>
<i>IndM1</i>	0.6857
<i>IndM2</i>	1.2323
<i>IndM3</i>	0.9856
<i>IndM4</i>	0.8440

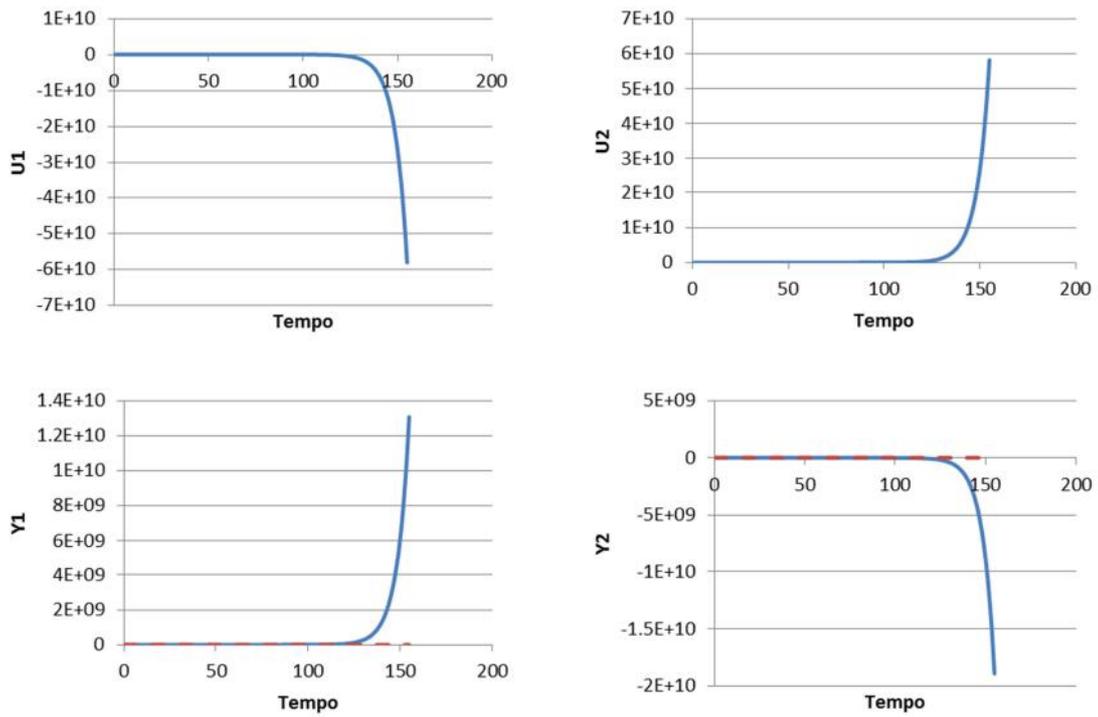
Neste caso, o controlador apresentou comportamento estável, com todos os polos dentro do círculo unitário e os índices calculados igualmente menores do que 1, exceto o *IndM2*, que foi maior que 1, o que pode ser admitido, uma vez que a condição em que *IndM2* menor do que 1 é uma condição suficiente (mas não necessária) de convergência.

*Exemplo 6.14*

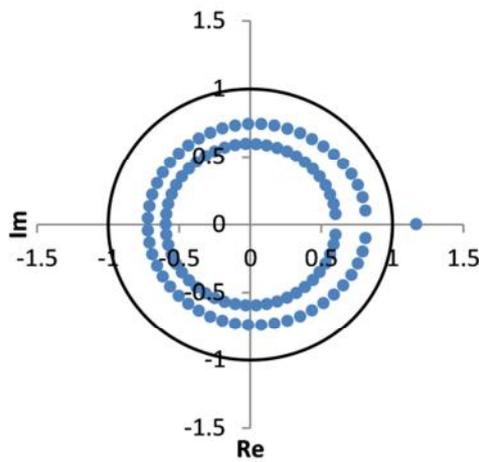
Este exemplo é idêntico ao exemplo 6.13, a não ser por considerar um erro de modelagem diferente, apesar de continuar sendo representado por meio de fatores multiplicativos em relação ao processo real. Assim, o processo real continua sendo expresso pela Equação (6.56), enquanto o modelo utilizado pelo controlador passa a ser expresso pela Equação (6.58).

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ \frac{0.4S + 1}{5S + 1} & \frac{2S + 1}{0.4S + 1} \\ 1 & 0.75 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Os resultados deste exemplo são apresentados nas Figuras 6.18 e 6.19 e na Tabela 6.10.



**Figura 6.18.** Comportamento das variáveis sob atuação do MPC no Exemplo 6.14.



**Figura 6.19.** Polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.14.

**Tabela 6.10.** Índices – Exemplo 6.14

Índice	Valor
<i>IndM1</i>	1.3027
<i>IndM2</i>	1.4264
<i>IndM3</i>	1.5757
<i>IndM4</i>	1.1677

Neste exemplo foi verificado um comportamento instável do controlador, com um polo fora do círculo unitário, conforme esperado. Todos os índices forneceram valores acima de 1, embora apenas o *IndM4* realmente fosse capaz de determinar a instabilidade do sistema em malha fechada. Afinal, os outros índices representam apenas condições suficientes de convergência, não sendo possível afirmar que o sistema instabiliza quando seus valores ultrapassam o valor de 1.

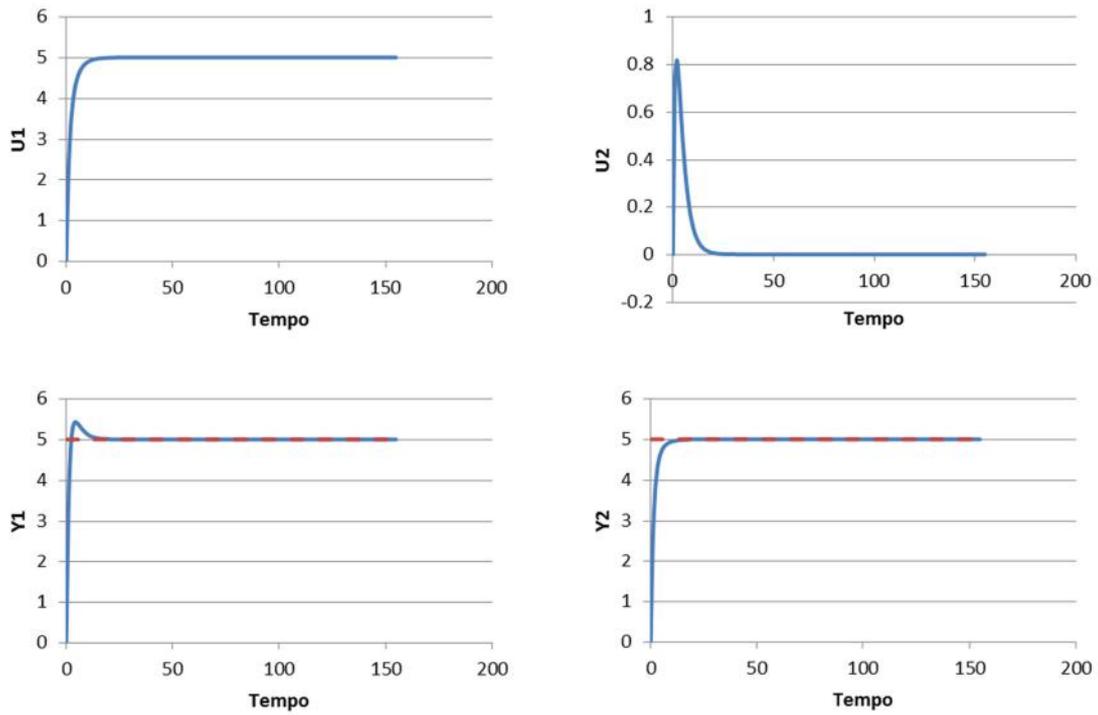
*Exemplo 6.15*

Neste exemplo, é considerado um processo mais rápido que o dos exemplos anteriores, ou seja, com menores constantes de tempo. Desta forma, o processo real é expresso pela Equação (6.59), enquanto o modelo utilizado pelo controlador é expresso pela Equação (6.60). Os parâmetros de sintonia utilizados foram os mesmo do exemplo 1.

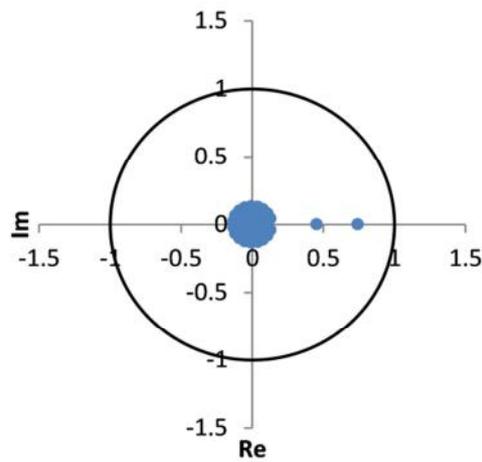
$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} & \frac{1}{0.2S + 1} \\ \frac{2}{0.5S + 1} & \frac{0.5}{0.4S + 1} \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} & \frac{0.4}{0.2S + 1} \\ \frac{4}{0.5S + 1} & \frac{0.75}{0.4S + 1} \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Os resultados do exemplo 4 podem ser visualizados nas Figuras 6.20 e 6.21 e na Tabela 6.11.



**Figura 6.20.** Comportamento das variáveis sob atuação do MPC no Exemplo 6.15.



**Figura 6.21.** Polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.15.

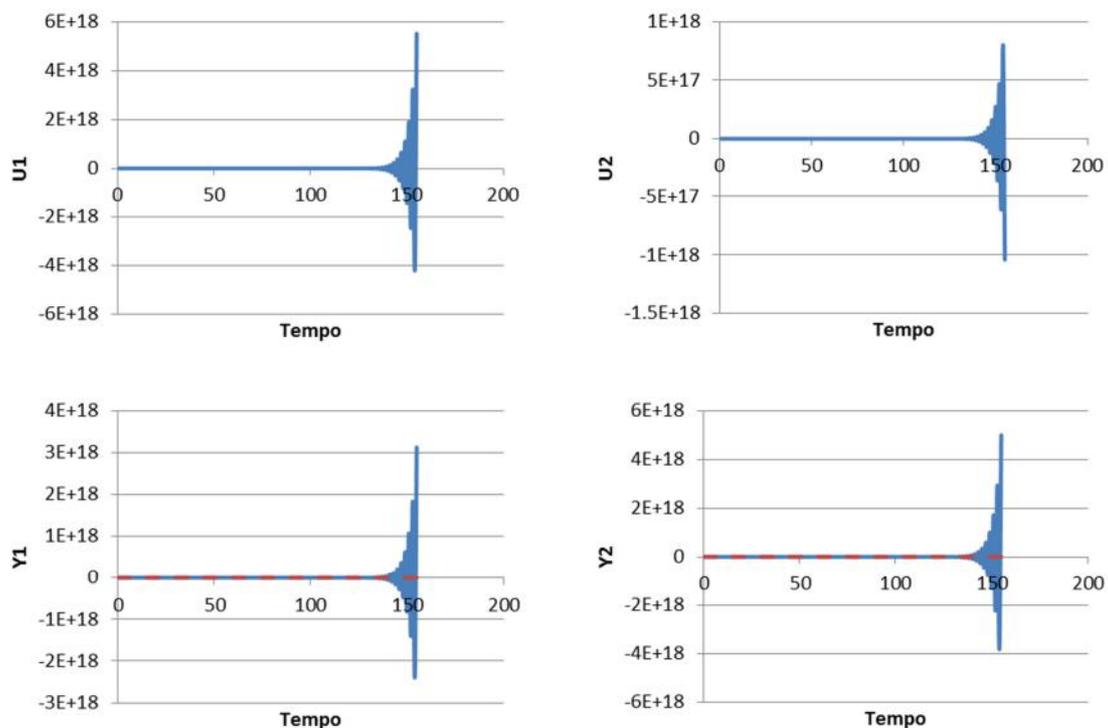
**Tabela 6.11.** Índices – Exemplo 6.15

Índice	Valor
<i>IndM1</i>	0.7319
<i>IndM2</i>	0.7386
<i>IndM3</i>	0.7435
<i>IndM4</i>	0.7433

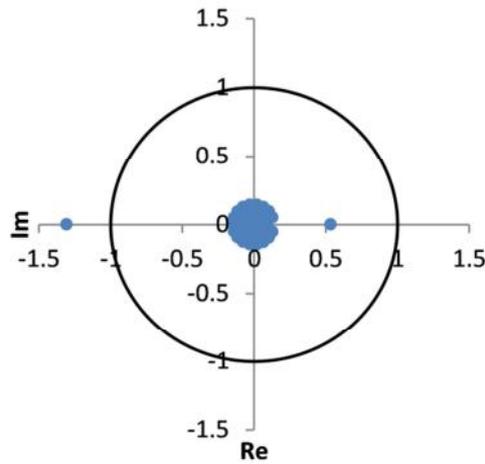
Neste exemplo, foi observado um comportamento estável do sistema em malha fechada, com todos os polos situados dentro do círculo unitário. A menor constante de tempo fez com que os polos se aproximassem do centro do círculo, conforme havia sido observado na análise de sensibilidade no caso SISO. Além disso, todos os índices propostos apresentaram valor menor do que 1, o que significa que todos os índices teriam sido capazes de prever a estabilidade do controlador neste exemplo.

### Exemplo 6.16

Este exemplo é idêntico ao Exemplo 6.15, a não ser pelos parâmetros de sintonia. O parâmetro  $Q$  adotado continuou sendo igual a 1 para todas as variáveis controladas. Já o parâmetro  $R$  foi reduzido para 0.2 para todas as variáveis manipuladas, resultando em uma sintonia mais agressiva. Os resultados obtidos considerando este novo cenário de sintonia podem ser visualizados nas Figuras 6.22 e 6.23 e na Tabela 6.12.



**Figura 6.22.** Comportamento das variáveis sob atuação do MPC no Exemplo 6.16.



**Figura 6.23.** Polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.16.

**Tabela 6.12.** Índices – Exemplo 6.16

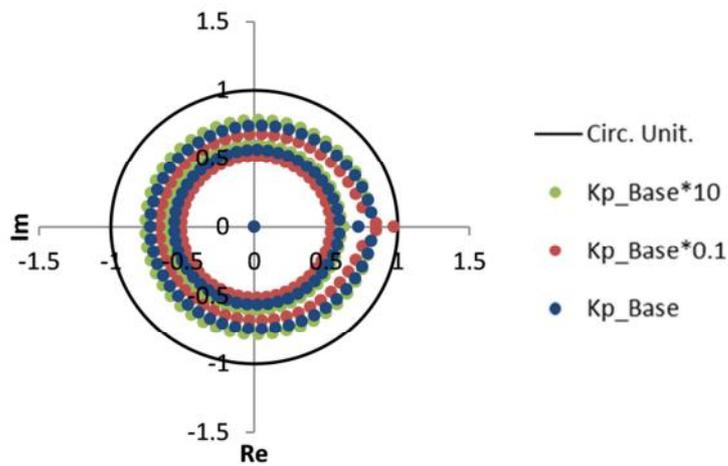
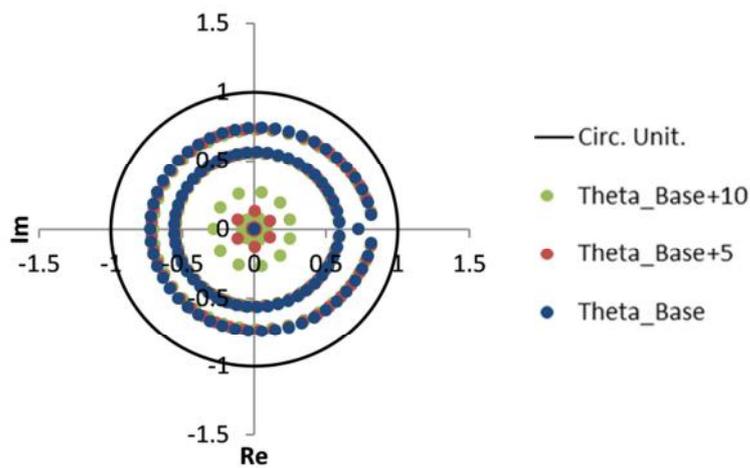
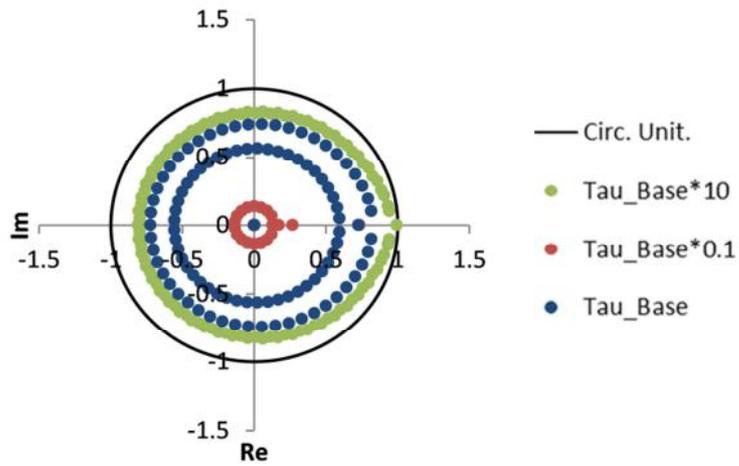
Índice	Valor
<i>IndM1</i>	1.3077
<i>IndM2</i>	1.7574
<i>IndM3</i>	1.7015
<i>IndM4</i>	1.3070

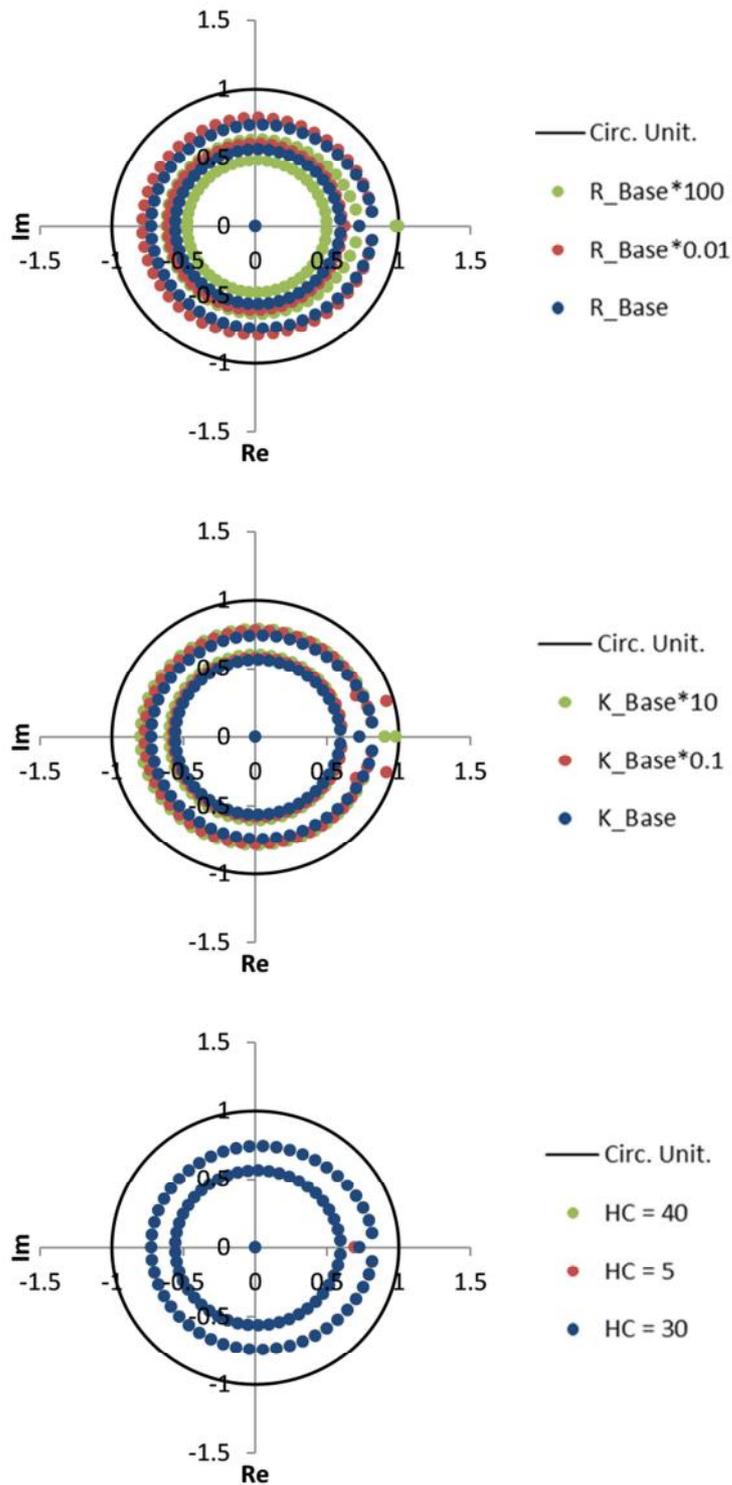
Com a sintonia mais agressiva, o comportamento do controlador ficou instável, tendo sido também observado um polo fora do círculo unitário e o valor de todos os índices acima de 1, conforme esperado. De qualquer forma, é importante ressaltar que o único índice capaz de prever a instabilidade de forma determinante é o *IndM4*.

*Exemplo 6.17: Análise de Sensibilidade no caso MIMO*

Da mesma forma que no caso SISO, foi feita uma análise de sensibilidade para o caso MIMO. No entanto, como são muitos os parâmetros do caso MIMO, optou-se por realizar variações simultâneas de mesma natureza a cada teste. O Exemplo 6.12 foi utilizado como base para a análise de sensibilidade. Foram verificadas as influências da constante de tempo, do tempo morto e do ganho do processo, bem como da supressão de movimento, do horizonte de controle e do fator de erro de modelagem. Os resultados são apresentados na Figura 6.24, em que *Tau\_Base* é a constante de tempo base,

Theta\_Base é o tempo morto base, Kp\_Base é o ganho base do processo real, R\_Base é o parâmetro de supressão de movimento base , K\_Base é o fator de erro de modelagem base e HC é o horizonte de controle.





**Figura 6.24.** Análise de sensibilidade dos polos do sistema em malha fechada no caso MIMO em relação a diferentes parâmetros.

É importante ressaltar que nesta análise de sensibilidade, os valores de ganho, constante de tempo e tempo morto foram alterados da mesma forma tanto no processo que representa a planta quanto no modelo utilizado pelo controlador. Portanto, o único

parâmetro capaz de refletir a sensibilidade ao erro de modelagem é o fator  $K$ , que multiplica o ganho do processo real para calcular o ganho do modelo utilizado pelo controlador.

Assim como no caso SISO, a grandeza que afetou mais significativamente o raio da circunferência formada pelos polos do sistema foi a constante de tempo. De certa forma, pode-se afirmar que os outros parâmetros avaliados tiveram uma influência mais pronunciada no posicionamento dos polos no caso MIMO quando comparados com o resultado observado no caso SISO, provavelmente pela maior complexidade do problema.

Além disso, a análise de sensibilidade em relação a alguns parâmetros mostrou que muitas vezes observa-se um ou dois polos que saem do círculo formado pelos outros polos, podendo influenciar de forma significativa a resposta em malha fechada.

Em alguns casos, a sensibilidade pode ser mais pronunciada na presença de erros de modelagem. Este é o caso do tempo morto, por exemplo, que pode afetar o comportamento do controlador de uma forma diferente na presença de erros de modelagem.

## 6.4 Caso SISO Generalizado

Os resultados obtidos para o caso SISO com erro multiplicativo no ganho são generalizados nesta Seção para qualquer tipo de erro, considerando a formulação do MPC baseada em modelos de resposta ao degrau. Da mesma forma como foi deduzida a Equação (6.4) para o caso particular de um problema SISO com erro de modelagem por um fator multiplicativo (Apêndice A), é possível generalizar este resultado (Apêndice C) e calcular as ações de controle de um MPC aplicado a um processo conforme a Equação (6.61), ao passo que o *bias* deste controlador pode ser calculado pela Equação (6.62). Aparentemente, é a primeira vez que essas equações são apresentadas na literatura.

$$\Delta U_j = CY^{SP}W_j \tag{6.61}$$

onde  $W_j = 1 - \sum_{i=1}^j X_i W_{j-i}$

e  $X_i = \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i}^{modelo} + C(s_i^{real} - s_i^{modelo})$

$$D_j = CY^{SP} \sum_{i=1}^j (s_i^{real} - s_i^{modelo}) W_{j-i} \quad (6.62)$$

onde  $W_j = 1 - \sum_{i=1}^j X_i W_{j-i}$

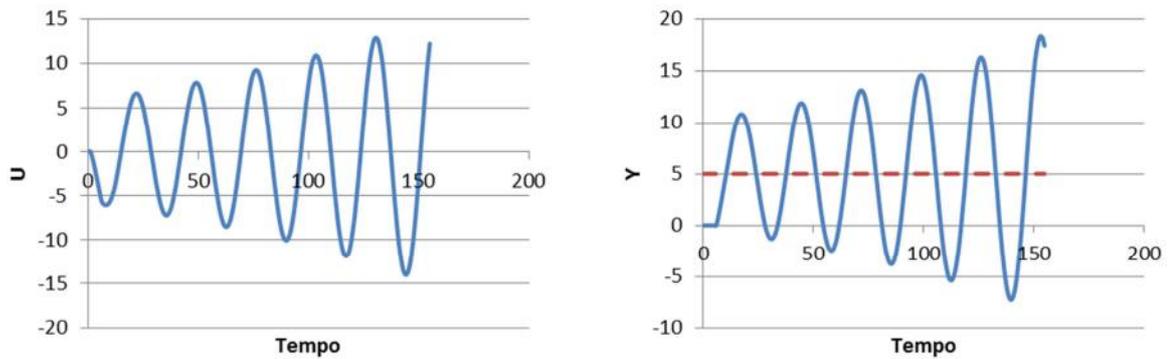
e  $X_i = \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i}^{modelo} + C(s_i^{real} - s_i^{modelo})$

A Equação (6.61) foi testada e é capaz de reproduzir exatamente o comportamento do controlador. Os resultados anteriores relacionados ao cálculo dos polos do sistema em malha fechada continuam sendo válidos, embora o cálculo de  $X_i$  generalizado seja um pouco diferente. É importante ressaltar que a Equação (6.61) é uma generalização válida para qualquer tipo de erro, seja por um fator que multiplica o ganho, por erros na constante de tempo do processo ou por erros relacionados ao tempo morto. Além disso, os modelos de resposta ao degrau que representam planta e modelo do controlador podem ter qualquer forma, não sendo necessário que tenham como base um modelo de primeira ordem com tempo morto. Assim, a Equação (6.61) e os resultados anteriores relacionados ao cálculo de estabilidade do controlador são válidos em uma ampla variedade de problemas.

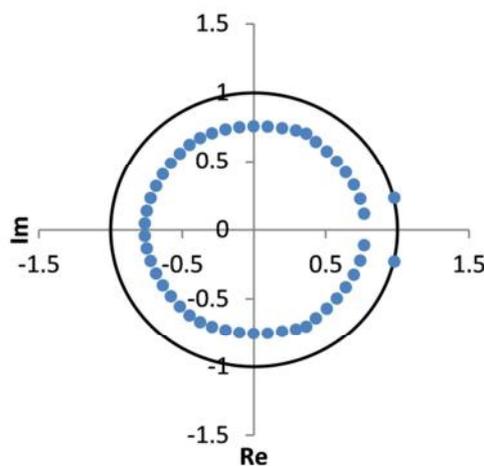
A seguir, serão apresentados exemplos arbitrários do comportamento do controlador na presença de erros de tempo morto (Exemplo 6.18) e erros na constante de tempo (exemplo 6.19).

#### *Exemplo 6.18*

Neste exemplo, um MPC foi aplicado a um processo de primeira ordem com ganho igual a 1, constante de tempo igual a 4 e tempo morto igual a 6. Os horizontes de controle e predição foram definidos como 30 e 50, respectivamente, e os parâmetros de sintonia  $Q$  e  $R$  receberam o valor de 1. O modelo utilizado pelo controlador foi idêntico ao modelo do processo real, a não ser pelo tempo morto, que neste caso foi considerado igual a 1. Os resultados deste exemplo, com erro no tempo morto, são apresentados nas Figuras 6.25 e 6.26. Neste exemplo, foi observada instabilidade, confirmada por dois polos fora do círculo unitário, validando a aplicação da Equação (6.17) com  $X_i$  calculado pela Equação (6.61) para casos mais gerais.



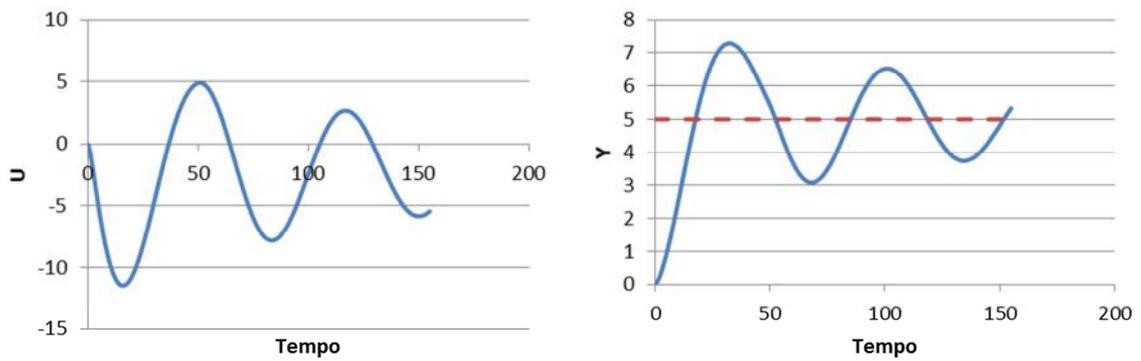
**Figura 6.25.** Comportamento das variáveis no Exemplo 6.18.



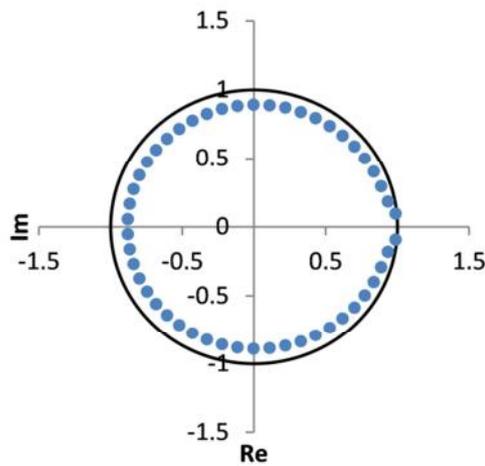
**Figura 6.26.** Polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.18.

### Exemplo 6.19

Neste exemplo, o controlador MPC é aplicado a um processo de primeira ordem sem tempo morto com ganho igual a 1 e constante de tempo igual a 40, com os mesmos horizontes de controle e predição e parâmetros de sintonia do exemplo anterior. O modelo utilizado pelo controlador foi idêntico ao modelo do processo real, a não ser pela constante de tempo, definida como 4. Os resultados deste exemplo podem ser observados nas Figuras 6.27 e 6.28. Analisando este exemplo, é possível verificar que o comportamento do controlador foi estável, acompanhado de todos os polos dentro do círculo unitário. Os resultados dos exemplos confirmam a generalização dos resultados e a possibilidade de uso da Equação (6.17) e da Equação (6.61) em problemas envolvendo erros de modelagem de diferentes naturezas, bastando que o modelo e o processo real possam ser representados na forma de modelos de resposta ao degrau.



