



GENERALIZAÇÃO DA APROXIMAÇÃO PROMPT-JUMP PARA SOLUÇÃO DAS  
EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL A UM GRUPO DE PRECURSORES

Marcus Vinicius Santos da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Alessandro da Cruz Gonçalves,

Aquilino Senra Martinez

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2019

GENERALIZAÇÃO DA APROXIMAÇÃO PROMPT-JUMP PARA SOLUÇÃO DAS  
EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL A UM GRUPO DE PRECURSORES

Marcus Vinicius Santos da Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

---

Prof. Aquilino Senra Martinez, D.Sc.

---

Prof. Alessandro da Cruz Gonçalves, D.Sc.

---

Prof. Daniel Artur Pinheiro Palma, D.Sc.

---

Prof. Zelmo Rodrigues de Lima, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ -BRASIL

FEVEREIRO DE 2019

Silva, Marcus Vinicius Santos da

Generalização da aproximação prompt-jump para solução das equações da cinética pontual a um grupo de precursores/ Marcus Vinicius Santos da Silva- Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XII, 53.: il; 29,7 cm.

Orientadores: Alessandro da Cruz Gonçalves

Aquilino Senra Martinez

Dissertação (mestrado) - UFRJ / COPPE/ Programa de Engenharia Nuclear.

Referências Bibliográficas: p.52-53.

1. Análise da aproximação prompt-jump. 2. Equação da difusão multigrupo dependente do tempo. 3. Expansão em série de potência.

I. Gonçalves, Alessandro da Cruz *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

### **Dedicatória**

Dedico este trabalho à minha querida Mãe Maria  
da Conceição dos Santos Pereira (in memoriam)

Dedico este trabalho em especial a minha querida mãe Maria da Conceição dos Santos Pereira (In memoriam), que mesmo não estando entre nós, me tornou um ser humano capaz de sonhar e enfrentar a vida honestamente.

## **Agradecimentos**

A Deus, que mesmo nos momentos mais difíceis da minha vida não me deixou desistir dessa nova caminhada.

Ao meu querido pai, Vander Rodrigues da Silva (in memoriam), e a minha querida mãe, Maria da Conceição dos Santos pereira (in memoriam), por mesmo não estando mais entre nós a muitos anos, me tornou um ser humano capaz de respeitar, amar e lutar pela vida sempre.

Aos meus orientadores Professores Aquilino Serna Martinez e Alessandro da Cruz Gonçalves por todo o tempo, ensinamentos, atenção pela dedicação, paciência, qualidade profissional.

Aos meus amigos Paulo Igor de Oliveira Pessoa e Wemerson de Carvalho Gonçalves, pela ajuda e a paciência no dia a dia.

A todos os funcionários do Programa de Engenharia Nuclear (PEN) da COPPE, pela organização e por sempre atenderem de boa vontade e paciência.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

Aos membros da banca por aceitarem a participar da minha banca, dedicando parte de seus tempos na leitura e sugestões para o aprimoramento da dissertação.

A minha esposa e amiga Tamires Gomes Teixeira da Silva, por me aturar e apoiar em várias etapas da minha vida.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE / UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc).

GENERALIZAÇÃO DA APROXIMAÇÃO PROMPT-JUMP PARA SOLUÇÃO DAS  
EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL A UM GRUPO DE PRECURSORES

Marcus Vinicius Santos da Silva

Fevereiro/2019

Orientadores: Alessandro da Cruz Gonçalves

Aquilino Senra Martinez

Programa: Engenharia Nuclear

Nesta dissertação é apresentada uma análise qualitativa e quantitativa da aproximação prompt-jump (APJ), tomando como referência as equações da cinética pontual (ECPs) para um grupo de precursores de nêutrons atrasados e sem fonte externa de nêutrons, sujeitas a reatividade constante, linear e periódica. A ideia central do trabalho consiste em apresentar uma generalização da APJ, com utilização do método de expansão em série de potência. A aplicação do método torna a APJ mais precisa, conduzindo a resultados mais próximos da solução de referência, além de contribuir para um baixo custo computacional, mostrando assim a viabilidade do método proposto na solução do conjunto de ECPs.

Abstract of Dissertation presented to COPPE / UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc).

GENERALIZATION OF THE PROMPT-JUMP APPROACH TO SOLUTION OF THE  
EQUATIONS OF POINT KINETICS TO A GROUP OF PRECURSORS

Marcus Vinicius Santos da Silva

February/2019

Advisors: Alessandro da Cruz Gonçalves

Aquilino Senra Martinez

Department: Nuclear Engineering

In this dissertation a qualitative and quantitative analysis of the prompt-jump approximation (APJ) is presented, taking as reference the equations of point kinetics for a one group of precursors of delayed neutrons and without external source of neutrons, for constant, linear and periodic reactivity. The main idea of the work is to present a generalization of the APJ, using the power series expansion method. The application of the method makes APJ more precise, leading to results closer to the reference solution, besides contributing to a low computational cost, thus showing the feasibility of the proposed method in the solution of the ECP set.

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1.Considerações iniciais .....	1
2. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL.....	4
2.1.Equação da difusão multigrupo dependente do tempo... ..	4
2.2.A importância dos nêutrons atrasados nas equações da cinética... ..	5
2.3. Equações da Cinética Pontual... ..	6
2.4.Método de Referência- Solução Numérica das ECP.....	11
2.5.A aproximação prompt- jump (APJ) .....	13
3.OBTENÇÃO DA APROXIMAÇÃO PROMPT – JUMP GENERALIZADA.. ..	15
3.1 Expansão em série de potência para o sistema de equações da cinética pontual.....	15
4.ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	23
4.1.Considerações iniciais .....	23
4.2.Resultado para a reatividade constante.....	24
4.3. Resultados para reatividade variável com o tempo .....	30
4.4. Resultados para reatividade periódica .....	38
5. CONCLUSÃO.....	50
REFERÊNCIAS.....	51

## Lista de Figura

<b>Figura 4.1.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = 400 \text{ pcm}$ , $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ , $\beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3 \cdot 10^{-3} \text{ seg}$ .....	25
<b>Figura 4.2.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = 50 \text{ pcm}$ , $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ , $\beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3 \cdot 10^{-3} \text{ seg}$ .....	26
<b>Figura 4.3.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = 70 \text{ pcm}$ , $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ , $\beta = 0,00755$ , $\Lambda = 3 \cdot 10^{-3} \text{ seg}$ .....	29
<b>Figura 4.4.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -50 \text{ pcm}$ , $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ , $\beta = 0,00755$ , $\Lambda = 3 \cdot 10^{-3} \text{ seg}$ .....	29
<b>Figura 4.5</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -50 \text{ pcm}$ , $\lambda = 0,08 \text{ seg}^{-1}$ , $\beta = 0,00755$ e $\Lambda = 2 \cdot 10^{-3} \text{ seg}$ .....	32
<b>Figura 4.6.</b> Comparação entre o método de referência, a APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = 6 \cdot 10^{-4} t$ , $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ , $\beta = 0,00755$ e $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5} \text{ seg}$ .....	33
<b>Figura 4.7.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -0,003 + 0,00005t$ , $\lambda = 0,008 \text{ seg}^{-1}$ , $\beta = 0,00655$ e $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ seg}$ .....	35
<b>Figura 4.8.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -0,003 + 0,00005t$ , $\lambda = 0,008 \text{ seg}^{-1}$ , $\beta = 0,00655$ e $\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ seg}$ .....	35
<b>Figura 4.9</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -0,003 + 0,00005t$ , $\lambda = 0,008 \text{ seg}^{-1}$ , $\beta = 0,00655$ e $\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{ seg}$ .....	36
<b>Figura 4.10:</b> Comparação entre o método de referência, APJ, APJG para a reatividade linear do tipo: $\rho(t) = 0,006t$ , $\Lambda = 0,3 \text{ seg}$ , $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ e $\beta = 0,00655$ A influência do tempo de geração médio dos nêutrons .....	38
<b>Figura 4.11.</b> Comparação entre o método de referência, APJ, APJG para a reatividade: $\rho(t) = -0,967377 \times 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3} \times \sin(0.1t)$ , $\beta = 0,00655$ , $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ e $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ seg}$ .....	42
<b>Figura 4.12.</b> Comparação entre o método de referência, APJ, APJG para a reatividade: $\rho(t) = -0,967377 \times 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3} \times \sin(0.1t)$ , $\beta = 0,00655$ , $\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ seg}$ e $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ .....	42
<b>Figura 4.13.</b> Comparação entre o método de referência, APJ, APJG para a reatividade: $\rho(t) = -0,967377 \times 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3} \times \sin(0.1t)$ , $\beta = 0,00655$ , $\lambda = 0,0787 \text{ s}^{-1}$ e $\Lambda = 3 \times 10^{-5}$ , no intervalo de tempo entre 0 a 30 s .....	43

**Figura 4.14:** Comparação entre o método de referência, APJ, APJG, para a reatidade linear do tipo:  $\rho(t) = 0,0006 \times \cos(0,1256t)$ ,  $\beta = 0,00655$ ,  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$  e  $\Lambda = 2 \times 10^{-3} \text{ seg}$  .....45

**Figura 4.15:** Comparação entre o método de referência, APJ, APJG, para a reatidade linear do tipo:  $\rho(t) = 0,0006 \times \cos(0,1256t)$ ,  $\beta = 0,00655$ ,  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$  e  $\Lambda = 2 \times 10^{-4} \text{ seg}$  .....45

**Figura 4.16:** Comparação entre o método de referência, APJ, APJG, para a reatidade linear do tipo:  $\rho(t) = 0,0006 \times \cos(0,1256t)$ ,  $\beta = 0,00655$ ,  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$  e  $\Lambda = 2 \times 10^{-5} \text{ seg}$  .....46

**Figura 4.17:** Comparação dos resultados entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatidade:  $\rho(t) = 5 \cdot 10^{-4} \cdot \sin(0,1256 \cdot t)$ ,  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ ,  $\beta = 0,00755$  e  $\Lambda = 3 \times 10^{-2} \text{ seg}$  .....47

## Lista de Tabelas

<b>Tabela 4.1.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = 400 \text{ pcm}, \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3.10^{-3} \text{ seg}$ ... .. 24	24
<b>Tabela 4.2.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade. $\rho(t) = 50 \text{ pcm}, \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3.10^{-4} \text{ seg}$ ... .. 26	26
<b>Tabela 4.3.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = 400 \text{ pcm}, \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3.10^{-3} \text{ seg}$ , $\Lambda = 3.10^{-4} \text{ s}$ e $\Lambda = 3.10^{-5} \text{ s}$ ..... 27	27
<b>Tabela 4.4.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -50 \text{ pcm}, \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3.10^{-3} \text{ seg}$ ... .. 28	28
<b>Tabela 4.5.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = 0,0005t, \Lambda = 2 \times 10^{-3} \text{ seg}, \beta = 0,0075, \lambda = 0,08 \text{ seg}^{-1}$ ... .. 31	31
<b>Tabela 4.6.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade $\rho(t) = 6.10^{-4}t, \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3.10^{-4} \text{ seg}$ ... .. 31	31
<b>Tabela 4.7.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJ generalizada para o segundo termo. $\rho(t) = 6 \times 10^{-4}t, \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3.10^{-4} \text{ seg}$ no intervalo de tempo de 0 a 0,2 seg no passo de 0,01 seg..... 34	34
<b>Tabela 4.8.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -0,003 + 0,00005t, \lambda = 0,0787 \text{ s}^{-1}, \beta = 0,00755$ e com os parâmetros: $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ seg}, \Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ seg}$ e $\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{ seg}$ , ..... 37	37
<b>Tabela 4.9.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -0,967377 \times 10^{-3} + 4.10^{-3} \sin(0,1t), \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e com os parâmetros: $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ seg}, \Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ seg}$ e $\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{ seg}$ ... .. 39	39
<b>Tabela 4.10:</b> Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -0,967377 \times 10^{-3} + 4.10^{-3} \sin(0,1), \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3.10^{-3} \text{ seg}$ ... .. 40	40
<b>Tabela 4.11:</b> Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -0,991411 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-3} \sin(0,1t), \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3.10^{-4} \text{ seg}$ ..... 41	41
<b>Tabela 4.12.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para a reatividade: $\rho(t) = -0,993871 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-3} \sin(0,1t), \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e $\Lambda = 3.10^{-5} \text{ seg}$ ..... 41	41
<b>Tabela 4.13.</b> Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para a reatividade: $\rho(t) = 0,0006 \times \cos(0,156t), \lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}, \beta = 0,00755$ e com os parâmetros: $\Lambda = 2 \times 10^{-3} \text{ seg}, \Lambda = 2 \times 10^{-4} \text{ seg}$ e $\Lambda = 2 \times 10^{-5} \text{ seg}$ ,..... 44	44

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Considerações iniciais

O cenário energético mundial tem sido uma contínua preocupação para humanidade, no que tange a era pós-moderna, pois existe uma crescente preocupação com a proteção ambiental, e principalmente no que diz respeito às emissões de  $CO_2$ . Diante disto, a energia nuclear apresenta-se como uma fonte de energia viável na geração de energia elétrica, além da minimização das emissões de  $CO_2$ . Atualmente a energia nuclear evita a emissão de 2,5 bilhões toneladas/ano de  $CO_2$  em relação ao uso do carvão, deste modo a energia nuclear contribui para mitigar a degradação ambiental por meio da geração de energia núcleo-elétrica. De modo que, as emissões de  $CO_2$  de uma usina nuclear são aproximadamente duas ordens de grandeza menores que as emissões de usinas baseadas em combustíveis fósseis (CHAVES, ALAOR & SHELLARD, RONALD CINTRA, 2005).

Contudo uma das grandes preocupações da atualidade diz respeito ao gerenciamento e armazenamento de rejeitos radiativos, que são gerados em todas as etapas do ciclo de combustível. Principalmente no que está relacionado aos rejeitos de alta atividade, pois se tratam de elementos transurânicos de meia-vida de milhares de anos, gerados no núcleo do reator. Entretanto, o avanço tecnológico tem permitido o reprocessamento do combustível nuclear usando a extração de produtos economicamente relevante, por exemplo, o plutônio (CHAVES, ALAOR & SHELLARD, RONALD CINTRA, 2005). Além disso, o avanço tecnológico aponta para a viabilidade de que os rejeitos possam ser reaproveitados no futuro, mesmo depois de serem reprocessados.

Os reatores nucleares de potência são projetados para operarem a potência constante por longos períodos de tempo. Isso só é possível mediante ao balanceamento da taxa de produção de nêutrons via fissão nuclear e das perdas via absorção e fuga. O que equivale a dizer que a densidade de nêutrons não depende do tempo, ou seja, o reator nuclear está no estado crítico ou estacionário. Contudo, durante a operação os reatores nucleares estão sujeitos a transientes devido a mudança de potência, seja por questões operacionais ou por incidentes, tais como a ejeção de uma barra de controle. Sendo assim a análise de transientes é de vital importância para a operação segura dos reatores nucleares. Deste modo, o modelo de cinética pontual é um dos mais importantes para o estudo da cinética dos reatores nucleares, pois trata-se de um modelo matematicamente simplificado e conservativo do ponto vista operacional. De acordo com (DUDERSTADT & HAMILTON, 1976) são importantes as respostas da potência nuclear em análises de transientes, bem como a previsibilidade do comportamento da potência nuclear, devido as variações temporais da densidade nêutrons. Isso pode ser alcançando a partir das soluções das equações da cinética pontual, mediante ao conhecimento prévio da reatividade ao longo da operação. Entretanto, as equações da cinética pontual (ECP) têm soluções analíticas em apenas alguns casos, como por exemplo: considerando um grupo de precursores e reatividade constante. Já para casos em que existem seis grupos de precursores, seja com reatividade constante ou variando temporalmente, não é possível a obtenção de soluções analíticas.

Nesta dissertação de Mestrado é apresentada uma análise qualitativa e quantitativa da aproximação prompt-jump, bem como um modelo generalizado da aproximação prompt-jump usando o método de expansão em série de potência. Para tanto, o estudo das equações da cinética pontual, considerando apenas um grupo de precursores e sem fonte externas de nêutrons, sujeito a variações arbitrárias de reatividades foi fundamental para a análise e

obtenção de um modelo generalizado da aproximação prompt-jump. A aproximação prompt-jump (APJ) e a condição de estabilidade foram analisadas considerando inserções periódicas, constantes e lineares de reatividades, tomando-se como referência a solução numérica das equações da cinética pontual para um grupo de precursores sem fonte externa de nêutrons usando o método de diferenças finitas.

O principal objetivo desta dissertação consiste em apresentar uma análise da APJ, bem como uma generalização desta aproximação, denominada neste trabalho como Aproximação Prompt-Jump Generalizada (APJG), a fim de verificar suas aplicações na solução das ECP sujeitas às diversas condições de reatividade.

No capítulo 2 é apresentada uma discussão sucinta da obtenção das equações da cinética pontual, assim como das aproximações empregadas nessa obtenção e suas limitações.

No capítulo 3 é apresentado o desenvolvimento do método, APJG, considerando um grupo de precursores, sem fonte externas de nêutrons, usando-se o método da expansão em série de potência.

