



UMA FORMULAÇÃO PETROV-GALERKIN DESCONTÍNUO PARA
SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ COM MINIMIZAÇÃO DO ERRO
DE FASE

Rodrigo Dias

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Webe João Mansur
Eduardo Gomes Dutra do
Carmo

Rio de Janeiro
Outubro de 2019

UMA FORMULAÇÃO PETROV-GALERKIN DESCONTÍNUO PARA
SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ COM MINIMIZAÇÃO DO ERRO
DE FASE

Rodrigo Dias

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:



Prof. Webe João Mansur, Ph.D.



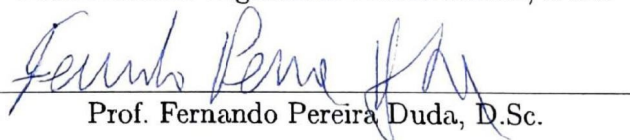
Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.



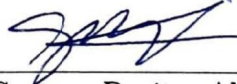
Prof. Otto Corrêa Rotunno Filho, Ph.D.



Prof. Edivaldo Figueiredo Fontes Junior, D.Sc.



Prof. Fernando Pereira Duda, D.Sc.



Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
OUTUBRO DE 2019

Dias, Rodrigo

Uma formulação Petrov-Galerkin descontínuo para solução da equação de Helmholtz com minimização do erro de fase/Rodrigo Dias. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XIII, 90 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Webe João Mansur

Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 81 – 86.

1. Galerkin finite element methods. 2. Discontinuous Galerkin. 3. Petrov-Galerkin discontinuous, (PGD). 4. Helmholtz equation. 5. Minimum phase error. I. Mansur, Webe João *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*A resposta certa não importa
nada: o essencial é que as
perguntas estejam certas.*

Mário Quintana

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, por me dar forças para enfrentar todos os obstáculos que houveram no decorrer desta minha caminhada, aos meus pais, Rosalvo e Aparecida Rosa e ao meu irmão Rogério.

Agradeço em especial à minha esposa Patrícia Bellotti Carvalho e a minha filha Bárbara Bellotti Carvalho Dias, pelo incentivo, compreensão e companhia nesse processo, bem como aos demais familiares de uma forma geral pelo apoio.

Agradeço aos meus orientadores, sobretudo ao professor Webe João Mansur pelos valiosos ensinamentos e ao Professor Eduardo Gomes Dutra do Carmo pela condução do trabalho e confiança depositada em mim, com dedicação e paciência ao longo de todo o trabalho.

Agradeço imensamente aos professores e orientadores do mestrado, Luiz Alkmin Lacerda e José Antônio Marques Carrer, pelos ensinamentos transmitidos e demonstração de humildade, mesmo sendo grandes da forma que são.

Aos meus colegas e amigos do LAMEC / LAMEMO, manifesto meus sinceros agradecimentos pelas importantes contribuições e discussões. Cid da Silva Garcia Monteiro, Luiz Alberto dos Santos, Marco Túlio Fernandes, Luciana Barbosa, Edmundo Guimarães da Costa, Felipe dos Santos Loureiro, Elias da Conceição, Gilmar Teixeira, Raphael Correia, Viviane Ferreira e, principalmente, a Professora Franciane Peters, a quem devo meus sinceros agradecimentos pelas discussões a respeito de muitos assuntos relacionados deste trabalho.

Meu especial e eterno agradecimento à secretária do LAMEMO, Ivone Araújo, por tudo o que sempre fez e representou nesta minha caminhada. E ao secretário do CESEC / UFPR, Jair dos Anjos, pelos ensinamentos e discussões na área do direito e nas orientações jurídicas.

Meu muito obrigado a todos que direta ou indiretamente participaram de alguma forma nessa etapa tão desafiadora e importante da minha vida.

Pelo suporte financeiro, agradeço à CAPES.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UMA FORMULAÇÃO PETROV-GALERKIN DESCONTÍNUO PARA
SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ COM MINIMIZAÇÃO DO ERRO
DE FASE

Rodrigo Dias

Outubro/2019

Orientadores: Webe João Mansur

Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Programa: Engenharia Civil

A poluição do erro é uma fonte conhecida de imprecisões nas abordagens contínuas ou descontínuas de FE para resolver a equação de Helmholtz. Este tópico é exaustivamente estudado em um grande número de artigos, além de IHLENBURG e BABUŠKA [1], IHLENBURG [2] e outras referências ali citadas. Metodologias robustas para malhas quadradas estruturadas foram desenvolvidas nos últimos anos.

Este trabalho busca desenvolver uma metodologia baseada na formulação descontínua Petrov-Galerkin (PGD), a fim de minimizar o erro de fase para malhas estruturadas ou não estruturadas, aplicadas à equação de Helmholtz em meios homogêneos. Uma formulação Petrov-Galerkin FE é introduzida para o problema de Helmholtz em duas dimensões usando funções de ponderação polinomial. Em cada nó da malha triangular, uma função de base global para o espaço das funções de ponderação é obtida, acrescentando às combinações bilineares C^0 da função linear Lagrangiana de ponderação. As funções de ponderação ótimas, com o mesmo suporte das funções de teste globais correspondentes, são obtidas após o cálculo dos coeficientes α_m^n dessas combinações lineares, atendendo aos critérios ideais. Isso é feito numericamente através de uma técnica de pré-processamento que é naturalmente aplicada a malhas uniformes e não estruturadas.

Em particular, para malha uniforme, é obtido um estêncil interior quase ótimo da mesma ordem do método do elemento finito quase estabilizado, obtido por BABUŠKA *et al.* [3]. Resultados numéricos são apresentados ilustrando a grande estabilidade e precisão desta formulação com malhas não uniformes e não estruturadas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A DISCONTINUOUS PETROV-GALERKIN FORMULATION FOR
HELMHOLTZ EQUATION SOLUTION WITH PHASE ERROR
MINIMIZATION

Rodrigo Dias

October/2019

Advisors: Webe João Mansur

Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Department: Civil Engineering

Pollution error is a well known source of inaccuracies in continuous or discontinuous FE approaches to solve the Helmholtz equation. This topic is exhaustively studied in a large number of papers as well as IHLENBURG e BABUŠKA [1], IHLENBURG [2] and others references inside there in and others references. Robust methodologies for structured square meshes have been developed in recent years.

This work seeks to develop a methodology based on Discontinuous Petrov-Galerkin formulation (DPG), in order to minimize phase error for structured or unstructured meshes applied for Helmholtz equation in homogeneous media. A Petrov-Galerkin FE formulation is introduced for Helmholtz problem in two dimensions using polynomial weighting functions. At each node of the triangular mesh, a global basis function for the weighting space is obtained, adding to the bilinear C^0 Lagrangian weighting function linear combinations. The optimal weighting functions, with the same support of the corresponding global test functions, are obtained after computing the coefficients α_m^n of these linear combinations attending to optimal criteria. This is done numerically through a preprocessing technique that is naturally applied to nonuniform and unstructured meshes.

In particular, for uniform mesh a quasi optimal interior stencil of the same order of the quasi-stabilized finite element method stencil derived by BABUŠKA *et al.* [3] is obtained. Numerical results are presented illustrating the great stability and accuracy of this formulation with nonuniform and unstructured meshes.

Sumário

| | |
|--|-------------|
| Lista de Figuras | x |
| Lista de Tabelas | xiii |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Considerações iniciais | 1 |
| 2 Equações Básicas da Onda Acústica | 5 |
| 2.1 Introdução | 5 |
| 2.1.1 Ondas acústicas | 6 |
| 2.1.2 Equações linearizadas para fluidos compressíveis | 6 |
| 2.1.3 Lei de conservação da massa | 6 |
| 2.1.4 Lei da conservação do momento | 7 |
| 2.1.5 Equação da onda acústica e equação de Helmholtz | 8 |
| 3 Formulação Petrov-Galerkin descontínuo (PGD) para problemas de Helmholtz | 11 |
| 3.1 Problema de valor de contorno ou formulação forte | 11 |
| 3.1.1 Formulação variacional | 12 |
| 3.1.2 Contínuo | 12 |
| 3.1.3 Descontínuo | 14 |
| 3.1.4 Ressonância | 16 |
| 3.1.5 Ressonância numérica | 16 |
| 3.1.6 Poluição do Erro | 18 |
| 4 Obtenção dos parâmetros que minimizam o erro de fase para elementos do domínio | 21 |
| 4.1 Introdução | 21 |
| 4.1.1 Metodologia para obtenção dos parâmetros que minimizam erro de fase para elementos interiores ao domínio | 22 |
| 4.1.2 Onda plana | 28 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Obtenção dos parâmetros que minimizam o erro de fase para formulação PGD para problemas de Helmholtz com elementos triangulares com arestas no contorno | 45 |
| 5.1 | Introdução | 45 |
| 5.1.1 | Elementos com uma e com duas arestas no contorno do domínio | 46 |
| 5.1.2 | Uma aresta no contorno | 46 |
| 5.1.3 | Elementos com duas arestas no contorno do domínio | 55 |
| 6 | Resultados numéricos e discussões | 65 |
| 6.1 | Análise de erros | 72 |
| 7 | Conclusões finais e sugestões para trabalhos futuros | 78 |
| 7.1 | Considerações Finais | 78 |
| 7.2 | Sugestões para Trabalhos Futuros | 79 |
| | Referências Bibliográficas | 81 |
| A | Demonstrações e Definições | 87 |
| A.1 | Soluções 1D da equação de Helmholtz | 87 |
| A.2 | Soluções 2D e 3D da equação de Helmholtz | 89 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Elemento volumétrico, com vetor normal direcionado para fora do domínio. | 6 |
| 3.1 | Fenômeno da perda de fase e amplitude CHOPRA [4]. Posteriormente nomeado como poluição do erro de fase. | 18 |
| 3.2 | Evidências do fenômeno da poluição do erro de fase para soluções, exata, DG e PGD para a seção vertical $x = 0.5$, para a partição 20×20 e número de onda $k = 30$ | 19 |
| 3.3 | Evidências do fenômeno da poluição do erro de fase para soluções, exata, DG e PGD para a seção vertical $x = 0.5$, para a partição 20×20 e número de onda $k = 60$ | 19 |
| 3.4 | Evidências do fenômeno da poluição do erro de fase para soluções, exata, DG e PGD para a seção vertical $x = 0.5$, para a partição 80×80 e número de onda $k = 120$ | 20 |
| 4.1 | Forma da malha para obtenção do estêncil em uma malha quadrangular, como obtido em BABUŠKA <i>et al.</i> [3]. | 22 |
| 4.2 | Forma da malha para obtenção do estêncil, para uma malha triangular, caso desenvolvido neste trabalho. | 22 |
| 4.3 | Elemento triangular e qualquer do domínio e seus respectivos vizinhos, e' , e'' e e''' , bem como suas respectivas numerações locais, que serão adotadas para o desenvolvimento das equações que fazem menção à essa figura no decorrer do trabalho. | 23 |
| 4.4 | Forma geral da Matriz $M_{kn}^{\alpha, \Omega}$ para um elemento triangular inteiramente pertencente ao domínio Ω de interesse. | 27 |
| 4.5 | Onda plana se propagando devido as oscilações dos campos elétricos e magnéticos em uma região do espaço qualquer, seja ele, um meio material ou não. Fonte: notas de aula Profa. Chinellato, D. C, 2014. | 29 |
| 4.6 | Onda plana propagando-se no plano bidimensional (x,y). Onde \mathbf{k} é o vetor “frente de onda” e o vetor \mathbf{n} é o vetor unitário do vetor \mathbf{k} | 30 |
| 4.7 | Direções θ_i qualquer de onda plana | 38 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.8 | Fluxograma do algoritmo que permite a implementação computacional, para obtenção dos parâmetros que minimiza erro de fase. | 44 |
| 5.1 | Elemento com uma face no contorno do domínio e sua respectiva numeração local, a nível de elemento. | 47 |
| 5.2 | Forma geral da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1}$, para elementos com uma única aresta no contorno, como pode ser visto na Figura 5.3. | 48 |
| 5.3 | Elemento com duas arestas no contorno do domínio Ω , e sua respectiva enumeração local. | 55 |
| 5.4 | Forma geral da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2}$ para o caso de um elemento triangular, com duas arestas no contorno contorno do domínio de interesse Ω | 57 |
| 6.1 | Relaxamento da condição empírica “rule of thumb”, de modo a ter-se aproximadamente 5 elementos por comprimento de onda. Valores esses, que foram utilizado nas simulações deste trabalho. | 65 |
| 6.2 | Malha de elemento triangular, utilizada neste trabalho. As respectivas dimensões $h_{i,j}^x$ e $h_{i,j}^y$ estarão especificadas no texto | 66 |
| 6.3 | Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0, 5$, para uma partição da malha de 20×20 , e um número de onda $k = 30$ | 67 |
| 6.4 | Soluções exata, DG e PGD para umaa seção horizontal em $y = 0, 5$, para uma partição da malha de 20×20 , e número de onda $k = 30$ | 67 |
| 6.5 | Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0, 5$, para a partição da malha de 40×40 , e número de onda $k = 60$ | 68 |
| 6.6 | Soluções exata, DG e PGD para uma seção horizontal em $y = 0, 5$, para uma partição da malha de 40×40 , e número de onda $k = 60$ | 68 |
| 6.7 | Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0, 5$, para uma partição da malha de 60×60 , e número de onda $k = 90$ | 69 |
| 6.8 | Soluções exata, DG e PGD para uma seção horizontal em $y = 0, 5$, para uma partição da malha de 60×60 , e número de onda $k = 90$ | 69 |
| 6.9 | Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0, 5$, para uma partição da malha de 70×70 , e número de onda $k = 105$ | 70 |
| 6.10 | Soluções exata, DG e PGD para uma seção horizontal em $y = 0,5$, para a partição da malha de 70×70 , e número de onda $k = 105$ | 70 |
| 6.11 | Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0, 5$, para a partição da malha de 80×80 , e número de onda $k = 120$ | 71 |
| 6.12 | Soluções exata, DG e PGD para uma seção horizontal em $y = 0, 5$, para a partição da malha de 80×80 , e número de onda $k = 120$ | 71 |
| 6.13 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical em $x = 0, 5$, para uma partição de malha de 20×20 , e número de onda $k = 30$ | 72 |

| | | |
|------|---|----|
| 6.14 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção horizontal em $y = 0, 5$, para uma partição de malha 20×20 , e número de onda de $k = 30$ | 73 |
| 6.15 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical em $x = 0, 5$, para uma partição de malha de 40×40 , e número de onda $k = 60$ | 73 |
| 6.16 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção horizontal em $y = 0, 5$, para uma partição de malha 40×40 , e número de onda $k = 60$ | 74 |
| 6.17 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical em $x = 0, 5$, para uma partição da malha de 60×60 , e número de onda $k = 90$ | 74 |
| 6.18 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção horizontal em $y = 0, 5$, para a partição de malha de 60×60 , e número de onda $k = 90$ | 75 |
| 6.19 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical em $x = 0, 5$, para uma partição de malha de 70×70 , e número de onda $k = 105$ | 75 |
| 6.20 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para a seção horizontal $y = 0.5$, para uma partição de malha de 70×70 e número de onda $k = 105$ | 76 |
| 6.21 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical $x = 0, 5$, para uma partição de malha de 80×80 , e número de onda $k = 120$ | 76 |
| 6.22 | Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção horizontal $y = 0, 5$, para uma partição de malha de 80×80 , e número de onda $k = 120$ | 77 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Relação entre os índices k, l, j e i , utilizados na Equação (4.8), para $k \geq 4$, | 26 |
| 4.2 | Relação entre os índices j, l e i que aparecem na Equação 4.40. | 32 |
| 4.3 | Relação entre os índices j, l e i | 32 |
| 4.4 | Relação entre os índices k, l, j e i para a matriz χ_{ln}^m | 40 |
| 5.1 | Relação entre os índices k, l, j e i para a matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1}$ | 49 |
| 5.2 | Relação entre os índices k, l, j e i para a matriz M_{kn}^{α} | 58 |

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações iniciais

Problemas envolvendo a equação completa da onda são encontrados em diversas áreas da engenharia, tais como, mecânica, nuclear, aeroespacial, civil e em problemas inversos e diretos, encontrados também em medicina e em geofísica. O principal foco deste trabalho são os problemas diretos, envolvendo a resolução da equação da onda em problemas geofísicos, no domínio da frequência.

Diversos métodos podem ser utilizados na solução desse problema, tais como: Galerkin contínuo e descontínuo, elementos finitos clássicos, diferenças finitas, elementos de contorno, entre outros. Uma técnica promissora é a que envolve a transformada de Fourier no domínio do tempo, levando a um problema de valor de contorno, descrito pela equação de Helmholtz. Todavia, a solução numérica da equação de Helmholtz é ainda um problema em aberto ZIENKIEWICZ [5]. Há uma busca por melhorar as metodologias já desenvolvidas em CLAYTON e ENGQUIST [6] e em ZITELLI [7].

A solução numérica dessa equação até o presente momento, seja com elementos finitos, diferenças finitas, elementos de contorno ou outros métodos numéricos, possui um defeito conhecido como poluição do erro, conforme descrito em BABUŠKA *et al.* [3] e BABUŠKA e SAUTER [8]. Esse fenômeno é cada vez mais evidenciado em altas frequências ou para números de onda elevados. Mesmo que a malha satisfaça a condição empírica de aproximação para onda plana dentro do elemento $kh \leq \frac{1}{4}$, para elementos lineares, onde k é o número de onda e h é o diâmetro do elemento, IHLENBURG [2]. Com o aumento do número de onda k e mantendo o produto constante, de modo que $kh \leq \frac{1}{4}$, o erro aumenta de forma descontrolada devido ao fenômeno conhecido como poluição do erro de fase, como descrito anteriormente.

Dessa forma, a busca por formulações que, de alguma maneira, minimizem a poluição do erro de fase é crucial quando se resolve a equação de Helmholtz para

altas frequências e, portanto, a resolução da equação da onda, tanto no problema direto quanto no problema inverso em geofísica.

Até o presente momento, diversos esquemas foram elaborados para minimizar erro de fase para a equação Helmholtz. O primeiro desses esquemas é o método *Quasi-Stabilized Finite Element Method*, *QSFEM*, em BABUŠKA *et al.* [3] e posteriormente analisados em BABUŠKA e SAUTER [9], BABUŠKA e SAUTER [10] e BABUŠKA e SAUTER [8], esse método usa uma malha particular com elementos quadrados e esquemas de diferenças finitas para obtenção da matriz do estencil, como mostrado na Figura 4.1. Visando obter uma formulação variacional do tipo Petrov-Galerkin que minimiza erro de fase, foram desenvolvidas algumas técnicas, como, por exemplo, em ALVAREZ *et al.* [11] e em DO CARMO *et al.* [12]. Esses métodos têm a vantagem de cobrir todas as condições de contorno, o que não era coberto pela formulação QSFEM descrita em BABUŠKA *et al.* [3]. Todavia, eles são limitados à malhas quadradas uniformes. Baseado em esquemas de diferenças finitas para malhas não estruturadas, foi desenvolvido, em LOULA e FERNANDES [13], um esquema para minimizar erro de fase. Esse esquema tem a vantagem de se poder usar uma malha com elementos triangulares não uniformes. Embora eles também sejam baseados em uma matriz de referência que minimiza erro de fase, a qual é avaliado via um esquema de diferenças finitas, há uma sensibilidade com a não uniformidade da malha, como, por exemplo, refinamentos localizados, prejudicando a performance do método.

Contribuições em Galerkin descontínuo para a equação de Helmholtz podem ser encontradas em DO CARMO *et al.* [12] e em ALVAREZ *et al.* [11].

IHLENBURG [2] trata de problemas de espalhamentos modelados pela equação de Helmholtz para problemas unidimensionais e faz uma boa análise numérica para diversos problemas. Em KAMPANIS *et al.* [14] apresenta-se um livro, com diversos artigos discutindo a solução da equação de Helmholtz, sob várias perspectivas, bem como, em DOUGLAS e DUPONT [15] e em ARNOLD [16], encontram-se diversos artigos que tratam de diversos problemas envolvendo a equação de Helmholtz. Em outros trabalhos, citados nas referências anteriormente citados, podem ser encontradas baseadas em outras técnicas para solução da equação de Helmholtz, tal como em CHANG [17], que desenvolve uma técnica de mínimos quadrados para a equação reduzida da onda. Nessa mesma linha, pode-se encontrar desenvolvimentos em HARARI e HUGHES [18].

MELENK [19] realizou duas análises para problemas de Helmholtz, uma no espaço dos polinômios harmônicos generalizados e a outra no espaço gerado por ondas planas, cobrindo todas as possíveis direções. Outras contribuições podem ser encontradas em MELENK e BABUSKA [20].

Em BABUŠKA *et al.* [3], os autores fazem uma introdução geral para o pro-

blema de Helmholtz 2-D para obtenção de soluções via elementos finitos e mostram também que não é possível obter uma solução nodalmente exata para o problema de propagação de onda modelado pela equação de Helmholtz, semelhante ao obtido para o caso 1-D por HARARI e HUGHES [18], que obtém uma solução nodalmente exata, para as direções de onda plana escolhido a priori, para obtenção dos parâmetros do trabalho em questão. THOMPSON e PINSKY [21] comprovaram que para problemas 2-D modelados pela equação de Helmholtz, não é possível, mesmo que nodalmente, encontrar valores exatos para problemas discretos. Os autores aplicaram a formulação *Galerkin Least Square* (GLS) apresentado para o caso em 1D com sucesso, obtendo a solução nodalmente exata, caso que não se confirmou para a formulação 2D. Outras contribuições podem ser obtidas em BABUŠKA e SAUTER [9], CUMMINGS [22], BABUŠKA *et al.* [23], AINSWORTH *et al.* [24] e CHUNG e ENGQUIST [25]. Em ALVAREZ *et al.* [11], os autores apresentam uma formulação Galerkin descontínuo com continuidade C^0 nas interfaces dos elementos definindo dois parâmetros, α e β a serem determinados de forma numérica com objetivo de minimizar a poluição do erro.

Contribuições para formulações Galerkin descontínuo também podem ser encontradas em PERUGIA [26], CUMMINGS e FENG [27], HETMANIUK [28], SHEN e WANG [29]. No trabalho de FENG e WU [30], os autores desenvolvem uma análise para algumas penalidades interiores usando o método Galerkin descontínuo, com polinômios lineares descontínuos por partes, para problemas de Helmholtz com condições de contorno absorviva de primeira ordem para os casos 2-D e 3-D. Em STROUBOULIS *et al.* [31], os autores tratam de um fator q de convergência. HESTHAVEN e WARBURTON [32] apresentam uma formulação nodal para o método Galerkin descontínuo, com algoritmos, análise e aplicações bastante atuais para diversos problemas de engenharia. Em DI PIETRO e ERN [33], os autores trazem o embasamento teórico para formulações de Galerkin descontínuo em problemas envolvendo EDP's escalares de 1ª ordem, problemas de advecção-reação estáveis, EDP's de 1ª ordem estáveis, EDP's de 2ª ordem escalares, EDP's difusivas, tópicos adicionais em difusão pura, problemas de fluidos incompressíveis e em sistemas de Friedrich. Em FENG *et al.* [34], os autores fazem uma coletânea de artigos tratando de problemas modelados via Galerkin descontínuo.

Os problemas modelados pela equação de Helmholtz, via elementos finitos ou elementos de contorno, possuem integrais altamente oscilantes a serem calculadas. Esse é um dos motivos pelos quais surgem os problemas de erro de fase nas soluções numéricas. No livro de ENGQUIST *et al.* [35] e em suas correspondentes referências,

são apresentadas algumas técnicas numéricas para calcular integrais do tipo

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx$$

que são altamente oscilatórias a medida que a frequência natural angular ω cresce.

O objetivo e contribuição deste trabalho é desenvolver um método baseado em uma formulação Petrov-Galerkin descontínuo (PGD) para equação de Helmholtz que seja capaz de produzir uma solução aproximada, minimizando erro de fase seguindo uma metodologia diferente daquela adotada por FERNANDES [36] para uma malha estruturada ou não estruturada, que seja capaz inclusive de suportar refinamentos localizados.

O trabalho está organizado como se segue: no capítulo 2, é apresentada uma breve descrição das equações básicas de onda acústica no domínio do tempo e a respectiva equação no domínio da frequência;

no capítulo 3, é apresentada a formulação variacional *Petrov-Galerkin descontínuo* (PGD) para problemas de Helmholtz que minimiza erro de fase. Tendo como base, as formulações apresentadas em DO CARMO *et al.* [12], ALVAREZ *et al.* [37] e LOULA e FERNANDES [13];

no capítulo 4, é apresentada a metodologia original PGD para elementos inteiramente pertencentes ao domínio, que é a grande contribuição deste trabalho e que permite encontrar uma matriz que minimiza o erro de fase para ondas planas, para todos os elementos da malha, sendo a malha estruturada ou não. De modo a obter os parâmetros α_m^n que minimizam erro de fase, pertencente ao domínio;

no capítulo 5, serão obtidos os parâmetros α_m^n da formulação PGD, para elementos com uma e duas arestas no contorno, com base na matriz da formulação PGD, apresentada no capítulo 3 e desenvolvida no capítulo 4;

no capítulo 6, são apresentados os resultados numéricos e discussões;

no capítulo 7, são apresentadas as considerações finais e as sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Equações Básicas da Onda Acústica

2.1 Introdução

Neste capítulo, serão abordadas, em linhas gerais, as relações básicas da física de ondas linearizadas, tendo como o foco principal, deste trabalho, as ondas acústicas.

A propagação de ondas em meios elásticos anisotrópicos é abordada em GRAFF [38], IHLENBURG [2], CARCIONE [39], PUJOL [40], SENA [41] e LANDAU e LIFSHITZ [42]. Embora cada classe de problemas tenha suas características particulares e distintas, há semelhanças subjacentes que podem facilitar o entendimento do modelo matemático, fornecendo, assim, resultados numéricos e similaridades em implementações computacionais. O estudo dos casos harmônicos no domínio do tempo é de grande interesse em diversas áreas das engenharias.

Assume-se, também, que todas as ondas estejam em estado estacionário com frequência natural angular ω . Introduce-se a relação de dependência entre um campo escalar espaço/tempo da forma $\Phi(\mathbf{x}, t)$, onde a relação é dada por

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad (2.1)$$

onde $\Phi(\mathbf{x})$ é uma função complexa e \mathbf{x} é o vetor posição, que neste trabalho, corresponde a problemas 2D, sendo $\Phi(\mathbf{x}, t) = |\phi(\mathbf{x})| e^{i\gamma(\mathbf{x})} e^{-i\omega t}$, onde $|\phi(\mathbf{x})| e^{i\gamma(\mathbf{x})}$ está relacionado à dependência espacial, e $e^{-i\omega t}$ é a relação de dependência com tempo GRAFF [38] e WOLF [43]. De maneira semelhante, a Equação (2.1) pode ser escrita de forma a se obter um campo vetorial BASTOS e SADOWSKI [44] e KONG [45].

2.1.1 Ondas acústicas

Ondas acústicas (sonoras) são pequenas oscilações no campo de pressão $P(\mathbf{x}, t)$ em um fluido compressível ideal (meios acústicos). Essas oscilações interagem de modo que a energia é propagada através do meio. As equações governantes são obtidas a partir das leis fundamentais para fluidos compressíveis. Neste trabalho, serão considerados problemas bidimensionais de propagação de ondas em meios acústicos, compressíveis conforme KUNDU e COHEN [46].

2.1.2 Equações linearizadas para fluidos compressíveis

A equação da onda para meios acústicos pode ser obtida a partir da lei da conservação da massa, da lei da conservação do momento e da relação constitutiva, as quais são apresentadas a seguir.

2.1.3 Lei de conservação da massa

Seja Ω um elemento volumétrico ou um volume de controle, com contorno Γ , e seja $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, o vetor normal unitário apontado para o exterior do domínio Ω como mostrado na Figura 2.1. Considere o fluxo de um fluido material com pressão $P(\mathbf{x}, t)$, densidade $\rho(\mathbf{x}, t)$ e velocidade da partícula $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$.

O produto escalar $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ representa o fluxo normal de velocidade que atravessa o contorno Γ .

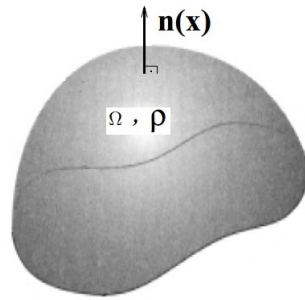


Figura 2.1: Elemento volumétrico, com vetor normal direcionado para fora do domínio.

A conservação de massa em um intervalo de tempo unitário é expressa pela relação

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega = \oint_{\Gamma} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma. \quad (2.2)$$

A integral de superfície do lado direito de (2.2) pode ser transformada em uma

integral de volume usando o teorema de Gauss,

$$\oint_{\Gamma} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div} (\rho \mathbf{V}) d\Omega, \quad (2.3)$$

que é extremamente útil em diversas aplicações nas engenharias GREENBERG [47], KUNDU e COHEN [46] e SCHEY [48]. Assim, obtém-se a expressão

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{V}) \right) d\Omega = 0, \quad (2.4)$$

onde se pode obter a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2.5)$$

O sinal em (2.2) corresponde à redução da massa. De modo semelhante, (2.2) com sinal oposto, indica fluxo que entra no volume de controle Ω segundo a direção normal, ou seja, que corresponde ao aumento de massa. Detalhes matemáticos e aplicações físicas a respeito das equações acima podem ser encontrados em GREENBERG [47], KUNDU e COHEN [46] e SCHEY [48].

2.1.4 Lei da conservação do momento

Assume-se que o elemento volumétrico Ω esteja sujeito a uma pressão hidrostática $P(\mathbf{x}, t)$. A força total ao longo da superfície Γ será dada pela integral de superfície $\mathbf{F} = - \oint_{\Gamma} P \mathbf{n} d\Gamma$, onde novamente \mathbf{n} corresponde ao vetor normal unitário ao longo da superfície Γ do elemento Ω .

Da segunda lei de Newton $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, para o caso onde a massa é constante, tem-se

$$- \oint_{\Gamma} P \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\Omega. \quad (2.6)$$

A diferencial total na integral do lado direito da Equação (2.6) é linearizada como $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$.