**Figura 6.27.** Comportamento das variáveis no Exemplo 6.19.



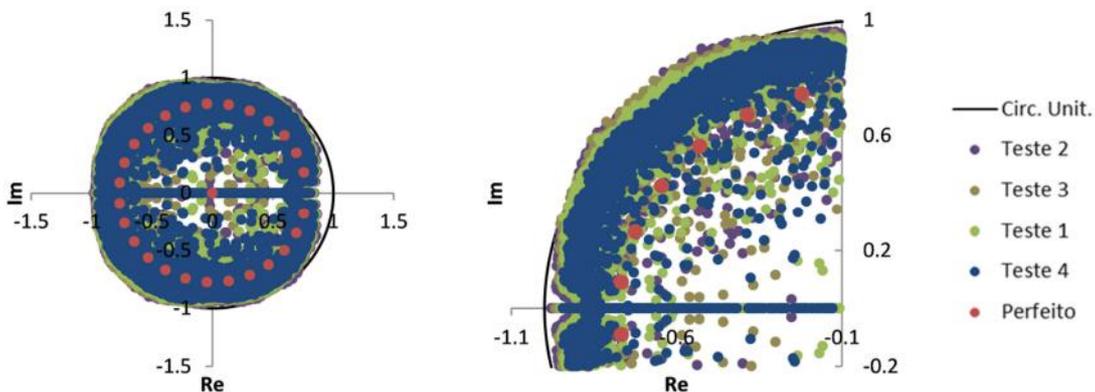
**Figura 6.28.** Polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.19.

#### 6.4.1 Análise da Região de Confiança dos Polos do Sistema em Malha Fechada

Uma vez desenvolvida uma metodologia para cálculo dos polos do sistema sob a atuação de um MPC para qualquer tipo de erro entre a planta real e o modelo utilizado pelo controlador, torna-se possível estender o estudo realizado anteriormente (Seção 4.2), quando foram levantadas as regiões de confiança das ações de controle, para determinar a região de confiança dos polos do sistema em malha fechada.

Seguindo exatamente a metodologia e o exemplo descritos nas Seções 4.2 e 4.2.1, foi calculada a região de confiança dos polos, quando diferentes projetos de testes foram empregados para a geração dos dados para a identificação do modelo utilizado

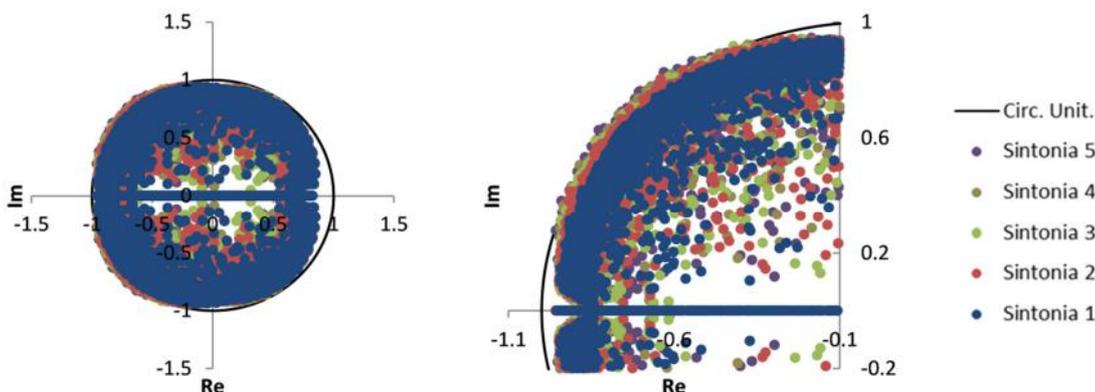
pelo controlador. Os resultados desta análise, na presença de erros de medição da variável controlada  $Y$ , podem ser observados na Figura 6.29.



**Figura 6.29.** Polos do sistema em malha fechada – Influência do projeto de testes.

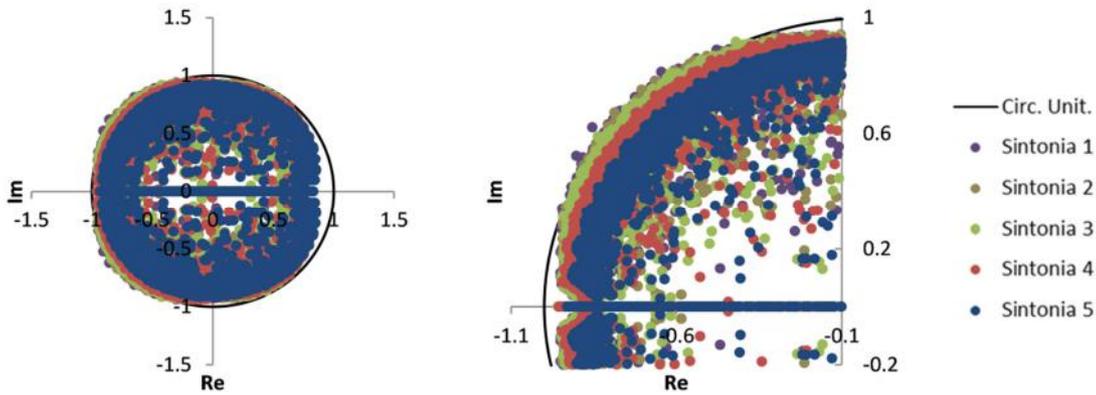
É interessante notar que, quando o modelo é perfeito, os polos do sistema em malha fechada não sofrem alteração ao longo das simulações realizadas. Ou seja, se o modelo for perfeito, a existência de erro de medição por si só não é suficiente para provocar grandes mudanças de desempenho do sistema controlado e, ainda menos, para instabilizar um sistema que seja estável na ausência destes erros.

Da mesma forma, foi calculada a sensibilidade dos polos aos valores dos parâmetros de sintonia  $Q$  (Figura 6.30) e  $R$  (Figura 6.31), adotando o exemplo e as sintonias descritos na Seção 4.2 e, mais especificamente, na Seção 4.2.2. Os resultados mostram que, conforme a sintonia fica mais agressiva, alguns polos saem do círculo unitário, resultando no comportamento instável já observado para as trajetórias das variáveis manipuladas e controladas na Seção 4.2.2.



**Figura 6.30.** Polos do sistema em malha fechada – Influência do parâmetro de sintonia

$Q$ .



**Figura 6.31.** Polos do sistema em malha fechada – Influência do parâmetro de sintonia  $R$ .

## 6.5 Caso MIMO Generalizado

Da mesma forma que foi possível generalizar a análise do controlador para diferentes erros de modelagem no caso SISO, pode-se generalizar o caso MIMO, conforme mostrado no Apêndice D. Assim, as expressões que definem as ações de controle e o *bias* do controlador passam a ser dadas pelas Equações (6.63) e (6.64), respectivamente. Aparentemente, é a primeira vez que essas equações são apresentadas na literatura.

$$\Delta \underline{U}_j = \underline{W}_j \underline{C} \underline{Y}^{SP} \quad (6.63)$$

$$\text{onde } \underline{W}_j = \underline{I} - \sum_{i=1}^j \underline{X}_i \underline{W}_{j-i}$$

$$\text{e } \underline{X}_i = \underline{C} \underline{S} p_i^{modelo} + \underline{C} \underline{S} b_i^{real} - \underline{C} \underline{S} b_i^{modelo}$$

$$\underline{D}_j = \left( \sum_{i=1}^j (\underline{S} b_i^{real} - \underline{S} b_i^{modelo}) \underline{W}_{j-i} \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} \quad (6.64)$$

$$\text{onde } \underline{W}_j = \underline{I} - \sum_{i=1}^j \underline{X}_i \underline{W}_{j-i}$$

$$\text{e } \underline{X}_i = \underline{C} \underline{S} p_i^{modelo} + \underline{C} \underline{S} b_i^{real} - \underline{C} \underline{S} b_i^{modelo}$$

Assim como no caso SISO, os resultados anteriores continuam sendo válidos, embora o cálculo de  $\underline{X}_i$  seja um pouco diferente. Esta também é uma generalização

válida para qualquer tipo de erro. Além disso, como no caso anterior, os modelos de resposta ao degrau que representam planta e modelo do controlador podem ter qualquer forma, não sendo necessário que tenham como base um modelo de primeira ordem com tempo morto. Por isso, as Equações (6.63) e (6.64) representam uma generalização ainda maior que as Equações (6.61) e (6.62), pois os resultados anteriores podem ser utilizados para avaliar a estabilidade do controlador em uma ampla gama de problemas multivariáveis.

A seguir, são apresentados exemplos arbitrários do comportamento do controlador MIMO aplicado a um processo com duas variáveis controladas e duas manipuladas na presença de erros na constante de tempo e erros de tempo morto.

Nos exemplos estudados foram utilizados horizontes de controle e predição iguais a 30 e a 50, respectivamente, ao passo que os parâmetros de sintonia utilizados foram  $Q = 1$  para todas as variáveis controladas e  $R = 2$  para todas as variáveis manipuladas. Os modelos utilizados para representar o processo real e o modelo para o controlador foram modelos de resposta ao degrau, baseados em modelos de primeira ordem com ou sem tempo morto, com o objetivo de facilitar a análise e a apresentação do problema e dos resultados.

#### *Exemplo 6.20*

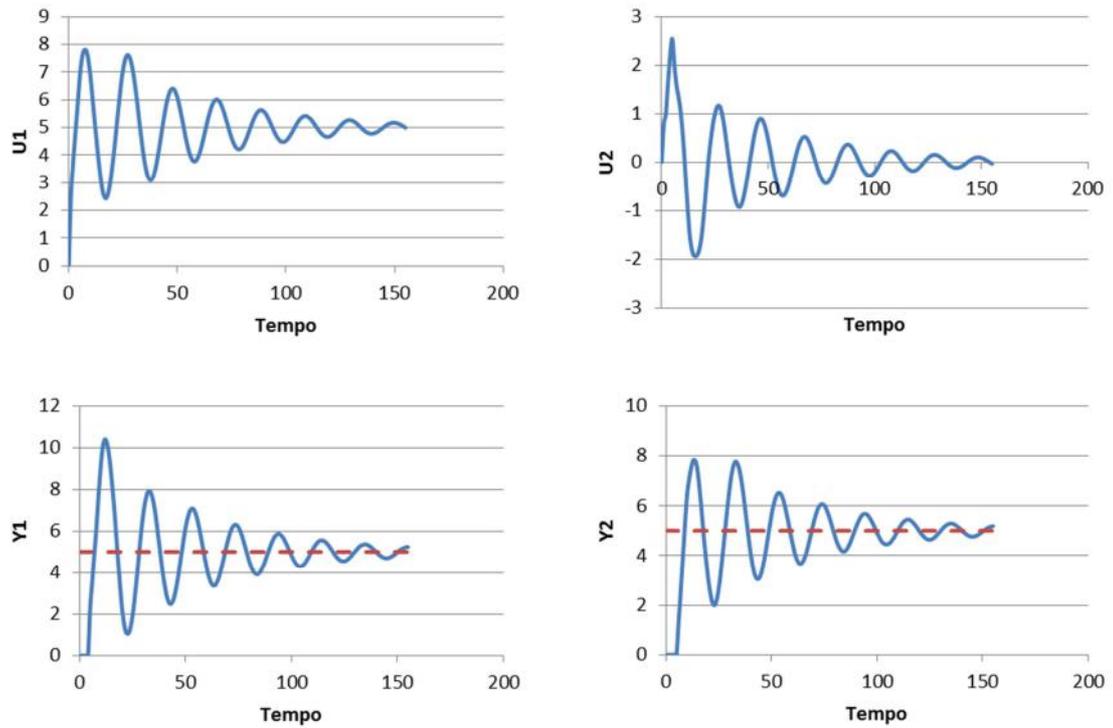
Neste exemplo, os modelos utilizados pelo controlador (Equação (6.66)) diferiram dos modelos do processo real (Equação (6.65)) apenas quanto ao tempo morto.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} e^{-4s} & \frac{1}{2S + 1} e^{-5s} \\ \frac{2}{5S + 1} e^{-6s} & \frac{0.5}{0.4S + 1} e^{-5s} \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

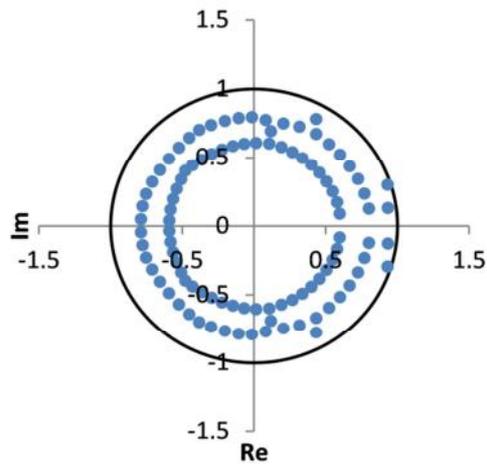
$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} e^{-1s} & \frac{1}{2S + 1} e^{-2s} \\ \frac{2}{5S + 1} e^{-2s} & \frac{0.5}{0.4S + 1} e^{-1s} \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

Os resultados podem ser observados quanto ao comportamento das variáveis manipuladas (ações de controle) e das variáveis controladas (Figura 6.32), quanto aos

polos do sistema em malha fechada (Figura 6.33) e quanto aos índices propostos anteriormente (Tabela 6.13).



**Figura 6.32.** Comportamento das variáveis sob atuação do MPC no Exemplo 6.20.



**Figura 6.33.** Polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.20.

**Tabela 6.13.** Índices – Exemplo 6.20

Índice	Valor
<i>IndM1</i>	0.7256
<i>IndM2</i>	2.5475
<i>IndM3</i>	2.2787
<i>IndM4</i>	0.9792

No exemplo simulado, o comportamento do controlador é estável, embora oscilatório, e todos os polos do sistema em malha fechada encontram-se dentro do círculo unitário, conforme esperado. Quanto aos índices, foi observado que o *IndM2* e o *IndM3* apresentaram valor superior a 1, o que pode ocorrer mesmo com o sistema estável, já que as condições estabelecidas por estes índices são apenas condições suficientes de convergência. Por outro lado, o *IndM4*, que é mais rigoroso ao considerar diretamente o maior polo em módulo, apresentou valor menor do que 1, indicando a estabilidade do sistema.

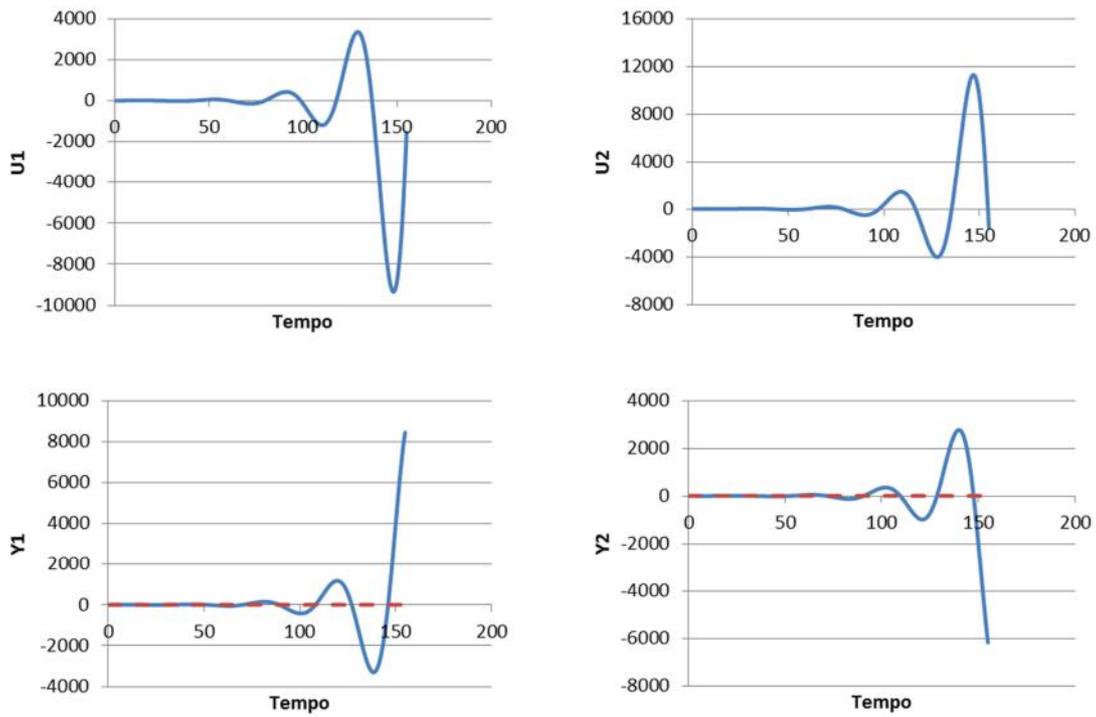
*Exemplo 6.21*

Neste exemplo, foi simulado um erro de modelagem quanto à constante de tempo. Com isso, o processo real foi representado pela Equação (6.67), enquanto o modelo utilizado pelo controlador foi expresso pela Equação (6.68).

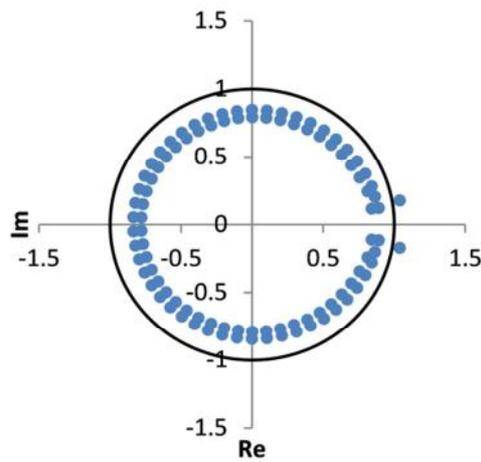
$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} & \frac{1}{6S + 1} \\ \frac{2}{10S + 1} & \frac{0.5}{0.4S + 1} \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4S + 1} & \frac{1}{0.2S + 1} \\ \frac{2}{0.5S + 1} & \frac{0.5}{0.4S + 1} \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

Os resultados podem ser observados nas Figuras 6.34 e 6.35 e na Tabela 6.14.



**Figura 6.34.** Comportamento das variáveis sob atuação do MPC no Exemplo 6.21.



**Figura 6.35.** Polos do sistema em malha fechada no Exemplo 6.21.

**Tabela 6.14.** Índices – Exemplo 6.21

Índice	Valor
$IndM1$	0.7356
$IndM2$	1.8430
$IndM3$	1.6610
$IndM4$	1.0556

De acordo com os resultados obtidos, o comportamento instável do processo sob ação do controlador foi observado tanto em função das variáveis manipuladas e controladas quanto pela presença de polos fora do círculo unitário. Os índices  $IndM2$ ,  $IndM3$  e  $IndM4$  indicaram a divergência, embora apenas o  $IndM4$  assegurasse de fato a ocorrência de comportamento instável. Por outro lado, o  $IndM1$  apresentou valor menor do que 1, que a princípio seria uma condição suficiente para a convergência. No entanto, no caso MIMO, o  $IndM1$  pode variar conforme a métrica utilizada na Equação (6.45). Como neste trabalho foi adotado o raio espectral como métrica para o  $IndM1$  (Equação (6.46)) e este valor é menor do que o de qualquer outra norma que pudesse ser utilizada, é provável que outras métricas mais conservadoras pudessem apontar a instabilidade do sistema.

## 6.6 Proposta de Índice

Alguns índices propostos foram monitorados nos exemplos analisados ao longo deste trabalho. Em especial, foi verificado que um dos índices, o  $IndM4$ , além de fornecer uma informação mais rigorosa quanto à estabilidade do sistema, parece ser capaz não só de avaliar a estabilidade, mas também o desempenho do sistema em malha fechada. Foi observado que o valor do índice  $IndM4$  é maior do que 1 quando o comportamento do controlador é instável, menor do que 1 quando o sistema apresenta comportamento estável e igual a 1 quando o controlador é extremamente lento.

Pode-se interpretar o comportamento em malha fechada como uma composição da resposta orientada por cada um dos polos. No caso de um sistema de MPC aplicado a um processo, já foi mostrado por meio da Equação (6.17) que o número de polos seria numericamente igual ao horizonte de predição, podendo ser bastante grande.

Sabe-se também que basta um polo fora do círculo unitário para que o sistema apresente comportamento instável e que, por outro lado, se todos os polos estiverem dentro do círculo unitário, o sistema é estável. Como o índice  $IndM4$  é igual ao maior polo em módulo, basta realmente verificar se o seu valor é maior ou menor do que 1 para definir a condição de estabilidade do sistema.

É interessante notar que, quando o controlador está lento demais, foi observado que o valor de  $IndM4$  é igual a 1 e também que não só o módulo do polo é igual a 1,

mas que, nestas condições, existe um polo real com valor igual a 1. Ao analisar as respostas correspondentes a cada polo quanto às suas posições relativas ao círculo unitário, tem-se que um polo real com valor igual a 1 resultaria em um comportamento em que as variáveis permaneceriam constantes; ou seja, a variável controlada não iria para o *setpoint* e a variável manipulada não receberia as ações de controle necessárias para tal.

De fato, se a sintonia for excessivamente lenta, o comportamento observado poderia ser próximo deste, já que controlador estaria tão lento, que ficaria praticamente sem ação, fazendo com que o sistema continuasse inerte. Ou seja, as ações de controle seriam ínfimas e a variável controlada não atingiria o *setpoint* desejado.

Ao variar a sintonia, observa-se que o valor de *IndM4* sai de valores que podem estar acima de 1, com uma sintonia rápida; vai diminuindo conforme a sintonia fica mais lenta, enquadrando o valor de *IndM4* como menor do que 1; atinge um ponto de mínimo, com sintonia mais lenta; volta a aumentar, sem ultrapassar o valor de 1, com sintonias ainda mais lentas; e quando a sintonia torna-se excessivamente lenta, passa a apresentar valor igual a 1. Este comportamento pode ser observado no exemplo a seguir, em que foi verificada a sensibilidade do índice *IndM4* em relação a um dos parâmetros de sintonia.

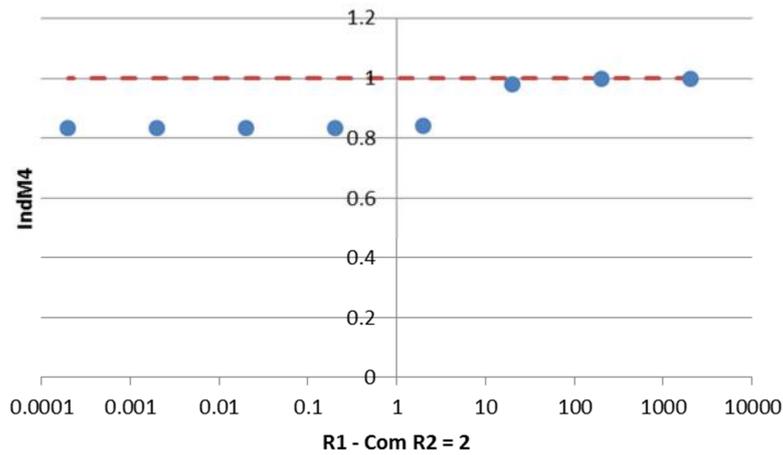
O exemplo arbitrário a seguir é utilizado para ilustrar a sensibilidade do índice proposto e trata de um MPC aplicado a um processo com 2 variáveis manipuladas e 2 variáveis controladas. Os horizontes utilizados foram iguais a 30, para controle, e 50, para predição. O processo real foi expresso pela Equação (6.69) e o modelo utilizado pelo controlador foi o da Equação (6.70).

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4S+1} & \frac{1}{2S+1} \\ \frac{2}{5S+1} & \frac{0.5}{4S+1} \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4S+1} & \frac{0.4}{2S+1} \\ \frac{4}{5S+1} & \frac{0.75}{4S+1} \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

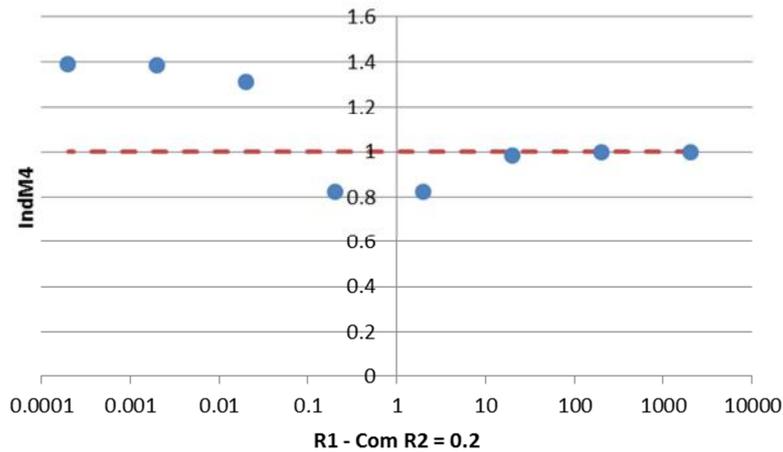
Os parâmetros de sintonia *Q* foram iguais a 1 para todas as variáveis controladas. Já os parâmetros de sintonia *R*, foram diferentes para cada uma das manipuladas e, por isso, serão denominados neste exemplo como *R1* e *R2*. Para supressão de movimento

$R2$ , referente à segunda variável manipulada, foi adotado um valor igual a 2, inicialmente. Já a supressão de movimento  $R1$ , referente à primeira variável manipulada, teve seu valor alterado em diferentes simulações para a análise de sensibilidade. Os resultados deste primeiro estudo podem ser observados na Figura 6.36.



**Figura 6.36.** Análise de sensibilidade do índice proposto com um dos parâmetros de supressão de movimento igual a 2.

Neste primeiro teste, nenhum valor da supressão de movimento  $R1$  foi suficiente para instabilizar o sistema, mantidas as outras condições fixas. No entanto, já foi possível verificar que para valores suficientemente lentos de sintonia ( $R1$  grande, neste caso), o valor de  $IndM4$  foi igual a 1. Foi ainda realizada outra análise de sensibilidade para o mesmo exemplo, em que a supressão de movimento  $R2$  foi mantida fixa em 0.2, enquanto a supressão de movimento  $R1$  variou para analisar o comportamento de  $IndM4$ . Os resultados são apresentados na Figura 6.37.



**Figura 6.37.** Análise de sensibilidade do índice proposto com um dos parâmetros de supressão de movimento igual a 0.2.

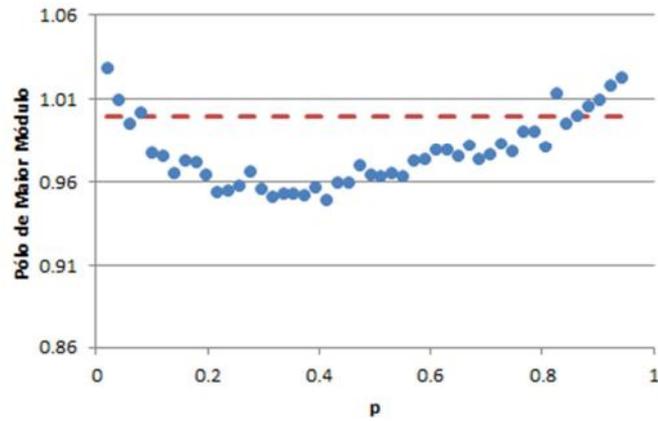
Esta última análise de sensibilidade apresentou comportamento conforme havia sido descrito anteriormente, já que o sistema foi instável para valores baixos de  $R1$ . Este resultado mostra como o índice  $IndM4$  apresenta características interessantes para ser utilizado, não só do ponto de vista de estabilidade, mas também do ponto de vista de desempenho. Este comportamento observado será utilizado adiante neste trabalho para a proposição de metodologias.

#### 6.6.1 Avaliação dos Projetos de Testes sob Enfoque do Novo Índice

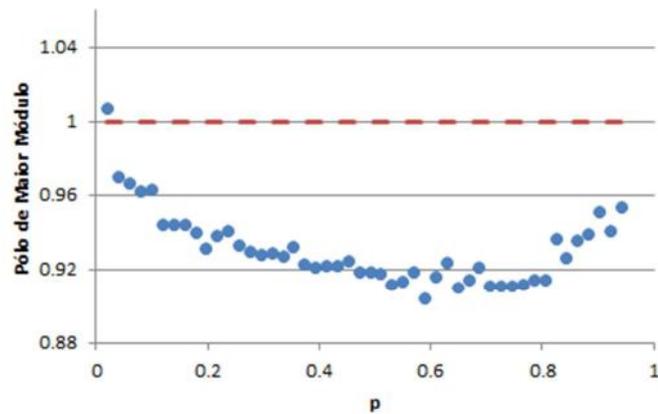
O índice proposto foi utilizado para complementar o estudo realizado na Seção 4.2.3, verificando como o índice é afetado ao variar a probabilidade dos testes GBN. Este índice, assim como a métrica ISE utilizada na Seção 4.2.3, pode representar uma medida do desempenho do sistema em malha fechada.

Como a metodologia utilizada para avaliar os diferentes projetos de experimentos envolve muitas simulações e para cada uma delas há um valor de  $IndM4$ , optou-se por selecionar o maior valor de  $IndM4$  observado dentre as simulações realizadas para uma determinada probabilidade que define o projeto de experimentos. Esta escolha é a mais conservadora, já que garante que o pior caso está sendo considerado.

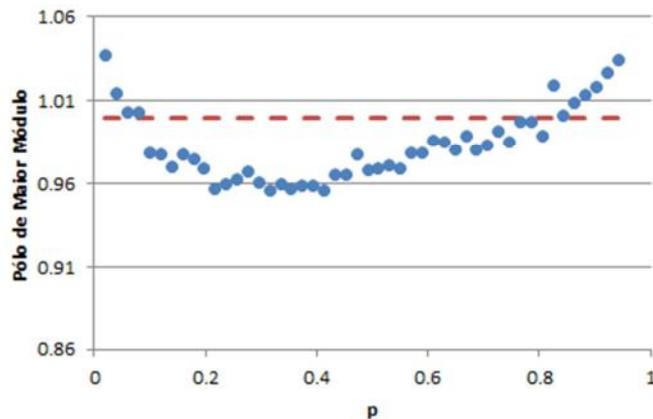
Os resultados obtidos para  $IndM4$  utilizando diferentes probabilidades para o teste GBN sob a ação de sintonia intermediária, lenta e rápida, podem ser verificados nas Figuras 6.38, 6.39 e 6.40, respectivamente.



**Figura 6.38.** Índice  $IndM4$  utilizando diferentes projetos de experimento na etapa de identificação (sintonia base,  $Q = 1$  e  $R = 0.1$ ).



**Figura 6.39.** Índice  $IndM4$  utilizando diferentes projetos de experimento na etapa de identificação (sintonia lenta,  $Q = 1$  e  $R = 10$ ).



**Figura 6.40.** Índice  $IndM4$  utilizando diferentes projetos de experimento na etapa de identificação (sintonia rápida,  $Q = 1$  e  $R = 0.01$ ).

Os resultados mostraram que o índice  $IndM4$  apresentou comportamento semelhante ao ISE. Em geral, o índice apresentou resultados piores para valores muito baixos e muito altos da probabilidade de chaveamento do projeto de testes e valores satisfatórios para probabilidades de chaveamento intermediárias. Este comportamento fica mais ressaltado em cenários de sintonia rápida, em que foram mais comuns valores de  $IndM4$  maiores do que 1, que seria suficiente para reprovar o projeto de testes, já que poderia instabilizar o sistema caso uma sintonia rápida fosse adotada. Por outro lado, ao trabalhar com sintonias lentas, o valor de  $IndM4$  foi superior a 1 para apenas um valor de probabilidade de chaveamento, já que a sintonia lenta acaba amortecendo os erros de modelagem. Esses resultados mostram que de fato há mudanças nos desempenhos do MPC como função dos testes, como verificado no Capítulo 4 e formalmente comprovado nas Figuras 6.38 a 6.40.