No capítulo 4 são apresentadas as discussões dos resultados desta dissertação, levando-se em consideração a aplicação do método APJG.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões referentes ao trabalho desenvolvido, assim como perspectivas de trabalhos futuros.

## 2. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL

### 2.1. Equação da difusão multigrupo dependente do tempo.

A análise de transiente em reatores de potência pode ser realizada usando-se a equação da difusão de nêutrons na formulação multigrupo dependente do tempo, considerando a emissão de nêutrons atrasados:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\vec{r}, t) = \nabla \cdot D_g(\vec{r}, t) \cdot \nabla \phi_g(\vec{r}, t) - \Sigma_{R,g}(\vec{r}, t) \phi_g(\vec{r}, t) + \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g'g}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \chi_{d,i,g} \lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \chi_{p,g} \sum_{g'=g}^G (1 - \beta) v_{g'} \Sigma_{f,g'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + Q_g^{ext} \quad (2.1)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \beta_i \sum_{g'=g}^G v_{g'} \Sigma_{f,g'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t), \quad i = 1, \dots, 6; \quad (2.2)$$

- $g$  é o grupo de energia dos nêutrons;
- $i$ : é o número de grupos de precursores de nêutrons atrasados;
- $v_g$ : é a velocidade dos nêutrons do grupo de energia  $g$
- $\phi_g(\vec{r}, t)$ : é o fluxo de nêutrons com energia no grupo  $g$ ;
- $C_i(\vec{r}, t)$ : é a concentração de precursores do grupo  $i$ ;
- $D_g(\vec{r}, t)$ : é o coeficiente de difusão do grupo de energia  $g$ ;
- $\Sigma_{R,g}(\vec{r}, t)$ : é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo de energia  $g$ ;
- $\Sigma_{s,g'g}(\vec{r}, t)$ : é a seção de choque macroscópica de espalhamento diferencial de nêutrons do grupo de energia  $g'$  para o grupo de energia  $g$ ;
- $\chi_{d,i,g}$ : é o espectro de fissão dos nêutrons atrasados do grupo  $i$  com energia  $g$ ;

- $\chi_{p,g}$ : é o espectro de fissão dos nêutrons prontos com energia no grupo  $g$ ;
- $\nu_{g'}$ : é o número de nêutrons emitidos por fissão causado por um nêutron do grupo de energia  $g'$  ;
- $\lambda_i$ : é a constante de decaimento dos precursores de nêutrons atrasados do grupo  $i$ ;
- $\beta_i$ : é a fração de nêutrons atrasados emitidos pelo decaimento de precursores do grupo  $i$ ;
- $\Sigma_{f,g'}(\vec{r}, t)$ : é a seção de choque macroscópica de fissão diferencial do grupo de energia  $g'$ ;
- $Q_g^{ext}$ : é a fonte externa de nêutrons com energia  $g$ ;

O conjunto de equações apresentados no início deste capítulo se caracterizam por levar em conta a produção de nêutrons atrasados dentro do núcleo do reator. Tais nêutrons são de vital importância para o controle dos reatores nucleares, de modo que devem ser considerados para análise de transientes lentos sujeitos a variações de reatividade. (FIGUEIRA, ADRIANO JORGE, 2009). Sendo assim, na próxima seção é apresentada uma breve discussão com respeito à origem e importância dos nêutrons atrasados no processo de reação em cadeia.

## 2.2 A importância dos nêutrons atrasados nas equações da cinética

A fissão nuclear dá origem aos denominados fragmentos de fissão, que são elementos com menor número de massa do que o núcleo original. A maior parte dos produtos de fissão são instáveis, e durante esse processo de decaimento eles emitem nêutrons. Os nêutrons que são emitidos após o processo da fissão são denominados de nêutrons atrasados e os núcleos que os emitem são chamados de precursores de nêutrons atrasados (AZEVEDO, M., SILVA, M., COSTA, L. e PALMA, D., 2009).

Os nêutrons atrasados não têm as mesmas propriedades que os nêutrons prontos produzidos imediatamente após o processo de fissão. A energia média dos nêutrons prontos é maior do que a energia dos nêutrons atrasados (STACEY, W. M,1967). O fato dos nêutrons atrasados nascerem com energias mais baixas tem dois impactos significantes na maneira que eles procedem no ciclo de vida do nêutron. Os nêutrons atrasados têm uma probabilidade muito menor de causar fissões rápidas do que os nêutrons prontos, devido ao fato de que sua energia média está abaixo do mínimo requerido para a ocorrência da fissão rápida. Em segundo lugar, os nêutrons atrasados têm uma probabilidade menor de fuga do núcleo, porque eles nascem com energias mais baixas e, por isso, viajam distâncias mais curtas do que os nêutrons rápidos, contribuindo assim de modo significativo para o processo de reação em cadeia.

### **2.3 Equações da Cinética Pontual**

O conjunto de equações diferenciais parciais acopladas, equações (2.1) e (2.2), são denominadas equações da cinética espacial de nêutrons. Tais equações podem ser utilizadas para análise de transientes. Contudo, soluções numéricas deste conjunto equações apresentam alto custo computacional, de modo a dificultar as aplicações práticas na rotina operacional do reator nuclear (DUDERSTADT & HAMILTON, 1976). Deste modo, é apresentado nesta seção a obtenção das ECP, que tratam-se de um modelo mais simples do ponto de vista computacional, viabilizando aplicações práticas durante a operação do reator. Para simplificar a obtenção das ECP, foi considerado um caso monoenergético em meio homogêneo. Tais simplificações não alteram a forma funcional do conjunto de ECP, modificando apenas nas definições dos parâmetros cinéticos.

As equações da cinética espacial de nêutrons podem ser reescritas, considerando-se o caso monoenergético em meio homogêneo, da seguinte forma:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = (D\nabla^2 - \Sigma_a + (1 - \beta)v\Sigma_f) \phi(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \quad (2.3)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = \beta_i v \Sigma_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t) - \lambda_i C_i(\vec{r}, t), \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (2.4)$$

Admitindo que o fluxo de nêutron e a densidade de precursores possam ser representados por funções separáveis no tempo e no espaço, de modo que ambas as funções possam ser representadas pela expansão de autofunções sob a mesma forma espacial, tal que:

$$\phi(\vec{r}, t) = v \sum_{j=1}^{\infty} n_j(t) \Psi_j(\vec{r}) \quad (2.5)$$

e

$$C_i(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_{i,j}(t) \Psi_j(\vec{r}), \quad (i = 1 \dots 6) \quad (2.6)$$

Sendo assim, as ECP podem ser obtidas usando-se o método de separação de variáveis. Entretanto, antes de proceder com a aplicação direta do método, vale observar que o harmônico fundamental é o que traz a maior contribuição para a expansão em autofunções, tanto para o fluxo de nêutrons quanto para densidade de precursores. Toda via, em situações transientes rápidos, o fluxo de nêutrons não pode ser representado unicamente pelo modo fundamental, de modo que se faz necessário representa-lo pela composição de todos os harmônicos. Entretanto, em situações operacionais normais é bastante comum empregar-se uma função forma que caracterize uma condição de equilíbrio, ou configuração crítica, de modo que o reator encontra-se próximo a um estado crítico.

$$\phi(\vec{r}, t) = vn_1 \Psi_1(\vec{r}) \equiv vn(t) \Psi_1(\vec{r}) \quad (2.7)$$

e

$$C_i(\vec{r}, t) = c_{i,1}(t) \Psi_1(\vec{r}) \equiv c_i(t) \Psi_1(\vec{r}), \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (2.8)$$

Substituindo as equações (2.7) e (2.8) nas equações (2.3) e (2.4), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n(t) \Psi_1(\vec{r}) - Dvn(t) \nabla^2 \Psi_1(\vec{r}) + \Sigma_a vn(t) \Psi_1(\vec{r}) \\ = (1 - \beta) v \Sigma_f vn(t) \Psi_1(\vec{r}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \Psi_1(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

e

$$\frac{d}{dt} c_i(t) \Psi_1(\vec{r}) = \beta_i v \Sigma_f vn(t) \Psi_1(\vec{r}) - \lambda_i c_i(t) \Psi_1(\vec{r}) \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (2.10)$$

Por outro lado, a função forma  $\Psi_1(\vec{r})$  deve satisfazer a equação de Helmholtz, de modo que:

$$\nabla^2 \Psi_1(\vec{r}) = -B_g^2 \Psi_1(\vec{r}), \quad (2.11)$$

sendo,  $B_g^2$ , o buckling geométrico.

Substituindo a equação (2.11) nas equações (2.9) e (2.10), obtém-se finalmente um sistema de equações diferenciais acopladas e independentes da função forma:

$$\frac{d}{dt} n(t) = [(1 - \beta) v \Sigma_f - DB_g^2 - \Sigma_a] vn(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \quad (2.12)$$

e

$$\frac{d}{dt}c_i(t)\Psi_1(\vec{r}) = \beta_i v \Sigma_f v n(t) - \lambda_i c_i(t), \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (2.13)$$

No caso de um reator homogêneo e sem refletor, pode-se mostrar que o fator de multiplicação e o tempo de vida dos nêutrons são definidos como sendo:

$$k \equiv \frac{v \Sigma_f}{\Sigma_a (1 + L^2 B^2)} \quad (2.14)$$

e

$$l \equiv \frac{1}{v \Sigma_a (1 + L^2 B^2)} \quad (2.15)$$

Usando as definições apresentadas pelas equações (2.14) e (2.15), pode-se reescrever as equações (2.12) e (2.13) na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}n(t) = \frac{(1 - \beta)k - 1}{l}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \quad (2.16)$$

e

$$\frac{d}{dt}c_i(t) = \beta_i \frac{k}{l}n(t) - \lambda_i c_i(t), \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (2.17)$$

Definido o tempo médio de geração, como o tempo entre o nascimento do nêutron e sua subsequente absorção induzindo fissão e reatividade como a medida essencial do desvio do fator de multiplicação efetivo da unidade, como sendo:

$$\Lambda \equiv \frac{l}{K_{eff}} \quad (2.18)$$

e

$$\rho(t) \cong \frac{k(t)-1}{k(t)}. \quad (2.19)$$

Utilizando as definições acima, chega-se finalmente a um sistema de equações da cinética pontual.

$$\frac{d}{dt}n(t) = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \quad (2.20)$$

e

$$\frac{d}{dt}c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda_i c_i(t), \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (2.21)$$

As hipóteses empregadas para a obtenção das equações da cinética pontual: tais como a aproximação da difusão monoenergética e a forma espacial independente do tempo, restringem o domínio de validade das ECP, por conta das definições dos parâmetros cinéticos. Entretanto, os parâmetros cinéticos podem ser obtidos de uma forma muito mais geral, utilizando-se da equação de transporte de nêutrons, sem lançar mão das hipóteses citadas (GONÇALVES, A.CRUZ, 2006). Toda via, pode-se proceder de forma empírica, admitindo-se que os valores precisos dos parâmetros cinéticos estejam disponíveis experimentalmente; tornando assim o domínio de validade das ECP muito mais amplo, evitando deste modo as considerações detalhadas da forma espacial do fluxo de nêutrons.

Apesar de serem aparentemente simples, as equações da cinética pontual requerem em certa medida um esforço computacional, de modo que, podem ser exigidas técnicas mais sofisticadas para obter soluções numéricas satisfatórias e de baixo custo computacional. Apesar disso, as equações da cinética pontual nos fornecem, em uma quantidade razoável de casos, soluções analíticas ou numéricas possíveis de serem usadas para fins de controle de reatores nucleares ou mesmo pesquisas básicas.

## 2.4. Método de Referência - Solução Numérica das Equações da Cinética Pontual

Nesta seção é apresentado o método de referência utilizado para solução numérica do conjunto de ECP. Para tanto, empregou-se o método de diferenças finitas para a solução numérica das ECP, considerando um grupo de precursores, a saber:

$$\frac{d}{dt}n(t) = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t) + \lambda c(t) \quad (2.22)$$

e

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda c(t). \quad (2.23)$$

O método de diferenças finitas consiste em um método de discretização onde a derivada de uma função é aproximada pelo coeficiente angular da corda secante (GONÇALVES, A. CRUZ, 2006), de acordo com a expressão abaixo:

$$\left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=t_i} \cong \frac{y(t_i + \Delta t) - y(t_i)}{\Delta t}. \quad (2.24)$$

Aplicando-se a aproximação dada pela equação (2.24) à variação da densidade de nêutrons e a concentração de precursores, equações (2.22) e (2.23), obtém-se que:

$$\left. \frac{d}{dt}n(t) \right|_{t=t_i} \cong \frac{n(t_i + \Delta t) - n(t_i)}{\Delta t} \quad (2.25)$$

e

$$\left. \frac{d}{dt}c(t) \right|_{t=t_i} \cong \frac{c(t_i + \Delta t) - c(t_i)}{\Delta t}. \quad (2.26)$$

A fim de tornar a aplicação do método de diferenças finitas mais próximo da linguagem computacional, vale adotar por simplificação as seguintes definições:

$$N^i \equiv n(t_i); \quad (2.27)$$

$$C^i \equiv c(t_i); \quad (2.28)$$

$$N^{i+1} \equiv n(t_i + \Delta t); \quad (2.29)$$

$$C^{i+1} \equiv c(t_i + \Delta t); \quad (2.30)$$

Aplicando o método de diferenças finitas às equações (2.22) e (2.23), para pequenos intervalos de tempo, e utilizando as definições citadas anteriormente, chega-se ao conjunto de equações da cinética pontual discretizado.

$$\frac{N^{i+1} - N^i}{\Delta t} \cong \frac{\rho^i - \beta}{\Lambda} N^i + \lambda C^i \quad (2.31)$$

e

$$\frac{C^{i+1} - C^i}{\Delta t} \cong \frac{\beta_i}{\Lambda} N^i - \lambda C^i. \quad (2.32)$$

Neste ponto vale reescrever as equações (2.31) e (2.32) de maneira que viabilize calcular recursivamente a densidade de nêutrons e a concentração de precursores. Tal que:

$$N^{i+1} \cong \left( 1 + \Delta t \frac{\rho^i - \beta}{\Lambda} \right) N^i + \Delta t \lambda C^i \quad (2.33)$$

$$C^{i+1} \cong \Delta t \frac{\beta_i}{\Lambda} N^i + (1 - \Delta t)\lambda C^i \quad (2.32)$$

O sistema de equações algébricas acima pode ser calculado de maneira recursiva, a partir das condições iniciais. Para tanto, por simplificação optou-se pela utilização do software Maple para implementação do esquema de discretização apresentado. Durante a implementação foi escolhido um passo tempo,  $\Delta t$ , com uma ordem de grandeza menor que o tempo de geração  $\Lambda$ , a fim de garantir a estabilidade numérica do método (GONÇALVES, A.CRUZ, 2006).

## 2.5. A aproximação prompt- jump (APJ)

Mudanças rápidas de reatividade causam acentuadas mudanças na população de nêutrons prontos seguidas de uma mudança lenta do número de nêutrons atrasados. Portanto, se estivermos interessados em um comportamento assintótico da população de nêutrons, pode-se simplificar as equações da cinética pontual assumindo que ocorre um salto rápido da potência em resposta a qualquer mudança de reatividade. (DUDERSTADT & HAMILTON, 1976). Essa simplificação é conhecida como Aproximação Prompt-Jump (APJ) na qual uma rápida mudança da potência devida aos nêutrons prontos é negligenciada, correspondendo a admitir que,  $\frac{dn(t)}{dt} = 0$ , nas equações da cinética de pontual. Isso implica que as equações da cinética pontual considerando um grupo de precursores podem ser representadas da seguinte forma:

$$0 = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda C(t) \quad (2.33)$$

e

$$\frac{d}{dt}C(t) = \frac{\beta}{\Lambda}n(t) - \lambda C(t), \quad t \geq 0. \quad (2.34)$$

Essa simplificação, nós leva a seguinte equação:

$$n(t) = n_0 \exp\left(\int_0^t \frac{\dot{\rho}(t') - \lambda\rho(t')}{\beta - \rho(t')} dt'\right), \quad t \geq 0. \quad (2.35)$$

A aproximação prompt-jump é frequentemente usada em estudos para as soluções numéricas das equações da cinética pontual, uma vez que utilizada uma escala de tempo muito curta, devido o tempo médio de geração entre o nascimento e a subseqüente absorção de nêutrons induzindo a fissão nuclear, que prioriza o método de diferenças finitas. No entanto, também é útil na simplificação de estimativas analíticas com base no modelo de um grupo de precursores sem fonte de nêutrons externas, uma vez que neste caso a concentração de precursores  $C(t)$  pode ser eliminada para obter uma equação diferencial de segunda ordem simples para a potência nuclear (DUDERSTADT & HAMILTON, 1976).