Aplicando o teorema de Gauss na integral do lado esquerdo da Equação (2.6), chega-se na equação do movimento, também conhecida como equação de Euler

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P. \quad (2.7)$$

Geralmente, a diferencial total $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ é expandida em uma expressão não linear KUNDU

e COHEN [46] e LANDAU e LIFSHITZ [42],

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}. \quad (2.8)$$

Considerando as hipóteses de ocorrências de pequenas oscilações, a relação 2.8 pode ser linearizada na acústica. Usando a hipótese harmônica no tempo, obtém-se a equação de estado referente à equação de Euler

$$i\omega\rho\mathbf{v} = \nabla p, \quad (2.9)$$

sendo \mathbf{i} a unidade imaginária, ω a frequência natural angular, ρ a densidade do meio, \mathbf{v} o vetor velocidade, ∇ o operador gradiente e p o campo de pressão, onde se pode utilizar a Equação (2.1) para o campo escalar $P(\mathbf{x}, t)$ e para o campo vetorial $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$. Introduzindo o campo vetorial $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ como sendo o deslocamento de uma partícula de fluido, a equação de Euler equivalente é escrita da forma

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = -\nabla P. \quad (2.10)$$

Aplicando a transformada de Fourier

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.11)$$

na Equação (2.10), obtém-se a forma estacionária da equação (2.10), dada pela expressão

$$\rho\omega^2\mathbf{u} = \nabla P, \quad (2.12)$$

que é a equação da onda (2.10) no domínio da frequência, que pode ser encontrada em diversas aplicações em engenharia e ciências.

2.1.5 Equação da onda acústica e equação de Helmholtz

Por definição, o som é uma pequena perturbação (P, ρ) em torno de um estado constante (P_0, ρ_0) de um fluido compressível ideal. Em qualquer ponto \mathbf{x} , as funções $P(\mathbf{x}, t)$ e $\rho(\mathbf{x}, t)$ representam vibrações com pequenas amplitudes. Usando a equação de Euler para baixas velocidades e assumindo uma lei linear para o material KUNDU e COHEN [46], pode-se escrever

$$P = c^2\rho, \quad (2.13)$$

onde o parâmetro constante c é a velocidade de propagação. Então, usando versões linearizadas da equação (2.5) e da Equação (2.7), obtém-se

$$P_{,tt} = c^2 \rho_{,tt} = -c^2 \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{V}_{,t}) = c^2 \operatorname{div}(\nabla P), \quad (2.14)$$

com $P_{,tt}$ a derivada parcial de segunda ordem no tempo do campo de pressão, $\rho_{,tt}$ corresponde à derivada parcial de segunda ordem no tempo da densidade para se chegar à equação homogênea da onda em termos da pressão acústica na forma

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} P_{,tt} = 0. \quad (2.15)$$

A equação da onda que representa situações mais gerais inclui o termo fonte de domínio $f(\mathbf{x}, t)$, podendo ser escrita pela expressão

$$\nabla \cdot (\varphi(\mathbf{x}) \nabla P) - \frac{1}{c^2} P_{,tt} = f(\mathbf{x}, t), \quad (2.16)$$

onde $\nabla \cdot (\varphi(\mathbf{x}) \nabla P)$ pode levar ao operador Laplaciano nas coordenadas espaciais se $\varphi(\mathbf{x})$ for o tensor identidade $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$. Com a hipótese de ondas harmônicas no tempo (2.1) ou através do uso da transformada de Fourier na Equação (2.14), GRAFF [38], BRANDWOOD [49], KAUPPINEN e PARTANEN [50], obtém-se finalmente a equação de Helmholtz. Esse procedimento transforma a equação da onda dependente do tempo em uma forma generalizada para análise espectral. Escolhem-se t e f , associados com o tempo e a frequência, BRANDWOOD [49], GREENBERG [47] e TANG [51].

A equação de Helmholtz para $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$ e $f(\bar{\mathbf{x}}, t) = 0$ é dada por

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad (2.17)$$

onde

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad (2.18)$$

é o número de onda, que também pode ser dado pela relação $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, onde λ é o comprimento de onda; em geral, usa-se $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sendo T o período. Situação com período variável pode ser encontrada em BEER *et al.* [52] capítulo 19, para um caso particular em HALLIDAY [53]. A relação entre o campo de pressão acústico transformado $p(\mathbf{x}, \omega)$ e o potencial de velocidade $\phi(\mathbf{x}, \omega)$ é dada por

$$p(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \rho_0 \phi(\mathbf{x}). \quad (2.19)$$

As Equações (2.17) e (2.18) correspondem à formulação forte do problema de Helmholtz no domínio da frequência. Essa equação pode ser resolvida de forma dis-

creta, como, por exemplo, utilizando o método das diferenças finitas. Cabe ressaltar que alguns esquemas com boa precisão podem ser encontrados em [54], WONG e LI [55], FERNANDES [36] e em CHAGAS [56] bem como nas referências por eles citadas.

Capítulo 3

Formulação Petrov-Galerkin descontínuo (PGD) para problemas de Helmholtz

3.1 Problema de valor de contorno ou formulação forte

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^d$, ^[1] um domínio limitado contínuo com contorno Γ Lipschitz suave por partes, o que garante a existência de um vetor normal unitário ao contorno \mathbf{n} . Sejam Γ_g , Γ_q e Γ_r subconjuntos de Γ tais que $\Gamma_g \cap \Gamma_q = \Gamma_q \cap \Gamma_r = \Gamma_r \cap \Gamma_g = \emptyset$ e $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_q \cup \Gamma_r$. Considere o problema de Helmholtz, descrito pela equação

$$\mathfrak{S}(\phi) = -\nabla \cdot (\nabla \phi) - (k)^2 \phi = f(x, \omega), \quad (3.1)$$

onde ϕ denota o campo escalar que descreve ondas acústicas harmônicas, em estado estacionário, com condições de contorno:

- de Dirichlet

$$\phi = g \quad \text{em} \quad \Gamma_g, \quad (3.2)$$

- de Neumann

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = q \quad \text{em} \quad \Gamma_q, \quad (3.3)$$

- de Robin

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} + \alpha_r \phi = r \quad \text{em} \quad \Gamma_r, \quad (3.4)$$

onde o coeficiente $k \in \mathbb{R}$ é o número de onda, $f(\mathbf{x}, \omega)$ é o termo fonte, $g \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_g) \cap \mathbb{C}^0(\Gamma_g)$, $q \in \mathbb{L}^2(\Gamma_q)$ e $r \in \mathbb{L}^2(\Gamma_r)$ são condições de contorno pres-

¹ \mathbb{R}^d representa todo o espaço vetorial Euclidiano de dimensão d .

critas, o coeficiente α é uma constante positiva em Γ_r . As definições dos espaços $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_g)$, $\mathbb{L}^2(\Gamma_q)$, $\mathbb{L}^2(\Gamma_r)$, $\mathbb{L}^2(\Omega)$ e $\mathbb{H}^1(\Omega)$ podem ser encontradas em ADAMS [57]. As equações (3.1) - (3.4) definem a chamada formulação clássica ou formulação forte do problema de Helmholtz. Tal terminologia vem do fato que o problema é escrito na sua forma diferencial.

3.1.1 Formulação variacional

A formulação variacional para o problema forte (3.1) - (3.2), somente considerando condição de contorno de Dirichlet, é aqui apresentada.

Considerando o conjunto de todas as funções admissíveis \mathbb{U} e o espaço das variações admissíveis \mathbb{V} , conforme

$$V = H_0^1(\Omega), \quad (3.5)$$

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad (3.6)$$

$$f \in L^2(\Omega), \quad (3.7)$$

$$H_0^1(\Omega) := \{\phi \in H^1(\Omega); \phi(0) = 0\}. \quad (3.8)$$

O problema variacional ou a forma fraca associada ao problema de valor de contorno definido em (3.1), com condição de contorno de Dirichlet (3.2), consiste em encontrar $\phi \in U$ tal que satisfaça a equação variacional

$$a_G(\phi, \eta) = b_G(\eta), \quad \forall \eta \in \mathbf{V}, \quad (3.9)$$

onde

$$a_G(\phi, \eta) = \int_{\Omega} (\nabla \phi \cdot \nabla \eta - k^2 \phi \eta) d\Omega, \quad (3.10)$$

e

$$b_G(\eta) = \int_{\Omega} (f, \eta) d\Omega. \quad (3.11)$$

3.1.2 Contínuo

O problema acima pode ser colocado de maneira equivalente conforme DUTRA DO CARMO *et al.* [58]. Para isso, considere o espaço $\mathbb{M}^h = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{ne}\}$ sendo uma partição do domínio Ω em ne elementos, tal que cada elemento Ω_e possa ser mapeado no elemento padrão pelo mapeamento isoparamétrico satisfazendo $\Omega_e \cap \Omega_{e'} = \emptyset$ se

$e \neq e'$ e $\Omega \cup \Gamma = \bigcup_{e=1}^{ne} (\Omega_e \cup \Gamma_e)$ onde Γ_e denota o contorno de cada elemento Ω_e .

Seja $p \geq 1$ um inteiro e considere $P^p(\Omega_e)$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a p definido para cada elemento, definido como

$$P^p(\Omega_e) = \{ \eta \in L^2(\Omega_e) : \eta \text{ é um polinômio de grau menor ou igual a } p \}.$$

No método de elementos finitos tratado neste trabalho, serão considerados apenas elementos lagrangianos, de classe C^0 triangulares em 2D. O espaço de elementos finitos gerado por esses elementos será indicado por $S_h(\Omega)$. As funções de base nodais de S_h associadas aos pontos nodais \mathbf{x}_i serão denotadas por ϕ_i . Definindo de forma apropriada os conjuntos $U_h \in S_h$ e $V_h \in S_h$, a solução aproximada pelo método de Galerkin consiste em resolver o seguinte problema variacional:

- Encontrar o campo $\phi_h \in \mathbf{U}_h$ de modo que

$$a_G(\phi_h, \eta_h) = b_G(\eta_h), \quad \forall \eta_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.12)$$

onde ϕ_h e η_h são as funções de interpolação para o triângulo. O funcional $a(\phi_h, \eta_h)$ e $b(\eta_h)$ são as formas variacionais definidas para a equação de Helmholtz com suas respectivas condições de contorno.

Para os casos considerados, tem-se

$$V_h = S_h \cap V. \quad (3.13)$$

No caso do conjunto U_h , para condições de Robin tem-se

$$U_h = S_h. \quad (3.14)$$

Para o problema de Dirichlet, em geral, as funções do espaço vetorial U_h satisfaz as condições de contorno exatamente. Assim, para o problema de Dirichlet, tem-se que

$$\mathbb{H}^h = \{ \varphi \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \varphi_e \in P^p(\Omega_e) \},$$

e

$$\mathbb{H}^{\frac{-1}{2}, h}(\Gamma_g) = \left\{ \phi \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_g) : \text{de modo que existe, } \varphi \in \mathbb{H}^h(\Omega) \text{ e } \phi = g \text{ em } \Gamma_g \right\}.$$

Considere g^h como sendo o interpolante de g em $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}, h}(\Gamma_g)$. Considere, ainda, o conjunto solução do interpolante ϕ , de modo que tem-se o espaço solução, descrito de modo que

$$U_h = \{ \phi \in \mathbb{H}^h(\Omega) : \phi = g^h \text{ em } \Gamma_g \},$$

e o espaço

$$V_h = \{ v \in \mathbb{H}^h(\Omega) : v = 0 \text{ em } \Gamma_g \},$$

sendo que U_h e V_h espaços vetoriais que comportam as funções de interpolação ϕ_h e η_h respectivamente. Quando ϕ é solução do problema definido por (3.1) - (3.4) então as restrições ϕ_e e $\phi_{e'}$ de ϕ em Ω_e e em $\Omega_{e'}$ respectivamente (ressaltando que Ω_e e em $\Omega_{e'}$ são elementos triangulares, como mostra a figura 4.3), satisfazem:

$$-\nabla^2 \phi_e - k_e^2 \phi_e = f_e \quad \text{em } \Omega_e, \quad (3.15)$$

$$\phi_e = g \quad \text{em } \Gamma_e \cap \Gamma_g \text{ se } \Gamma_e \cap \Gamma_g \neq \emptyset, \quad (3.16)$$

$$\nabla \phi_e \cdot \mathbf{n}_e = q_e \quad \text{em } \Gamma_e \cap \Gamma_q \text{ se } \Gamma_e \cap \Gamma_q \neq \emptyset, \quad (3.17)$$

$$\nabla \phi_e \cdot \mathbf{n}_e + \alpha_r \phi_e = r \quad \text{em } \Gamma_e \cap \Gamma_r \text{ se } \Gamma_e \cap \Gamma_r \neq \emptyset, \quad (3.18)$$

sendo α_r um número real ou complexo.

3.1.3 Descontínuo

Como mostrado na seção anterior a Equação (3.12) mostra a formulação variacional contínua clássica de Galerkin.

Nesta seção, serão apresentadas a formulação variacional de elementos finitos Galerkin descontínua desenvolvida em ALVAREZ *et al.* [37], formulação essa que inspirou a formulação Petrov-Galerkin desenvolvida neste trabalho para obtenção dos parâmetros de minimização que serão obtidos nos dois capítulos que seguem bem como para a solução do problema de Helmholtz.

Abaixo serão definidas as condições de continuidade na interface entre elementos, para o potencial e para o fluxo respectivamente, como segue:

$$\phi_e - \phi_{e'} = 0; \quad (\nabla \phi_e - \nabla \phi_{e'}) \cdot \mathbf{n}_e = 0; \quad \text{em } \Gamma_e \cap \Gamma_{e'} \text{ se } \Gamma_e \cap \Gamma_{e'} \neq \emptyset. \quad (3.19)$$

Seguindo as formulações encontradas em DO CARMO *et al.* [12], DUTRA DO CARMO *et al.* [59] e ALVAREZ *et al.* [37], a formulação PGD consiste em encontrar $\phi^h \in U^h$ de forma que o funcional bilinear $B_{PGD}(\phi, v)$ e o funcional linear $b(v)$ satisfaçam a formulação variacional de Helmholtz, semelhante ao funcional descrito na equação (3.12). Abaixo seguem as equações que compõem o funcional para a formulação DG, como descrito em ALVAREZ *et al.* [37].

- **Formulação variacional GD clássica para o problema de Helmholtz**

$$a_k^e(\phi^h, v^h) = a_G^e(\phi^h, v^h) + a_{DG}^e(\phi^h, v^h) = b_G^e(v^h), \quad (3.20)$$

onde

$$a_G^e(\phi^h, v^h) = \sum_{n=1}^{ne} \int_{\Omega_e} (\nabla \phi_e^h \cdot \nabla v_e^h - k_e^2 \phi_e^h v_e^h) d\Omega + \int_{\Gamma_r \cap \Gamma_e} \alpha_e \phi_e^h v_e^h d\Gamma, \quad (3.21)$$

e

$$\begin{aligned} a_{GD}^e(\phi^h, v^h) &= \sum_{n=1}^{ne} \sum_{e' > e \Gamma_{ee'}}^{ne} \int \left\{ -\frac{1}{2} (\nabla \phi_e^h + \nabla \phi_{e'}^h) \cdot \mathbf{n}_e (v_e^h - v_{e'}^h) + \right. \\ &+ \frac{\beta_{ee'}}{h_{ee'}} (\phi_e^h - \phi_{e'}^h) (v_e^h - v_{e'}^h) + \\ &\left. + \frac{\lambda_{ee'}}{2} (\phi_e^h - \phi_{e'}^h) (\nabla v_e^h + \nabla v_{e'}^h) \cdot \mathbf{n}_e \right\} d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.22)$$

e

$$b_G^e(v^h) = \int_{\Omega_e} f_e v_e^h d\Omega + \int_{\Gamma_r \cap \Gamma_e} r_e v_e^h d\Gamma + \int_{\Gamma_q \cap \Gamma_e} q_e v_e^h d\Gamma, \quad (3.23)$$

onde $\beta_{ee'}$, $\lambda_{ee'}$, α_e e $h_{ee'}$ são parâmetros ótimos para a formulação DG desenvolvida por ALVAREZ *et al.* [37] e estão definidos no item seguinte. O parâmetro α_e que aparece na formulação DG em ALVAREZ *et al.* [37] é diferente do parâmetro α_n^m desenvolvido neste trabalho, com o objetivo de minimizar o erro de fase.

- **Formulação variacional PGD descontínuo proposta para o problema de Helmholtz**

A formulação proposta segue a formulação descrita por ALVAREZ *et al.* [37], fazendo $v^h = \eta^h + W^m$ na Equação (3.20). Assim, tem-se a forma variacional

$$\begin{aligned} a_{PDG}^e(\phi^h, \eta^h + W^m) &= a_G^e(\phi^h, \eta^h + W^m) + a_{DG}^e(\phi^h, \eta^h + W^m) \\ &= b_{PGD}^e(\eta^h + W^m), \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde a_G^e , a_{DG}^e e b_G^e são como definidos pelas Equações (3.21) - (3.23), respectivamente, fazendo a substituição $v^h = \eta^h + W^m$, como será descrito no Capítulo 4. Nas Equações (3.21) - (3.23), \mathbf{n}_e é o vetor normal unitário ao elemento Ω_e , os parâmetros $\beta_{ee'} = 4$, $h_{ee'} = \min\{h_e, h_{e'}\}$, $\lambda_{ee'} = -1$, como descrito em DO CARMO *et al.* [12],

onde ϕ_e , ^[2] $\phi_{e'}$, ^[3] $\phi_{e''}$, ^[4] $\phi_{e'''}$ ^[5] e W^m é definido pela Equação (4.2) que será apresentada no Capítulo 4. A formulação (3.24), quando utilizadas, as condições de contorno de Dirichlet, produz o fenômeno da ressonância numérica, conforme breve descrição que segue.

3.1.4 Ressonância

3.1.5 Ressonância numérica

A análise numérica e estudos de convergência de aproximações por elementos finitos ou por diferenças finitas mostram que as propriedades de estabilidade, convergência e precisão dessas aproximações estão intimamente relacionadas às correspondentes discretizações do operador de Helmholtz. Assim, tem sido observado que os efeitos de poluição e ressonância numérica são muito sensíveis a ordem dessas aproximações. Por outro lado, a estabilização das aproximações de um modo geral e, em particular, das aproximações de baixa ordem requer conhecimento de soluções do problema homogêneo na determinação de parâmetros de estabilização, como na formulação GLS apresentada em THOMPSON e PINSKY [21], MONK e DA-Q. [60] e JIANG [61] por exemplo: ou na própria construção do operador de Helmholtz discreto, como descrito por BABUŠKA *et al.* [3] na formulação QSFEM e muito bem explicado e exemplificado por FERNANDES [36], bem como por WU [62]. Neste trabalho, frequentemente, serão utilizadas ondas planas, soluções do problema de Helmholtz, na determinação de parâmetros de estabilização em formulações de elementos finitos de Petrov-Galerkin e na construção de aproximações por diferenças finitas FERNANDES [36].

Nos experimentos numéricos, será usada condição de Dirichlet para os problemas. Essa condição de contorno oferece maiores dificuldades numéricas, devido ao fenômeno de ressonância CHAGAS [56]. É possível visualizar a ressonância tanto no problema contínuo, quanto no discreto. Contudo, sabe-se que, no método de elementos finitos de Galerkin e diferenças finitas, o número de onda discreto difere do analítico, como evidenciado em FERNANDES [36] e em CHAGAS [56]. Portanto, mesmo que a solução exata esteja em ressonância, a aproximada pode não estar e vice-versa.

- Um aspecto importante de problemas com condições de Dirichlet é quando k^2 se torna um autovalor do operador $-\nabla^2$. Para o caso em que $g = 0$, não

² ϕ_e função de interpolação do elemento e .

³ $\phi_{e'}$ função de interpolação do elemento vizinho 1 do elemento e .

⁴ $\phi_{e''}$ função de interpolação do elemento vizinho 2 do elemento e .

⁵ $\phi_{e'''}$ função de interpolação do elemento vizinho 3 do elemento e .

há unicidade da solução, ocorrendo, assim, o fenômeno conhecido como ressonância numérica para o caso dos problemas quando resolvidos, por técnicas numéricas, ou seja, discretização do domínio contínuo. Esse nome vem da semelhança do fenômeno da ressonância, que é tão útil e conhecido no nosso dia a dia e nas engenharias de uma forma geral.

Por exemplo, se Ω for um domínio retangular de lados $(a, 0) \times (0, b)$, a distribuição do campo, no estado estacionário, tal como no caso de uma problema de calor, com a distribuição de temperatura, produz autovalores dados pela expressão

$$\gamma_{mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

para autofunções que representam a distribuição de temperatura bidimensional dada pela expressão

$$Z_{nm}(z) = (A \cosh(\gamma_{mn}z) + A \sinh(\gamma_{mn}z)), \quad (3.26)$$

onde $m, n \in \mathbf{N}^*$. Mais detalhes da solução do problema tridimensional podem ser encontradas em TANG [51]. Assim, se ϕ é uma solução do problema, dado pelas equações (3.15) - (3.18), com k^2 igual a um dos autovalores γ_{mn} , então todas as combinações lineares que produzem uma função da forma ϕ_{mn} com qualquer constante também será uma solução. No contexto dos métodos numéricos, pode ocorrer de o número de onda da solução aproximada e os autovalores do problema discreto serem bastante diferentes do número de onda exato e dos autovalores originais. Assim, mesmo que k não cause ressonância como conhecido na forma convencional, pode acontecer de haver ressonância na solução aproximada, problema conhecido como ressonância numérica FERNANDES [36].

No próximo capítulo, é incluída a função de ponderação de forma a obter parâmetros α_n^m que minimiza erro de fase, e toda a base matemática para obtenção de tais parâmetros.

As bases matemáticas serão discutidas nos próximos capítulos, e estão pautadas na formulação variacional dada pelo funcional,

$$v^h = (\eta^h + W^m),$$

onde o funcional bilinear $b_{PGD}(\phi, \eta)$ e o funcional linear $b(\eta)$ ficam assim descritos,

$$a_{PGD}(\phi, \eta^h + W^m) = b_{PGD}(\eta^h + W^m), \quad (3.27)$$

onde W^m é a função de interpolação que permite determinar os parâmetros α_n^m que minimizam erro de fase. Os detalhes da obtenção desses parâmetros serão dados no próximo capítulo.

Em todo problema que envolve modelagem numérica, aparecem algumas dificuldades, principalmente nos problemas envolvendo a equação de Helmholtz. Tais como, perda de fase, perda de amplitude e perda de fase e amplitude que ocasiona o que convencionalmente chama-se de poluição do erro.

3.1.6 Poluição do Erro

- **Fase** é a fração de um período da qual o tempo, ou o ângulo de tempo associado ωt , está avançando em relação a uma referência arbitrária. No caso de uma única variação senoidal, a origem é comumente tomada como sendo a última passagem no sentido de negativo para positivo. Assim, uma fase de onda senoidal é $1/12$ de um período (ou 30° desde a origem) onde a ordenada é a metade da ordenada máxima; uma outra fase é $1/4$ de um período (ou 90° desde a origem) onde a ordenada tem o seu máximo valor positivo; e assim por diante para qualquer fração de T (ou de $\omega T = 2\pi$).
- **Obs1. Perda de Fase:** Nos problemas que envolvem propagação de ondas, a modelagem, via métodos numéricos, possui o fenômeno conhecido como perda de fase, características de métodos numéricos, tais como MDF, MEF, MVF, MEC, dentre outros. Tais evidências podem ser observadas nas Figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 abaixo. As características para problemas envolvendo a equação de Helmholtz são mais explícitas, à medida em que se aumenta o número de onda.

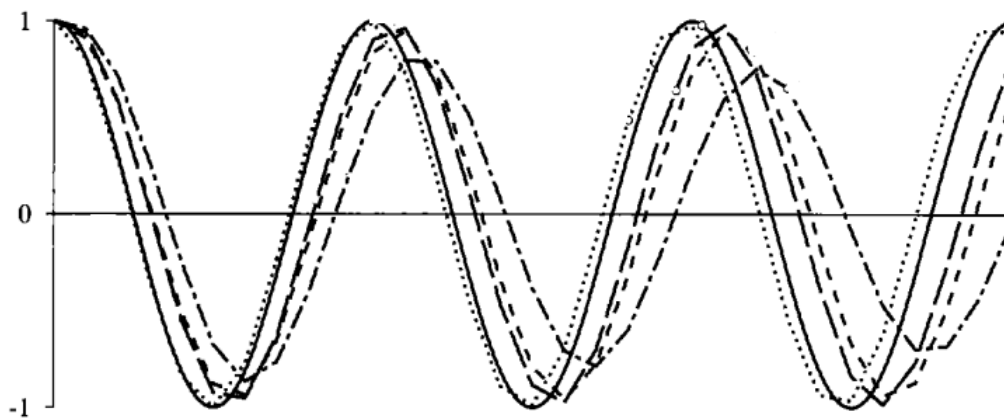


Figura 3.1: Fenômeno da perda de fase e amplitude CHOPRA [4]. Posteriormente nomeado como poluição do erro de fase.

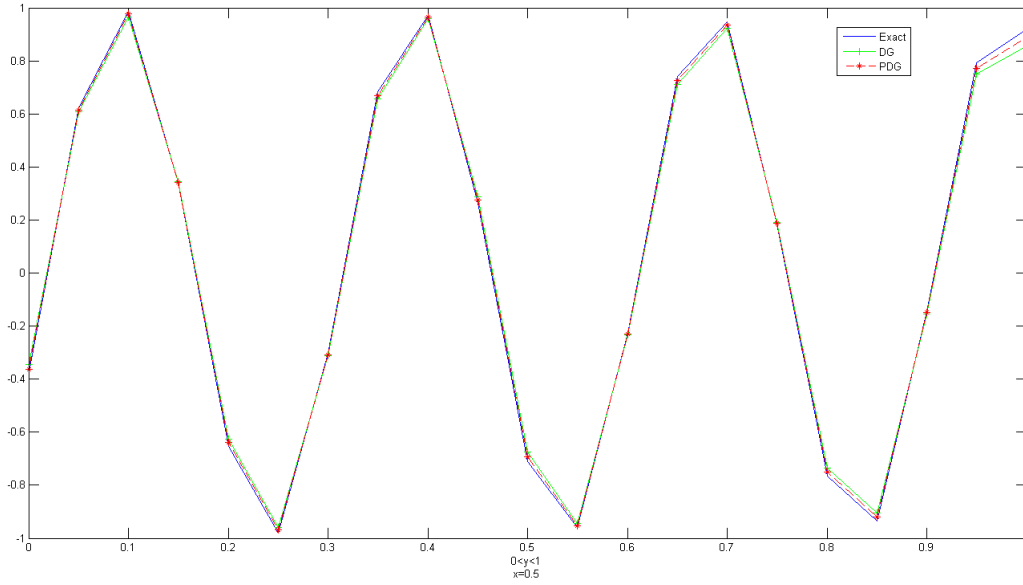


Figura 3.2: Evidências do fenômeno da poluição do erro de fase para soluções, exata, DG e PGD para a seção vertical $x = 0.5$, para a partição 20×20 e número de onda $k = 30$.

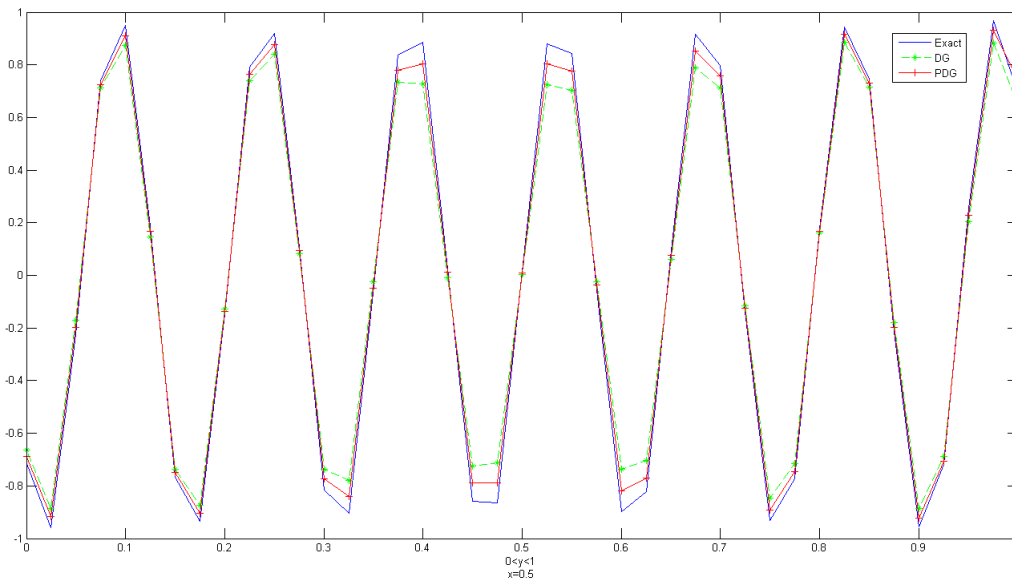


Figura 3.3: Evidências do fenômeno da poluição do erro de fase para soluções, exata, DG e PGD para a seção vertical $x = 0.5$, para a partição 20×20 e número de onda $k = 60$.

- **Obs2. Perda de Fase e Amplitude:** Nos problemas que envolvem propagação de ondas, com altos números de ondas, tem-se além da perda de fase, a perda de amplitude. Tais fatos, vem acompanhado do método. Essas duas perdas, são caracterizadas como poluição do erro, na literatura, como podem ser encontrados em BABUŠKA *et al.* [3], FERNANDES [36] e WU [62].

Como pode ser evidenciado nas Figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, em problemas que envolvem a equação de Helmholtz, esse é um problema recorrente para formulações numéricas. Esse problema é objeto tem sido objeto de estudo de diversos pesquisadores nas últimas décadas, via diversas versões da modelagem numérica. Não é diferente neste trabalho.