## 6.7 Estudo Monte Carlo SISO

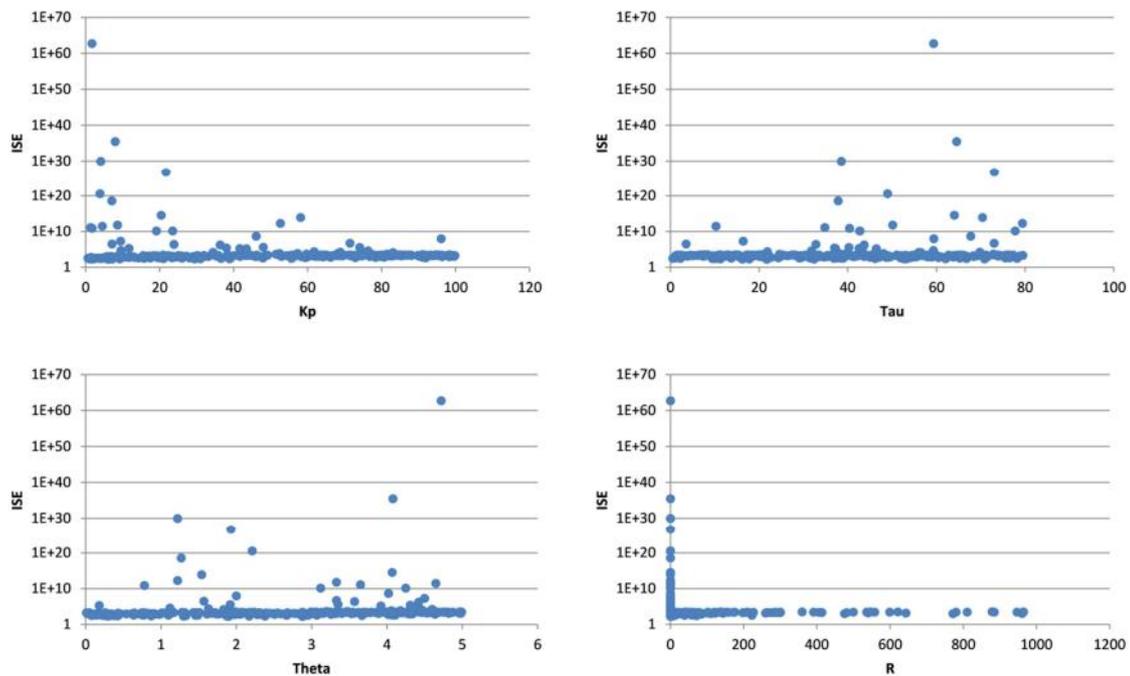
Para avaliar a influência de diferentes erros de modelagem no desempenho do sistema em malha fechada, foi conduzido um estudo Monte Carlo em um caso SISO com o acompanhamento da métrica ISE (Equação (4.12)) e do índice  $IndM4$ . A base da análise foi aplicar um controlador preditivo a uma planta arbitrária representada por um sistema de primeira ordem com tempo morto. Foram adotados horizontes de controle e predição iguais a 30 e 50, respectivamente, e parâmetro de sintonia  $Q$  igual a 1, também

de forma arbitrária. O sistema em malha fechada foi simulado 300 vezes, com variações aleatórias de distribuição uniforme da sintonia (em termos do parâmetro de supressão de movimento  $R$ ) e do modelo utilizado pelo controlador, para o qual foram definidas faixas de variação do ganho, da constante de tempo e do tempo morto (Tabela 6.15).

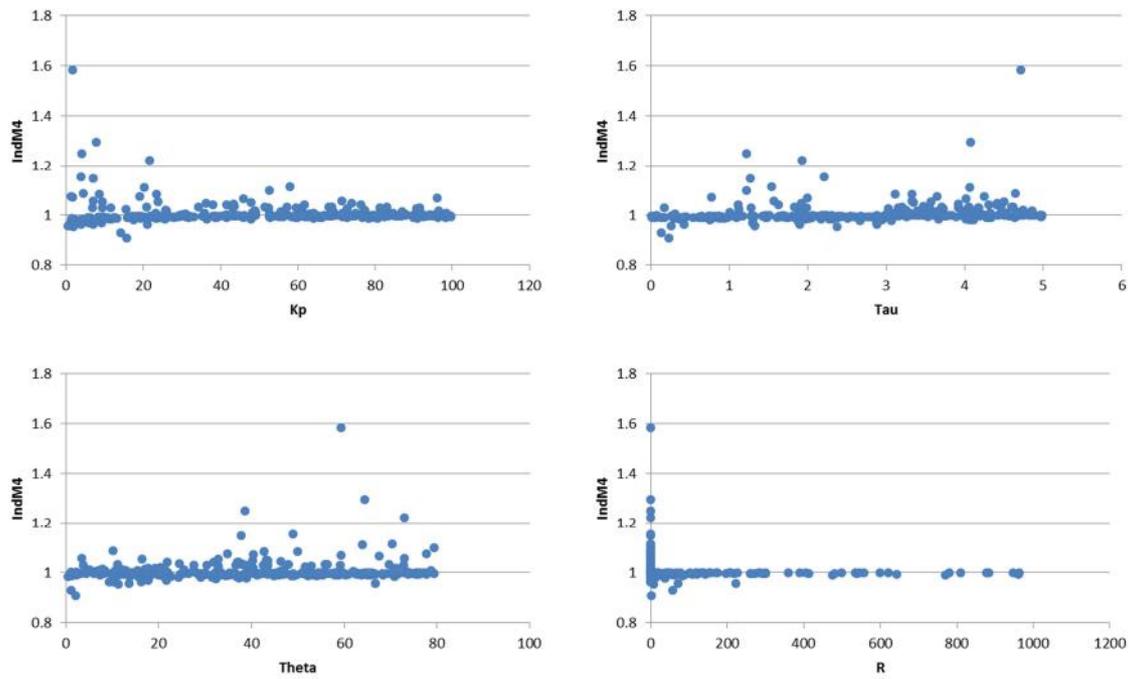
**Tabela 6.15.** Faixas de variação dos parâmetros no estudo Monte Carlo

Parâmetro	Mínimo	Máximo
$K_p$	0	100
$\tau$	0	80
$\theta$	0	5
$\log_{10} R$	-3	3

É importante ressaltar que o parâmetro  $R$  foi alterado de forma logarítmica ao longo das simulações para enriquecer os resultados obtidos, uma vez que variações pequenas do parâmetro  $R$  muitas vezes não produzem um efeito pronunciado. Os resultados das simulações realizadas podem ser observados na Figura 6.41 para o ISE (em escala logarítmica) e na Figura 6.42 em termos do índice  $IndM4$ .

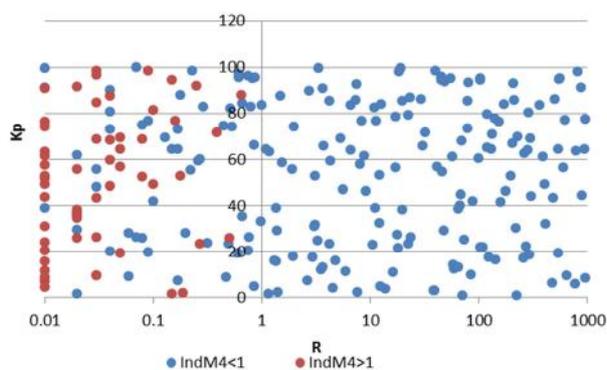


**Figura 6.41.** Resultados do estudo Monte Carlo para métrica ISE



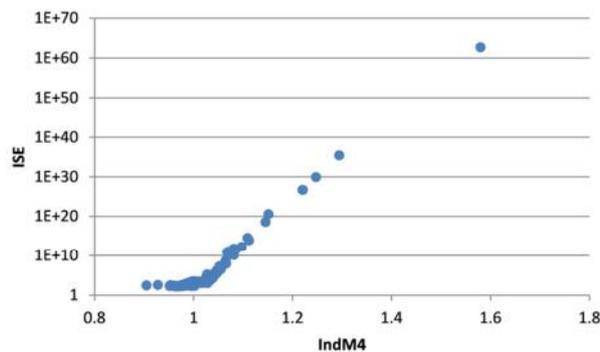
**Figura 6.42.** Resultados do estudo Monte Carlo para  $IndM4$ .

Os resultados obtidos em termos dos dois critérios avaliados mostram que não é possível correlacionar diretamente erros no ganho, na constante de tempo ou no tempo morto do modelo com uma condição de desempenho ruim. Ou seja, para mesmo erro de ganho, por exemplo, é possível haver um conjunto de outros erros ou sintonias diferentes que faça com que o controlador apresente um bom desempenho e outra condição em que o desempenho seja insatisfatório. A Figura 6.43 ilustra este comportamento observado.



**Figura 6.43.** Resultados do estudo Monte Carlo.

O parâmetro que mais se correlaciona com os critérios de desempenho adotados é o parâmetro de sintonia  $R$ . Ainda assim, como era de se esperar, na presença de erros de modelagem pequenos, menores valores de  $R$  podem ser adotados sem prejuízo do desempenho. De outra forma, a massa de dados obtidas do estudo Monte Carlo permite observar como os critérios utilizados para representar o desempenho do sistema de controle se relacionam (Figura 6.44). Esses resultados mostram que os erros paramétricos devem ser considerados em um contexto multivariável e sinérgico, em que as múltiplas incertezas se afetam mutuamente.



**Figura 6.44.** Relação entre o ISE (escala logarítmica) e o índice  $IndM4$ .

Por meio da Figura 6.44 é possível inferir que há certa coerência entre os dois critérios analisados. Em geral, para valores de  $IndM4$  menores do que 1, o valor de ISE é baixo, já que o controlador converge. Conforme o valor de  $IndM4$  aumenta e se afasta do valor de 1, o ISE aumenta rapidamente. No caso estudado, pode-se dizer que o aumento do ISE foi quase exponencial em relação ao índice  $IndM4$ , uma vez que o gráfico em escala logarítmica aproximou-se de uma reta com inclinação positiva nas porções de gráfico em que  $IndM4$  é maior do que 1. Esse resultado é bastante satisfatório, confirmando que  $IndM4$  é uma boa medida de desempenho do sistema, além de ter a vantagem de não ser afetado pelo valor do *setpoint* ou do tempo de simulação, como acontece com o ISE.

## 6.8 Propagação de Erros SISO (Casos Particulares)

A seguir, utilizando o cálculo do controlador conforme a Equação (6.61), são apresentados resultados de estudos de propagação de erros de algumas naturezas particulares para o caso SISO.

### 6.8.1 Erro no Modelo da Planta (*Bias* ou Variância)

A primeira análise envolve uma discrepância entre o modelo utilizado pelo controlador e o modelo da planta real. Para simplificar os cálculos, este erro será totalmente atribuído à planta, já que, desta forma, o ganho do controlador permanece inalterado. Dando início à propagação de erros, o interesse é entender como um erro em  $s_i^{real}$  é capaz de afetar as ações de controle  $\Delta U_j$ . Desta forma, considerando apenas o erro de *bias* e utilizando linearização, pode-se escrever:

$$\delta(\Delta U_j) = CY^{SP} \sum_{i=1}^j \left( \frac{\partial W_j}{\partial s_i^{real}} \right) \delta s_i^{real}, \quad j \geq 1 \quad (6.71)$$

$$\delta(\Delta U_j) = CY^{SP} \sum_{i=1}^j \left( \frac{\partial W_j}{\partial X_i} \right) \left( \frac{\partial X_i}{\partial s_i^{real}} \right) \delta s_i^{real}, \quad j \geq 1 \quad (6.72)$$

Pela Equação (6.61), tem-se que:

$$\left( \frac{\partial X_i}{\partial s_i^{real}} \right) = C \quad \forall i \quad (6.73)$$

Aplicando a Equação (6.73) na Equação (6.72):

$$\delta(\Delta U_j) = C^2 Y^{SP} \sum_{i=1}^j \left( \frac{\partial W_j}{\partial X_i} \right) \delta s_i^{real}, \quad j \geq 1 \quad (6.74)$$

Para  $j = 0$  (primeira ação de controle),  $W_0 = 1$  e independe de  $s_i^{real}$ , portanto,  $\delta(\Delta U_0) = 0$ .

Conforme mostrado no Apêndice E,  $\partial W_j / \partial X_i$  pode ser expresso pela Equação (6.75).

$$\frac{\partial W_j}{\partial X_i} = -W_{j-i} - \sum_{k=1}^{j-i} X_k \left( \frac{\partial W_{j-k}}{\partial X_i} \right) \quad (6.75)$$

Substituindo, então, a Equação (6.75) na Equação (6.74) tem-se:

$$\delta(\Delta U_j) = C^2 Y^{SP} \sum_{i=1}^j \left( -W_{j-i} - \sum_{k=1}^{j-i} X_k \left( \frac{\partial W_{j-k}}{\partial X_i} \right) \right) \delta s_i^{real}, \quad j \geq 1 \quad (6.76)$$

A seguir, é realizada a análise de um caso particular em que há erro de *bias* entre o modelo utilizado pelo controlador e a planta real. Para simplificar os cálculos, o *bias* será adicionado na planta, já que, desta forma, o ganho do controlador permanece inalterado. Para este tipo de erro, antes da análise da propagação de erros propriamente dita, será feita uma avaliação de como  $X_i$  é alterado e das consequências na estabilidade do controlador. Portanto, para um  $X_i$  qualquer, na presença de um *bias*  $b$ , tem-se:

$$X_i = \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i}^{modelo} + C \left( (s_i^{real} + b) - s_i^{modelo} \right) \quad (6.77)$$

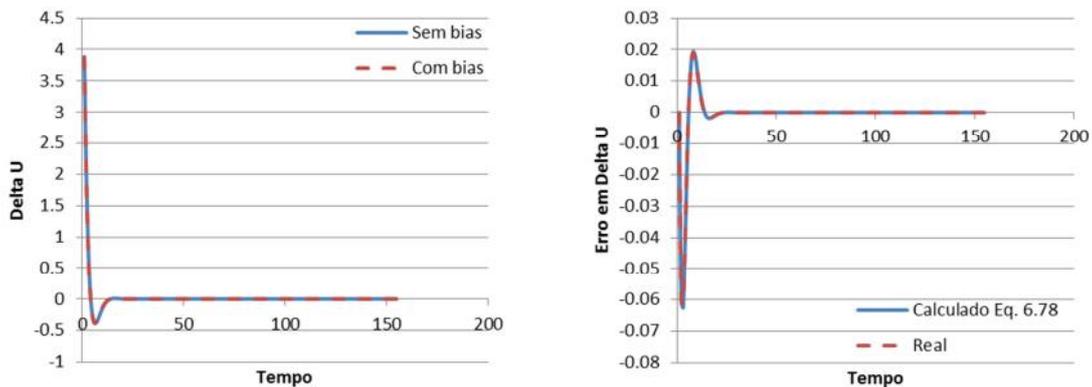
$$X_i = \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i}^{modelo} + C (s_i^{real} - s_i^{modelo}) + Cb$$

Pela Equação (6.77), é possível observar que para qualquer  $X_i$ ,  $X_i^b = X_i + Cb$ , onde  $X_i^b$  é o novo  $X_i$ , na presença de *bias*. Quando estes valores de  $X_i^b$  são aplicados ao polinômio característico da Equação (6.17), tem-se que os coeficientes  $(X_{i+1} - X_i)$  não se alteram, ao passo que o coeficiente do termo  $z^{HP-1}$  passa a ser  $(X_1^b - 1) = (X_1 - 1 + Cb)$ . Neste caso, apenas um coeficiente é alterado e tal mudança deve resultar em uma diferente condição de estabilidade do controlador, já que as raízes da equação característica devem sofrer alteração.

No caso do erro de *bias*,  $\delta s_i^{real} = b \forall i$ . Logo, utilizando a Equação (6.76), obtém-se a Equação (6.78), nunca apresentada na literatura.

$$\delta(\Delta U_j) = C^2 Y^{SP} b \sum_{i=1}^j \left( -W_{j-i} - \sum_{k=1}^{j-i} X_k \left( \frac{\partial W_{j-k}}{\partial X_i} \right) \right), \quad j \geq 1 \quad (6.78)$$

Para verificar a validade da Equação (6.78), adotou-se um exemplo arbitrário de aplicação do controlador a um processo de primeira ordem sem tempo morto, com ganho unitário e constante de tempo igual a 4. Para este caso, foi considerado um *bias* de 0.02 no processo que representa a planta real. Os parâmetros de sintonia utilizados foram iguais a 1 e os horizontes de controle e predição iguais a 30 e 50, respectivamente. Para efeito de comparação, foi simulado também o caso em que não há erro de *bias*, sendo a planta real e o modelo utilizado pelo controlador representados pelo mesmo processo. Os resultados da comparação entre as simulações com e sem *bias* e entre os erros nas ações de controle verificados e os calculados pela Equação (6.78) podem ser verificados na Figura 6.45.



**Figura 6.45.** Resultados da comparação das ações de controle com e sem *bias*.

Apesar do caso estudado considerar apenas um pequeno erro de *bias*, que provoca poucas mudanças nas ações de controle em relação ao problema sem *bias* (Figura 6.45a), os resultados da Figura 6.45b mostram que a Equação (6.78) foi capaz de calcular os erros nas ações controle provenientes deste tipo de incerteza. Assim, a Equação (6.78) pode ser considerada mais uma forma de quantificar as relações entre erros de modelagem, sintonia e desempenho do sistema de controle introduzido neste trabalho.

### 6.8.2 Sensibilidade ao Parâmetro de Sintonia

As mudanças em  $\Delta U_j$  podem ser escritas, de forma linearizada, em função da variação do parâmetro de sintonia  $R$ , conforme a Equação (6.79).

$$\delta(\Delta U_j) = \frac{\partial \Delta U_j}{\partial R} \delta R \quad (6.79)$$

Desenvolvendo a Equação (6.79) chega-se a:

$$\delta(\Delta U_j) = \left( \frac{\partial C}{\partial R} Y^{SP} W_j + C Y^{SP} \frac{\partial W_j}{\partial R} \right) \delta R \quad (6.80)$$

onde

$$\frac{\partial W_j}{\partial R} = \sum_{i=1}^j \frac{\partial W_j}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial R} \quad (6.81)$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial R} = \sum_{l=1}^{HP} \frac{\partial c_l}{\partial R} s_{l+i}^{modelo} + \frac{\partial C}{\partial R} (s_i^{real} - s_i^{modelo}) \quad (6.82)$$

A partir da Equação (6.82), foram consideradas duas hipóteses alternativas (Equações (6.83) e (6.85)) para simplificar o cálculo de  $\partial X_i / \partial R$  (Equações (6.84) e (6.86)).

Pela primeira hipótese:

$$X_i = C \bar{s}_i^{modelo} + C (s_i^{real} - s_i^{modelo}), \quad (6.83)$$

com

$$\bar{s}_i^{modelo} = \frac{\sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i}^{modelo}}{C}$$

Assim:

$$\frac{\partial X_i}{\partial R} = \left( \bar{s}_{l+i}^{modelo} + s_i^{real} - s_i^{modelo} \right) \cdot \frac{\partial C}{\partial R} \quad (6.84)$$

Utilizando a segunda hipótese:

$$X_i \approx C s_i^{real} \quad (6.85)$$

Assim:

$$\frac{\partial X_i}{\partial R} = s_i^{real} \cdot \frac{\partial C}{\partial R} \quad (6.86)$$

De volta à Equação (6.80), para o cálculo de  $\partial C/\partial R$ , será utilizada a matriz de ganho do controlador  $\underline{K}_C$  (Equação (6.1)), conforme mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_C}{\partial R} &= \frac{\partial (S^T Q S + R)^{-1}}{\partial R} S^T Q + (S^T Q S + R)^{-1} \frac{\partial (S^T Q)}{\partial R} \\ \frac{\partial K_C}{\partial R} &= \frac{\partial (S^T Q S + R)^{-1}}{\partial R} S^T Q \end{aligned} \quad (6.87)$$

$$\frac{\partial K_C}{\partial R} = \left( -(S^T Q S + R)^{-1} \frac{\partial (S^T Q S + R)}{\partial R} (S^T Q S + R)^{-1} \right) S^T Q$$

$$\frac{\partial K_C}{\partial R} = -(S^T Q S + R)^{-1} I (S^T Q S + R)^{-1} S^T Q$$

Assim, como  $C$  foi definido como o somatório dos elementos da primeira linha da matriz  $\underline{K}_C$ ,  $\partial C/\partial R$  é o somatório dos elementos da primeira linha de  $\partial K_C/\partial R$ . O cálculo de  $\partial C/\partial R$ , desta forma, foi confirmado por meio de exemplos numéricos, para uma variação de  $R$  suficientemente pequena.

Substituindo, agora, as Equações (6.81) e (6.84) na Equação (6.80), tem-se:

$$\delta(\Delta U_j) = \left( \frac{\partial C}{\partial R} \left( Y^{SP} W_j + C Y^{SP} \sum_{i=1}^j \frac{\partial W_j}{\partial X_i} (\bar{s}_{l+i}^{modelo} + s_i^{real} - s_i^{modelo}) \right) \right) \delta R \quad (6.88)$$

Utilizando a aproximação da Equação (6.86), em vez da Equação (6.84), e substituindo as Equações (6.81) e (6.86) na Equação (6.80), tem-se:

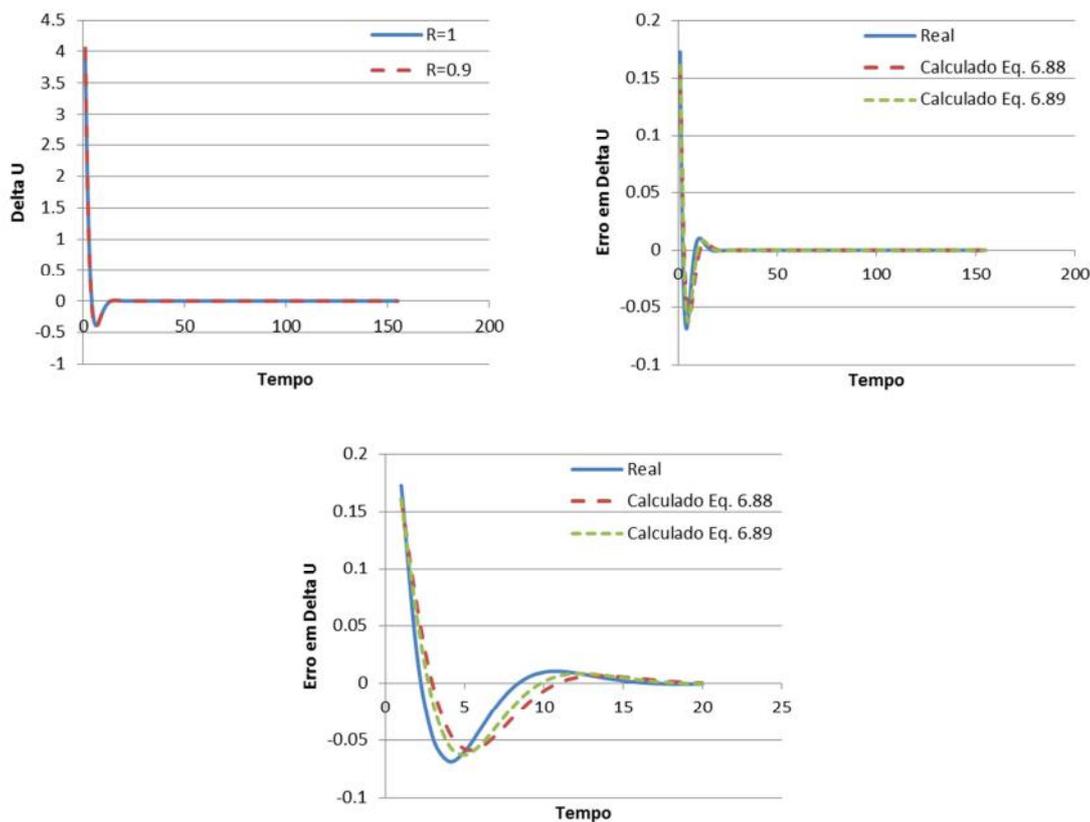
$$\delta(\Delta U_j) = \left( \frac{\partial C}{\partial R} \left( Y^{SP} W_j + C Y^{SP} \sum_{i=1}^j \frac{\partial W_j}{\partial X_i} s_i^{real} \right) \right) \delta R \quad (6.89)$$

Aparentemente, é a primeira vez que as Equações (6.88) e (6.89) são apresentadas na literatura. Estas equações são aproximações para o cálculo da variação em  $\Delta U_j$  decorrente de uma variação em  $R$ . Nas duas equações,  $\partial C/\partial R$  pode ser calculado pela soma dos elementos da primeira linha de  $\partial K_C/\partial R$ , calculado conforme a Equação (6.87). Dois exemplos numéricos arbitrários foram utilizados para testar as expressões desenvolvidas para cálculo da sensibilidade das ações de controle ao parâmetro de supressão de movimento.

*Exemplo 6.22: Pequena variação da sintonia*

Neste exemplo, o controlador foi aplicado a um processo de primeira ordem com ganho unitário e constante de tempo igual a 4. O parâmetro de sintonia  $Q$  foi mantido fixo em 1, assim como os horizontes de predição e controle, definidos como 50 e 30, respectivamente. A sensibilidade ao parâmetro de sintonia  $R$  (supressão de movimento) foi observada através de simulação adotando  $R = 1$  e  $R = 0.9$  (Figura 6.46).

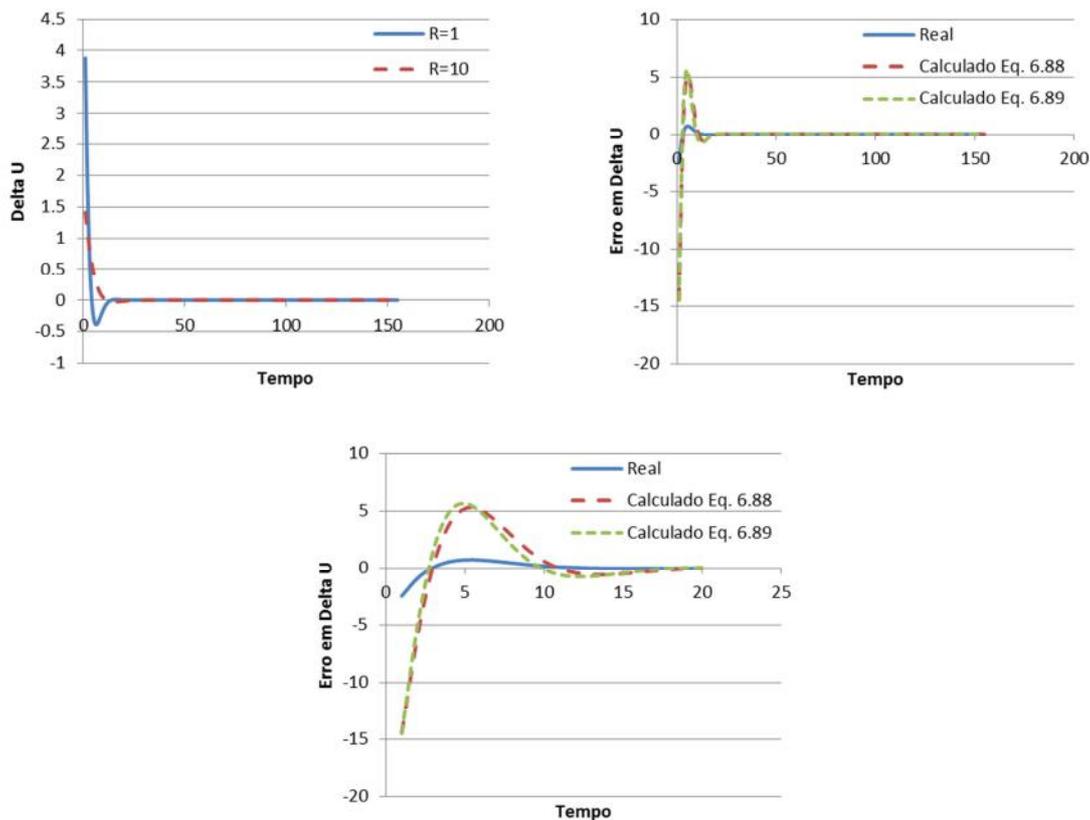
Os resultados da Figura 6.46 mostram que as Equações (6.88) e (6.89) foram capazes de prever aproximadamente as diferenças observadas nas ações de controle devido à mudança de sintonia. É importante ressaltar que, neste primeiro exemplo, a variação de sintonia foi bastante sutil e praticamente não faz diferença do ponto de vista prático. Por outro lado, o desenvolvimento de expressões que relacionam a sensibilidade das ações de controle ao parâmetro de supressão de movimento continua sendo interessante por auxiliar no entendimento e quantificação desta relação.



**Figura 6.46.** Resultados da comparação da sensibilidade das ações de controle ao parâmetro de supressão de movimento – Exemplo 6.22.

*Exemplo 6.23: Significativa variação da sintonia*

O segundo exemplo testado foi idêntico ao primeiro, a não ser pela magnitude de variação da sintonia testada. Portanto, a sensibilidade ao parâmetro de supressão de movimento foi observada por meio de simulação adotando  $R = 1$  e  $R = 10$  (Figura 6.47). Este exemplo simula uma variação mais próxima da realidade, uma vez que é necessário variar bastante o parâmetro de sintonia  $R$  para que se obtenha uma diferença significativa de comportamento do controlador em termos das ações de controle aplicadas.



**Figura 6.47.** Resultados da comparação da sensibilidade das ações de controle ao parâmetro de supressão de movimento – Exemplo 6.23.

De acordo com os resultados obtidos, as Equações (6.88) e (6.89) foram capazes igualmente de proporcionar uma aproximação para a sensibilidade das ações de controle perante variações suficientemente pequenas do parâmetro de sintonia  $R$ . No entanto, este resultado fica bastante degradado quando são feitas variações maiores e mais reais no parâmetro  $R$ , conforme mostra o Exemplo 6.23. Esta é uma limitação da expressão desenvolvida, provavelmente devido à linearização adotada, que permite prever apenas o resultado de variações pequenas.

## 6.9 Comentários Finais

Neste Capítulo foi desenvolvida uma alternativa para o cálculo do controlador atuando sobre o processo cuja forma matemática permitiu o cálculo dos polos do sistema em malha fechada na presença de incertezas de diferentes naturezas. O enfoque abordado representa uma contribuição na teoria de controle preditivo e sugere a

utilização de novos índices para representar o desempenho do processo sob ação do controlador. A teoria e as expressões propostas foram aplicadas com sucesso a exemplos com diferentes características, validando os resultados obtidos para uma ampla variedade de problemas.

A partir dos estudos realizados, verificou-se que o polo de maior módulo do sistema é capaz de representar adequadamente o desempenho do MPC, uma vez que seu valor fornece não apenas informações sobre a estabilidade do sistema, como do desempenho de forma geral.

O estudo Monte Carlo realizado mostrou mais uma vez o efeito conjunto de erros de modelagem de diferentes naturezas e da sintonia do controlador. Foram desenvolvidas, ainda, expressões para a propagação de erros em casos particulares, capazes de quantificar as relações envolvidas na presença de pequenas variações.

Os resultados deste Capítulo fornecem subsídios para avaliação e desenvolvimento de novas metodologias que considerem simultaneamente os erros de modelagem, a sintonia e o desempenho do controlador.

# Capítulo 7 Metodologias

Neste capítulo são apresentadas algumas metodologias desenvolvidas com base nas análises teóricas propostas nos capítulos anteriores desta tese.

## 7.1 Introdução

O estudo analítico apresentado no Capítulo 6 pode ajudar a compreender o comportamento de processos sujeitos à atuação de um MPC. Vislumbrou-se, com isso, o desenvolvimento de metodologias que auxiliem a determinar a sintonia apropriada para um cenário em que o modelo está sujeito a erros de modelagem e a definir a precisão do modelo em um cenário em que se deseja especificar o desempenho requerido do MPC. Além disso, dada uma matriz de modelos em um caso multivariável, pretende-se utilizar os conhecimentos adquiridos para determinar, em um cenário de sintonia e na presença de erros de modelagem, quais são os modelos mais importantes.