### 3. OBTENÇÃO DA APROXIMAÇÃO PROMPT-JUMP GENERALIZADA.

#### 3.1. Método da Expansão em Série de Potência

Partindo das Equações da Cinética Pontual (ECP) com um grupo de precursores, sem fonte externas de nêutrons pode-se obter uma generalização da Aproximação Prompt-Jump. Esta generalização partiu da solução do sistema das ECP pelo método do fator integrante, aplicando-se sucessivas integrações por partes que conduzem a uma expansão em série de potência. A Primeira etapa da obtenção da solução do sistema de equações, para a cinética de reatores, é desenvolvida após a aplicação do método do fator integrante. Sendo assim, multiplicando ambos os lados da equação (2.22) pelo termo do fator integrante, obtém-se que:

$$\frac{d}{dt}n(t) - \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t)e^{-\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'} = \lambda C(t)e^{-\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'}. \quad (3.1)$$

Integrando de 0 a  $t$  ambos os lados da equação (3.1), obtém-se uma expressão analítica para a densidade de nêutrons, dado por:

$$n(t) = \left[ n(0) + \int_0^t \lambda C(t') e^{-\int_0^{t'} \frac{\rho(t'') - \beta}{\Lambda} dt''} \right] e^{-\int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'}. \quad (3.2)$$

Antes de proceder com a solução da equação (3.2), vale realizar as seguintes definições:

$$I(t) \equiv \int_0^t \lambda C(t') e^{f(t')} dt'' \quad (3.3)$$

e

$$f(t) \equiv - \int_0^t \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda} dt'. \quad (3.4)$$

Derivando a equação (3.4), obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{df(t')}{dt'} = - \frac{\rho(t') - \beta}{\Lambda}, \quad (3.5)$$

onde tem-se que:

$$df(t') = - \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} dt', \quad (3.6)$$

ou ainda,

$$dt' = \frac{\Lambda}{\beta - \rho(t)} df(t'). \quad (3.7)$$

Consequentemente, a equação (3.3) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$I(t) = \int_0^t \frac{\Lambda \lambda C(t)}{\beta - \rho(t)} e^{f(t')} df(t') \quad (3.8)$$

Agora, definindo  $\tilde{C}(t) \equiv \Lambda \lambda C(t)$ , pode-se escrever que:

$$I(t) = \int_0^t \frac{\tilde{C}(t)}{\beta - \rho(t)} e^{f(t')} df(t'). \quad (3.9)$$

Resolvendo a integral na equação (3.9) por partes, tem-se que:

$$I(t) = \frac{\tilde{C}(t)}{\beta - \rho(t)} e^{f(t)} - \frac{\tilde{C}(0)}{\beta - \rho(0)} e^{f(0)} - \int_0^t \frac{d}{df'} \left( \frac{\tilde{C}(t')}{\beta - \rho(t')} \right) e^{f(t')} dt'. \quad (3.10)$$

Quando  $t = 0$  os limites de integração na equação (3.4) são iguais, logo  $f(0) = 0$ . Portanto, pode-se escrever que:

$$I(t) = I_0(t)e^{f(t)} - I_0(0) + I'_1(t), \quad (3.11)$$

onde,

$$I_0(t) \equiv \frac{\tilde{C}(t)}{\beta - \rho(t)} \quad (3.12)$$

e

$$I'_1(t) \equiv \int_0^t \frac{d}{df'} \left( \frac{\tilde{C}(t')}{\beta - \rho(t')} \right) e^{f(t')} dt'. \quad (3.13)$$

Após a integração por partes, pode-se reescrever a equação (3.13) da seguinte forma:

$$I'_1(t) = -\frac{d}{df'} \left[ \frac{\tilde{C}(t)}{\beta - \rho(t)} \right] e^{f(t)} + \frac{d}{df'} \left[ \frac{\tilde{C}(0)}{\beta - \rho(0)} \right] + I'_2(t) \quad (3.14)$$

onde,

$$I'_2(t) \equiv \int_0^t \frac{d^2}{df'^2} \left\{ \frac{\tilde{C}(t')}{\beta - \rho(t')} \right\} e^{f(t')} dt'. \quad (3.15)$$

A partir da equação (3.14), obtém-se a seguinte expressão:

$$I'_1(t) = I_1(t)e^{f(t)} - I_1(0) + I'_2(t), \quad (3.16)$$

ou ainda,

$$I(t) = [I_0(t) + I_1(t)]e^{f(t)} - [I_0(0) + I_1(0)] + I'_2(t), \quad (3.17)$$

sendo,

$$I_1(t) \equiv -\frac{d}{df'} \left[ \frac{\tilde{C}(t)}{\beta - \rho(t)} \right]. \quad (3.18)$$

Procedendo de maneira análoga para a integral  $I'_2(t)$ , equação (3.15), chega-se a seguinte expressão:

$$I(t) = [I_0(t) + I_1(t) + I_2(t)]e^{f(t)} - [I_0(0) + I_1(0) + I_2(0)] + I'_3(t), \quad (3.19)$$

sendo,

$$I_2(t) \equiv \frac{d^2}{df'^2} \left[ \frac{\tilde{C}(t)}{\beta - \rho(t)} \right] \quad (3.20)$$

e

$$I'_3(t) = -\int_0^t \frac{d^3}{df'^3} \left[ \frac{\tilde{C}(t')}{\beta - \rho(t')} \right] e^{f(t')} dt'. \quad (3.21)$$

Sendo assim, pode-se observar que repetindo o mesmo procedimento sucessivamente até a  $n$ -ésima integral,  $I'_n(t)$ , obtém-se finalmente o seguinte resultado para a integral  $I(t)$ , equação (3.9):

$$I(t) = [I_0(t) + I_1(t) + \dots + I_n(t)]e^{f(t)} - [I_0(0) + I_1(0) + \dots + I_n(0)] + I'_n(t). \quad (3.22)$$

Claramente, nota-se que a expressão acima é uma expansão em série de potência; que truncada em  $n = k$ , toma a seguinte forma compacta,

$$I(t) = \left[ \sum_{k=0}^k I_k(t) \right] e^{f(t)} - \sum_{k=0}^k I_k(0) \quad (3.23)$$

sendo,

$$I_k(t) = (-1)^k \frac{d^k}{df^k} \left[ \frac{\tilde{C}(t)}{\beta - \rho(t)} \right] \quad (3.24)$$

Contudo, segundo a equação (3.6), tem-se que:

$$\frac{d}{df} = \frac{dt}{df} \frac{d}{dt} = \frac{\Lambda}{\beta - \rho(t)} \frac{d}{dt} \quad (3.25)$$

Portanto, pode-se reescrever a equação (3.24) da seguinte maneira:

$$I_k(t) = \left[ \frac{-\Lambda}{\beta - \rho(t)} \right]^k \frac{d^k}{dt^k} \left[ \frac{\tilde{C}(t)}{\beta - \rho(t)} \right] \quad (3.26)$$

Substituindo a definição,  $\tilde{C}(t) \equiv \Lambda \lambda C(t)$ , na Eq.(3.26), chega-se:

$$I_k(t) = \left( \frac{\Lambda^2 \lambda}{\beta - \rho(t)} \right) \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{C(t)}{\beta - \rho(t)} \right) \quad (3.27)$$

Então, finalmente obtém-se uma solução que representa a densidade de nêutrons variando no tempo para um grupo de precursores com a ausência de fontes externas de nêutrons, após a obtenção de uma série de potência, usando-se sucessivas integrações por partes. Sendo assim, a densidade de nêutrons pode ser escrita como uma expansão em série de potência da seguinte forma:

$$n(t) = \left\{ n(0) - \sum_{k=0}^K I_k(0) \right\} e^{-f(t)} + \sum_{k=0}^K I_k(t) . \quad (3.28)$$

Fazendo uma análise mais detalhada da equação (3.28), pode-se observar que o primeiro termo decai muito rapidamente, para reatividades abaixo do pronto-crítico.

Portanto, para fins de aproximação assintótica pode-se reescrever que:

$$n(t) \cong \sum_{k=0}^k I_k(t). \quad (3.29)$$

Observe que o cálculo da densidade de nêutrons depende diretamente do cálculo da equação (3.27), que por sua vez depende da ordem da expansão em série de potência, ou seja, quanto maior for o valor inteiro de  $k$ , maior será a ordem da equação diferencial que irá surgir em decorrência da equação (3.27). Isso implica que ao truncar a expansão em série de potência em ordem superior, conduzirá a maior complexidade da equação (3.27). Portanto, nesta pesquisa de dissertação analisaram-se apenas os três primeiros termos da expansão em série de potência.

Para o caso de  $k = 0$ , tem-se a seguinte representação para o primeiro termo da série de potência,

$$I_0(t) = \frac{\Lambda\lambda}{\beta - \rho(t)} C(t). \quad (3.30)$$

Já para o segundo termo da série de potência representado,  $k = 1$ , tem-se uma equação diferencial de primeira ordem,

$$I_1(t) = -\frac{\Lambda^2\lambda}{(\beta - \rho(t))^2} \left[ \frac{d}{dt} C(t) + \frac{C(t) \frac{d\rho}{dt}}{(\beta - \rho(t))} \right]. \quad (3.31)$$

Considerando o terceiro termo da série de potência representado,  $k = 2$ , tem-se uma equação diferencial de segunda ordem,

$$I_2(t) = -\frac{\Lambda^3 \lambda}{(\beta - \rho(t))^3} \frac{d^2}{dt^2} C(t) - \frac{\Lambda^3 \lambda}{(\beta - \rho(t))^3} \frac{2C(t) \left(\frac{d}{dt} \rho(t)\right)^2}{(\beta - \rho(t))^2} - \frac{\Lambda^3 \lambda}{(\beta - \rho(t))^3} \frac{2 \frac{d}{dt} C(t) \frac{d}{dt} \rho(t) + C(t) \frac{d^2}{dt^2} \rho(t)}{(\beta - \rho(t))} \quad (3.32)$$

Substituindo as equações (3.30), (3.31) e (3.32) na equação(2.23), tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} C(t) = \frac{\beta}{\Lambda} \sum_{k=0}^{k=2} I_k(t) - \lambda C(t) \quad (3.33)$$

Admitindo que o somatório de  $k = 0$  até 1, e substituindo na equação (3.33), chega a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} C(t) = \frac{\beta}{\Lambda} (I_0(t) + I_1(t)) - \lambda C(t) \quad (3.34)$$

Substituindo a equação (3.29) na equação (2.22) chegamos a um modelo proposto denominado de Aproximação Prompt-Jump Generalizada (APJG), onde calcula-se a densidade de nêutrons em função do tempo para quaisquer inserções de reatividades no sistema. Com isso, após a expansão em série de potência chegamos a seguinte conjunto de equações:

$$n(t) = \left( \frac{\lambda \Lambda}{\beta - \rho(t)} - \frac{\Lambda^2 \lambda}{(\beta - \rho(t))^3} \frac{d\rho}{dt} \right) \left( C(0) e^{\int_0^t (g(t')) dt'} \right) - \frac{\Lambda^2 \lambda}{(\beta - \rho(t))^2} \frac{d}{dt} \left( C(0) e^{\int_0^t (g(t')) dt'} \right) \quad (3.35)$$

$$g(t) \equiv \frac{\frac{\rho(t)}{(\beta - \rho(t))} - \frac{\beta \Lambda}{(\beta - \rho(t))^3} \frac{d\rho}{dt}}{1 + \frac{\beta \lambda \Lambda}{(\beta - \rho(t))^2}} \quad (3.36)$$

$$C(0) \equiv \frac{\beta}{\lambda\Lambda} n(0) \quad (3.37)$$

A equação (3.35) é o resultado da aplicação do método proposto denominado de APJG. Observe ainda que o método de APJG pode conduzir a soluções dependendo apenas do grau de complexidade da função  $g(t)$  que depende diretamente da reatividade.

No próximo capítulo são apresentados resultados obtidos com método de APJG considerando inserções de reatividade arbitrária, bem como mudanças arbitrárias na magnitude do tempo médio de geração.

De acordo com as equações (3.35), serão implementados três tipos de reatividades propostas que estão sendo abordadas nessa dissertação, com o intuito de obter as formulações analíticas. Porém quando simulado no software, Maple, encontram-se modelos analíticos para a densidade de nêutrons em função do tempo para três tipos de reatividade testadas nesse trabalho, onde serão apresentados. Já para a reatividade oscilatória o resultado se torna numérico.

Quando implementada a reatividade constante na equação (3.35), pode-se obter o seguinte formato para um resultado analítico da densidade de nêutrons com a reatividade constante:

$$n(t) = \frac{\beta n(0)}{(\beta - \rho_0)} e^{\left(\frac{\rho_0 \lambda (\beta - \rho_0) t}{(\beta - \rho_0)^2 + \beta \lambda \Lambda}\right)} - \frac{\Lambda \beta}{(\beta - \rho_0)^2} n(0) e^{\frac{\rho_0 \lambda^2 \Lambda^2 \beta (\beta - \rho_0)}{(\beta - \rho_0) + \beta \lambda \Lambda} t} \quad (3.38)$$

Agora vamos apresentar mais uma solução analítica para a reatividade variando no tempo,

do tipo:  $\rho(t) = \rho_0 t$ :

$$n(t) = \left( \frac{\lambda\Lambda}{(\beta - \rho_0 t)} - \frac{\Lambda^2\lambda}{(\beta - \rho_0 t)^3} \rho_0 \right) \frac{\beta n(0)}{(\beta - \rho_0)} e^{\int_0^t g(t') dt'} - \frac{\Lambda^2\lambda}{(\beta - \rho_0 t)^2} \left( \frac{\beta n(0)}{(\beta - \rho_0)} e^{\int_0^t g(t') dt'} \left( -\lambda - \frac{\lambda\beta(2\rho_0^2 t - 2\beta\rho_0)}{\Lambda\lambda\beta - 2\beta\rho_0 t + \beta^2} \right) \right) \quad (3.39)$$

$$\int_0^t g(t') dt' \equiv -\lambda t - \frac{\lambda\beta \ln(\rho_0^2 t^2 + \beta\lambda\Lambda - 2\beta\rho_0 t + \beta^2)}{2\rho_0} + \frac{\lambda^2\beta\Lambda}{\rho_0\sqrt{\beta\lambda\Lambda}} \arctan\left(\frac{\rho_0^2 t - \beta\rho_0}{\rho_0\sqrt{\beta\lambda\Lambda}}\right) + \frac{\beta\lambda}{\rho_0} \ln(\beta\lambda\Lambda + \beta^2) + \frac{\lambda^2\beta\Lambda}{\rho_0\sqrt{\beta\lambda\Lambda}} \left( \frac{\beta}{\rho_0\sqrt{\beta\lambda\Lambda}} \right) \quad (3.40)$$

Agora vamos apresentar mais uma solução analítica para a reatividade variando no tempo,

do tipo:  $\rho(t) = \rho_0 + rt$ :

$$n(t) = \left( \frac{\lambda\Lambda}{\beta - (\rho_0 - rt)} - \frac{\Lambda^2\lambda}{(\beta - (\rho_0 - rt))^3} \frac{d\rho}{dt} \right) C(t) - \frac{\Lambda^2\lambda}{(\beta - (\rho_0 - rt))^2} \frac{d}{dt} C(t) \quad (3.41)$$

$$C(t) \equiv \frac{\beta n(0)}{(\beta - \rho_0)} e^\Gamma \quad (3.42)$$

$$\frac{d}{dt} C(t) \equiv \frac{\beta n(0)}{\Lambda\lambda} e^\gamma \quad (3.43)$$

$$\Gamma = -\lambda t + \ln(rt - \beta + \rho_0)$$

$$\begin{aligned}
& - \ln(r^2 t^2 + \beta \lambda \Lambda - 2\beta r t + 2r t \rho_0 + \beta^2 - 2\beta \rho_0 + \rho_0^2) \frac{\beta \lambda}{2r} \\
& - \frac{\ln(r^2 t^2 + \beta \lambda \Lambda - 2\beta r t + 2r t \rho_0 + \beta^2 - 2\beta \rho_0 + \rho_0^2)}{2} \\
& + \frac{\beta \Lambda \lambda^2 \tan^{-1}\left(\frac{r^2 t^2 - \beta r + r \rho_0}{r \sqrt{\beta \lambda \Lambda}}\right)}{r \sqrt{\beta \lambda \Lambda}} \\
& - \ln(-\beta + \rho_0) + \ln(\Lambda \beta \lambda + \beta^2 - 2\beta \rho_0 + \rho_0^2) \frac{\beta \lambda}{2r} \\
& + \frac{\ln(\Lambda \beta \lambda + \beta^2 - 2\beta \rho_0 + \rho_0^2)}{2} - \frac{\beta \Lambda \lambda^2 \tan^{-1}\left(\frac{-\beta r + r \rho_0}{r \sqrt{\beta \lambda \Lambda}}\right)}{r \sqrt{\beta \lambda \Lambda}}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
\gamma \equiv & \Gamma \left( \lambda + \frac{r}{rt - \beta + \rho_0} \right. \\
& - \left( \frac{2r^2 t - 2\beta r + 2r \rho_0}{2r(r^2 t^2 + \beta \lambda \Lambda - 2\beta r t + 2r t \rho_0 + \beta^2 - 2\beta \rho_0 + \rho_0^2)} \right. \\
& - \frac{2r^2 t - 2\beta r + 2r \rho_0}{2(r^2 t^2 + \beta \lambda \Lambda - 2\beta r t + 2r t \rho_0 + \beta^2 - 2\beta \rho_0 + \rho_0^2)} \\
& \left. \left. + \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{2r^2 t - 2\beta r + 2r^2 \rho_0}{r^2 \beta \lambda \Lambda} \right)} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

## 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 4.1. Considerações Iniciais

Neste capítulo são apresentados as análises dos resultados considerando a APJ e APJG, tomando-se como referência a solução das equações da cinética pontual para um grupo de precursores sem fonte externa nêutrons, usando-se o método de diferenças finitas com passo de tempo de  $\Delta t \sim 10^{-5} \text{seg}$  como referência. Todos os cálculos foram modelados por meio do software Maple.