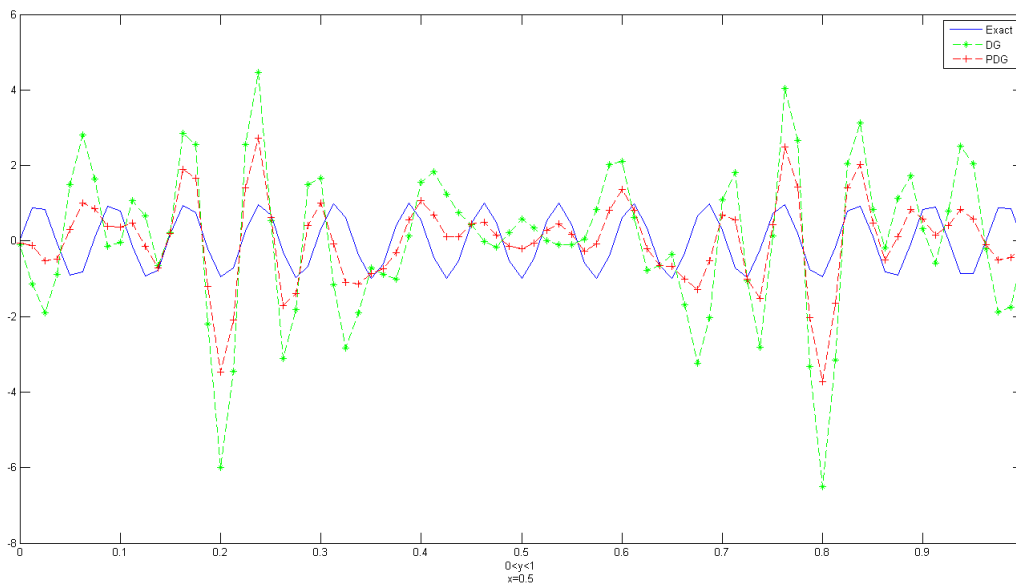


Figura 3.4: Evidências do fenômeno da poluição do erro de fase para soluções, exata, DG e PGD para a seção vertical $x = 0.5$, para a partição 80×80 e número de onda $k = 120$.

Capítulo 4

Obtenção dos parâmetros que minimizam o erro de fase para elementos do domínio

4.1 Introdução

Neste capítulo, será apresentada a formulação proposta para obter a matriz $M_{k,n}^\alpha$ que compõe a formulação e a obtenção dos parâmetros α que minimizam o erro de fase via formulação PGD, para o caso de um elemento pertencente inteiramente ao domínio "não possui aresta no contorno". A forma de obtenção desta matriz e principalmente a obtenção desses parâmetros é que é a contribuição desse trabalho. Tal forma de obtenção de $M_{k,n}^\alpha$ é feita via formulação Petrov Galerkin descontínuo, que é diferente das formas obtidas em BABUŠKA *et al.* [3] e FERNANDES [36] obtidas via formulação de diferenças finitas e em DO CARMO *et al.* [12] que foi obtida via formulação GPR (Galerkin Resíduo Projetado).

Em BABUŠKA *et al.* [3], é apresentado uma metodologia para obtenção de um estêncil, para a montagem da matriz que justifica o método, de modo que na metodologia apresentada, o estêncil é obtido para uma malha quadrangular regular, como mostrado na Figura 4.1 (a) e seu respectivo fluxo, Figura 4.1 (b).

Neste trabalho, desenvolve-se uma formulação, na qual a malha é triangular, como mostrado na Figura 4.3, de modo que não se aplica o estêncil obtido em BABUŠKA *et al.* [3]. O estêncil para uma malha triangular obtido neste trabalho, tem a forma mostrado na Figura 4.2, (a).

De foma análoga, para o caso desenvolvido neste trabalho, estão apresentadas as características de uma malha triangular, para um elemento e qualquer do domínio, Figura 4.2 (a), bem como a informação do fluxo Figura 4.2 (b), para um produto tensorial, para esse elemento.

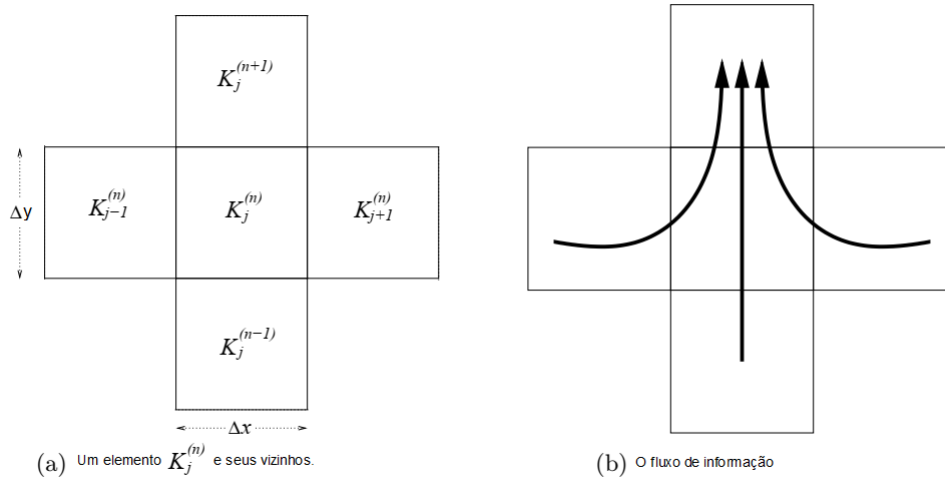


Figura 4.1: Forma da malha para obtenção do estêncil em uma malha quadrangular, como obtido em BABUŠKA *et al.* [3].

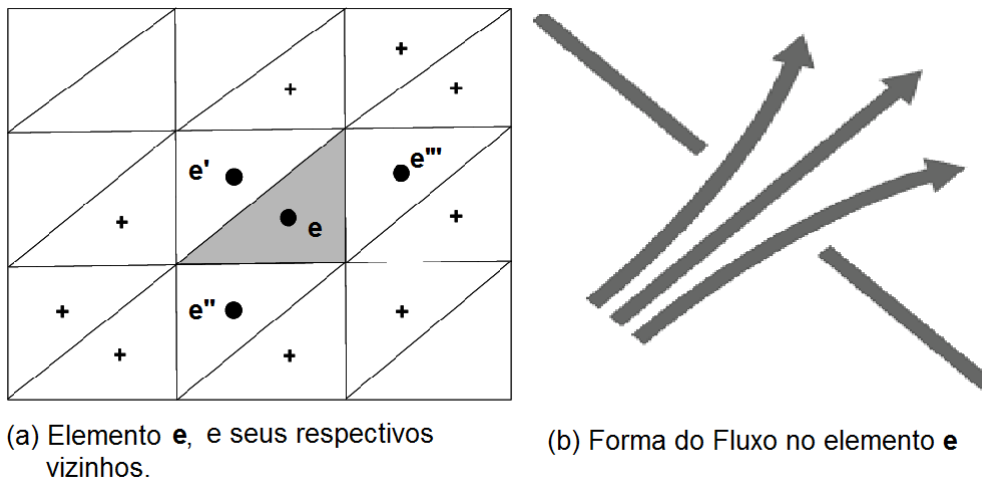


Figura 4.2: Forma da malha para obtenção do estêncil, para uma malha triangular, caso desenvolvido neste trabalho.

4.1.1 Metodologia para obtenção dos parâmetros que minimizam erro de fase para elementos interiores ao domínio

Por uma questão de simplicidade, será descrita a forma de obtenção da matriz $M_{k,n}^\alpha$ para o caso de uma malha triangular não estruturada com funções de interpolação de classe C^0 . Cabe ressaltar que a formulação PGD aqui apresentada Capítulo 3 não faz qualquer restrição quanto a estrutura da malha, ao tipo de elemento nem quanto a classe a qual pertençam as funções de interpolação. Tal matriz pode ser obtida para situações gerais, por exemplo para elementos quadriláteros não estruturados com polinômios de ordem superiores, dentre outros. Considere um elemento

triangular genérico Ω_e do domínio Ω particionado, como mostrado na figura 4.3. A forma através da qual será obtida a matriz $M_{k,n}^{\alpha,\Omega}$ é a partir da formulação Galerkin descontínuo, com $\beta^{ee'} = 4$, $h_{ee'} = \min \{h_e, h_{e'}\}$ e $\lambda_{ee'} = -1$. De modo que, para o

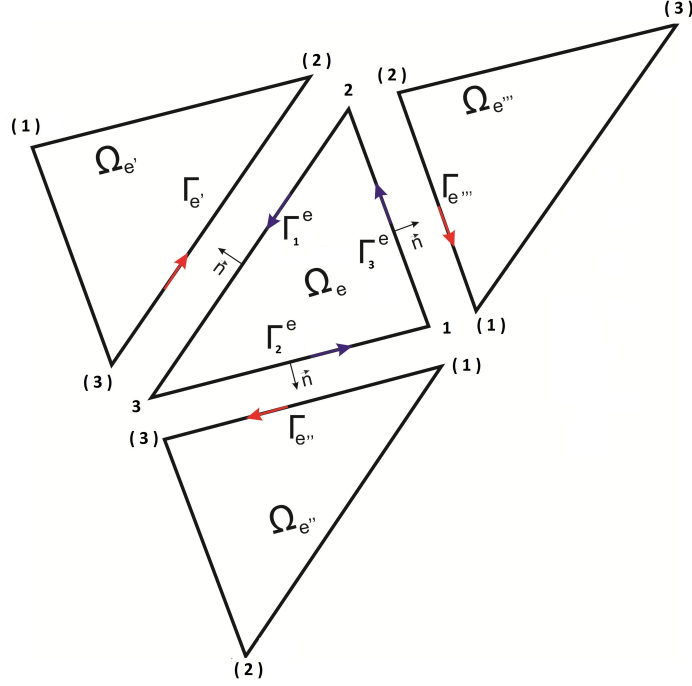


Figura 4.3: Elemento triangular e qualquer do domínio e seus respectivos vizinhos, e' , e'' e e''' , bem como suas respectivas numerações locais, que serão adotadas para o desenvolvimento das equações que fazem menção à essa figura no decorrer do trabalho.

caso triangular exemplificado na Figura 4.3, e para $\eta_e^h \in [L_1, L_2, L_3]$ ¹ onde cada η_e^h representa a função de interpolação linear do triângulo. Sejam também as funções $\phi_{e'}^h, \phi_{e''}^h$ e $\phi_{e'''}^h$ que representam as funções de interpolação linear dos elementos vizinhos, e' , e'' , e''' respectivamente. Será adotado valor constante para o parâmetro $\beta^{ee'} = \beta^{ee''} = \beta^{ee'''}$, apresentados com mais detalhes em ALVAREZ *et al.* [63]. O número de funções auxiliares é dado por $N_{func} = 12$, para o caso onde o elemento considerado é interior ao domínio do problema, ou seja tal elemento interno possuirá 3 elementos vizinhos.

A formulação proposta neste trabalho considera a inclusão de uma "nova" função de ponderação W^m . A formulação variacional é reescrita como

$$a_{PGD}^e(\phi, \eta + W^m) = b_{PGD}^e(\eta + W^m), \quad (4.1)$$

¹ $[L_1, L_2, L_3]$. São as funções de interpolação do elemento triangular, padrão.

onde as funções de ponderação W^m serão dadas como segue

$$W^m = \sum_{n=1}^{N_{func}} \alpha_n^m \Psi_n^e, \quad (4.2)$$

onde os α_n^m representam os valores que serão obtidos nesta formulação de forma a minimizar o erro de fase, Ψ_n^e são funções especiais obtidas a partir das funções de coordenadas de área, η_k^e , $k = 1, 2, 3$, utilizadas para fazer o mapeamento dos elementos em coordenadas de área.

A função peso para a formulação proposta neste trabalho será da forma

$$(\eta_m^e + W^m). \quad (4.3)$$

Levando (4.2) em (4.1) e desenvolvendo tem-se a expressão

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_e} [\nabla \phi^e \cdot \nabla W^m - k^2 \phi^e W^m] d\Omega + \int_{\Omega_e} [\nabla \phi^e \cdot \nabla \eta_n^e - k^2 \phi^e \eta_n^e] d\Omega \right) \\ & + \\ & \sum_{e' \neq e} \left[\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{ee'}} \frac{\beta^{ee'}}{h_{ee'}} (\phi^e - \phi^{e'}) \eta_n^e d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ee}} (\nabla \phi^e \cdot \vec{n}_e + \nabla \phi^{e'} \cdot \vec{n}_e) \eta_n^e d\Gamma \\ & + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ee}} (\phi^e - \phi^{e'}) \nabla \eta_n^e \cdot \vec{n}_e d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ee}} (\nabla \phi^e \cdot \vec{n}_e + \nabla \phi^{e'} \cdot \vec{n}_e) W^m d\Gamma \\ & + \\ & \int_{\Gamma_{ee}} \frac{\beta^{ee'}}{h_{ee'}} (\phi^e - \phi^{e'}) W^m d\Gamma \end{aligned} \right], \quad (4.4) \end{aligned}$$

onde e' representa os elementos vizinhos ao elemento e tomado como referência, ou seja, $e' \in \{e_1, e_2, e_3\}$ e ($m = 1, 2, 3$), para definir a formulação PGD, supõe-se que o domínio seja discretizado por uma malha, formada por elementos triangulares Ω_e . Rearranjando a Equação (4.4), a equação associada a um ponto nodal no interior do domínio pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned} & C^{m1} \hat{\phi}_1^e + C^{m2} \hat{\phi}_2^e + C^{m3} \hat{\phi}_3^e + C^{m4} \hat{\phi}_3^{e_2} + C^{m5} \hat{\phi}_2^{e_3} + C^{m6} \hat{\phi}_2^{e_1} \\ & + \\ & \left[C^{m7} \hat{\phi}_1^{e_1} + C^{m8} \hat{\phi}_3^{e_1} + C^{m9} \hat{\phi}_1^{e_2} + C^{m10} \hat{\phi}_2^{e_2} + C^{m11} \hat{\phi}_1^{e_3} + C^{m12} \hat{\phi}_3^{e_3} \right] \\ & = b^m + \text{Res}^m(\theta) \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde os C^{m1}, \dots, C^{m12} , foram escritos dessa forma na Equação 4.5 por questão de simplicidade, de modo que são os mesmos C_{nk}^m . Que por sua vez, são os mesmos

que aparecem na expressão $C^{mk} = \sum_{n=1}^{N_{func}=12} M_{kn}^{\alpha, \Omega} \alpha_n^m$, de modo que representam as componentes da matriz associada aos nós do domínio, com $m = 1, 2, 3$ e $k = 1, \dots, 12$. Os $\hat{\phi}_1^e, \hat{\phi}_2^e$ e $\hat{\phi}_3^e$ correspondem aos valores nodais da onda plana no elemento e , bem como $\hat{\phi}_3^{e2}, \hat{\phi}_2^{e3}, \hat{\phi}_2^{e1}, \hat{\phi}_1^{e1}, \hat{\phi}_3^{e1}, \hat{\phi}_1^{e2}, \hat{\phi}_2^{e2}, \hat{\phi}_1^{e3}$ e $\hat{\phi}_3^{e3}$, correspondem aos valores nodais da onda plana nos elementos vizinhos do elemento e . Onde b^m corresponde ao termo independente do sistema e $\text{Res}^m(\theta)$ corresponde ao resíduo na aproximação numérica.

Esta equação é análoga à equação do estêncil apresentada em BABUŠKA *et al.* [3]. Os coeficientes da matriz C_{nk}^m são obtidos a partir das duas expressões seguintes, de acordo com o valor do índice k variando de 1 a 3, na equação (4.6)

$$C_{nk}^m = \sum_{n=1}^{N_{func}} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_e} [\nabla \Psi_n^e \cdot \nabla \eta_k^e - k^2 \Psi_n^e \eta_k^e] d\Omega \\ + \\ \sum_{l=1}^3 \int_{\Gamma_{ee_l}} \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^e (\nabla \eta_k^e \cdot \vec{n}_e) + \frac{\beta^{ee_l}}{h_{ee_l}} \Psi_n^e \eta_k^e \right] d\Gamma \end{array} \right\} \alpha_n^m \quad (4.6)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_{func}} M_{kn}^{\alpha} \alpha_n^m,$$

com os índices dados como segue

$$\begin{aligned} k &= 1, 2, 3 && \text{(Para as três primeiras linhas),} \\ n &= 1, 2, \dots, 12 && \text{(Para as colunas) e,} \\ m &= 1, 2, 3 && \text{(fixados),} \end{aligned} \quad (4.7)$$

e para as demais linhas da matriz C_{nk}^m , ou seja k variando de 4 a 12, é utilizada a equação

$$C^{mk} = \sum_{n=1} \left\{ \sum_{l=1}^3 \int_{\Gamma_{ee_j}} \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^e (\nabla \eta_l^{e_l} \cdot \vec{n}_e) + \frac{\beta^{ee_j}}{h_{ee_j}} \Psi_n^e \eta_l^{e_l} \right] d\Gamma \right\} \alpha_n^m \quad (4.8)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_{func}} M_{kn}^{\alpha} \alpha_n^m.$$

Na obtenção da matriz C^{mk} , deve-se seguir as seguintes associações entre os índices, conforme a Tabela 4.1, onde os índices que aparecem no lado direito da Equação

Tabela 4.1: Relação entre os índices k , l , j e i , utilizados na Equação (4.8), para $k \geq 4$,

| k | l | j | i |
|-----|-----|-----|-----|
| 4 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 3 | 3 | 2 |
| 6 | 1 | 1 | 2 |
| 7 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 3 |
| 9 | 2 | 2 | 1 |
| 10 | 2 | 2 | 2 |
| 11 | 3 | 3 | 1 |
| 12 | 3 | 3 | 3 |

(4.8) são dados como seguem

$$\begin{aligned} m &= 1, 2, 3, \\ n &= 1, 2, \dots, 12, \\ k &= 1, 2, \dots, 12, \end{aligned}$$

onde adota-se no decorrer deste trabalho as seguintes relações para as coordenadas de área do triângulo,

$$\eta_m^e = L_m^e \rightarrow \text{(Coordenadas de área do elemento } e\text{),}$$

$$\eta_k^{e_l} = L_i^{e_l} \rightarrow \text{(Coordenadas de área dos elementos vizinhos } e_l\text{).}$$

A estrutura geral da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Omega}$, para o caso de elementos inteiramente pertencentes ao domínio, é não singular, como foi verificado intensamente nos diversos exemplos discutidos neste trabalho, no Capítulo 6. Os componentes não nulos, da matriz não singular $M_{kn}^{\alpha, \Omega}$ estão representados na Figura 4.4 abaixo, de modo que o símbolo #, hachurado em amarelo, representam os coeficientes não nulos.

Define-se agora as funções especiais de ponderação W_i para o caso dos elementos Ω_e pertencentes ao domínio Ω do problema, com $i = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} W_0 &= L_1 * L_2 * L_3, \\ W_1 &= L_2 * L_3, \\ W_2 &= L_1 * L_3, \\ W_3 &= L_1 * L_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

As funções Ψ_i são obtidas de duas formas diferentes, de modo que a primeira é para o caso em que o valor do índice i , com $i = 1, 2, \dots, 12$. A primeira forma, é

$$M_{kn}^{\alpha, \Omega} = \begin{array}{c|cccccccccccc} \mathbf{x} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 1 & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ 2 & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ 3 & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \# & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# & \# & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# & \# & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# & \# & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & \# & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & \# & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# \end{array}$$

Figura 4.4: Forma geral da Matriz $M_{kn}^{\alpha, \Omega}$ para um elemento triangular inteiramente pertencente ao domínio Ω de interesse.

quando tem-se $i = 1, 2, 3$, de modo que

$$\Psi_i = \eta_i^e W_0, \quad \text{com } i = 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

E a segunda situação para a obtenção de Ψ_i , é para quando tem-se os demais valores de i , ou seja $i = 4, 5, \dots, 12$. Assim, tem-se as expressões para as demais funções Ψ_i , de modo que para $k = 4$, é dada como segue

$$\Psi_4 = h_e \left(\frac{\int_{\Gamma_{ee2}} (\nabla \eta_3^{e2} \cdot \vec{n}_e) d\Gamma}{\int_{\Gamma_{ee2}} d\Gamma} \right) L_1 L_3 W_2, \quad (4.11)$$

para $k = 5$

$$\Psi_5 = h_e \left(\frac{\int_{\Gamma_{ee3}} (\nabla \eta_2^{e3} \cdot \vec{n}_e) d\Gamma}{\int_{\Gamma_{ee3}} d\Gamma} \right) L_1 L_2 W_3, \quad (4.12)$$

para $k = 6$

$$\Psi_6 = h_e \left(\frac{\int_{\Gamma_{ee1}} (\nabla \eta_2^{e1} \cdot \vec{n}_e) d\Gamma}{\int_{\Gamma_{ee1}} d\Gamma} \right) L_2 L_3 W_1, \quad (4.13)$$

para $k = 7$

$$\Psi_7 = \eta_2^e W_1, \quad (4.14)$$

para $k = 8$

$$\Psi_8 = \eta_3^e W_1, \quad (4.15)$$

para $k = 9$

$$\Psi_9 = \eta_1^e W_2, \quad (4.16)$$

para $k = 10$

$$\Psi_{10} = \eta_3^e W_2, \quad (4.17)$$

para $k = 11$

$$\Psi_{11} = \eta_1^e W_3, \quad (4.18)$$

e finalmente para $k = 12$

$$\Psi_{12} = \eta_2^e W_3. \quad (4.19)$$

Vale lembrar que $\eta_m^e = L_m^e$. Para as funções descritas acima a matriz é não singular como foi extensamente verificada nos exemplos numéricos tratados neste trabalho, no Capítulo 6 estão apresentados os resultados numéricos e discussões.

4.1.2 Onda plana

O estudo de características básicas de propagação de um sistema uni, bi ou tridimensional envolve a investigação da propagação de uma onda harmônica em uma direção qualquer, como, por exemplo, no caso da Figura 4.5 na direção x.

De forma análoga, podem ser obtidos resultados semelhantes nas demais direções y e z, ou qualquer outra, diferente das direções dos eixos coordenados, e isso se caracteriza como uma investigação de ondas planas.

Tais ondas são perturbações em duas e três dimensões, onde o movimento de uma partícula qualquer acontece na direção perpendicular a direção de propagação.

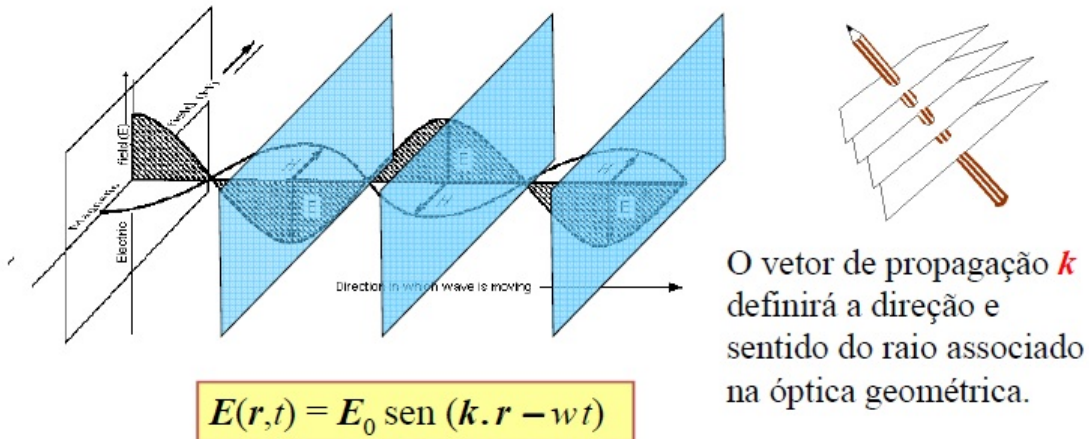
A figura 4.5 mostra uma onda plana no espaço tridimensional, onde, nas direções y e z, estão os campos magnético e elétrico respectivamente e na direção x a onda plana resultante das oscilações dos campos se propagando.

Para exemplificar a matemática que justifica uma onda plana, considere a figura 4.6, onde o movimento de qualquer partícula ao longo da linha, no caso 2D, Figura 4.6. E no caso de um plano, no caso 3D, Figura 4.5, podem ser definida pela equação (4.20) forma que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct = \text{constante}, \quad (4.20)$$

seja constante, onde \mathbf{n} é o vetor normal ao plano, a velocidade de propagação da onda pode ser obtido de modo que, $c = \lambda f = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{\kappa}$ e \mathbf{r} é o vetor posição centrado

Ondas eletromagnéticas planas no vácuo



A **frente de onda** é o lugar geométrico dos pontos onde

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{constante}$$

Frente de onda plana: $kx - \omega t = \text{constante}$ para $\mathbf{k} = k \hat{x}$

Figura 4.5: Onda plana se propagando devido as oscilações dos campos elétricos e magnéticos em uma região do espaço qualquer, seja ele, um meio material ou não. Fonte: notas de aula Profa. Chinellato, D. C, 2014.

na origem do sistema de coordenada cartesiano podendo ser escrito da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= l\mathbf{i} + m\mathbf{j} = \cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}, \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Ondas planas são muito úteis nos métodos que buscam minimização do erro de fase, pois a onda plana é uma solução da equação de Helmholtz, como pode-se ver, considerando uma onda plana de amplitude unitária da forma

$$\phi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.21)$$

pode-se justificar que a função de onda (4.21) é solução da equação de Helmholtz homogênea

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \nabla \cdot (\nabla \phi) \\ &= \nabla \cdot (ik\phi\mathbf{n}) \\ &= ik(\phi\nabla \cdot \mathbf{n} + \nabla\phi \cdot \mathbf{n}) \\ &= ik(0 + (ik\phi\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) \\ &= i^2 k^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \phi \\ &= -k^2 \phi. \end{aligned}$$

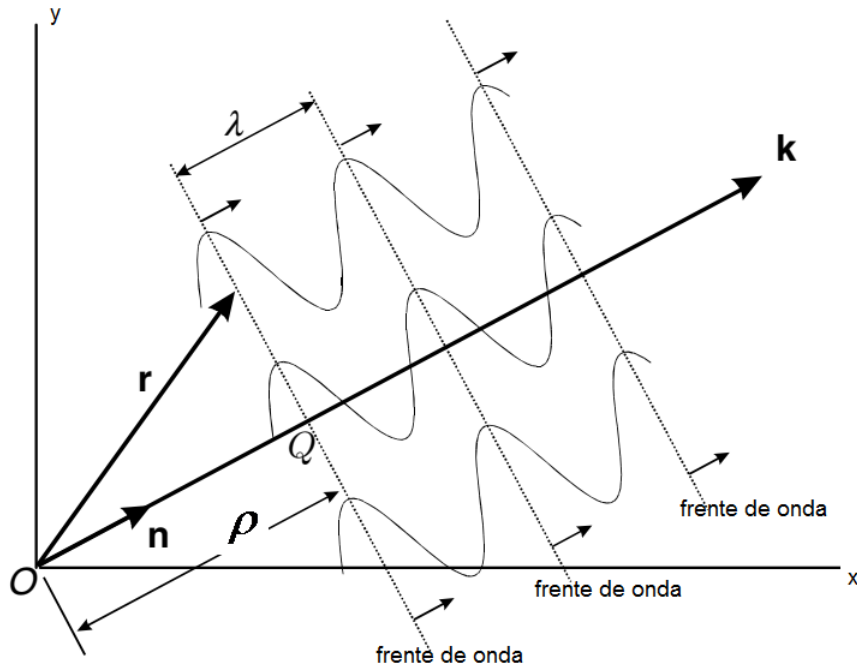


Figura 4.6: Onda plana propagando-se no plano bidimensional (x,y). Onde \mathbf{k} é o vetor “frente de onda” e o vetor \mathbf{n} é o vetor unitário do vetor \mathbf{k} .

Considerando agora a função de onda plana com as características, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, dada pela expressão

$$\phi = e^{i(k(\alpha_\theta x + \beta_\theta y))}, \quad (4.22)$$

onde os coeficientes são dados como segue

$$\alpha_\theta = \cos(\theta), \text{ e } \beta_\theta = \sin(\theta). \quad (4.23)$$

Considere-se, agora, ϕ^I como sendo o interpolante. Logo, podem-se escrever as equações do interpolante para cada nó dos elementos vizinhos ao elemento triangular e como segue.

Para o nó 1 do elemento vizinho e_1 , tem-se

$$\hat{\phi}_1^{e_1} = \hat{\phi}_2^e, \quad (4.24)$$

para o nó 3 do elemento vizinho e_1 tem-se

$$\hat{\phi}_3^{e_1} = \hat{\phi}_3^e, \quad (4.25)$$

para o nó 1 do elemento vizinho e_2 tem-se

$$\hat{\phi}_1^{e_2} = \hat{\phi}_1^e, \quad (4.26)$$

para o nó 2 do elemento vizinho e_2 tem-se

$$\hat{\phi}_2^{e_2} = \hat{\phi}_3^e, \quad (4.27)$$

para o nó 1 do elemento e_3 tem-se

$$\hat{\phi}_1^{e_3} = \hat{\phi}_1^e, \quad (4.28)$$

e por fim, para o nó 3 do elemento e_3 tem-se

$$\hat{\phi}_3^{e_3} = \hat{\phi}_2^e, \quad (4.29)$$

para obtenção dos valores nodais da onda plana, em cada nó dos elementos e , e' , e'' e e''' . Definindo agora os coeficientes da matriz C^{mj} com $m = 1, 2, e 3$, e $j = 1, 2, \dots, 12$ como segue:

$$C^{m1} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (4.30)$$

$$C^{m9} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (4.31)$$

$$C^{m11} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (4.32)$$

$$C^{m2} = C^{m7} = C^{m12} = \frac{C^{*m2}}{3}, \quad (4.33)$$

$$C^{m3} = C^{m8} = C^{m10} = \frac{C^{*m3}}{3}, \quad (4.34)$$

a equação (4.5) é reescrita como segue, de modo que o interpolante seja uma onda plana

$$C^{*m1}\hat{\phi}_1^e + C^{*m2}\hat{\phi}_2^e + C^{*m3}\hat{\phi}_3^e + C^{*m4}\hat{\phi}_3^{e_2} + C^{*m5}\hat{\phi}_2^{e_3} + C^{*m6}\hat{\phi}_2^{e_1} = b^m + \text{Res}^m(\theta), \quad (4.35)$$

onde

$$C^{m4} = \frac{C^{*m4}}{3}, \quad (4.36)$$

$$C^{m5} = \frac{C^{*m5}}{3}, \quad (4.37)$$

e

$$C^{m6} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (4.38)$$

para o termo independente b^m escrito como segue

$$b^m = - \left(D^{m1} \hat{\phi}_1^e + D^{m2} \hat{\phi}_2^e + D^{m3} \hat{\phi}_3^e + D^{m4} \hat{\phi}_3^{e2} + D^{m5} \hat{\phi}_2^{e3} + D^{m6} \hat{\phi}_2^{e1} \right), \quad (4.39)$$

onde o termo D^{mj} 's são dados pela expressão

$$\begin{aligned} D^{mj} = & \int_{\Omega_e} [\nabla \eta_j^e \cdot \nabla \eta_m^e - k^2 \eta_j^e \eta_m^e] d\Omega + \\ & \sum_{l \neq j}^3 \int_{\Gamma_{ee_l}} \left[-\frac{1}{2} (\nabla \eta_j^e \cdot \vec{n}_e + \nabla \eta_l^{e_l} \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e \right] d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{ee_j}} \left[-\frac{1}{2} (\nabla \eta_j^e \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e \right] d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.40)$$

para $j = 1, 2, 3$. Os demais índices que aparecem na integral, são vinculados como mostrado na Tabela, 4.2 abaixo.