## 7.2 Projeto simplificado de controladores

O projeto de controladores pode envolver tanto a definição dos parâmetros de sintonia em si como a escolha do modelo utilizado pelo controlador, de modo a atender a alguns critérios recomendados. A seguir, são propostos e testados dois critérios diferentes com o objetivo de orientar o projeto de controladores MPC.

### 7.2.1 Baseado em Aproximação para Erro por Fator Multiplicativo do Ganho

A modelagem dos polos proposta na Seção 6.2.4 pode ser utilizada para o projeto de controladores, considerando as hipóteses que foram adotadas neste estudo. Trata-se, portanto, de problemas SISO em que o processo real e o modelo utilizado pelo

controlador são modelos de primeira ordem sem tempo morto, representados por um modelo de resposta ao degrau. Além disso, o erro de modelagem é considerado com auxílio de um fator multiplicativo  $K$ .

Com base nestas simplificações, a Equação (6.35) é válida e pode ser usada para orientar o projeto do controlador. É importante ressaltar ainda que uma expectativa para o erro de modelagem representado pelo fator  $K$  pode ser proveniente da etapa de identificação ou do conhecimento prévio do processo em questão.

Para o projeto de controladores, uma aproximação adicional (Equação (7.1)) será utilizada com o objetivo de simplificar ainda mais a Equação (6.35), deixando mais claro o efeito dos parâmetros do controlador e do modelo sobre os polos do sistema em malha fechada.

$$X_i \approx Cs_i \quad \forall i = 1 \dots HP \quad (7.1)$$

Aplicando a Equação (7.1) nas Equações (6.34) e (6.35), obtêm-se as Equações (7.2) e (7.3).

$$x^{*2} + (Cs_1 - 1 - r)x^* + (r - rCs_1 + Cs_2 - Cs_1) = 0 \quad (7.2)$$

$$x^{*2} + \left( \frac{Cs_1(s_2 - s_1) + (s_1 - s_3)}{s_2 - s_1} \right) x^* + \left( \frac{Cs_1(s_1 - s_3) + Cs_2(s_2 - s_1) + (s_3 - s_2)}{s_2 - s_1} \right) = 0 \quad (7.3)$$

Assim, durante o projeto de um controlador em que o modelo seja aproximadamente de primeira ordem, sem tempo morto e seja esperado erro apenas por um fator multiplicativo  $K$ , a Equação (7.3) pode fornecer uma boa aproximação a ser utilizada para determinar a sintonia do sistema. Em geral, uma sintonia adequada deveria ser uma sintonia que não resultasse em resposta lenta demais, mas que fornecesse um valor de  $C$  tal que, quando aplicado na Equação (7.2) ou na Equação (7.3), os módulos das raízes destas equações não ultrapassem o valor de 1.

Considerando a Equação (7.2), pode-se calcular:

$$\Delta = (Cs_1 - 1 - r)^2 - 4(r - rCs_1 + Cs_2 - Cs_1) \quad \text{ou} \quad (7.4)$$

$$\Delta = s_1^2 C^2 + (2s_1 + 2rs_1 - 4s_2)C + (1 - r)^2$$

Quando  $\Delta < 0$ , a Equação (7.2) não apresenta raízes reais. Pode-se calcular o intervalo de valores de  $C$  para o qual esta condição é válida com auxílio da Equação (7.5).

$$s_1^2 C^2 + (2s_1 + 2rs_1 - 4s_2)C + (1 - r)^2 < 0 \quad (7.5)$$

Considerando as raízes complexas, é importante estabelecer ainda dois outros limites para garantir que as raízes tenham módulo menor do que 1. Admitindo as raízes da Equação (7.2) como  $x_1^* = \alpha + \beta i$  e  $x_2^* = \alpha - \beta i$ , tem-se:

$$x^{*2} - 2\alpha x^* + (\alpha^2 + \beta^2) = 0 \quad (7.6)$$

Neste caso, para que o módulo das raízes seja menor do que 1, é necessário ainda atender às condições da Equação (7.7).

$$\begin{aligned} |\alpha| < 1 &\Rightarrow -2 < -2\alpha < 2 \quad e \\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1 &\Rightarrow 0 < \alpha^2 + \beta^2 < 1 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Comparando a Equação (7.6) com a Equação (7.2) e aplicando as condições da Equação (7.7) na Equação (7.2), obtém-se a Equação (7.8).

$$\begin{aligned} -2 < (Cs_1 - 1 - r) < 2 \quad e \\ 0 < (r - rCs_1 + Cs_2 - Cs_1) < 1 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Logo, o projeto do controlador deve considerar o valor de  $C$  tal que as condições das Equações (7.5) e (7.8) sejam atendidas.

Utilizar simultaneamente as condições impostas pelas Equações (7.5) e (7.8) pode ser conservador, do ponto de vista de que é possível ter raízes reais para a equação característica que descreve o sistema, sem que o mesmo chegue a instabilizar, bastando para isso que o módulo das raízes reais seja menor do que 1, o que já seria garantido de forma geral pelas condições impostas apenas pela Equação (7.8). No entanto, utilizar valores de  $C$  fora da faixa da Equação (7.5), quando aparecem as raízes (ou polos) reais,

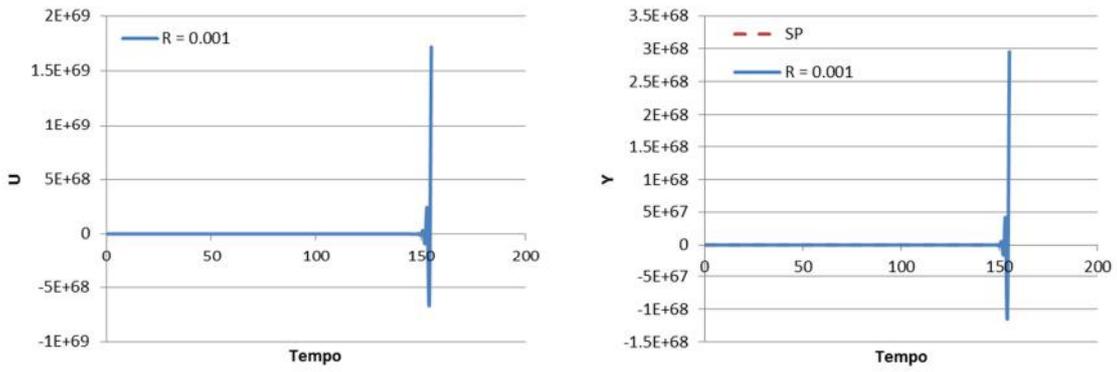
pode não ser tão interessante, pois valores de  $C$  abaixo desta faixa podem sugerir uma sintonia que seja demasiadamente lenta, já que isso implica em uma raiz real que se aproxima do valor de 1. Por outro lado, valores de  $C$  acima dos limites da Equação (7.5) implicam em controladores rápidos e que podem não ter a robustez adequada, caso o erro de modelagem tenha sido subestimado durante o projeto.

A seguir, é feita a análise de um exemplo arbitrário (Exemplo 7.1) considerando as condições estabelecidas nas Equações (7.5) e (7.8). O exemplo adotado consiste na aplicação de um MPC a um processo de primeira ordem com ganho igual a 1 e constante de tempo igual a 4. O modelo utilizado pelo controlador foi idêntico ao do processo real, a não ser pelo ganho, que neste caso foi igual a 0.1 (ou seja,  $K = 0.1$ ). Os horizontes de controle e previsão foram iguais a 30 e 50, respectivamente. Como sintonia base, foram adotados os valores de  $Q = 1$  e  $R = 0.001$ . Com estes dados é possível calcular as condições da Equação (7.5) e (7.8), dadas pelas Equações (7.9) e (7.10), respectivamente.

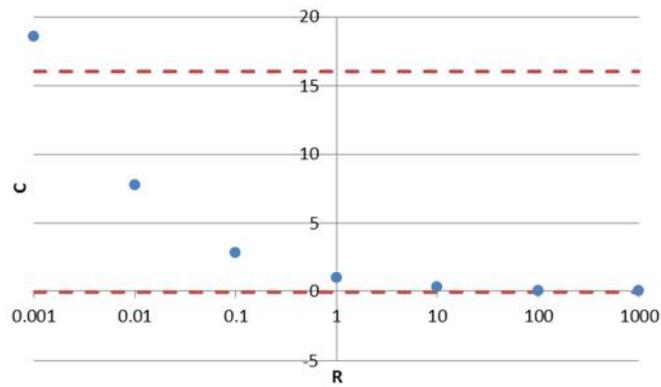
$$-0.0624 < C < 16.0208 \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} -1 < C < 17.0832 \quad e \\ -9.3e^{15} < C < 2.6e^{15} \end{aligned} \quad (7.10)$$

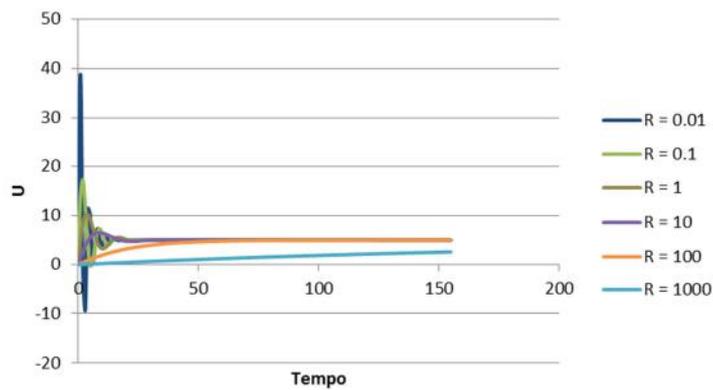
Neste exemplo, a interseção entre a condição imposta pela Equação (7.9) e as condições impostas pela Equação (7.10) coincide com a condição dada pela Equação (7.9); portanto, para o problema proposto seria indicado utilizar um controlador com  $-0.0624 < C < 16.0208$ . Com o valor de sintonia base deste exemplo, o valor de  $C$  é igual a 18.53, que está fora da faixa adequada. De fato, como pode ser observado na Figura 7.1, ao utilizar esta sintonia, o controlador fica instável. Na Figura 7.2 é mostrada a influência do parâmetro de sintonia  $R$  no valor de  $C$ , que caracteriza o controlador. O exemplo foi testado com diferentes sintonias (parâmetros  $R$ ) e os resultados podem ser observados nas Figuras 7.3 e 7.4.



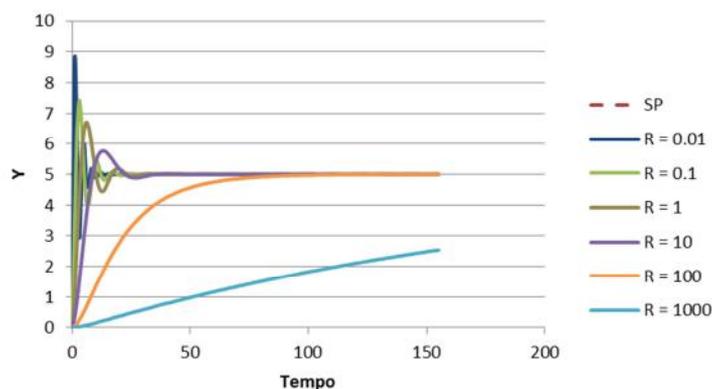
**Figura 7.1.** Comportamento das variáveis manipulada e controlada com sintonia  $R = 0.001$  no Exemplo 7.1.



**Figura 7.2.** Sensibilidade do valor de  $C$  ao parâmetro  $R$  no Exemplo 7.1.

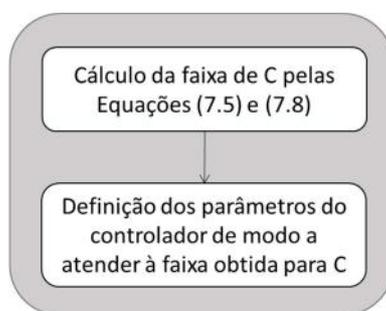


**Figura 7.3.** Sensibilidade das ações de controle à sintonia no Exemplo 7.1.



**Figura 7.4.** Sensibilidade da variável controlada à sintonia no Exemplo 7.1.

Como pode ser observado na Figura 7.2, dentre as sintonias testadas, o único valor do parâmetro de sintonia  $R$  para o qual o valor de  $C$  ultrapassou os limites estabelecidos pela Equação (7.9) foi  $R = 0.001$ . Portanto, este foi o único valor de parâmetro de sintonia para o qual o sistema foi instável (Figura 7.1). Para as outras sintonias adotadas, os resultados variaram, conforme mostram as Figuras 7.3 e 7.4. Para  $R = 1000$ , o valor de  $C$  já é mais próximo do limite inferior dado pela Equação (7.9), tendo sido observado um comportamento bem mais lento, embora estável. A Figura 7.5 sintetiza e ilustra a metodologia proposta.



**Figura 7.5.** Metodologia simplificada para projeto de controladores baseada em aproximação para erro por fator multiplicativo do ganho.

Algumas vezes, a aproximação da Equação (7.1) pode ser excessiva. Por isso, o mais recomendado seria estabelecer uma condição para o projeto do controlador considerando diretamente a Equação (6.34) ou a Equação (6.35), ao invés das Equações (7.2) ou (7.3), que fazem uso da aproximação proposta pela Equação (7.1). Assim, reproduzindo as condições para a Equação (6.34), tem-se:

$$\Delta = (X_1 - 1 - r)^2 - 4(r - rX_1 + X_2 - X_1) \quad \text{ou} \quad (7.11)$$

$$\Delta = X_1^2 + 2X_1 + 2rX_1 - 4X_2 + (1 - r)^2$$

Quando  $\Delta < 0$ , a Equação (6.34) não apresenta raízes reais. Pode-se verificar que esta condição é satisfeita se a desigualdade da Equação (7.12) é válida.

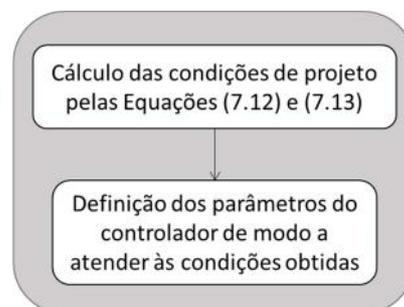
$$X_1^2 + 2X_1 + 2rX_1 - 4X_2 + (1 - r)^2 < 0 \quad (7.12)$$

Da mesma forma que feito anteriormente, considerando que as raízes assumem a forma geral de raízes complexas, a Equação (7.6) e as condições da Equação (7.7) continuam válidas.

Comparando então a Equação (7.6) com a Equação (6.34) e aplicando as condições da Equação (7.7) na Equação (6.34), chega-se às condições da Equação (7.13).

$$\begin{aligned} -2 < (X_1 - 1 - r) < 2 \quad \text{e} \\ 0 < (r - rX_1 + X_2 - X_1) < 1 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Assim, uma heurística um pouco mais rigorosa para projetar o controlador deve buscar atender às condições das Equações (7.12) e (7.13), conforme representado na Figura 7.6, em vez das condições dadas pelas Equações (7.5) e (7.8). O procedimento proposto para ajudar a projetar os controladores é eficiente para evitar regiões instáveis, desde que as hipóteses adotadas sejam atendidas. Nas Seções 0 e 7.4, são propostas metodologias mais genéricas para projeto e sintonia de controladores, com foco não somente na estabilidade, mas também no desempenho do sistema em malha fechada.



**Figura 7.6.** Metodologia para projeto de controladores baseada em aproximação para erro por fator multiplicativo do ganho.

### 7.2.2 Baseado em Índice

Na Seção 6.4.1 foi utilizado um exemplo para calcular a região de confiança dos polos do sistema em malha fechada na presença de erros de medição na variável controlada e, conseqüentemente, na presença de erros no modelo utilizado pelo controlador, estimado a partir de dados de teste.

Este exemplo mostrou como o cálculo dos polos do sistema em malha fechada possui potencial para prever o comportamento do sistema de controle. Porém, para obter a região de confiança, o procedimento utilizado consistia em realizar um elevado número de simulações, conforme representado pela Figura 4.14, o que, de fato, não é possível de se executar em uma planta de processo real. Neste caso, estratégias convencionais baseadas no cálculo da matriz de informação de Fisher devem ser implementadas para a caracterização das incertezas nos parâmetros do modelo (SCHWAAB e PINTO, 2007).

Assim, se apenas uma identificação for realizada, então as incertezas dos parâmetros calculadas por métodos estatísticos devem ser usadas para calcular os polos do sistema em malha fechada e orientar o projeto do controlador. Esta questão é explorada em um exemplo a seguir para melhor entendimento.

O processo utilizado neste exemplo é o mesmo da Seção 4.2, podendo ser representado por um modelo de primeira ordem com tempo morto com ganho igual a 10, constante de tempo igual a 4 e tempo morto de 3. É importante ressaltar que, para todos os cálculos propostos, este modelo é representado por um modelo de resposta ao degrau. Os erros na variável controlada  $Y$  também foram os mesmos adotados na Seção 4.2.

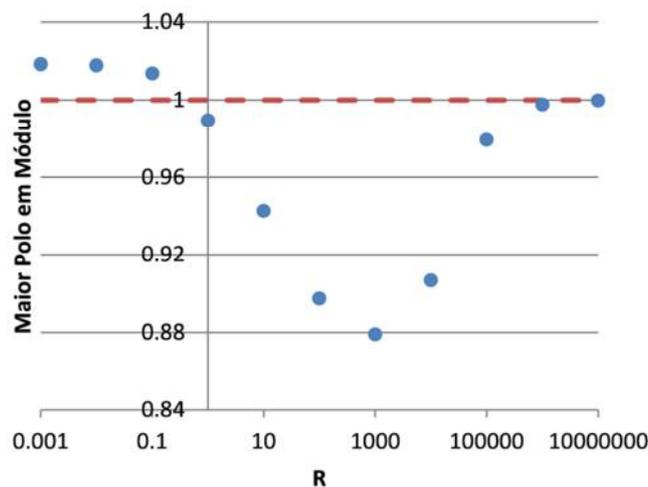
Neste exemplo, o parâmetro de sintonia  $Q$  foi mantido fixo em 1 e o parâmetro  $R$  será definido com base no valor do maior polo do sistema em malha fechada em módulo (índice proposto na Seção 6.6).

Quando um modelo de resposta ao degrau com 30 coeficientes é estimado a partir de dados obtidos pela aplicação de um teste simples, conforme o projeto de testes 1 (descrito na Seção 4.2.1 e na Figura 4.7), e considerando o cenário de erros na variável controlada descrito na Seção 4.2, é possível calcular a variância de cada

parâmetro estimado através de ferramentas estatísticas (SCHWAAB e PINTO, 2007). Assim, neste exemplo, a variância dos parâmetros é igual a  $2.5 \times 10^{-3}$ .

Baseado na variância dos parâmetros estimados, cada parâmetro do processo real foi aleatoriamente perturbado para gerar um modelo incerto a ser utilizado pelo sistema de controle.

Neste cenário, os polos do sistema de controle em malha fechada foram calculados para diferentes valores do parâmetro de sintonia  $R$ . Em particular, o maior polo em módulo ( $IndM4$ ) foi analisado para diferentes valores de  $R$ .

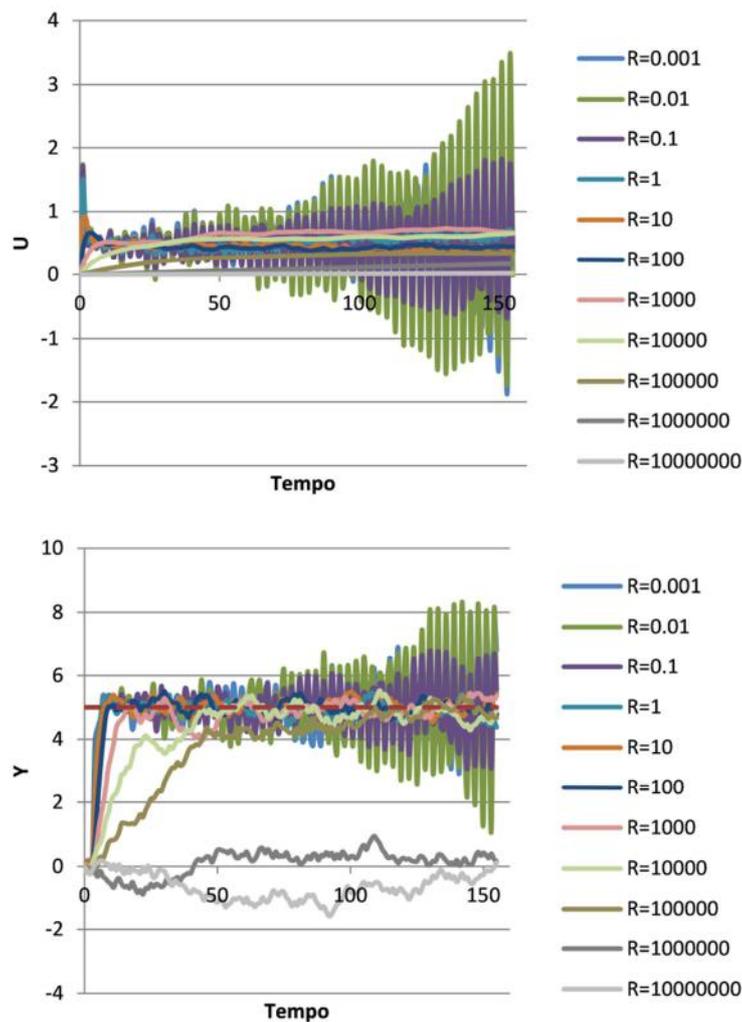


**Figura 7.7.** Maior polo em módulo para diferentes valores de  $R$ .

É possível observar na Figura 7.7 que o maior polo em módulo é maior que 1 para valores de  $R$  menores que 1 neste exemplo. Isto indica comportamento instável e deve ser evitado. Por outro lado, quando  $R$  é maior que  $10^6$ , o maior polo em módulo é muito próximo ou igual a 1, o que indica comportamento excessivamente lento e também deve ser evitado.

Assim, a análise proposta, baseada no polo de maior módulo, sugere que uma faixa adequada para o parâmetro de sintonia  $R$  poderia ser entre 1 e  $10^5$ . Este resultado é confirmado pela resposta em malha fechada obtida para diferentes valores de  $R$  (Figura 7.8). Em especial, analisando a faixa recomendada para sintonia, pode-se afirmar que: i) ao adotar o menor valor desta faixa ( $R = 1$ ), trabalha-se com a sintonia mais rápida possível que não chegue a causar instabilidade, dentro do cenário de erros de modelagem projetado, o que significa que se os erros de modelagem reais forem maiores, há o risco de comprometer a estabilidade; ii) ao adotar o maior valor da faixa

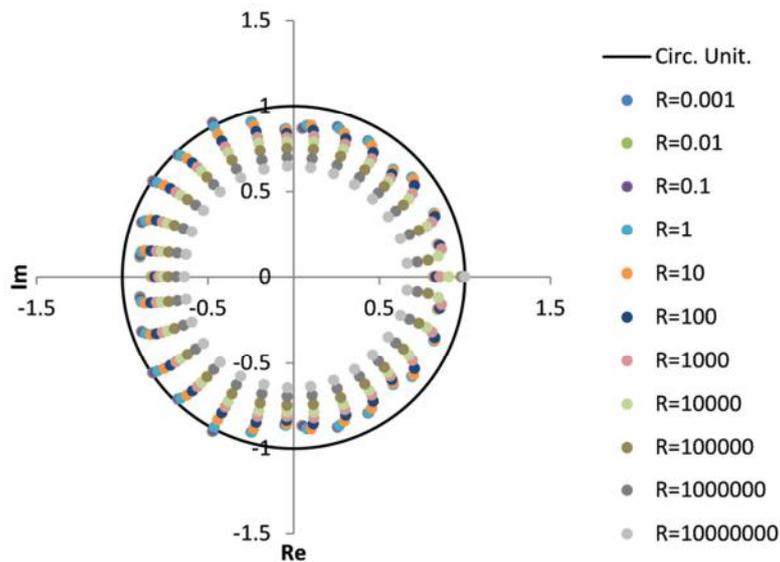
( $R = 10^5$ ), opta-se por trabalhar com a sintonia mais conservadora em que a resposta não se torna excessivamente lenta, sendo o cenário indicado caso haja suspeita de que os erros de modelagem reais são bastante superiores aos utilizados no projeto; iii) utilizando o valor da faixa correspondente ao valor mínimo do maior polo em módulo ( $R = 1000$ ), tem-se uma solução de compromisso, capaz de absorver erros de modelagem um pouco maiores que os projetados, mas sem comprometer a velocidade de resposta do processo.



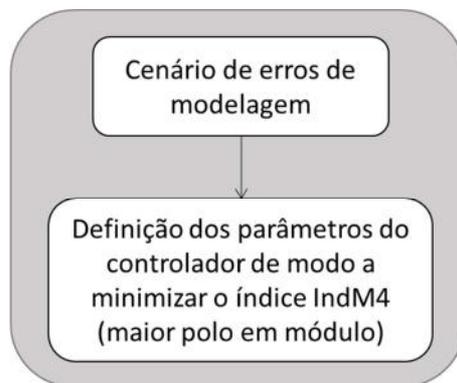
**Figura 7.8.** Resposta em malha fechada das variáveis manipulada e controlada para diferentes valores de  $R$ .

Além disso, todos os polos do sistema em malha fechada podem ser observados na Figura 7.9, embora o índice proposto (maior polo em módulo) tenha mostrado ser

suficiente para definir a sintonia neste exemplo. A Figura 7.10 ilustra o procedimento proposto para sintonia baseada em índice.



**Figura 7.9.** Polos do sistema em malha fechada para diferentes valores de  $R$ .

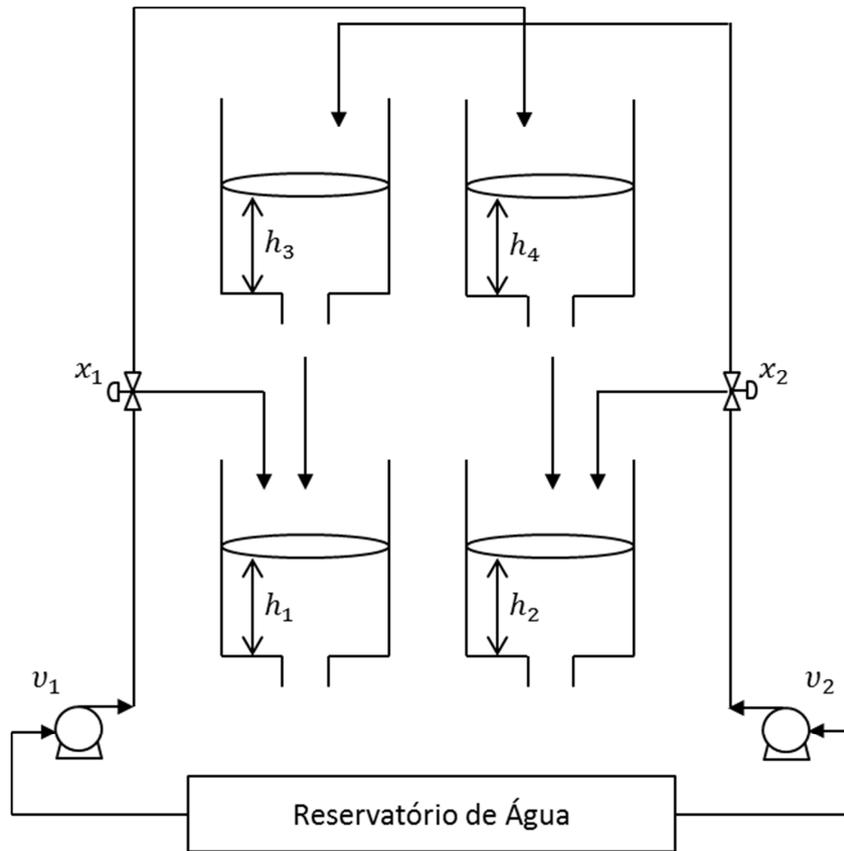


**Figura 7.10.** Metodologia para sintonia de controladores baseada em índice.

### 7.3 Análise de um processo baseado em quatro tanques

Para definição e aplicação das metodologias a serem desenvolvidas, foi selecionado um exemplo da literatura que apresenta algumas das complexidades de plantas reais de processo. O exemplo escolhido foi o controle de um sistema que envolve quatro tanques de mistura (JOHANSSON, 2000; BOTELHO *et al.*, 2016), denominado neste trabalho como Exemplo 7.2. O sistema é composto por quatro

tanques cilíndricos interconectados, conforme mostra a Figura 7.11 e descrito pela Equação (7.14).



**Figura 7.11.** Processo ilustrativo baseado em quatro tanques de mistura.

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{cd_1}{A_1}(h_1)^{exp1} + \frac{cd_3}{A_1}(h_3)^{exp3} + \frac{x_1 k_1}{A_1} v_1 \\
 \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{cd_2}{A_2}(h_2)^{exp2} + \frac{cd_4}{A_2}(h_4)^{exp4} + \frac{x_2 k_2}{A_2} v_2 \\
 \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{cd_3}{A_3}(h_3)^{exp3} + \frac{(1-x_2)k_2}{A_3} v_2 \\
 \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{cd_4}{A_4}(h_4)^{exp4} + \frac{(1-x_1)k_1}{A_4} v_1
 \end{aligned}
 \tag{7.14}$$

Na Equação (7.14),  $h_i$  é o nível do tanque  $i$ ,  $k_i v_i$  é a vazão de saída da bomba  $i$ ,  $A_i$  é a área transversal do tanque  $i$ ,  $cd_i$  são os coeficientes de descarga e  $exp_i$  são os expoentes de descarga.

Os valores dos parâmetros necessários para uso da Equação (7.14) podem ser observados na Tabela 7.1 (BOTELHO *et al.*, 2016).

**Tabela 7.1.** Parâmetros do Exemplo 7.2

Parâmetro	Valor
$A_1$	28 cm <sup>2</sup>
$A_2$	32 cm <sup>2</sup>
$A_3$	28 cm <sup>2</sup>
$A_4$	32 cm <sup>2</sup>
$cd_1$	3.145 cm <sup>2.5</sup> /s
$cd_2$	2.525 cm <sup>2.5</sup> /s
$cd_3$	3.145 cm <sup>2.5</sup> /s
$cd_4$	2.525 cm <sup>2.5</sup> /s
$k_1$	3.14 cm <sup>3</sup> /Vs
$k_2$	3.29 cm <sup>3</sup> /Vs
$exp1$	0.5
$exp2$	0.5
$exp3$	0.5
$exp4$	0.5

Neste exemplo, há quatro variáveis controladas (níveis dos tanques) e quatro variáveis manipuladas (voltagens de duas bombas e aberturas de duas válvulas). O sistema a ser controlado neste exemplo é não linear, com considerável variação de magnitude dos ganhos dos modelos. O modelo linear utilizado pelo controlador (Equação (7.15)) foi identificado em torno do ponto de operação, com  $v_1 = 3.2$ ,  $v_2 = 3.15$ ,  $x_1 = 0.43$  e  $x_2 = 0.34$  (BOTELHO *et al.*, 2016).

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.048}{s+0.016} & \frac{0.0025}{s^2+0.028s+0.0002} & \frac{0.35}{s+0.015} & \frac{-0.0096}{s^2+0.41s+0.0004} \\ \frac{0.0009}{s+0.016} & \frac{0.035}{s+0.011} & \frac{-0.0055}{s^2+0.024s+0.0002} & \frac{0.323}{s+0.011} \\ 0 & \frac{0.078}{0.028s+0.25} & 0 & \frac{-0.37}{s+0.026} \\ \frac{0.045}{s+0.018} & 0 & \frac{-0.31}{s+0.018} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

A partir do ponto de operação nominal, foi realizada uma análise de sensibilidade para cada uma das variáveis manipuladas, com o objetivo de verificar a não linearidade nos ganhos dos modelos que relacionam cada par de variáveis manipulada e controlada. Os resultados podem ser verificados na Tabela 7.2.