No cálculo da APJG, levando-se em conta a simplificação e a precisão, foi considerado a expansão em série de potência de primeira ordem, que conduziu os resultados bastante satisfatórios. Para tanto, foram analisados três diferentes tipos de inserções de reatividades (constante, linear e periódica), considerando diferentes valores do tempo médio de geração; os quais influenciam nos resultados.

Quando o tempo médio de geração dos nêutrons é da ordem  $10^{-3} \text{seg}$  a potência nuclear aumenta mais rapidamente, o que torna mais difícil o controle do reator, caso dos reatores rápidos, por outro lado reatores térmicos cujo tempo médio de geração dos nêutrons é da ordem  $10^{-4} \text{seg}$  podem ser controlados mais facilmente. Além disso, verificou-se empiricamente que quando a reatividade está próxima do pronto-crítico a influência do tempo de geração é quase desprezível, tornando a densidade neutrônica determinada principalmente pelos nêutrons atrasados. Em contrapartida, quando a reatividade é próxima do pronto-crítico, ou seja,  $\rho \approx \beta$ , o reator torna-se praticamente fora de controle, significa que a contribuição dos nêutrons atrasados é desprezível frente aos nêutrons prontos (PETERSEN, Z.C, 2011).

Portanto a reatividade tem um papel importante para controle e operação segura do reator nuclear, uma vez que quaisquer mudanças na composição isotópica do núcleo devido a queima do combustível e/ou utilização nos mecanismos de segurança e controle do reator podem alterar drasticamente reatividade do núcleo (GONÇALVES, A.CRUZ, 2006).

Nas seções 4.2, 4.3 e 4.4 são apresentados os resultados das simulações numéricas para reatividades constante, linear e periódica, respectivamente.

#### 4.2. Resultados para a Reatividade Constante.

Nesta subseção são avaliados os resultados dos métodos de APJ e APJG em comparação ao método de referência, para o caso de diferentes inserções de reatividades constante. Na Tabela 4.1 são apresentados os resultados para a densidade de nêutrons usando as aproximações APJ e APJG, em comparação ao método de referência, considerando os seguintes parâmetros:  $\rho = 400 pcm$ ,  $\Lambda = 3 \times 10^{-3} s$ ,  $\beta = 0,00755$  e  $\lambda = 0,0787 s^{-1}$ .

Tabela 4.1 - Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG para uma reatividade constante de 400 pcm.

t(s)	Ref.	APJ	Desvio 1 (%)	APJG	Desvio 2 (%)
0	1,000	1,000	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>
10	4,123	2,427	<b>41,133</b>	4,321	<b>4,802</b>
20	9,021	5,891	<b>34,690</b>	9,397	<b>4,173</b>
30	19,736	14,300	<b>27,542</b>	20,436	<b>3,548</b>
40	43,178	34,710	<b>19,612</b>	44,442	<b>2,926</b>
50	94,466	84,251	<b>10,813</b>	96,647	<b>2,308</b>
60	206,673	204,498	<b>1,052</b>	210,176	<b>1,694</b>
70	452,160	496,370	<b>9,777</b>	457,064	<b>1,084</b>
80	989,237	1204,817	<b>21,792</b>	993,963	<b>0,477</b>
90	2164,251	2924,397	<b>35,122</b>	2161,538	<b>0,125</b>
100	4734,945	7098,253	<b>49,912</b>	4700,628	<b>0,724</b>

Na figura 4.1 são apresentados mais detalhadamente os resultados do comportamento temporal da densidade de nêutrons, referente à Tabela 4.1.

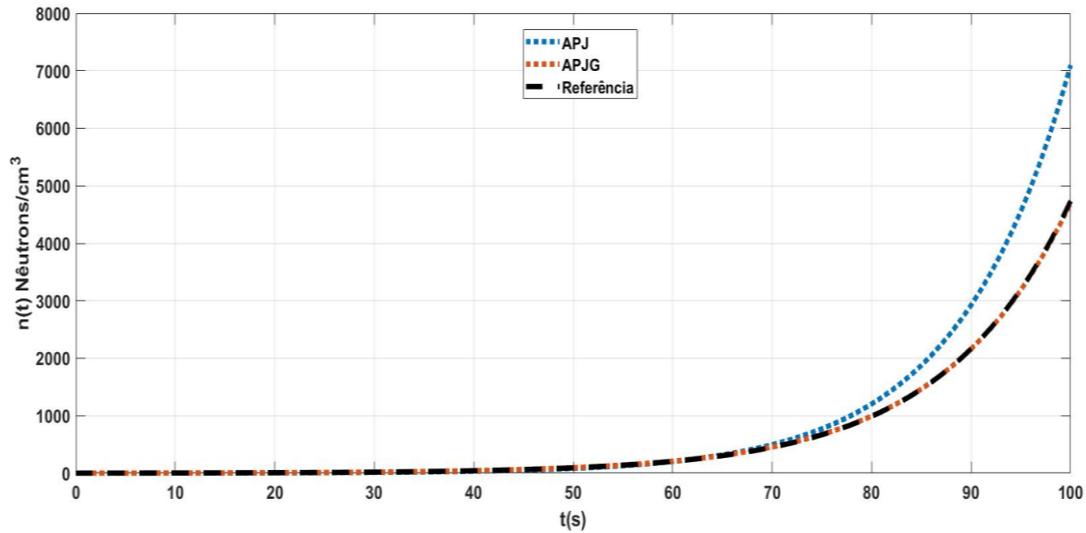


Figura 4.1 - Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG para uma reatividade constante de 400 pcm.

A partir dos resultados mostrados na Tabela 4.1 e na Figura 4.1, pode-se verificar que APJG apresentou resultados melhores do que aqueles obtidos pela APJ, a qual apresentou erro de no máximo 49,9% para  $t = 100$  s, enquanto a APJG apresentou erro máximo 4.8% para  $t = 10$  seg.

A seguir são apresentados mais resultados para diferentes níveis de reatividade constante com intuito de verificar a precisão do método proposto nesta dissertação.

Na Tabela 4.2 e Figura 4.2 são apresentados os resultados para a densidade de nêutrons usando as aproximações APJ e APJG, em comparação ao método de referência, considerando os seguintes parâmetros:  $\rho = 50$  pcm,  $\Lambda = 3 \times 10^{-4}$  seg,  $\beta = 0,00755$ ,  $\lambda = 0,0787$  seg<sup>-1</sup>.

Tabela 4.2 - Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG para uma reatividade constante de 50 pcm.

t[s]	Ref.	APJ	Desvio 1 (%)	APJG	Desvio 2 (%)
0	1,000	1,000	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>
10	1,183	1,084	<b>8,398</b>	1,187	<b>0,3249</b>
20	1,278	1,175	<b>8,128</b>	1,283	<b>0,3239</b>
30	1,381	1,273	<b>7,859</b>	1,386	<b>0,3230</b>
40	1,493	1,379	<b>7,588</b>	1,498	<b>0,3220</b>
50	1,613	1,495	<b>7,316</b>	1,618	<b>0,3211</b>
60	1,743	1,620	<b>7,044</b>	1,749	<b>0,3201</b>
70	1,883	1,756	<b>6,771</b>	1,889	<b>0,3191</b>
80	2,035	1,903	<b>6,497</b>	2,042	<b>0,3182</b>
90	2,199	2,062	<b>6,222</b>	2,206	<b>0,3172</b>
100	2,376	2,235	<b>5,947</b>	2,384	<b>0,3163</b>

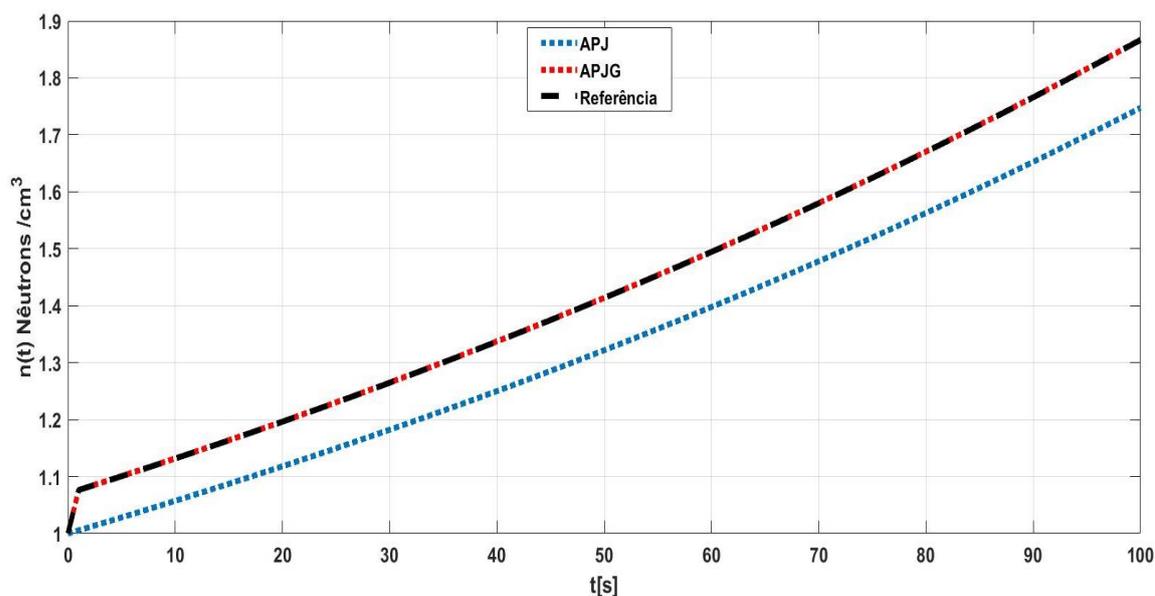


Figura 4.2 - Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG para uma reatividade constante de 50 pcm.

Fazendo uma análise mais minuciosa dos resultados apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2 e nas Figuras 4.1 e 4.2, ficaram bem evidentes que nos intervalos de tempo entre 0 seg e 100 seg pode-se notar que os erros relativos da coluna do desvio 2 são bem menores quando comparados aos erros relativos mostrados na coluna Desvio 1. Além do mais, os

erros relativos respectivos a APJ mostrados na coluna Desvio 1 possuem uma enorme discrepância com respeito aos resultados referência. Isso nos mostra que a APJG satisfaz com sucesso o objetivo do trabalho para o caso de uma reatividade constante e mostrando claramente que APJG mostrou-se eficaz após a aplicação do método.

Os próximos resultados apresentados seguir nesta subseção, têm relação com as mudanças na magnitude do tempo médio de geração, a fim de avaliar a influência deste parâmetro com respeito ao método proposto.

Portanto, nas Tabelas 4.3 e 4.4 são apresentados os resultados para a densidade nêutron variando no tempo entre 0 *seg* e 100 *seg*, para os parâmetros  $\beta = 0,00755$  e  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ , considerando diferentes valores do tempo médio de geração e níveis de reatividade. As colunas de D1 e D2 são referentes ao desvio relativo percentual entre o método de referência e APJ e método de referência e APJG, respectivamente.

Tabela 4.3 - Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, considerando diferentes valores do tempo médio de geração, para uma reatividade constante de 70 pcm

$t(s)$	$\Lambda = 3 \cdot 10^{-3} \text{seg}$			$\Lambda = 3 \cdot 10^{-4} \text{seg}$			$\Lambda = 3 \cdot 10^{-5} \text{seg}$		
	Ref.	D1(%)	D2(%)	Ref.	D1(%)	D2(%)	Ref.	D1 (%)	D2(%)
0	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>
10	1,183	<b>8,453</b>	<b>0,253</b>	1,193	<b>9,220</b>	<b>0,000</b>	1,194	<b>9,296</b>	<b>0,000</b>
20	1,278	<b>8,137</b>	<b>0,312</b>	1,292	<b>9,133</b>	<b>0,000</b>	1,294	<b>9,273</b>	<b>0,000</b>
30	1,381	<b>7,892</b>	<b>0,289</b>	1,400	<b>9,142</b>	<b>0,077</b>	1,402	<b>9,272</b>	<b>0,000</b>
40	1,492	<b>7,573</b>	<b>0,335</b>	1,517	<b>9,096</b>	<b>0,065</b>	1,520	<b>9,276</b>	<b>0,000</b>
50	1,612	<b>7,320</b>	<b>0,372</b>	1,644	<b>9,124</b>	<b>0,000</b>	1,647	<b>9,289</b>	<b>0,000</b>
60	1,742	<b>6,997</b>	<b>0,344</b>	1,781	<b>9,039</b>	<b>0,000</b>	1,785	<b>9,243</b>	<b>0,000</b>
70	1,883	<b>6,797</b>	<b>1,129</b>	1,929	<b>9,020</b>	<b>0,051</b>	1,934	<b>9,255</b>	<b>0,000</b>
80	2,035	<b>6,535</b>	<b>0,294</b>	2,090	<b>8,995</b>	<b>0,000</b>	2,096	<b>9,268</b>	<b>0,000</b>
90	2,199	<b>6,230</b>	<b>0,318</b>	2,265	<b>8,962</b>	<b>0,000</b>	2,272	<b>9,242</b>	<b>0,000</b>
100	2,376	<b>5,976</b>	<b>0,294</b>	2,454	<b>8,964</b>	<b>0,000</b>	2,462	<b>9,260</b>	<b>0,000</b>

Tabela 4.4 - Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, considerando diferentes valores do tempo médio de geração, para uma reatividade constante  $-50 pcm$ .

$t(s)$	$\Lambda = 3.10^{-3}seg$			$\Lambda = 3.10^{-4}seg$			$\Lambda = 3.10^{-5}seg$		
	Ref.	D1(%)	D2(%)	Ref.	D1(%)	D2(%)	Ref.	D1(%)	D2(%)
0	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>
10	0,897	<b>6,131</b>	<b>0,222</b>	0,893	<b>6,606</b>	<b>0,000</b>	0,893	<b>6,606</b>	<b>0,000</b>
20	0,855	<b>5,964</b>	<b>0,116</b>	0,851	<b>6,462</b>	<b>0,117</b>	0,850	<b>6,588</b>	<b>0,000</b>
30	0,816	<b>5,759</b>	<b>0,046</b>	0,810	<b>6,543</b>	<b>0,000</b>	0,810	<b>6,543</b>	<b>0,000</b>
40	0,778	<b>5,655</b>	<b>0,257</b>	0,772	<b>6,476</b>	<b>0,129</b>	0,771	<b>6,614</b>	<b>0,000</b>
50	0,741	<b>5,668</b>	<b>0,100</b>	0,735	<b>6,530</b>	<b>0,000</b>	0,734	<b>6,675</b>	<b>0,000</b>
60	0,707	<b>5,374</b>	<b>0,100</b>	0,700	<b>6,428</b>	<b>0,000</b>	0,699	<b>6,580</b>	<b>0,000</b>
70	0,674	<b>5,341</b>	<b>0,148</b>	0,666	<b>6,606</b>	<b>0,000</b>	0,661	<b>7,413</b>	<b>0,000</b>
80	0,643	<b>4,665</b>	<b>0,155</b>	0,635	<b>6,456</b>	<b>0,000</b>	0,634	<b>6,624</b>	<b>0,000</b>
90	0,613	<b>5,057</b>	<b>0,163</b>	0,605	<b>6,446</b>	<b>0,165</b>	0,604	<b>6,622</b>	<b>0,000</b>
100	0,584	<b>4,965</b>	<b>0,171</b>	0,576	<b>6,423</b>	<b>0,000</b>	0,575	<b>6,608</b>	<b>0,000</b>

Analisando os resultados apresentados pelas Tabelas 4.3 e 4.4 pode-se observar que a APJG apresentou melhores resultados que APJ para os diferentes valores do tempo médio de geração. Além disso, fica evidente que quanto menor o tempo médio de geração de nêutrons mais satisfatórios são os resultados numéricos da APJG, considerando apenas a expansão em série de potência de segunda ordem.

Nas Figuras 4.3 e 4.4 são representados o comportamento temporal da densidade de nêutrons, usando-se o método de referência, APJ e APJG, para diferentes tipos de reatividade constante e diferentes valores do tempo médio de geração de nêutrons.