Tabela 4.2: Relação entre os índices j , l e i que aparecem na Equação 4.40.

| j | l | i |
|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 |
| 3 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 2 |

Lembrar que $\eta_j^e = L_j^e$ são as funções de coordenadas de área dos elementos. Para os demais D^{mj} 's, com $j = 4, 5, e 6$ tem-se

$$D^{mj} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ee_l}} [(\nabla \eta_j^{e_l} \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e] d\Gamma, \quad (4.41)$$

onde, para $j = 4, 5, 6$, tem-se os vínculos entre os índices como mostra a Tabela 4.3 abaixo. Logo tem-se a equação

Tabela 4.3: Relação entre os índices j , l e i

| j | l | i |
|-----|-----|-----|
| 4 | 2 | 3 |
| 5 | 3 | 2 |
| 6 | 1 | 2 |

$$B^{m1}\hat{\phi}_1^e + B^{m2}\hat{\phi}_2^e + B^{m3}\hat{\phi}_3^e + B^{m4}\hat{\phi}_3^{e2} + B^{m5}\hat{\phi}_2^{e3} + B^{m6}\hat{\phi}_2^{e1} = \text{Res}^m(\theta). \quad (4.42)$$

Como

$$B^{mj} = C^{*mj} + D^{mj}, \quad (4.43)$$

com $m = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, adotando o interpolante $\hat{\phi}_j^e$ como sendo a onda plana

$$\hat{\phi}_j^e = e^{i(k(\alpha_\theta x_j + \beta_\theta y_j))}, \quad (4.44)$$

com $j = 1, 2, 3$ e para as demais ondas planas nos nós do elemento de referência e são dadas como seguem

$$\hat{\phi}_2^{e1} = e^{i(k(\alpha_\theta x_6 + \beta_\theta y_6))}, \quad (4.45)$$

e

$$\hat{\phi}_3^{e2} = e^{i(k(\alpha_\theta x_4 + \beta_\theta y_4))}, \quad (4.46)$$

e

$$\hat{\phi}_2^{e3} = e^{i(k(\alpha_\theta x_5 + \beta_\theta y_5))}, \quad (4.47)$$

onde os coeficientes α_θ e β_θ são os vetores unitários, dados pelas expressões

$$\alpha_\theta = \cos(\theta), \text{ e } \beta_\theta = \sin(\theta). \quad (4.48)$$

Definindo agora os comprimentos h_{ij}^x e h_{ij}^y como descrito pelas expressões apresentada na Equação 4.49 abaixo

$$\begin{aligned} h_{ij}^x &= |x_i - x_j| \text{ e} \\ h_{ij}^y &= |y_i - y_j|. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Agora, dividindo a equação (4.42) por $\hat{\phi}_m^e$, com $m = 1, 2, 3$, de modo a obter as expressões apresentadas pelas Equações 4.52, 4.52 e 4.52, para, $m = 1$, $m = 2$ e $m = 3$, respectivamente.

Como segue, para $m = 1$, tem-se com esse procedimento, uma forma de normalização. Eliminando assim, erros de arredondamentos, de modo a manter os elementos da diagonal o maior possível. Conseqüentemente mantem-se sempre distante a possibilidade de que as matrizes obtidas sejam não singulares, garantindo assim uma maior eficiência na análise numérica.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} B^{11} \cdot 1 + B^{12} \cos(k(\alpha_\theta h_{21}^x + \beta_\theta h_{21}^y)) \\ + \\ B^{13} \cos(k(\alpha_\theta h_{31}^x + \beta_\theta h_{31}^y)) + B^{14} \cos(k(\alpha_\theta h_{41}^x + \beta_\theta h_{41}^y)) \\ + \\ B^{15} \cos(k(\alpha_\theta h_{51}^x + \beta_\theta h_{51}^y)) + B^{16} \cos(k(\alpha_\theta h_{61}^x + \beta_\theta h_{61}^y)) \end{array} \right] \\
+ & \\
& \tag{4.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i \left[\begin{array}{l} B^{11} \cdot 0 + B^{12} \sin(k(\alpha_\theta h_{21}^x + \beta_\theta h_{21}^y)) \\ + \\ B^{13} \sin(k(\alpha_\theta h_{31}^x + \beta_\theta h_{31}^y)) + B^{14} \sin(k(\alpha_\theta h_{41}^x + \beta_\theta h_{41}^y)) \\ + \\ B^{15} \sin(k(\alpha_\theta h_{51}^x + \beta_\theta h_{51}^y)) + B^{16} \sin(k(\alpha_\theta h_{61}^x + \beta_\theta h_{61}^y)) \end{array} \right] \\
& = \text{Res}^{1,*}(\theta).
\end{aligned}$$

Seguindo procedimentos análogos ao realizado para $m = 1$ para obtenção da Equação 4.52 acima, faz-se $m = 2$ para obter a Equação 4.52 abaixo

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} B^{21} \cos(k(\alpha_\theta h_{12}^x + \beta_\theta h_{12}^y)) + B^{22} \cdot 1 \\ + \\ B^{23} \cos(k(\alpha_\theta h_{32}^x + \beta_\theta h_{32}^y)) + B^{24} \cos(k(\alpha_\theta h_{42}^x + \beta_\theta h_{42}^y)) \\ + \\ B^{25} \cos(k(\alpha_\theta h_{52}^x + \beta_\theta h_{52}^y)) + B^{26} \cos(k(\alpha_\theta h_{62}^x + \beta_\theta h_{62}^y)) \end{array} \right] \\
+ & \\
& \tag{4.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i \left[\begin{array}{l} B^{21} \sin(k(\alpha_\theta h_{12}^x + \beta_\theta h_{12}^y)) + B^{22} \cdot 0 \\ + \\ B^{23} \sin(k(\alpha_\theta h_{32}^x + \beta_\theta h_{32}^y)) + B^{24} \sin(k(\alpha_\theta h_{42}^x + \beta_\theta h_{42}^y)) \\ + \\ B^{25} \sin(k(\alpha_\theta h_{52}^x + \beta_\theta h_{52}^y)) + B^{26} \sin(k(\alpha_\theta h_{62}^x + \beta_\theta h_{62}^y)) \end{array} \right] \\
& = \text{Res}^{2,*}(\theta),
\end{aligned}$$

e finalmente faz-se $m = 3$, para obter

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} B^{31} \cos(k(\alpha_\theta h_{13}^x + \beta_\theta h_{13}^y)) + B^{32} \cos(k(\alpha_\theta h_{23}^x + \beta_\theta h_{23}^y)) \\ + \\ B^{33} \cdot 1 + B^{34} \cos(k(\alpha_\theta h_{43}^x + \beta_\theta h_{43}^y)) \\ + \\ B^{35} \cos(k(\alpha_\theta h_{53}^x + \beta_\theta h_{53}^y)) + B^{36} \cos(k(\alpha_\theta h_{63}^x + \beta_\theta h_{63}^y)) \end{array} \right] \\
& + \\
& i \left[\begin{array}{l} B^{31} \sin(k(\alpha_\theta h_{13}^x + \beta_\theta h_{13}^y)) + B^{32} \sin(k(\alpha_\theta h_{23}^x + \beta_\theta h_{23}^y)) \\ + \\ B^{33} \cdot 0 + B^{34} \sin(k(\alpha_\theta h_{43}^x + \beta_\theta h_{43}^y)) \\ + \\ B^{35} \sin(k(\alpha_\theta h_{53}^x + \beta_\theta h_{53}^y)) + B^{36} \sin(k(\alpha_\theta h_{63}^x + \beta_\theta h_{63}^y)) \end{array} \right] \\
& = \text{Res}^{3,*}(\theta).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Sendo i a unidade imaginária dado por $i = \sqrt{-1}$, $\text{Res}^{1,*}(\theta)$, $\text{Res}^{2,*}(\theta)$ e $\text{Res}^{3,*}(\theta)$ são definidos por

$$\begin{aligned}
\text{Res}^{1,*}(\theta) &= \text{Res}^1(\theta) / \hat{\phi}_1^e, \\
\text{Res}^{2,*}(\theta) &= \text{Res}^2(\theta) / \hat{\phi}_2^e, \\
\text{Res}^{3,*}(\theta) &= \text{Res}^3(\theta) / \hat{\phi}_3^e.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Define-se os coeficientes $\text{Coe}f^{m,j,0}(\theta)$ da forma

$$\text{Coe}f^{m,j,0}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = m, \\ \cos(k(\alpha_\theta h_{jm}^x + \beta_\theta h_{jm}^y)) & \text{se } j \neq m, \end{cases} \tag{4.54}$$

para $j = 1, 2, 3$. Definindo os coeficientes $\text{Coe}f^{m,j,0}(\theta)$

$$\text{Coe}f^{m,j,0}(\theta) = \cos(k(\alpha_\theta h_{jm}^x + \beta_\theta h_{jm}^y)), \tag{4.55}$$

para os casos onde o índice $j = 4, 5, 6$.

Os coeficientes $\text{Coe}f^{m,j,1}(\theta)$ são definidos por

$$\text{Coe}f^{m,j,1}(\theta) = \sin(k(\alpha_\theta h_{jm}^x + \beta_\theta h_{jm}^y)), \tag{4.56}$$

com $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \forall j \neq m$ e

$$Coe f^{m,j,1}(\theta) = 0, \forall \theta, \forall m, \text{ e } \forall j = m \quad (4.57)$$

sendo $B^{mm} \neq 0$, pode-se dividir o resíduo $\text{Res}^{m,*}(\theta)$ por B^{mm} para obter a equação

$$\hat{R}es^m(\theta) = \frac{\text{Res}^{m,*}(\theta)}{B^{mm}}, \quad (4.58)$$

onde B^{mm} são os elementos da diagonal da matriz B^{mj} . Isto equivale a assumir $B^{mm} = 1$, normalizando cada equação pela diagonal. Este esquema de normalizar é similar ao proposto em LOULA e FERNANDES [13].

Definindo agora:

$$S_1^m = \begin{cases} B^{m1} & \text{se } m \neq 1, \\ B^{m2} & \text{se } m = 1, \end{cases} \quad (4.59)$$

$$S_2^m = \begin{cases} B^{m2} & \text{se } m = 3, \\ B^{m3} & \text{se } m = 2, \\ B^{m3} & \text{se } m = 1, \end{cases} \quad (4.60)$$

$$S_3^m = B^{m4}, \quad (4.61)$$

$$S_4^m = B^{m5}, \quad (4.62)$$

$$S_5^m = B^{m6}, \quad (4.63)$$

e os coeficientes para $j = 1, 2, 3$,

$$Coe f^{*,m,1,0}(\theta) = \begin{cases} Coe f^{m,1,0}(\theta) & \text{se } m \neq 1, \\ Coe f^{m,2,0}(\theta) & \text{se } m = 1, \end{cases} \quad (4.64)$$

$$Coe f^{*,m,2,0}(\theta) = \begin{cases} Coe f^{m,2,0}(\theta) & \text{se } m = 3, \\ Coe f^{m,3,0}(\theta) & \text{se } m = 2, \\ Coe f^{m,3,0}(\theta) & \text{se } m = 1, \end{cases} \quad (4.65)$$

e

$$Coe f^{*,m,j-1,0}(\theta) = Coe f^{m,j,0}(\theta), \quad (4.66)$$

considerando $j = 4, 5, 6$.

Tem-se também para $j = 1, 2, 3$,

$$Coe f^{*,m,1,1}(\theta) = \begin{cases} Coe f^{m,1,1}(\theta) & \text{se } m \neq 1, \\ Coe f^{m,2,1}(\theta) & \text{se } m = 1, \end{cases} \quad (4.67)$$

$$Coe f^{*,m,2,1}(\theta) = \begin{cases} Coe f^{m,3,1}(\theta) & \text{se } (m = 2 \text{ ou } m = 1), \\ Coe f^{m,2,0}(\theta) & \text{se } (m \neq 2 \text{ ou } m \neq 1), \end{cases} \quad (4.68)$$

e

$$Coe f^{*,m,j-1,1}(\theta) = Coe f^{m,j,1}(\theta), \quad (4.69)$$

para $j = 4, 5, 6$.

Assim, para o resíduo $\hat{Res}^m(\theta)$ tem-se

$$\hat{Res}^m(\theta) = \left[\left(\sum_{j=1}^5 Coe f^{*,m,j,0}(\theta) S_j^m \right) + 1 \right] + i \left[\sum_{j=1}^5 Coe f^{*,m,j,1}(\theta) S_j^m \right]. \quad (4.70)$$

Com o objetivo de minimizar os erros de arredondamento, aqui adota-se uma estratégia diferente daquela apresentada por LOULA e FERNANDES [13]. Define-se agora para $j = 1, 2, 3, 4, 5$ os S_j^{*m} como sendo

$$S_j^{*m} = \left[\int_0^{2\pi} \left[[Coe f^{*,m,j,0}(\theta)]^2 + [Coe f^{*,m,j,1}(\theta)]^2 \right] d\theta \right]^{1/2} * S_j^m, \quad (4.71)$$

e os $\hat{Coe} f^{m,j,l}(\theta)$ como sendo

$$\hat{Coe} f^{m,j,l}(\theta) = \frac{Coe f^{*,m,j,l}(\theta)}{\left[\int_0^{2\pi} \left[[Coe f^{*,m,j,0}(\theta)]^2 + [Coe f^{*,m,j,1}(\theta)]^2 \right] d\theta \right]^{1/2}}, \quad (4.72)$$

com os termos $F_{norm}^{m,j}$ dados por

$$F_{norm}^{m,j} = \left[\int_0^{2\pi} \left[[Coe f^{*,m,j,0}(\theta)]^2 + [Coe f^{*,m,j,1}(\theta)]^2 \right] d\theta \right]^{1/2}, \quad (4.73)$$

onde $l = 0, 1$. Assim pode-se escrever $\hat{Res}^m(\theta)$ como

$$\hat{Res}^m(\theta) = \left[\left(\sum_{j=1}^5 \hat{Coe} f^{m,j,0}(\theta) S_j^{*m} \right) + 1 \right] + i \left[\sum_{j=1}^5 \hat{Coe} f^{m,j,1}(\theta) S_j^{*m} \right]. \quad (4.74)$$

Definindo assim o funcional J^m e fazendo uma varredura completa no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e efetuando a integralção de 4.75 no mesmo intervalo θ , com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tem-se

$$J^m = \int_0^{2\pi} \left| \hat{Res}^m(\theta) \right|^2 d\theta, \quad (4.75)$$

como pode ser observado na Figura 4.7. O fato de fazermos uma varredura vem da formulação ser variacional, de modo a buscar um maior número de direções acertivas

possível. Diferentemente do encontrado em BABUŠKA *et al.* [3]

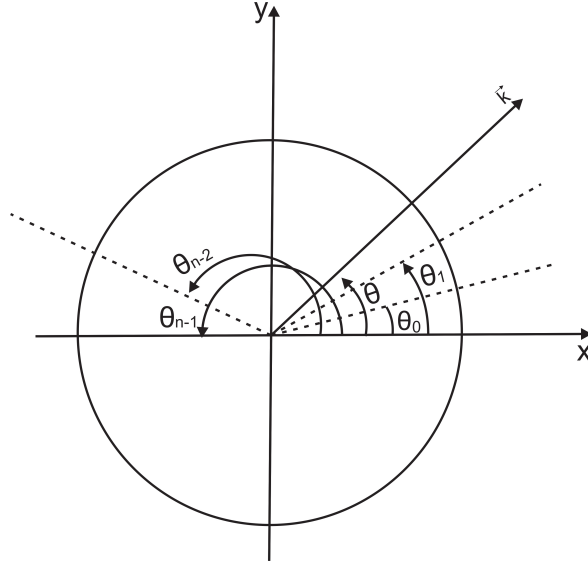


Figura 4.7: Direções θ_i qualquer de onda plana

Esta normalização, como mencionado anteriormente, tem o objetivo de minimizar erros de arredondamento, na solução do sistema algébrico original, para determinar as constantes S^{*m} . Ela é diferente da adotada por LOULA e FERNANDES [13]. Os coeficientes S_1^{*m} , S_2^{*m} , S_3^{*m} , S_4^{*m} , S_5^{*m} são requeridos para minimizar o funcional J^m . Assim, a minimização do funcional, exige que sua derivada seja igual a zero, para encontrar os pontos extremos.

Ou seja, deve-se ter

$$\frac{\partial J}{\partial S_l^{*m}} = 0, \text{ onde } l = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ e } m = 1, 2, 3. \quad (4.76)$$

Definindo agora os termos M_{lj}^m dados pela expressão

$$M_{lj}^m = \int_0^{2\pi} \left[\hat{C}oe f^{m,l,0}(\theta) * \hat{C}oe f^{m,j,0}(\theta) + \hat{C}oe f^{m,l,1}(\theta) * \hat{C}oe f^{m,j,1}(\theta) \right] d\theta \quad (4.77)$$

e os termos F_l

$$F_l^m = - \int_0^{2\pi} \hat{C}oe f^{m,l,0}(\theta) d\theta, \quad (4.78)$$

onde $l = 1, 2, 3, 4, 5$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Finalmente, obtém-se o sistema de equações dado por

$$\sum_{j=1}^5 M_{lj}^m S_j^{*m} = F_l^m, \quad (4.79)$$

com $l = 1, 2, 3, 4, 5$.

Das equações (4.71) e (4.73), obtem-se

$$S_j^m = \frac{S_j^{*m}}{F_{norm}^{m,j}}, \quad \text{com } j = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (4.80)$$

onde

$$F_{norm}^{m,j} = \left[\int_0^{2\pi} (Coe f^{*,m,j,0}(\theta))^2 + (Coe f^{*,m,j,1}(\theta))^2 \right]^{1/2}, \quad (4.81)$$

com $m = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5$. A partir dos S_j^m determinados, obtém-se B^{mj} como mostram as expressões para os termos B^{mj} 's, como segue

$$B^{m1} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1, \\ S_1^m & \text{se } m \neq 1, \end{cases} \quad (4.82)$$

$$B^{m2} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 2, \\ S_1^m, & \text{se } m = 1, \\ S_2^m & \text{se } m = 3, \end{cases} \quad (4.83)$$

$$B^{m3} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 3, \\ S_2^m & \text{se } (m = 1 \text{ ou } m = 2,) \end{cases} \quad (4.84)$$

$$B^{m4} = S_3^m, \quad (4.85)$$

$$B^{m5} = S_4^m, \quad (4.86)$$

e

$$B^{m6} = S_5^m. \quad (4.87)$$

Com os B^{mj} 's obtidos, podem-se então escrever a equação

$$C^{*mj} = B^{mj} - D^{mj} \quad (4.88)$$

para os índices $m = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Usando as equações (4.30) - (4.34) e (4.36) - (4.38) tem-se

$$C^{m1} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (4.89)$$

$$C^{m9} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (4.90)$$

$$C^{m11} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (4.91)$$

$$C^{m2} = C^{m7} = C^{m12} = \frac{C^{*m2}}{3}, \quad (4.92)$$

$$C^{m3} = C^{m8} = C^{m10} = \frac{C^{*m3}}{3}, \quad (4.93)$$

$$C^{m4} = C^{*m4}, \quad (4.94)$$

$$C^{m5} = C^{*m5}, \quad (4.95)$$

e

$$C^{m6} = C^{*m6}. \quad (4.96)$$

Finalmente, define-se agora a matriz χ_{ln}^m da forma

$$\begin{aligned} \chi_{ln}^m &= \int_{\Omega_e} [\nabla \Psi_n^e \cdot \nabla \eta_l^e - k^2 \Psi_n^e \eta_l^e] d\Omega \\ &+ \sum_{r=1}^3 \int_{\Gamma_{ee_r}} \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^e (\nabla \eta_l^e \cdot \vec{n}_e) + \frac{\beta^{eer}}{h_{eer}} \Psi_n^e \eta_l^e \right] d\Gamma = M_{ln}^\alpha, \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde $l = 1, 2, 3$ e $m = 1, 2, 3$. E os valores de $n = 1, 2, \dots, 12$, tem-se então as seguintes relações entre os índices da integral

$$\chi_{kn}^m = \int_{\Gamma_{ee_j}} \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^e (\nabla \eta_i^e \cdot \vec{n}_e) - \frac{\beta^{eej}}{h_{eej}} \Psi_n^e \eta_i^e \right] d\Gamma = M_{ln}^\alpha, \quad (4.98)$$

para $k = 4, 5, \dots, 12$, tem-se as relações. A título de implementação, a Tabela 4.4 facilita o entendimento da relação entre os índices k, l e i , respectivamente

Tabela 4.4: Relação entre os índices k, l, j e i para a matriz χ_{ln}^m

| k | l | j | i |
|-----|-----|-----|-----|
| 4 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 3 | 3 | 2 |
| 6 | 1 | 1 | 2 |
| 7 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 3 |
| 9 | 2 | 2 | 1 |
| 10 | 2 | 2 | 2 |
| 11 | 3 | 3 | 1 |
| 12 | 3 | 3 | 3 |

Assim, os α_n^m são obtidos como a solução do sistema linear dado pela expressão

$$\sum_{n=1}^{12} \chi_{ln}^m \alpha_n^m = C_n^m, \quad (4.99)$$

e os pesos W^m são obtidos a partir da expressão

$$W^m(x, y) = \sum_{n=1}^{12} \alpha_n^m \Psi_n^m, \quad (4.100)$$

que deve ser avaliada nos NPI_{Vol} pontos de integrações de Gauss. Em Ω_e e em $NPI_{Contorno-\Omega_e}$ pontos de integrações nas faces.

Estes W^m são os que devem ser fornecidos, para cada Ω_e .

$$(W_1^m, W_2^m, \dots, W_{NPI_{Vol}}^m),$$

e

$$(W_1^{m,S}, W_2^{m,S}, \dots, W_{NPI_{Cont-\Omega_e}}^{m,S}),$$

onde W_l^m é o valor de W^m no ponto $(L_{1,l}, L_{2,l}, L_{3,l})$ de integração de Gauss e $W_l^{m,S}$ é o valor de W^m na face S e no ponto Valor de W^m no ponto $(L_{1,l}^S, L_{3,l}^S, L_{3,l}^S)$ de integração de Gauss. Os coeficientes $L_{1,l}, L_{2,l}, L_{3,l}$ são os valores de L_i em cada ponto de integração de Gauss.

Também é preciso avaliar a seguinte expressão, em cada ponto de integração de Gauss

$$\frac{\partial W}{\partial L_i}, i = 1, 2, 3.$$

Para implementação do problema, foi utilizado o fluxograma da Figura 4.8 abaixo.

Deve-se fornecer também $(D_l W_1, D_l W_2, \dots, D_l W_{NPI_{Vol}})$.

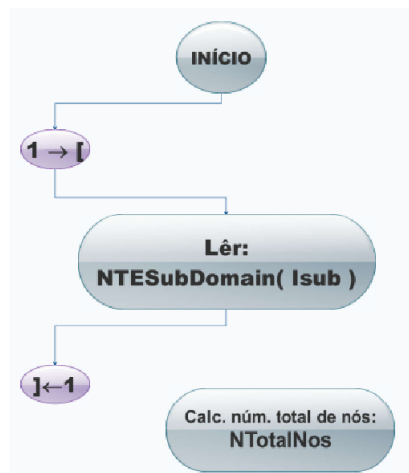
$D_l W_m \rightarrow$ valor de $\frac{\partial W_m}{\partial L_i}$ no ponto $(L_{1,m}, L_{2,m}, L_{3,m})$ de integração de Gauss.

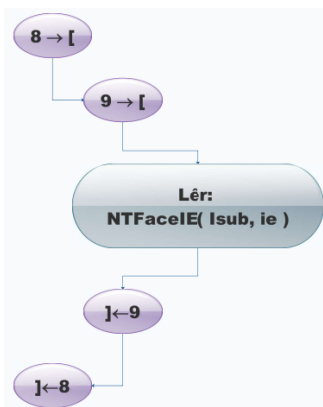
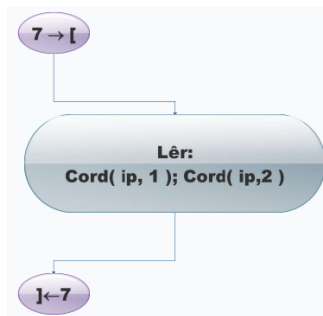
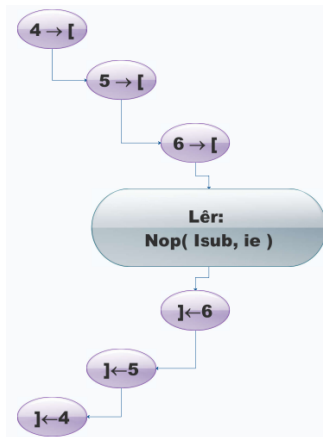
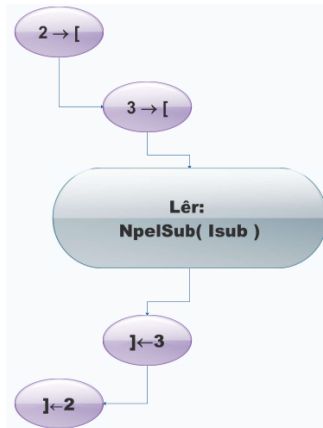
Logo são vetores:

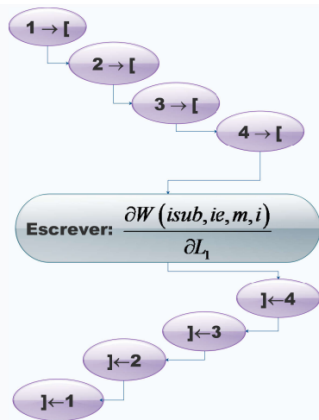
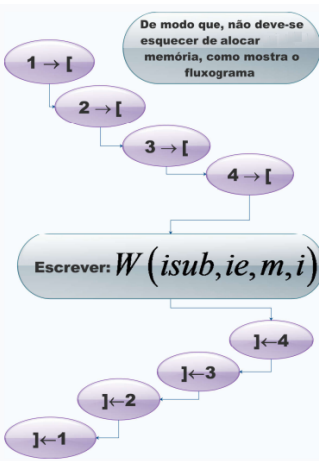
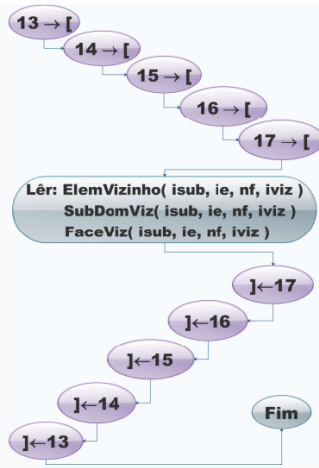
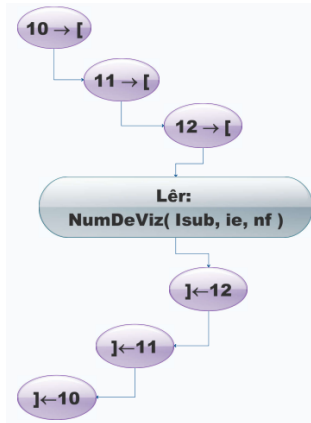
$W_{func}^{Vol}(e, m, i)$ onde i são pontos de integração de Gauss.

$D * W_{func}^{Vol}(e, m, i)$ onde i são pontos de integração de Gauss.

$W_{func}^{Contorno}(e, f, i)$ onde i são pontos de integração de Gauss na face f .







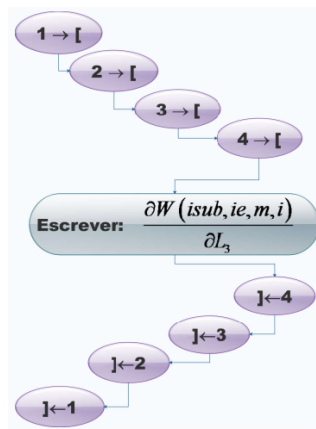
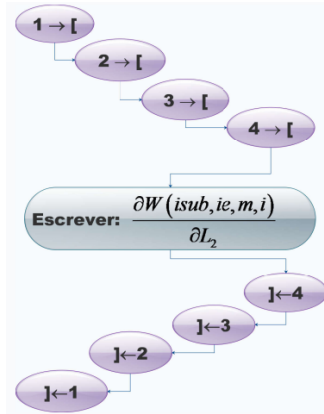


Figura 4.8: Fluxograma do algoritmo que permite a implementação computacional, para obtenção dos parâmetros que minimiza erro de fase.