**Tabela 7.2.** Análise de sensibilidade dos ganhos no Exemplo 7.2

Manipulada	Ganhos Controladas			
	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$
$v_1$				
2.2	2.59	3.94	0	1.96
2.7	2.77	4.44	0	2.46
3.2	2.95	4.94	0	2.96
3.7	3.14	5.45	0	3.47
4.2	3.32	5.95	0	3.97
4.7	3.51	6.45	0	4.47
5.2	3.69	6.95	0	4.97
$v_2$				
2.15	3.71	2.76	1.81	0
2.65	4.19	2.95	2.29	0
3.15	4.66	3.15	2.76	0
3.65	5.14	3.34	3.24	0
4.15	5.62	3.54	3.72	0
4.65	6.09	3.74	4.19	0
5.15	6.57	3.93	4.67	0
$x_1$				
0.23	17.57	-37.08	0	-25.97
0.33	19.61	-33.91	0	-22.80
0.43	21.65	-30.74	0	-19.64
0.53	23.70	-27.58	0	-16.47
0.63	25.74	-24.41	0	-13.30
0.73	27.78	-21.24	0	-10.13
0.83	29.82	-18.07	0	-6.97
$x_2$				
0.14	-28.82	21.65	-19.76	0
0.24	-26.64	25.02	-17.59	0
0.34	-24.47	28.39	-15.42	0
0.44	-22.30	31.76	-13.25	0
0.54	-20.13	35.13	-11.08	0
0.64	-17.96	38.50	-8.90	0
0.74	-15.79	41.87	-6.73	0

Recalculando os ganhos da Tabela 7.2 na forma de fatores de multiplicação de um modelo base, para um ponto de operação nominal, obtêm-se os fatores da Tabela 7.3.

**Tabela 7.3.** Análise de sensibilidade dos ganhos na forma de fatores multiplicativos no Exemplo 7.2

<b>Manipulada</b>	<b>Fatores Controladas</b>			
	<b><math>h_1</math></b>	<b><math>h_2</math></b>	<b><math>h_3</math></b>	<b><math>h_4</math></b>
<b><math>v_1</math></b>				
2.2	0.88	0.80	0	0.66
2.7	0.94	0.90	0	0.83
3.2	1.00	1.00	0	1.00
3.7	1.06	1.10	0	1.17
4.2	1.12	1.20	0	1.34
4.7	1.19	1.30	0	1.51
5.2	1.25	1.41	0	1.68
<b><math>v_2</math></b>	<b><math>h_1</math></b>	<b><math>h_2</math></b>	<b><math>h_3</math></b>	<b><math>h_4</math></b>
2.15	0.80	0.88	0.66	0
2.65	0.90	0.94	0.83	0
3.15	1.00	1.00	1.00	0
3.65	1.10	1.06	1.17	0
4.15	1.20	1.12	1.34	0
4.65	1.31	1.19	1.52	0
5.15	1.41	1.25	1.69	0
<b><math>x_1</math></b>	<b><math>h_1</math></b>	<b><math>h_2</math></b>	<b><math>h_3</math></b>	<b><math>h_4</math></b>
0.23	0.81	1.21	0	1.32
0.33	0.91	1.10	0	1.16
0.43	1.00	1.00	0	1.00
0.53	1.09	0.90	0	0.84
0.63	1.19	0.79	0	0.68
0.73	1.28	0.69	0	0.52
0.83	1.38	0.59	0	0.35
<b><math>x_1</math></b>	<b><math>h_1</math></b>	<b><math>h_2</math></b>	<b><math>h_3</math></b>	<b><math>h_4</math></b>
0.14	1.18	0.76	1.28	0
0.24	1.09	0.88	1.14	0
0.34	1.00	1.00	1.00	0
0.44	0.91	1.12	0.86	0
0.54	0.82	1.24	0.72	0
0.64	0.73	1.36	0.58	0
0.74	0.65	1.47	0.44	0

## 7.4 Sintonia de MPC

Conforme comentado nos Capítulos 2 e 3, a sintonia de controladores preditivos ainda constitui um assunto que merece atenção, já que as técnicas existentes nem sempre são facilmente aplicáveis a problemas práticos. Por isso, a seguir é proposta uma

metodologia para a sintonia de controladores preditivos com base na teoria desenvolvida e, principalmente, no acompanhamento do índice *IndM4* (maior polo em módulo).

Considerando os fatores apresentados na Tabela 7.3, os erros de modelagem neste exemplo são dados por fatores que variam entre 0.4 e 1.7. Para simplificar, será considerado um caso em que todos os modelos podem estar sujeitos a erros nesta faixa, que é a mais ampla dentro das variações verificadas na análise de sensibilidade.

Em seguida, a metodologia desenvolvida foi utilizada para calcular os índices *IndM1*, *IndM2*, *IndM3* e *IndM4* para diferentes parâmetros de sintonia partindo do modelo nominal (Equação (7.15)). Mais uma vez, para simplificar, os parâmetros de sintonia referentes às variáveis controladas (*Q*) foram mantidos constantes e iguais a 1, enquanto os parâmetros de sintonia referentes às variáveis manipuladas, ou supressões de movimento (*R*), foram alterados simultaneamente em algumas ordens de grandeza. Os resultados foram gerados sem erros de modelagem e com erros de modelagem caracterizados por fatores iguais aos extremos da faixa de erros obtida (0.4 e 1.7).

Os resultados da sensibilidade dos índices à sintonia podem ser observados nas Tabelas 7.4 a 7.6 e Figuras 7.12 a 7.14.

**Tabela 7.4.** Sensibilidade à sintonia sem erro de modelagem no Exemplo 7.2

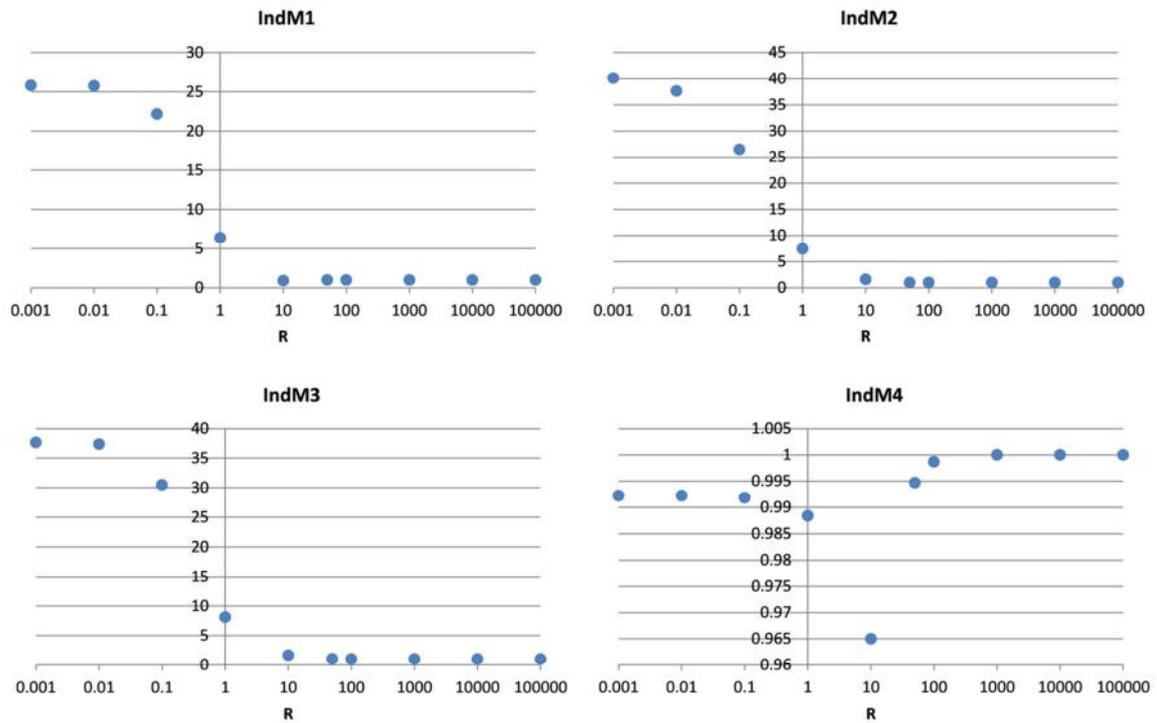
<i>R</i>	<i>IndM1</i>	<i>IndM2</i>	<i>IndM3</i>	<i>IndM4</i>
0.001	25.8148	40.1386	37.6558	0.9922
0.01	25.7512	37.6246	37.3859	0.9922
0.1	22.1663	26.4742	30.484	0.9918
1	6.3729	7.4417	8.0949	0.9884
10	0.9172	1.6064	1.6199	0.965
50	0.9947	1.0109	1.02	0.9947
100	0.9987	1.0052	1.0101	0.9987
1000	1	1.0001	1.0002	1
10000	1	1	1	1
100000	1	1	1	1

**Tabela 7.5.** Sensibilidade à sintonia considerando erros de modelagem por fator de 1.7  
no Exemplo 7.2

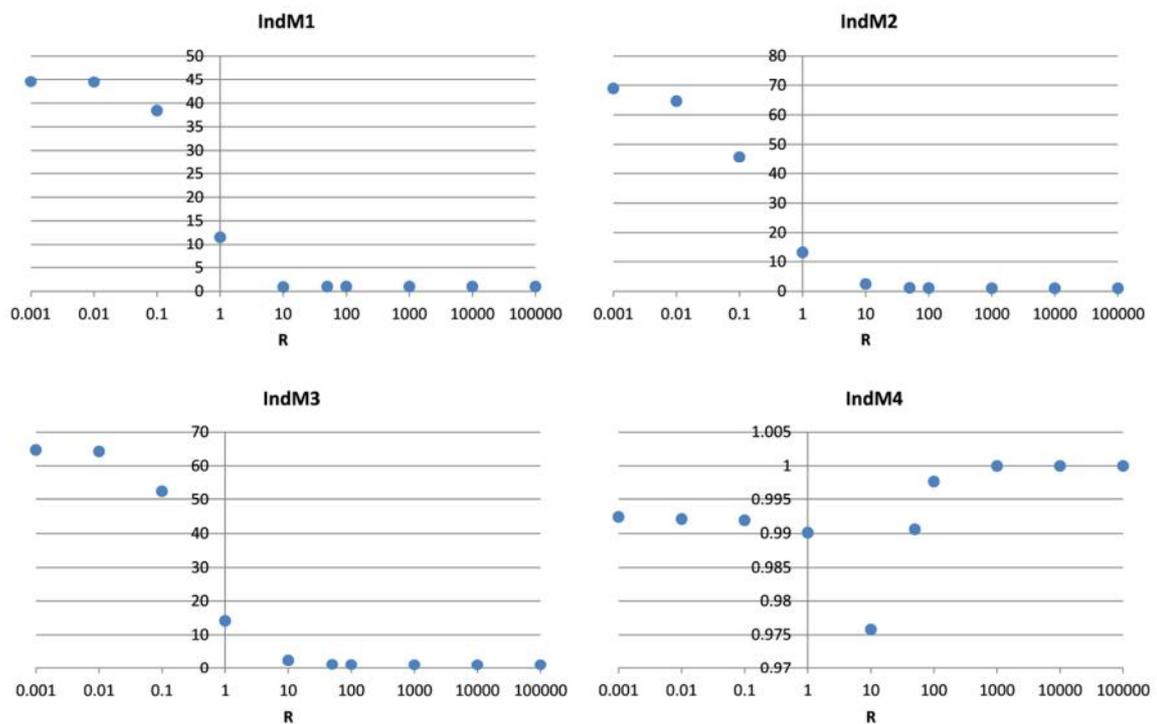
<b><i>R</i></b>	<b><i>IndM1</i></b>	<b><i>IndM2</i></b>	<b><i>IndM3</i></b>	<b><i>IndM4</i></b>
0.001	44.5851	68.9355	64.7148	0.9924
0.01	44.477	64.6618	64.256	0.9921
0.1	38.3828	45.6998	52.5228	0.9919
1	11.5339	13.0752	14.1074	0.9901
10	0.8951	2.4114	2.4127	0.9758
50	0.9911	1.1344	1.1321	0.9906
100	0.9977	1.0558	1.0555	0.9977
1000	1	1.0011	1.0011	1
10000	1	1	1	1
100000	1	1	1	1

**Tabela 7.6.** Sensibilidade à sintonia considerando erros de modelagem por fator de 0.4  
no Exemplo 7.2

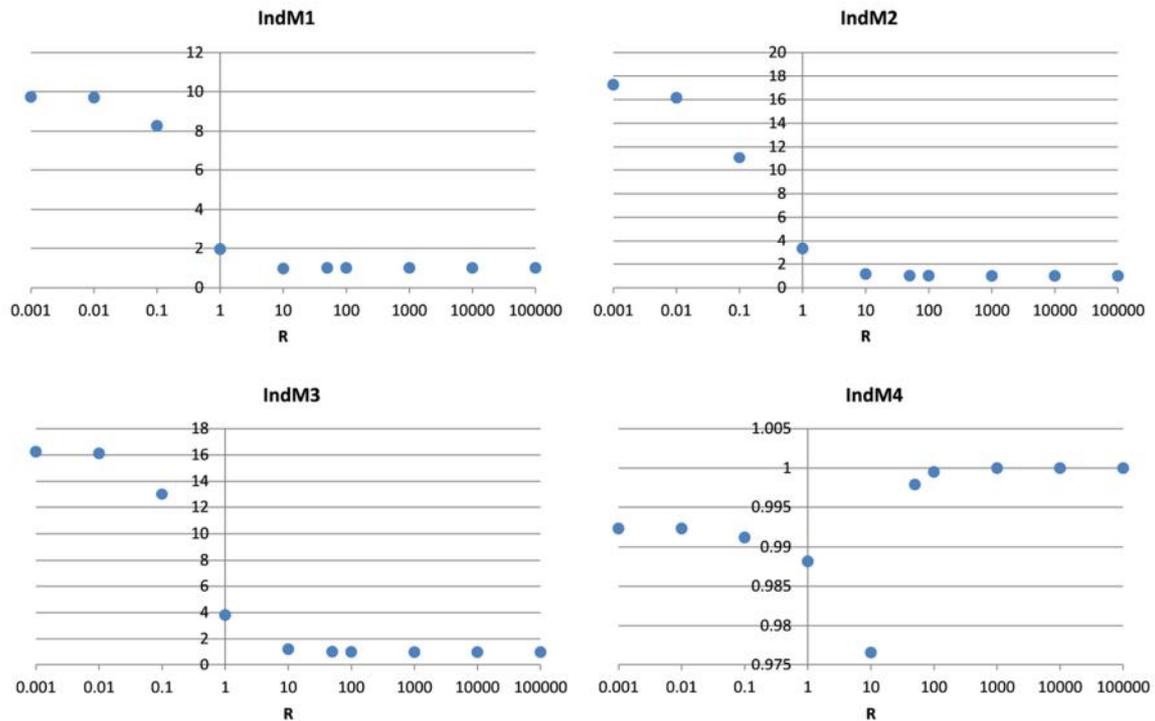
<b><i>R</i></b>	<b><i>IndM1</i></b>	<b><i>IndM2</i></b>	<b><i>IndM3</i></b>	<b><i>IndM4</i></b>
0.001	9.7259	17.2528	16.2446	0.9923
0.01	9.7005	16.138	16.1191	0.9923
0.1	8.2665	11.0654	12.9954	0.9912
1	1.9492	3.3145	3.8017	0.9882
10	0.9669	1.1527	1.2197	0.9766
50	0.9979	1.0165	1.023	0.9979
100	0.9995	1.0078	1.0124	0.9995
1000	1	1.0001	1.0002	1
10000	1	1	1	1
100000	1	1	1	1



**Figura 7.12.** Comportamento dos índices em um cenário de ausência de erros de modelagem (Exemplo 7.2).



**Figura 7.13.** Comportamento dos índices em um cenário de erros de modelagem por um fator de 1.7 (Exemplo 7.2).



**Figura 7.14.** Comportamento dos índices em um cenário de erros de modelagem por um fator de 0.4 (Exemplo 7.2).

As Tabelas 7.4 a 7.6 e Figuras 7.12 a 7.14 fornecem uma ideia de como a sintonia influencia os índices estudados. Os índices *IndM1* e *IndM4* apresentaram um ponto de mínimo para  $R = 10$  em todos os casos (na presença ou ausência de erros de modelagem), conforme destacado nas tabelas. Este comportamento também pode ser notado nos gráficos, em especial para o *IndM4*. A visualização gráfica do ponto de mínimo para o *IndM1* é dificultada pela ampla escala de variação deste índice ao longo dos valores de sintonia testados.

Focando no índice *IndM4* e em seu significado teórico, parece interessante trabalhar com a sintonia em que o valor deste índice é mínimo. Isto porque sintonias mais agressivas que esta podem deixar o sistema mais oscilatório e até mesmo instável. Por outro lado, trabalhar com sintonias mais lentas pode ser desnecessário e/ou ineficiente.

Neste exemplo o valor de sintonia em que o valor de *IndM4* é mínimo no caso nominal, com modelo perfeito, coincidiu com os pontos de mínimo nos casos em que os erros de modelagem foram considerados. Na análise de sensibilidade realizada, os parâmetros de sintonia  $R$  foram alterados simultaneamente para facilitar a análise. No entanto, se a intenção for encontrar o valor de sintonia cujo valor leva ao mínimo valor

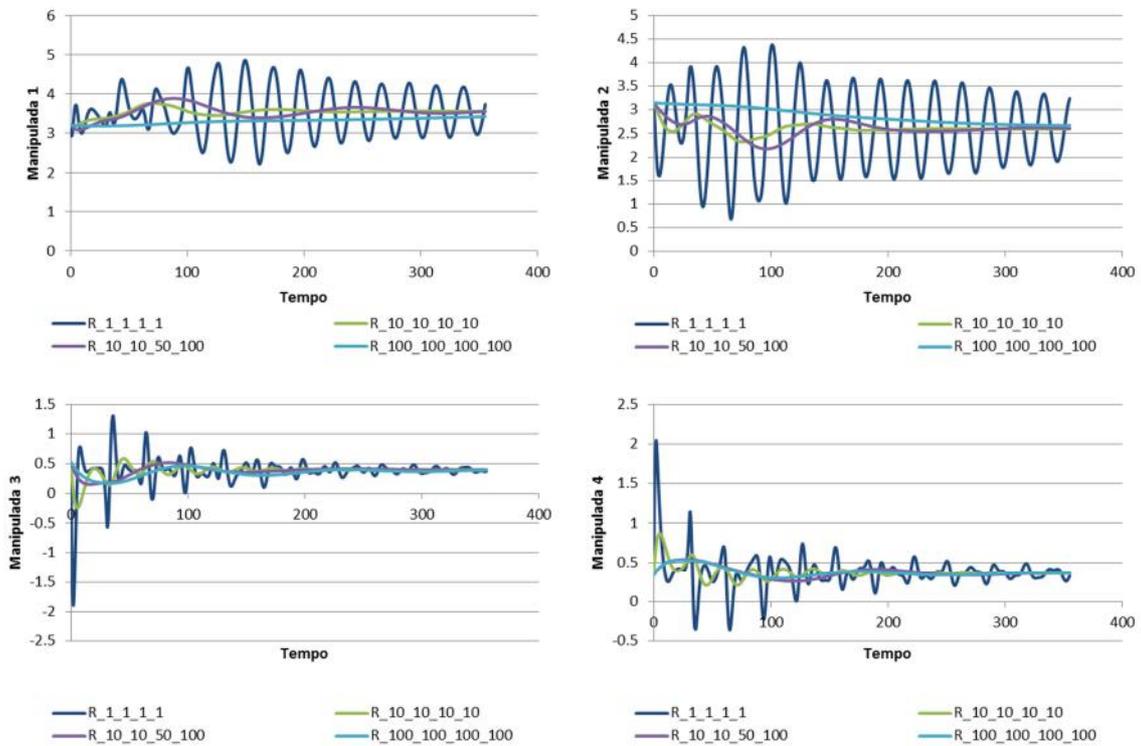
de  $IndM4$ , seria interessante variar a supressão de movimento de cada variável manipulada independentemente e também os parâmetros de sintonia  $Q$ , que ponderam a importância das variáveis controladas.

Ainda neste exemplo, foram executadas simulações variando os valores das supressões de movimento de cada variável manipulada, mantendo os parâmetros de sintonia  $Q$  fixos. Chegou-se, desta forma, empregando tentativa e erro, a um conjunto de parâmetros de sintonia  $R = [10 \ 10 \ 50 \ 100]$  capaz de fornecer um valor ainda mais baixo do índice  $IndM4$ . A sintonia que minimiza o valor do índice  $IndM4$  pode, ainda, ser calculada de modo mais eficiente com o uso de algoritmos de otimização.

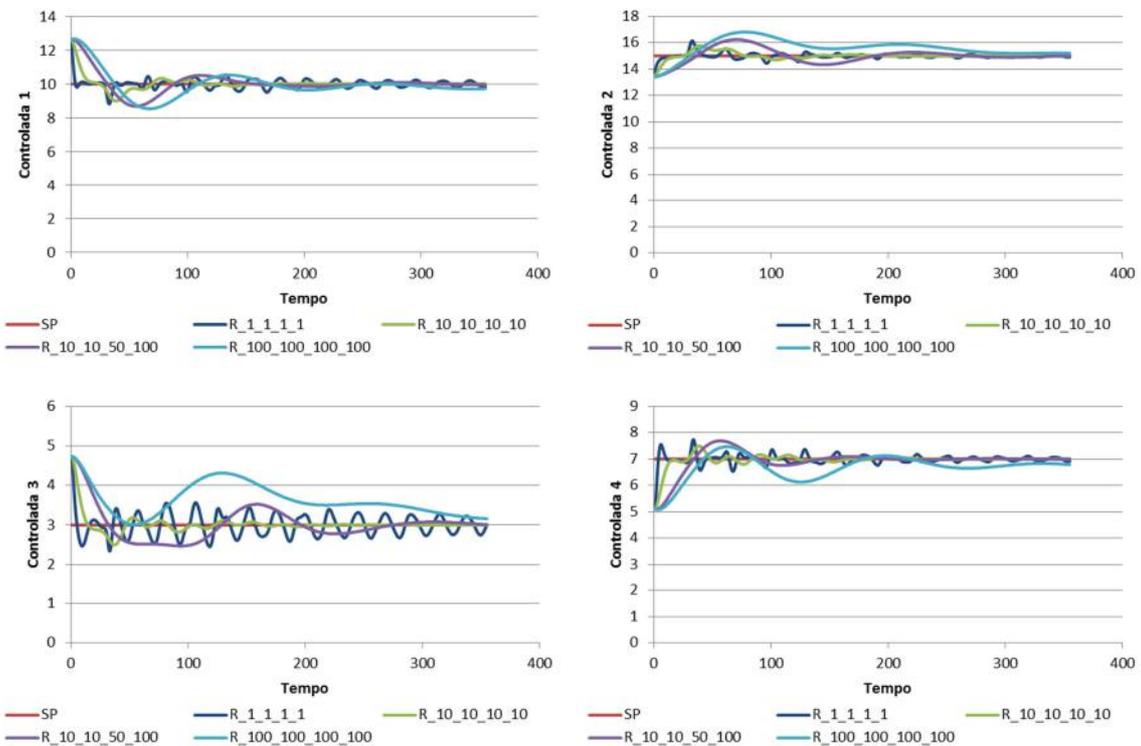
Com o objetivo de verificar o comportamento do processo ao empregar diferentes valores de sintonia (em termos do parâmetro  $R$ ), o MPC foi aplicado ao problema proposto, sendo a planta calculada pelo modelo não linear rigoroso da Equação (7.14), ao passo que o modelo utilizado pelo controlador foi o modelo nominal dado pela Equação (7.15). Assim, foi simulado por 355 minutos um cenário de mudança de *setpoint* das quatro variáveis controladas do problema. Os horizontes de controle e predição adotados foram iguais a 10 e 30, respectivamente, e os parâmetros de sintonia  $Q$  foram mantidos fixos em 1 para todas as controladas. Os parâmetros que caracterizam cenário e a sintonia controlador foram escolhidos arbitrariamente apenas de modo que a ordem de grandeza fizesse sentido em relação à dinâmica do processo baseado em quatro tanques. Os resultados da simulação podem ser observados na Figura 7.15 para as quatro variáveis manipuladas e na Figura 7.16 para as quatro variáveis controladas, em função das diferentes sintonias propostas.

O comportamento das variáveis manipuladas e controladas neste exemplo confirmam a análise realizada anteriormente. Assim, utilizando uma sintonia agressiva, com valores baixos para a supressão de movimento ( $R = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ ), é observado um comportamento bastante oscilatório para todas as variáveis envolvidas. Ao utilizar uma sintonia um pouco mais lenta, com parâmetros  $R = [10 \ 10 \ 10 \ 10]$ , já pode ser observada uma melhora significativa no comportamento das variáveis, com considerável redução das oscilações. Adotando a sintonia que no processo de tentativa e erro minimizou o valor do índice  $IndM4$  ( $R = [10 \ 10 \ 50 \ 100]$ ), nota-se o melhor desempenho dentre todos os cenários testados, com um comportamento bem menos oscilatório, porém ainda capaz de alcançar os *setpoints* em um período de tempo razoável. Ao utilizar uma sintonia mais lenta, com valores altos para a supressão de movimento

( $R = [100 \ 100 \ 100 \ 100]$ ), o comportamento do controlador fica excessivamente lento e as variáveis demoram muito tempo para alcançar seus *setpoints*.

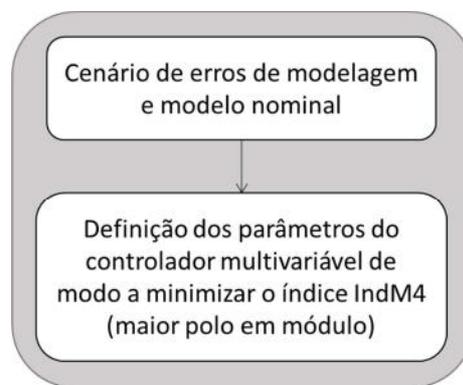


**Figura 7.15.** Variáveis manipuladas do Exemplo 7.2 com diferentes sintonias do MPC.



**Figura 7.16.** Variáveis controladas do Exemplo 7.2 com diferentes sintonias do MPC.

Assim, pode-se afirmar que mesmo em um cenário em que os erros de modelagem estão presentes, a sintonia  $R = [100 \ 100 \ 100 \ 100]$  foi demasiadamente lenta, enquanto a sintonia que minimiza o índice  $IndM4$  apresentou o comportamento mais satisfatório em termos de compromisso entre rapidez e robustez aos erros de modelagem encontrados pelo MPC. Vislumbra-se, desta forma, que o índice  $IndM4$  proposto pode constituir uma métrica interessante para a sintonia de controladores preditivos, como ilustram os resultados deste exemplo. A Figura 7.17 representa a metodologia de sintonia proposta nesta Seção.



**Figura 7.17.** Metodologia para sintonia de controladores baseada em índice em um sistema multivariável.

## 7.5 Determinação de modelos relevantes

Em sistemas de MPC pode ser elevado o número de variáveis manipuladas e controladas, especialmente em aplicações práticas industriais. Como cada par formado por variável manipulada e controlada é caracterizado por um modelo que as relaciona, é comum a necessidade de identificar e lidar com um elevado número de modelos. Além das ordens de grandeza dos modelos e da influência que outros modelos exercem sobre as várias variáveis do problema, o próprio processo de sintonia do controlador pode fazer com que alguns dos modelos considerados percam ou ganhem importância. No entanto, baseado apenas na avaliação da matriz de modelos, da sintonia ou do comportamento do controlador em malha fechada em algumas simulações, não é trivial analisar e chegar à conclusão de quais modelos definem o bom desempenho do controlador e de quais modelos afetam pouco as ações de controle.

Por isso, pretende-se propor uma metodologia capaz de avaliar a relevância dos modelos nos cálculos do controlador em um determinado cenário de sintonia por meio do uso da análise teórica desenvolvida e, em especial, do índice  $IndM4$ . A nova metodologia proposta para tal consiste em anular um modelo por vez na matriz de modelos utilizados pelo controlador e calcular o índice  $IndM4$  na nova condição, comparando o valor obtido com o valor original, obtido com a matriz de modelos completa. Durante todo o procedimento, o processo real continua sendo representado pela matriz de modelos original, sem a anulação de qualquer modelo.

Quando a anulação de um modelo específico da matriz de modelos utilizados pelo controlador provoca uma alteração grande do valor do índice  $IndM4$ , em comparação com o problema original, isto significa que o modelo analisado é essencial para o bom funcionamento do controlador na condição de sintonia utilizada, uma vez que o índice  $IndM4$  é sensível à sintonia do controlador. Por outro lado, quando a anulação de um modelo não afeta ou afeta muito pouco o valor de  $IndM4$ , isso pode significar que o modelo analisado não é essencial para o bom desempenho do controlador no cenário de sintonia adotado.

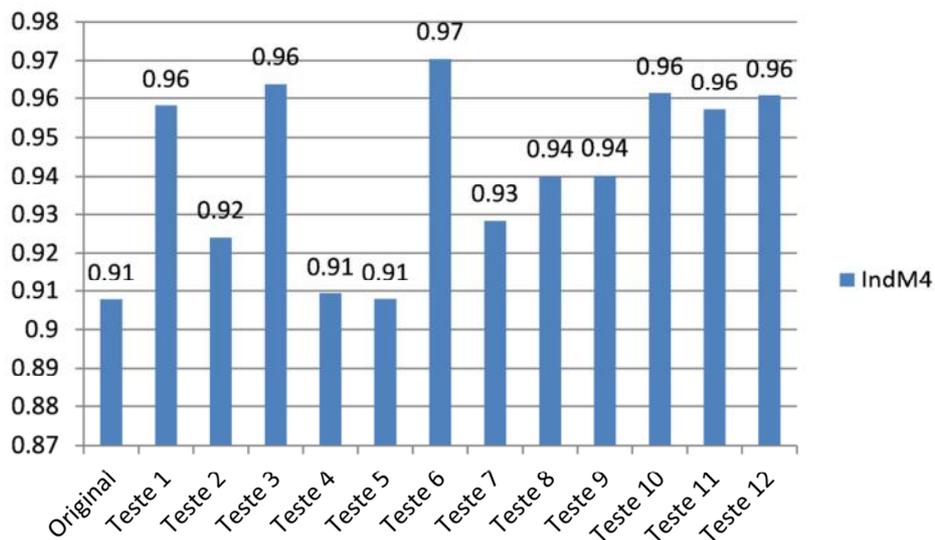
O conhecimento da relevância dos modelos pode ser bastante útil para identificação ou reidentificação do processo, pois é capaz de orientar que modelos são mais importantes e, portanto, devem receber mais atenção do analista. Além disso, dependendo do algoritmo de controle utilizado, a anulação de modelos considerados menos relevantes pode facilitar os cálculos do controlador e reduzir o esforço computacional, ao resolver um problema esparso.

A metodologia proposta foi avaliada no Exemplo 7.2, formado por quatro tanques de mistura, conforme ilustrado a seguir. Para o cálculo do índice  $IndM4$  foi utilizado o modelo nominal (Equação (7.15)) como processo real e como base para o modelo utilizado pelo controlador, embora este último tenha sido alterado conforme a metodologia proposta, anulando um modelo por vez. Os horizontes de controle e predição adotados foram iguais a 10 e 30, respectivamente. Os parâmetros de sintonia  $Q$  foram iguais a 1 para todas as controladas, ao passo que os parâmetros de sintonia  $R$  foram os que minimizaram o índice  $IndM4$  no estudo anterior de sintonia de MPC (ou seja,  $R = [10 \ 10 \ 50 \ 100]$ ). Ao todo foram realizados 12 testes, em que cada um dos modelos não nulos da matriz de modelos nominal (Equação (7.15)) foi anulado por vez. Para identificar que modelo foi anulado em cada um dos testes, foi criada a matriz da

Tabela 7.7. Os valores do índice *IndM4* podem ser observados e comparados com o valor original do índice *IndM4* na Figura 7.18.