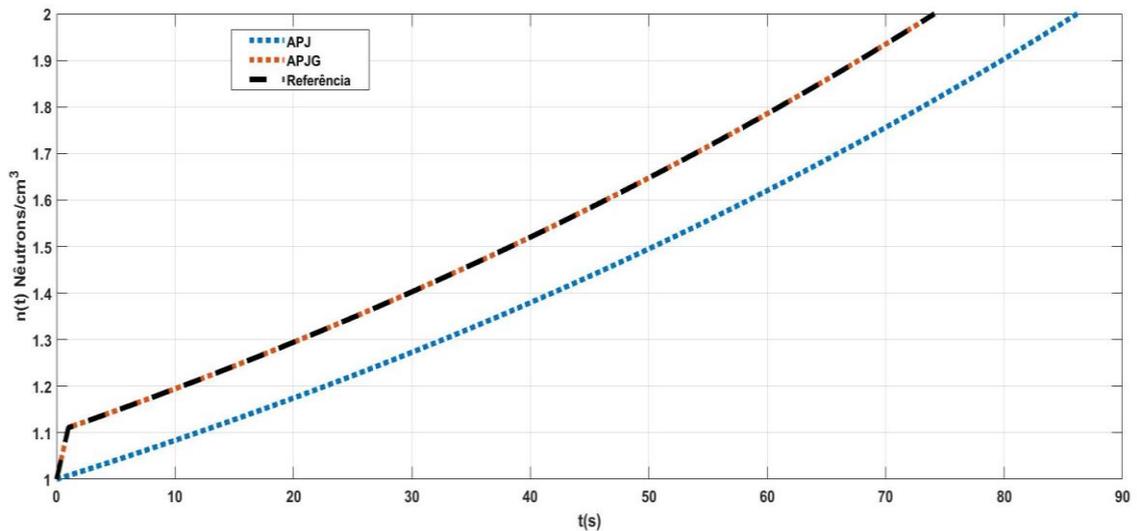


Figura 4.3 - Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG para uma reatividade constante de  $70 \text{ pcm}$ . ( $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ seg}$ ,  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ ,  $\beta = 0,00755$ ).

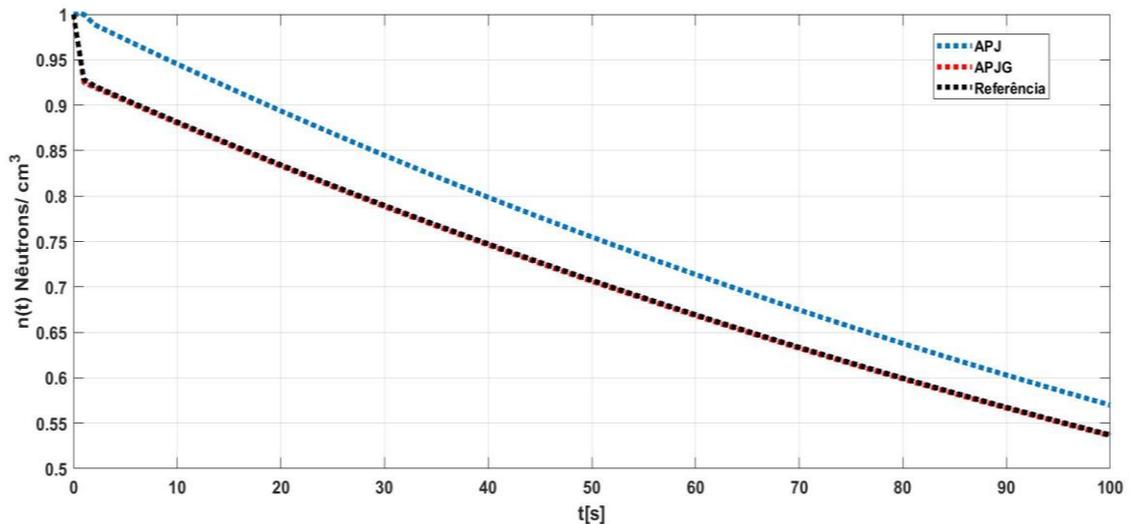


Figura 4.4 - Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG para uma reatividade constante de  $-50 \text{ pcm}$ . ( $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ seg}$ ,  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ ,  $\beta = 0,00755$ .)

Analisando os resultados apresentados pelas Figuras 4.3 e 4.4, é possível observar que a APJG apresenta o mesmo comportamento da solução de referência, de modo que ambas as curvas se sobrepõe, tanto para inserções positivas e negativas de reatividade; com um erro relativo máximo de  $\sim 0,26\%$  para caso de  $-50 \text{ pcm}$  e exato para o caso de  $70 \text{ pcm}$ . Já a aproximação APJ tem uma discrepância visível em relação ao método de referência tanto para inserções de reatividade positiva e negativa, sendo um erro relativo médio de

9,3% para caso de uma reatividade de 70 pcm, e 5,5% para o caso de uma reatividade de -50pcm. Também é possível observa por meio dos resultados apresentados nas Tabela 4.3 e 4.4 que o método proposto, APJG, apresentou excelentes resultados, considerando os diferentes valores do tempo médio de geração, tanto para reatividades positiva e negativas, de modo que o erro máximo observado nas tabelas foi de aproximadamente de 1,13%, estando em perfeito acordo com erro relativo de outros métodos canônicos conhecidos na literatura.

Os resultados apresentados pela APJG mostraram-se bastante satisfatórios, considerando apenas a expansão em série de potência de segunda ordem, para os diversos níveis de reatividade constante, bem como para os diferentes valores do tempo médio de geração. Indicando que o método proposto nesta dissertação mostrou-se bastante preciso e estável para o caso de reatividades constante.

Na próxima subseção são analisados os resultados obtidos com APJ e APJG, para o caso de uma rampa de reatividade (reatividade linear).

### **4.3. Reatividade variando linearmente no tempo.**

Nesta subseção são avaliados os resultados dos métodos de APJ e APJG em comparação ao método de referência, para o caso de uma reatividade variando linearmente com tempo, ou seja, o caso em que a reatividade é uma função de primeiro grau do tipo:  $\rho(t) = At + B$ , sendo A e B constantes.

Nas Tabelas 4.5 e 4.6 são apresentados os resultados para a densidade de nêutrons usando as aproximações APJ e APJG, em comparação ao método de referência, para o caso de uma reatividade variando linearmente no tempo no intervalo entre 0 seg e 10 seg, considerando os seguintes parâmetros: Tabela 4.5 ( $\beta = 0,0075$ ,  $\lambda = 0,08 \text{ s}^{-1}$  e  $\Lambda = 2 \times 10^{-3} \text{ seg}$ ) e Tabela 4.6 ( $\beta = 0,00755$ ,  $\lambda = 0,0787 \text{ s}^{-1}$  e  $\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ seg}$ ). Vale ainda destacar que as colunas de Desvio 1 e Desvio 2 são referentes ao desvio relativo

percentual entre o método de referência e APJ e método de referência e APJG, respectivamente.

Tabela 4.5: Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para caso de uma variação de reatividade linear,  $\rho(t) = -5 \times 10^{-4}t$ .

t[s]	Ref.	APJ	Desvio 1	APJG	Desvio 2
0	1,000	1,000	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>
1	0,936	0,995	<b>6,303</b>	0,934	<b>0,213</b>
2	0,930	0,990	<b>6,451</b>	0,929	<b>0,107</b>
3	0,926	0,985	<b>6,371</b>	0,924	<b>0,215</b>
4	0,921	0,980	<b>6,406</b>	0,920	<b>0,108</b>
5	0,917	0,975	<b>6,324</b>	0,915	<b>0,218</b>
6	0,912	0,970	<b>6,359</b>	0,911	<b>0,109</b>
7	0,908	0,965	<b>6,277</b>	0,906	<b>0,220</b>
8	0,903	0,960	<b>6,312</b>	0,902	<b>0,110</b>
9	0,899	0,955	<b>6,229</b>	0,898	<b>0,111</b>
10	0,894	0,951	<b>6,375</b>	0,893	<b>0,111</b>

Tabela 4.6: Comparação entre o método de referência, APJ e a APJG, para caso de uma variação de reatividade linear,  $\rho(t) = 6 \times 10^{-4}t$ .

t(s)	Ref.	APJ	Desvio 1	APJG	Desvio 2
0	1,000	1,000	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>
1	1,052	1,089	<b>3,517</b>	1,044	<b>0,760</b>
2	1,148	1,205	<b>4,965</b>	1,138	<b>0,871</b>
3	1,271	1,357	<b>6,766</b>	1,255	<b>1,258</b>
4	1,431	1,562	<b>9,154</b>	1,403	<b>1,956</b>
5	1,641	1,848	<b>12,614</b>	1,590	<b>3,107</b>
6	1,924	2,264	<b>17,671</b>	1,824	<b>5,197</b>
7	2,315	2,904	<b>25,442</b>	2,105	<b>9,071</b>
8	2,875	3,976	<b>38,295</b>	2,392	<b>16,800</b>
9	3,708	5,999	<b>61,785</b>	2,485	<b>32,982</b>
10	5,009	10,635	<b>112,31</b>	1,604	<b>67,977</b>

Observe que os resultados apresentados na Tabela 4.5 mostram que a solução obtida pela APJG é muito mais precisa, com um desvio máximo de 0,22% comparado ao APJ que foi de 6,45%. Além disso, os resultados desta tabela mostram que para este nível de reatividade a solução mostrou-se bastante estável. Já os resultados para APJG apresentados na Tabela 4.6 são bem satisfatórios até o instante de 5 *seg*, pois os erros relativos são próximos a 3,1%, quando comparados ao método de referência. Entretanto, após esse intervalo de tempo há uma enorme discrepância nos resultados, principalmente no intervalo entre 8 *seg* e 10 *seg*, cujo erro máximo chega a aproximadamente a 68%, isso deve-se certamente ao fato de a reatividade se aproximar da condição pronto-crítico.

Nas Figuras 4.5 e 4.6 está representado o comportamento temporal da densidade de nêutrons, usando-se o método de referência, APJ e APJG, para diferentes tipos de rampas de reatividade, negativa e positiva.

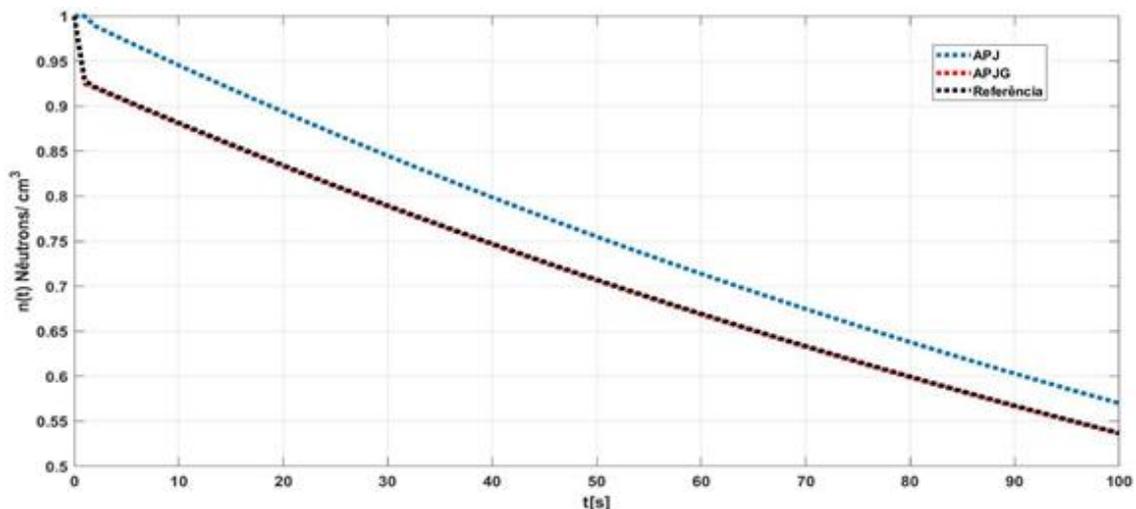


Figura 4.5 Comparação entre o método de referência, APJ e APJG para uma reatividade linear  $\rho(t) = -50t$  pcm ( $\Lambda = 2 \times 10^{-3}$  seg,  $\lambda = 0,08$  seg $^{-1}$ ,  $\beta = 0,0075$ ).

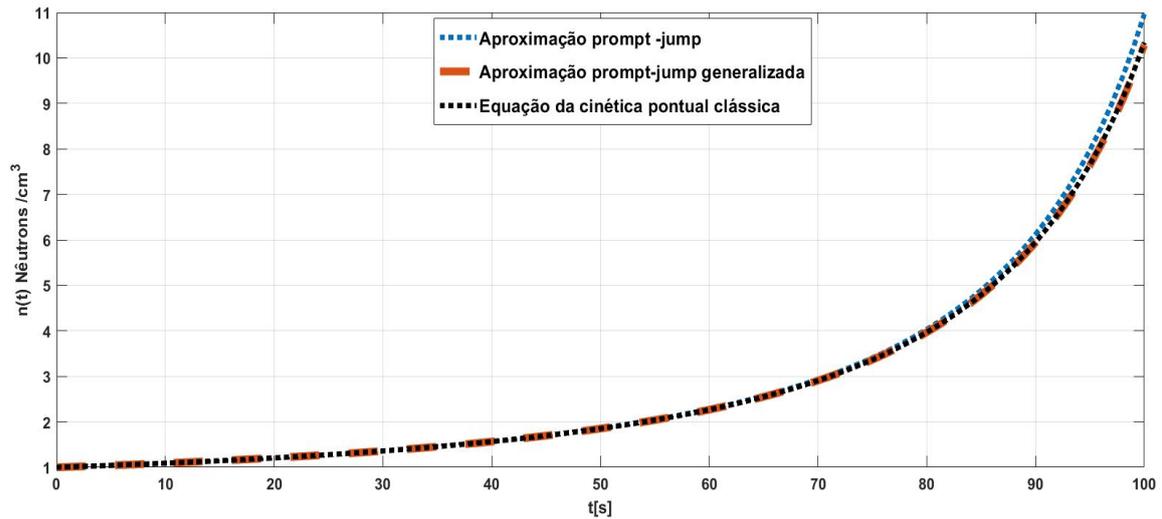


Figura 4.6 Comparação entre o método de referência, APJ e APJG para uma reatividade linear  $\rho(t) = 6 \times 10^{-4}t$ . ( $\Lambda = 3 \times 10^{-4}$  seg,  $\lambda = 0,0787$  seg $^{-1}$ ,  $\beta = 0,00755$ ).

Fazendo uma análise dos resultados considerando as duas diferentes rampas de reatividade negativa, Tabela 4.5 e Figura 4.5, pode-se observar que quando satisfeito as condições:  $|\beta - \rho(t)| \gg \Lambda$  e  $\beta \gg \rho(t)$  são obtidos resultados satisfatórios. (FUMINO AMANO, 1969) Entretanto, para o caso de uma rampa positiva de reatividade, na qual a reatividade ao longo do tempo se aproxima do valor  $\beta$ , chega-se próximo da condição pronto-crítico no intervalo de tempo entre 8 seg e 10 seg, de modo que o método proposto não é bem representativo nesta condição.

Na Tabela 4.7 são apresentados os resultados para a densidade de nêutrons usando as aproximações APJ e APJG, em comparação ao método de referência, para o caso de uma reatividade variando linearmente no tempo no intervalo entre 0 seg e 10 seg, considerando os seguintes parâmetros:  $\Lambda = 3 \times 10^{-3}$  seg,  $\Lambda = 3 \times 10^{-4}$  seg,  $\Lambda = 3 \times 10^{-5}$  seg,  $\beta = 0,00655$  e  $\lambda = 0,008$  seg $^{-1}$ . Além disso, os desvios D1% e D 2% são os respectivos erros relativos, entre o método de referência, APJ e a APJG.

Tabela 4.7 Comparação entre o método de referência, APJ e APJG,  
para a reatividade  $\rho(t) = -0,003 + 0,00005t$ .

$t(s)$	$\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ seg}$			$\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ seg}$			$\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{ seg}$		
	Ref.	D1 %	D 2%	Ref.	D1%	D2%	Ref.	D1%	D2%
0	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>
1	0,719	<b>36,578</b>	<b>0,000</b>	0,704	<b>39,488</b>	<b>0,142</b>	0,703	<b>39,687</b>	<b>0,000</b>
2	0,699	<b>38,054</b>	<b>1,001</b>	0,692	<b>39,45</b>	<b>0,144</b>	0,691	<b>28,511</b>	<b>0,000</b>
3	0,687	<b>38,136</b>	<b>0,582</b>	0,680	<b>39,55</b>	<b>0,000</b>	0,679	<b>39,764</b>	<b>0,000</b>
4	0,676	<b>38,165</b>	<b>0,591</b>	0,669	<b>39,611</b>	<b>0,149</b>	0,665	<b>40,451</b>	<b>0,451</b>
5	0,665	<b>38,045</b>	<b>0,916</b>	0,658	<b>39,650</b>	<b>0,000</b>	0,657	<b>39,726</b>	<b>0,000</b>
6	0,655	<b>38,015</b>	<b>0,610</b>	0,648	<b>39,506</b>	<b>0,154</b>	0,647	<b>39,721</b>	<b>0,000</b>
7	0,645	<b>37,984</b>	<b>0,620</b>	0,637	<b>39,717</b>	<b>0,000</b>	0,637	<b>39,717</b>	<b>0,000</b>
8	0,635	<b>38,047</b>	<b>0,629</b>	0,628	<b>39,490</b>	<b>0,159</b>	0,627	<b>39,808</b>	<b>0,000</b>
9	0,626	<b>37,859</b>	<b>0,638</b>	0,618	<b>39,644</b>	<b>0,000</b>	0,618	<b>39,644</b>	<b>0,000</b>
10	0,617	<b>37,763</b>	<b>0,648</b>	0,609	<b>39,573</b>	<b>0,000</b>	0,609	<b>39,573</b>	<b>0,000</b>

Na Tabela 4.7, os valores apresentados se mostram adequados para os três diferentes tempos médios de geração. Para o caso em  $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ seg}$  o erro máximo relativo obtido pelo método proposto, APJG, foi de aproximadamente 1% no instante de tempo de 2 *seg*. Já para o caso em que  $\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ seg}$  e  $\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{ seg}$ , os erros relativos médios foram de 0,0748% e 0,0451%, respectivamente.