Capítulo 5

Obtenção dos parâmetros que minimizam o erro de fase para formulação PGD para problemas de Helmholtz com elementos triangulares com arestas no contorno

5.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentadas as formas de obter as matrizes $M_{k,n}^\alpha$ que compõem o sistema para obtenção dos parâmetros que minimizam erro de fase via formulação PGD para o caso onde os elementos do domínio tem alguma das faces no contorno do problema. A forma de obtenção desta matriz e principalmente a forma da obtenção dos parâmetros α_n^m que é a grande novidade desse trabalho. Tal metodologia de obtenção de $M_{k,n}^\alpha$ é realizada via formulação Petrov-Galerkin descontínuo semelhante a metodologia apresentada no capítulo 4. Essa metodologia é diferente das obtidas em BABUŠKA *et al.* [3] e FERNANDES [36] obtidas via formulação de diferenças finitas e em DO CARMO *et al.* [12] que foi obtida via formulação Galerkin resíduo projetado (GPR).

O objetivo desta metodologia aqui desenvolvida é a obtenção dos parâmetros livres α_n^m que aparecem na formulação PGD, quando os elemento do domínio tem arestas coincidindo com as arestas do contorno, do domínio de interesse.

5.1.1 Elementos com uma e com duas arestas no contorno do domínio

Seguindo metodologia análoga a apresentada no Capítulo 4, baseada na formulação ALVAREZ *et al.* [63], para obtenção das matrizes $M_{k,n}^{\alpha,\Omega}$ e os parâmetros livres α_n^m para elementos triangulares, inteiramente pertencente ao domínio Ω do problema, procede-se de maneira análoga para a obtenção das matrizes e os respectivos parâmetros livres, para o caso de elementos com uma face e duas faces no contorno, respectivamente.

Dessa forma, utiliza-se a partir daqui a simbologia $M_{k,n}^{\alpha,\Gamma_1}$, para a matriz obtida com o elemento e tendo uma aresta no contorno do domínio Ω . Tal matriz possui dimensões $M_{9 \times 9}^{\alpha,\Gamma_1}$ e $\alpha_{9 \times 3}$.

De maneira análoga para o caso de elementos com duas faces no contorno do domínio Ω , utiliza-se a partir daqui a simbologia, $M_{k,n}^{\alpha,\Gamma_2}$, de modo a ter-se as dimensões $M_{6 \times 6}^{\alpha,\Gamma_2}$ e $\alpha_{6 \times 3}$.

A obtenção dessas matrizes $M_{9 \times 9}^{\alpha,\Gamma_1}$ e $M_{6 \times 6}^{\alpha,\Gamma_2}$ e seus respectivos parâmetros livres α_n^m de dimensões $\alpha_{6 \times 3}$, estão descritos como seguem nas seções abaixo.

Primeiramente, na Subseção 5.1.2 estão descritos os procedimentos para o caso do elemento com uma face no contorno, e na Subseção 5.1.3 estão descritos os procedimentos para o caso do elemento com uma face no contorno, como seguem.

5.1.2 Uma aresta no contorno

No caso onde se tem um elemento com uma única aresta pertencente ao contorno do domínio Ω , as matrizes $M_{9 \times 9}^{\alpha,\Gamma_1}$, e seus respectivos parâmetros, α_n^m , são obtidos seguindo a numeração local, como descrito pela numeração apresentada na Figura 5.3 abaixo.

Para valores de $m = 1, 2, 3$ e funções coordenadas de área η_m^e , sendo as mesmas coordenadas de áreas do triângulo dadas por

$$\eta_m^e = L_m^e, \quad (5.1)$$

e para as funções de ponderação W^m escolhida como mostrado pela Equação 5.2 abaixo

$$W^m = \sum_{n=1}^{N_{func\Gamma_1}} \alpha_n^m \Psi_n^{e,\Gamma_1}, \quad (5.2)$$

tem-se então as funções peso dadas pela expressão

$$(\eta_m^e + W^m), \quad (5.3)$$

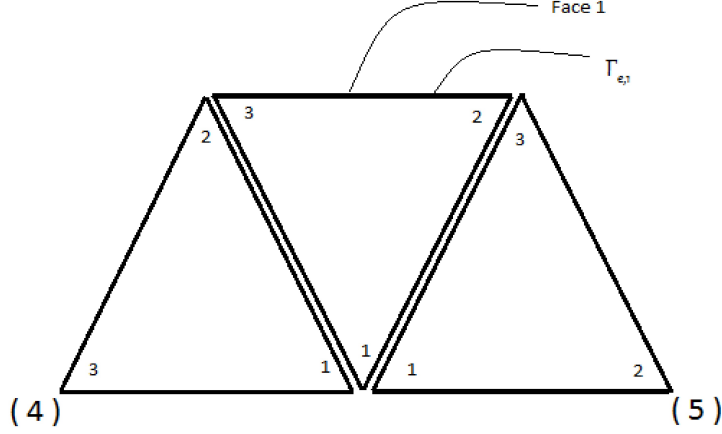


Figura 5.1: Elemento com uma face no contorno do domínio e sua respectiva numeração local, a nível de elemento.

e o número de funções no caso de elementos com uma face no contorno do domínio Ω dados por $N_{func\Gamma_1} = 9$.

A formulação para obtenção dos parâmetros α_n^m é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} [\nabla\phi^e \cdot \nabla W^m - k^2\phi^e W^m] d\Omega + \\
& \int_{\Omega_e} [\nabla\phi^e \cdot \nabla\eta_m^e - k^2\phi^e\eta_m^e] d\Omega + \\
& \int_{\Gamma_{e,1}} -(\nabla\phi^e \cdot \vec{n}_e)(W^m + \eta_m^e) d\Gamma + \\
& \sum_{e' \neq e} \left[\int_{\Gamma_{ee'}} \left[\begin{array}{l} \frac{\beta^{ee'}}{h_{ee'}} (\phi^e - \phi^{e'}) \eta_m^e - \\ \frac{1}{2} (\nabla\phi^e \cdot \vec{n}_e + \nabla\phi^{e'} \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e + \\ (\phi^e - \phi^{e'}) \nabla\eta_m^e \cdot \vec{n}_e \end{array} \right] d\Gamma + \right. \\
& \left. \int_{\Gamma_{ee'}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} (\nabla\phi^e \cdot \vec{n}_e + \nabla\phi^{e'} \cdot \vec{n}_e) W^m + \\ \frac{\beta^{ee'}}{h_{ee'}} (\phi^e - \phi^{e'}) W^m \end{array} \right] d\Gamma \right], \quad (5.4)
\end{aligned}$$

onde e' representa o número de elementos, vizinhos ao elemento e , dados como seguem

$$e' \in \{e_2, e_3\}. \quad (5.5)$$

A expressão (5.4) pode ser escrita de uma forma mais compacta como mostra a equação a seguir, com os valores de $m = 1, 2, 3$, de modo que obtem-se

$$\begin{aligned}
& C^{m1} \hat{\phi}_1^e + C^{m2} \hat{\phi}_2^e + C^{m3} \hat{\phi}_3^e + C^{m4} \hat{\phi}_3^{e_2} + C^{m5} \hat{\phi}_2^{e_3} + \\
& \left[C^{m6} \hat{\phi}_1^{e_2} + C^{m7} \hat{\phi}_2^{e_2} + C^{m8} \hat{\phi}_1^{e_3} + C^{m9} \hat{\phi}_3^{e_3} \right] = b^m + \text{Res}^m(\theta), \quad (5.6)
\end{aligned}$$

para obtenção dos parâmetros α_n^m devemos ter a relação dada como segue

$$C^{mk} = \sum_{n=1}^{N_{Func\Gamma_1}} M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1} \alpha_n^m. \quad (5.7)$$

A matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1}$ para elementos com uma face no contorno do domínio, possui valores nulos e valores não nulos, tais como as matrizes que aparecem nas formulações de elementos finitos Petrov-Galerkin, contínuo ou descontínuo. Tal como a matriz $M_{kn}^{\alpha, \Omega}$, discutida no Capítulo 4, para elementos do domínio, a matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1}$ também é não singular, como comprovados experimentalmente nos exemplos que foram discutidos neste trabalho, no Capítulo 6. A forma genérica da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1}$, para o caso de um elemento qualquer que possui uma única aresta no contorno pode ser vista na Figura 5.2 abaixo

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 1 | * | * | * | * | * | * | * | * | * |
| | 2 | * | * | * | * | * | * | * | * | * |
| | 3 | * | * | * | * | * | * | * | * | * |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | * | 0 | * | * | 0 | 0 |
| $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1} =$ | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | * | 0 | 0 | * | * |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | * | 0 | * | * | 0 | 0 |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | * | 0 | * | * | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | * | 0 | 0 | * | * |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | * | 0 | 0 | * | * |

Figura 5.2: Forma geral da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1}$, para elementos com uma única aresta no contorno, como pode ser visto na Figura 5.3.

Os valores que compõem a matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1}$, são obtidos a partir da expressão

$$\begin{aligned}
M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1} = & \int_{\Omega_e} [\nabla \Psi_n^{e, \Gamma_1} \cdot \nabla \eta_k^e - k^2 \Psi_n^{e, \Gamma_1} \eta_k^e] d\Omega + \\
& \int_{\Gamma_{e,1}} [- (\nabla \eta_k^e \cdot \vec{n}_e) \Psi_n^{e, \Gamma_1}] d\Gamma + \\
& \sum_{l=2}^3 \int_{\Gamma_{ee_l}} \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^{e, \Gamma_1} (\nabla \eta_k^e \cdot \vec{n}_e) + \frac{\beta^{ee_l}}{h_{ee_l}} \Psi_n^{e, \Gamma_1} \eta_k^e \right] d\Gamma,
\end{aligned} \quad (5.8)$$

com os valores de $k = 1, 2, 3$, para as 3 primeiras linhas da matriz. E para as demais linhas do sistema, a equação que permite calcular os valores que compõem a matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1}$ são dadas pela expressão

$$M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1} = \int_{\Gamma_{ee_j}} \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^{e, \Gamma_1} (\nabla \eta_i^{e_l} \cdot \vec{n}_e) + \frac{\beta^{ee_j}}{h_{ee_j}} \Psi_n^{e, \Gamma_1} \eta_i^{e_l} \right] d\Gamma, \quad (5.9)$$

para $k = 4, 5, 6, 7, 8, 9$, tem-se as seguintes combinações para os índices l, j, i , apresentados na Tabela 5.1, como pode-se conferir abaixo.

Tabela 5.1: Relação entre os índices k, l, j e i para a matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_1}$

| k | l | j | i |
|-----|-----|-----|-----|
| 4 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 3 | 3 | 2 |
| 6 | 2 | 2 | 1 |
| 7 | 2 | 2 | 2 |
| 8 | 3 | 3 | 1 |
| 9 | 3 | 3 | 3 |

Vale lembrar que as funções coordenadas de áreas η_m^e para cada elemento triangular são dadas como segue, $\eta_m^e = L_m^e$, com $m = 1, 2, 3$, são as coordenadas de área do elemento e . E $\eta_m^{e_l} = L_m^{e_l}$, com $m = 1, 2, 3$, são as coordenadas de área do elemento vizinho e_l .

As funções especiais Ψ_i^{e, Γ_1} , utilizadas neste trabalho, são dadas pelas expressões, como seguem abaixo descritas

$$\Psi_i^{e, \Gamma_1} = \Psi_i, \quad (5.10)$$

com Ψ_i dada pela equação (4.10), para $i = 1, 2, 3$. Para as demais funções Ψ_i^{e, Γ_1} , tem-se

$$\Psi_4^{e, \Gamma_1} = \Psi_4 = h_e \left(\frac{\int_{\Gamma_{ee_2}} (\nabla \eta_3^{e_2} \cdot \vec{n}_e) d\Gamma}{\int_{\Gamma_{ee_2}} d\Gamma} \right) L_1 L_3 W_2, \quad (5.11)$$

e

$$\Psi_5^{e, \Gamma_1} = \Psi_5 = h_e \left(\frac{\int_{\Gamma_{ee_3}} (\nabla \eta_2^{e_3} \cdot \vec{n}_e) d\Gamma}{\int_{\Gamma_{ee_3}} d\Gamma} \right) L_1 L_2 W_3, \quad (5.12)$$

com Ψ_4 dada pela expressão (4.11) e Ψ_5 dada pela expressão (4.12). Para as demais, tem-se as relações

$$\Psi_6^{e, \Gamma_1} = \Psi_9 = \eta_1^e W_2, \quad (5.13)$$

onde Ψ_6^{e,Γ_1} dado pela equação (4.13)

$$\Psi_7^{e,\Gamma_1} = \Psi_{10} = \eta_3^e W_2, \quad (5.14)$$

onde Ψ_7^{e,Γ_1} é dado pela equação (4.14)

$$\Psi_8^{e,\Gamma_1} = \Psi_{11} = \eta_1^e W_3, \quad (5.15)$$

onde Ψ_8^{e,Γ_1} dado pela equação (4.15)

$$\Psi_9^{e,\Gamma_1} = \Psi_{12} = \eta_2^e W_3, \quad (5.16)$$

para Ψ_9^{e,Γ_1} dado pela equação (4.16) e as funções W_r 's com ($r = 0, 2, 3$) que compõem a equação (5.3) com

$$\begin{aligned} W_0 &= L_1 * L_2 * L_3, \\ W_2 &= L_1 * L_3, \\ W_3 &= L_1 * L_2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Seja ϕ uma onda plana com ângulo variando de $0 \leq \theta \leq 2\pi$, dada pela equação

$$\phi = e^{i(k(\alpha_\theta x + \beta_\theta y))}, \quad (5.18)$$

onde α_θ e β_θ , como definido anteriormente, $\alpha_\theta = \cos(\theta)$ e $\beta_\theta = \sin(\theta)$.

Usando as equações (4.30) - (4.34) e definindo

$$C^{m1} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (5.19)$$

e

$$C^{m6} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (5.20)$$

e

$$C^{m8} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (5.21)$$

e

$$C^{m2} = C^{m9} = \frac{C^{*m2}}{2}, \quad (5.22)$$

e

$$C^{m3} = C^{m7} = \frac{C^{*m3}}{2}. \quad (5.23)$$

Com as relações dada pelas Equações refE:FifthEA - 5.23 acima, podemos reescrever a equação (5.6) como segue

$$C^{*m1} \hat{\phi}_1^e + C^{*m2} \hat{\phi}_2^e + C^{*m3} \hat{\phi}_3^e + C^{*m4} \hat{\phi}_3^{e2} + C^{*m5} \hat{\phi}_2^{e3} = b^m + \text{Res}^m(\theta), \quad (5.24)$$

onde

$$C^{*m4} = C^{m4}, \quad (5.25)$$

e

$$C^{*m5} = C^{m5}. \quad (5.26)$$

Os termos independentes b^m são obtidos a partir da expressão

$$b^m = - \left(D^{m1} \hat{\phi}_1^e + D^{m2} \hat{\phi}_2^e + D^{m3} \hat{\phi}_3^e + D^{m4} \hat{\phi}_3^{e2} + D^{m5} \hat{\phi}_2^{e3} \right), \quad (5.27)$$

e os termos D^{mj} 's são obtidos a partir da expressão

$$\begin{aligned} D^{mj} &= \int_{\Omega} [\nabla \eta_j^e \cdot \nabla \eta_m^e - k^2 \eta_j^e \eta_m^e] d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_{e,1}} -(\nabla \eta_j^e \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e d\Gamma \\ &+ \left(\sum_{\substack{l=2 \\ l \neq j}}^3 \int_{\Gamma_{ee_l}} \left[-\frac{1}{2} (\nabla \eta_j^e \cdot \vec{n}_e + \nabla \eta_j^{e_l} \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e \right] d\Gamma \right) \\ &+ I_{e_j}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde $I_{e_{ij}}$ são obtidos através da expressão

$$I_{e_{ij}} = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 1 \\ \int_{\Gamma_{ee_j}} \left[-\frac{1}{2} (\nabla \eta_j^e \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e \right] d\Gamma & \text{se } j \neq 1 \end{cases} \quad (5.29)$$

com

$$j = 1, 2, 3. \quad (5.30)$$

A combinação para os índices j, l, i são dados como segue; para

$$j = 1 \rightarrow l = 2 \rightarrow i = 1, \quad (5.31)$$

e as combinações com os índices j, l, i são dados como segue

$$j = 1 \rightarrow l = 2 \rightarrow i = 1, \quad (5.32)$$

e

$$j = 1 \rightarrow l = 3 \rightarrow i = 1, \quad (5.33)$$

e

$$j = 2 \rightarrow l = 3 \rightarrow i = 3, \quad (5.34)$$

e

$$j = 3 \rightarrow l = 2 \rightarrow i = 2, \quad (5.35)$$

e para os demais j , os coeficientes D^{mj} 's, são obtidos a partir da equação

$$D^{mj} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ee_l}} (\nabla \eta_i^{e_l} \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e d\Gamma, \quad (5.36)$$

com

$$j = 4, 5, \quad (5.37)$$

de modo que para

$$j = 4 \rightarrow l = 2 \rightarrow i = 3, \quad (5.38)$$

e para

$$j = 5 \rightarrow l = 3 \rightarrow i = 2. \quad (5.39)$$

Logo, pode-se escrever a equação

$$B^{m1} \hat{\phi}_1^e + B^{m2} \hat{\phi}_2^e + B^{m3} \hat{\phi}_3^e + B^{m4} \hat{\phi}_3^{e2} + B^{m5} \hat{\phi}_2^{e3} = \text{Res}^m(\theta), \quad (5.40)$$

onde

$$B^{mj} = C^{*mj} + D^{mj}, \quad (5.41)$$

com

$$j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (5.42)$$

Agora, usa-se as Equações (4.44), (4.45), (4.46), (4.47), (4.48), (4.49). Dividindo a Equação (5.40) por $\hat{\phi}_m^e$, com $(m = 1, 2, 3)$, de forma a obter

$$i \left[\begin{array}{l} \text{Coe}f^{m,1,0}(\theta) B^{m1} + \text{Coe}f^{m,2,0}(\theta) B^{m2} + \text{Coe}f^{m,3,0}(\theta) B^{m3} + \\ \text{Coe}f^{m,4,0}(\theta) B^{m4} + \text{Coe}f^{m,5,0}(\theta) B^{m5} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} 5 \\ j= \\ j \neq m \end{array} \sum \text{Coe}f^{*,m,j,1}(\theta) B^{mj} \right] = \hat{\text{Res}}^{m,*}(\theta) \quad (5.43)$$

e

$$\text{Res}^{m,*}(\theta) = \text{Res}^m(\theta) / \phi_m^e. \quad (5.44)$$

Com os coeficientes $\text{Coe}f^{m,j,0}(\theta)$ e $\text{Coe}f^{m,j,1}(\theta)$ dados pelas Equações (4.54) - (4.55). De modo que S_j^m , para $j = 1, 2, 3, 4, 5$ definidos pelas Equações (4.59) - (4.63). E os coeficientes $\text{Coe}f^{m,j,0}(\theta)$ para $j = 1, 2, 3, 4$ dado pelas Equações (4.64) - (4.66) e $C^{*,m,j,0}(\theta)$ dado pelas Equações (4.67) - (4.70), para obtermos

$$\hat{\text{Res}}^m(\theta) = \left[\left(\sum_{j=1}^4 \hat{\text{Coe}}f^{*,m,j,0}(\theta) S_j^{*,m} \right) + 1 \right] + i \left[\sum_{j=1}^4 \hat{\text{Coe}}f^{*,m,j,1}(\theta) S_j^{*,m} \right], \quad (5.45)$$

e

$$\hat{\text{Res}}^m(\theta) = \frac{\hat{\text{Res}}^{m,*}(\theta)}{B^m m}. \quad (5.46)$$

Novamente, com o objetivo de minimizar erros de arredondamentos, aqui, adota-se uma estratégia diferente da apresentada por LOULA e FERNANDES [13], que é dada como segue. Usa-se, $S_j^{*,m}$, $j = 1, 2, 3, 4$ e $\hat{\text{Coe}}f^{m,j,l}(\theta)$, para $l = 0, 1$ definido pelas Equações (4.71) - (4.72), para obter

$$\hat{\text{Res}}^m(\theta) = \left[\left(\sum_{j=1}^4 \hat{\text{Coe}}f^{m,j,0}(\theta) S^{*,m} \right) + 1 \right] + i \left[\sum_{j=1}^4 \hat{\text{Coe}}f^{m,j,1}(\theta) S^{*,m} \right]. \quad (5.47)$$

Definindo o funcional

$$J^m = \int_0^{2\pi} \left| \hat{\text{Res}}^m(\theta) \right|^2 d\theta, \quad (5.48)$$

os $S_1^{*,m}, \dots, S_4^{*,m}$, são requeridos para minimizar o funcional J^m , de modo ter-se

$$\frac{\partial J^m}{\partial S_l^{*,m}} = 0, \text{ para } l = 1, 2, 3, 4. \quad (5.49)$$

Definindo agora os M_{lj}^m como segue

$$M_{lj}^m = \int_0^{2\pi} \left[\hat{\text{Coe}}f^{m,l,0}(\theta) * \hat{\text{Coe}}f^{m,j,0}(\theta) + \hat{\text{Coe}}f^{m,l,1}(\theta) * \hat{\text{Coe}}f^{m,j,1}(\theta) \right] d\theta, \quad (5.50)$$

e

$$F_l^m = \int_0^{2\pi} \hat{\text{Coe}}f^{m,l,0}(\theta) d\theta, \quad (5.51)$$

com

$$l = 1, 2, 3, 4, \quad m = 1, 2, 3 \text{ e } j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.52)$$

Finalmente obtemos o sistema que permite calcular os $S_j^{*,m}$

$$\sum_{j=1}^4 M_{lj}^m S_j^{*,m} = F_l, \quad (5.53)$$

com

$$m = 1, 2, 3 \text{ e } l = 1, 2, 3, 4. \quad (5.54)$$

Das Equações (4.71) - (4.73), obtemos os S_j^m como descrito pela Equação 5.55 abaixo

$$S_j^m = \frac{S^{*,m}}{F_{norm}^{m,j}}. \quad (5.55)$$

Com os S_j^m determinados, obtemos B^{mj} através das Equações (4.82) - (4.86).

Assim pode-se escrever a Equação 5.56 para os C^{*mj} , como segue

$$C^{*mj} = B^{mj} - D^{mj}, \quad (5.56)$$

onde

$$m = 1, 2, 3, \text{ e } j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (5.57)$$

Usando as Equações (5.4) - (5.8), para se obter os C^{m1} em função dos C^{*m1} , como seguem

$$C^{m1} = \frac{C^{*m1}}{3}, \quad (5.58)$$

e

$$C^{m6} = C^{m1}, \quad (5.59)$$

e

$$C^{m8} = C^{m1}, \quad (5.60)$$

e

$$C^{m2} = \frac{C^{*,m2}}{2}, \quad (5.61)$$

e

$$C^{m9} = C^{m2}, \quad (5.62)$$

e

$$C^{m3} = \frac{C^{*m3}}{2}, \quad (5.63)$$

e

$$C^{m7} = C^{m2}, \quad (5.64)$$

e

$$C^{m4} = C^{*,m4}, \quad (5.65)$$

e finalmente

$$C^{m5} = C^{*,m5}. \quad (5.66)$$

Por fim, obte-se os α_n^m , com $(n = 1, 2, \dots, 9)$ e $(m = 1, 2, 3)$ fixado, de modo que a solução do sistema é obtido através da expressão

$$\sum_{n=1}^4 M_{ln}^m \alpha_n^m = C^{ml}, \quad (5.67)$$

com

$$l = 1, 2, \dots, 9, \text{ e } m = 1, 2, 3.$$

c

A função peso W^m é então, obtida pela Equação 5.69 abaixo

$$W^m(x, y) = \sum_{n=1}^9 \alpha_n^m \Psi_n^{e, \Gamma_1}. \quad (5.69)$$

Dessa forma, são obtidas as funções peso para o caso onde tem-se um elemento com uma única aresta no contorno do domínio físico do problema; que também deve ser avaliada nos pontos de integração de Gauss em Ω_e e nos contornos de Ω_e . Tal como, está definido no final do capítulo 4 que são os mesmos a serem usados aqui.

5.1.3 Elementos com duas arestas no contorno do domínio

Seguindo procedimentos análogos aos desenvolvidos na Seção 5.1.2 do Capítulo 5, para obtenção das matrizes $M_{k \times n}^{\alpha, \Gamma_1}$, desenvolve-se nessa Seção 5.1.3 a formulação para obter-se as matrizes $M_{k \times n}^{\alpha, \Gamma_2}$, de dimensões $M_{6 \times 6}^{\alpha, \Gamma_2}$ e seus respectivos parâmetros livres α_n^m de dimensões $\alpha_{6 \times 3}^m$, descritos como seguem. As arestas no contorno, serão enumeradas localmente, de modo a se ter as arestas 1 e 3 sempre, no contorno do domínio físico Ω de interesse, como mostrado na Figura 5.3 abaixo.

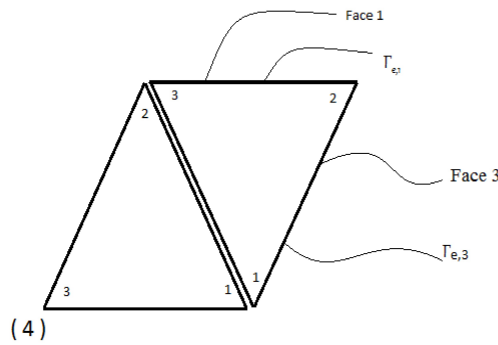


Figura 5.3: Elemento com duas arestas no contorno do domínio Ω , e sua respectiva enumeração local.

Os desenvolvimentos abaixo, mostram a obtenção das matrizes que compõem o sistema de equações para obtenção dos parâmetros de estabilização, que minimiza o erro de fase para elementos com duas faces no contorno do domínio Ω , de modo semelhante aos desenvolvidos no Capítulo 4 deste trabalho, para elementos inteiramente pertencente ao domínio, e para os obtidos no início do Capítulo 5, Seção 5.1.2, para elementos com uma face na fronteira do domínio Ω de interesse.

Começa-se com a definição dos índices m como segue

$$m = 1, 2, 3, \quad (5.70)$$

e com as funções coordenadas de áreas dados por

$$\eta_m^e = L_m^e. \quad (5.71)$$

Pode-se escrever a função peso como segue

$$W^m = \sum_{n=1}^{N_{func\Gamma_2}} \alpha_n^m \Psi_n^{e,\Gamma_2}, \quad (5.72)$$

com a função de ponderação dadas por

$$(\eta_m^e + W^m), \quad (5.73)$$

e a função peso, para o elemento triangular com duas arestas no contorno, será obtida com $N_{func\Gamma_2} = 6$. A formulação é obtida de forma semelhante aos casos obtido anteriormente, para elementos inteiramente pertencente ao domínio e elementos do domínio que compartilha uma face com o domínio Ω de interesse, a partir da Equação (5.74) como mostrada abaixo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} [\nabla \phi^e \cdot \nabla W^m - k^2 \phi^e W^m] d\Omega + \\ & \int_{\Omega_e} [\nabla \phi^e \cdot \nabla \eta_m^e - k^2 \phi^e \eta_m^e] d\Omega + \\ & \int_{\Gamma_{e,1}} -(\nabla \phi^e \cdot \vec{n}_e) (W^m + \eta_m^e) d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{e,3}} -(\nabla \phi^e \cdot \vec{n}_e) (W^m + \eta_m^e) d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{e,2}} \left[\frac{\beta^{ee2}}{h_{ee2}} (\phi^e - \phi^{e2}) \eta_m^e - \frac{1}{2} (\nabla \phi^e \cdot \vec{n}_e + \nabla \phi^{e2} \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (\phi^e - \phi^{e2}) (\nabla \eta_m^e \cdot \vec{n}_{ee}) \right] d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{e,2}} \left[-\frac{1}{2} (\nabla \phi^e \cdot \vec{n}_e + \nabla \phi^{e2} \cdot \vec{n}_e) W^m + \right. \\ & \left. \frac{\beta^{ee2}}{h_{ee2}} (\phi^e - \phi^{e2}) W^m \right] d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.74)$$

A Equação (5.74) acima, pode ser reescrita de uma a forma mais compacta, como segue

$$C^{m1}\hat{\phi}_1^e + C^{m2}\hat{\phi}_2^e + C^{m3}\hat{\phi}_3^e + C^{m4}\hat{\phi}_3^{e2} + \left[C^{m5}\hat{\phi}_1^{e2} + C^{m6}\hat{\phi}_2^{e2} \right] = b^m + \text{Res}^m(\theta) \quad (5.75)$$

onde

$$C^{mk} = \sum_{n=1}^{N_{\text{Func}\Gamma_2}} M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2} \alpha_n^m, \quad (5.76)$$

A matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2}$ a ser obtida agora, que compõem o sistema para minimizar o erro de fase, é uma matriz de dimensões $M_{6 \times 6}^{\alpha, \Gamma_2}$, e seus respectivos α_n^m possui dimensões $\alpha_{n \times m}$, ou seja $\alpha_{6 \times 3}$. Tal matriz tem a forma característica, como mostrado na Figura 5.4 abaixo, para qualquer elemento triangular com duas faces no contorno do domínio Ω de interesse.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------------------------------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | * | * | * | * | * | * |
| 2 | * | * | * | * | * | * |
| $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2} =$ 3 | * | * | * | * | * | * |
| 4 | 0 | 0 | 0 | * | * | * |
| 5 | 0 | 0 | 0 | * | * | * |
| 6 | 0 | 0 | 0 | * | * | * |

Figura 5.4: Forma geral da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2}$ para o caso de um elemento triangular, com duas arestas no contorno contorno do domínio de interesse Ω .

Tal como nos casos onde se busca parâmetros $\alpha_{n \times m}$ que minimizam o erro de fase, para elementos do domínio Capítulo 4 e para elementos com uma aresta no contorno, na Seção 5.1.2, tal matriz, representada pela Figura 5.4 acima, para elementos triangulares, com duas faces no contorno do domínio Ω , não é diferente, quanto ao

fato de a matriz ser não singular, tais como as obtidas anteriormente. O que garante a consistência da matriz, permitindo assim, obter solução única para cada parâmetro $\alpha_{n \times m}$ obtido, como foi verificado numericamente nos exemplos simulados neste trabalho.