**Tabela 7.7.** Testes realizados no problema de avaliação de modelos do Exemplo 7.2.

	$v_1$	$v_2$	$x_1$	$x_2$
$h_1$	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
$h_2$	Teste 5	Teste 6	Teste 7	Teste 8
$h_3$	-	Teste 9	-	Teste 10
$h_4$	Teste 11	-	Teste 12	-



**Figura 7.18.** Sensibilidade do índice *IndM4* aos modelos anulados em cada teste no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 50 \ 100]$ .

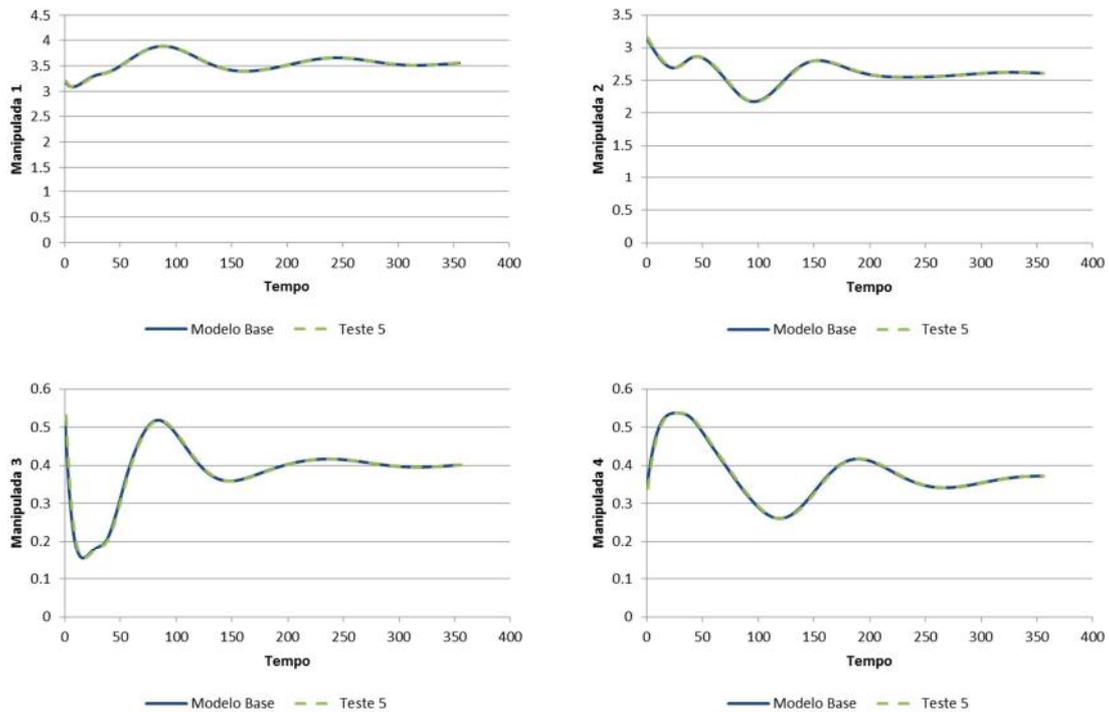
De acordo com os resultados da Figura 7.18, vê-se que os modelos menos relevantes, segundo o índice *IndM4*, são os correspondentes aos testes 4 e 5; ou seja, os que relacionam as variáveis  $x_2$  e  $h_1$  e as variáveis  $v_1$  e  $h_2$ , pois estes testes praticamente não alteraram o valor original do índice. Por outro lado, o modelo mais importante e essencial ao controlador projetado é o modelo correspondente ao teste 6; ou seja, o modelo que relaciona as variáveis  $v_2$  e  $h_2$ , uma vez que este teste fez com que o índice *IndM4* passasse de 0.91 (no caso original) para 0.97, o que representa a maior mudança observada.

Considerando a matriz de ganhos (Tabela 7.8), é interessante notar que o modelo considerado mais relevante pela análise realizada não foi o modelo de maior ganho, que, a princípio poderia ser considerado como a pior alternativa de modelo para ser anulado. Isto ocorre porque a metodologia proposta não observa só o modelo individualmente, mas o comportamento de todo o conjunto em que ele é utilizado. Assim, verifica-se que há influência dos outros modelos da matriz e também da sintonia adotada.

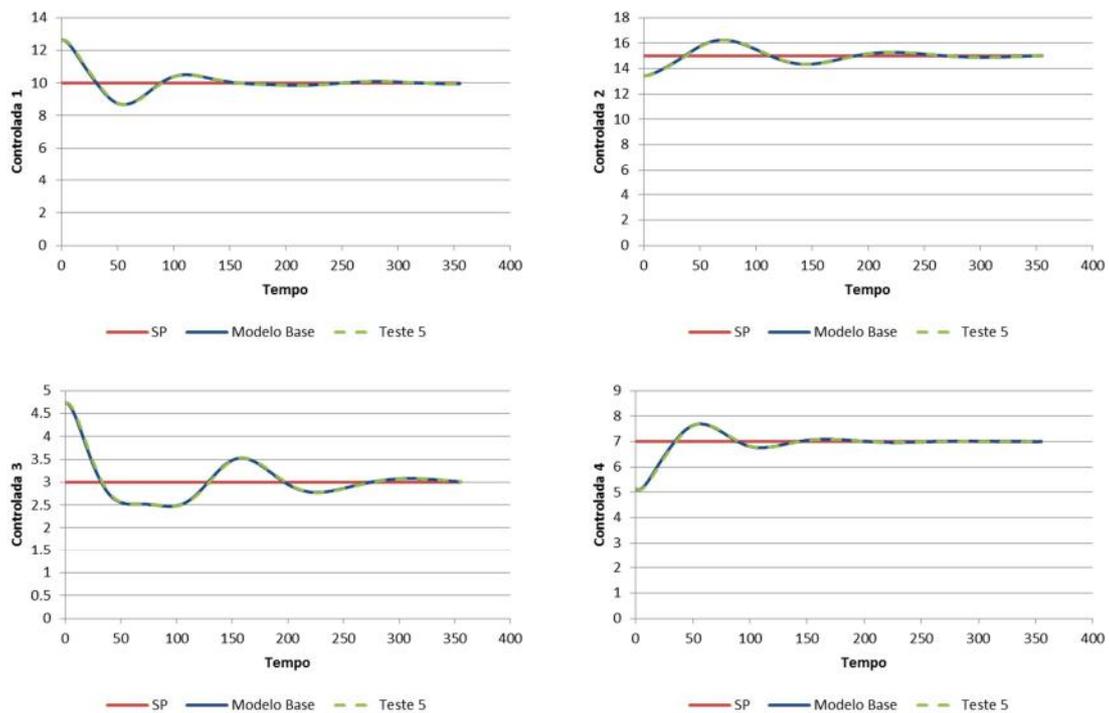
**Tabela 7.8.** Matriz de ganhos nominais no Exemplo 7.2.

	$v_1$	$v_2$	$x_1$	$x_2$
$h_1$	0.048	0.0025	0.35	-0.0096
$h_2$	0.0009	0.035	-0.0055	0.323
$h_3$	0	0.078	0	-0.37
$h_4$	0.045	0	-0.31	0

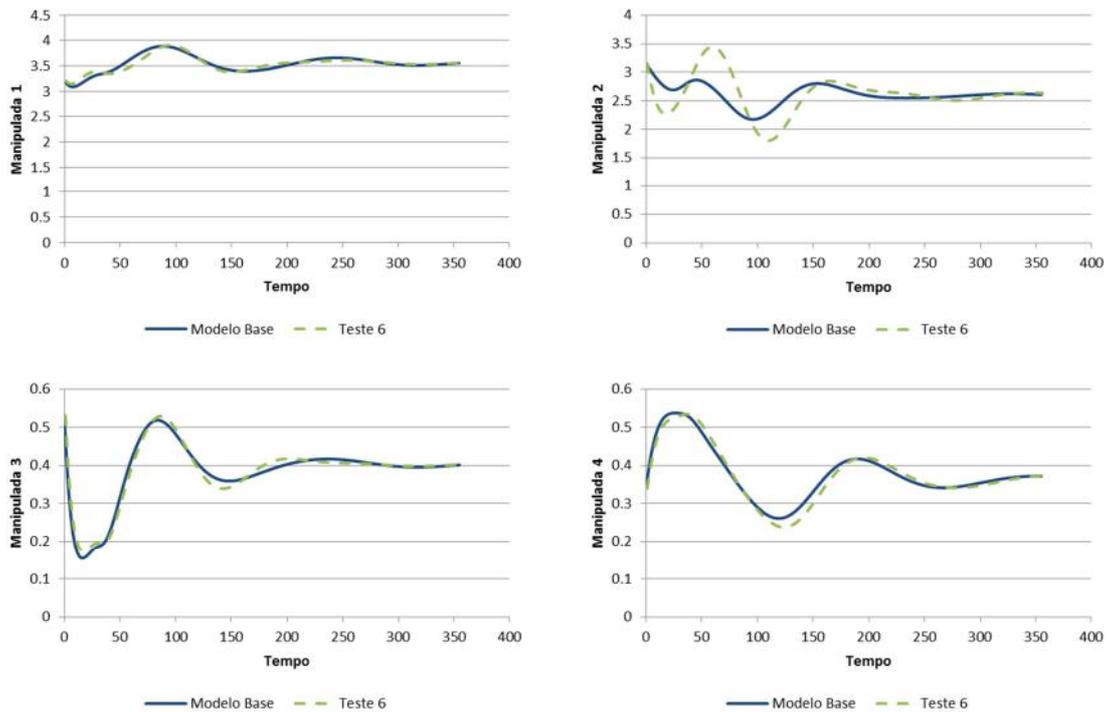
Para testar as informações relacionadas à relevância dos modelos e fornecidas pela metodologia proposta, um MPC foi aplicado ao sistema de estudo, utilizando o modelo rigoroso como processo real e modelos nominais modificados pelo controlador. As modificações impostas à matriz de modelos nominais utilizada pelo controlador consistiram em anular algumas relações, conforme sugerido pelo teste 5 (que identificou o modelo menos relevante) e o teste 6 (que revelou o modelo mais relevante). Os resultados das ações de controle e das variáveis controladas nas simulações realizadas podem ser observadas nas Figuras 7.19 e 7.20 para o teste 5 e nas Figuras 7.21 e 7.22 para o teste 6.



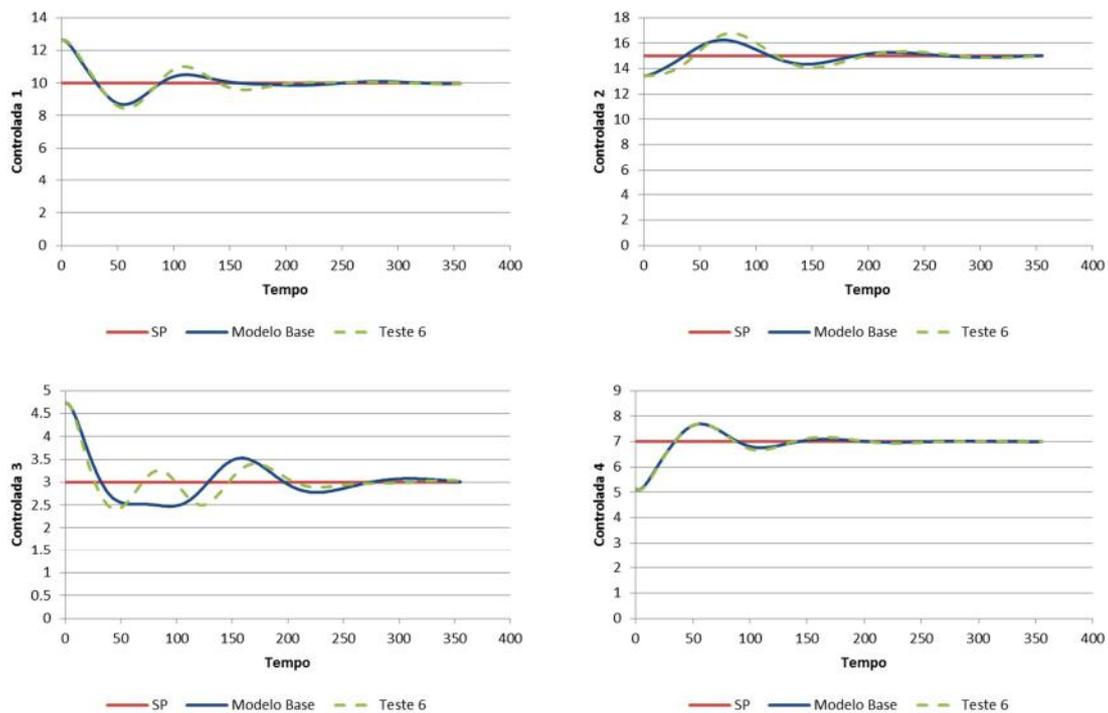
**Figura 7.19.** Variáveis manipuladas no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 50 \ 100]$  utilizando modelo nominal (Modelo Base) e modelo modificado pela anulação do modelo que relaciona as variáveis  $v_1$  e  $h_2$  (Teste 5).



**Figura 7.20.** Variáveis controladas no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 50 \ 100]$  utilizando modelo nominal (Modelo Base) e modelo modificado pela anulação do modelo que relaciona as variáveis  $v_1$  e  $h_2$  (Teste 5).



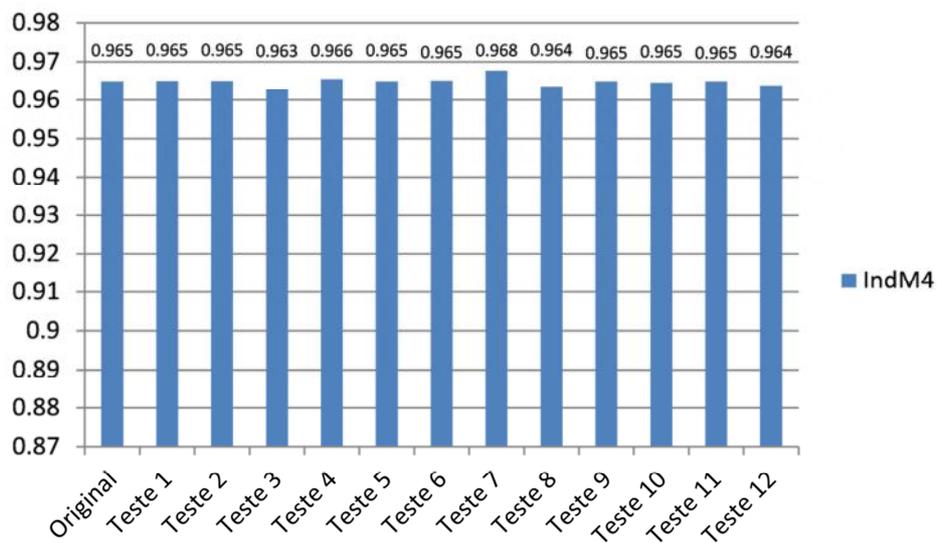
**Figura 7.21.** Variáveis manipuladas no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 50 \ 100]$  utilizando modelo nominal (Modelo Base) e modelo modificado pela anulação do modelo que relaciona as variáveis  $v_2$  e  $h_2$  (Teste 6).



**Figura 7.22.** Variáveis controladas no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 50 \ 100]$  utilizando modelo nominal (Modelo Base) e modelo modificado pela anulação do modelo que relaciona as variáveis  $v_2$  e  $h_2$  (Teste 6).

As Figuras 7.19 a 7.22 confirmam os resultados obtidos pela análise do *IndM4*. No teste 5, em que a relação entre as variáveis  $v_1$  e  $h_2$  é anulada, praticamente não ocorreram mudanças das ações do controlador. Da mesma forma, o teste 6 mostrou que anular a relação entre as variáveis  $v_2$  e  $h_2$  faz com que o comportamento do sistema em malha fechada se altere, com pequeno aumento da oscilação observada.

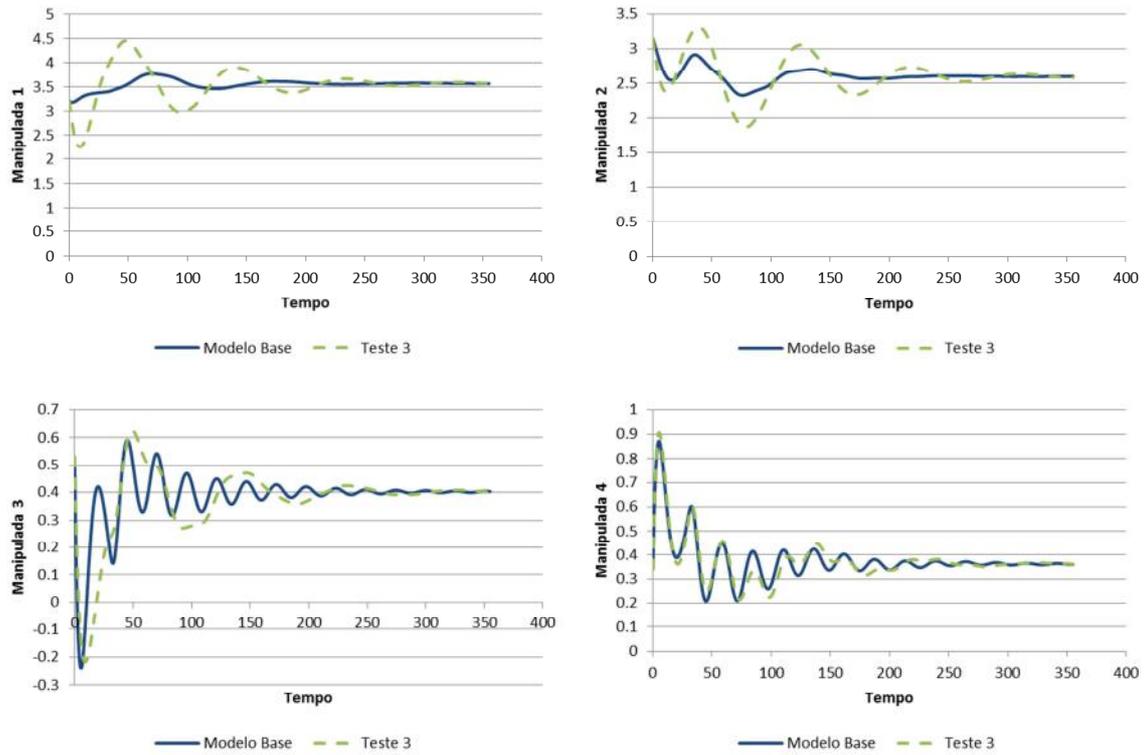
Buscando avaliar a influência da sintonia, foi realizado um estudo de determinação dos modelos relevantes nas mesmas condições da análise realizada anteriormente, a não ser por adotar um parâmetro de sintonia  $R$  diferente ( $R = [10 \ 10 \ 10 \ 10]$ ), para uma sintonia um pouco mais agressiva. Neste novo cenário de sintonia, a sensibilidade do índice *IndM4* aos testes da Tabela 7.7 podem ser observados na Figura 7.23.



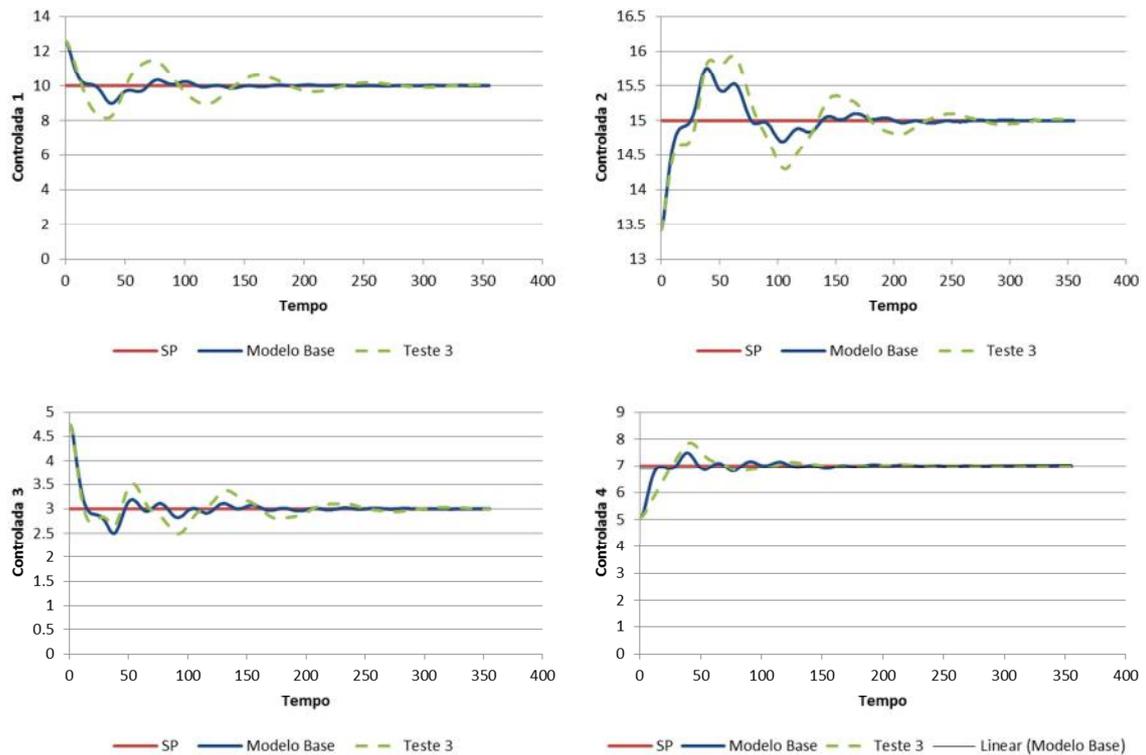
**Figura 7.23.** Sensibilidade do índice *IndM4* aos modelos anulados em cada teste no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 10 \ 10]$ .

O fato de adotar uma sintonia diferente produziu uma análise consideravelmente diferente também. O valor de *IndM4* no caso base original com a sintonia mais rápida foi superior ao valor obtido anteriormente. Foi observada uma redução da sensibilidade do valor deste índice quando diferentes modelos foram anulados ao longo dos testes. Como o valor base do índice não sofreu alterações muito pronunciadas, é possível afirmar que, neste cenário, os modelos foram quase igualmente relevantes (ou não relevantes), quando anulados individualmente, conforme realizado nos testes

programados de acordo com a Tabela 7.7. Para confirmar a análise realizada neste exemplo, o MPC foi aplicado novamente ao sistema estudado, considerando os casos mais extremos observados (teste 3 e teste 7). As Figuras 7.24 e 7.25 mostram os resultados obtidos para o teste 3.

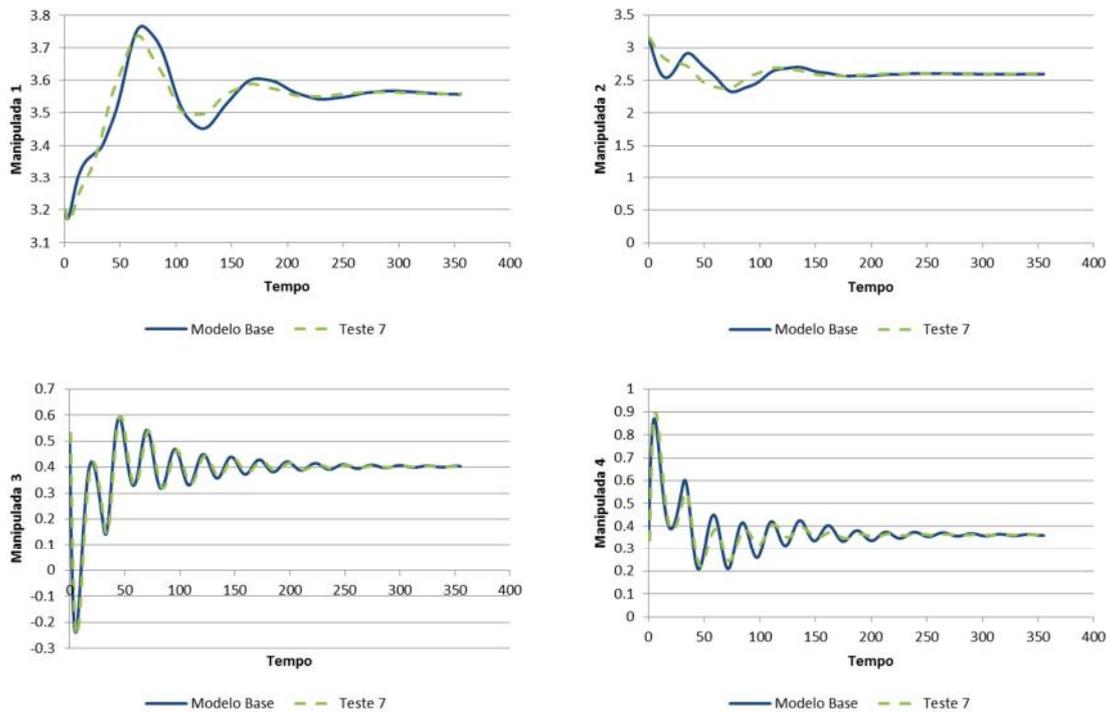


**Figura 7.24.** Variáveis manipuladas no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 10 \ 10]$  utilizando modelo nominal (Modelo Base) e modelo modificado pela anulação do modelo que relaciona as variáveis  $x_1$  e  $h_1$  (Teste 3).

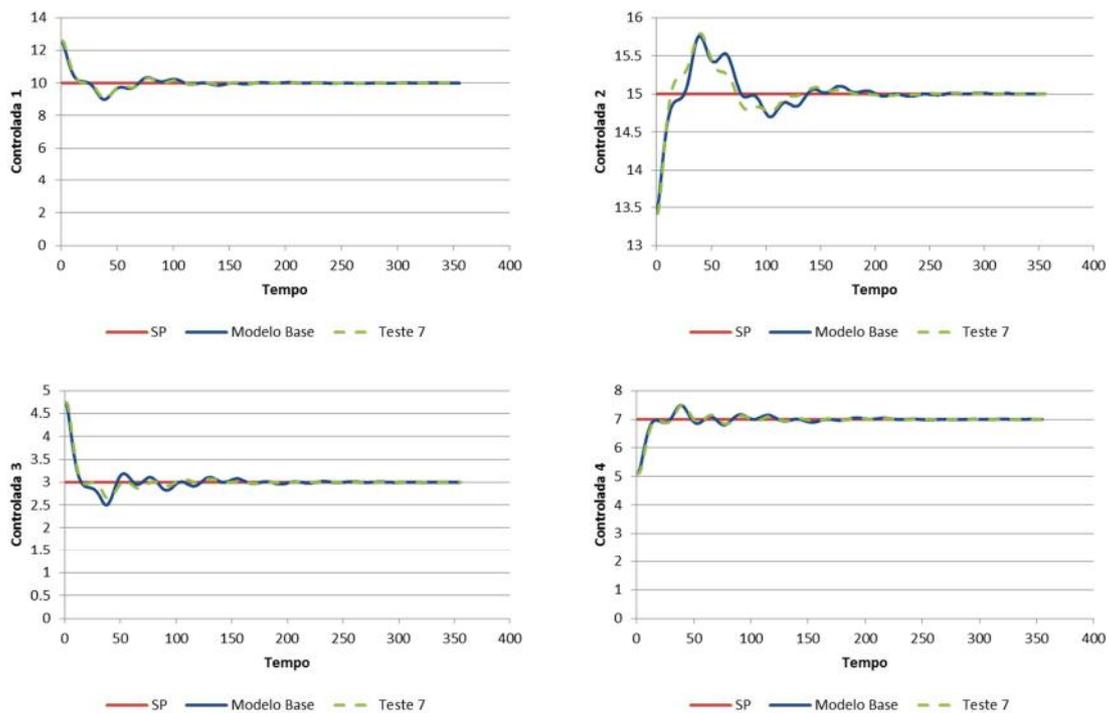


**Figura 7.25.** Variáveis controladas no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 10 \ 10]$  utilizando modelo nominal (Modelo Base) e modelo modificado pela anulação do modelo que relaciona as variáveis  $x_1$  e  $h_1$  (Teste 3).

Analisando as ações de controle obtidas para o teste 3 (Figura 7.24), os movimentos das variáveis manipuladas 1 e 2 parecem mais oscilatórios quando comparados com o caso base, ao passo que os movimentos das variáveis manipuladas 3 e 4 parecem menos oscilatórios. Observando as variáveis controladas neste teste (Figura 7.25), vê-se um comportamento bastante semelhante ao caso base ou, talvez, um pouco menos oscilatório. O comportamento observado parece refletir bem o que havia sido previsto pelos valores do índice  $IndM4$  no caso base e no teste 3, já que o teste 3 apresentou um valor um pouco inferior de  $IndM4$ , embora não houvesse uma diferença tão significativa. A princípio, o fato de  $IndM4$  ser menor no teste 3 do que no caso base pode parecer incomum, mas este comportamento pode ser explicado uma vez que  $IndM4$  reflete o desempenho do sistema controlado como um todo e, muitas vezes, a depender da sintonia e do problema de controle, a presença de determinado erro de modelagem pode fazer com que a resposta seja bastante adequada, resultando em uma redução do valor do índice analisado. A seguir, os resultados do teste 7 são apresentados nas Figuras 7.26 e 7.27.

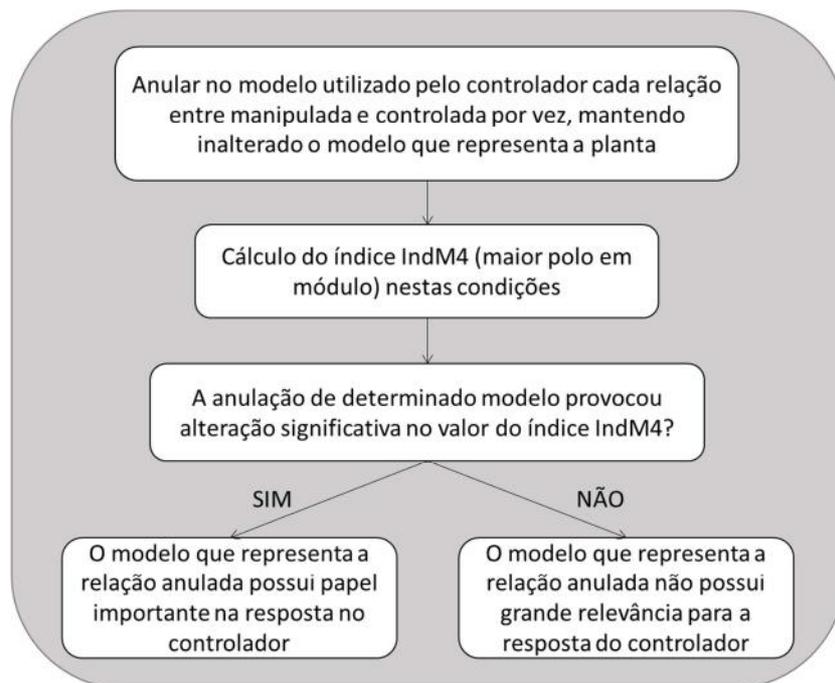


**Figura 7.26.** Variáveis manipuladas no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 10 \ 10]$  utilizando modelo nominal (Modelo Base) e modelo modificado pela anulação do modelo que relaciona as variáveis  $x_1$  e  $h_2$  (Teste 7).



**Figura 7.27.** Variáveis controladas no Exemplo 7.2 com  $R = [10 \ 10 \ 10 \ 10]$  utilizando modelo nominal (Modelo Base) e modelo modificado pela anulação do modelo que relaciona as variáveis  $x_1$  e  $h_2$  (Teste 7).