Os resultados alcançados pelo método proposto, APJG, se mostram de acordo com o método de referência, de modo que erros relativos percentuais foram desprezíveis, em alguns casos coincidem exatamente com o método de referência, principalmente para  $\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{ seg}$ .

Nas Figuras 4.7 a 4.9 são apresentados o comportamento temporal da densidade de nêutrons, usando-se o método de referência, APJ e APJG, para diferentes valores do tempo médio de geração, considerando uma rampa de reatividade,  $\rho(t) = -0,003 + 0,00005t$

e  $\beta = 0,00655$  e  $\lambda = 0,008 \text{ seg}^{-1}$ . Com a finalidade de estudar a influência do tempo médio de geração no método proposto.

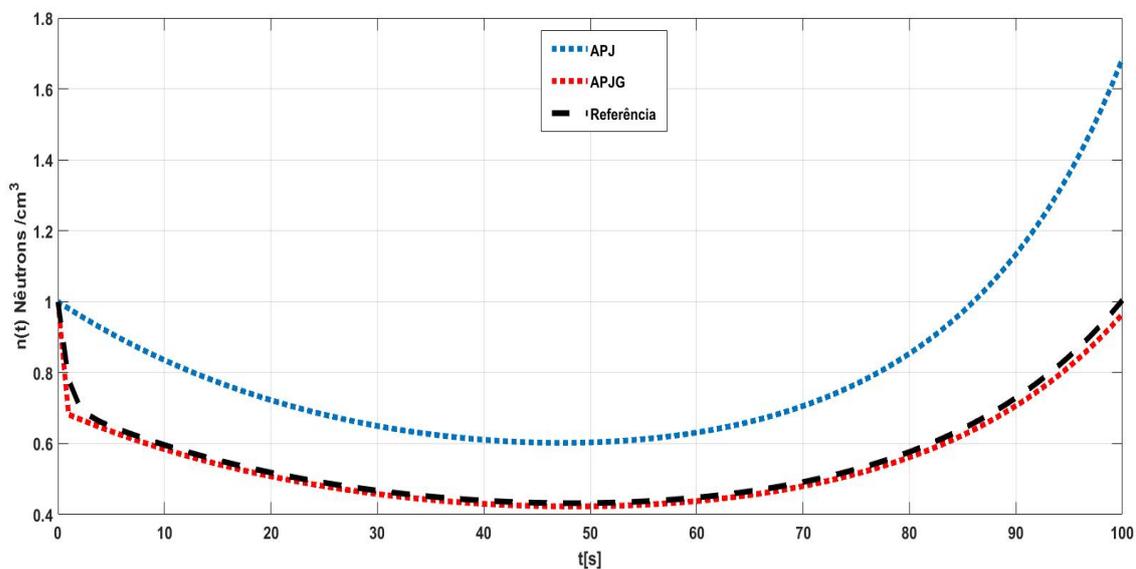


Figura 4.7: Comparação entre método de referência, APJ e APJG, para o caso de  $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ seg}$ .

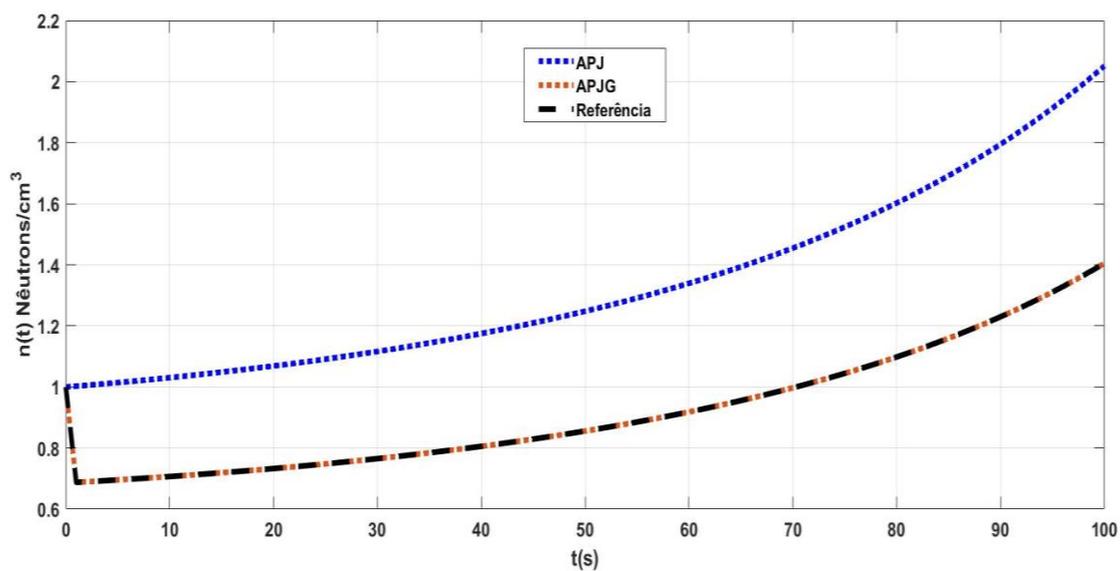


Figura 4.8: Comparação entre método de referência, APJ e APJG, para o caso de  $\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ seg}$ .

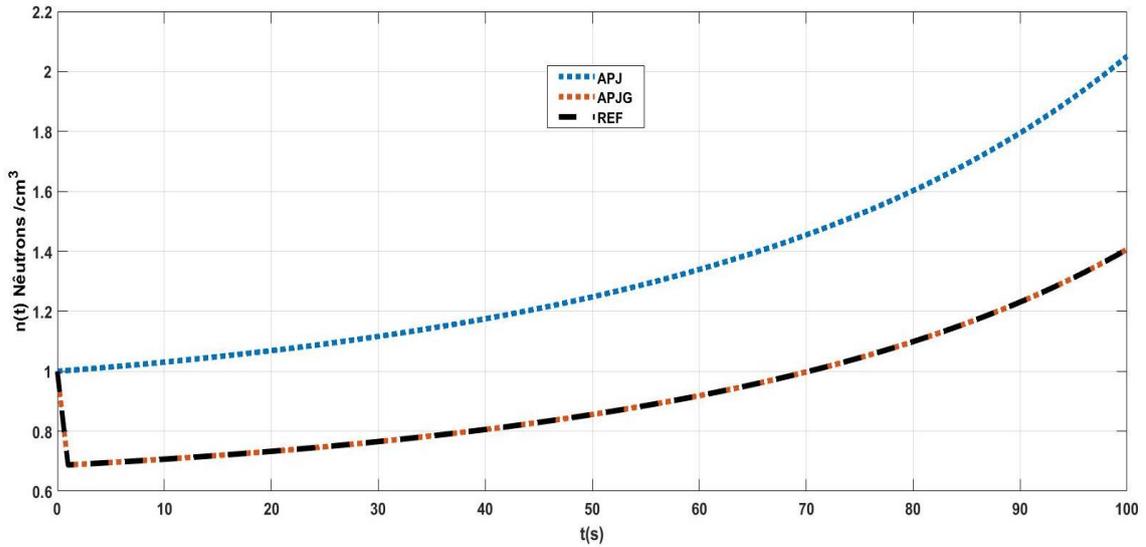


Figura 4.9: Comparação entre método de referência, APJ e APJG, para o caso de  $\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{seg}$ .

Comparando-se os resultados apresentados pela Figura 4.7 com os da Figura 4.8 e 4.9, pode-se observar claramente que ao diminuir o tempo médio de geração os resultados para o método proposto, APJG, são visualmente melhores, de modo que as curvas para o método de referência e APJG se sobrepõe. Essa mesma influência do tempo médio geração sobre o método proposto foi constatada para caso de reatividades constantes. Contudo, observe que para a reatividade em questão a influência da mudança da magnitude de  $\Lambda$  sobre o método proposto é mínima em termos do erro percentual relativo.

Na Tabela 4.8 são apresentados os resultados para a densidade de nêutrons usando as aproximações APJ e APJG, em comparação ao método de referência, para o caso de uma reatividade variando linearmente no tempo no intervalo entre 0 *seg* e 10 *seg*, considerando os seguintes parâmetros:  $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{seg}$ ,  $\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{seg}$ ,  $\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{seg}$ ,  $\beta = 0,00655$  e  $\lambda = 0,008 \text{seg}^{-1}$ . Além disso, os desvios D1% e D 2% são os respectivos erros relativos, entre as equações de referência e APJ e a APJG.

Tabela 4.8 Comparação entre método de referência, APJ e APJG, para a reatividade variando linearmente no tempo,  $\rho(t) = -0,04 + 0,00005t$ .

$t(s)$	$\Lambda = 3 \times 10^{-3} seg$			$\Lambda = 3 \times 10^{-4} seg$			$\Lambda = 3 \times 10^{-5} seg$		
	Ref.	D1 %	D 2%	Ref.	D1%	D2%	Ref.	D1%	D2%
0	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>
1	0,150	<b>93,600</b>	<b>6,000</b>	0,148	<b>532,432</b>	<b>0,000</b>	0,148	<b>532,432</b>	<b>0,000</b>
2	0,140	<b>521,428</b>	<b>6,428</b>	0,139	<b>530,935</b>	<b>0,000</b>	0,139	<b>530,935</b>	<b>0,000</b>
3	0,131	<b>527,480</b>	<b>6,106</b>	0,130	<b>532,307</b>	<b>0,000</b>	0,130	<b>532,307</b>	<b>0,000</b>
4	0,123	<b>526,016</b>	<b>0,813</b>	0,122	<b>531,147</b>	<b>0,000</b>	0,122	<b>531,147</b>	<b>0,000</b>
5	0,115	<b>527,826</b>	<b>0,000</b>	0,114	<b>533,333</b>	<b>0,000</b>	0,114	<b>533,333</b>	<b>0,000</b>
6	0,108	<b>525,925</b>	<b>0,000</b>	0,107	<b>531,775</b>	<b>0,000</b>	0,107	<b>531,775</b>	<b>0,000</b>
7	0,101	<b>526,732</b>	<b>0,000</b>	0,100	<b>533,000</b>	<b>0,000</b>	0,100	<b>533,000</b>	<b>0,000</b>
8	0,095	<b>525,263</b>	<b>0,000</b>	0,094	<b>531,914</b>	<b>0,000</b>	0,094	<b>531,914</b>	<b>0,000</b>
9	0,089	<b>524,719</b>	<b>0,000</b>	0,088	<b>531,818</b>	<b>0,000</b>	0,088	<b>531,818</b>	<b>0,000</b>
10	0,083	<b>527,710</b>	<b>0,000</b>	0,082	<b>535,365</b>	<b>0,000</b>	0,082	<b>535,365</b>	<b>0,000</b>

Observe que os resultados numéricos mostrados nas Tabelas 4.7 e 4.8 nos permitem concluir que para diferentes reatividades quanto menor for o tempo médio de geração melhor é o resultado obtido pela a APJG. Observa-se também que os erros relativos médios (1,93%) são maiores na coluna onde o tempo de geração é da ordem de  $10^{-3} seg$ .

Visualizando os erros relativos (D2%) da Tabela 4.8 para outros valores maiores do tempo médio de geração, verifica-se que o método proposto é exato, ou seja, não apresenta desvio percentual com respeito ao método de referência. Porém, vale destacar que no instante de tempo 1 *seg* até 3 *seg* para  $\Lambda = 3 \times 10^{-3} seg$ , que o erro relativo entre o método de referência e APJG chegou ao máximo de 6,428%, decrescendo até a 0%.

Na Figura 4.10 é mostrado um caso limite de inserção de reatividade, a fim de comparar o comportamento temporal de densidade nêutrons entre método de referência, APJ

e a APJG, no intervalo de tempo de 0 *seg* a 1 *seg*, considerando os seguintes parâmetros:  $\beta = 0,00755$ ,  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$  e  $\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ seg}$ .

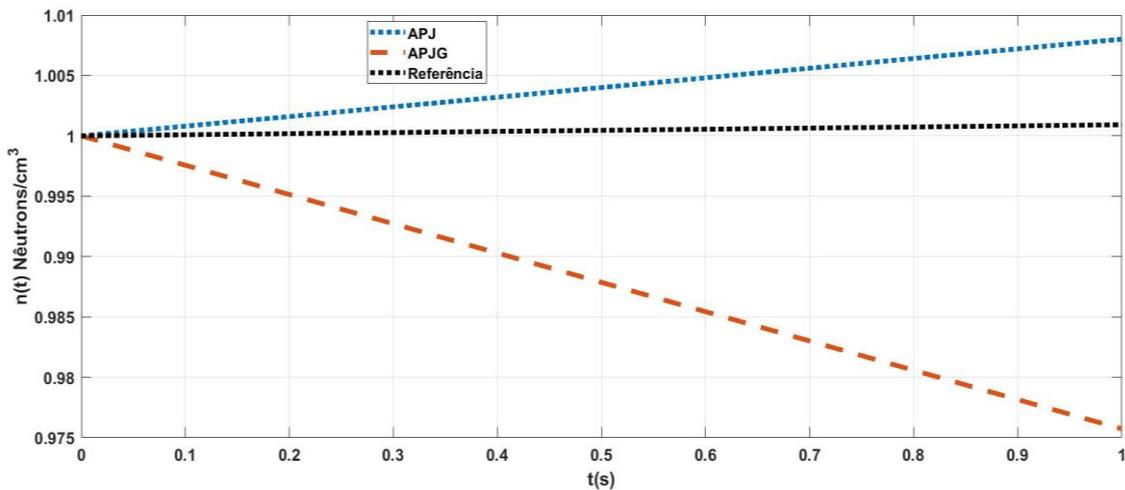


Figura 4.10: Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para o caso de uma rampa de reatividade,  $\rho(t) = 0,006t$ .

Analisando o resultado apresentado pela a Figura 4.10 percebe-se claramente que tanto a APJ como a APJG divergem do método de referência. Isso se deve ao fato de a reatividade inserida ser próxima da fração de nêutrons atrasados, levando o sistema a aproximação da condição pronto-crítico; tornando assim impossível o controle do reator. Portanto, fica patente que a contribuição dos nêutrons atrasados é desprezível frente aos nêutrons prontos quando  $\rho(t) \simeq \beta$ .

#### 4.4. Resultados para reatividade periódica

Nesta subseção são avaliados os resultados dos métodos de APJ e APJG em comparação ao método de referência, para o caso de uma inserção de reatividade periódica em função no tempo.

Na Tabela 4.9 são apresentados os resultados para a densidade de nêutrons usando as aproximações APJ e APJG, em comparação ao método de referência, para o caso de uma inserção de reatividade periódica variando no tempo, no intervalo entre 0 *seg* e 100 *seg*,

considerando os seguintes parâmetros:  $\Lambda = 3 \times 10^{-3}$  seg,  $\Lambda = 3 \times 10^{-4}$  seg,  $\Lambda = 3 \times 10^{-5}$  seg,  $\beta = 0,00755$  e  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ . Além disso, os desvios D1% e D2% são os respectivos erros relativos, entre as equações de referência e APJ e a APJG. Essa tabela tem por objetivo analisar a precisão do método APJG quanto à dependência do tempo médio de geração para um dado tipo reatividade periódica.

**Tabela 4.9:** Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para o caso de uma inserção de reatividade periódica:  $\rho(t) = -0,967377 \times 10^{-3} + 4. \cdot 10^{-3} \sin(0,1t)$ .