Os respectivos valores reais da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2}$ são obtidos a partir da Equação (5.77) abaixo

$$M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2} = \int_{\Omega_e} [\nabla \Psi_n^{e, \Gamma_2} \cdot \nabla \eta_k^e - k^2 \Psi_n^{e, \Gamma_2} \eta_k^e] d\Omega - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 2}}^3 \int_{\Gamma_{ee_l}} -(\nabla \eta_k^e \cdot \vec{n}_e) \Psi_n^{e, \Gamma_2} d\Gamma + \int_{\Gamma_{e,2}} \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^{e, \Gamma_2} (\nabla \eta_k^e \cdot \vec{n}_e) + \frac{\beta^{ee_2}}{h_{ee_2}} \Psi_n^{e, \Gamma_2} \eta_k^e \right] d\Gamma, \quad (5.77)$$

para

$$k = 1, 2, 3, \quad (5.78)$$

onde k representa as três primeiras linhas da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2}$ e, para as demais linhas da matriz, a equação que permite calcular seus respectivos valores é dada pela Equação (5.79) abaixo

$$M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2} = \int_{\Gamma_{ee_j}} \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^{e, \Gamma_2} (\nabla \eta_i^{e_l} \cdot \vec{n}_e) + \frac{\beta^{ee_j}}{h_{ee_j}} \Psi_n^{e, \Gamma_2} \eta_i^{e_l} \right] d\Gamma, \quad (5.79)$$

onde os valores de k , para as demais linhas da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2}$ são dados como seguem

$$k = 4, 5, 6, \quad (5.80)$$

e as respectivas relações entre os índices k, n, j, i que aparecem na equação integral para os cálculos dos componentes da matriz $M_{kn}^{\alpha, \Gamma_2}$, são dados pela Tabela 5.2

Tabela 5.2: Relação entre os índices k, l, j e i para a matriz M_{kn}^{α} .

| k | l | j | i |
|-----|-----|-----|-----|
| 4 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 2 | 1 |
| 6 | 2 | 2 | 2 |

De modo que as funções peso W_r , para $r = 0$ e $r = 2$ são dadas pela Equação (5.81) abaixo, como as apresentadas anteriormente, na Equação 4.9, no Capítulo 4, quando foram definidas as funções W_r

$$\begin{aligned} W_0 &= L_1 * L_2 * L_3, \\ W_2 &= L_1 * L_3. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Lembrando que as funções coordenadas de áreas η_m^e , são as coordenadas de áreas dos elementos triangular padrão.

$\eta_m^e = L_m^e \rightarrow$ são as coordenada de área do elemento e ,

$\eta_m^{e_l} = L_m^{e_l} \rightarrow$ são as coordenada de área do elemento e_l .

Assim tem-se as funções Ψ_i^{e, Γ_2} , para o caso de elementos triangulares com duas arestas no contorno dadas como seguem

$$\Psi_i^{e, \Gamma_2} = \Psi_i, \quad (5.82)$$

para i dados como seguem

$$i = 1, 2, 3. \quad (5.83)$$

E para as funções Ψ_4^{e, Γ_2} e Ψ_5^{e, Γ_2} , como definidas anteriormente no Capítulo 4 pelas Equações (4.11), 4.12 e 4.13, respectivamente. Assim, tem-se

$$\Psi_4^{e, \Gamma_2} = \Psi_4^e = h_e \left(\frac{\int_{\Gamma_{ee_2}} (\nabla \eta_3^{e_2} \cdot \vec{n}_e) d\Gamma}{\int_{\Gamma_{ee_2}} d\Gamma} \right) L_1 L_3 W_2, \quad (5.84)$$

e

$$\Psi_5^{e, \Gamma_2} = \Psi_9^e = \eta_1^e W_2, \quad (5.85)$$

e por fim

$$\Psi_6^{e, \Gamma_2} = \Psi_{10}^e = \eta_3^e W_2. \quad (5.86)$$

Com Ψ_4^e , Ψ_5^e , Ψ_9^e e Ψ_{10}^e , dadas como definidas pelas equações (4.11), (4.12), (4.16) e (4.17) no Capítulo 4, respectivamente. Novamente, como descrito anteriormrnte, para elementos triangulares do domínio e , elementos triangulares com uma face no contorno e , fazendo uma varredura no ângulo θ no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a onda plana é escrita como segue

$$\phi(\theta) = e^{i(k(\alpha_\theta x + \beta_\theta y))} \quad (5.87)$$

com α_θ e β_θ , como já definidos anteriormente, $\alpha_\theta = \cos(\theta)$ e $\beta_\theta = \sin(\theta)$.

Usando agora as Equações (4.30) - (4.34) e, definindo os coeficientes $C^{m i}$ dados como seguem

$$C^{m 1} = C^{m 5} = \frac{C^{*m 1}}{2}, \quad (5.88)$$

e

$$C^{m 3} = C^{m 6} = \frac{C^{*m 3}}{2}, \quad (5.89)$$

e

$$C^{*,m 2} = C^{m 2},$$

c e

$$C^{*,m4} = C^{m4}, \quad (5.91)$$

com os C^{mi} dados pelas Equações 5.88 - 5.112 anteriores, pode-se escrever um sistema mais compacto e simplificado, como mostra os sistema abaixo

$$C^{*m1}\hat{\phi}_1^e + C^{*m2}\hat{\phi}_2^e + C^{*m3}\hat{\phi}_3^e + C^{*m4}\hat{\phi}_3^{e2} = b^m + \text{Re } s^m(\theta), \quad (5.92)$$

onde os b^m são obtidos como seguem

$$b^m = - \left(D^{m1}\hat{\phi}_1^e + D^{m2}\hat{\phi}_2^e + D^{m3}\hat{\phi}_3^e + D^{m4}\hat{\phi}_3^{e2} \right), \quad (5.93)$$

para os D^{mj} obtidos a partir expressão

$$\begin{aligned} D^{mj} &= \int_{\Omega_e} [\nabla\eta_j^e \cdot \nabla\eta_m^e - k^2\eta_j^e\eta_m^e] d\Omega + \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ \neq 2}}^3 \int_{\Gamma_{eej}} [- (\nabla\eta_j^e \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e] d\Gamma + J_{e_j} + I_{e_j}, \end{aligned} \quad (5.94)$$

onde os J_{e_j} são obtidos segundo a equação

$$J_{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 2, \\ \int_{\Gamma_{ee2}} -\frac{1}{2} [(\nabla\eta_j^e \cdot \vec{n}_e + \nabla\eta_i^{e2} \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e] d\Gamma & \text{se } j \neq 2. \end{cases} \quad (5.95)$$

onde a expressão para os I_{e_j} são calculados a partir da expressão

$$I_{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 1, \\ \int_{\Gamma_{ee2}} [-\frac{1}{2} (\nabla\eta_j^e \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e] d\Gamma & \text{se } j \neq 1. \end{cases} \quad (5.96)$$

onde

$$j = 1, 2, 3, \quad (5.97)$$

e as relações entre os índices j, l, i são dadas como seguem

$$j = 1 \rightarrow l = 2 \rightarrow i = 1, \quad (5.98)$$

e

$$j = 3 \rightarrow l = 2 \rightarrow i = 2, \quad (5.99)$$

de modo que

$$D^{m4} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ee_2}} (\nabla \eta_3^{e_2} \cdot \vec{n}_e) \eta_m^e d\Gamma. \quad (5.100)$$

Assim, pode-se escrever a equação para os B^{mj} , como descrita pelo sistema de equações descrito pela Equação (5.101) abaixo

$$B^{m1} \hat{\phi}_1^e + B^{m2} \hat{\phi}_2^e + B^{m3} \hat{\phi}_3^e + B^{m4} \hat{\phi}_3^{e_2} = \text{Re } s^m(\theta). \quad (5.101)$$

com

$$B^{mj} = C^{*mj} + D^{mj}, \quad (5.102)$$

onde $j = 1, 2, 3, 4$.

Agora, usando as Equações (4.44), (4.45), (4.46), (4.47), (4.48) e (4.49) para dividir as Equações (5.101) e (5.102), por $\hat{\phi}_m^e$, com $m = 1, 2, 3$, para obter a equação

$$\left[\sum_{l=1}^4 \text{Coe}f^{m,l,0}(\theta) B^{ml} \right] + i \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^4 \text{Coe}f^{m,l,1}(\theta) B^{ml} \right] = \hat{R}es^{m,*}(\theta). \quad (5.103)$$

Onde os coeficientes $\text{Coe}f^{m,j,0}(\theta)$ e $\text{Coe}f^{m,j,1}(\theta)$, são dados como descrito no Capítulo 4. De modo que, da mesma forma, os coeficientes S_j^m para $j = 1, 2, 3, 4$, são definidos como descrito no Capítulo 4, para elementos inteiramente pertencente ao domínio. Com os coeficientes $\text{Coe}f^{*,m,j,0}(\theta)$ e os coeficientes $C^{*,m,j,1}(\theta)$ para $j = 1, 2, 3$, também fornecido como no Capítulo 4, obtém-se equação

$$\hat{R}es^m(\theta) = \left[\left(\sum_{j=1}^3 \text{Coe}f^{*,m,j,0}(\theta) S_j^m \right) + 1 \right] + i \left[\sum_{j=1}^3 \text{Coe}f^{*,m,j,1}(\theta) S_j^m \right], \quad (5.104)$$

onde

$$\hat{R}es^m(\theta) = \frac{\hat{R}es^{m,*}(\theta)}{B^{mm}}, \quad (5.105)$$

na Equação (5.105) acima, segue-se uma estratégia semelhante a utilizada por LOULA e FERNANDES [13].

Novamente, com o objetivo de minimizar erro de arredondamento, adota-se uma estratégia diferente da apresentada em LOULA e FERNANDES [13]. De modo que serão utilizados os coeficientes $S_j^{*,m}$ com $j = 1, 2, 3$ e $\hat{C}oe}f^{m,j,l}(\theta)$, com $l = 0, 1$ definido pelas Equações (4.71) - (4.89), para obter a expressão

$$\hat{R}es^m(\theta) = \left[\left(\sum_{j=1}^3 \hat{C}oe}f^{m,j,0}(\theta) S_j^{*,m} \right) + 1 \right] + i \left[\sum_{j=1}^3 \hat{C}oe}f^{m,j,1}(\theta) S_j^{*,m} \right], \quad (5.106)$$

que minimiza erros de arredondamentos.

Definindo agora o funcional

$$J^m = \int_0^{2\pi} \left| \hat{R}es^m(\theta) \right|^2 d\theta, \quad (5.107)$$

onde os coeficientes $S_1^{*,m}$, $S_2^{*,m}$ e $S_3^{*,m}$, são obtidos requerendo a condição de minimização do funcional J^m . Tal funcional se faz necessário, haja vista que na formulação convencional de elementos finitos generalizada, apresentada por BABUŠKA *et al.* [3], a geração do estêncil, é devido ao conhecimento *a priori* da direção da onda plana. Na formulação proposta BABUŠKA *et al.* [3], acerta-se algumas direções de onda plana. Ou seja, a solução nodal do problema numérico, coincide com a solução analítica, devido ao fato de que em tal formulação, a obtenção dos parametros que minimizam erro de fase, a ser construída, para que se tenha o valor nodalmente exato, para a direção de onda plana para à qual foi especificada. Assim sendo, é de se esperar, que nessas direções estabelecida, *a priori*, o valor nodal da solução numérica, seja igual o da solução analítica do problema, já que foi construída para tal, como foi verificado no trabalho de BABUŠKA *et al.* [3].

Na formulação proposta neste trabalho, faz-se uma varredura completa em todas as direções de onda plana, no intervalo $0 < \theta < 2\pi$. Dessa forma, não se tem a garantia de que acerta-se alguma direção de onda plana nodalmente exata para a solução numérica da equação de Helmholtz, como a proposta apresentada por BABUŠKA *et al.* [3]. No desenvolvimento deste trabalho, não se teve a preocupação em acertar uma direção específica, de forma nodalmente exata, tal como a proposta desenvolvida por BABUŠKA *et al.* [3]. A preocupação deste trabalho foi minimizar erro de fase para todas as direções de onda plana, descrito como segue.

Logo tem-se

$$\frac{\partial J^m}{\partial S_j^{*,m}} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.108)$$

e $l = 1, 2, 3$, usa-se as Equações (4.77) e (4.78) para definir os coeficientes M_{lj}^m e F_l e assim, obtém-se

$$\sum_{j=1}^3 M_{lj}^m S_j^{*,m} = F_l^m, \quad (5.109)$$

onde $l = 1, 2, 3$.

Semelhante aos procedimentos, adotados no Capítulo 4, na obtenção das equações (4.80) e (4.81), obtém-se aqui, para elementos com duas faces no contorno, a equação

$$S_j^m = \frac{S^{*,m}}{F_{norm}^{m,j}}, \quad (5.110)$$

onde

$$j = 1, 2, 3. \quad (5.111)$$

Com os coeficientes S_j^m obtidos, determina-se os valores dos B^{mj} de forma semelhante aos procedimentos utilizados no Capítulo 4, por meio das equações (4.82), (4.83), (4.84) e (4.85) com $j = 1, \dots, 4$. Pode-se então, escrever a equação

$$C^{*mj} = B^{mj} - D^{mj}, \quad (5.112)$$

onde

$$m = 1, 2, 3, \quad (5.113)$$

e

$$j = 1, \dots, 4. \quad (5.114)$$

Usando as equações (5.88), (5.110), (5.70) e (5.112), obtem-se

$$C^{m1} = \frac{C^{*m1}}{2}, \quad (5.115)$$

e

$$C^{m5} = C^{m1}, \quad (5.116)$$

e

$$C^{m2} = C^{*m2}, \quad (5.117)$$

e

$$C^{m4} = C^{*m4}, \quad (5.118)$$

e

$$C^{m3} = \frac{C^{*m3}}{2}, \quad (5.119)$$

e

$$C^{m6} = C^{m3}, \quad (5.120)$$

para finalmente obter-se os parâmetros α_n^m , que minimiza erro de fase, com $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, para cada $m = 1, 2, 3$ fixado, como sendo a solução do sistema

$$\sum_{n=1}^6 M_{ln}^\alpha \alpha_n^m = C^{ml}, \quad (5.121)$$

onde

$$l = 1, \dots, 6, \quad (5.122)$$

e

$$m = 1, 2, 3. \quad (5.123)$$

A função de ponderação W^m , para o caso de elementos com duas faces no contorno do domínio Ω , como definida anteriormente, segue forma análoga, como segue

$$W^m(x, y) = \sum_{n=1}^6 \alpha_n^m \Psi_n^{e, \Gamma_2}. \quad (5.124)$$

Que também devem ser avaliados nos pontos de integração de Gauss para o domínio Ω_e e nos pontos de integração de Gauss para o contorno de Ω_e , ou seja, Γ_e . Como descrito no fluxograma descrito na Figura 4.8.

Capítulo 6

Resultados numéricos e discussões

Os casos discutidos nos exemplos abaixo serão realizados para um domínio quadrado, unitário $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, como mostrado na Figura 6.2, . De modo que, para todos os exemplos utilizado neste trabalho, o produto $kh \approx cte$, bem como para cada número de onda k , variando como seguem, $k = 30$, $k = 60$, $k = 90$, $k = 105$ e $k = 120$, tem se as respectivas partições para a malha, como descritos no texto ao apresentar cada situação a ser simulada. Em todos os casos, a regra empirica "rule of thumb" está sendo relaxada, de modo que $n_{res} = \frac{\lambda}{h} \approx cte$, como mostra a Figura 6.1.

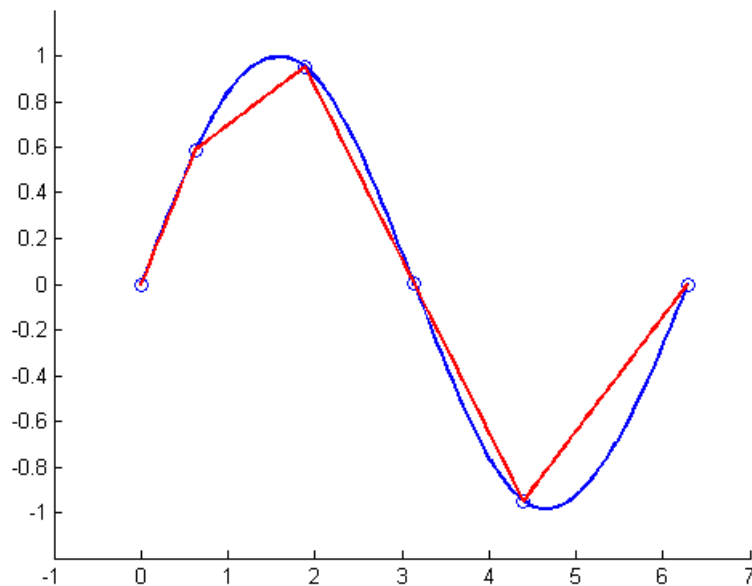


Figura 6.1: Relaxamento da condição empírica "rule of thumb", de modo a ter-se aproximadamente 5 elementos por comprimento de onda. Valores esses, que foram utilizado nas simulações deste trabalho.

Ou seja, na prática IHLENBURG [2], na seção 4.4, mostra-se que, para uma boa

aproximação em elementos finitos padrão, deve-se ter a condição $n_{res} = \frac{\lambda}{h} \approx cte$; recomenda-se o uso de $n_{res} = 10$. Fato que neste trabalho, como será descrito posteriormente, não será adotado.

- **Forma fraca:** a solução de elementos finitos não satisfaz exatamente nos pontos nodais o valor prescrito, mas o residuo de seu valor no contorno faz parte da equação variacional do problema.
- **Forma forte:** a solução de elementos finitos satisfaz exatamente nos pontos nodais onde a solução exata e prescrita, atendendo o valor prescrito.

Esse fato diz que se deve usar, para uma boa aproximação de elementos finitos, 10 elementos por comprimento de onda. Nos casos citados neste trabalho, essa recomendação foi relaxada, como mostra a Figura 6.1. Serão simulados 5 casos onde serão mantidos $n_{res} = \frac{\lambda}{h} \approx cte$, a medida que o número de onda aumenta.

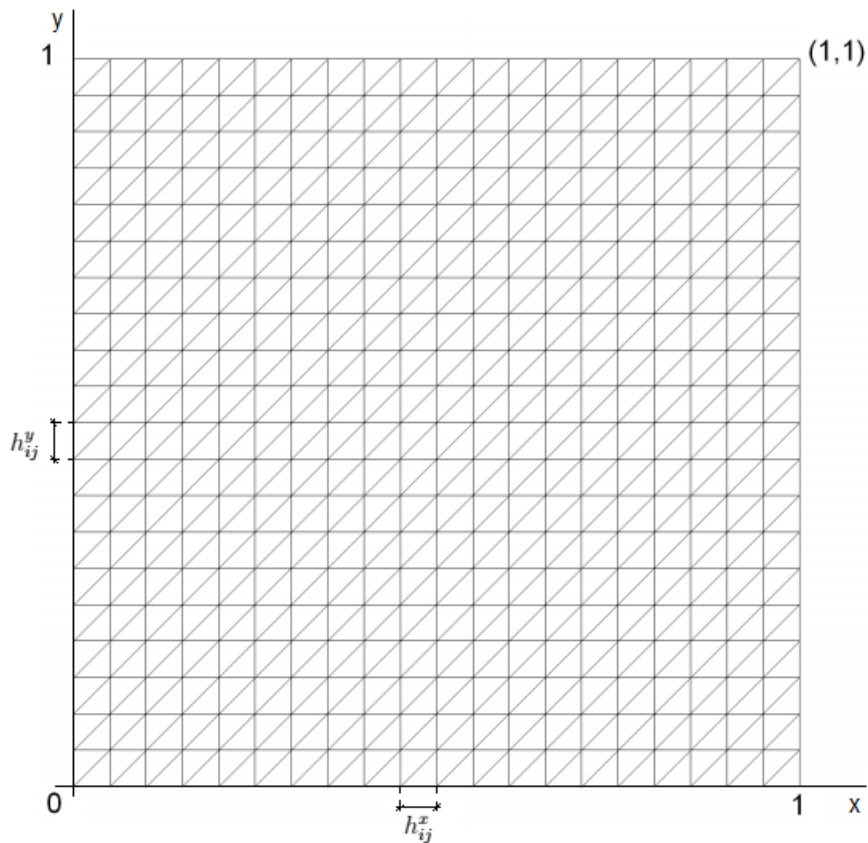


Figura 6.2: Malha de elemento triangular, utilizada neste trabalho. As respectivas dimensões h_{ij}^x e h_{ij}^y estarão especificadas no texto

No primeiro caso simulado, é usada uma malha triangular, de partição 20×20 , como mostrado na Figura 6.2, $h_{ij}^x = h_{ij}^y = 0,0500$ e número de onda $k = 30$. A aproximação pela formulação PGD mostra-se muito semelhante à aproximação DG,

mas já se mostra melhor do que a formulação DG, conforme mostra as Figuras 6.3 e 6.4, para as seções $x = 0,5$ e $y = 0,5$ escolhidas, respectivamente.

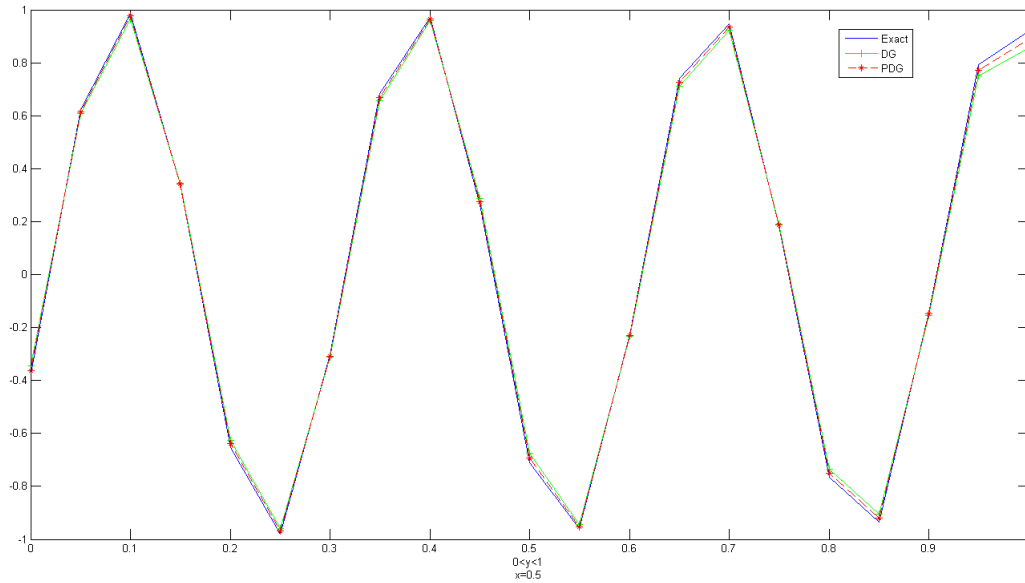


Figura 6.3: Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0,5$, para uma partição da malha de 20×20 , e um número de onda $k = 30$.

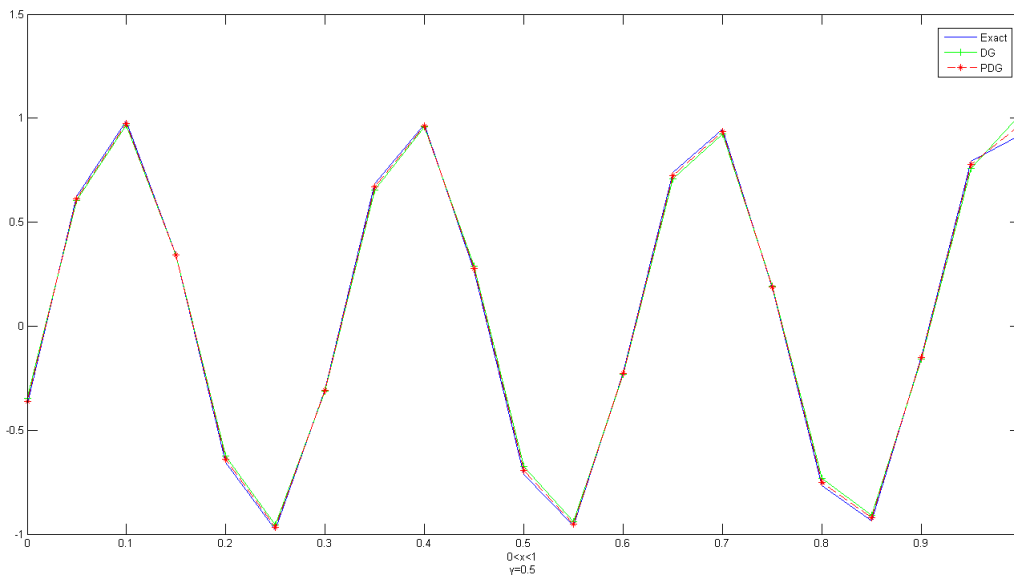


Figura 6.4: Soluções exata, DG e PGD para uma seção horizontal em $y = 0,5$, para uma partição da malha de 20×20 , e número de onda $k = 30$.

Para uma partição da malha de 40×40 , como mostrado na Figura 6.2, $h_{i,j}^x = h_{i,j}^y = 0,0250$ e número de onda $k = 60$, a aproximação pela formulação PGD mostra-se melhor que a aproximação DG, como mostra as Figuras 6.3 e 6.4, para as seções $x = 0,5$ e $y = 0,5$ respectivamente e, confirmado também na análise de erro da próxima Seção, 6.1, como pode ser observado nas Figuras 6.5 e 6.6 respectivamente.

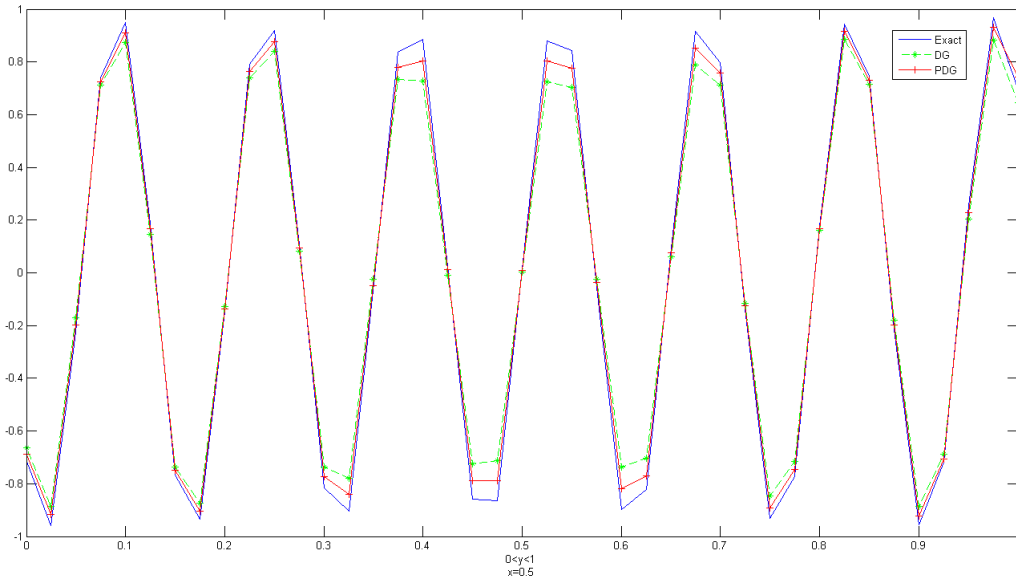


Figura 6.5: Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0,5$, para a partição da malha de 40×40 , e número de onda $k = 60$.

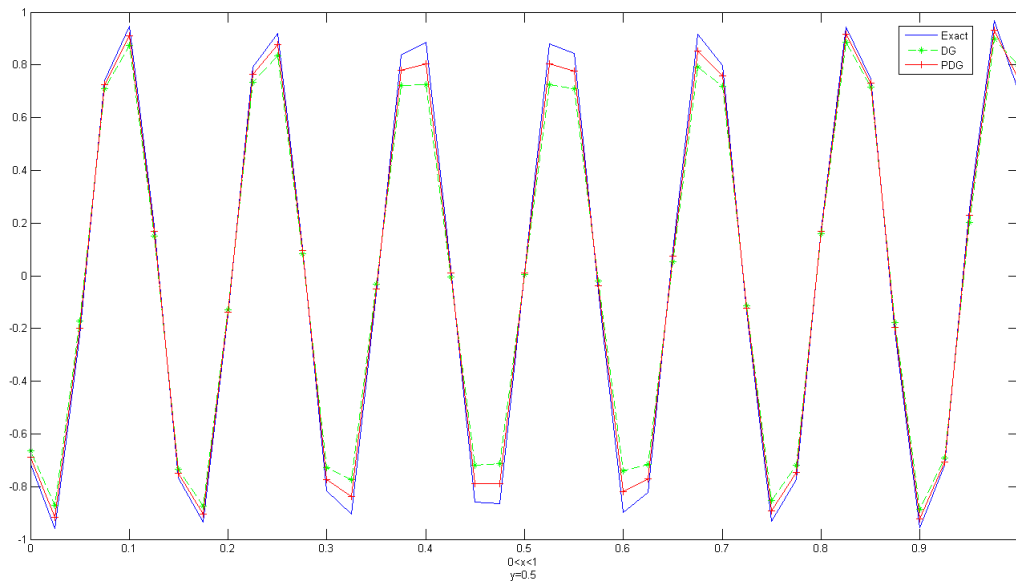


Figura 6.6: Soluções exata, DG e PGD para uma seção horizontal em $y = 0,5$, para uma partição da malha de 40×40 , e número de onda $k = 60$.

Para uma partição da malha com 60×60 , como mostrado na Figura 6.2, $h_{i,j}^x = h_{i,j}^y = 0,0166$ e número de onda $k = 90$, a aproximação pela formulação PGD mostra-se melhor que a aproximação DG, como mostra as Figuras 6.7 e 6.8 respectivamente, para as seções $x = 0,5$ e $y = 0,5$ respectivamente.