A análise das ações de controle e da trajetória das variáveis controladas obtidas no teste 7 mostra um comportamento muito semelhante ao que foi obtido no caso base. Da mesma forma, este resultado está de acordo com o que havia sido previsto pelo índice  $IndM4$ , cujo valor para o teste 7 foi superior ao valor do caso base, mas não apresentou uma diferença tão significativa. O resultado também mostra como a relevância dos modelos é dependente da sintonia adotada e que a metodologia proposta (representada pela Figura 7.28) é capaz de levar este efeito em consideração.



**Figura 7.28.** Metodologia proposta para determinação de modelo relevantes.

## 7.6 Comentários Finais

Foram propostas algumas metodologias inéditas com diferentes enfoques e finalidades a partir da análise teórica desenvolvida nesta tese, passando pelo projeto e sintonia de controladores e avaliação da relevância de modelos. Os resultados obtidos nos exemplos foram satisfatórios e possuem grande potencial para implementação prática em problemas reais.

A maioria das metodologias propostas tem como base a análise do polo de maior módulo, que pode ser calculado por meio das expressões apresentadas nesta tese. Para

isso, um ponto importante é definir a faixa de erros de modelagem esperada para o modelo, o que pode ser proveniente da etapa de estimação de parâmetros ou da experiência operacional. Com estas informações, o polo de maior módulo pode ser calculado de forma sistemática para controladores preditivos, de modo a orientar o projeto e sintonia destes controladores, bem como determinar a relevância de modelos no caso multivariável.

# Capítulo 8 Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões obtidas ao longo dos desenvolvimentos teóricos e práticos realizados neste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 8.1 Conclusões

Com auxílio de uma revisão da literatura, ficou claro que ainda existem muitas questões não completamente compreendidas e solucionadas para o emprego eficiente de controladores preditivos. Trabalhos recentes apontam tanto a existência de dificuldades teóricas como práticas em relação a implementações reais de sistemas baseados em MPC.

Para a caracterização dos problemas observados, foram utilizados dois estudos de caso. O primeiro estudo de caso apresentado (Seção 4.1) confirmou a importância da qualidade do modelo utilizado pelo controlador. Os resultados mostraram que o desempenho pode ser fortemente comprometido na presença de erros de diferentes naturezas. Os piores desempenhos observados foram obtidos na presença de erros na dinâmica do modelo, com o modelo do controlador mais lento que o da planta. No segundo estudo de caso (Seção 4.2) foi realizada a propagação dos erros de modelagem, sendo possível verificar como estes podem evoluir e impactar de forma significativa o resultado final da aplicação de um controle preditivo. Modelos obtidos com diferentes projetos de experimentos apresentaram comportamentos significativamente diferentes durante a aplicação final. Surpreendentemente, modelos com desempenhos similares na etapa de identificação apresentaram comportamento muito distinto no sistema de controle.

Ainda no segundo estudo de caso, foi mostrado que a sintonia do controlador é capaz de afetar fortemente as regiões de confiança calculadas para as trajetórias das

variáveis manipuladas e controladas. Desta forma, um modelo pior pode apresentar desempenho de controle melhor, desde que a sintonia do controlador seja adequadamente escolhida. Além disso, foi mostrado que o controlador preditivo pode apresentar desempenhos equivalentes, mesmo utilizando modelos com diferentes matrizes de covariância, dentro de uma faixa aceitável e a depender da sintonia empregada. Estes resultados reforçam a sinergia entre os erros de modelagem e a sintonia do controlador no desempenho final do sistema e o fato de que é possível utilizar a sintonia para compensar erros de modelagem.

Em particular, uma análise criteriosa da literatura mostra que ainda existem problemas envolvendo a identificação de processos com foco em controle, a definição da acurácia necessária para garantir o bom desempenho do controlador, a avaliação da degradação do desempenho dos modelos e a sintonia de controladores preditivos (DARBY e NIKOLAOU, 2012; ZHU *et al.*, 2013; KANO e OGAWA, 2010). Com base nos problemas reportados na literatura e nos resultados obtidos nestes estudos preliminares, foram realizadas análises com o objetivo de ajudar a esclarecer as relações existentes entre a identificação, a sintonia e o desempenho de controle. A partir das análises teóricas foram propostas novas metodologias que podem contribuir para as áreas de identificação de processos, de sintonia e de avaliação de modelos.

Estudos teóricos permitiram desenvolver expressões que relacionam as incertezas do modelo e a sintonia do controlador, frente à resposta esperada, considerando algumas hipóteses simplificadoras. Com a quantificação destas relações, foi possível determinar, em casos simples, o limite aceitável para os erros de modelagem e a sintonia menos sensível a estes erros.

A abordagem utilizada para o cálculo dos polos do sistema em malha fechada complementa os estudos teóricos e possui aplicação mais ampla e prática, permitindo a criação de índices e a elaboração de metodologias para sintonia de controladores e avaliação de modelos relevantes, por exemplo. Com base na metodologia desenvolvida, foi possível também utilizar algumas simplificações com o objetivo de modelar casos particulares.

De acordo com os resultados obtidos, o polo de maior módulo do sistema é um índice capaz de fornecer informações relevantes sobre o sistema controlado na presença de incertezas, tendo sido bastante utilizado nas metodologias propostas. Por isso, o cálculo deste índice de forma sistemática em sistemas de MPC pode constituir um procedimento interessante para avaliação, projeto e sintonia de controladores.

Assim, acredita-se que os estudos desenvolvidos neste trabalho contribuem na área de controle preditivo, analisando incertezas de modelagem, sintonia e desempenho em conjunto, do ponto de vista teórico e prático, com a proposta de novas metodologias.

## **8.2 Sugestões para Trabalhos Futuros**

Como sugestão para trabalhos futuros, seria interessante explorar as expressões analíticas desenvolvidas de modo a estender a sua validade para casos mais complexos e mais próximos da realidade operacional.

Os resultados teóricos apresentados no Capítulo 6 possuem potencial para serem amplamente utilizados, incluindo casos práticos. Além disso, da mesma forma que foi proposta uma modelagem simplificada para o caso de erros de modelagem multiplicativos, é possível desenvolver propostas de modelagem semelhantes que contemplem outros casos particulares de interesse.

Outro ponto importante a ser analisado em trabalhos futuros é a forma como a presença de perturbações medidas e não medidas pode influenciar o contexto analisado, sobretudo o cálculo do polo de maior módulo, que foi o principal índice utilizado na proposição de metodologias. Neste sentido, também seria conveniente entender como este índice se comporta ao tratar de controladores preditivos com restrições, como é o caso da maioria dos controladores empregados na indústria.

Os estudos podem ser também estendidos para outras formulações de controladores preditivos, baseados em diferentes estruturas de modelos, em modelos não lineares ou adaptativos.

## Referências Bibliográficas

- AGUIRRE, L. A., 2007, *Introdução à Identificação de Sistemas*. 3 ed. Belo Horizonte, Editora UFMG.
- AKAIKE, H., 1974, “A New Look at the Statistical Model Identification”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19, pp. 716-723.
- ALBERTON, A. L., 2010, *Estimação de Parâmetros e Planejamento de Experimentos: Estudo de Incertezas e Funções de Informação*. Tese de D.Sc., Programa de Engenharia Química - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- ALBERTON, A. L., SCHWAAB, M., BISCAIA JR., E. C., PINTO, J. C., 2010, “Sequential Experimental Design Based on Multiobjective Optimization Procedures”, *Chemical Engineering Science*, v. 65, pp. 5482-5494.
- ALBERTON, A. L., SCHWAAB, M., LOBÃO, M. W. N., PINTO, J. C., 2012, “Design of Experiments for Discrimination of Rival Models Based on the Expected Number of Eliminated Models”, *Chemical Engineering Science*, v. 75, pp. 120-131.
- ALI, E., ZAFIRIOU, E., 1993, “Optimization-Based Tuning of Nonlinear Model Predictive Control with State Estimation”, *Journal of Process Control*, v. 3, pp. 97-107.
- ALMEIDA, E., 2011, *Otimização Dinâmica em Tempo Real: Arquitetura de Software, Diagnóstico e Análise de Inviabilidades*. Tese de D.Sc., Escola de Engenharia / UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil.
- ALMEIDA, E., SECCHI, A. R., 2011, “Dynamic Optimization of a FCC Converter Unit: Numerical Analysis”, *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, v. 28, pp. 117-136.
- ANDERSEN, H. W., KÜMMEL, M., 1992, “Evaluating Estimation of Gain Directionality – Part2: A Case Study of Binary Distillation”, *Journal of Process Control*, v. 2, pp. 67-86.
- ASTROM, K. J., EYKHOFF, P., 1971, “System Identification – A Survey”, *Automatica*, v. 7, pp. 123-162.
- ASTROM, K. J., WITTENMARK, B., 2008, “*Adaptive Control*”. 2nd ed., Mineola, N. Y., Dover Publications.
- ATKINSON, A. C., COX, D. R., 1974, “Planning Experiments for Discrimination Between Models”, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, v. 36, pp. 321-348.

- BADWE, A. S., PATWARDHAN, R. S., SHAH, S. L., PATWARDHAN, S. C., GUDI, R. D., 2010, "Quantifying the Impact of Model-Plant Mismatch on Controller Performance", *Journal of Process Control*, v. 20, pp. 408-425.
- BAGHERI, P., KHAKI-SEDIGH, A., 2011, "Tuning of Dynamic Matrix Controller for FOPDT Models Using Analysis of Variance", In: *18th IFAC World Congress*, pp. 12319-12324, Milão, Itália.
- BAGHERI, P., KHAKI-SEDIGH, A. K., 2014, "An Analytical Tuning Approach to Multivariable Model Predictive Controllers", *Journal of Process Control*, v. 24, pp. 41-54.
- BENAMOR, S., DOYLE III, F. J., MCFARLANE, R., 2004, "Polymer Grade Transition Control Using Advanced Real-Time Optimization Software", *Journal of Process Control*, v. 14, pp. 349-364.
- BOHLIN, T., 1994, "A Case Study of Grey-Box Identification", *Automatica*, v. 30, pp. 307-318.
- BOTELHO, V., TRIERWEILER, J. O., FARENZENA, M., DURAIKI, R., 2016, "Perspectives and Challenges in Performance Assessment of Model Predictive Control", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 94, pp. 1225-1241.
- BOX, G. E. P., HILL, W. J., 1967, "Discrimination Among Mechanistic Models", *Technometrics*, v. 9, pp. 57-71.
- BUZZI-FERRARIS, G., FORZATTI, P., 1983, "A New Sequential Experimental Design Procedure for Discriminating Among Rival Models", *Chemical Engineering Science*, v. 38, pp. 225-232.
- CAMACHO, E. F., BORDONS, C., 2007, "*Model Predictive Control*". 2nd ed., London, UK, Springer-Verlag.
- CAMPOS, M. C. M. M., GOMES, M. V. C., PEREZ, J. M. G. T., 2013, *Controle Avançado e Otimização na Indústria do Petróleo*, 1 ed., Rio de Janeiro, Interciência.
- CARRAPIÇO, O. L., ODLOAK, D., 2005, "A Stable Model Predictive Control for Integrating Processes", *Computers and Chemical Engineering*, v. 29, pp. 1089-1099.
- CHALONER, K., VERDINELLI, I., 1995, "Bayesian Experimental Design: A Review", *Statistical Science*, v. 10, pp. 273-304.
- CHEN, J., YU, C., 1997, "Optimal Input Design Using Generalized Binary Sequence", *Automatica*, v. 33, pp. 2081-2084.
- CLARKE, D.W., 1994, "*Advances in Model-Based Predictive Control*". ed., Oxford, UK, Oxford University Press.

COSTA, L. P. L., 2009, *Desenvolvimento de Metodologia de Tomada de Decisão para Problemas de Otimização Multiobjetivo da Engenharia Química*. Dissertação de M.Sc., Programa de Engenharia Química - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CUTLER, C. R., RAMAKER, B. L., 1980, "Dynamic Matrix Control – A Computer Control Algorithm", In: *Proceeding of the Joint Automatic Control*, paper WP5-B, San Francisco, CA, USA.

DARBY, M. L., NIKOLAOU, M., 2014, "Identification Test Design for Multivariable Model-Based Control: An Industrial Perspective", *Control Engineering Practice*, v. 22, pp. 165-180.

DARBY, N. L., NIKOLAOU, M., 2012, "MPC: Current Practice and Challenges", *Control Engineering Practice*, v. 20, pp. 328-342.

DOYLE, J. C., 1982, "Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties", *IEEE Proceedings*, v. 129, pp. 242-250.

DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. P., FRANCIS, B. A., 1989, "State-Space Solutions to Standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, pp. 831-847.

DOYLE, J. C., STEIN, G., 1981, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. AC-26, pp. 4-16.

DUBAY, R., KEMBER, G., LAKSHMINARAYAN, C. V., PRAMUJATI, B., 2005, "Development of Characteristic Equations and Robust Stability Analysis for MIMO Move Suppressed and Shifted DMC", *ISA Transactions*, v. 44, pp. 465-479.

FARENZENA, M., 2003, *Número de Desempenho Robusto Não-Linear: uma Nova Medida do Grau de Não-Linearidade*. Dissertação de M.Sc., Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química - Escola de Engenharia - UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil.

FISCHMAN, A., 1993, *Controle Robusto de Sistemas Lineares Incertos – Teoria e Aplicações*. Dissertação de M.Sc., Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.

FORBES, M. G., PATWARDHAN, R. S., HAMADAH, H., GOPALUNI, R. B., 2015, "Model Predictive Control in Industry: Challenges and Opportunities", *IFAC-PapersOnLine*, v. 48-8, pp. 531-538.

FRANCESCHINI, G., MACCHIETTO, S., 2008, "Model-Based Design of Experiments for Parameter Precision: State of the Art", *Chemical Engineering Science*, v. 63, pp. 4846-4872.

FUNKQUIST, J., 1997, "Grey-Box Identification of a Continuous Digester – A Distributed-Parameter Process", *Control Engineering Practice*, v. 5, pp. 919-930.

- GARCÍA, C. E., PRETT, D. M., MORARI, M., 1989, “Model Predictive Control: Theory and Practice – A Survey”, *Automatica*, v. 25, pp. 335-348.
- GARRIGA, J. L., SOROUSH, M., 2008, “Model Predictive Controller Tuning via Eigenvalue Placement”, In: *2008 American Control Conference*, pp. 429-434, Washington, USA.
- GARRIGA, J. L., SOROUSH, M., 2010, “Model Predictive Control Tuning Methods: A Review”, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 49, pp. 3505-3515.
- GEVERS, M., 1996, “Identification for Control”, *Annual Reviews in Control*, v. 20, pp. 95-106.
- GEVERS, M., BOMBOIS, X., CODRONS, B., SCORLETTI, G., ANDERSON, B. D. O., 2003, “Model Validation for Control and Controller Validation in a Prediction Error Identification Framework – Part I: Theory”, *Automatica*, v. 39, pp. 403-415.
- GONÇALVES, G. A. A., 2017, *On-Line Process Model Update in Discrete-Time Predictive Controllers: A Robust Approach*. Tese de D.Sc., Programa de Engenharia Química - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- HERZOG, R., KELLER, J., 2011, *Advanced Control – An Overview on Robust Control*, Notas de Aula, La Haute Ecole d’Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud / University of Applied Sciences and Arts Northwestern Switzerland – Switzerland.
- HIRST, H. P., MACEY, W. T., 1997, “Bounding the Roots of Polynomials”, *The College Mathematics Journal*, v. 28, pp. 292-295.
- HORN, R. A., JOHNSON, C. R., 1990, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.
- HUANG, B., MALHOTRA, A., TAMAYO, E. C., 2003, “Model Predictive Control Relevant Identification and Validation”, *Chemical Engineering Science*, v. 58, pp. 2389-2401.
- HUNTER, W. G., REINER, A. M., 1965, “Designs for Discrimination Between Two Rival Models”, *Technometrics*, v. 7, pp. 307-323.
- IGLESIAS, E. J., SANJUÁN, M. E., SMITH, C. A., 2006, “Tuning Equation for Dynamic Matrix Control in SISO Loops”, *Ingeniería y Desarrollo*, v. 19, pp. 88-100.
- JOHANSSON, K. H., 2000, “The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory with an Adjustable Zero”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 8, pp. 456-465.
- KADAM, J. V., SCHLEGEL, M., SRINIVASAN, B., BONVIN, D., MARQUARDT, W., 2007, “Dynamic Optimization in the Presence of Uncertainty: From Off-line Nominal Solution to Measurement-Based Implementation”, *Journal of Process Control*, v. 17, pp. 389-398.

- KANO, M., OGAWA, M., 2010, “The State of the Art in Chemical Process Control in Japan: Good Practice and Questionnaire Survey”, *Journal of Process Control*, v. 20, pp. 969-982.
- KARIMI, A., LANDAU, I. D., 1998, “Comparison of the Closed-Loop Identification Methods in Terms of the Bias Distribution”, *Systems & Control Letters*, v. 34, pp. 159-167.
- KHERADMANDI, M., MHASKAR, P., 2018, “Model Predictive Control with Closed-Loop Re-Identification”, *Computers and Chemical Engineering*, v. 109, pp. 249-260.
- KIEFER, J., 1959, “Optimum Experimental Designs”, *Journal of the Royal Statistical Society Series B – Statistical Methodology*, v. 21, pp. 272-319.
- KOUNG, C., MACGREGOR, J. F., 1994, “Identification for Robust Multivariable Control – The Design of Experiments”, *Automatica*, v. 30, pp. 1541-1554.
- KOZÁK, S., 2014, “State-of-the-art in Control Engineering”, *Journal of Electrical Systems and Information Technology*, v. 1, pp. 1-9.
- KREYSZIG, E., 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York, John Wiley & Sons.
- LEE, J. H., YU, Z. H., 1994, “Tuning of Model Predictive Controllers for Robust Performance”, *Computers and Chemical Engineering*, v. 18, pp. 15-37.
- LEE, K. H., HUANG, B., TAMAYO, E. C., 2008, “Sensitivity Analysis for Selective Constraint and Variability Tuning in Performance Assessment of Industrial MPC”, *Control Engineering Practice*, v. 16, pp. 1195-1215.
- LEE, J. H., 2011, “Model Predictive Control: Review of Three Decades of Development”, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, v. 9, pp. 415-424.
- LEVADI, V. S., 1966, “Design of Input Signals for Parameter Estimation”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 11, pp. 205-211.
- LIU, L., LING, D., WU, Y., ZHENG, Y., 2017, “Process Model Quality Monitoring of Model Predictive Controller”, *Proceedings of the 36th Chinese Control Conference*, pp. 4391-4396.
- LJUNG, L., 1999, *System Identification: Theory for the User*. 2 ed. New Jersey, Prentice Hall.
- LONGHI, L. G. S., 2001, *Solução do Problema de Controle  $\mathcal{H}_\infty$  Não-Linear*. Tese de D.Sc., Programa de Engenharia Química - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MACIEJOWSKI, J. M., 2002, *Predictive Control with Constraints*. London, Prentice Hall.

MATLAB, 2010, *version 7.11.0.584 (R2010b)*. Natick, Massachusetts, The MathWorks Inc.

MAURATH, P. R., MELLICHAMP, D. A., SEBORG, D. E., 1988, “Predictive Controller Design for Single-Input/Single-Output (SISO) Systems”, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 27, pp. 956-963.

MAYNE, D. Q., 2014, “Model Predictive Control: Recent Developments and Future Promise”, *Automatica*, v. 50, pp. 2967-2986.

MCINTOSH, A. R., SHAH, S. L., FISHER, D. G., 1991, “Analysis and Tuning of Adaptive Generalized Predictive Control”, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 69, pp. 97-110.

MEHRA, R. K., 1974, “Optimal Input Signals for Parameter Estimation in Dynamic Systems – Survey and New Results”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19, pp. 753-768.

MIRANDA, F. C. P. R., 2005, *Identificação de Sistemas em Malha Fechada Usando Controlador Preditivo Multivariável*. Dissertação de M.Sc., Escola Politécnica / USP, São Paulo, SP, Brasil.

MORO, L. F. L., ODLOAK, D., 1995, “Constrained Multivariable Control of Fluid Catalytic Cracking Converters”, *Journal of Process Control*, v. 5, pp. 29-39.

NERY JR, G. A., MARTINS, M. A. F., KALID, R., 2014, “A PSO-Based Optimal Tuning Strategy for Constrained Multivariable Predictive Controllers with Model Uncertainty”, *ISA Transactions*, v. 53, pp. 560-567.

NGO, K. T., ERICKSON, K. T., 1997, “Stability of Discrete-Time Matrix Polynomials”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, pp. 538-542.

NORMEY-RICO, J. E., CAMACHO, E. F., 2007, *Control of Dead-Time Processes*. 1 ed. London, Springer-Verlag.

OGUNNAIKE, B. A., 1986, “Dynamic Matrix Control: A Nonstochastic, Industrial Process Control Technique with Parallels in Applied Statistics”, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, v. 25, pp. 712-718.

OGUNNAIKE, B. A., RAY, W. H., 1994, *Process Dynamics, Modeling and Control*. New York, Oxford University Press.

PEREZ, J. M. G. T., 2012, *Controle Preditivo Multivariável com Modelo de Realinhamento e Robusto quanto à Estabilidade*. Tese de D.Sc., Programa de Engenharia Química - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PINTO, J. C., LOBÃO, M. W., MONTEIRO, J. L., 1990, “Sequential Experimental Design for Parameter Estimation: A Different Approach”, *Chemical Engineering Science*, v. 45, pp. 883-892.

- PITTA, R. N., 2012, *Aplicação Industrial de Re-Identificação de Modelos de MPC em Malha Fechada*. Dissertação de M.Sc., Escola Politécnica / USP, São Paulo, SP, Brasil.
- PORFÍRIO, C. R., ALMEIDA NETO, E., ODLOAK, D., 2003, “Multi-Model Predictive Control of na Industrial C3/C4 Splitter”, *Control Engineering Practice*, v. 11, pp. 765-779.
- PRONZATO, L., 2008, “Optimal Experimental Design and Some Related Control Problems”, *Automatica*, v. 44, pp. 303-325.
- QIN, S. J., BADGWELL, T. A., 1997, “An Overview of Industrial Model Predictive Control Technology”, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Chemical Process Control*, pp. 232-256, Tahoe City, USA.
- QIN, S. J., BADGWELL, T. A., 2003, “A Survey of Industrial Model Predictive Control Technology”, *Control Engineering Practice*, v. 11, pp. 733-764.
- QUELHAS, A. D., JESUS, N. J. C., PINTO, J. C., 2013, “Common Vulnerabilities of RTO Implementations in Real Chemical Processes”, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 91, pp. 652-668.
- RAY, W. H., OGUNNAIKE, B. A., 1994, *Process Dynamics, Modeling, and Control*. 1 ed. New York, Oxford University Press.
- REVERTER, C. M., IBARROLA, J., CANO-IZQUIERDO, J., 2014, “Tuning Rules for a Quick Start up in Dynamic Matrix Control”, *ISA Transactions*, v. 53, pp. 612-627.
- RICHALET, J., 1993, “Industrial Applications of Model Based Predictive Control”, *Automatica*, v. 29, pp. 1251-1274.
- RICHALET, J., RAULT, A., TESTUD, J. L., PAPON, J., 1978, “Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes”, *Automatica*, v. 14, pp. 413-428.
- SCHWAAB, M., PINTO, J. C., 2007, *Análise de Dados Experimentais, volume I: Fundamentos de Estatística e Estimação de Parâmetros*. 1 ed. Rio de Janeiro, e-papers.
- SCHWAAB, M., PINTO, J. C., 2011, *Análise de Dados Experimentais, volume II: Planejamento de Experimentos*. 1 ed. Rio de Janeiro, e-papers.
- SCHWAAB, M., SILVA, F. M., QUEIPO, C. A., BARRETO JR., A. G., NELE, M., PINTO, J. C., 2006, “A New Approach for Sequential Experimental Design for Model Discrimination”, *Chemical Engineering Science*, v. 61, pp. 5791-5806.
- SEBORG, D. E., EDGAR, T. F., MELLICHAMP, D. A., 1989, *Process Dynamics and Control*. 2 ed. New York, John Wiley & Sons.
- SHIRT, R. W., HARRIS, T. J., BACON, D. W., 1994, “Experimental Design Considerations for Dynamic Systems”, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 33, pp. 2656-2667.

- SHORT, M., 2017, "Move Suppression Calculations for Well-Conditioned MPC", *ISA Transactions*, v. 67, pp. 371-381.
- SHRIDHAR, R., COOPER, D. J., 1997, "A Tuning Strategy for Unconstrained SISO Model Predictive Control", *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 36, pp. 729-746.
- SHRIDHAR, R., COOPER, D. J., 1998a, "A Tuning Strategy for Unconstrained Multivariable Model Predictive Control", *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 37, pp. 4003-4016.
- SHRIDHAR, R., COOPER, D. J., 1998b, "A Novel Tuning Strategy for Multivariable Model Predictive Control", *ISA Transactions*, v. 36, pp. 273-280.
- SKOGESTAD, S., 2000, "Plantwide Control: The Search for the Self-Optimizing Control Structure", *Journal of Process Control*, v. 10, pp. 487-507.
- SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, L., 2005, *Multivariable Feedback Control*. New York, USA, John Wiley and Sons.
- SÖDERSTRÖM, T., STOICA, P., 1989, *System Identification*. London, Prentice Hall.
- SOUZA, A. G., 2017, *Estudo do Uso de Métodos de Controle Robusto em Sistemas Espaciais Rígidos-Flexíveis*. Tese de D.Sc., Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, São José dos Campos, SP, Brasil.
- SRINIVASAN, R., QIAN, M. S., 2006, "Online Fault Diagnosis and State Identification During Process Transitions Using Dynamic Locus Analysis", *Chemical Engineering Science*, v. 61, pp. 6109-6132.
- TAKATSU, H., ITOH, T., ARAKI, M., 1998, "Future Needs for the Control Theory in Industries – Report and Topics of the Control Technology Survey in Japanese Industry", *Journal of Process Control*, v. 8, pp. 369-374.
- TRIERWEILER, J. O., FARINA, L. A., 2003, "RPN Tuning Strategy for Model Predictive Control", *Journal of Process Control*, v. 13, pp. 591-598.
- TUFA, L. D., KA, C. Z., 2016, "Effect of Model Plant Mismatch on MPC Performance and Mismatch Threshold Determination", *Procedia Engineering*, v. 148, pp. 1008-1014.
- TULLEKEN, H. J. A. F., 1990, "Generalized Binary Noise Test-Signal Concept for Improved Identification-Experiment Design", *Automatica*, v. 26, pp. 37-49.
- VAN DER LEE, J. H., SVRCEK, W. Y., YOUNG, B. R., 2008, "A Tuning Algorithm for Model Predictive Controllers Based on Genetic Algorithms and Fuzzy Decision Making", *ISA Transactions*, v. 47, pp. 53-59.

VEGA, M. P., LIMA, E. L., PINTO, J. C., 2008, "Use of Bifurcation Analysis for Development of Nonlinear Models for Control Applications", *Chemical Engineering Science*, v. 63, pp. 5129-5140.

VENTIN, F. F., 2010, *Controle Robusto de uma Torre Estabilizadora de Nafta*. Dissertação de M.Sc., Programa de Engenharia Química - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

WALTER, E., PRONZATO, L., 1990, "Qualitative and Quantitative Experiment Design for Phenomenological Models – A Survey", *Automatica*, v. 26, pp. 195-213.

WANG, Y., SEKI, H., OHYAMA, S., AKAMATSU, K., OGAWA, M., OHSHIMA, M., 2000, "Optimal Grade Transition Control for Polymerization Reactors", *Computers and Chemical Engineering*, v. 24, pp. 1555-1561.

WOJSZNIS, W., GUDAZ, J., BLEVINS, T., MEHTA, A., 2003, "Practical Approach to Tuning MPC", *ISA Transactions*, v. 42, pp. 149-162.

YAMASHITA, A. S., ZANIN, A. C., ODLOAK, D., 2016, "Tuning of Model Predictive Control with Multi-Objective Optimization", *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, v. 33, pp. 333-346.

YOON, T., CLARKE, D. W., 1994, "Adaptative Predictive Control of the Benchmark Plant", *Automatica*, v. 30, pp. 621-628.

ZAFIRIOU, E., 1989, "An Operator Control Theory Approach to the Shell Standard Control Problem", In: *The Second Shell Process Control Workshop*, Stoneham, MA. Butterworths.

ZHU, Y., 1998, "Multivariable Process Identification for MPC: The Asymptotic Method and Its Applications", *Journal of Process Control*, v. 8, pp. 101-115.

ZHU, Y., PATWARDHAN, R., WAGNER, S. B., ZHAO, J., 2013, "Toward a Low Cost and High Performance MPC: The Role of System Identification", *Computers and Chemical Engineering*, v. 51, pp. 124-135.

# Apêndice A

O comportamento de um controlador preditivo SISO em malha fechada é computado algebricamente a cada instante de tempo, na presença de erro de modelagem dado por um fator multiplicativo  $K$ .