$t(s)$	$\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ s}$			$\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{ s}$			$\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{ s}$		
	Ref.	D1%	D2%	Ref.	D1%	D2%	Ref.	D1%	D2%
0	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	0,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>
10	1,556	<b>20,115</b>	<b>0,835</b>	1,632	<b>13,909</b>	<b>0,061</b>	1,641	<b>13,223</b>	<b>0,000</b>
20	2,634	<b>21,146</b>	<b>0,075</b>	2,767	<b>13,950</b>	<b>0,000</b>	2,781	<b>13,268</b>	<b>0,000</b>
30	2,029	<b>16,510</b>	<b>1,330</b>	2,054	<b>13,485</b>	<b>0,048</b>	2,056	<b>13,229</b>	<b>0,000</b>
40	1,175	<b>16,085</b>	<b>0,340</b>	1,184	<b>1,344</b>	<b>1,184</b>	1,186	<b>13,153</b>	<b>0,000</b>
50	0,809	<b>16,440</b>	<b>0,370</b>	0,817	<b>13,513</b>	<b>0,000</b>	0,818	<b>13,202</b>	<b>0,000</b>
60	0,794	<b>17,884</b>	<b>0,377</b>	0,810	<b>13,580</b>	<b>0,123</b>	0,811	<b>13,316</b>	<b>0,000</b>
70	1,248	<b>22,916</b>	<b>0,801</b>	1,315	<b>14,220</b>	<b>0,000</b>	1,334	<b>12,368</b>	<b>0,824</b>
80	2,379	<b>27,868</b>	<b>0,294</b>	2,580	<b>14,612</b>	<b>0,038</b>	2,588	<b>13,910</b>	<b>0,540</b>
90	2,273	<b>22,261</b>	<b>0,307</b>	2,360	<b>14,067</b>	<b>0,042</b>	2,372	<b>13,153</b>	<b>0,126</b>
100	1,332	<b>21,171</b>	<b>0,300</b>	1,371	<b>13,931</b>	<b>0,072</b>	1,388	<b>12,175</b>	<b>0,259</b>

Analisando os resultados mostrados na Tabela 4.9 pode-se verificar que os resultados obtidos pelo o método proposto, APJG, mostram-se bastante satisfatórios para os diferentes valores do tempo médio de geração em todo o intervalo de tempo, entre  $0 \text{ seg}$  e  $100 \text{ seg}$ . Vale ainda destacar que no instante  $20 \text{ seg}$  considerando um tempo de geração na ordem  $10^{-4} \text{ seg}$ , o erro relativo entre o método de referência e APJ foi de aproximadamente 14%, em quanto o método proposto, APJG, obteve um resultado exato. Na mesma tabela pode-se verificar que para um valor do tempo médio de geração da ordem de  $10^{-5} \text{ seg}$ , tem um erro

percentual máximo de aproximadamente 0,8 % no instante 70 *seg* para o método APJG, já o APJ apresenta um erro percentual máximo de aproximadamente de 14% no instante de 80 *seg*. Verificou-se também que os erros percentuais médios associados ao método APJG são de 0,502%, 0,156% e 0,174%, para os respectivos valores do tempo de geração,  $3 \times 10^{-3} \text{seg}$ ,  $3 \times 10^{-4} \text{seg}$  e  $3 \times 10^{-5} \text{seg}$ , e que estes diminuem a medida que o valor de  $\Lambda$  aumenta. Consequentemente os resultados nos mostram que para reatores rápidos a aproximação proposta tem resultados muito melhores, uma vez que nestes reatores os valores de são  $\Lambda \sim 10^{-5} \text{seg}$ .

Nas Tabelas 4.10 a 4.12 são apresentados os resultados considerando diferentes inserções de reatividade periódica, bem como diferentes valores para o tempo médio de geração, usando os seguintes parâmetros:  $\beta = 0,00755$  e  $\lambda = 0,0787 \text{seg}^{-1}$ . Nas colunas Desvio 1 e Desvio 2 constam os erros relativos percentuais dos métodos APJ e APJG com respeito ao método de referência.

**Tabela 4.10:** Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, considerando:  $\rho(t) = -0,967377 \times 10^{-3} + 4. \cdot 10^{-3} \times \sin(0,1)$  e  $\Lambda = 3. \cdot 10^{-3} \text{seg}$ .

t(s)	Ref	APJ	<b>Desvio 1</b>	APJG	<b>Desvio 2</b>
0	1,000	1,000	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>
10	1,556	1,869	<b>20,115</b>	1,543	<b>0,835</b>
20	2,634	3,191	<b>21,146</b>	2,632	<b>0,075</b>
30	2,029	2,364	<b>16,510</b>	2,022	<b>0,344</b>
40	1,175	1,364	<b>16,085</b>	1,171	<b>0,340</b>
50	0,809	0,942	<b>16,440</b>	0,806	<b>0,370</b>
60	0,794	0,936	<b>17,884</b>	0,791	<b>0,377</b>
70	1,248	1,534	<b>22,916</b>	1,238	<b>0,801</b>
80	2,379	3,042	<b><u>27,868</u></b>	2,372	<b>0,294</b>
90	2,273	2,779	<b>22,261</b>	2,266	<b>0,307</b>
100	1,332	1,614	<b>21,171</b>	1,328	<b>0,300</b>

**Tabela 4.11.** Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, considerando:  
 $\rho(t) = -0,991411 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-3} \sin(0,1t)$  e  $\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{seg}$

t(s)	Ref	APJ	Desvio 1	APJG	Desvio 2
0	1,000	1,000	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>
10	1,632	1,859	<b>13,909</b>	1,631	<b>0,061</b>
20	2,767	3,153	<b>13,950</b>	2,767	<b>0,000</b>
30	2,054	2,331	<b>13,485</b>	2,053	<b>0,048</b>
40	1,184	1,344	<b>13,513</b>	1,184	<b>0,000</b>
50	0,817	0,928	<b>13,586</b>	0,817	<b>0,000</b>
60	0,810	0,920	<b>13,580</b>	0,809	<b>0,123</b>
70	1,315	1,502	<b>14,220</b>	1,315	<b>0,000</b>
80	2,580	2,957	<b>14,612</b>	2,579	<b>0,038</b>
90	2,360	2,692	<b>14,067</b>	2,359	<b>0,042</b>
100	1,371	1,562	<b>13,931</b>	1,370	<b>0,053</b>

**Tabela 4.12.** Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, considerando:  
 $\rho(t) = -0,993871 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-3} \sin(0,1t)$  e  $\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{seg}$

t(s)	Ref.	APJ	Desvio 1	APJG	Desvio 2
0	1,000	1,000	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>
10	1,641	1,858	<b>13,223</b>	1,641	<b>0,000</b>
20	2,781	3,150	<b>13,226</b>	2,781	<b>0,000</b>
30	2,056	2,328	<b>13,229</b>	2,056	<b>0,000</b>
40	1,186	1,342	<b>13,153</b>	1,186	<b>0,000</b>
50	0,818	0,926	<b>14,180</b>	0,818	<b>0,000</b>
60	0,811	0,919	<b>13,316</b>	0,811	<b>0,000</b>
70	1,334	1,499	<b>12,368</b>	1,323	<b>0,824</b>
80	2,588	2,948	<b>13,910</b>	2,602	<b>0,540</b>
90	2,372	2,684	<b>13,153</b>	2,369	<b>0,126</b>
100	1,388	1,557	<b>12,175</b>	1,328	<b>0,000</b>

Analisando os resultados pode-se constatar que o método proposto apresenta um resultado excelente estando em perfeito acordo com o método de referência. Entretanto, a APJ apresenta uma discrepância relevante, quando comparada com o método de referência,

como mostrado nas Tabelas de 4.10 a 4.11, chegando a alcançar erros de máximo de aproximadamente de 28%, como mostrado na Tabela 4.10 para o instante de tempo de 80 *seg*.

A fim de corroborar a eficiência do método é apresentado nas Figuras 4.11 a 4.13 o comportamento temporal da densidade de nêutrons, considerando as diferentes reatividades periódicas e diferentes valores do tempo médio de geração apresentados nas Tabelas 4.11 a 4.13.

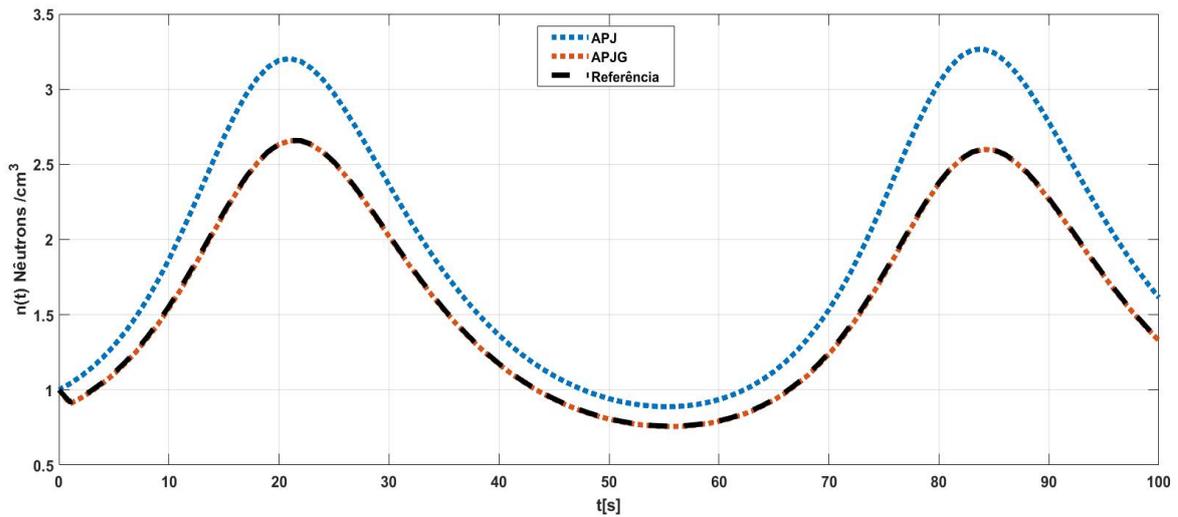


Figura 4.11. Densidade de nêutrons em função do tempo para uma reatividade:  
 $\rho(t) = -0,928760 \times 10^{-3} + 4. \cdot 10^{-3} \times \sin(0.1t)$  e  $\Lambda = 3 \times 10^{-3} \text{seg}$

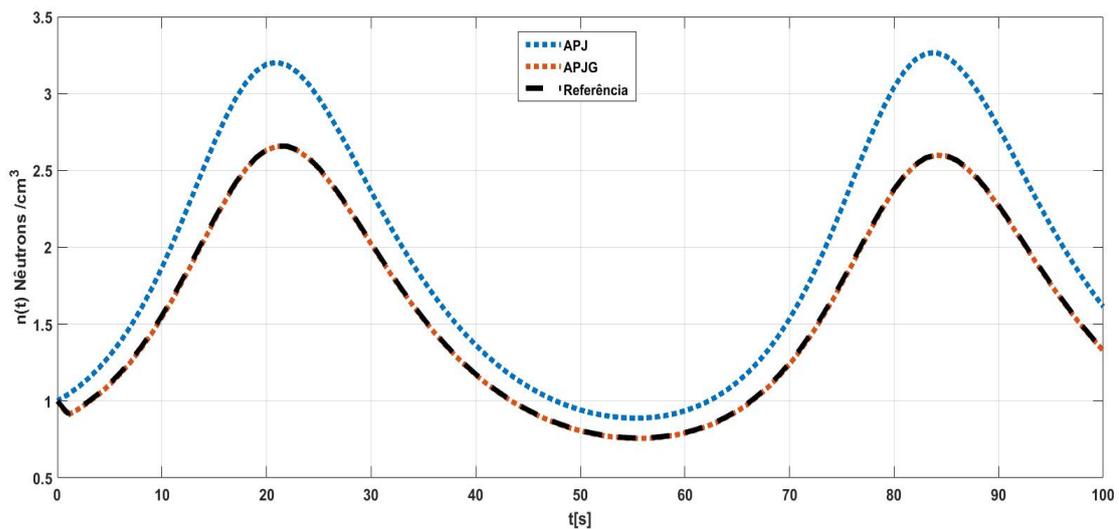


Figura 4.12: Densidade de nêutrons em função do tempo para uma reatividade:  
 $\rho(t) = -0,991411 \times 10^{-3} + 4. \cdot 10^{-3} \times \sin(0.1t)$  e  $\Lambda = 3 \times 10^{-4} \text{seg}$

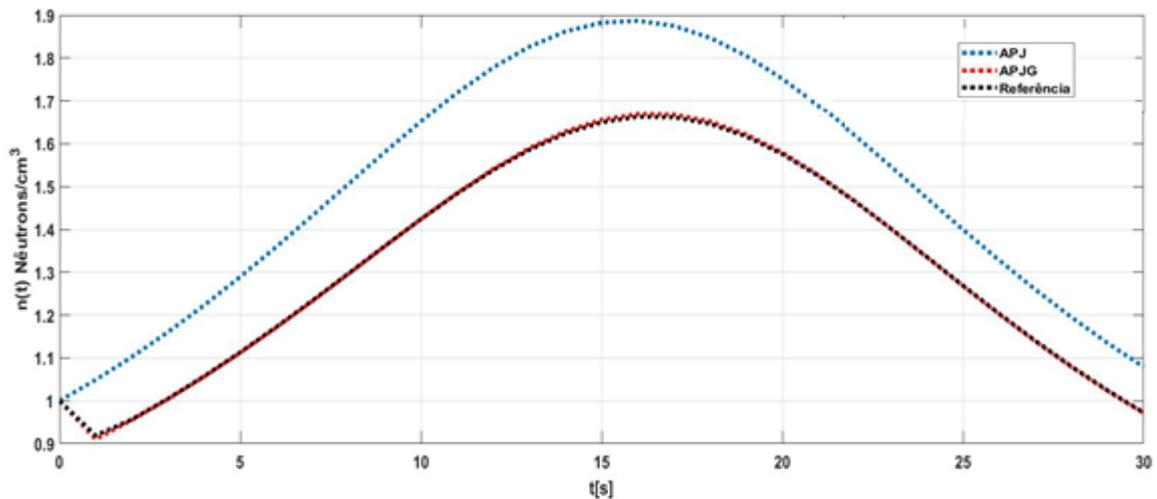


Figura 4.13: Densidade de nêutrons em função do tempo para uma reatividade:  $\rho(t) = -0,993871 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-3} \times \sin(10t)$  e  $\Lambda = 3 \times 10^{-5} \text{ seg}$ .

Uma análise qualitativa das Figuras 4.11 a 4.13 mostram que a APJ apresenta uma relativa discrepância com respeito ao método de referência durante todo intervalo de tempo, acentuando-se nos picos e diminuindo nos vales. Já o método proposto, APJG, apresenta um excelente resultado, de modo que a curva do método proposto sobrepõe a curva do método referência durante todo intervalo de tempo.

Na Tabela 4.13 são apresentados os resultados para a densidade de nêutrons usando as aproximações APJ e APJG, em comparação ao método de referência, para o caso de uma inserção de reatividade periódica variando no tempo regida por uma função cosseno, no intervalo entre 0 *seg* e 100 *seg*, considerando os seguintes parâmetros:  $\beta = 0,00755$  e  $\lambda = 0,0787 \text{ seg}^{-1}$ . Essa tabela tem por objetivo analisar a precisão do método APJG quanto à dependência do tempo médio de geração para uma reatividade regida pela função cosseno.

**Tabela 4.13:** Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para uma inserção de reatividade periódica:  $\rho(t) = 0,0006 \times \cos(0,156t)$ .

$t(s)$	$\Lambda = 2 \times 10^{-3} \text{ seg}$			$\Lambda = 2 \times 10^{-4} \text{ seg}$			$\Lambda = 2 \times 10^{-5} \text{ seg}$		
	Ref.	D1%	D2%	Ref.	D1%	D2%	Ref.	D1%	D2%
0	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	1,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	0,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>
10	1,078	<b>3,988</b>	<b>0,185</b>	0,933	<b>1,178</b>	<b>0,000</b>	0,933	<b>6,323</b>	<b>0,000</b>
20	0,974	<b>15,092</b>	<b>0,205</b>	1,041	<b>11,527</b>	<b>0,000</b>	1,041	<b>14,121</b>	<b>0,000</b>
30	0,921	<b>21,06</b>	<b>0,108</b>	1,109	<b>23,715</b>	<b>0,000</b>	1,109	<b>23,715</b>	<b>0,000</b>
40	0,983	<b>0,712</b>	<b>0,203</b>	1,033	<b>12,100</b>	<b>0,000</b>	1,033	<b>12,100</b>	<b>0,000</b>
50	1,094	<b>7,495</b>	<b>0,182</b>	0,938	<b>7,889</b>	<b>0,000</b>	0,938	<b>7,889</b>	<b>0,000</b>
60	1,091	<b>4,032</b>	<b>0,183</b>	0,944	<b>6,461</b>	<b>0,000</b>	0,945	<b>6,349</b>	<b>0,000</b>
70	0,986	<b>18,559</b>	<b>0,202</b>	1,054	<b>14,136</b>	<b>0,000</b>	1,054	<b>14,136</b>	<b>0,000</b>
80	0,931	<b>8,113</b>	<b>0,214</b>	1,123	<b>23,686</b>	<b>0,000</b>	1,112	<b>22,931</b>	<b>0,000</b>
90	0,994	<b>1,006</b>	<b>0,210</b>	1,046	<b>12,141</b>	<b>0,000</b>	1,046	<b>12,141</b>	<b>0,000</b>
100	1,107	<b>7,497</b>	<b>0,196</b>	0,950	<b>7,789</b>	<b>0,000</b>	0,950	<b>7,789</b>	<b>0,000</b>

Analisando a tabela acima é fácil verificar que o resultado é análogo aquele apresentado pela Tabela 4.9, de modo que o método proposto apresenta resultados em excelente acordo com o método de referência, mesmo para valores maiores do tempo médio de geração. Já a APJ apresenta resultados bem discrepantes do método de referência assim como aqueles apresentados na Tabela 4.9. Isso indica que os resultados obtidos pelo método proposto independem da função que rege a reatividade periódica, mas sim se a reatividade aproxima-se ou não estado pronto-crítico.

As Figuras 4.14 a 4.16 corroboram os resultados apresentados pela Tabela 4.13, de modo observar o comportamento contínuo no tempo da densidade de nêutrons sujeitos aos mesmos parâmetros cinéticos e reatividade apresentado na Tabela 4.13.

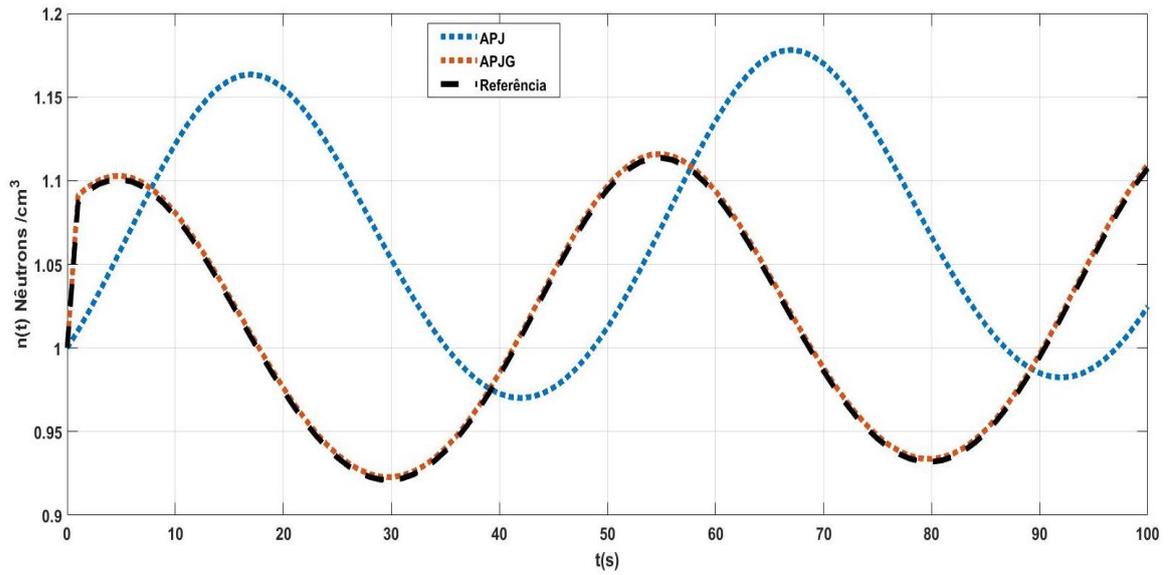


Figura 4.14. Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para uma inserção de reatividade periódica:  $\rho = 0,0006 \times \cos(0,1256t)$  e  $\Lambda = 2 \times 10^{-3} \text{ seg}$ .

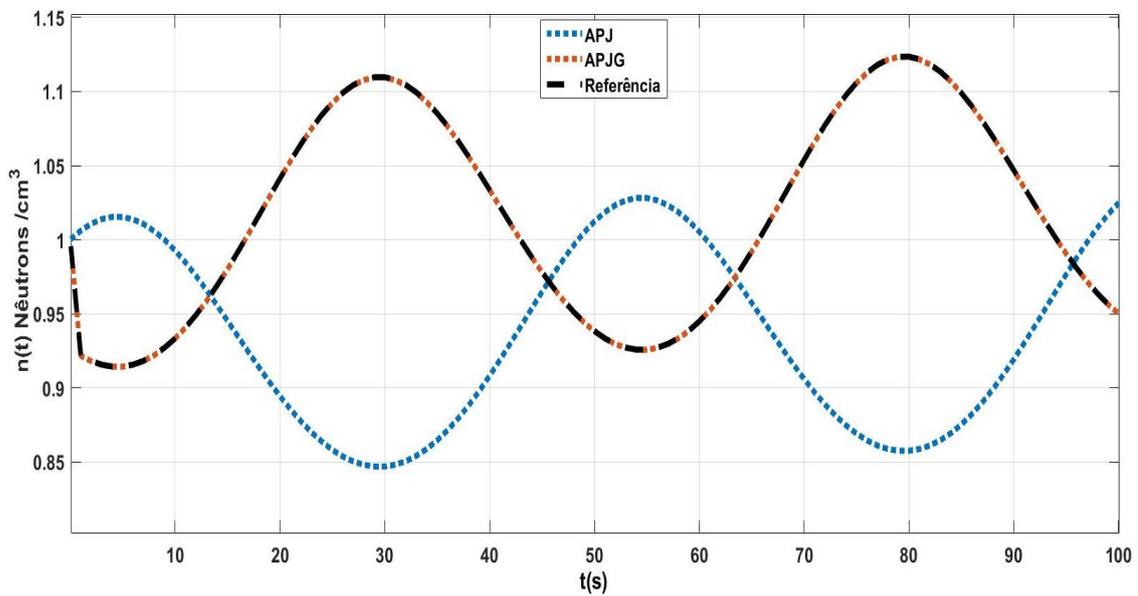


Figura 4.15: Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para uma inserção de reatividade periódica:  $\rho(t) = 0,0006 \times \cos(0,1256t)$  e  $\Lambda = 2 \times 10^{-4} \text{ seg}$ .

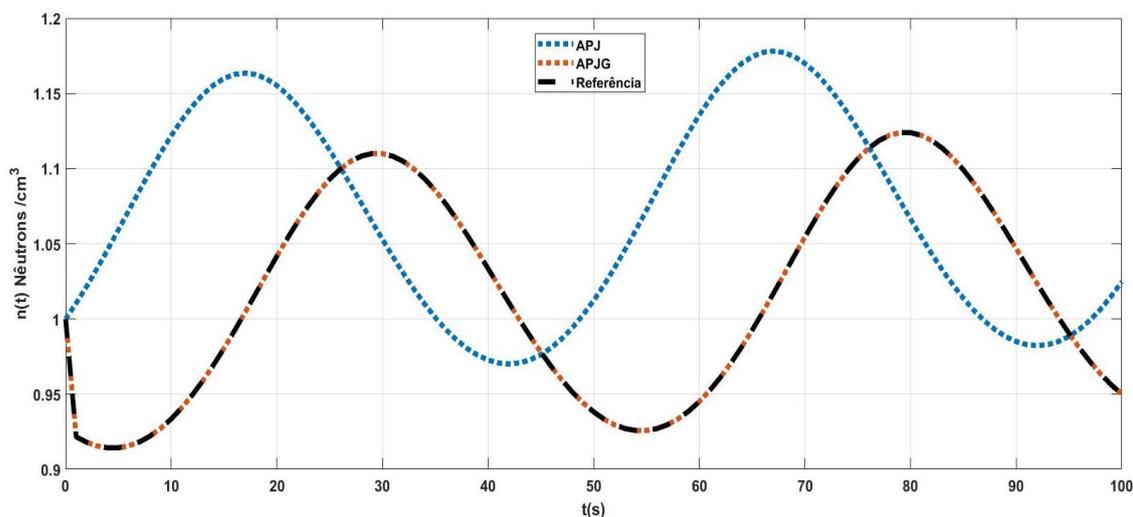


Figura 4.16 Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para uma inserção de reatividade periódica:  $\rho(t) = 0,0006 \times \cos(0,1256t)$  e  $\Lambda = 2 \times 10^{-5} \text{ seg}$ .

Uma análise qualitativa do comportamento temporal da densidade nêutrons por meio das Figuras 4.14 a 4.16 mostram que a APJ apresenta uma relativa discrepância com respeito ao método de referência durante todo intervalo de tempo, para qualquer seja a reatividade e o valor do tempo médio de geração. Pode-se verificar ainda que a APJ além de apresentar resultados numéricos ruins não descreve o comportamento temporal esperado da densidade de nêutrons, em alguns casos, como apresentado pela Figura 4.15 existe uma oposição de fase no comportamento temporal apresentado pelo método de referência e APJ. Já o método proposto apresenta um excelente resultado, de modo que a curva obtida pelo método APJG sobrepõe a curva do método referência durante todo intervalo de tempo, para qualquer seja a reatividade e o valor do tempo médio de geração.

Na figura 4.17 é apresentado o comportamento temporal da densidade de nêutrons para uma reatividade próxima limite, ou seja, próximo da condição pronto-crítico, considerando um tempo médio geração da ordem  $10^{-2} \text{ seg}$ .

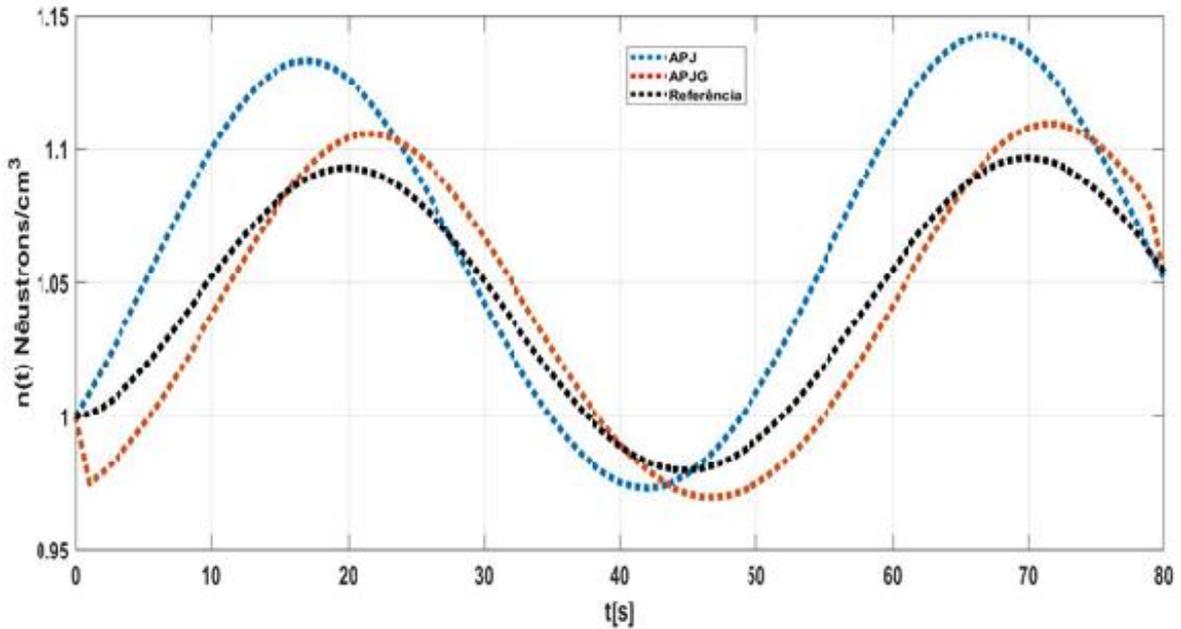


Figura 4.17: Comparação entre o método de referência, APJ e APJG, para uma inserção de reatividade periódica:  $\rho(t) = 5 \cdot 10^{-4} \times \sin(0,1256 \cdot t)$  e  $\Lambda = 2 \times 10^{-2} \text{ seg}$ .

Observe que quando a reatividade inserida é próxima da fração de nêutrons atrasados, ou seja, próximo da condição pronto-crítico, o reator nuclear torna-se praticamente fora de controle, o que garante que a contribuição dos nêutrons atrasados é desprezível frente aos nêutrons prontos, de modo que o método não responde bem nesta situação. Outro ponto que vale ser destacado tem relação com o tempo médio de geração, pois reatores rápidos têm valores do tempo médio de geração da ordem  $10^{-5} \text{ seg}$ , o que acarreta em uma enorme dificuldade de controle quando comparado aos reatores térmicos, que possuem um tempo médio de geração da ordem  $10^{-3} \text{ seg}$ . Entretanto, essa variação do tempo médio de geração não conduz a uma alteração significativa dos resultados do ponto de vista numérico, como mostrado pela Tabela 4.13. Uma vez que o método proposto, APJG, apresenta resultados exatos para um  $\Lambda = 2 \times 10^{-5} \text{ seg}$  e um erro máximo de aproximadamente de 0,21% no instante de 80 seg para  $\Lambda = 2 \times 10^{-3} \text{ seg}$ . Portanto todos os resultados apresentados mostram que a aplicação do método da expansão em série de potência em segunda ordem empregado para obtenção da APJG, apresentou bons resultados mostrando-se em perfeito acordo com o método de referência.

## CONCLUSÃO

Este trabalho teve como principal objetivo o desenvolvimento de um método simples e preciso, que possibilitasse a generalização da APJ usada na literatura, como base aplicação do método da expansão em série de potência, para solução das equações da cinética pontual para um grupo de precursores sem fonte externa de nêutrons, sujeitos aos seguintes tipos de reatividades arbitrárias: constante, rampa e oscilatória.

Os resultados apresentados demonstram que foi possível a melhoria da APJ, por meio de uma generalização usando o método de expansão em série de potência, de modo que o método proposto, APJG, apresentou excelentes resultados em todos os testes realizados, considerando diferentes tipos de reatividade e valores do tempo médio de geração, exceto quando  $\rho(t) \simeq \beta$ .

Outro ponto importante observado durante a análise dos resultados é o fato de que mudanças na magnitude do tempo médio de geração não causam influenciam significativas na precisão do método, desde que a reatividade esteja afasta do pronto-crítico. Contudo, é possível verificar que para  $\Lambda \sim 10^{-5}$  o método apresenta pequenas melhoras nos resultados do que aqueles obtidos com  $\Lambda \sim 10^{-3}$ , indicando que quanto menor for o valor do tempo médio de geração dos nêutrons, melhor é resultado alcançado pelo o método proposto nesta dissertação.

A metodologia bem como os resultados mostram que a APJG proposta é de fácil aplicação, além ser bastante precisa e estável, mesmo quando sujeito a diferentes variações de reatividade e magnitudes do tempo médio de geração, mostrando assim a eficácia da aplicação do método de expansão em série de potência para cálculo das equações da cinética pontual para um grupo precursores sem fonte externa.

Para trabalhos futuros recomenda-se aplicação do método de APJG para o caso de seis grupos de precursores de nêutrons atrasados com e sem fonte externa de nêutrons, bem o estudo da influência dos termos de ordem superior na expansão em série de potência.

A motivação inicial dessa dissertação de Mestrado foi a avaliação dos limites da aproximação prompt jump, que nos dias atuais ainda é usada não obstante o exponencial crescimento da capacidade de processamento numérico. Apenas para exemplificar a aproximação prompt jump é largamente usada nos testes físicos de partida das usinas nucleares para determinação do valor integral da reatividade de barras de controle, através do método de queda de barra de controle. Esse método é extremamente rápido e não requer instrumentação nuclear adicional à existente nas usinas nucleares. Ele usa a aproximação prompt-jump nas equações clássicas da cinética pontual para estabelecer uma relação entre a reatividade da barra de controle e as medidas nos detectores de nêutrons nos reatores nucleares.

O método de queda de barra de controle é baseado na análise da resposta ao transiente decorrente da inserção rápida de reatividade. Essa inserção de reatividade rápida de grande valor modular é realizada pela queda de barras de controle quando o reator está crítico. O método admite que as variações do nível da potência nuclear e da concentração de precursores são instantâneas, o que possibilita o uso da aproximação prompt jump.

Como restou demonstrado nessa dissertação de Mestrado que a aproximação prompt-jump tem validade limitada recomenda-se fortemente que os métodos que ainda a utilizam sejam revisitados em pesquisas científicas futuras.

## REFERÊNCIAS

CHAVES, ALAOR & SHELLARD, RONALD CINTRA, *Física para o Brasil, pensando o Futuro*. São Paulo, Sociedade Brasileira de Física, 2005.

DUDERSTADT, J.J, HAMILTON, L.J, *Nuclear Reactor Analysis*. 1º ed. John Wiley & Sons, 1976.

Figueira, Adriano Jorge, 2009, *Potência Nuclear Aproximada para o caso de reatividade linear e métodos alternativos de solução da Equação da Cinética Pontual Inversa*. M.Sc. Dissertação, programa de Engenharia Nuclear / COPPE- Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, Brasil.

Fumino AMANO, 1969, *Approximate Solution of One-Point Reactor Kinetic Equations for Arbitrary Reactivities*. (Journal of NUCLEAR SCIENCE and TECHNOLOGY, p. 646-656).

Gonçalves, Alessandro da Cruz, 2006, *Monitoração da Reatividade Através do Histórico da Potência Nuclear*. M.Sc. Dissertação, programa de Engenharia Nuclear / COPPE- Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, Brasil.

PETERSEN, Z.C, 2011 *Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Nêutrons pelas Técnicas de Gitt e Decomposição*. D.sc. Tese, Programa de Pós-Graduação em engenharia Mecânica / Escola de engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul, Brasil.

Stacey, W. M. *Modal Approximations: Theory and an Application to Reactor Physics*,  
M.I.T Press, Massachusetts, 1967.