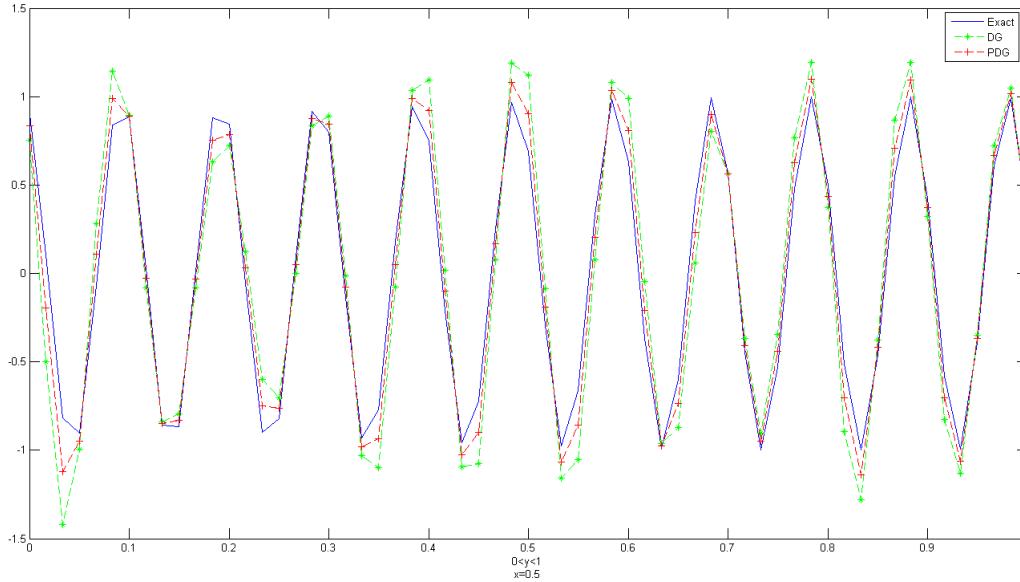


Figura 6.7: Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0,5$, para uma partição da malha de 60×60 , e número de onda $k = 90$.

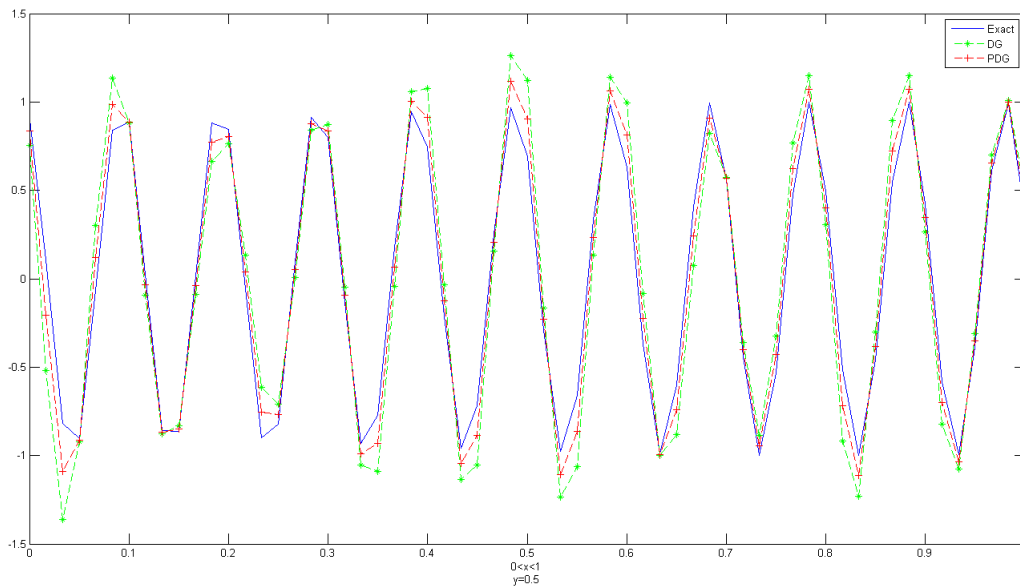


Figura 6.8: Soluções exata, DG e PGD para uma seção horizontal em $y = 0,5$, para uma partição da malha de 60×60 , e número de onda $k = 90$.

Para uma partição da malha com 70×70 , como mostrado na Figura 6.2, $h_{i,j}^x = h_{i,j}^y = 0,0142$ e número de onda $k = 105$, a aproximação pela formulação PGD continua mostrando-se melhor que a aproximação DG, mas, começa ficar explícito o erro de fase, em ambos os casos, como pode ser visto nas Figuras 6.9 e 6.10, para as seções $x = 0,5$ e $y = 0,5$, respectivamente.

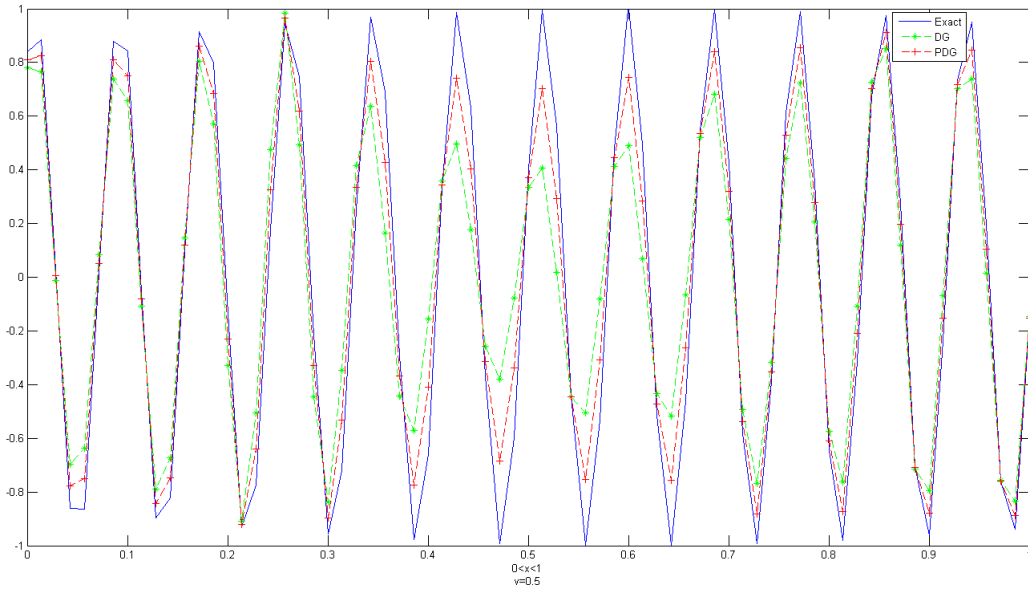


Figura 6.9: Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0,5$, para uma partição da malha de 70×70 , e número de onda $k = 105$.

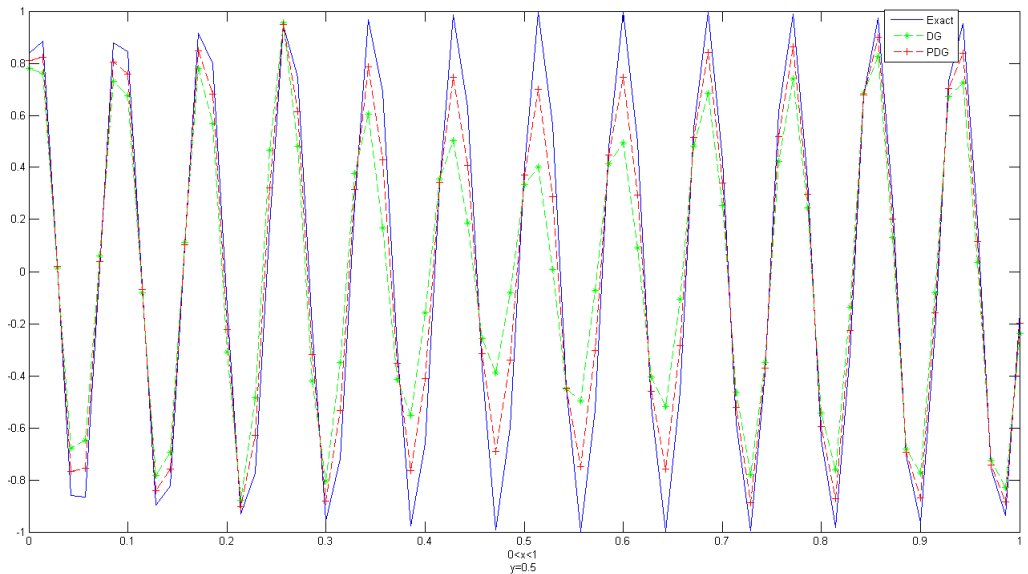


Figura 6.10: Soluções exata, DG e PGD para uma seção horizontal em $y = 0,5$, para uma partição da malha de 70×70 , e número de onda $k = 105$.

Para uma malha de partição 80×80 , como pode visto na Figura 6.2 $h_{i,j}^x = h_{i,j}^y = 0,0125$ e número de onda $k = 120$, a formulação PGD mostra-se melhor que a formulação DG, porém, o erro de fase deteriora completamente a aproximação em ambos os casos, como pode ser visto nas Figuras 6.11 e 6.12, para as seções $x = 0,5$ e $y = 0,5$ respectivamente. Observa-se que novamente, mesmo com o relaxamento na regra empírica “rule of thumb”, tem-se na formulação PGD, utilizada neste trabalho, uma melhor aproximação, quando comparado com as demais formulações, para valores de $k < 120$. Mas isso não garante a deterioração da solução numérica.

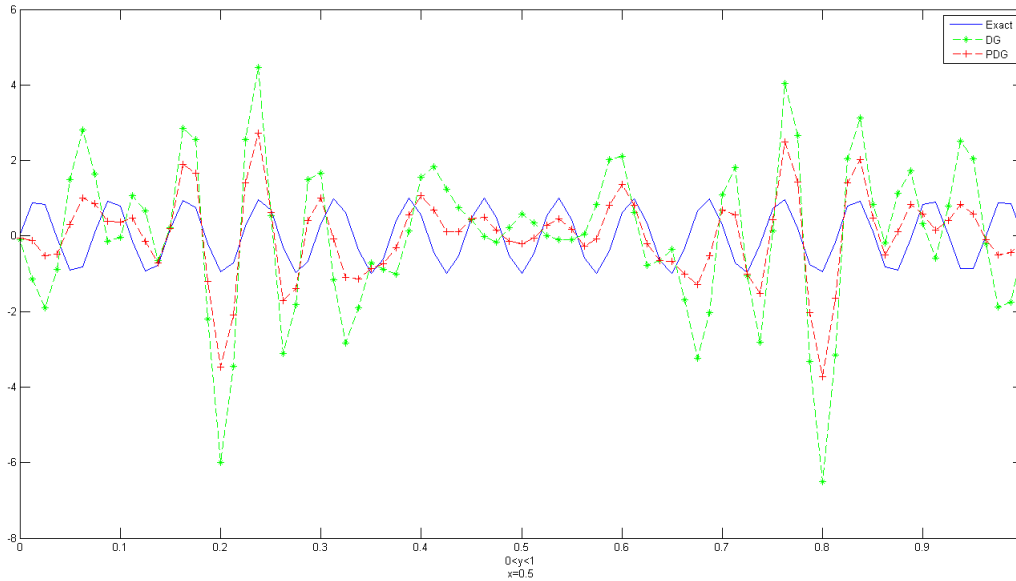


Figura 6.11: Soluções exata, DG e PGD para uma seção vertical em $x = 0,5$, para a partição da malha de 80×80 , e número de onda $k = 120$.

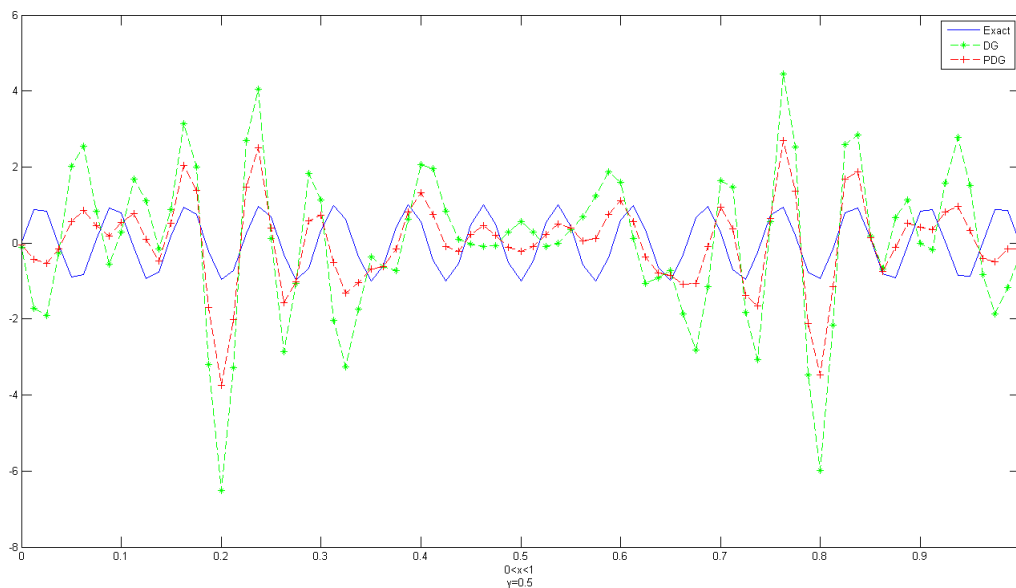


Figura 6.12: Soluções exata, DG e PGD para uma seção horizontal em $y = 0,5$, para a partição da malha de 80×80 , e número de onda $k = 120$.

Como pode-se observar nas Figuras 6.11 e 6.12 acima, respectivamente, o erro de fase continua deteriorando a solução numérica. De modo que o problema de Helmholtz, continua em aberto, numericamente falando.

6.1 Análise de erros

De acordo com os exemplos numéricos, realizados no início do Capítulo 6, faz-se a análise de erros em ambos os casos, nas respectivas seções x e y adotadas nos exemplos rodados simulados neste trabalho. Para o caso de uma malha de partição 20×20 , como mostrado na Figura 6.2, e número de onda $k = 30$, e seções $x = 0,5$ e $y = 0,5$ respectivamente. Os resultados podem ser visto nas Figuras 6.13 e 6.14 respectivamente.

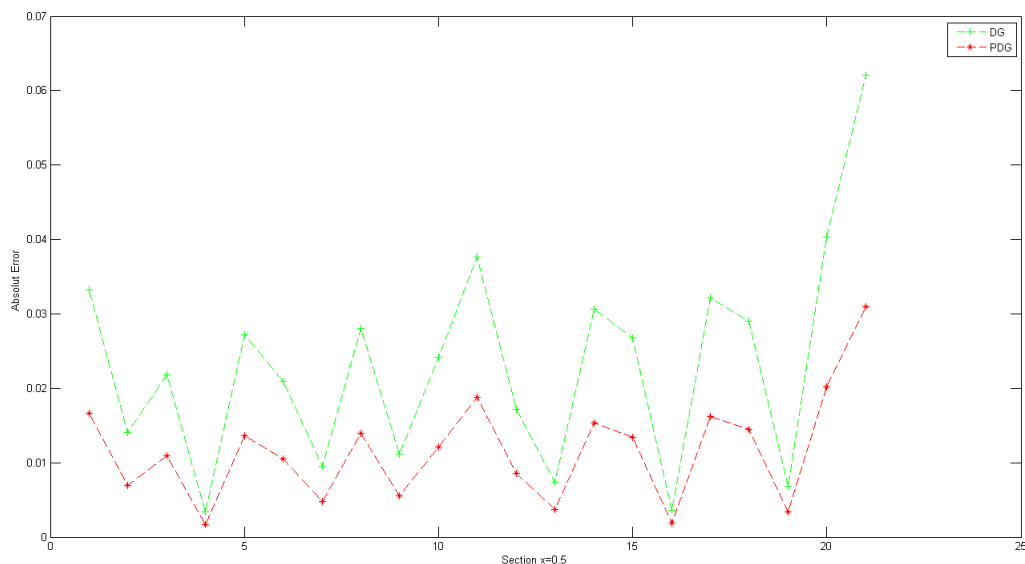


Figura 6.13: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical em $x = 0,5$, para uma partição de malha de 20×20 , e número de onda $k = 30$.

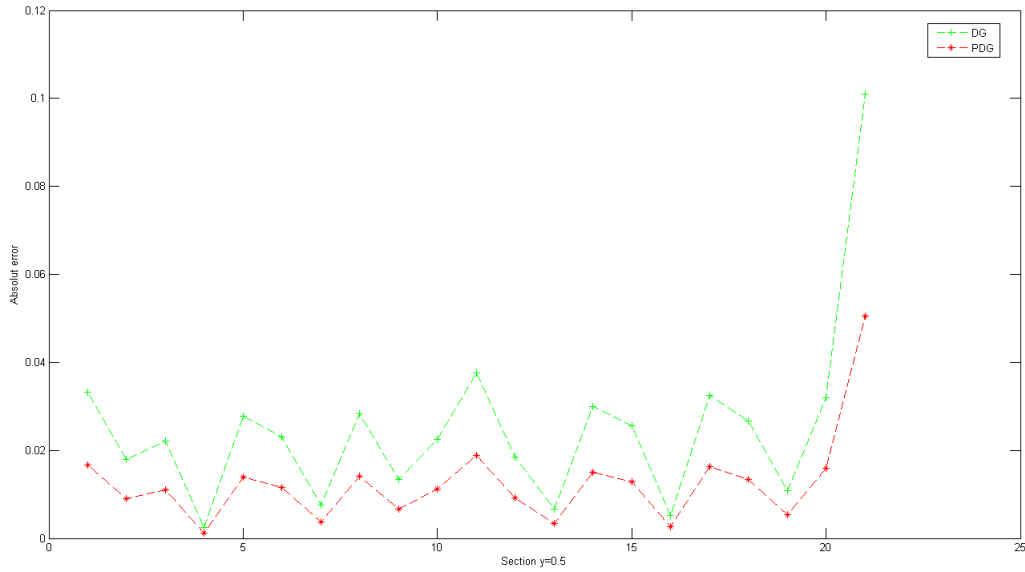


Figura 6.14: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção horizontal em $y = 0,5$, para uma partição de malha 20×20 , e número de onda de $k = 30$.

Para uma malha, com partição 40×40 , e número de onda $k = 60$, tem-se uma melhora na formulação PGD proposta em relação a formulação DG clássica, como pode ser vista nas Figuras 6.15 e 6.16, para a seções $x = 0,5$ e $y = 0,5$ respectivamente. Novamente a partição foi aumentada e o número de onda também foi aumentado, porém a relação $n_{res} = \frac{\lambda}{h} \approx cte$, foi mantida. A melhora na aproximação ficou mais evidente do que no caso anterior,

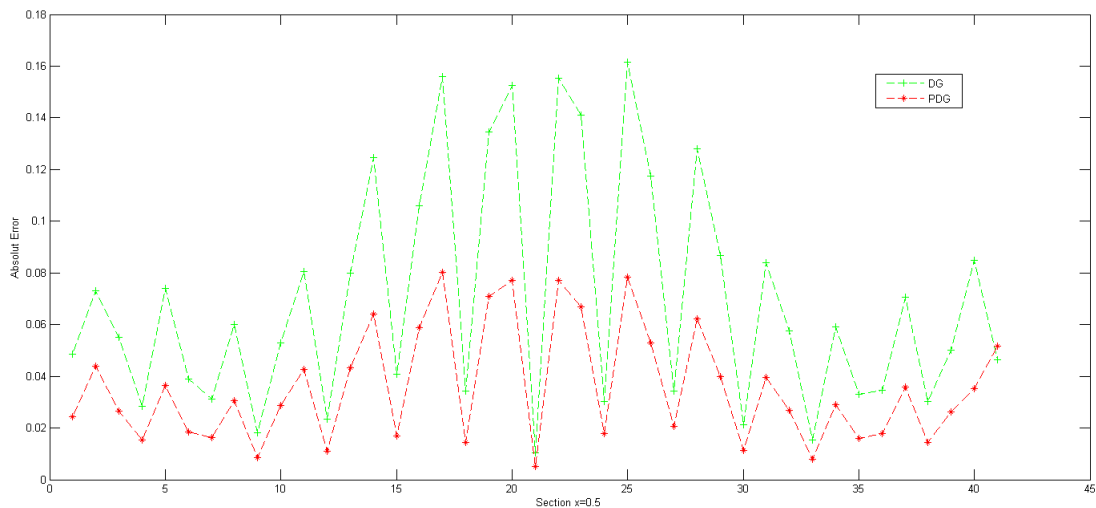


Figura 6.15: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical em $x = 0,5$, para uma partição de malha de 40×40 , e número de onda $k = 60$.

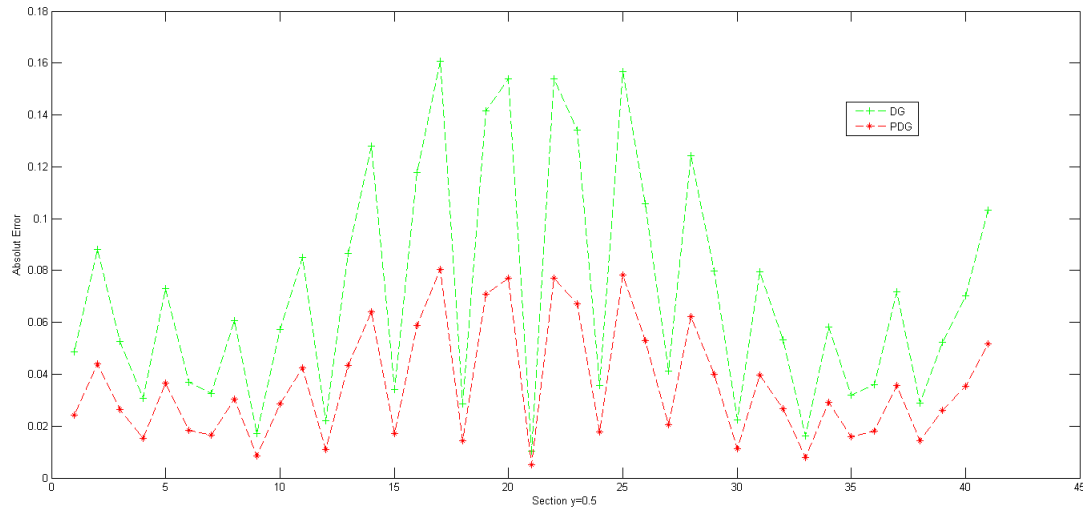


Figura 6.16: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção horizontal em $y = 0,5$, para uma partição de malha 40×40 , e número de onda $k = 60$.

Tem-se uma situação que se repete, quando a partição é alterada para 60×60 , e número de onda $k = 90$. Novamente a melhora da formulação PGD proposta, em relação a formulação DG classica é confirmada, como pode ser vista nas Figuras 6.18 e 6.19 para as seções em $x = 0,5$ e $y = 0,5$ respectivamente.

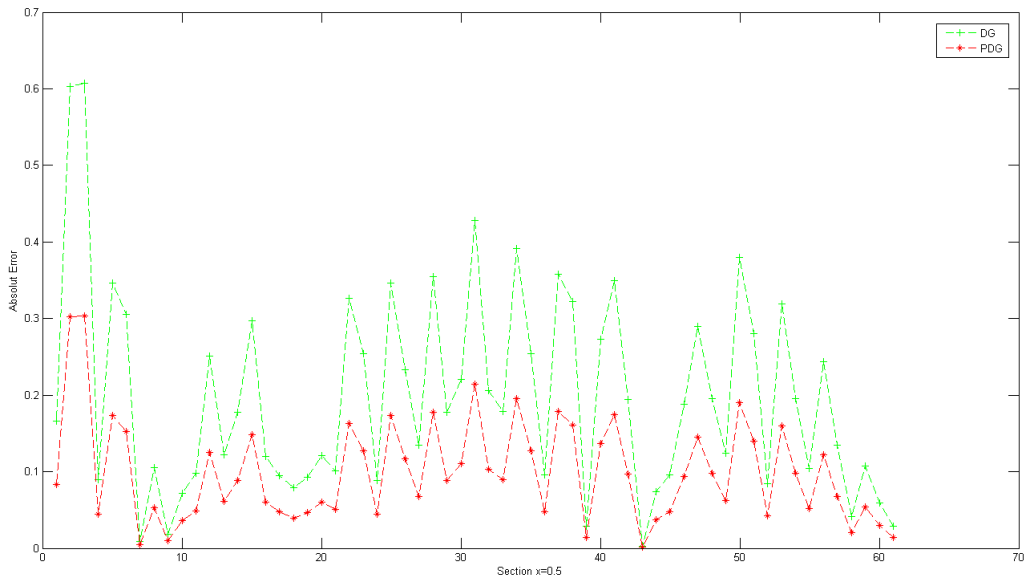


Figura 6.17: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical em $x = 0,5$, para uma partição da malha de 60×60 , e número de onda $k = 90$.

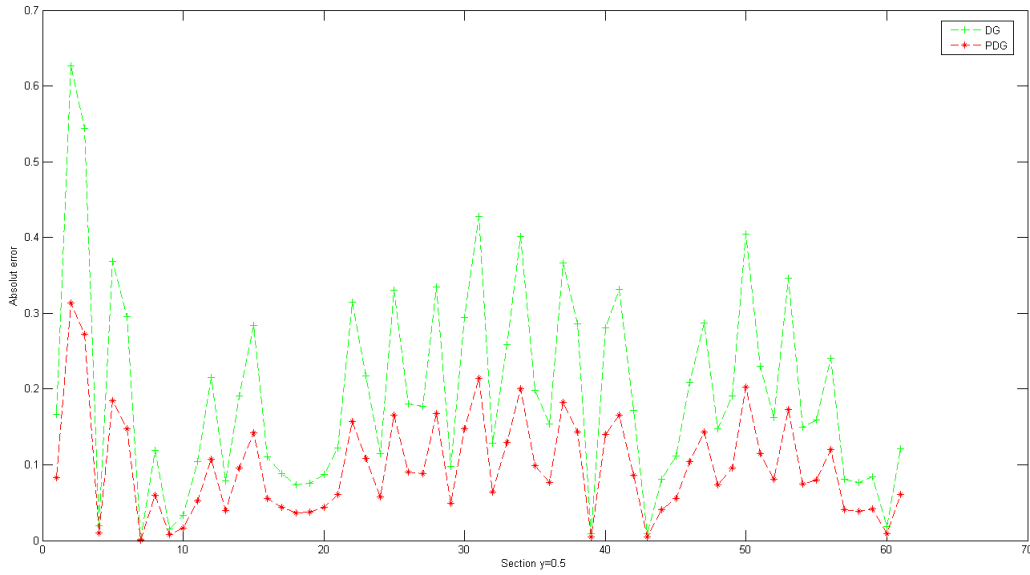


Figura 6.18: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção horizontal em $y = 0,5$, para a partição de malha de 60×60 , e número de onda $k = 90$.

A significativa melhora obtida para os resultados anteriores, começa a ser prometida para uma partição 70×70 , e número de onda $k = 105$. Seja para a formulação PGD proposta ou para a formulação DG, de modo que é visível também, o distanciamento das duas soluções em relação a solução analítica, como pode ser vista nas Figuras 6.9 e 6.10, para as seções $x = 0,5$ e $y = 0,5$ respectivamente.

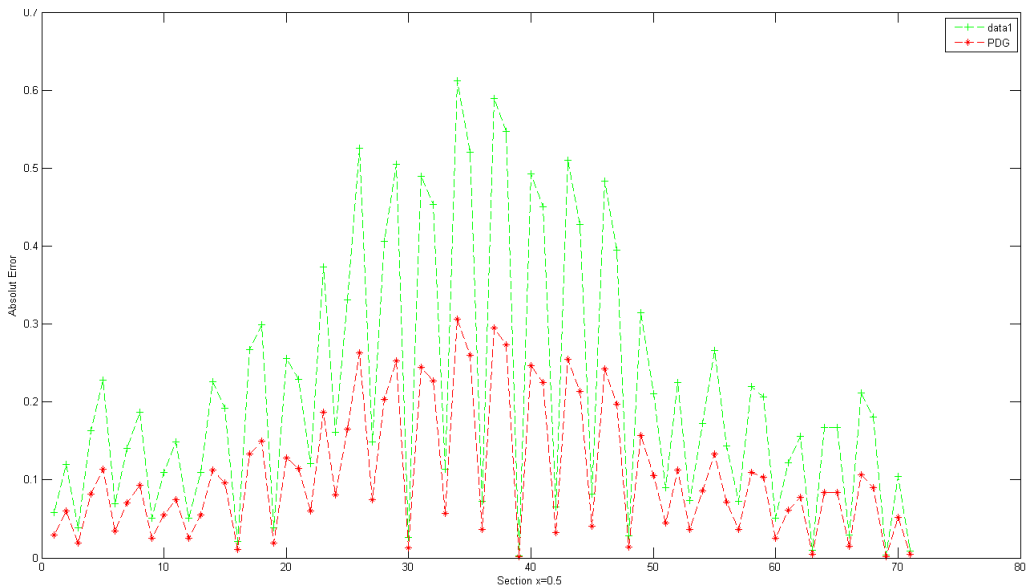


Figura 6.19: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical em $x = 0,5$, para uma partição de malha de 70×70 , e número de onda $k = 105$.

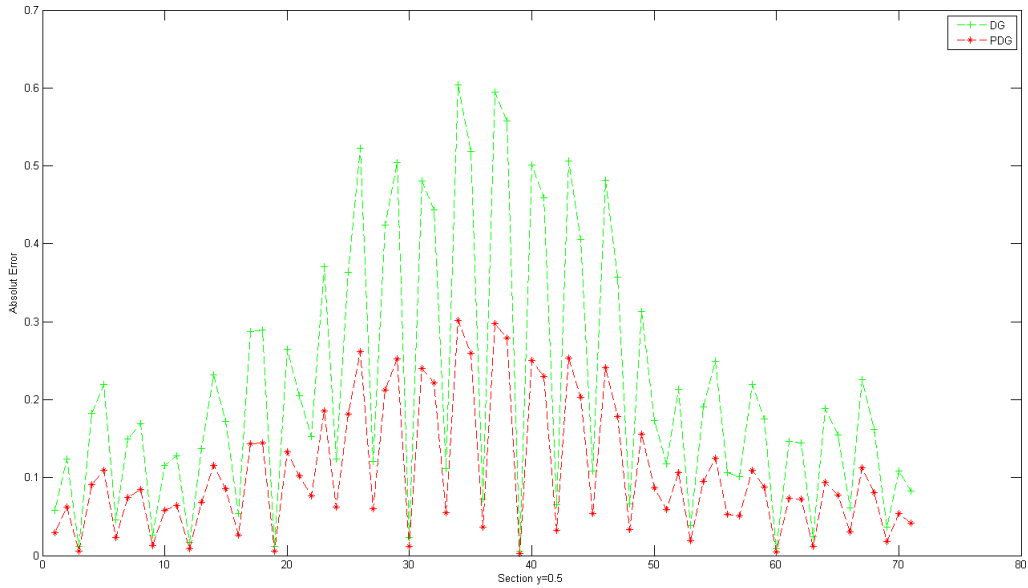


Figura 6.20: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para a seção horizontal $y = 0,5$, para uma partição de malha de 70×70 e número de onda $k = 105$.