## Instante 0

*Bias:*

$$D_0 = 0 \quad (\text{A.1})$$

*Variável controlada predita:*

$$Y_0 = 0 \quad (\text{A.2})$$

*Ação de controle:*

$$\Delta U_0 = (c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{HP}) \cdot (Y^{SP} - Y_0 - D_0)$$

$$\Delta U_0 = \sum_{i=1}^{HP} c_i Y^{SP} \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta U_0 = C Y^{SP}, \text{ onde } C = \sum_{i=1}^{HP} c_i$$

onde  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{HP}$  são os elementos da primeira linha da matriz  $\underline{\underline{K}}_C$

## Instante 1

*Bias:*

$$D_1 = Y_1^{real} - Y_1$$

$$D_1 = s_1 \Delta U_0 - K s_1 \Delta U_0 \quad (\text{A.4})$$

$$D_1 = (1 - K) s_1 \Delta U_0$$

$$D_1 = (1 - K) s_1 C Y^{SP}$$

*Variável controlada predita:*

$$Y_1 = \begin{bmatrix} K s_2 \Delta U_0 \\ K s_3 \Delta U_0 \\ \vdots \\ K s_{HP} \Delta U_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

*Ação de controle:*

$$\begin{aligned}
\Delta U_1 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K \Delta U_0 - CD_1 \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K \Delta U_0 - C(1-K)s_1 \Delta U_0 \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K + (1-K)Cs_1 \right] \Delta U_0 \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K + (1-K)Cs_1 \right] CY^{SP} \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} \left( 1 - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K + (1-K)Cs_1 \right] \right) \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} (1 - X_1), \text{ onde } X_1 = \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K + (1-K)Cs_1
\end{aligned} \tag{A.6}$$

## **Instante 2**

*Bias:*

$$\begin{aligned}
D_2 &= (1-K)(s_1 \Delta U_1 + s_2 \Delta U_0) \\
D_2 &= (1-K)s_1 \Delta U_1 + (1-K)s_2 \Delta U_0 \\
D_2 &= (1-K)s_1 CY^{SP} (1 - X_1) + (1-K)s_2 CY^{SP} \\
D_2 &= (1-K)CY^{SP} (s_1(1 - X_1) + s_2) \\
D_2 &= (1-K)CY^{SP} \left( s_1 \left( 1 - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K - (1-K)Cs_1 \right] \right) + s_2 \right)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

*Variável controlada predita:*

$$Y_2 = \begin{bmatrix} K(s_2 \Delta U_1 + s_3 \Delta U_0) \\ K(s_3 \Delta U_1 + s_4 \Delta U_0) \\ \vdots \\ K(s_{HP} \Delta U_1 + s_{HP} \Delta U_0) \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

*Ação de controle:*

$$\begin{aligned} \Delta U_2 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K \Delta U_1 - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2} \right) K \Delta U_0 - CD_2 \\ \Delta U_2 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K \Delta U_1 - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2} \right) K \Delta U_0 - C(1-K)s_1 \Delta U_1 \\ &\quad - C(1-K)s_2 \Delta U_0 \\ \Delta U_2 &= CY^{SP} - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K + (1-K)Cs_1 \right] \Delta U_1 \\ &\quad - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2} \right) K + (1-K)Cs_2 \right] \Delta U_0 \\ \Delta U_2 &= CY^{SP} - X_1 \Delta U_1 - X_2 \Delta U_0, \text{ onde } X_2 = \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2} \right) K + (1-K)Cs_2 \\ \Delta U_2 &= CY^{SP} - X_1 CY^{SP} (1 - X_1) - X_2 CY^{SP} \\ \Delta U_2 &= CY^{SP} (1 - X_1 (1 - X_1) - X_2) \end{aligned} \tag{A.9}$$

### **Instante 3**

*Bias:*

$$\begin{aligned} D_3 &= (1-K)(s_1 \Delta U_2 + s_2 \Delta U_1 + s_3 \Delta U_0) \\ D_3 &= (1-K)CY^{SP}(s_1(1 - X_1(1 - X_1) - X_2) + s_2(1 - X_1) + s_3) \end{aligned} \tag{A.10}$$

*Variável controlada predita:*

$$Y_3 = \begin{bmatrix} K(s_2 \Delta U_2 + s_3 \Delta U_1 + s_4 \Delta U_0) \\ K(s_3 \Delta U_2 + s_4 \Delta U_1 + s_5 \Delta U_0) \\ \vdots \\ K(s_{HP} \Delta U_2 + s_{HP} \Delta U_1 + s_{HP} \Delta U_0) \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

Ação de controle:

$$\begin{aligned}
\Delta U_3 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K \Delta U_2 - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2} \right) K \Delta U_1 \\
&\quad - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+3} \right) K \Delta U_0 - CD_3 \\
\Delta U_3 &= CY^{SP} - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1} \right) K + (1-K)Cs_1 \right] \Delta U_2 \\
&\quad - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2} \right) K + (1-K)Cs_2 \right] \Delta U_1 \\
&\quad - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+3} \right) K + (1-K)Cs_3 \right] \Delta U_0
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\Delta U_3 = CY^{SP} - X_1 \Delta U_2 - X_2 \Delta U_1 - X_3 \Delta U_0$$

$$\begin{aligned}
\Delta U_3 &= CY^{SP} - X_1(1 - X_1(1 - X_1) - X_2) CY^{SP} - X_2(1 - X_1)CY^{SP} \\
&\quad - X_3CY^{SP}
\end{aligned}$$

$$\Delta U_3 = CY^{SP}(1 - X_1(1 - X_1(1 - X_1) - X_2) - X_2(1 - X_1) - X_3)$$

**Generalizando de forma indutiva:**

Ação de controle:

$$\Delta U_j = CY^{SP} W_j$$

Bias:

$$D_j = (1-K)CY^{SP} \sum_{i=1}^j s_i W_{j-i} \tag{A.13}$$

$$\text{onde } W_j = 1 - \sum_{i=1}^j X_i W_{j-i}$$

$$\text{e } X_i = K \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i} + (1-K)Cs_i$$

## Apêndice B

Neste apêndice são apresentadas algumas definições de matrizes utilizadas para a dedução das expressões algébricas usadas para calcular as ações de controle e os valores de *bias* do MPC no caso MIMO, considerando o erro de modelagem na forma de um fator multiplicativo para cada modelo envolvido.

$$\underline{Y}^{SP} = \begin{bmatrix} \underline{Y}^{SP} \\ \underline{Y}^{SP} \\ \vdots \\ \underline{Y}^{SP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1^{SP} \\ Y_2^{SP} \\ \vdots \\ Y_{ny}^{SP} \\ Y_1^{SP} \\ Y_2^{SP} \\ \vdots \\ Y_{ny}^{SP} \\ Y_1^{SP} \\ Y_2^{SP} \\ \vdots \\ Y_{ny}^{SP} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{ny}^{SP} \end{bmatrix}_{ny \cdot HP \times 1} \quad (\text{B.1})$$

$$\underline{F}_k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{nu,1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{nu,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1,ny} & k_{2,ny} & \cdots & k_{nu,ny} \\ k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{nu,1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{nu,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1,ny} & k_{2,ny} & \cdots & k_{nu,ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{1,ny} & k_{2,ny} & \cdots & k_{nu,ny} \end{bmatrix}_{ny \cdot HP \times nu} \quad (\text{B.2})$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Sm}}_1 & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{Sm}}_2 & \underline{\underline{Sm}}_1 & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{Sm}}_3 & \underline{\underline{Sm}}_2 & \underline{\underline{Sm}}_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \underline{\underline{Sm}}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{Sm}}_{HP} & \underline{\underline{Sm}}_{HP-1} & \underline{\underline{Sm}}_{HP-2} & \cdots & \underline{\underline{Sm}}_{HP-HC} \end{bmatrix}_{ny \cdot HP \times nu \cdot HC} \quad (B.3)$$

com

$$\underline{\underline{Sm}}_i = \begin{bmatrix} s_{11}^i & s_{21}^i & \cdots & s_{nu,1}^i \\ s_{12}^i & s_{22}^i & \cdots & s_{nu,2}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,ny}^i & s_{2,ny}^i & \cdots & s_{nu,ny}^i \end{bmatrix}_{ny \times nu} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{ny \times nu}$$

$$\underline{\underline{Sp}}_j = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Sm}}_{j+1} \\ \underline{\underline{Sm}}_{j+2} \\ \vdots \\ \underline{\underline{Sm}}_{j+HP} \end{bmatrix}_{ny \cdot HP \times nu} \quad (B.4)$$

$$\underline{\underline{Sb}}_j = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Sm}}_j \\ \underline{\underline{Sm}}_j \\ \vdots \\ \underline{\underline{Sm}}_j \end{bmatrix}_{ny \cdot HP \times nu} \quad (B.5)$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} kc_{11} & kc_{12} & \cdots & kc_{1,ny \cdot HP} \\ kc_{21} & kc_{22} & \cdots & kc_{2,ny \cdot HP} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kc_{nu,1} & kc_{nu,2} & \cdots & kc_{nu,ny \cdot HP} \end{bmatrix}_{nu \times ny \cdot HP}, \quad (B.6)$$

onde  $kc_{ij}$  são elementos da matriz  $\underline{\underline{K}}_C$

As matrizes apresentadas neste apêndice são utilizadas a seguir para a dedução das expressões usadas para o cálculo das ações de controle e do *bias* no caso MIMO, considerando erros de modelagem na forma de fatores multiplicativos.

### Instante 0

*Bias:*

$$\underline{D}_0 = \underline{0} \quad (\text{B.7})$$

*Variáveis controladas preditas:*

$$\underline{Y}_0 = \underline{0} \quad (\text{B.8})$$

*Ações de controle:*

$$\Delta \underline{U}_0 = \underline{\underline{C}} \cdot (\underline{Y}^{SP} - \underline{Y}_0 - \underline{D}_0) \quad (\text{B.9})$$

$$\Delta \underline{U}_0 = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{Y}^{SP}$$

onde  $\underline{\underline{C}}$  possui elementos da matriz de controle, conforme definido na Equação (B.6).

### Instante 1

*Bias:*

$$\underline{D}_1 = \underline{Y}_1^{real} - \underline{Y}_1 \quad (\text{B.10})$$

$$\underline{D}_1 = \underline{\underline{Sb}}_1 \Delta \underline{U}_0 - (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sb}}_1) \Delta \underline{U}_0$$

*Variáveis controladas preditas:*

$$\underline{Y}_1 = (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sp}}_1) \Delta \underline{U}_0 \quad (\text{B.11})$$

*Ações de controle:*

$$\Delta \underline{U}_1 = \underline{\underline{C}} \underline{Y}^{SP} - \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sp}}_1) \Delta \underline{U}_0 - \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{Sb}}_1 \Delta \underline{U}_0 - (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sb}}_1) \Delta \underline{U}_0)$$

$$\Delta \underline{U}_1 = \underline{\underline{C}} \underline{Y}^{SP} - \left( \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sp}}_1) + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Sb}}_1 - \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sb}}_1) \right) \Delta \underline{U}_0$$

$$\Delta \underline{U}_1 = \underline{\underline{C}} \underline{Y}^{SP} - \left( \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sp}}_1) + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Sb}}_1 - \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sb}}_1) \right) \underline{\underline{C}} \underline{Y}^{SP} \quad (\text{B.12})$$

$$\Delta \underline{U}_1 = \left( \underline{\underline{I}} - \left( \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sp}}_1) + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Sb}}_1 - \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sb}}_1) \right) \right) \underline{\underline{C}} \underline{Y}^{SP}$$

$$\Delta \underline{U}_1 = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{X}}_1) \underline{\underline{C}} \underline{Y}^{SP}, \text{ onde } \underline{\underline{X}}_1 = \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sp}}_1) + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Sb}}_1 - \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{F}}_k \circ \underline{\underline{Sb}}_1)$$

## Instante 2

*Bias:*

$$\underline{D}_2 = \underline{Y}_2^{real} - \underline{Y}_2$$

$$\underline{D}_2 = \underline{Sb}_1 \Delta \underline{U}_1 + \underline{Sb}_2 \Delta \underline{U}_0 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_1) \Delta \underline{U}_1 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_2) \Delta \underline{U}_0 \quad (\text{B.13})$$

$$\underline{D}_2 = (\underline{Sb}_1 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_1)) \Delta \underline{U}_1 + (\underline{Sb}_2 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_2)) \Delta \underline{U}_0$$

*Variáveis controladas preditas:*

$$\underline{Y}_2 = (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_1) \Delta \underline{U}_1 + (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_2) \Delta \underline{U}_0 \quad (\text{B.14})$$

*Ações de controle:*

$$\begin{aligned} \Delta \underline{U}_2 = \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{C} \left( (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_1) \Delta \underline{U}_1 + (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_2) \Delta \underline{U}_0 \right) \\ - \underline{C} \left[ (\underline{Sb}_1 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_1)) \Delta \underline{U}_1 + (\underline{Sb}_2 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_2)) \Delta \underline{U}_0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{U}_2 = \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{C} \left[ (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_1) + \underline{Sb}_1 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_1) \right] \Delta \underline{U}_1 \\ - \underline{C} \left[ (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_2) + \underline{Sb}_2 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_2) \right] \Delta \underline{U}_0 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\Delta \underline{U}_2 = \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_1 \Delta \underline{U}_1 - \underline{X}_2 \Delta \underline{U}_0,$$

$$\text{onde } \underline{X}_2 = \underline{C} (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_2) + \underline{C} \underline{Sb}_2 - \underline{C} (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_2)$$

$$\Delta \underline{U}_2 = \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_1 (\underline{I} - \underline{X}_1) \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_2 \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

$$\Delta \underline{U}_2 = (\underline{I} - \underline{X}_1 (\underline{I} - \underline{X}_1) - \underline{X}_2) \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

## Instante 3

*Bias:*

$$\underline{D}_3 = \underline{Y}_3^{real} - \underline{Y}_3$$

$$\begin{aligned} \underline{D}_3 = (\underline{Sb}_1 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_1)) \Delta \underline{U}_2 + (\underline{Sb}_2 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_2)) \Delta \underline{U}_1 \\ + (\underline{Sb}_3 - (\underline{F}_k \circ \underline{Sb}_3)) \Delta \underline{U}_0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

*Variáveis controladas preditas:*

$$\underline{Y}_3 = (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_1) \Delta \underline{U}_2 + (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_2) \Delta \underline{U}_1 + (\underline{F}_k \circ \underline{Sp}_3) \Delta \underline{U}_0 \quad (\text{B.17})$$

Ações de controle:

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{U}_3 &= \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{C} \left( \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sp}_1 \right) \Delta U_2 + \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sp}_2 \right) \Delta U_1 + \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sp}_3 \right) \Delta U_0 \right) \\
&\quad - \underline{C} \left[ \left( \underline{Sb}_1 - \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sb}_1 \right) \right) \Delta U_2 + \left( \underline{Sb}_2 - \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sb}_2 \right) \right) \Delta U_1 \right. \\
&\quad \left. + \left( \underline{Sb}_3 - \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sb}_3 \right) \right) \Delta U_0 \right] \\
\Delta \underline{U}_3 &= \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{C} \left[ \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sp}_1 \right) + \underline{Sb}_1 - \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sb}_1 \right) \right] \Delta U_2 \\
&\quad - \underline{C} \left[ \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sp}_2 \right) + \underline{Sb}_2 - \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sb}_2 \right) \right] \Delta U_1 \\
&\quad - \underline{C} \left[ \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sp}_3 \right) + \underline{Sb}_3 - \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sb}_3 \right) \right] \Delta U_0
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\Delta \underline{U}_3 = \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_1 \Delta U_2 - \underline{X}_2 \Delta U_1 - \underline{X}_3 \Delta U_0,$$

$$\text{onde } \underline{X}_3 = \underline{C} \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sp}_3 \right) + \underline{C} \underline{Sb}_3 - \underline{C} \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sb}_3 \right)$$

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{U}_3 &= \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) - \underline{X}_2 \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_2 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} \\
&\quad - \underline{X}_3 \underline{C} \underline{Y}^{SP}
\end{aligned}$$

$$\Delta \underline{U}_3 = \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) - \underline{X}_2 \right) - \underline{X}_2 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) - \underline{X}_3 \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

**Generalizando de forma indutiva:**

Ações de controle:

$$\Delta \underline{U}_j = \underline{W}_j \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

Bias:

$$\underline{D}_j = \left( \sum_{i=1}^j \left( \underline{Sb}_i - \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sb}_i \right) \right) \underline{W}_{j-i} \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} \tag{B.19}$$

$$\text{onde } \underline{W}_j = \underline{I} - \sum_{i=1}^j \underline{X}_i \underline{W}_{j-i}$$

$$\text{e } \underline{X}_i = \underline{C} \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sp}_i \right) + \underline{C} \underline{Sb}_i - \underline{C} \left( \underline{F}_k \circ \underline{Sb}_i \right)$$

## Apêndice C

O comportamento de um controlador preditivo SISO em malha fechada é computado algebricamente a cada instante de tempo, na presença de erro de modelagem de qualquer natureza.

### Instante 0

*Bias:*

$$D_0 = 0 \tag{C.1}$$

*Variável controlada medida:*

$$Y_0 = 0 \tag{C.2}$$

*Ação de controle:*

$$\Delta U_0 = (c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{HP}) \cdot (Y^{SP} - Y_0 - D_0)$$

$$\Delta U_0 = \sum_{i=1}^{HP} c_i Y^{SP} \tag{C.3}$$

$$\Delta U_0 = C Y^{SP}, \text{ onde } C = \sum_{i=1}^{HP} c_i$$

onde  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{HP}$  são os elementos da primeira linha da matriz  $\underline{\underline{K_C}}$

### Instante 1

*Bias:*

$$D_1 = Y_1^{real} - Y_1$$

$$D_1 = s_1^{real} \Delta U_0 - s_1^{modelo} \Delta U_0 \tag{C.4}$$

$$D_1 = (s_1^{real} - s_1^{modelo}) \Delta U_0$$

$$D_1 = (s_1^{real} - s_1^{modelo}) C Y^{SP}$$

*Variável controlada predita:*

$$Y_1 = \begin{bmatrix} s_2^{modelo} \Delta U_0 \\ s_3^{modelo} \Delta U_0 \\ \vdots \\ s_{HP}^{modelo} \Delta U_0 \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

*Ação de controle:*

$$\begin{aligned}
\Delta U_1 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) \Delta U_0 - CD_1 \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) \Delta U_0 - C(s_1^{real} - s_1^{modelo}) \Delta U_0 \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) + C(s_1^{real} - s_1^{modelo}) \right] \Delta U_0 \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) + C(s_1^{real} - s_1^{modelo}) \right] CY^{SP} \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} \left( 1 - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) + C(s_1^{real} - s_1^{modelo}) \right] \right) \\
\Delta U_1 &= CY^{SP} (1 - X_1), \text{ onde } X_1 = \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) + C(s_1^{real} - s_1^{modelo})
\end{aligned} \tag{C.6}$$

## **Instante 2**

*Bias:*

$$\begin{aligned}
D_2 &= \left( (s_1^{real} - s_1^{modelo}) \Delta U_1 + (s_2^{real} - s_2^{modelo}) \Delta U_0 \right) \\
D_2 &= (s_1^{real} - s_1^{modelo}) CY^{SP} (1 - X_1) + (s_2^{real} - s_2^{modelo}) CY^{SP} \\
D_2 &= CY^{SP} \left( (s_1^{real} - s_1^{modelo}) (1 - X_1) + (s_2^{real} - s_2^{modelo}) \right) \\
D_2 &= CY^{SP} \left( (s_1^{real} - s_1^{modelo}) \left( 1 - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) + C(s_1^{real} - s_1^{modelo}) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. + (s_2^{real} - s_2^{modelo}) \right)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

*Variável controlada predita:*

$$Y_2 = \begin{bmatrix} (s_2^{modelo} \Delta U_1 + s_3^{modelo} \Delta U_0) \\ (s_3^{modelo} \Delta U_1 + s_4^{modelo} \Delta U_0) \\ \vdots \\ (s_{HP}^{modelo} \Delta U_1 + s_{HP}^{modelo} \Delta U_0) \end{bmatrix} \tag{C.8}$$

Ação de controle:

$$\begin{aligned}
\Delta U_2 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) \Delta U_1 - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2}^{modelo} \right) \Delta U_0 - CD_2 \\
\Delta U_2 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) \Delta U_1 - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2}^{modelo} \right) \Delta U_0 \\
&\quad - C(s_1^{real} - s_1^{modelo}) \Delta U_1 - C(s_2^{real} - s_2^{modelo}) \Delta U_0 \\
\Delta U_2 &= CY^{SP} - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) + C(s_1^{real} - s_1^{modelo}) \right] \Delta U_1 \\
&\quad - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2}^{modelo} \right) + C(s_2^{real} - s_2^{modelo}) \right] \Delta U_0
\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\Delta U_2 = CY^{SP} - X_1 \Delta U_1 - X_2 \Delta U_0,$$

$$\text{onde } X_2 = \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2}^{modelo} \right) + C(s_2^{real} - s_2^{modelo})$$

$$\Delta U_2 = CY^{SP} - X_1 CY^{SP} (1 - X_1) - X_2 CY^{SP}$$

$$\Delta U_2 = CY^{SP} (1 - X_1 (1 - X_1) - X_2)$$

### Instante 3

Bias:

$$\begin{aligned}
D_3 &= \left( (s_1^{real} - s_1^{modelo}) \Delta U_2 + (s_2^{real} - s_2^{modelo}) \Delta U_1 \right. \\
&\quad \left. + (s_3^{real} - s_3^{modelo}) \Delta U_0 \right)
\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= CY^{SP} \left( (s_1^{real} - s_1^{modelo}) (1 - X_1 (1 - X_1) - X_2) \right. \\
&\quad \left. + (s_2^{real} - s_2^{modelo}) (1 - X_1) + (s_3^{real} - s_3^{modelo}) \right)
\end{aligned}$$

Variável controlada predita:

$$Y_3 = \begin{bmatrix} (s_2^{modelo} \Delta U_2 + s_3^{modelo} \Delta U_1 + s_4^{modelo} \Delta U_0) \\ (s_3^{modelo} \Delta U_2 + s_4^{modelo} \Delta U_1 + s_5^{modelo} \Delta U_0) \\ \vdots \\ (s_{HP}^{modelo} \Delta U_2 + s_{HP}^{modelo} \Delta U_1 + s_{HP}^{modelo} \Delta U_0) \end{bmatrix} \tag{C.11}$$

Ação de controle:

$$\begin{aligned}
\Delta U_3 &= CY^{SP} - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) \Delta U_2 - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2}^{modelo} \right) \Delta U_1 \\
&\quad - \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+3}^{modelo} \right) \Delta U_0 - CD_3 \\
\Delta U_3 &= CY^{SP} - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+1}^{modelo} \right) + C(s_1^{real} - s_1^{modelo}) \right] \Delta U_2 \\
&\quad - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+2}^{modelo} \right) K + C(s_2^{real} - s_2^{modelo}) \right] \Delta U_1 \\
&\quad - \left[ \left( \sum_{i=1}^{HP} c_i s_{i+3}^{modelo} \right) K + C(s_3^{real} - s_3^{modelo}) \right] \Delta U_0 \\
\Delta U_3 &= CY^{SP} - X_1 \Delta U_2 - X_2 \Delta U_1 - X_3 \Delta U_0 \\
\Delta U_3 &= CY^{SP} - X_1(1 - X_1(1 - X_1) - X_2) CY^{SP} - X_2(1 - X_1) CY^{SP} \\
&\quad - X_3 CY^{SP} \\
\Delta U_3 &= CY^{SP}(1 - X_1(1 - X_1(1 - X_1) - X_2) - X_2(1 - X_1) - X_3)
\end{aligned} \tag{C.12}$$

**Generalizando de forma indutiva:**

Ação de controle:

$$\Delta U_j = CY^{SP} W_j$$

Bias:

$$D_j = CY^{SP} \sum_{i=1}^j (s_i^{real} - s_i^{modelo}) W_{j-i} \tag{C.13}$$

$$\text{onde } W_j = 1 - \sum_{i=1}^j X_i W_{j-i}$$

$$\text{e } X_i = \sum_{l=1}^{HP} c_l s_{l+i}^{modelo} + C(s_i^{real} - s_i^{modelo})$$

## Apêndice D

Neste apêndice são apresentadas as expressões usadas para o cálculo das ações de controle e do *bias* do controlador no caso MIMO com erros de modelagem de qualquer natureza. Para isto, serão utilizadas algumas matrizes “aumentadas” já definidas no Apêndice B.

### Instante 0

*Bias:*

$$\underline{D}_0 = \underline{0} \quad (D.1)$$

*Variáveis controladas preditas:*

$$\underline{Y}_0 = \underline{0} \quad (D.2)$$

*Ações de controle:*

$$\Delta \underline{U}_0 = \underline{\underline{C}} \cdot (\underline{Y}^{SP} - \underline{Y}_0 - \underline{D}_0) \quad (D.3)$$

$$\Delta \underline{U}_0 = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{Y}^{SP}$$

onde  $\underline{\underline{C}}$  possui elementos da matriz de controle, conforme definido na Equação (B.6).

### Instante 1

*Bias:*

$$\underline{D}_1 = \underline{Y}_1^{real} - \underline{Y}_1 \quad (D.4)$$

$$\underline{D}_1 = \underline{\underline{sb}}_1^{real} \Delta \underline{U}_0 - \underline{\underline{sb}}_1^{modelo} \Delta \underline{U}_0$$

*Variáveis controladas preditas:*

$$\underline{Y}_1 = \underline{\underline{sp}}_1^{modelo} \Delta \underline{U}_0 \quad (D.5)$$

Ações de controle:

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{U}_1 &= \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{C} \underline{Sp}_1^{modelo} \Delta \underline{U}_0 - \underline{C} \left( \underline{Sb}_1^{real} \Delta \underline{U}_0 - \underline{Sb}_1^{modelo} \Delta \underline{U}_0 \right) \\
\Delta \underline{U}_1 &= \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \left( \underline{C} \underline{Sp}_1^{modelo} + \underline{C} \underline{Sb}_1^{real} - \underline{C} \underline{Sb}_1^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_0 \\
\Delta \underline{U}_1 &= \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \left( \underline{C} \underline{Sp}_1^{modelo} + \underline{C} \underline{Sb}_1^{real} - \underline{C} \underline{Sb}_1^{modelo} \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} \\
\Delta \underline{U}_1 &= \left( \underline{I} - \left( \underline{C} \underline{Sp}_1^{modelo} + \underline{C} \underline{Sb}_1^{real} - \underline{C} \underline{Sb}_1^{modelo} \right) \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} \\
\Delta \underline{U}_1 &= \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP}, \text{ onde } \underline{X}_1 = \underline{C} \underline{Sp}_1^{modelo} + \underline{C} \underline{Sb}_1^{real} - \underline{C} \underline{Sb}_1^{modelo}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

## Instante 2

Bias:

$$\begin{aligned}
D_2 &= Y_2^{real} - Y_2 \\
D_2 &= \underline{Sb}_1^{real} \Delta \underline{U}_1 + \underline{Sb}_2^{real} \Delta \underline{U}_0 - \underline{Sb}_1^{modelo} \Delta \underline{U}_1 - \underline{Sb}_2^{modelo} \Delta \underline{U}_0
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$D_2 = \left( \underline{Sb}_1^{real} - \underline{Sb}_1^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_1 + \left( \underline{Sb}_2^{real} - \underline{Sb}_2^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_0$$

Variáveis controladas preditas:

$$\underline{Y}_2 = \underline{Sp}_1^{modelo} \Delta \underline{U}_1 + \underline{Sp}_2^{modelo} \Delta \underline{U}_0 \tag{D.8}$$

Ações de controle:

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{U}_2 &= \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{C} \left( \underline{Sp}_1^{modelo} \Delta \underline{U}_1 + \underline{Sp}_2^{modelo} \Delta \underline{U}_0 \right) \\
&\quad - \underline{C} \left[ \left( \underline{Sb}_1^{real} - \underline{Sb}_1^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_1 + \left( \underline{Sb}_2^{real} - \underline{Sb}_2^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_0 \right] \\
\Delta \underline{U}_2 &= \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{C} \left[ \underline{Sp}_1^{modelo} + \underline{Sb}_1^{real} - \underline{Sb}_1^{modelo} \right] \Delta \underline{U}_1 \\
&\quad - \underline{C} \left[ \underline{Sp}_2^{modelo} + \underline{Sb}_2^{real} - \underline{Sb}_2^{modelo} \right] \Delta \underline{U}_0
\end{aligned} \tag{D.9}$$

$$\Delta \underline{U}_2 = \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_1 \Delta \underline{U}_1 - \underline{X}_2 \Delta \underline{U}_0,$$

$$\text{onde } \underline{X}_2 = \underline{C} \underline{Sp}_2^{modelo} + \underline{C} \underline{Sb}_2^{real} - \underline{C} \underline{Sb}_2^{modelo}$$

$$\Delta \underline{U}_2 = \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_2 \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

$$\Delta \underline{U}_2 = \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) - \underline{X}_2 \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

### Instante 3

*Bias:*

$$\underline{D}_3 = \underline{Y}_3^{real} - \underline{Y}_3$$

$$\begin{aligned} \underline{D}_3 = & \left( \underline{Sb}_1^{real} - \underline{Sb}_1^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_2 + \left( \underline{Sb}_2^{real} - \underline{Sb}_2^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_1 \\ & + \left( \underline{Sb}_3^{real} - \underline{Sb}_3^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_0 \end{aligned} \quad (D.10)$$

*Variáveis controladas previstas:*

$$\underline{Y}_3 = \underline{Sp}_1^{modelo} \Delta \underline{U}_2 + \underline{Sp}_2^{modelo} \Delta \underline{U}_1 + \underline{Sp}_3^{modelo} \Delta \underline{U}_0 \quad (D.11)$$

*Ações de controle:*

$$\begin{aligned} \Delta \underline{U}_3 = & \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{C} \left( \underline{Sp}_1^{modelo} \Delta \underline{U}_2 + \underline{Sp}_2^{modelo} \Delta \underline{U}_1 + \underline{Sp}_3^{modelo} \Delta \underline{U}_0 \right) \\ & - \underline{C} \left[ \left( \underline{Sb}_1^{real} - \underline{Sb}_1^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_2 + \left( \underline{Sb}_2^{real} - \underline{Sb}_2^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_1 \right. \\ & \left. + \left( \underline{Sb}_3^{real} - \underline{Sb}_3^{modelo} \right) \Delta \underline{U}_0 \right] \\ \Delta \underline{U}_3 = & \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{C} \left[ \underline{Sp}_1^{modelo} + \underline{Sb}_1^{real} - \underline{Sb}_1^{modelo} \right] \Delta \underline{U}_2 \\ & - \underline{C} \left[ \underline{Sp}_2^{modelo} + \underline{Sb}_2^{real} - \underline{Sb}_2^{modelo} \right] \Delta \underline{U}_1 \\ & - \underline{C} \left[ \underline{Sp}_3^{modelo} + \underline{Sb}_3^{real} - \underline{Sb}_3^{modelo} \right] \Delta \underline{U}_0 \end{aligned} \quad (D.12)$$

$$\Delta \underline{U}_3 = \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_1 \Delta \underline{U}_2 - \underline{X}_2 \Delta \underline{U}_1 - \underline{X}_3 \Delta \underline{U}_0,$$

$$\text{onde } \underline{X}_3 = \underline{C} \underline{Sp}_3^{modelo} + \underline{C} \underline{Sb}_3^{real} - \underline{C} \underline{Sb}_3^{modelo}$$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{U}_3 = & \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) - \underline{X}_2 \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} - \underline{X}_2 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} \\ & - \underline{X}_3 \underline{C} \underline{Y}^{SP} \end{aligned}$$

$$\Delta \underline{U}_3 = \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) - \underline{X}_2 \right) - \underline{X}_2 \left( \underline{I} - \underline{X}_1 \right) - \underline{X}_3 \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

### Generalizando de forma indutiva:

Ações de controle:

$$\Delta \underline{U}_j = \underline{W}_j \underline{C} \underline{Y}^{SP}$$

Bias:

$$\underline{D}_j = \left( \sum_{i=1}^j (\underline{Sb}_i^{real} - \underline{Sb}_i^{modelo}) \underline{W}_{j-i} \right) \underline{C} \underline{Y}^{SP} \quad (D.13)$$

onde  $\underline{W}_j = \underline{I} - \sum_{i=1}^j \underline{X}_i \underline{W}_{j-i}$

e  $\underline{X}_i = \underline{C} \underline{Sp}_i^{modelo} + \underline{C} \underline{Sb}_i^{real} - \underline{C} \underline{Sb}_i^{modelo}$

## Apêndice E

O objetivo deste apêndice é determinar uma expressão genérica para a derivada parcial de  $W_j$  em relação a  $X_i$  ( $\partial W_j / \partial X_i$ ).

**j = 1**

$$W_1 = 1 - X_1$$

(E.1)

$$\frac{\partial W_1}{\partial X_1} = -1$$

**j = 2**

$$W_2 = 1 - X_1 W_1 - X_2$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial X_2} = -1$$

(E.2)

$$\frac{\partial W_2}{\partial X_1} = -W_1 - X_1 \frac{\partial W_1}{\partial X_1}$$

**j = 3**

$$W_3 = 1 - X_1 W_2 - X_2 W_1 - X_3$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial X_3} = -1$$

(E.3)

$$\frac{\partial W_3}{\partial X_2} = -W_1 - X_1 \frac{\partial W_2}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial X_1} = -W_2 - X_1 \frac{\partial W_2}{\partial X_1} - X_2 \frac{\partial W_1}{\partial X_1}$$

**j = 4**

$$W_4 = 1 - X_1 W_3 - X_2 W_2 - X_3 W_1 - X_4$$

$$\frac{\partial W_4}{\partial X_4} = -1$$

$$\frac{\partial W_4}{\partial X_3} = -W_1 - X_1 \frac{\partial W_3}{\partial X_3} \tag{E.4}$$

$$\frac{\partial W_4}{\partial X_2} = -W_2 - X_1 \frac{\partial W_3}{\partial X_2} - X_2 \frac{\partial W_2}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial W_4}{\partial X_1} = -W_3 - X_1 \frac{\partial W_3}{\partial X_1} - X_2 \frac{\partial W_2}{\partial X_1} - X_3 \frac{\partial W_1}{\partial X_1}$$

Generalizando, obtém-se:

$$\frac{\partial W_j}{\partial X_i} = -W_{j-i} - \sum_{k=1}^{j-i} X_k \left( \frac{\partial W_{j-k}}{\partial X_i} \right) \tag{E.5}$$