Apesar de ainda ter-se uma melhora nos resultados, para uma partição de malha 80×80 e número de onda $k = 120$, a formulação PGD proposta neste trabalho, produz resultados melhores do que a formulação DG e, em ambas, a deterioração das soluções podem ser comprovadas, como mostram as Figuras 6.11 e 6.12, para as seções $x = 0,5$ e $y = 0,5$. Ou seja, o afastamento das soluções aproximadas, da solução analítica, fica comprovada.

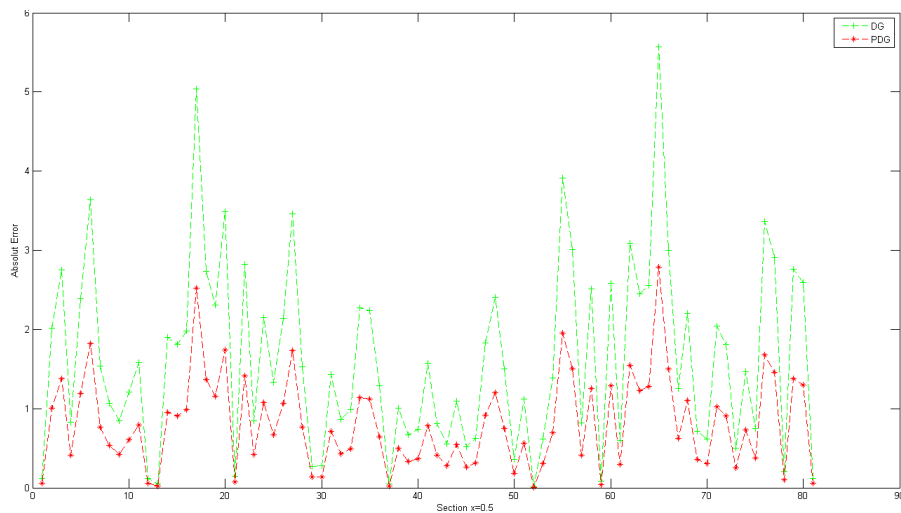


Figura 6.21: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção vertical $x = 0,5$, para uma partição de malha de 80×80 , e número de onda $k = 120$.

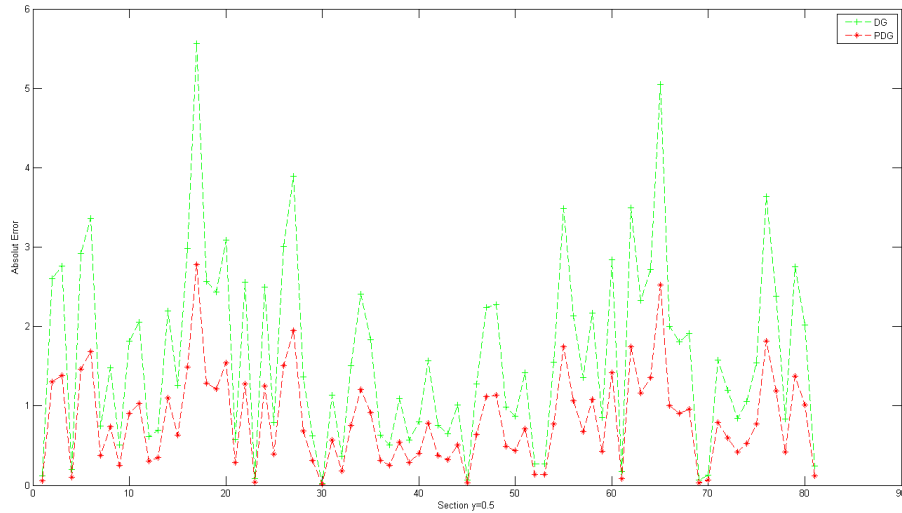


Figura 6.22: Erro absoluto entre as soluções Exata-DG e Exata-PGD para uma seção horizontal $y = 0,5$, para uma partição de malha de 80×80 , e número de onda $k = 120$.

Como já era previsto teoricamente, apesar da melhora da formulação PGD na solução da equação que Helmholtz homogênea, a medida que relaxa a regra empírica “rule of thumb” a solução numérica também deteriora a medida que o número de onda aumenta, para $n_{res} = \frac{\lambda}{h} \approx cte$ mantida constante.

Capítulo 7

Conclusões finais e sugestões para trabalhos futuros

Efetuuou-se neste trabalho um estudo sobre formulações de elementos finitos descontínuo Petrov-Galerkin, para o problemas modelados pela equação de de Helmholtz, homogênea, para diferentes configurações de malha e número de onda. A investigação dividiu-se principalmente em avaliar o comportamento da solução, em função do aumento do número de onda k , para diversas configurações de partição da malha. No Capítulo 4, foi apresentada a formulação PGD, que minimiza erro de fase, bem como o algoritmo para obtenção dos parâmetros α_n^m , para elementos do domínio. No capítulo 5, foram apresentadas as formas da formulação PGD, que minimiza erro de fase, para obtenção dos parâmetros α_n^m , para elementos que possuem uma face e duas faces no contorno, respectivamente. E no Capítulo 6 foram apresentados diversos resultados obtidos, à partir da formulação PGD, para diversas configurações de partição da malha, de modo que atendessem a configuração empírica da “rule of thumb”, como mostrado na Figura 6.1. Objetivos e conclusões dos Capítulos 4 a 6 são descritos nas seções a seguir. Na última seção deste capítulo, sugestões para o desenvolvimento de futuras pesquisas sobre os assuntos estudados são dadas.

7.1 Considerações Finais

Com o objetivo de minimizar erro de fase na formulação PGD, a nova metodologia proposta para obtenção dos parâmetros α_n^m , permitiu a obtenção de resultados satisfatórios. Nesse processo, a condição de manter um número mínimo por comprimento de onda, dada pela regra empírica “rule of thumb”, foi relaxada, como mostrado na Figura 6.1. Sendo assim, o custo computacional pode ser diminuído no que se refere à partição da malha.

Nessa nova metodologia proposta, os parâmetros α_n^m são obtidos via formulação variacional de elementos finitos descontínuos, como apresentado nos Capítulos 4 e 5. Dessa forma, além das matrizes obtidas para minimização serem não singular, como ficou verificado nas extensas simulações, através dos exemplos discutido neste trabalho, é possível, implementar uma versão full paralelizável da formulação, de modo a diminuir ainda mais o custo computacional.

As dificuldades encontradas no processo é devido ao fato de que, a medida que o número de onda aumenta, as funções de ondas tornam-se cada vez mais oscilatórias, trazendo, assim, dificuldades no cálculo dos coeficientes que compõem as matrizes que antecedem a obtenção desses parâmetros α_n^m . Tal fato, o número de onda aumentando, é um fato que impõe dificuldade na solução de qualquer problema numérico, envolvendo qualquer formulação que envolve a equação de Helmholtz. Haja vista que esse, ainda é um problema em aberto, como descrito por ZIENKIEWICZ [5] no campo de pesquisas que envolvem modelagem numérica computacional.

Uma característica observada na formulação PGD é que ela tem semelhanças com a formulação DG. Isso é devido ao fato de que os cálculos dos parâmetros que minimizam o erro de fase serem realizados via formulação descontínuo.

Conforme resumiu-se na seção anterior, conclui-se que este trabalho conseguiu alguns resultados significativos.

Surgem aí outras observações que podem ser relevantes, tais como um melhoramento no método de elementos finitos generalizados para o problema de Helmholtz para números de ondas cada vez maiores, assim como uma nova estratégia para determinação dos parâmetros de estabilização de métodos de elementos finitos descontínuos através da minimização do erro de truncamento da interpolante de soluções fundamentais do problema de Helmholtz homogêneo e problemas de Helmholtz não homogênea.

Essa estratégia não está limitada ao problema de Helmholtz, e pode vir a ser bem explorada em outros problemas que também demandam estabilização, como, por exemplo, problemas de convecção difusão ou de reação difusão predominantemente convectivos ou reativos.

Assim, listam-se algumas destas questões que ficaram em aberto, bem como algumas que não foram implementada, e algumas possíveis extensões dos resultados obtidos:

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Buscar outros métodos de integração numérica para melhorar a aproximação das matrizes que compõem os coeficientes de α_n^m da formulação PGD ENGLISH *et al.* [35];

- Fazer uma análise numérica de todos os métodos propostos, questão ainda em aberto e não resolvida, visto que, mesmo o método de Galerkin, carece de uma análise completa para o problema de Helmholtz em mais de uma dimensão;
- Extensão do método PGD para problemas tridimensionais;
- Aplicar a formulação PGD proposta para problemas da geofísica;
- Extensão do método PGD para problemas não homogêneo com termos de fonte singulares;
- Tratamento de condições de contorno não essenciais na formulação PGD;
- Extensões dos métodos propostos para o problema de Helmholtz vetorial, tal como no eletromagnetismo.
- Adaptatividade, é interessante observar que o funcional de mínimos quadrados usado na determinação dos parâmetros de estabilização da formulação PGD, bem como os seus coeficientes, é um indicador *a priori* de qualidade da aproximação da solução do problema homogêneo.
- Simular outros exemplos com $k > 120$ e malha refinada.
- Implementar a versão full paralelizavel, visto a formulação permite tal fato, de modo a diminuir ainda mais os custos computacionais.
- Simular situações, estabelecendo a direção de onda plana *a priori*, de modo a verificar se a formulação proposta neste trabalho obtém-se o valor nodalmente exato para a solução da equação de Helmholtz, para tal direção, tal como a formulação proposta por BABUŠKA *et al.* [3].

Referências Bibliográficas

- [1] IHLENBURG, F., BABUŠKA, I. “Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number I The h-version of the FEM”, *Comp. Math. Appl.*, v. 30(9), pp. 9–37, 1995.
- [2] IHLENBURG, F. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering Applied Mathematical Sciences vol 132*. New York, Springer Verlag, 1998.
- [3] BABUŠKA, I., IHLENBURG, F., PAIK, E. T., et al. “A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 128, pp. 325 – 359, 1995.
- [4] CHOPRA, A. K. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey. University of California at Berkeley, 1995.
- [5] ZIENKIEWICZ, O. C. “Achievements and some unsolved problems of the Finite element method”, *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 38, pp. 1676–1706, 2000.
- [6] CLAYTON, R. W., ENGQUIST, B. “Absorbing boundary conditions for wave equation migration”, *Geophysics*, v. 45, No. 5, pp. 895 – 901, 1980.
- [7] ZITELLI, J., D. L. G. J. P. D. C. V. M. “A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. Part IV: Wave propagation problems. J. Comp. Phys. YEAR = 2011, VOLUME = 230, PAGES = 2406–2432”, .
- [8] BABUŠKA, I. M., SAUTER, S. A. “Is the Pollution Effect of the FEM Avoidable for the Helmholtz Equation Considering High Wave Numbers”, *Soc for Ind and App Math Stab*, v. 42 No 3, pp. 451–484, 2000.
- [9] BABUŠKA, I., SAUTER, S. A. “Is the pollution effect of the FEM avoid able for the Helmholtz equation considering high wave numbers”, *SIAM J. Num. Anal.*, v. 34, pp. 2392 – 2423, 1997.

- [10] BABUŠKA, I. M., SAUTER, S. A. “Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave numbers”, *SIAM J Numer*, v. 34, pp. 2392–2423, 1997.
- [11] ALVAREZ, G. B., LOULA, A. F. D., DO CARMO, E. G. D., et al. “A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 195, pp. 4018 – 4035, 2006.
- [12] DO CARMO, E. G. D., ALVAREZ, G. B., LOULA, A. F. D., et al. “A nearly optimal Galerkin projected residual finite element method for Helmholtz problem”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 197, pp. 1362 – 1375, 2008.
- [13] LOULA, A. F. D., FERNANDES, D. T. “A quasi optimal Petrov Galerkin method for Helmholtz problem”, *Int. J. Numb. Meth. Eng.*, v. 80, pp. 1595 – 1622, 2009.
- [14] KAMPANIS, N. A., DOUGALIS, V. A., EKATERINARIS, J. A. *Effective Computational Methods for Wave Propagation*. Berlin, Germany, by Taylor and Francis Group LLC Chapman and Hall CRC is an imprint of Taylor Francis Group an Informa business Numerical Insights Volume 5, 2008.
- [15] DOUGLAS, J. J., DUPONT, T. *Interior Penalty Procedures for Elliptic and Parabolic Galerkin Methods*. Berlin, Lecture Notes in Physics Springer Verlag, 1976.
- [16] ARNOLD, D. N. “An interior penalty finite element method with discontinuous elements”, *SIAM J Numer Anal.*, v. 19 (4), pp. 742 – 760, 1982.
- [17] CHANG, C. L. “A least squares finite element method for the Helmholtz equation”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 83(1), pp. 1 – 7, 1990.
- [18] HARARI, I., HUGHES, T. J. R. “Galerkin least squares finite element methods for the reduced wave equation with non reflecting boundary conditions in unbounded domains”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 98, pp. 411 – 454, 1992.
- [19] MELENK, J. M. *On Generalized Finite Element Methods*. Tese de Doutorado, University of Maryland at College Park, Maryland USA, PhD thesis, 1995.
- [20] MELENK, J., BABUSKA, I. “The partition of unity finite element method basic theory and applications”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 139, n. 1 - 4, pp. 289 – 314, 1996.

- [21] THOMPSON, L. L., PINSKY, P. M. “A Galerkin least squares finite element method for the two dimensional Helmholtz equation”, *Int. J. Numb. Meth. Eng.*, v. 38, pp. 371 – 397, 1995.
- [22] CUMMINGS, P. *Analysis of Finite Element Based Numerical Methods for Acoustic Waves, Elastic Waves and Fluid Solid Interactions in the Frequency Domain PhD thesis*. Tese de Doutorado, The University Tennessee, Tennessee, March 2001.
- [23] BABUŠKA, I., BANERJEE, U., OSBORN, J. “Generalized finite element method main ideas results and perspective”, *Inter J of Comp. Methods*, v. 1(1), n. 3, pp. 67 – 103, 2004.
- [24] AINSWORTH, M., MONK, P., MUNIZ, W. “Dispersive and dissipative properties of discontinuous Galerkin finite element methods for the second - order wave equation.” *J Sci Comp.*, v. 27, pp. 5 – 40, 2006.
- [25] CHUNG, E. T., ENGQUIST, B. “Optimal discontinuous Galerkin methods for wave propagation”, *SIAM J Numer Anal*, v. 44(5), pp. 2131 – 2158, 2006.
- [26] PERUGIA, I. “A note on the discontinuous Galerkin approximation of the Helmholtz equation preprint”, *Dipartimento di Matematica Università di Pavia*, v. 1, pp. 1 – 3, 2006.
- [27] CUMMINGS, P., FENG, X. “Sharp regularity coefficient estimates for complex valued acoustic and elastic Helmholtz equations”, *M3AS*, v. 16, pp. 139 – 160, 2006.
- [28] HETMANIUK, U. “Stability estimates for a class of Helmholtz problems”, *Commun Math Sci*, v. 5(3), pp. 665 – 678, 2007.
- [29] SHEN, J., WANG, L. “Analysis of a spectral-Galerkin approximation to the Helmholtz equation in exterior domains”, *SIAM J Numer Anal*, v. 5, pp. 1954 – 1978, 2007.
- [30] FENG, X., WU, H. “Discontinuous Galerkin Methods for the Helmholtz Equation with Large Wave number”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 47, pp. 1 – 32, 2009.
- [31] STROUBOULIS, T., HIDAJAT, R., BABUŠKA, I. “The generalized finite element method for Helmholtz equation. Part II: Effect of choice of handbook functions, error due to absorbing boundary conditions and its assessment”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 197, pp. 364–380, 2008.

- [32] HESTHAVEN, J. S., WARBURTON, T. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods; Algorithms, Analysis, and Applications*. Street, New York, NY, Spring, 2008.
- [33] DI PIETRO, D. A., ERN, A. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, v. 69. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [34] FENG, X., KARAKASHIAN, O., XING, Y. *Recent Developments in Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Partial Differential Equations: The IMA Volumes in Mathematics and its Applications Volume 157*. New York, Springer International Publishing Switzerland, 2014.
- [35] ENGQUIST, B., FOKAS, A., HAIRER, E., et al. *Highly Oscillatory Problems*, v. 366. London Mathematical Society Lecture Note Series, 2009.
- [36] FERNANDES, D. T. *Métodos de Elementos Finitos e Diferenças Finitas para o Problema de Helmholtz*. Tese de Doutorado, LNCC, Rio de Janeiro, RJ, March 2009.
- [37] ALVAREZ, G. B., CARMO, E. G. D., ROCHINHA, F. A., et al. “On Galerkin projected residual method GPR for two scalar and linear second order partial differential equations Helmholtz and diffusive reactive singularly perturbed problems”, *XXXI CNMAC Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, v. 1, pp. 567 – 573, 2008.
- [38] GRAFF, K. F. *Wave Motion in Elastic Solids*. New York, Dover Publications Inc, 1991.
- [39] CARCIONE, J. M. *Handbook of Geophysical Exploration Seismic Exploration Wave Fields in Real Media Wave Propagation in Anisotropic Anelastic and Porous Media*. New York, Elsevier Science Vol 31, 2001.
- [40] PUJOL, J. *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*, v. 366. Cambridge University Press, 2009.
- [41] SENA, A. *Elastic Wave Propagation in Anisotropic Media: Source Theory, Traveltime Computations and Migration*. Tese de Doutorado, Rio de Janeiro, RJ, Abril 1992.
- [42] LANDAU, L., LIFSHITZ, E. *FLUID MECHANICS*. Institute of Physical Problems U S S R Academy of Sciences, Pergamon Books Osford New York, 1987.
- [43] WOLF, J. P. *The Scaled Boundary Finite Element Method*. England, John Wiley and Sons Ltd, 2003.

- [44] BASTOS, J., SADOWSKI, N. *Electromagnetic modeling by Finite Element Methods*. USA, Marcel Dekker, 2003.
- [45] KONG, J. A. *Electromagnetic Wave Theory*, v. 1. Jhon Wiley and Sons, 1986.
- [46] KUNDU, P. K., COHEN, I. M. *Fluid Mechanics*, v. 4 th. Fourth Edition Elsevier Inc, 2008.
- [47] GREENBERG, M. *Advanced Engineering Mathematics*. New Jersey, Prentice Hall Second Edition, 1998.
- [48] SCHEY, H. *Div Grad Curl and all that on vector calculus an informal text*. New York London, W Norton and Company Third Edition, 1997.
- [49] BRANDWOOD, D. *Fourier Transforms in Radar and Signal Processing*. 1 ed. Boston, Artech House, 2003.
- [50] KAUPPINEN, J., PARTANEN, J. *Fourier Transforms in Spectroscopy*. 1 ed. Berlin GmbH Berlin Federal Republic of Germany, Wiley Vch Verlag, 2001.
- [51] TANG, K. T. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3 Fourier Analysis Partial Differential Equations and Variational Methods*. Berlin Heidelberg, Springer Verlag, 2007.
- [52] BEER, F. P., JOHNSTON, J. E. R., MAZUREK, D. F., et al. *Vector Mechanics For Engineers Statics and Dynamics*. 2010, McGraw-Hill, 9th Edition, 1992.
- [53] HALLIDAY, D., R. R. E. W. J. *Fundamentos de Física – Vol.2 (Gravitação, Ondas e Termodinâmica)*, 9ª. Edição. Rio de Janeiro, RJ. CEP 20040-040, In John Wiley Sons, Inc., 2011.
- [54] SINGER, I., TURKEL, E. “High-order finite difference methods for the Helmholtz equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 163, pp. 343–358, 1998.
- [55] WONG, Y. S., LI, G. “Exact Finite Difference Schemes For Solving Helmholtz Equation at any Wavenumber”, *International Journal*, v. Volume 2, Number 1, pp. 91 – 108, 2011.
- [56] CHAGAS, B. O. *Métodos de Elementos Finitos e Diferenças Finitas para a equação de Helmholtz*. Tese de Doutorado, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, August 2013.

- [57] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*, v. 1. Academic Press, 1975.
- [58] DUTRA DO CARMO, E. G., ALVAREZ, G. B., LOULA, A. F. D., et al. “The Galerkin plus multiplies projection of residual method GMPR applied to Helmholtz equation”, *CILAMCE 2006*, v. 1, pp. 1 – 15, 2006.
- [59] DUTRA DO CARMO, E. G., ALVAREZ, G. B., ROCHINHA, F. A., et al. “Galerkin Projected Residual method applied to diffusive reactive problems”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 197, pp. 4559 – 4570, 2008.
- [60] MONK, P., DA-Q., W. “A Lest-squares method for the Helmholtz equation”, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 175, n. 1, pp. 121 – 136, 1999.
- [61] JIANG, B.-N. *The least-Squares Finite Element Method Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*. Cleveland, Springer Verlag, 1998.
- [62] WU, F. S. *The Helmholtz Equation Least Squares Method: For Reconstructing and Predicting Acoustic Radiation*. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2015.
- [63] ALVAREZ, G. B., LOULA, A. F. D., DUTRA DO CARMO, E. G., et al. “A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 195, pp. 4018 – 4035, 2004.
- [64] BOYCE, W., DIPRIMA, R. *Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro, 9 ed: LTC, 2012.
- [65] BABUŠKA, I. M., SAUTER, S. A. “Is the pollution effect of the FEM avoid able for the Helmholtz equation considering high wave numbers”, *University of Maryland at College Park*, v. BN - 1172, pp. 451 – 484, 1994.

Apêndice A

Demonstrações e Definições

Uma função $f : M \rightarrow N$ entre os espaços métricos M e N se diz de lipschitziana, ou seja, satisfaz a condição de Lipschitz, **ou que lipschitz contínua**, se existe uma constante $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para todo x, y em M . Em tal caso k , é chamado de constante de Lipschitz da função f .

Seja Ω um conjunto aberto \mathfrak{R}^n . Dize-se que seu contorno Γ é contínuo (resp. Lipschitz-contínuo, de classe \wp^m , de classe $\wp^{m,1}$ para algum inteiro $m > 0$) se para tal $x \in \Gamma$ existe uma vizinhança de \bigcirc de \mathbf{x} em \mathfrak{R}^n e novas coordenadas ortogonais, $y = (y', y_N)$ onde $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$ de modo que

- onde \bigcirc é um hipercubo na nova coordenada
$$\bigcirc = \{y', \quad -a_j < y_j < a_j \quad 1 \leq j \leq N\}.$$
- Existe um contínuo Lipschitz-contínuo $\wp^m, \wp^{m,1}$, e uma função ϕ definida em $\bigcirc' = \{y', \quad -a_j < y_j < a_j \quad 1 \leq j \leq N-1\}$ que satisfaz $|\phi(y')| \leq \frac{a_N}{2} \quad \forall y' \in \bigcirc'$ e $\Omega \cap \bigcirc = \{y, y_N < \phi(y')\} \quad \Gamma \cap \bigcirc = \{y', y_N = \phi(y')\}.$

A.1 Soluções 1D da equação de Helmholtz

A equação de Helmholtz homogênea 1D na sua forma forte é uma equação diferencial tipicamente escrita da forma

$$\phi''(x) + k^2\phi(x) = 0 \tag{A.1}$$

onde ϕ'' representa a derivada de segunda ordem na variável espacial. Na busca da solução da EDO (A.1), busca-se duas auto-funções linearmente independentes para compor a solução do problema da forma

$$\phi(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} \tag{A.2}$$

detalhes para busca por autofunções LI's de forma analítica para o problema de Helmholtz 1D e 2D referenciado acima, podem ser encontradas em [64] e TANG [51] e para problemas de valor de contorno 3D, pode ser encontrada via o método da separação de variável, para equação de Helmholtz escrita em coordenadas esféricas em TANG [51].

Como as raízes da equação característica para o problema de Helmholtz são complexas, deve-se usar a relação de Euler-De Moivre

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) \quad (\text{A.3})$$

que de forma simplificada, ou seja, separadas as partes real e imaginária, a parte real pode ser escrita da forma

$$\phi(x) = D \cos(kx) + E \operatorname{sen}(kx) \quad (\text{A.4})$$

como a solução geral do sistema.

O problema descrito pela equação (A.1) quando descrito com suas condições de contorno, representa um problema real bem definido, como por exemplo, um sistema massa mola, na forma

$$\phi'' + k^2\phi = 0 \quad \text{em } \Omega = [a, b] \quad (\text{A.5})$$

com condições de contorno de Dirichlet

$$\phi(0) = a; \quad \phi(b) = b \quad (\text{A.6})$$

A solução analítica para o problema assume a forma

$$\phi(x) = \frac{a \operatorname{sen}(k - kx) + b \operatorname{sen}(kx)}{a \operatorname{sen}(k)} \quad (\text{A.7})$$

A análise numérica do problema de Helmholtz 1D tem como ponto de partida a Equação acima A.7, que é reescrita de uma forma diferente para uma espécie de número de onda discreto, que, de forma simples, é a relação de diferença entre o número de onda que deveria ser, com valor discreto: tal relação de diferença produz um erro. Essa diferença é o que causa o erro de fase, quando usa-se algum método numérico para resolver a equação de Helmholtz.

Uma formulação pioneira que busca mostrar o conceito de número de onda discreto foi apresentada por BABUŠKA e SAUTER [65]. Os autores mostraram, também, uma análise que pode ser classificada como uma formulação de diferenças finitas para o caso 1D. Posteriormente, HARARI e HUGHES [18] mostram uma

formulação de elementos finitos, nodalmente exata para o caso 1D, enquanto ZIENKIEWICZ [5] apresentou alguns dos problemas não resolvidos na área de análise numérica. O objetivo das pesquisas nessa área é uma minimização dos efeitos de propagação do erro de fase, enquanto o problema não tenha uma formulação nodalmente exata, para qualquer dimensão de interesse.

A.2 Soluções 2D e 3D da equação de Helmholtz

Soluções da equação da onda na forma de ondas planas, para ondas planas que apresentam frequência e amplitude constantes, além de terem uma direção especificada, assim ditas não dispersivas. A solução é obtida através do método de separação de variáveis, aplicado ao sistema de coordenadas cartesianas. Soluções em outros sistemas de coordenadas, podem ser encontradas em TANG [51]. Considerando a equação de Helmholtz $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$ no \mathbb{R}^3 , o trabalho consiste em buscar soluções não nulas que possam ser escritas da forma $\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$, para o problema, em coordenadas cartesianas: essa expressão é o que caracteriza o método de separação de variáveis. O método de separação de variáveis, busca soluções de forma 'independente' em cada direção, conectadas por constantes que preservam algumas características.

Uma análise completa para problemas de Helmholtz em duas e três dimensões em domínios retangulares pode ser encontrada em CARCIONE [39], GRAFF [38] e TANG [51].

A discontinuous Petrov–Galerkin (DPG) formulation for the FEM applied to the Helmholtz equation for high wavenumbers

R. Dias¹ · E. G. D. do Carmo¹ · W. J. Mansur¹ · C. S. G. Monteiro¹

Received: 27 April 2016 / Accepted: 16 November 2016 / Published online: 26 November 2016
© The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 2016

Abstract Pollution error is a well known source of inaccuracies in continuous or discontinuous FE approaches to solve the Helmholtz equation. This topic is widely studied in a large number of papers, e.g., (Ihlenburg and Babuška, *Comput Math Appl* 30(9):9–37, 1995; Ihlenburg, *Finite element analysis of acoustic scattering applied mathematical sciences*, vol 132. Springer, New York, 1998). Robust methodologies for structured square meshes have been developed in recent years. This work seeks to develop a methodology based on Petrov–Galerkin discontinuous formulation, to minimize phase error for Helmholtz equation for both structured and unstructured meshes. A Petrov–Galerkin finite element formulation is introduced for the Helmholtz problem in two dimensions using polynomial weighting functions. At each node of the triangular mesh, a global basis function for the weighting space is obtained, adding bilinear C^0 Lagrangian weighting function linear combinations. The optimal weighting functions, with the same support of the corresponding global test functions, are obtained after computing the coefficients of these linear combinations attending to optimal

criteria. This is done numerically through a preprocessing technique that is naturally applied to non-uniform and unstructured meshes. In particular, for uniform meshes a quasi optimal interior stencil of the same order of the quasi-stabilized finite element method stencil derived by (Babuška et al., *Comput Meth Appl Mech Eng* 128:325–359, 1995) is obtained. The numerical results indicate a better performance in relation to the classic discontinuous Galerkin method.

Keywords Discontinuous Galerkin · Discontinuous Petrov–Galerkin (DPG) · Helmholtz equation · Discontinuous FEM · Phase error

1 Introduction

A finite element formulation for a scalar linear second-order boundary value problem is introduced. The new method relies on a variational formulation which is obtained following the usual Galerkin variational formulation. The breakthrough consists of projecting the residual in a subspace defined for each element, which gives rise to the name of the method: discontinuous Petrov–Galerkin Formulation (DPG). This subspace is built exploring a priori criteria (either based on the physics or on the underlying mathematics).

The method can be used to stabilize a variety of problems. In this work it is applied to the Helmholtz equation, where standard Galerkin formulations are known to present poor approximations for high wavenumbers. The evolution of the Galerkin finite element method is intimately related to developments in engineering, aeronautics, geophysics and computer sciences. Its application in variety of areas, such as those mentioned previously is testimony of the high

Technical Editor: Kátia Lucchesi Cavalca Dedini.

✉ R. Dias
rodrigodias@coc.ufrj.br; rodrigodias@utp.
brl+55-21-3938-7393

E. G. D. do Carmo
egdcarmo@hotmail.com

W. J. Mansur
webe@coc.ufrj.br

C. S. G. Monteiro
csgm25@yahoo.com.br

¹ Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil