



CARACTERIZAÇÃO DE MODELOS FENOMENOLÓGICOS DE
AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO EM SISTEMAS VIBRATÓRIOS: UMA
ABORDAGEM BAYESIANA

Reniene Maria dos Santos Bandeira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Fernando Alves Rochinha
Daniel Alves Castello

Rio de Janeiro
Setembro de 2019

CARACTERIZAÇÃO DE MODELOS FENOMENOLÓGICOS DE
AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO EM SISTEMAS VIBRATÓRIOS: UMA
ABORDAGEM BAYESIANA

Reniene Maria dos Santos Bandeira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

Prof. Daniel Alves Castello, D.Sc.

Prof. Americo Barbosa da Cunha Junior, D.Sc.

Prof. Fernando Pereira Duda, D.Sc.

Prof. Lavinia Maria Sanabio Alves Borges, D.Sc.

Prof. Ney Roitman, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
SETEMBRO DE 2019

Bandeira, Reniene Maria dos Santos

Caracterização de modelos fenomenológicos de amortecimento viscoelástico em sistemas vibratórios: uma abordagem Bayesiana/Reniene Maria dos Santos Bandeira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XIII, 82 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Fernando Alves Rochinha

Daniel Alves Castello

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 77 – 82.

1. Viscoelasticidade. 2. Variáveis internas. 3. Modelagem Bayesiana. I. Rochinha, Fernando Alves *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*Dedico primeiramente a Deus,
por ser essencial na minha vida
e por sempre estar ao meu lado
em todos os momentos desta
jornada. Aos meus pais em
especial minha mãe pela sua
força pois tanto me apoiou e
sempre acreditou que eu
conseguiria chegar a essa etapa
da vida. Amo você minha mãe.
Dedico também ao meu esposo e
a minha melhor herança,
MARIA CLARA.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelo dom da vida, pela oportunidade de avançar em novos caminhos e conhecimento e por me permitir encerrar mais um ciclo na minha vida.

Ao meu orientador professor Fernando Alves Rochinha pela constante orientação, compreensão e pelo valioso conhecimento transmitido durante a produção deste trabalho.

Ao meu co-orientador professor Daniel Alves Castello, pela confiança, pela oportunidade de trabalhar ao seu lado e por me incentivar nas superações de meus limites.

Aos meus pais que em todo tempo me ensinaram a ousar e permanecer firme em meio às dificuldades e acima de tudo pelo amor incondicional apostando na minha conquista.

Ao meu marido Carlos Bandeira pelo amor, por me incentivar e me ajudar sempre em tudo.

Aos meus irmãos pelo incentivo e por sempre acreditarem no meu sucesso.

Aos meus amigos que me acompanharam e sempre estiveram ao meu lado no decorrer deste curso: Aline Rigueti, Cynthia Guzman, Henrique Costa, Isadora Ruas, Jefferson Coelho, Paulo Büchner e Rafael Basílio. Agradeço pela amizade, troca de ideias, contribuição e apoio. E a todos os colegas do Laboratório de Mecânica dos Sólidos da COPPE/UFRJ.

À secretária do curso de Engenharia Mecânica, Vera, pela disponibilidade, auxílio e amizade durante todo esse período.

Agradeço ao programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, por me permitir realizar este trabalho.

Agradeço a todas as pessoas que de uma certa forma fizeram parte de mais essa minha conquista.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CARACTERIZAÇÃO DE MODELOS FENOMENOLÓGICOS DE
AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO EM SISTEMAS VIBRATÓRIOS: UMA
ABORDAGEM BAYESIANA

Reniene Maria dos Santos Bandeira

Setembro/2019

Orientadores: Fernando Alves Rochinha
Daniel Alves Castello

Programa: Engenharia Mecânica

Materiais de amortecimento avançados, devido à sua capacidade de dissipar energia, têm sido cada vez mais empregados no controle de vibração mecânica. A concepção, projeto e operação em tempo real desse tipo de estratégia dependem fortemente de modelagem e simulação computacional. Modelos computacionais, tipicamente, resultam da combinação de princípios físicos (e.g. equilíbrio de momento) com equações fenomenológicas de fechamento (e.g. equações constitutivas). Neste trabalho a atenção foi dedicada às limitações nas previsões de modelos computacionais devido às discrepâncias potenciais relacionadas a essas equações de fechamento. Propomos aqui duas abordagens diferentes, com o objetivo de avaliar a capacidade de modelos constitutivos que empregam variáveis internas para reproduzir a resposta viscoelástica e de amortecimento de sistemas vibratórios submetidos à pequenas deformações. Ambas as abordagens são construídas dentro de configurações bayesianas e diferem na maneira como a discrepância de modelo é introduzida na formulação. No primeiro, empregamos uma hipótese de erro de modelo estocástico incorporado nos parâmetros de amortecimento, denominado de discrepância de modelo. Enquanto no segundo usamos uma formulação mais convencional baseada na hipótese de erro de modelo aditivo, aqui denominada abordagem aditiva, incluído na equação de observação relacionando variáveis de estado a observáveis. Apresentamos os resultados obtidos com exemplos numéricos que ilustram que as formulações propostas estabelecem uma base formal e rigorosa para a realização do estudo, embora também apontem para a necessidade de uma análise mais abrangente, especialmente no que diz respeito à flexibilidade da abordagem de erro de modelo incorporado para acomodar mais modelagem estocástica sofisticada para modelagem de discrepâncias.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

CHARACTERIZATION OF PHENOMENOLOGICAL MODELS OF VISCOELASTIC DAMPING IN VIBRATORY SYSTEMS: A BAYESIAN APPROACH

Reniene Maria dos Santos Bandeira

September/2019

Advisors: Fernando Alves Rochinha

Daniel Alves Castello

Department: Mechanical Engineering

Advanced damping materials, due to their ability to dissipate energy, have been increasingly employed on the vibration control of mechanical vibrations. The conception, design and real-time operation of such sort of strategy heavily relies upon modeling and computational simulation. Computer models, typically, result from the combination of physical principles (e.g momentum balance) with closure phenomenological equations (e.g. constitutive equations). In this work the attention has been devoted to limitations in computer model predictions due to potential discrepancies related to such closure equations. We propose here two different approaches aiming at evaluating the ability of constitutive models employing internal variables to reproduce viscoelastic and damping response of vibrating systems undergoing small deformations. Both approaches are built within Bayesian settings, and they differ in the way model discrepancy is introduced and modeled. In the first one employ a hypothesis of stochastic model error embedded in the damping parameters, while in the second we use a more conventional formulation based on additive model error hypothesis included in the observation equation relating state variables to observables.

We present preliminary results obtained with numerical examples show that the proposed formulations establish a formal and rigorous basis for performing the study, although they also point to the need of a more comprehensive analysis, especially regarding the flexibility of embedded model error approach to accommodate more sophisticated stochastic modeling for the discrepancy modeling.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Motivação e Objetivos	3
1.2 Organização do trabalho	4
2 Modelagem de Materiais Viscoelásticos	6
2.1 Modelos Constitutivos	6
2.1.1 Modelo constitutivos com variáveis internas	13
2.2 Problemas Inversos e Calibração de Modelos	16
2.2.1 Modelagem Bayesiana	17
2.2.2 Calibração: Erro com modelo aditivo	19
2.2.3 Calibração: Erro de modelo encapsulado em parâmetros	22
2.3 Validação	27
3 Modelagem e evolução das variáveis internas	31
3.1 Análise dos modelos	31
3.2 Análise do comportamento dissipativo	33
4 Avaliação dos modelos constitutivos viscoelásticos	41
4.1 Calibração de modelos	44
4.1.1 Resultados da calibração: Erro de modelo aditivo	44
4.1.2 Resultados da calibração: Erro de modelo encapsulado no parâmetro	50
4.2 Resultados da Validação	62
4.3 Resultados da Extrapolação	65
4.4 Análise do comportamento dissipativo	69
5 Conclusões	75
Referências Bibliográficas	77

Lista de Figuras

2.1	Mola elástica linear	7
2.2	Amortecedor viscoso	8
2.3	Mola clássica e amortecedor viscoso em série	9
2.4	Mola clássica e amortecedor viscoso em paralelo.	10
2.5	Mola clássica em paralelo com modelo de Maxwell	10
2.6	Mola clássica em paralelo com modelo de Maxwell	12
2.7	Representação reológica de um modelo dinâmico.	16
3.1	Representação reológica de todos modelos dinâmicos	34
3.2	Resposta a um forçamento periódico	35
3.3	Resposta a um degrau	35
3.4	Transformada Discreta de Fourier (<i>DFT</i>).	36
3.5	Resposta a um estímulo tipo degrau. Sendo $t_f = 75s$	37
3.6	Curva de histerese para uma resposta ao estímulo periódico com $w \lll w_n$	38
3.7	Curva de histerese para uma resposta ao estímulo periódico com $w \ggg w_n$	39
3.8	Representação da dissipação para os modelos	39
4.1	Modelos utilizados na calibração	42
4.2	Modelos utilizados na validação	43
4.3	Força externa periódica - conteúdo frequencial $[0.25 : 0.5] w_n \left(\frac{rad}{s}\right)$	43
4.4	conteúdo frequencial $[2 : 8] w_n \left(\frac{rad}{s}\right)$	44
4.5	Dados utilizados na abordagem aditiva	45
4.6	Evolução da cadeia e a convergência para a média das amostras do parâmetro c_1	47
4.7	Evolução da cadeia e a convergência para a média das amostras do parâmetro c_2	47
4.8	Função de distribuição de probabilidade dos parâmetros identificados c_1 e c_2 .	48
4.9	Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_1 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	49

4.10	Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_2 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	49
4.11	Caso 1: Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado no parâmetro c_1	51
4.12	Caso 1: Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado no parâmetro c_2	52
4.13	Caso 1: Função de distribuição de probabilidade c_1 e c_2	52
4.14	Caso 2: Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado no parâmetro c_1	53
4.15	Caso 2: Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado no parâmetro c_2	53
4.16	Caso 2: Função de distribuição de probabilidade c_1 e c_2	53
4.17	Calibração para caso 1: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_1 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	54
4.18	Calibração para caso 1: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_2 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	55
4.19	Calibração para caso 2: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_1 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	56
4.20	Calibração para caso 2: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_2 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	56
4.21	Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado em k_1 quando k_1 e c_1 são identificados simultaneamente.	57
4.22	Evolução da cadeia dos hiperparâmetro para o erro encapsulado em c_1 quando k_1 e c_1 são identificados simultaneamente.	57
4.23	Evolução da cadeia dos hiperparâmetro para o erro encapsulado em k_2 quando k_2 e c_2 são identificados simultaneamente.	58
4.24	Evolução da cadeia dos hiperparâmetro para o erro encapsulado em c_2 quando k_2 e c_2 são identificados simultaneamente.	58
4.25	Função de distribuição de probabilidade k_1 e c_1	59
4.26	Função de distribuição de probabilidade k_2 e c_2	59
4.27	Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com os parâmetros c_1 e c_2 identificados simultaneamente com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	60

4.28	Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com os parâmetros k_1 e c_1 identificados simultaneamente com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	61
4.29	Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com os parâmetros k_2 e c_2 identificados simultaneamente com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	61
4.30	Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com todos os parâmetros identificados simultaneamente com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	62
4.31	Validação - erro de modelo aditivo: comparando a média preditiva e as amostras resposta (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	63
4.32	Validação - erro de modelo aditivo: comparando a média preditiva e as amostras resposta (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	64
4.33	Validação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva e as amostras resposta (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	64
4.34	Validação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva e as amostras resposta (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	65
4.35	Extrapolação - erro do modelo aditivo: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	66
4.36	Extrapolação - erro do modelo aditivo: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	66
4.37	Extrapolação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	67
4.38	Extrapolação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	67
4.39	Extrapolação - erro do modelo aditivo: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	68
4.40	Extrapolação - erro do modelo aditivo: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	68

4.41	Extrapolação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	69
4.42	Extrapolação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2	69
4.43	Curva de histerese para \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_5 antes da calibração.	70
4.44	Calibração: Curva de histerese (erro de modelo aditivo) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2	70
4.45	Calibração: Curva de histerese (erro de modelo encapsulado em um parâmetro) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2	71
4.46	Curva de histerese para \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_5 na validação.	71
4.47	Validação: Curva de histerese (erro de modelo aditivo) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2	71
4.48	Validação: Curva de histerese (erro de modelo encapsulado em um parâmetro) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2	72
4.49	Curva de histerese para \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_5 na extrapolação.	72
4.50	Extrapolação: Curva de histerese (erro de modelo aditivo) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2	73
4.51	Extrapolação: Curva de histerese (erro de modelo encapsulado em um parâmetro) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2	73
4.52	Curva de histerese para \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_5 na extrapolação.	73
4.53	Extrapolação: Curva de histerese (erro de modelo aditivo) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2	73
4.54	Extrapolação: Curva de histerese (erro de modelo encapsulado em um parâmetro) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2	74

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do modelo de vibração	32
4.1	Resultdos das duas calibrações: uma o erro de modelo aditivo está associado ao parâmetro c_1 e a outra o erro de modelo aditivo está associado ao parâmetro c_2	46
4.2	Caso 1: Distribuição da priori baseada no valor nominal de todos os parâmetros	51
4.3	Caso 2: Distribuição da priori baseada no valor nominal dos parâmetros de amortecimento c_1 e c_2	51
4.4	Distribuição da prior baseada no valor nominal de todos os parâmetros	57

Capítulo 1

Introdução

Em diversas aplicações, estruturas mecânicas atuam expostas a carregamentos que, em certas condições, podem causar níveis críticos de vibração, conduzindo a deslocamentos excessivos e até mesmo falhas estruturais. Neste contexto, surge a necessidade de reduzir estes níveis de vibração. Uma das formas é adicionar a estas estruturas elementos dissipativos tais como dispositivos que utilizam materiais viscoelásticos. De acordo com Moschen [1], o controle de ruídos e vibrações pela introdução de amortecimento é uma prática importante e cada vez mais comum.

Atualmente existe uma utilização progressiva de materiais viscoelásticos quando se trata de controlar vibrações e ruídos em diversas áreas. De acordo com Castello *et al.* [2], esses materiais melhoram o nível de amortecimento em estruturas sendo utilizados frequentemente nas indústrias automotivas, espaciais e de energia.

Santos [3] relata uma investigação das propriedades e o desempenho de um amortecedor viscoelástico quando instalado em edifícios altos que oscilam em decorrência da ação de ventos. Silva [4] caracterizou materiais viscoelásticos para aplicar em estruturas tipo viga de sanduíches com o objetivo de atenuar problema dinâmico relacionado a vibrações induzidas por vórtices em risers rígidos. Marra [5] implementou um sistema de controle de vibrações, em uma viga metálica excitada por um sinal de banda larga de frequência, baseado em neutralizadores viscoelásticos e filtros adaptativos. Diacenco [6] modelou uma estrutura composta laminada incorporando materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações e ruídos. Ribeiro *et al.* [7] apresentaram uma metodologia para um projeto ideal de suportes viscoelásticos para máquinas rotativas, visando minimizar a resposta de frequência de desequilíbrio do sistema. Um estudo teórico em relação às propriedades dinâmicas de materiais viscoelásticos de amortecimento e método para calcular a característica dinâmica de estruturas contendo estes materiais foi descrito por Zhou *et*

al. [8].

Com relação à definição das características destes materiais, uma das mais importantes é o efeito de memória, ou seja, o estado de tensões num dado ponto, para um certo instante de tempo, não depende somente do estado de deformações naquele mesmo instante, mas também de toda a história de deformação, sendo a recíproca, por sua vez, também verdadeira. Outra característica desses materiais é o comportamento dissipativo, o que pode ser verificado analisando-se uma curva de tensão-deformação num dado ponto, quando são sujeitos a um carregamento do tipo cíclico.

No que concerne às relações constitutivas de materiais complexos, sua caracterização e a construção de modelos matemáticos precisos para serem usados como equações de fechamento têm se revelado uma tarefa difícil e dispendiosa. Isso aponta para a conveniência de se adotar modelos simplificados que possibilitem descrever o comportamento destes materiais. Inevitavelmente, isso leva a limitações na estimação do impacto em previsões fornecidas pelos modelos.

A caracterização experimental do comportamento dinâmico do material requer a utilização de ensaios experimentais em diversas condições de operação. No contexto de modelagem computacional, as informações oriundas da caracterização experimental servem de base para a elaboração de propostas para as equações constitutivas do material em análise. Adicionalmente, destaca-se, também, a necessidade de se calibrar o modelo constitutivo adotado. Em linhas gerais, o processo de calibração [9] consiste em ajustar parâmetros do modelo computacional a fim de melhorar a concordância entre os dados experimentais e previsões computacionais. Denomina-se na literatura, como problemas inversos, esta estimação de parâmetros.

Uma das técnicas utilizada para estimação dos parâmetros é a inversão bayesiana [10] que resulta em uma descrição probabilística da solução do problema. Neste caso, esta técnica pode ser entendida como o estudo das causas de acordo com o fenômeno a partir das observações, em que todas as variáveis e parâmetros envolvidos no processo de modelagem são modeladas como variáveis aleatórias [10] e suas incertezas são quantificadas a partir de distribuições de probabilidade. Os desenvolvimentos de técnicas computacionais de amostragem baseadas no Método de Monte Carlo com cadeia de Markov (MCMC) têm impulsionado a popularização da inferência Bayesiana em engenharia. A seguir são apresentados alguns trabalhos relativos à aplicação da inferência Bayesiana em dinâmica de estruturas e viscoelasticidade.

Worden e Hensman [11] tinham como objetivo fornecerem uma visão geral das possíveis

vantagens de adotar uma abordagem Bayesiana para um sistema de identificação não linear em dinâmica estrutural. Zhang *et al.* [12] focaram em identificar o módulo de Young de uma camada de polímero viscoelástico em uma estrutura laminada através de uma abordagem Bayesiana, explorando a função de densidade e probabilidade a posteriori através do uso do Método de Monte Carlo com cadeia de Markov.

Figueiredo *et al.* [13] propuseram um algoritmo com uma abordagem bayesiana, fundamentado no Método de Monte Carlo com cadeia de Markov (MCMC), que fosse capaz de detectar danos estruturais com base em dados de respostas diárias (dados de vibrações) e mesmo sob eventos anormais causados pela variabilidade da temperatura. O objetivo principal era estudar os danos recorrentes nas estruturas de pontes devido a efeitos da variabilidade operacional e ambiental afim de buscar garantir a integridade estrutural de pontes.

Green *et al.* [14] utilizaram inferência bayesiana com dados experimentalmente obtidos para identificação de sistemas estruturais dinâmicos. A partir de uma grande quantidade de dados experimentais, selecionaram subconjuntos para identificar qual o efeito dos mesmos sobre a incerteza do parâmetro. O resultado é uma estrutura que pode ser usada para selecionar subconjuntos altamente informativos a partir de grandes quantidades de dados experimentais.

Green e Worden [15] destacam os princípios gerais e a importância de uma abordagem Bayesiana para identificação de sistema e demonstram os benefícios ao tentar identificar os modelos de sistemas dinâmicos não lineares na presença de incerteza. Os autores também destacam a importância dos métodos de Monte Carlos com cadeias de Markov na determinação da solução dos problemas inversos estocásticos.

Neste contexto, dada a complexidade inerente ao processo de construção de modelos para a descrição do comportamento de materiais avançados, envolvendo incertezas nos dados experimentais e erros associados à descrição da capacidade dissipativa destes materiais, destaca-se o interesse na investigação de estratégias estocásticas capazes de avaliar erros de modelagem em viscoelasticidade.

1.1 Motivação e Objetivos

Este trabalho está centrado na modelagem do comportamento viscoelástico [2, 16] através do uso de variáveis internas [17, 18]. Embora os modelos de variáveis internas não estejam sendo amplamente utilizados modelos de viscoelasticidade baseados em variáveis

internas ganharam muita atenção devido à sua capacidade em reproduzir aspectos fundamentais de comportamento dissipativo e por serem convenientes para implementação computacional. Por outro lado, o fato dessas variáveis internas não serem observáveis, de fato são um expediente de modelagem que exige certo nível de abstração trazendo, assim, dificuldades na compreensão do papel de cada uma delas e para calibração. Este trabalho dedica-se à construção de um arcabouço baseado em uma perspectiva bayesiana que auxilie estas tarefas.

Em particular, o foco central é analisar o papel desempenhado pela escolha do número de variáveis internas. Tipicamente, modelos dotados de um maior número de variáveis internas estão melhor equipados para reproduzir o comportamento viscoelástico. Por outro lado, um alto número de variáveis internas implica um aumento nos custos computacionais, o que pode ser complicado quando aplicações transitórias reais estão envolvidas [19].

Para lidar com a necessidade de uma escolha ótima do número de variáveis que visam um equilíbrio entre custos computacionais e acurácia, o propósito deste trabalho é apresentar uma estratégia de calibração Bayesiana para entender como identificar erros de modelo devido à adoção de um número reduzido de variáveis internas e, também, propor correções que podem ajudar na avaliação do impacto no resultado do modelo para fornecer previsões confiáveis.

Propomos duas abordagens diferentes para a calibração. O primeiro segue a formulação tradicional baseada na introdução de uma discrepância de modelo aditivo na equação de observação [20] e [21]. A segunda abordagem baseia-se na ideia de que o modelo após a calibração deve levar em consideração as restrições físicas. Esse requisito pode ser atendido incorporando a discrepância do modelo nos parâmetros do modelo original [22].

1.2 Organização do trabalho

No capítulo 2 é apresentada uma arcabouço teórico referente aos temas abordados, focando principalmente nos modelos constitutivos com descrição detalhada das equações governantes com ênfase nos modelos de variáveis internas, introduzimos a formulação Bayesiana para os dois tipos de abordagens aplicadas na calibração do modelo adotado.

No capítulo 3 aborda-se a descrição dos modelos complexos de variáveis internas assim como as equações governantes com o intuito de investigar o desempenho das variáveis in-

ternas e associar o amortecimento na resposta dinâmica de um sistema de vibração. Nesta fase do trabalho os resultados numéricos encontrados levam a uma discussão preliminar sobre o papel das variáveis internas na resposta amortecida do sistema e servirão como base para direcionar as abordagens aplicadas para a formulação bayesiana

No capítulo 4 são apresentados os resultados advindos das duas abordagens utilizadas, abordagem aditiva e discrepância de modelos. Devido às diversas incertezas que estão presentes na modelagem computacional, etapa da calibração, é aplicada a técnica de propagação de incertezas via método de Monte Carlo para etapa de validação e extrapolação.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões do presente trabalho com um resumo das principais descobertas.

Capítulo 2

Modelagem de Materiais Viscoelásticos

A construção de modelos computacionais baseados em física (physic based models) conjuga princípios fundamentais, como conservação de massa e energia, com equações de fechamento. Estas últimas, tipicamente, são introduzidas e derivadas a partir da observação de fenomenologias, como é o caso das equações constitutivas. Assim, do ponto de vista da robustez, sob uma perspectiva de modelagem, indica que tais equações de fechamento constituem, potencialmente, fontes de incertezas.

Neste capítulo, apresentam-se os fundamentos formais que permitirão explorar como essas incertezas acabam por impactar a capacidade preditiva dos modelos computacionais. Primeiro os aspectos centrais dos modelos constitutivos que servem de base para essas equações de fechamento são apresentados. Em seguida, o problema de calibração a partir da estatística de Bayes é estabelecido no contexto do modelo com variáveis internas.

2.1 Modelos Constitutivos

Materiais avançados aplicados para amortecimento, devido à sua capacidade de dissipar energia mecânica, têm sido cada vez mais empregados para mitigar os danos em dispositivos que operam em ambientes agressivos. Este dano é produzido por vibrações induzidas que podem ser atenuadas pelo controle estrutural ativo ou passivo. A concepção, o projeto e a operação desse tipo de estratégia dependem muito da modelagem e de simulação computacional.

A caracterização de materiais utilizados em aplicações motivou muitos pesquisado-

res a investigar modelos matemáticos que expressam o comportamento real de sistemas estruturais. No entanto, devido à complexidade da maioria dos materiais usados, caracterizar e construir modelos para esses materiais com precisão é uma tarefa difícil. Assim, é conveniente adotar modelos simplificados que representem as principais características e forneçam soluções próximas do comportamento real dos materiais.

Vários modelos clássicos têm sido usados no estudo do comportamento de materiais viscoelásticos. Embora os modelos sejam puramente fenomenológicos, eles são importantes para prever a resposta do material sob condições de ensaio de fluência, relaxação e até sob situações de carregamentos complexos [23].

O comportamento dos materiais viscoelásticos tem como característica essencial o efeito de memória [24]. Isto significa, por exemplo, que materiais viscoelásticos, quando submetidos à tensão constante, produzem deformações que crescem com o tempo, ou quando submetidos à deformação constante, passam a resultar em tensões decrescentes com o tempo. Estes fenômenos são chamados, respectivamente de fluência e relaxação.

Usando várias combinações de elementos do tipo molas e amortecedores viscosos, em série e/ou paralelo, pode-se construir uma grande variedade de modelos para a descrição do comportamento de materiais viscoelásticos. Os modelos básicos possuem relações matemáticas bastante simples. A partir destes modelos é feita uma combinação entre eles para se obter representações mais complexas que retratam de forma mais real o comportamento de um material. Modelos básicos unidimensionais, que permitem melhor compreender a estrutura dos modelos constitutivos, são apresentados a seguir.

O **comportamento elástico** é representado por uma mola ideal de massa desprezível e perfeitamente linear. Ou seja, a mola de comportamento linear é um análogo mecânico utilizado para representar uma resposta unidimensional de um sólido elástico.

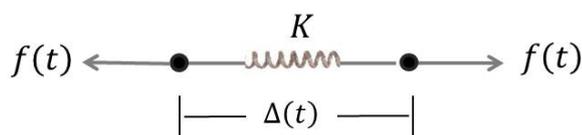


Figura 2.1: Mola elástica linear

Para uma carga aplicada repentinamente, a mola reage deformando-se instantaneamente, e quando a carga é removida reage outra vez instantaneamente, recuperando as dimensões originais, ou seja, há uma relação linear entre a força $f(t)$ e o deslocamento

$\Delta(t)$. É válido ressaltar que a resposta não depende da taxa de solitação.

Na elasticidade linear a relação constitutiva é expressa pela lei de Hooke da seguinte forma:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \quad (2.1)$$

Em que $\sigma(t)$ é a tensão na mola, ε é a deformação proporcional à tensão aplicada e E é a constante de proporcionalidade também conhecida como módulo de elasticidade ou módulo de Young do material.

O **comportamento viscoso** também conhecido como modelo viscoso é representado por um amortecedor, veja Figura (2.2). Ou seja, o amortecedor é um análogo mecânico utilizado para representar uma resposta unidimensional de um fluido Newtoniano.

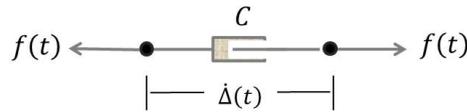


Figura 2.2: Amortecedor viscoso

Este modelo é caracterizado pelo comportamento dependente do tempo, ou seja, mesmo que as solitações sejam constantes, as deformações se alteram no decorrer do tempo.

Existe uma relação entre a força $f(t)$ e a taxa de deslocamento $\dot{\Delta}(t)$. Aplicando-se uma tensão σ nesse elemento, a taxa de deformação é diretamente proporcional à tensão.

Se aplicarmos uma tensão constante σ , a taxa de deformação será constante, de acordo com Equação 2.2. A constante de proporcionalidade μ corresponde à uma propriedade do material denominada viscosidade. Neste caso o material dissipa energia.

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{\mu} \quad (2.2)$$

Os modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt, respectivamente, serão apresentados a seguir e fornecem uma descrição limitada do comportamento mecânico de materiais viscoelásticos,

dado que são modelos mais simples.

No desenvolvimento das equações constitutivas para os modelos são empregados os mesmos conceitos de relações entre força de excitação e resposta para os elementos do sistema mecânico. Para o desenvolvimento da equação de resposta do sistema destes análogos mecânicos considera-se que as forças externas aplicadas são proporcionais à aceleração absoluta da massa, a força que atua sobre um amortecedor viscoso é proporcional à velocidade relativa entre as extremidades do amortecedor e a força atuante na mola elástica é proporcional ao deslocamento relativo das extremidades da mola.

Uma vez que essa relação é estabelecida, uma equação constitutiva é apresentada substituindo-se a força pela tensão e o deslocamento pela deformação.

O **modelo clássico de Maxwell** [25, 26], consiste de uma mola clássica e um amortecedor em série, representando o comportamento de um fluido como ilustrado a seguir:

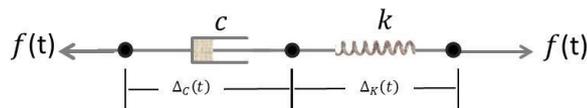


Figura 2.3: Mola clássica e amortecedor viscoso em série

A relação força deslocamento deste modelo é dada pela equação a seguir, em que $\Delta = \Delta_c(t) + \Delta_k(t)$:

$$\dot{f}(t) + \frac{k}{c}f(t) = k\dot{\Delta}(t) \quad (2.3)$$

Por analogia,

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E}{\mu}\sigma(t) = E\dot{\epsilon}(t) \quad (2.4)$$

No modelo clássico de **Kelvin-Voigt** [25, 26], a mola é conectada ao amortecedor em paralelo como mostra a Figura 2.4.

No modelo Kelvin-Voigt a equação diferencial que relaciona força com deslocamento é igual a:

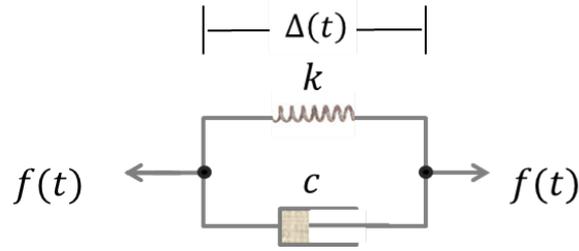


Figura 2.4: Mola clássica e amortecedor viscoso em paralelo.

$$f(t) = c\dot{\Delta}(t) + k\Delta(t) \quad (2.5)$$

Por analogia,

$$\sigma(t) = \mu\dot{\varepsilon}(t) + E\varepsilon(t) \quad (2.6)$$

Estes dois modelos apresentados esquematicamente nas Figuras 2.3 e 2.4 não são eficientes para descrever com precisão o comportamento de um material viscoelástico, ou melhor, constituem representações simples do comportamento viscoelástico e ambos não simulam de forma satisfatória a resposta viscoelástica observada. Contudo, os mesmos podem ser usados para construir modelos de maior complexidade e acurácia, discutidos em seguida.

O **modelo sólido padrão** [26] é representado pela combinação do modelo de Maxwell em paralelo a uma mola clássica.

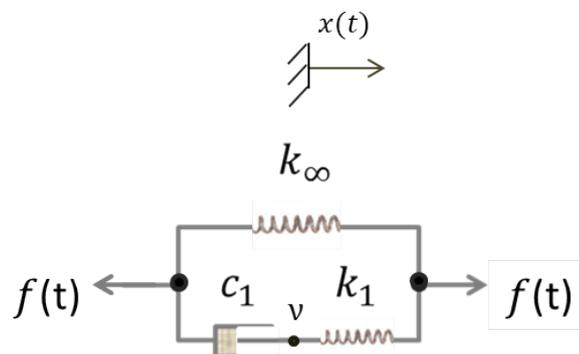


Figura 2.5: Mola clássica em paralelo com modelo de Maxwell

Para escrever a equação constitutiva do modelo sólido padrão é necessário definir as variáveis de deslocamento. A primeira, $x(t)$, representa o deslocamento observável do modelo e a segunda, $\nu(t)$, representa o deslocamento interno do sistema inferior. As relações entre os componentes são escritas na forma:

$$F = k_\infty x(t) + k_1(x(t) - \nu(t)) \quad (2.7)$$

$$c_1 \dot{\nu}(t) = k_1(x(t) - \nu(t)) \quad (2.8)$$

Assim equação diferencial em termos de força e deslocamento deste modelo é representada a seguir:

$$\dot{f}(t) + \frac{k_1}{c_1} f(t) = (k_\infty + k_1) \dot{x}(t) + \frac{(k_\infty k_1)}{c_1} x(t) \quad (2.9)$$

Por analogia, a equação (2.9) pode ser reescrita para descrever a equação constitutiva do modelo.

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{k_1}{c_1} \sigma(t) = (k_\infty + k_1) \dot{\varepsilon}(t) + \frac{(k_\infty k_1)}{c_1} \varepsilon(t) \quad (2.10)$$

O **modelo Maxwell Generalizado** é representado por um arranjo em paralelo de uma mola clássica com mais de um modelo de Maxwell, tratando de um modelo sólido padrão generalizado, ilustrado na Figura 2.6.

As relações constitutivas do modelo de Maxwell Generalizado são representadas nas equações seguir:

$$f(t) = k_0 x(t) - \sum_{i=1}^N k_i \nu_i(t) \quad (2.11)$$

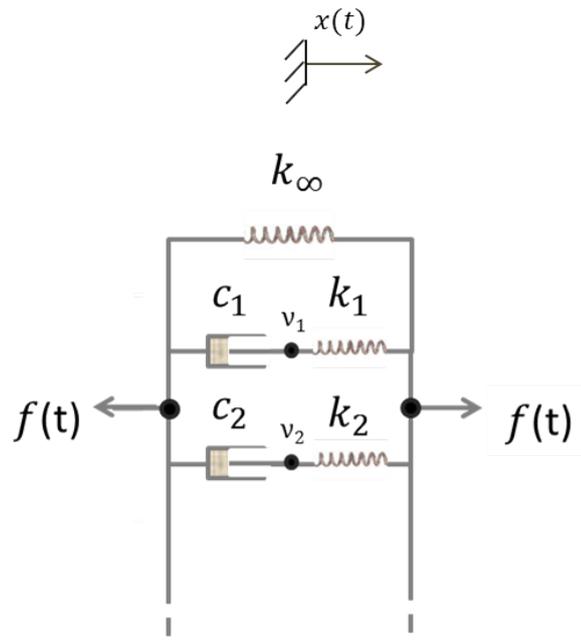


Figura 2.6: Mola clássica em paralelo com modelo de Maxwell

$$\dot{\nu}_i(t) + \frac{\nu_i(t)}{\tau_i} = \frac{x(t)}{\tau_i} \quad (2.12)$$

É importante ressaltar que N é equivalente ao número de elementos tipo Maxwell no modelo.

$$k_0 = k_\infty + \sum_{i=1}^N k_i \quad (2.13)$$

$$\tau_i = \frac{c_i}{k_i} \quad (2.14)$$

Em que τ_i representa o tempo de relaxação [26].

Destaca-se que não existe uma única combinação de molas e amortecedores que representarão uma resposta viscoelástica específica. Combinações diferentes podem representar o mesmo comportamento [24]. Portanto, a definição de um modelo com parâmetros adequados se torna uma tarefa importante para prever adequadamente o comportamento desses materiais.

2.1.1 Modelo constitutivos com variáveis internas

O conceito de variáveis internas não é novo, surgiu na década de 1950 [18], e apenas algumas décadas depois as variáveis internas foram aplicadas com modelos de elementos finitos. A origem da teoria das variáveis internas é baseada no princípio da termodinâmica de processos irreversíveis. Essas variáveis foram adicionadas com a intenção de representar o comportamento de sistemas irreversíveis, tal como em modelos de viscoelasticidade. Os modelos de variáveis internas ganharam muita atenção devido a sua precisão na modelagem do amortecimento do material e em sua capacidade de lidar com a dependência de frequência e temperatura no domínio do tempo.

Destaca-se, abaixo, alguns trabalhos considerados relevantes na modelagem de materiais viscoelásticos

Castello *et al.* [2] utilizaram o modelo constitutivo de variáveis internas na caracterização experimental de uma fita viscoelástica, a qual estava inserida no interior de uma estrutura do tipo viga sanduíche.

Borges *et al.* [16], em continuação ao trabalho de Castello *et al.* [2], utilizaram este modelo constitutivo baseado no conceito de variáveis internas para descrever o comportamento viscoelástico guiados pelo princípio da filosofia de validação e verificação, para validação do modelo viscoelástico de variáveis internas.

Reggio e Angelis [23] desenvolveram um modelo viscoelástico com memória, apresentando as equações de movimento, prevendo além da velocidade e deslocamento, o número de variáveis internas através do método de identificação de sistemas.

A característica básica que reúne esses modelos é a inclusão de variáveis internas capazes de representar a memória viscoelástica de tais materiais [23]. O número de variáveis internas está relacionado à estrutura do material e também ao grau de acurácia desejado [27]. A introdução de variáveis internas na modelagem implica a necessidade de obter parâmetros constitutivos que não sejam mensuráveis diretamente devido à sua natureza intrínseca [2]. Essas variáveis ocultas procuram descrever modos internos de degradação ou dissipação e, assim, são usados viscoelasticidade, elastoplasticidade, mecanismos de dano e adesão [16].

As equações governantes que regulam a dinâmica de um corpo viscoelástico tridimensional, com ênfase no modelo constitutivo que emprega variáveis internas, são exibidas em

uma estrutura Lagrangeana, em que o balanço de massa é naturalmente imposto enquanto o equilíbrio do momentum linear para cada ponto espacial é expresso como

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.15)$$

em que div representa o operador de divergência, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensão, \mathbf{b} são forças de corpo e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o campo de deslocamento. Além disso, $\dot{}$ denota a derivada temporal de uma função e as letras em negrito são reservadas para as variáveis de vetores e tensores.

Completa-se o modelo prescrevendo condições de contorno e condições iniciais e introduzindo relações constitutivas representadas genericamente como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{M}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\gamma}_r) \quad r = 1, \dots, N \quad (2.16)$$

em que \mathcal{M} representa uma função potencialmente não linear tendo como argumentos variáveis de estado como o deslocamento \mathbf{u} , o gradiente de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ e sua taxa de variação temporal $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Além das variáveis internas, $\boldsymbol{\gamma}_r$. O inteiro N indica o número de variáveis internas. A introdução de variáveis internas, que não são diretamente observáveis ou controláveis, ampliando o espaço de estados, é uma estratégia de modelagem para permitir a descrição do comportamento complexo de alguns materiais. Rotas diferentes podem ser perseguidas com o mesmo objetivo, mas geralmente envolvendo procedimentos computacionalmente dispendiosos. Equações para a evolução de variáveis internas são construídas combinando observações fenomenológicas a partir de uma estrutura termodinâmica rigorosa [28]. Aqui, estamos interessados no uso de variáveis internas para capturar o comportamento viscoelástico dissipativo, conforme detalhado na seqüência.

Um aspecto central na resposta dinâmica viscoelástica de um sólido é a sua capacidade de dissipar energia mecânica ao longo do movimento. Estamos particularmente interessados na dinâmica e na vibração de sistemas projetados. Modelos constitutivos baseados em variáveis internas mostraram sua adequação em tais cenários [2, 17, 18, 18, 27, 29, 30].

Restringimos nossa modelagem a corpos submetidos a pequenas deformações, o que torna plausível a adoção de relações lineares. Abaixo, com o intuito de tornar a apresentação mais clara, apresentamos as equações constitutivas para corpos unidimensionais em movimento uniaxial (letras em negrito não são mais necessárias, pois os tensores são reduzidos a escalares).

$$\sigma = E \varepsilon + \sum_{r=1}^N E_r (\varepsilon - \gamma_r) \quad (2.17)$$

em que: $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ é a deformação e E e E_r são parâmetros constitutivos de elasticidade.

O modelo constitutivo na Eq. (2.17) é complementado com equações lineares para a evolução das variáveis internas $\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ como mostrado a seguir.

$$\eta_r \dot{\gamma}_r = E_r (\varepsilon - \gamma_r) \quad (2.18)$$

Em que η_r é um parâmetro constitutivo da viscosidade. Além disso, definimos o tempo de relaxação $\tau_r = \frac{\eta_r}{E_r}$. Portanto, a resposta constitutiva do material é definida em cada ponto material por $1 + 2N$ parâmetros, a saber: E, E_1, \dots, E_N e τ_1, \dots, τ_N .

Como mencionado antes, a fenomenologia de tais equações constitutivas pode ser associada a modelos mecânicos simples compostos por molas e amortecedores [28], recuperando modelos clássicos de vibração. Essa analogia permite que a intuição física desempenhe um papel na análise do modelo, mesmo que as variáveis internas não sejam físicas nem observáveis. Além disso, podemos aprofundar a compreensão da resposta viscoelástica levando em consideração um cenário restrito em que a deformação corporal é homogênea. Nesse caso, o próprio sistema é reduzido a um sistema que contém um grau de liberdade observável, análogo à situação esquematicamente ilustrada na Figura 2.7 que apresenta um arranjo com N elementos de Maxwell em paralelo com um elemento de mola clássico. Cada elemento de Maxwell está associado a uma variável interna e será, para fins de interpretação, também chamado de modo de dissipação interna. O conjunto de todos esses modos é suposto para uma faixa de escalas de tempo, envolvidas na dissipação de energia ao longo do movimento.

As variáveis internas estão associadas ao mecanismo de dissipação viscoelástico [16]. Logo, vale destacar que a inclusão das variáveis internas sempre dissipa energia, fato comprovado segundo a termodinâmica de processos irreversíveis. Dessa forma, como a tensão; Eq. (2.17) depende das variáveis internas, as quais representam o fenômeno dissipativo no interior do material, estas naturalmente contribuem para a dinâmica do sistema [2].

Portanto, este capítulo mostra, de maneira objetiva e resumida, as leis constitutivas que regem os modelos mecânicos, ou seja, como se relacionam as grandezas quantificadoras

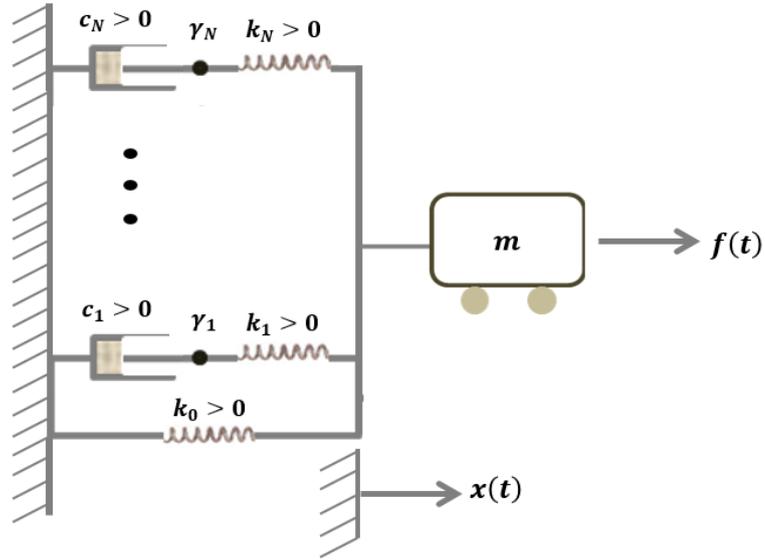


Figura 2.7: Representação reológica de um modelo dinâmico.

tensão e deformação dependendo do tipo do material ou classe de material.

Em síntese, inúmeros materiais apresentam comportamento viscoelástico. No geral, o modelo mais adequado para cada tipo de material pode ser obtido pela combinação de elementos simples, como amortecedores viscosos e molas elásticas, na formação de modelos mais complexos.

Os modelos baseados em física empregados em simulações computacionais são, tipicamente, derivados da composição de princípios físicos básicos, como as equações de conservação, com relações fenomenológicas de fechamento, como equações constitutivas. Os primeiros são considerados confiáveis e, no contexto de Quantificação de Incertezas (UQ), discrepâncias potenciais entre previsões de modelos e observações da resposta dos sistemas reais são frequentemente atribuídas a limitações nas equações de fechamento [31]. Portanto, neste trabalho foram dedicados esforços para melhorar a precisão e entender o impacto das incertezas relacionadas nas previsões do modelo.

2.2 Problemas Inversos e Calibração de Modelos

Um problema inverso pode ser entendido como o estudo das causas de um fenômeno ou as características de um modelo a partir das observações dos efeitos. Na verdade, problemas inversos combinam, de forma natural e rigorosa, simulação computacional e experimentos a fim de que o máximo de informação sobre o problema físico em questão seja obtido [32].

Problemas diretos são classificados, na maioria das vezes, como *bem-postos* o que implica na existência, unicidade e estabilidade de sua solução com relação aos dados de entrada. Por outro lado, os problemas inversos são classificados matematicamente, no geral, como *mal-postos* [33]. A solução do problema inverso é normalmente instável, o que significa que pequenas oscilações nos dados de entrada causam grandes oscilações na solução final.

Para o problema inverso, a resposta do sistema é conhecida, em geral parcialmente, entretanto, alguns parâmetros, condições iniciais/contorno ou, até mesmo, a excitação de entrada pode ser desconhecidos. Neste caso, as medições serão utilizadas para se determinar os parâmetros, modelos ou funções desconhecidas [30].

Neste trabalho é utilizada uma modelagem bayesiana que fornece uma estrutura conveniente para solução de problemas inversos e para fins de quantificação de incertezas. Uma clara vantagem desta técnica é que esta gera, de forma natural, meios e dados para análises de quantificação de incertezas. Assim, o resultado de qualquer estimativa bayesiana de parâmetros é basicamente uma medida de incerteza sobre um conjunto de valores admissíveis [34].

A proposta deste trabalho é analisar a discrepância de modelos e para isso serão utilizadas duas estratégias de modelagem, baseadas na abordagem bayesiana para a calibração de modelos. A primeira, mais tradicional, denominada aqui de erro de modelo aditivo [20, 21] e a segunda abordagem baseia-se no erro encapsulado em parâmetros [22].

2.2.1 Modelagem Bayesiana

Modelos computacionais e sua capacidade de fornecer previsões confiáveis são úteis para aprimorar o projeto de sistemas de engenharia, apoiar a tomada de decisões ou melhorar a compreensão do comportamento de sistemas complexos.

Portanto, esses modelos devem ser avaliados e aprimorados antes de serem utilizados,

explorando informações disponíveis obtidas por meio de experimentos controlados ou coletados em campo. A calibração é considerada uma etapa essencial dentro deste processo e constitui uma formulação de inversão que concilia essa informação com os parâmetros e formas do modelo e avalia a confiabilidade do modelo resultante. Aqui, adotamos uma perspectiva bayesiana que permite estimar as incertezas inevitáveis sobre as previsões após os processos de calibração.

A estatística bayesiana tem sido explorada na forma de um arcabouço teórico e conceitual que permite estabelecer uma estrutura sistemática para a construção de modelos computacionais. Na verdade, isso vai muito além da calibração e validação de um único modelo. Em uma estrutura bayesiana, os parâmetros são considerados, desde o início, variáveis aleatórias e as incertezas são, portanto, encapsuladas em sua estrutura probabilística. Especificamente, pensamos em duas fontes primárias de incertezas associadas aos modelos preditivos. A primeira está relacionada com a estimativa de parâmetros dentro da calibração. Tal avaliação geralmente emprega técnicas experimentais padrão [35] que implicam algum nível de incerteza devido ao ruído em equipamentos, medições indiretas e escassas, ou extrapolações provenientes de diferenças entre os cenários experimentais e aqueles das aplicações. A segunda, mais relevante aqui, é a discrepância de modelos [22, 36], que se destina a expressar a falta de informação sobre a física subjacente devido a simplificações ao longo da construção do modelo.

Um modelo, no contexto da Mecânica do Contínuo, combina dois componentes principais: princípios físicos básicos e sólidos, como a conservação do momentum linear, com equações de fechamento, como relações constitutivas. O primeiro componente é considerado confiável para uso geral. Por outro lado, equações constitutivas são frequentemente consideradas menos confiáveis devido à forma como são derivadas. A fenomenologia específica é observada e codificada em expressões matemáticas dependendo dos parâmetros a serem identificados através do uso dos dados disponíveis. De fato, diferentes caminhos podem ser seguidos, como o uso de abordagens de multiescala que conectam o mundo atômico ao mundo macroscópico. Seus custos correspondentes os tornam, muitas vezes, pouco atrativos.

Aqui, o foco reside em discrepâncias de modelo que derivam do uso de modelos constitutivos viscoelásticos simples. Em particular, estuda-se a relação de tal discrepância o número de variáveis internas N . Nesse ponto, vale ressaltar que, para modelos computacionais complexos, essa escolha tem um impacto direto na eficiência computacional, como em locais espaciais específicos (como pontos de Gauss em uma formulação de elementos finitos), N equações diferenciais ordinárias lineares (ou mesmo não lineares) são resolvidos. Além disso, não há uma maneira racional de estimar uma escolha ótima de N em

cenários complexos. A seguir será detalhada o tipo de análise deste trabalho. Destaca-se, entretanto, que este trabalho tem uma perspectiva diferente quando comparada a [37], onde incertezas se associam apenas a parâmetros e nenhuma investigação profunda sobre o papel de N foi desenvolvida. As análises a seguir consideram os modelos construídos a partir de análogos mecânicos apresentados nas seções anteriores.

2.2.2 Calibração: Erro com modelo aditivo

Nessa primeira abordagem, introduzida em [20] e [21], admite-se uma discrepância de modelo aditivo dotada de uma estrutura probabilística, tendo em sua forma mais genérica um processo Gaussiano. Essa discrepância é associada unicamente a estados ou quantidades observáveis. Essa abordagem é denominada aqui como erro de modelo aditivo. Segundo [38] esta abordagem trata as discrepâncias entre as previsões do modelo e as medições disponíveis como resultantes de erros na modelagem e ruídos nas medições. Sendo muito difícil distingui-los em ε .

A calibração do modelo é construída com base na seguinte equação de observação que é o modelo estatístico abordado.

$$v_{obs} = f(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \theta) + \varepsilon$$

A inferência bayesiana é baseada na suposição de que as probabilidades podem ser atualizadas logo que uma informação adicional (dados de medição, por exemplo) é obtida [39]. Na inversão estatística todas as quantidades envolvidas são modeladas como variáveis aleatórias e suas respectivas incertezas são quantificadas a partir de distribuições de probabilidade.

O *teorema de Bayes* é uma regra de atualização utilizada para quantificar este aumento de informação, combinando uma nova informação com uma informação disponível previamente. É importante salientar que a regra de Bayes não indica o que nosso conhecimento a respeito de uma variável deveria ser, ela nos dá um caminho de como este deveria mudar após uma nova informação ser obtida [40].

O *teorema de Bayes* é apresentado na equação a seguir:

$$\pi(\theta|v_{obs}) = \frac{\pi(v_{obs}|\theta)\pi_0(\theta)}{\pi(v_{obs})} = \frac{\pi(v_{obs}|\theta)\pi_0(\theta)}{\int_{\mathbb{R}^p} \pi(v_{obs}|\theta)\pi_0(\theta)} \quad (2.19)$$

Em que $\pi(\theta|v_{obs})$ é a densidade de probabilidade a posteriori, ou seja, a probabilidade de obter os parâmetros, dado a medidas observadas v_{obs} . $\pi_0(\theta)$ é a densidade a priori, ou seja, descreve o estado atual de conhecimento a respeito de θ antes dos dados serem coletados. Esta densidade a priori é atualizada usando a *likelihood* (função de verossimilhança) $\pi(v_{obs}|\theta)$, que incorpora informações proveniente do modelo e dos dados. $\pi(v_{obs})$ é a densidade de probabilidade marginal das medições e desempenha o papel de uma constante de normalização.

Estas duas fontes de informação, densidade a priori e função de verossimilhança, são combinadas levando à distribuição a posteriori $\pi(\theta|v_{obs})$. Assim, a forma operacional do *teorema de Bayes* é dada pela seguinte equação:

$$\pi(\theta|v_{obs}) \propto \pi(v_{obs}|\theta)\pi_0(\theta) \quad (2.20)$$

Os conceitos de distribuição priori e posteriori são relativos à observação que está sendo considerada no momento. Ou seja, antes de qualquer conjunto de dados disponível, usa-se somente a distribuição a priori $\pi_0(\theta)$ para a inferência. Quando um conjunto de dados v^1 é observado, pode-se usar a distribuição a posteriori como $\pi(\theta|v^1) \propto \pi(v^1|\theta)\pi_0(\theta)$. Quando um segundo conjunto de dados é disponível, usa-se a distribuição a posterior $\pi(\theta|v^1)$ como a distribuição a priori e incorpora os novos dados na nova distribuição a posterior atualizado, sendo dada como $\pi(\theta|v^1, v^2) \propto \pi(v^2|\theta)\pi(\theta|v^1)$. Assim:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|v^1) &\propto \pi(v^1|\theta)\pi_0(\theta), \\ \pi(\theta|v^1, v^2) &\propto \pi(v^2|\theta)\pi(\theta|v^1), \\ \pi(\theta|v^1, v^2) &\propto \pi(v^2|\theta)\pi(v^1|\theta)\pi_0(\theta). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Essa Eq. (2.21) pode ser generalizada para os dados coletados em n momentos diferentes usando a equação

$$\pi(\theta|v^1, \dots, v^n) \propto \prod_{i=1}^n \pi(v^i|\theta)\pi_0(\theta) \quad (2.22)$$

Pode-se observar então que a abordagem bayesiana fornece um mecanismo para aprofundar o conhecimento a respeito do parâmetro de interesse θ .

A distribuição a priori $\pi_0(\theta)$ é subjetiva, determinada pelo pesquisador por seu conhecimento ou falta dele. As distribuições a priori não informativas são utilizadas quando não existe informação a priori palpável, sendo essa informação de natureza objetiva ou subjetiva, ou seja, o chamado estado de “ignorância da priori”. Ou quando o conhecimento a priori é pouco significativo em relação à informação amostral, ou o conhecimento é “vago” [41].

Segundo Miles *et al.* [42] empregar uma distribuição à priori não informativa garante que a distribuição à priori não impacte negativamente à posteriori através de informação inicial incorreta.

É comum, no entanto, que não se tendo informação a priori, adote-se a escolha de uma densidade à priori não informativa como uma densidade uniforme de suporte largo que considera a restrição de valores positivos para o parâmetro [39] tal como a descrição seguir

$$\pi(\theta) = \chi_{[0, \infty]}(\theta). \quad (2.23)$$

Para construir a função de verossimilhança $\pi(v_{obs}|\theta)$ deve-se levar em conta a distribuição dos erros observados ε . Supondo que os erros são independentes e identicamente distribuídos e $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ então a função de verossimilhança é representada da seguinte maneira

$$\pi(v_{obs}|\theta) = L(\theta, \sigma^2|v_{obs}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-SS_\theta/2\sigma^2}, \quad (2.24)$$

onde $SS_\theta = \sum_{i=1}^n (v_i - f_i(\theta))^2$ é a soma dos erros quadrados. A observação da variância do erro, σ^2 , é tipicamente desconhecida e então é inferida ao longo da calibração do parâmetro θ [42].

Ao invés de usar quadratura uma solução é o método de Monte Carlo com Cadeia de Markov (MCMC) em que através da construção de cadeias de Markov, cuja distribuição é estacionária, encontra-se a densidade posteriori. Ao avaliar as realizações da cadeia, as

amostras da posteriori, obtém-se uma densidade para os valores de parâmetros com base nas medições observadas [39].

Neste caso, o método de Monte Carlo com Cadeia de Markov (MCMC) é usado para gerar amostras dos parâmetros, de modo que a explorar a distribuição a posteriori, que, tipicamente, é intratável analiticamente.

Para resolver o problema inverso utilizamos o algoritmo Random Walk Metropolis - RWM (1), livro de Smith [39], página 164. Este é o mais comum método de *MCMC* utilizado na prática.

Considera-se o vetor θ_0 como vetor de parâmetros verdadeiros, porém desconhecidos e $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_n]^T$ como realizações ou observações vindas de experimentos em que os erros realizados são $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$. Levando em conta que os erros não são enviesados e são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com média zero e variância constante. Assume-se que tem-se mais medidas que parâmetros, de modo que $n > p$ [39]. O modelo estatístico Eq. 2.25 com erros multiplicativos pode ser mais apropriado desde que $var(v_i)$ dependa da magnitude de $f_i(\theta)$ [39].

Em que v_i , θ e $f_i(\theta)$ correspondem às medidas representando variáveis aleatórias, parâmetros e resposta do modelo dependente do parâmetro respectivamente.

$$v_i = f_i(\theta)(1 + \varepsilon_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

2.2.3 Calibração: Erro de modelo encapsulado em parâmetros

Nesta abordagem, utiliza-se a inferência Bayesiana para encontrar uma representação do erro de modelo. .

É importante enfatizar que o objetivo final de um modelo computacional é fornecer previsões em cenários em que as respostas não estão disponíveis. Na modelagem bayesiana, selecionamos Quantidades de Interesse (QoI) para expressar a intenção específica da predição. No contexto da dinâmica, essas quantidades são, tipicamente, processos aleatórios que podem ser formalmente caracterizados por um sistema de distribuições posteriores que contendo incertezas de uma QoI q_γ

Algoritmo 1 Random Walk Metropolis

- 1: Definir o número de elementos M da cadeia e os parâmetros de projeto n_s, σ_s
 - 2:
 - 3: Determinar um valor de parâmetro inicial θ_0 que satisfaça a inequação $\pi(\theta_0|v) > 0$
 - 4:
 - 5: Definir $SS_{\theta^0} = \sum_{i=1}^N [v_i - f_i(\theta^0)]^2$
 - 6:
 - 7: Calcular a estimativa inicial da variância: $s_0^2 = \frac{SS_{\theta^0}}{n-p}$
 - 8:
 - 9: Construir a estimativa da covariância $V = s_0^2[\chi^T(\theta^0)\chi(\theta^0)]^{-1}$ e $R = chol(V)$
 - 10:
 - 11: **Para** $k=1 : N$ **faça**
 - 12: (a) Amostra $z_k \sim N(0, 1)$
 - 13:
 - 14: (b) Cria um candidato $\theta^* = \theta^{k-1} + Rz_k$
 - 15:
 - 16: (c) Amostra $u_\alpha \sim U(0, 1)$
 - 17:
 - 18: (d) Calcule $SS_{\theta^*} = \sum_{i=1}^N [v_i - f_i(\theta^*)]^2$
 - 19:
 - 20: (e) Calcule
 - 21:
 - 22: $\alpha(\theta^*|\theta^{k-1}) = \min(1, e^{[SS_{\theta^*} - SS_{\theta^{k-1}}]/2s_{k-1}^2})$
 - 23:
 - 24: (f) **Se** $u_\alpha < \alpha$ **então**
 - 25:
 - 26: Defina $\theta^k = \theta^*, SS_{\theta^k} = SS_{\theta^*}$
 - 27:
 - 28: **Senão**
 - 29:
 - 30: Defina $\theta^k = \theta^{k-1}, SS_{\theta^k} = SS_{\theta^{k-1}}$
 - 31: **Fim Se**
 - 32:
 - 33: (g) Atualiza $s_k \sim Inv - gamma(a_{val}, b_{val})$ em que
 - 34:
 - 35: $a_{val} = 0.5(n_s + n), b_{val} = 0.5(n_s\sigma_s^2 + SS_{\theta^k})$
 - 36: **Fim Para**
 - 37:
-

$$p(\hat{q}_\gamma | \hat{f}, \mathcal{M}) = \int_{\Theta} p(\hat{q}_\gamma | \theta, \hat{f}, \mathcal{M}) d\Theta \quad (2.26)$$

em que $p(\cdot|\cdot)$ denota distribuição de probabilidade condicional, \hat{f} são as entradas do modelo (forças externas e condições iniciais) e $\theta \in R^{N_\theta}$ é um vetor contendo parâmetros gerais a serem, eventualmente, marginalizados como sugerido na Eq. (2.26). Aqui a dependência do tempo não é explícita para manter uma simples notação. O símbolo $\hat{\cdot}$ é usado para se referir a previsões de modelo envolvendo situações não vistas.

O modelo probabilístico preditivo planejado pela Eq. (2.26) resulta da combinação de princípios físicos básicos, equações constitutivas, dados disponíveis e modelos estocásticos para parâmetros ou discrepâncias de modelo. Mantivemos a referência a \mathcal{M} na Eq. (2.26) para lembrar que nossa análise aqui foca no papel desempenhado pelos diferentes modelos constitutivos nas previsões finais. De fato, nós denominamos os modelos associados à família \mathcal{M} , a fim de revelar possíveis limitações quanto à escolha do número de variáveis internas. Lidamos exclusivamente com as discrepâncias de modelo produzidas em tais casos, comparando diferentes previsões para os mesmos cenários correspondentes a um modelo diferente da família \mathcal{M} . Tendo isso em mente, assumimos aqui a perspectiva geral defendida em [31], [22], [36], [43], [44], [45], [46], [47] e [48], na qual a discrepância do modelo deve ser inferida e introduzida sem prejudicar os princípios físicos básicos da modelagem. Respeitando as leis básicas que sustentam a modelagem, examinamos a extrapolação das previsões de simulações computacionais em cenários diferentes daqueles da calibração ou de qualquer outra em que os dados estejam disponíveis. Levando em consideração, como mencionado anteriormente, as relações de fechamento como os componentes fracos da modelagem, codificamos a discrepância do modelo nas equações constitutivas.

Mais especificamente, esta abordagem é centrada na proposta dada por [22] e [38], e mais explorada em diferentes áreas como cinética de combustão [49], plasticidade [50] e fluxos complexos [51]. A idéia principal é impor a física ao longo de simulações usando o modelo calibrado, encapsulando o erro do modelo nos parâmetros originais. Coerentemente com uma perspectiva bayesiana, atribuímos a esses parâmetros uma estrutura estatística a ser inferida ao longo da calibração. A partir de agora será referido como erro encapsulado em um parâmetro. A calibração do modelo é construída com base na seguinte equação de observação, onde indica os parâmetros a serem identificados.

A calibração do modelo é construída sobre uma equação de observação e considerando a discrepância do modelo embutida no vetor de parâmetros do modelo θ , o que é expresso

em uma notação compacta como segue:

$$\mathbf{v}_{\text{obs}} = f(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \theta) + \delta(\mathbf{x}, \theta) \quad (2.27)$$

em que $\mathbf{v}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N_{sT}}$ é um vetor de saídas observadas no histórico do tempo, com a dimensão N_{sT} ditada pelo número de sensores e o passo de tempo que regula a frequência de aquisição ao longo do intervalo de tempo $[0, T]$. Para dados obtidos em experimentos físicos, \mathbf{v}_{obs} não pode abranger variáveis internas devido à sua natureza intrínseca abstrata. Além disso, f representa a ação do modelo computacional e é uma função vetorial das variáveis de entrada que definem um cenário S (por exemplo, composição do sistema, condições iniciais, propriedades do material, forças externas), dos parâmetros Θ e do vetor de estado x . Além disso, δ resulta da combinação de discrepância de modelo e ruído de observação, portanto, tipicamente, é caracterizado como um campo estocástico. δ representa explicitamente o termo de erro de modelo ou modelo de discrepância [38].

Neste momento limitamos nossa formulação para estimar as discrepâncias do modelo, portanto, nenhum outro parâmetro é considerado para calibração, exceto os escolhidos para conter o erro de modelo encapsulado. Dessa, escolhemos θ como um vetor contendo parâmetros internos de mola e de amortecimento relacionados às equações constitutivas das variáveis internas (3.2) e (3.4), definidas adiante, e adequadamente escolhidos para encapsular o erro do modelo. Portanto δ é reduzido o ruído de observação.

Assumimos discrepâncias de modelo como variáveis aleatórias e adotamos uma abordagem bayesiana hierárquica. Empregar modelos hierárquicos em situações semelhantes parece datar de 2003 [52] e tornou-se muito popular na comunidade de dinâmicas estruturais e vibrações recentemente [53] e [54].

Tal abordagem consiste em usar modelos estocásticos para caracterizar os parâmetros, introduzindo assim algum nível de flexibilidade na modelagem. Para fazer isso, introduzimos os hiperparâmetros α , associados a cada encapsulamento, que definem a estrutura estocástica dos parâmetros. Portanto, a calibração assume a forma de um problema de estimativa de densidade condicionada aos dados disponíveis e na qual busca-se uma caracterização de $\pi_{\theta}(\cdot; \alpha)$, a função de distribuição de probabilidade de $\Theta(\alpha; \xi)$ e ξ é vetor aleatório a ser especificado dentro da modelagem.

Para entender melhor o papel do modelo de discrepância na presente aplicação e para ser consistente com o fato de que usa-se apenas dados fornecidos por um modelo computacional de maior fidelidade, assumimos na Eq.(2.27) dados sem ruído ($\mathbf{e} = \mathbf{0}$).

Fornecidos os dados \mathcal{D} , a serem especificados posteriormente, a calibração, na configuração bayesiana, é formulada como a obtenção da seguinte expressão para a função de densidade posterior dos parâmetros:

$$\underbrace{p(\boldsymbol{\alpha} | \mathcal{D})}_{\text{posteriori}} \propto \underbrace{L(\mathcal{D} | \boldsymbol{\alpha})}_{\text{likelihood}} \underbrace{p(\boldsymbol{\alpha})}_{\text{priori}} \quad (2.28)$$

De acordo com a abordagem hierárquica, Θ é modelado através de uma probabilidade condicional $p(\theta | \alpha)$, e sua escolha é impulsionada por uma combinação de facilidade computacional com conhecimento prévio sobre a discrepância do modelo. Vale a pena mencionar que, para uma amostra fixa de α , Θ permanece uma variável aleatória. Vale ressaltar que propor uma forma estrutural para a discrepância do modelo é uma questão fundamental, juntamente com a escolha do encapsulamento, e entende-se que essa discrepância depende fortemente do conhecimento acumulado da física envolvida. Mesmo se técnicas poderosas de aprendizado de máquina [55] forem usadas para aprender com os dados.

Do ponto de vista computacional, a solução do problema de inferência definido por (2.28), implicitamente envolvendo Θ , é computacionalmente custoso. Um desafio particular nesse contexto é o cálculo da função likelihood L , como apontado em [22] e [38]. A likelihood completa, consistente com a observação, Eq. (2.27), é calculada através da integração de Θ ,

$$L(\mathcal{D} | \boldsymbol{\alpha}) = \int p(\mathcal{D} | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\theta} \quad (2.29)$$

A equação (2.29) é computacionalmente cara, mesmo aqui com uma função de Dirac $p(\mathcal{D} | \boldsymbol{\theta})$, como o modelo original é determinístico para o caso sem ruído ($\mathbf{e} = \mathbf{0}$). Para cada valor de Θ , um sistema diferencial ordinário acoplado, o problema futuro, deve ser resolvido. Além disso, no caso sem ruído, a Eq. (2.29) tende a ser degenerada [22], [38]. Uma discussão detalhada sobre o emprego de formas alternativas para a função de likelihood, abrangendo Computação Bayesiana Aproximada (ABC), é apresentada em [22, 38]. Aqui, adotamos uma dentre essas alternativas, uma likelihood de Aproximação Gaussiana Marginalizada, para substituir a Eq. (2.29). Isso é expresso como:

$$L(\mathcal{D} | \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N_{out}}{2}}} \prod_{i=1}^{N_{out}} \frac{1}{\sigma_i(\boldsymbol{\alpha})} \exp\left(-\frac{(\mu_i(\boldsymbol{\alpha}) - y_i)^2}{2\sigma_i(\boldsymbol{\alpha})^2}\right), \quad (2.30)$$

em que $\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{E}_\xi[g(\mathbf{s}; \theta(\xi; \boldsymbol{\alpha}))]$ e $\sigma(\boldsymbol{\alpha})^2 = V_\xi[g(\mathbf{s}; \theta(\xi; \boldsymbol{\alpha}))]$ são a média (valor esperado) e a variância com relação a ξ dos observáveis do modelo a partir de $g(\mathbf{s}; \theta(\xi; \boldsymbol{\alpha}))$. O cálculo de tais estatísticas de baixa ordem envolve a solução do modelo no cenário S para determinado $\boldsymbol{\alpha}$ para obter saídas do modelo N_{out} a serem comparadas com o vetor de observáveis \mathbf{y} .

A distribuição a posteriori complexa (2.28) é analiticamente intratável. Assim, precisamos recorrer a esquemas numéricos para explorá-la gerando amostras que caracterizem a estrutura probabilística de α e, indiretamente, do erro de modelo Θ . Para isso, empregamos um algoritmo Metropolis-Hastings da família de Métodos de Monte Carlo da Cadeia de Markov (MCMC) implementado usando a biblioteca DAKOTA [56]. De fato, devido ao encapsulamento hierárquico, essa implementação computacional requer um laço extra para estimar, por uma integração de Monte Carlo, a Eq. (2.29). O algoritmo 2 é utilizado para implementação e está baseado no trabalho de Zio *et al.* [51] sendo apresentado a seguir.

2.3 Validação

A validação [9] está relacionada com as incertezas nos dados que caracterizam os modelos, tais como, parâmetros determinados através de testes de laboratório, medições de campo ou observações.

Para avaliar a capacidade preditiva do modelo calibrado, é necessário estabelecer um procedimento de validação que combine dados não utilizados, se disponíveis, com as incertezas estimadas das respostas das simulações. Além disso, podemos extrapolar e também verificar previsões em um cenário diferente daquele utilizado para calibração. Junto com esta avaliação, podemos usar qualquer saída do modelo computacional, se puder ser rastreada. Portanto, temos que calcular estatísticas, uma vez que todas as variáveis envolvidas são agora estocásticas, de quantidades de interesse q .

A distribuição completa da posteriori condicionada aos dados para a abordagem de erro de modelo aditivo é expressa por

$$p(\mathbf{q}_\gamma | \mathcal{D}) = \int p(\mathbf{q}_\gamma | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{D}) p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}) d\boldsymbol{\theta}, \quad (2.31)$$

Algoritmo 2 Inferência bayesiana dos hiperparâmetros α

1: **Para** $i:=1 : N_{MCMC}$ **faça**
2:
3: Definindo a proposta $\alpha^* \text{ from } g(\alpha^* | \alpha^{i-1})$
4:
5: **Função** CÁLCULO DA LIKELIHOOD(\mathcal{D}, α^*)
6:
7: **Para** $k:=1:N_{MC}$ **faça**
8: Definindo uma amostra ξ^k from π_ξ
9: Encontra θ^k dado α^* e ξ^k
10: Cálculo dos observáveis do modelo $\mathbf{y}_m^k = (f(\mathbf{s}, \theta(\xi^k, \alpha^*)))$
11: Atualiza $\mu(\alpha^*) = \mathbf{E}_\xi[\mathbf{y}_m^k]$
12: Atualiza $\sigma(\alpha^*)^2 = V_\xi[\mathbf{y}_m^k]$
13: Verificar a convergência
14: **Fim Para**
15:
16: **Retorna** $L(\mathcal{D} | \alpha^*)$
17:
18: **Fim Função**
19:
20: Probabilidade de Aceitação:
21:
$$\rho(\alpha^* | \alpha^{i-1}) = \min \left\{ 1, \frac{L(\mathcal{D} | \alpha^*; \mu_q, \sigma_q) \times p(\alpha^*) \times g(\alpha^{i-1} | \alpha^*)}{L(\mathcal{D} | \alpha^{i-1}; \mu_q, \sigma_q) \times p(\alpha^{i-1}) \times g(\alpha^* | \alpha^{i-1})} \right\}$$

22: Defina $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$
23:
24: **Se** $u < \rho$ **então**
25: Aceita a proposta: $\alpha^i \leftarrow \alpha^*$
26: **Senão**
27: Rejeita a proposta: $\alpha^i \leftarrow \alpha^{i-1}$
28: **Fim Se**

29: Verificar a convergência
30:
31:
32: **Fim Para**

em que $p(\mathbf{q}_\gamma | \mathcal{D})$ é a probabilidade de obter a quantidade de interesse a partir dos dados observados, $p(\mathbf{q}_\gamma | \boldsymbol{\theta}, \mathcal{D})$ é a distribuição a posteriori da calibração e $p(Q|\theta, D)$ incorpora informações proveniente dos dados e dos parâmetros calibrados.

As incertezas são propagadas através do Método de Monte Carlo. Nesta fase a validação consiste tipicamente em utilizar as N amostras provenientes da distribuição de probabilidade do parâmetro obtido na etapa de calibração, e em seguida obter a quantidade de interesse, além das soluções estatísticas média (Eq. 2.32) e desvio padrão (Eq. 2.33), a partir das saídas dos N problemas determinísticos gerados. Outro detalhe importante para a etapa de validação é que o modelo utilizado para as respostas de saídas deve ser advindo de outro cenário.

$$\mu_u = \mathbb{E}_{(u)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \quad (2.32)$$

$$\sigma_u^2 = \mathbb{V}[u] = \sum_{i=1}^N \frac{(u_i - \mu_u)^2}{N - 1}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_u^2} \quad (2.33)$$

Por outro lado, é importante salientar que as soluções obtidas são aproximações da resposta desejada, devido ao fato de se utilizar um número finito de simulações, e que o nível de precisão desta aproximação depende do número de amostras consideradas.

Para a abordagem utilizada erro de modelo encapsulado em um parâmetro, a distribuição completa da posteriori, condicionada aos dados, dessas quantidades é formalmente obtida integrando os hiperparâmetros após a calibração. Revisitando a distribuição de predição (Eq. 2.26), obtemos:

$$p(\mathbf{q}_\gamma | \mathcal{D}) = \int \int \underbrace{p(\mathbf{q}_\gamma | \boldsymbol{\theta})}_{\text{modelo}} \underbrace{p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\alpha})}_{\text{erro encapsulado}} \underbrace{p(\boldsymbol{\alpha} | \mathcal{D})}_{\text{calibração}} d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\alpha} \quad (2.34)$$

em que $p(\mathbf{q}_\gamma | \boldsymbol{\theta})$ é a função de distribuição de probabilidade multivariada (*pdf*) induzida pelo modelo computacional $g(\tilde{\mathbf{s}}, \theta(\xi, \alpha))$. A notação $\tilde{\mathbf{s}}$ refere-se à possibilidade de calcular a *QoI* para diferentes cenários. Explorando a Eq.(2.34) através de amostragem ou de qualquer outra forma é muito caro. Tais custos computacionais podem ser atenuados, com pouca perda de precisão conforme documentado para diferentes situações na literatura, adotando-se a estimativa do máximo a posteriori (MAP) do parâmetro $\boldsymbol{\theta}$, o $\boldsymbol{\theta}_{MAP}$.

A expressão probabilística (2.34) fornece uma perspectiva geral da formulação proposta, o que ajuda a entender as cargas de um simulador computacional para cenários gerais envolvendo a resposta viscoelástica de corpos 3D. Uma integral complexa sobre o espaço de entrada que pode ser de alta dimensão, no caso de materiais não homogêneos, deve ser calculada. Para cada valor fixo de α , as iterações semelhantes a Monte Carlo podem ser usadas para calcular estatísticas de \mathbf{q}_θ . Para cada iteração, um potencial solucionador avançado caro, como aquele resultante de uma modelagem de elementos finitos não lineares, deve ser empregado. Por outro lado, a formulação é totalmente não-intrusiva, o que permite o uso de simuladores comerciais.

Capítulo 3

Modelagem e evolução das variáveis internas

3.1 Análise dos modelos

Para aprofundar a compreensão do modelo com variáveis internas, neste trabalho é apresentado um modelo referencial que expõe a fenomenologia através de uma analogia de sólidos unidimensionais, com elementos discretos tais como molas e amortecedores.

Essa analogia é apresentada esquematicamente através da Figura 2.7. Os modelos utilizam do modelo de Maxwell generalizado unidimensional com uma mola livre em uma extremidade e um número arbitrário de elementos Maxwell dispostos em paralelo. Assim foi restrito a um arranjo com N modelos tipo Maxwell (cada um elemento elástico em série com cada um elemento viscoso) em paralelo com modelo de Hooke (um elemento elástico). São modelos simples adequados para representar o comportamento mecânico de materiais viscoelásticos reais.

Prossegue-se abordando um aspecto fundamental em aplicações como o controle de vibração: a dependência da dissipação de energia na frequência de excitação. Estamos particularmente interessados em investigar a reprodução de tal comportamento por um modelo constitutivo que emprega variáveis internas. Para isso, introduzimos uma família de modelos $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r, \dots, \mathcal{M}_N\}$ ($r = 1, \dots, N$). Cada um deles dotado de r variáveis internas e contendo os mesmos modos de dissipação (para $r \geq 1$), o que leva a uma estrutura aninhada. Aqueles que correspondem a valores maiores de r levam a previsões de maior fidelidade, pois abrangem, pela inclusão de mais modos internos, num intervalo maior na escala de tempo.

É válido salientar neste momento que este trabalho é uma continuidade de um esforço no laboratório [16] porém com o outro foco mas com aspecto complementar no sentido de enriquecer o trabalho anterior. Para completar a analogia introduzida acima e avançar com a análise, estabelecemos a correspondência entre os parâmetros originais do material de uma fita viscoelástica produzida por 3M[®] sob o código *VHB* – 4950 com os do modelo de mola amortecedor : $m = \rho Al$, $k_r = E_r A/l$, e $\eta_r = E_r A/bl$. Neste trabalho, A representa a área do corpo unidimensional e l o seu comprimento. Fixando $\rho = 795[kg/m^3]$, $A = 76.2[mm^2]$, e $l = 1140[mm]$, alcançamos os valores apresentados na Tabela 3.1. As características do material viscoelástico descrito na Tabela 1 são baseadas no trabalho por Borges et al. [16].

Tabela 3.1: Parâmetros do modelo de vibração

Parâmetros	Valores
k_0	0,0294 [N/m]
k_1	0,267 [N/m]
k_2	0,042 [N/m]
k_3	0,048 [N/m]
k_4	0,0072 [N/m]
k_5	0.0010 [N/m]
c_1	6,99(10 ⁴) [N/(m/s)]
c_2	5,77(10 ⁴) [N/(m/s)]
c_3	3,87(10 ³) [N/(m/s)]
c_4	3,87(10 ³) [N/(m/s)]
c_5	4,13(10 ³) [N/(m/s)]

Assim, as equações que governam a dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor são

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - k_0x(t) - F_{int}(t) \quad (3.1)$$

em que $\ddot{x}(t)$ e $F_{int}(t)$, são , respectivamente a aceleração e a força interna do sistema. Esta força interna corresponde tensão viscosa e conforme detalhado na equação (3.2) juntamente com a evolução das variáveis internas descritas na equação (3.4):

$$F_{int}(t) = \sum_{r=1}^N k_r(x - \gamma_r), \quad (3.2)$$

$$\dot{\gamma}_r + \frac{\gamma_r}{\tau_r} = \frac{x(t)}{\tau_r} \quad r = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

$$\tau_r = \frac{c_r}{k_r}. \quad (3.4)$$

Uma representação que pode ser usada para modelar relações de variáveis internas ao

sistema é a representação em espaço de estados, o qual descreve o sistema no domínio do tempo [57]. Assim o problema direto passa a compreender um sistema acoplado de equações diferenciais, o qual pode ser escrito na forma matricial (3.6) a partir da definição das quantidades

$$z_1(t) = \gamma_1(t), z_2(t) = \gamma_2(t), z_3(t) = \gamma_3(t), \dots, z_{n-1}(t) = x(t), z_n(t) = \dot{x}(t), \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1/\eta_1 & 0 & 0 & \dots & k_1/\eta_1 & 0 \\ 0 & -k_2/\eta_2 & 0 & \dots & k_2/\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3/\eta_3 & \dots & k_3/\eta_3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ m^{(-1)}k_1 & m^{(-1)}k_2 & m^{(-1)}k_3 & \dots & -m^{(-1)}K & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ m^{(-1)}F(t) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Obs.: $K = k_0 + \sum_{i=1}^N k_i$

As equações diferenciais ordinárias acopladas acima são resolvidas, ao longo das análises, por um método Runge-Kutta, utilizando o solver (*ode45*) da plataforma computacional Matlab[®].

Para investigar a influência das variáveis internas, tomamos para o conjunto \mathcal{M} cinco modelos diferentes ($N = 5$), o que é esquematicamente representado na Figura 3.1.

3.2 Análise do comportamento dissipativo

O comportamento dissipativo foi investigado impondo cargas harmônicas $F(t) = f_0 \sin(\omega t)$ aplicadas nos diferentes modelos, considerando uma amplitude de referência f_0 e um conjunto de frequências de excitação. Mais especificamente, realizamos as análises varrendo a banda de frequência de acordo com $\omega = \{10^{-1}, 1, 2, 10^1\} \omega_n$, com $\omega_n = \sqrt{k_0/m}$, a frequência natural do sistema não amortecido. Além disso, adotamos uma

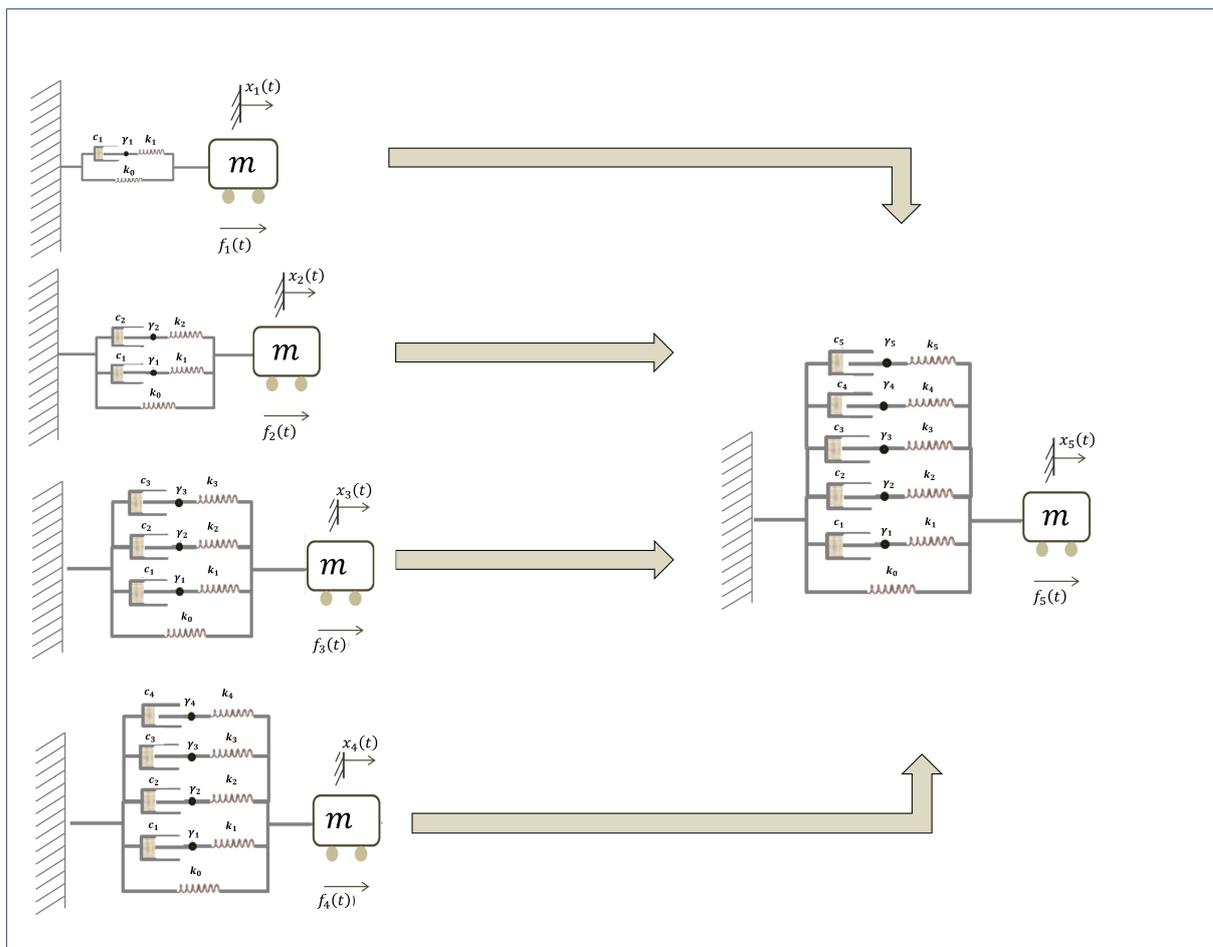


Figura 3.1: Representação reológica de todos modelos dinâmicos

janela temporal de 10000s e condições iniciais igual a zero. Elegemos a energia dissipada dentro do movimento como uma figura de mérito para guiar as análises em andamento.

Quando as condições iniciais e as condições de entrada são conhecidas, a resposta do sistema cuja solução fornece o campo de deslocamentos em todo o domínio do tempo é definida nos gráficos que serão apresentados a seguir. É necessário ressaltar que a resposta $D(t)$ escolhida para as análises deste trabalho é o deslocamento, mas este $D(t)$ representa qualquer saída de interesse do sistema (aceleração, velocidade, por exemplo) .

Na Figura 3.2 pode-se observar que a riqueza dos modelos está na fase transiente onde pode-se verificar diferentes regimes de amortecimento. Considerando uma excitação de baixa frequência ($0 < w/w_n < 1$) a amplitude de resposta é dada, essencialmente, pela razão entre a amplitude f_0 e a rigidez estática k_0 , sendo, neste caso, aproximadamente 10mm. Quando a frequência de excitação está próxima da frequência natural ($w/w_n = 1$) a amplitude do deslocamento de resposta dos sistemas é muito grande, correspondendo aos fenômenos de ressonância que devem ser evitados para evitar falhas nos sistemas. À medida que a frequência de excitação começa a aumentar ($w/w_n \rightarrow \infty$) a amplitude da

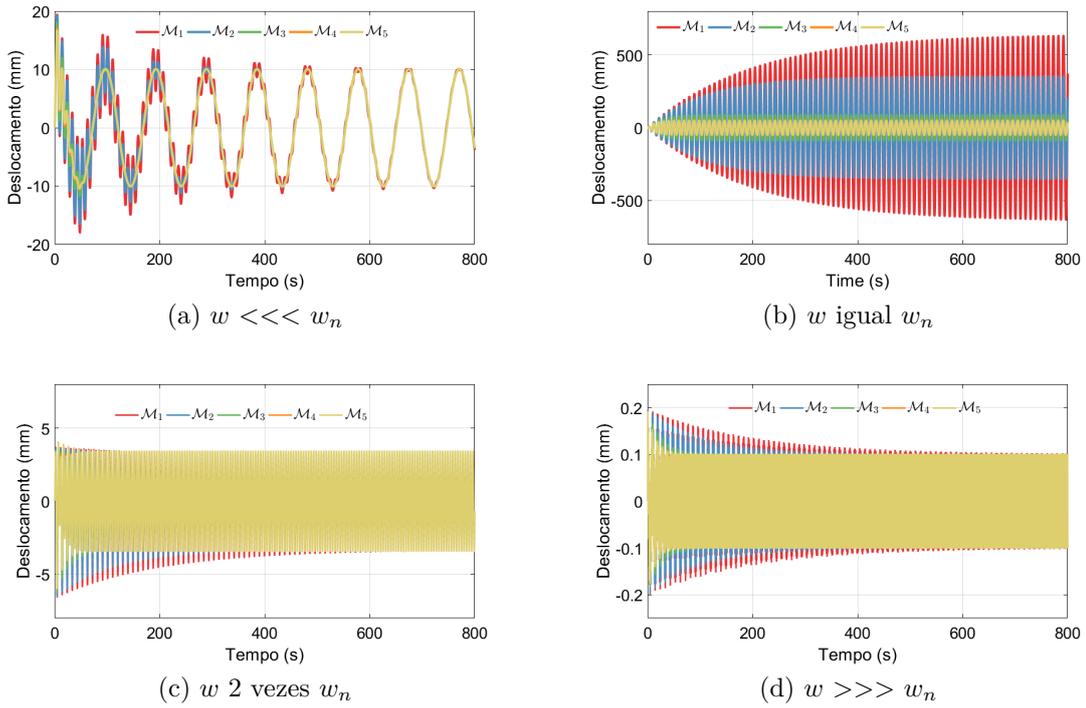


Figura 3.2: Resposta a um forçamento periódico

resposta de deslocamento dos sistemas tende a diminuir. Como se espera em frequências mais altas a dissipação é muito maior e isso corresponde a um intervalo de transiente muito menor.

Para uma excitação do tipo degrau, a força aplicada é descrita por

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0,294\text{N}, & t > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

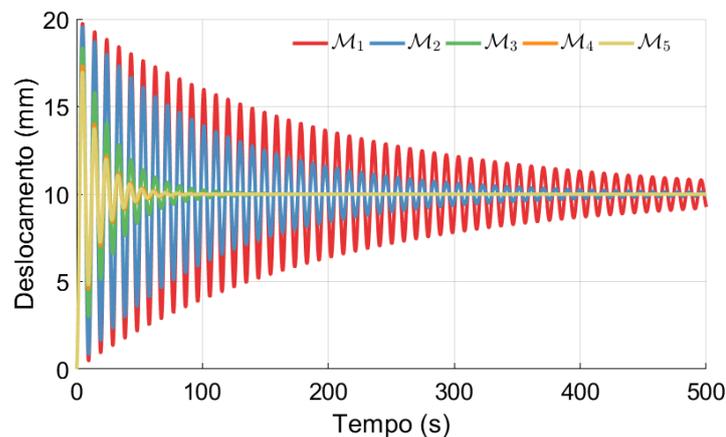


Figura 3.3: Resposta a um degrau

Mostramos na Figura 3.3 a resposta desses modelos à excitação a um degrau. Pode-se observar que quanto maior o número de variáveis internas, menor o tempo de acomodação para essa excitação.

A resposta dos modelos também é investigada para uma excitação aleatória. Em particular, é considerado um ruído branco gaussiano com média zero. A Figura 3.4 apresenta o espectro das respostas para todos os modelos. Pode-se observar que quanto maior o número de variáveis internas, menor a amplitude das respostas.

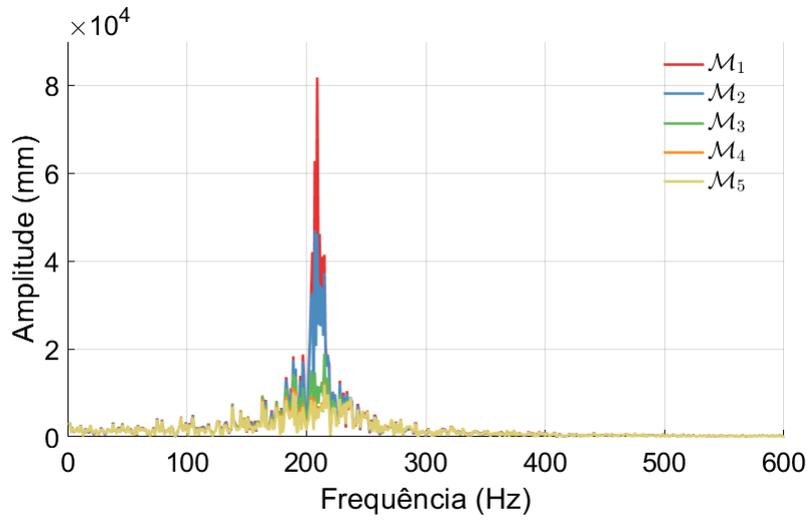


Figura 3.4: Transformada Discreta de Fourier (*DFT*).

O amortecimento associado a diferentes modelos é investigado através da Figura 3.5, que apresenta a evolução dessas variáveis para a excitação a um degrau descrita na Eq. (3.7). Na Figura 3.5, observamos que modelos com maior número de variáveis internas estão melhor equipados para descrever a dissipação. Além disso, observamos que níveis mais altos de dissipação foram capturados com as maiores variáveis internas.

No presente contexto, o aspecto mais importante a ser entendido associado ao comportamento viscoelástico é a dissipação geral ao longo do movimento [17]. As curvas de histerese, relacionando força interna com deslocamentos durante o movimento cíclico, são figuras de mérito adequadas para expressar essa dissipação. A análise agora é realizada quando o material é submetido a duas frequências de excitação, uma menor que a frequência natural do sistema não amortecido e a segunda maior que essa frequência. A Figura 3.6 apresenta a histerese para a menor frequência de excitação e pode-se identificar uma resposta quase elástica para os modelos \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 . A Figura 3.7 apresenta a histerese para a maior frequência de excitação. Como o nível de dissipação associado a um ciclo de

histerese é descrito pela área dentro do ciclo de histerese, das Figuras 3.6 e 3.7 conclui-se que a dissipação medida pela área do ciclo de histerese aumenta à medida que o número de variáveis internas aumenta. Mais uma vez reforçando que a capacidade de modelos com maior número de variáveis internas é propenso a capturar melhor a dissipação.

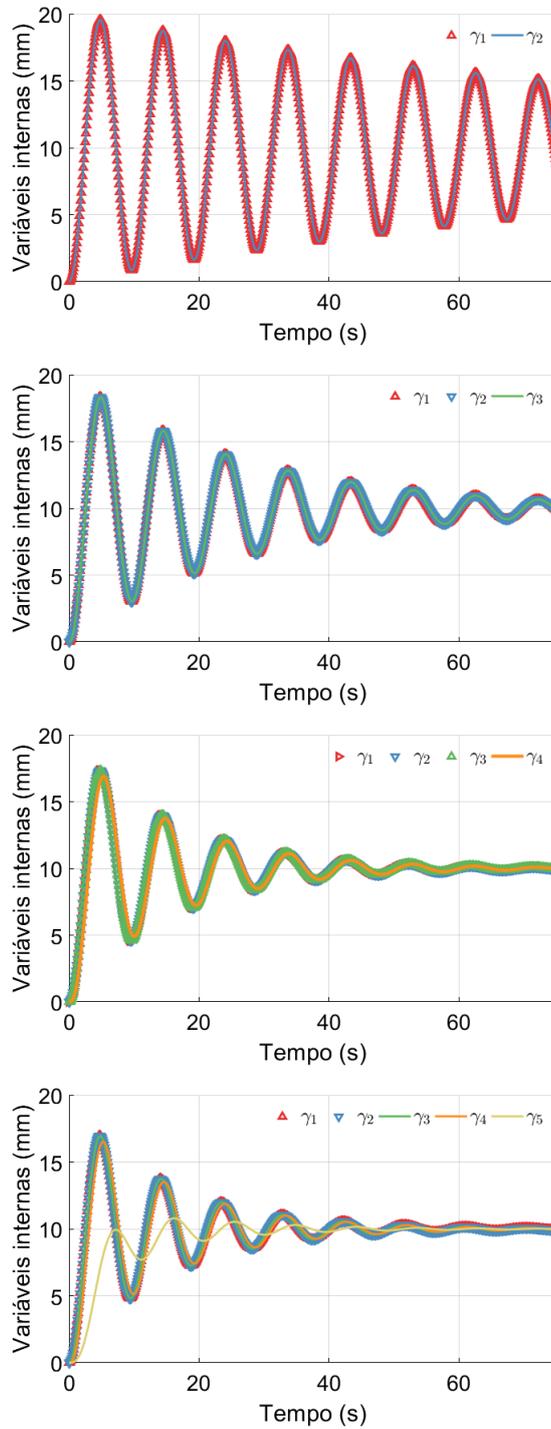


Figura 3.5: Resposta a um estímulo tipo degrau. Sendo $t_f = 75s$.

A dissipação de um material viscoelástico pode ser caracterizada através da observação histerese apresentadas em carregamentos e respostas cíclicas [28].

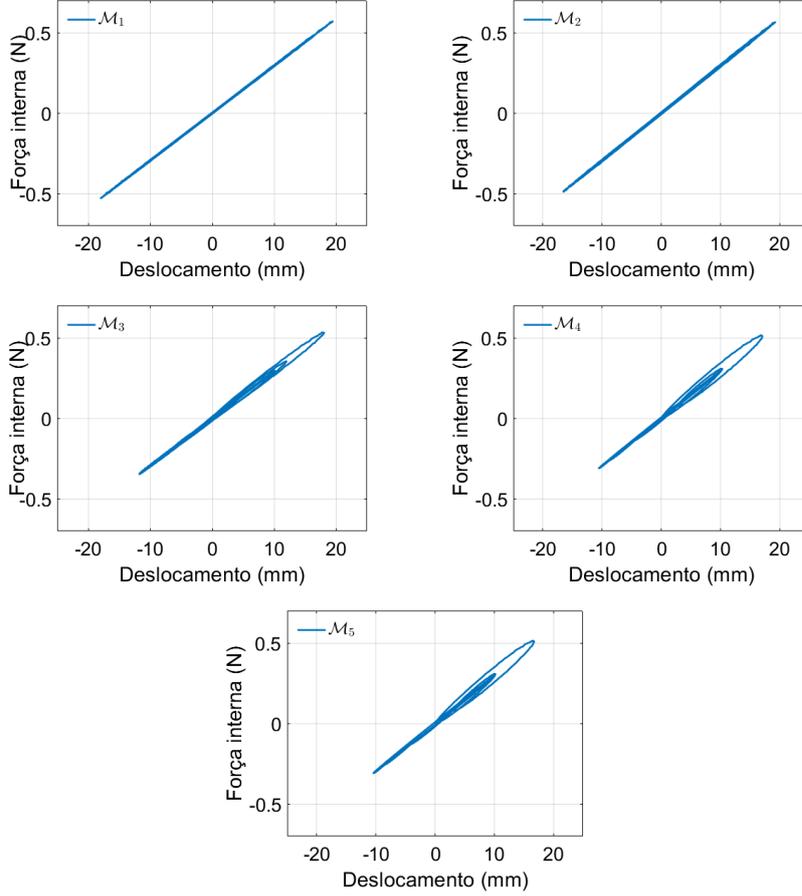


Figura 3.6: Curva de histerese para uma resposta ao estímulo periódico com $w \lll w_n$

A potência dissipada em cada instante de tempo é dada da seguinte maneira, onde a positividade é garantida, pois as constantes de amortecimento c_r são todas positivas.

$$D_r(t) = \sum_{i=1}^N c_r (\dot{\gamma}_r(t))^2 \geq 0 \quad (3.8)$$

Em relação à análise da taxa de dissipação, é bastante comum calcular seu valor máximo durante uma resposta em estado estacionário do sistema sob uma excitação periódica. Considerando este tipo de análise, consideramos aqui o conjunto de frequências de excitação $\{0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 4, 8, 1\} w_n$ para calcular a taxa máxima de dissipação em curso estável. A Figura 3.8 apresenta a taxa máxima de dissipação por ciclo em função da frequência de excitação para todos os modelo, esta foi escolhida neste trabalho para qualificar as diferenças entre os modelos e orientar a análise em seguida.

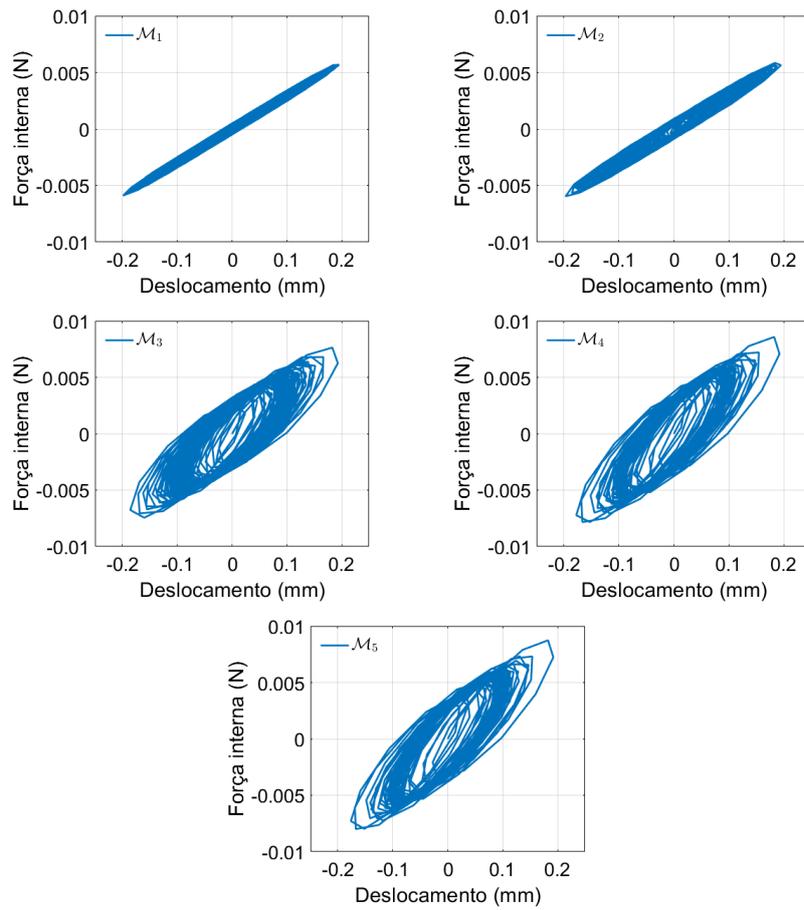


Figura 3.7: Curva de histerese para uma resposta ao estímulo periódico com $w \gg w_n$

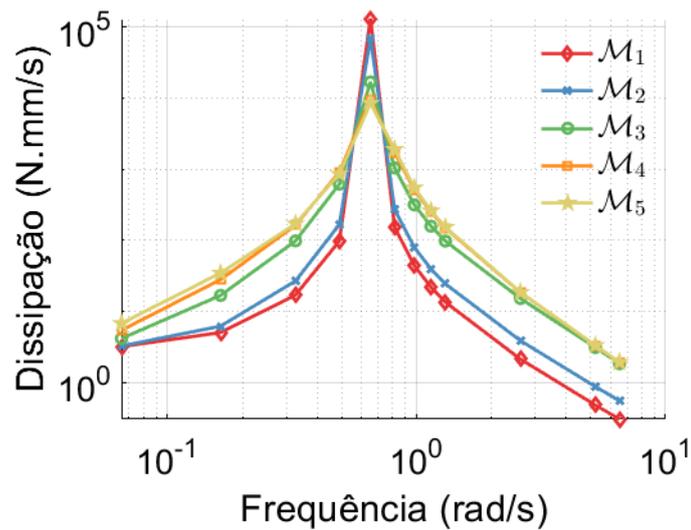


Figura 3.8: Representação da dissipação para os modelos

Na Figura 3.8, identifica-se uma discrepância significativa entre a resposta dos diferentes modelos em duas bandas de frequência distintas. Ao identificar essas regiões de baixa e

alta frequência, esse posicionamento relativo toma como referência o pico de resposta que ocorre em $1.31(10^5)[Nmm/s]$, desempenha um papel crucial no projeto da estratégia de calibração a ser aplicada posteriormente. Assim, essas duas regiões vão orientar a análise subsequente que vai desdobrar em calibração e validação.

Capítulo 4

Avaliação dos modelos constitutivos viscoelásticos

Neste capítulo, emprega-se a modelagem bayesiana discutida anteriormente para explorar a capacidade de usar variáveis internas para reproduzir o comportamento viscoelástico / de amortecimento. Esta análise enfoca o uso de diferentes equações constitutivas \mathcal{M}_r , com ênfase especial em modelos reduzidos obtidos pelo uso de um pequeno número de variáveis internas. Além disso, estruturamos essa análise com três etapas sequenciais principais: calibração, validação e extrapolação. No primeiro, identificamos, por inferência bayesiana, parâmetros, com suas incertezas, correspondentes à interpretação física (modelo de ruído aditivo) ou ao modelo estocástico de discrepância de modelo. A validação é realizada em um cenário diferente, investiga a consistência das previsões do modelo calibrado com os dados observados, contabilizando incertezas inevitáveis em ambos. Finalmente, desafiamos o modo calibrado, explorando sua capacidade preditiva em relação a diferentes aspectos e QoIs. Nesse ponto, vale ressaltar que poderíamos ter seguido rotas diferentes para prosseguir com essa análise: usando dados diferentes, figuras de mérito diferentes ou versões diferentes das ferramentas bayesianas, como a escolha da função de verossimilhança[38] ou seleção de modelos Bayesiano [58, 59]. Aqui, a nossa estratégia, que achamos que melhor serve ao nosso objetivo, baseia-se em confrontar diretamente os resultados de um modelo de maior fidelidade com os obtidos com um menor. Presume-se que o grau de precisão seja determinado pelo número de variáveis internas na família hierárquica dos modelos \mathcal{M} .

De acordo com o racional da análise descrita acima, produzimos dados sintéticos por meio de simulações, empregando \mathcal{M}_5 como a verdade fundamental (modelo de referência) e adotando parâmetros constitutivos relatados na Tabela 3.1. Por outro lado, calibramos um modelo de baixa fidelidade, aqui escolhido como o \mathcal{M}_2 compreendendo apenas duas variáveis internas. Essa escolha está baseada no gráfico de referência (Figura 3.8) em

que é possível verificar uma discrepância significativa entre eles. Para obter os primeiros resultados com configurações simples, usamos um sistema de um grau de liberdade correspondente a uma única massa acoplada a uma mola elástica e amortecida por mecanismos internos associados aos diferentes modelos mencionados anteriormente. Os sistemas não amortecidos têm uma frequência natural $w_n = 0.6526(rad/s)$. Os dados para a identificação dos parâmetros $\mathcal{D}_{0..tk} = \{x_0, \dots, x_k\}$ consistem em uma série temporal discreta de deslocamentos ao longo do intervalo de tempo $[0, 180]s$, adquiridos com uma frequência de $10Hz$.

As Figuras 4.1 e 4.2 retratam os dados de deslocamento ao longo do intervalo de tempo $[0, 250]s$ obtido com os dois modelos, enfatizando que a resposta do modelo de baixa fidelidade apresentada é anterior à calibração. Estendemos o intervalo de tempo além do empregado na calibração para ilustrar que o amortecimento interno é significativo apenas em um período transitório. O sistema é excitado por uma carga externa periódica com conteúdo frequencial nas faixas: $[0.25 : 0.5] w_n \left(\frac{rad}{s}\right)$ para a calibração e $[2 : 8] w_n \left(\frac{rad}{s}\right)$ para validação, importa dizer que são utilizadas apenas 10 das frequências que compreendem cada um desses intervalos. Essa escolha é inspirada na resposta de frequência exibida, na qual identificamos uma discrepância significativa entre os diferentes modelos nessas duas bandas de frequência.

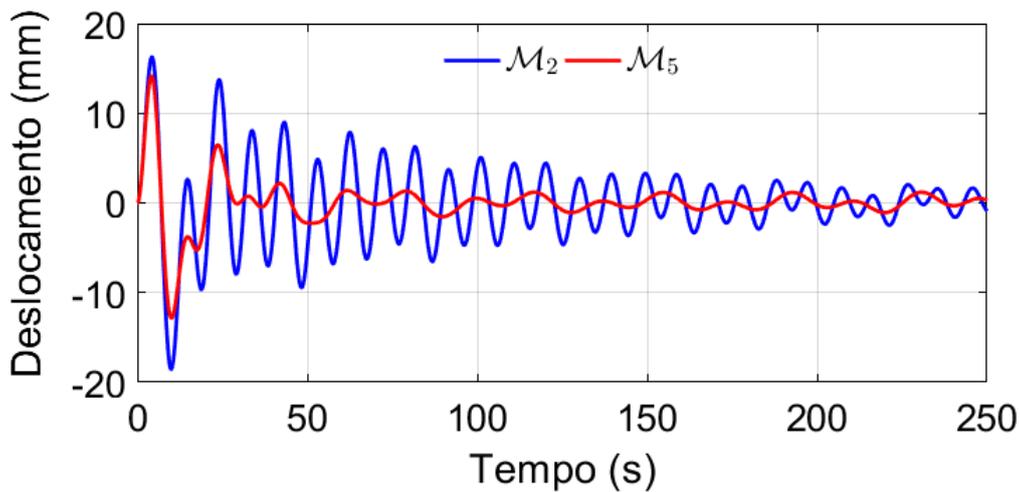


Figura 4.1: Modelos utilizados na calibração

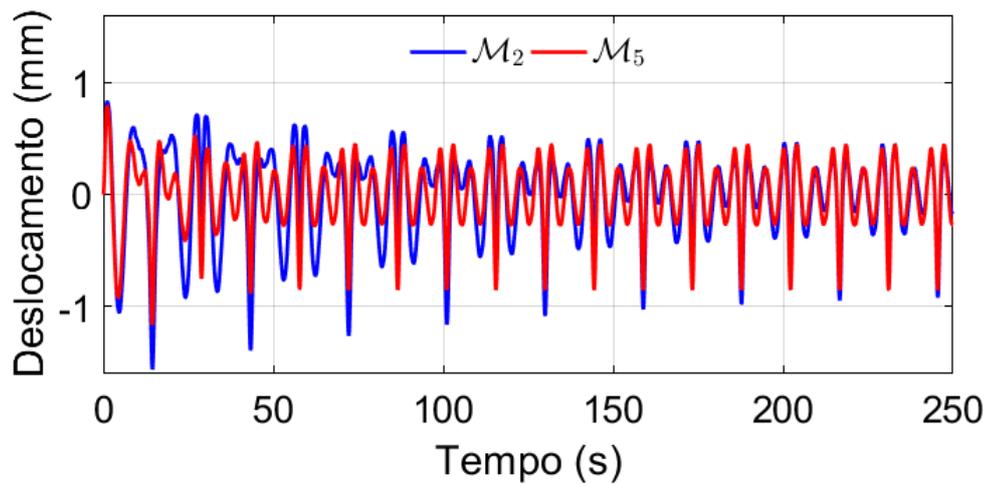


Figura 4.2: Modelos utilizados na validação

O sistema é excitado por forças externas periódicas, ilustradas nas Figuras 4.3 e 4.4 que englobam conteúdos de frequências correspondentes a $[0.25 : 0.5] w_n \left(\frac{rad}{s} \right)$ e $[2 : 8] w_n \left(\frac{rad}{s} \right)$, respectivamente.

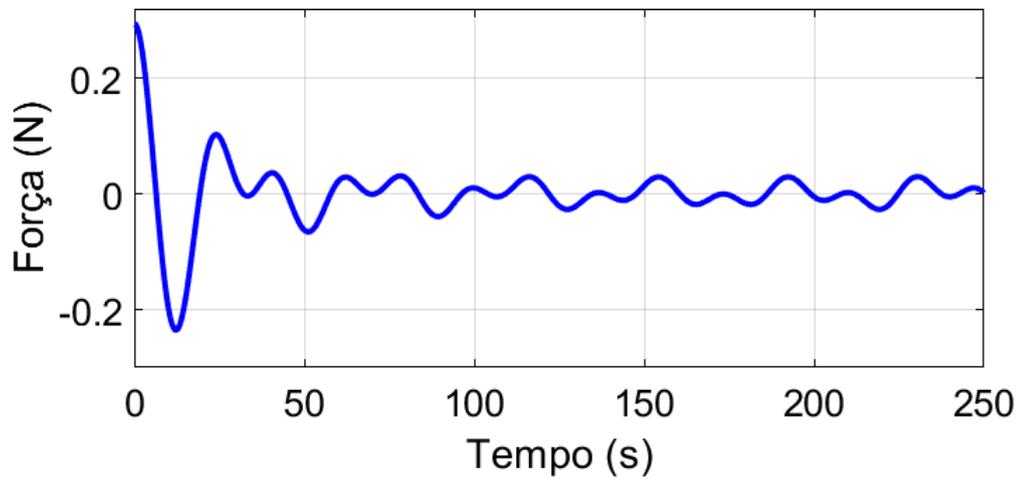


Figura 4.3: Força externa periódica - conteúdo frequencial $[0.25 : 0.5] w_n \left(\frac{rad}{s} \right)$

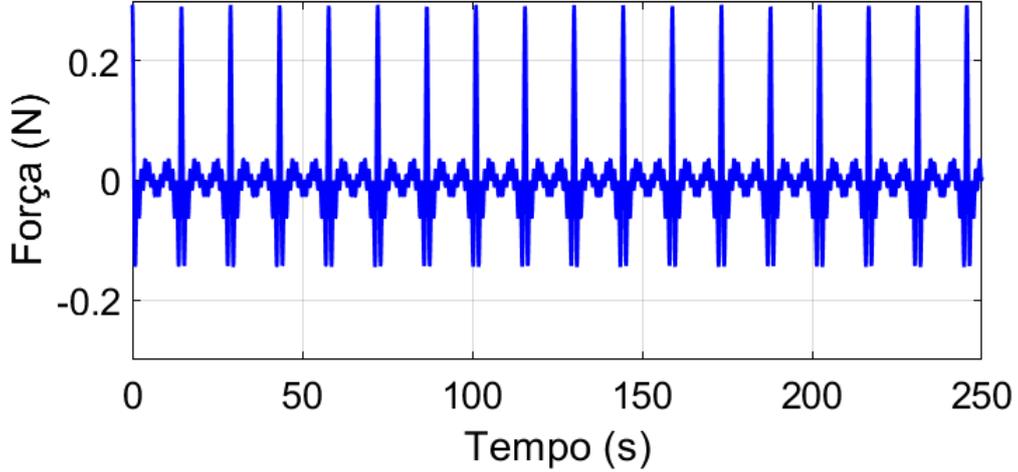


Figura 4.4: conteúdo frequencial $[2 : 8] w_n \left(\frac{rad}{s} \right)$

A seguir, avançamos nessa estratégia de avaliação dos modelos constitutivos em três etapas sequenciais. A primeira consiste na Calibração, que neste trabalho, não vislumbra apenas ter o modelo calibrado, mas também é uma maneira de analisar a diferença existente entre os modelos. A segunda consiste na Validação, realizada em um cenário diferente, utilizando um conteúdo frequencial diferente com o objetivo de investigar a consistência das previsões do modelo calibrado. Enquanto que a terceira etapa é a Extrapolação, neste momento o objetivo é desafiar o modelo calibrado explorando sua capacidade preditiva em um cenário totalmente diferente com conteúdo frequencial e QoI diferente.

4.1 Calibração de modelos

4.1.1 Resultados da calibração: Erro de modelo aditivo

Nesta etapa do trabalho consideramos o vetor θ_0 como vetor de parâmetros verdadeiros mas desconhecidos e $v = [v_1, \dots, v_n]^T$ como realizações ou observações vindas dos dados sintéticos do modelo \mathcal{M}_5 em que os erros realizados são $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$. Levando em conta que os erros não são enviesados e são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com média zero e variância constante. Assume-se que tem-se mais medidas que parâmetros, de modo que $n > p$. O modelo estatístico (Eq. 2.25) com erros multiplicativos pode ser mais apropriado desde que $var(v_i)$ dependa da magnitude de $f_i(\theta)$ [39].

Neste caso, v_i , θ e $f_i(\theta)$ correspondem às medidas representando variáveis aleatórias, parâmetros e resposta do modelo dependente do parâmetro \mathcal{M}_2 respectivamente.

Assim assumimos nesta etapa do trabalho que temos dados sintéticos \mathcal{M}_5 , em que a quantidade de interesse medida v_i é corrompido por erros de medição ε_i . O problema inverso associado com a estimativa de parâmetro pode ser então formulado da seguinte maneira: dado estas medições de ruído, determinar o vetor de parâmetros θ que faz com que a resposta fornecida pelo modelo adotado para o sistema em estudo ($f_i(\theta)$) se aproxime dos dados observados. O nível de ruído, a priori utilizado, foi de 5% na amplitude da resposta do modelo \mathcal{M}_5 resultando nos dados pseudo-experimentais (v_i) ilustrados na Figura 4.5 ao longo do intervalo de aquisição (0, 180).

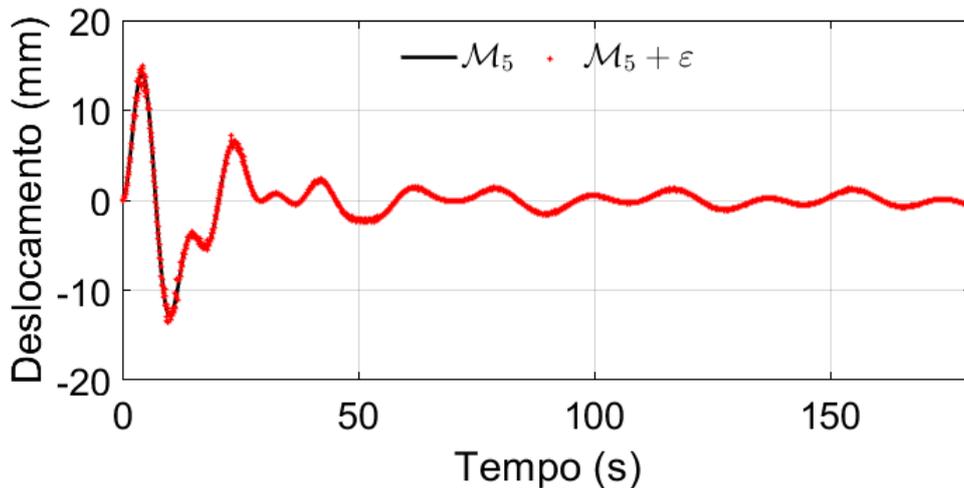


Figura 4.5: Dados utilizados na abordagem aditiva

Aqui foi realizada duas calibrações, uma foi associando o erro de modelo aditivo no parâmetro c_1 que corresponde ao primeiro modo interno. E a outra calibração foi a tentativa de associar o erro de modelo aditivo no parâmetro c_2 que corresponde ao segundo modo interno. Em cada uma, identificamos um dos parâmetros, mantendo o outro com o valor original, aquele também utilizado para os dados sintéticos de \mathcal{M}_5 . Começamos expondo os resultados obtidos com a abordagem de erro de modelo aditivo. Como exposto anteriormente, assumimos um vetor aleatório gaussiano com média zero e componentes i.i.d. Portanto, é caracterizada pela σ^2 , que também é identificada junto com os outros parâmetros do modelo. Empregamos o algoritmo 1 adaptado de Markov Chain Monte Carlo proposto em [39]. Utilizamos distribuições a priori não informativas correspondentes ao intervalo de grande suporte. O algoritmo MCMC foi configurado para gerar 5.000 amostras dos parâmetros para cada uma das duas experiências. A Tabela 4.1 apresenta os

resultados estatísticos encontrados, em que *aquecimento* é o número de amostras que não estão no patamar de convergência, $A(\%)$ é a porcentagem de amostras aceitas, $R(\%)$ é a porcentagem de amostras rejeitadas, μ e σ são, respectivamente, a média e o desvio padrão das amostras da distribuição a posteriori e tempo corresponde ao tempo de processamento em segundos.

Tabela 4.1: Resultados das duas calibrações: uma o erro de modelo aditivo está associado ao parâmetro c_1 e a outra o erro de modelo aditivo está associado ao parâmetro c_2 .

Parâmetros identificados	<i>burn-in</i>	A(%)	R(%)	μ	σ	<i>Tempo(s)</i>
c_1	1900	58,83	41,17	0,0091	$7,05 e^{-5}$	3620
c_2	1600	44,48	55,52	0.0090	$5,34 e^{-5}$	17057

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram uma vista das cadeias *MCMC* para cada um dos experimentos de identificação, além dos gráficos de convergência das amostras. A Figura 4.8, fornece uma estimativa da função de densidade probabilística para cada um dos parâmetros identificados.

Pode-se observar que os gráficos da evolução da cadeia, ilustram uma cadeia estacionária em torno do valor da média μ da distribuição. A distribuição a posteriori para o parâmetro c_2 apresenta-se com uma dispersão menor em relação ao parâmetro c_1 , como pode ser verificado e comprovado no desvio padrão das amostras σ na Tabela 4.1. O gráfico de convergência demonstra que aproximadamente em torno de 1000 e 500 amostras ocorre uma convergência para a média dos parâmetros c_1 e c_2 respectivamente, a partir destas amostras a evolução da cadeia apresenta-se estacionária.

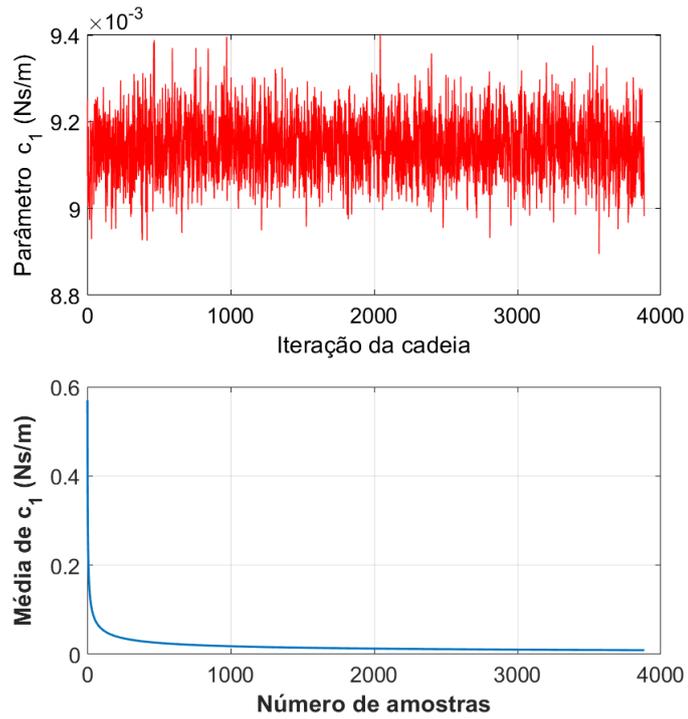


Figura 4.6: Evolução da cadeia e a convergência para a média das amostras do parâmetro c_1 .

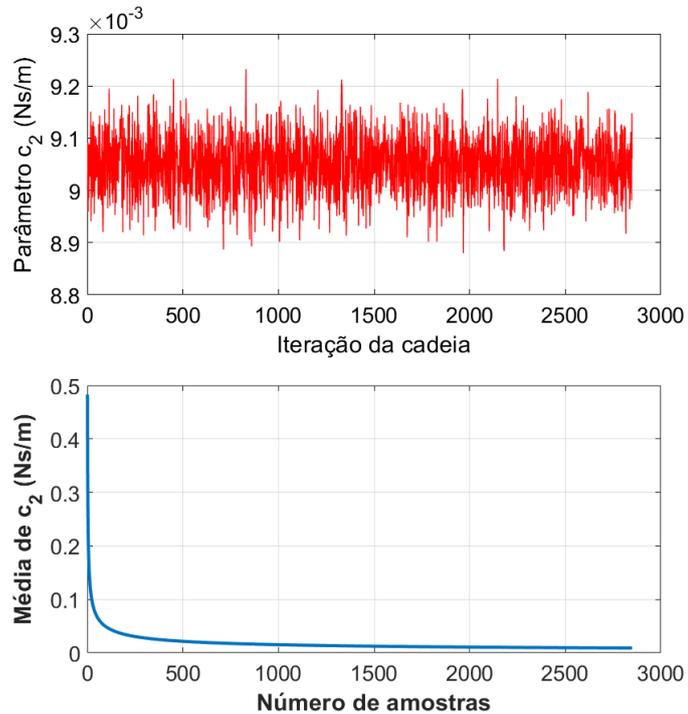


Figura 4.7: Evolução da cadeia e a convergência para a média das amostras do parâmetro c_2 .

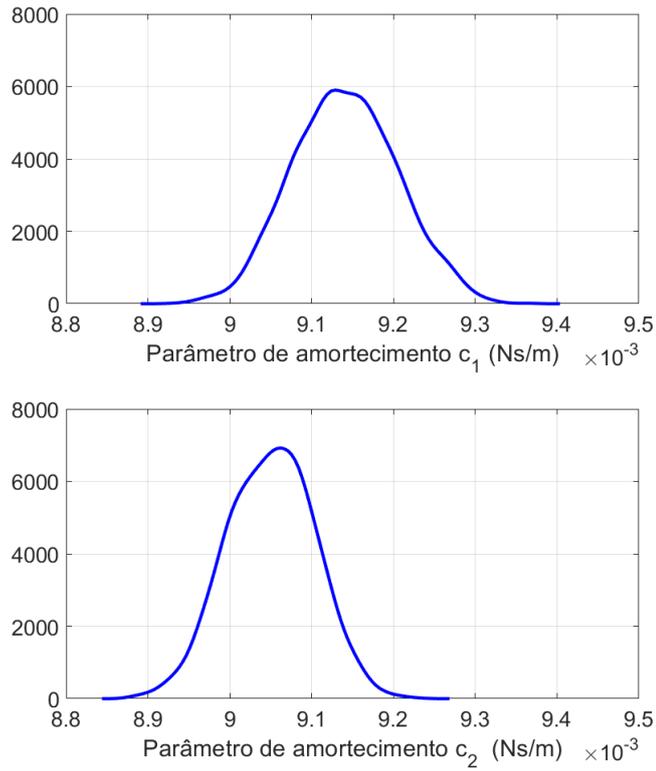


Figura 4.8: Função de distribuição de probabilidade dos parâmetros identificados c_1 e c_2 .

Apresentamos uma primeira verificação do desempenho da calibração nas Figuras 4.9 e 4.10, onde a resposta dinâmica do modelo calibrado é representada pela previsão média, calculada com o gerador probabilístico da Eq. 2.26. A comparação com o \mathcal{M}_5 revela que o modelo calibrado é capaz de capturar a verdade dentro de sua faixa de incerteza preditiva, calculada com o solucionador direto usando 5.000 amostras da posteriori do parâmetro. Nesses cálculos, não avançamos o modelo de erro aditivo identificado para obter a incerteza da posteriori. Além disso, podemos comparar diretamente com os resultados fornecidos com o modelo \mathcal{M}_2 não calibrado. O novo modelo calibrado \mathcal{M}_2 tem uma saída estocástica, assim é possível capturar o modelo de referência \mathcal{M}_5 num envelope de realizações gerado por essas saídas estocásticas. É possível observar também que entre os instantes 10s e 50s apresenta-se uma melhora significativa da evolução da resposta do modelo calibrado.

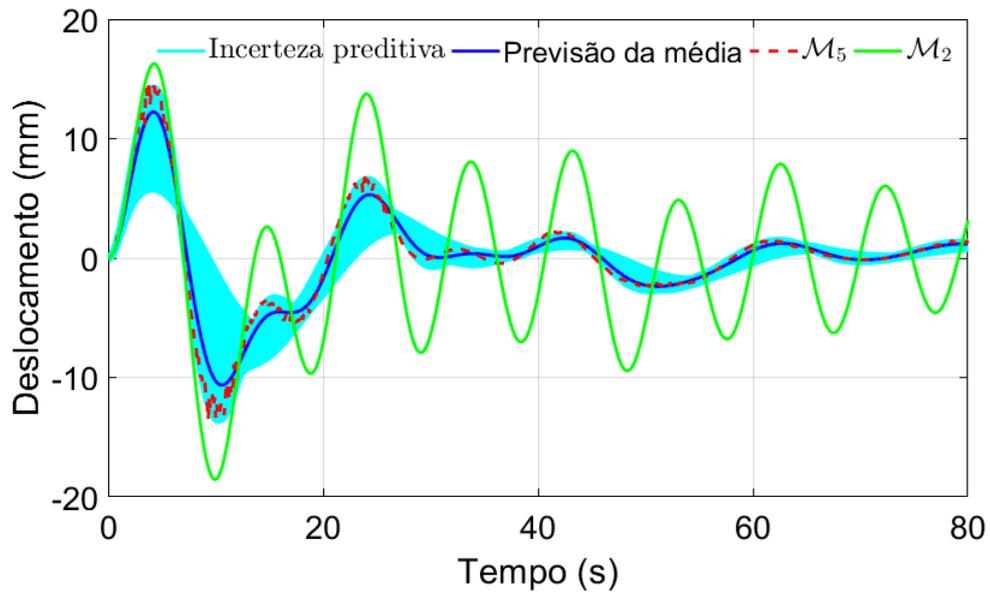


Figura 4.9: Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_1 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

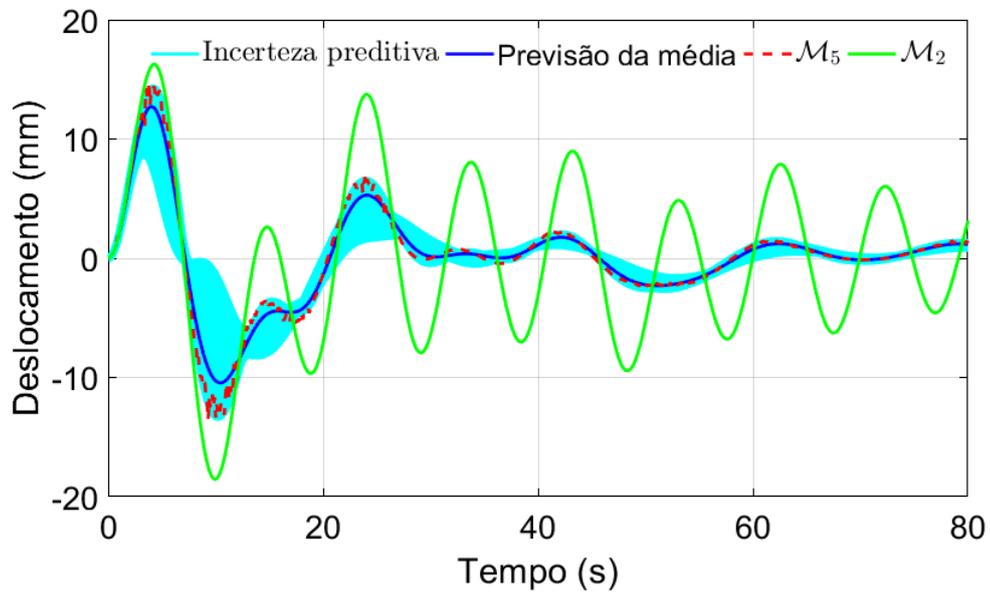


Figura 4.10: Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_2 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

4.1.2 Resultados da calibração: Erro de modelo encapsulado no parâmetro

Agora, realizamos a calibração para o erro do modelo encapsulado em um parâmetro, considerando as mesmas condições de carregamento e aquisição. Além do algoritmo de amostragem numérica (Algoritmo 2) que envolve dois laços semelhantes a Monte Carlo mencionados anteriormente, essa abordagem, por ser mais passível de modelar o que implica uma ampla variedade de opções, requer etapas e escolhas extras quando comparada à abordagem anterior. Temos que definir onde encapsular a discrepância do modelo e escolher um modelo estocástico para ele. Coerentemente com o que foi assumido acima, a princípio, incorporamos em cada um dos dois parâmetros de amortecimento c_1 e c_2 , gerando duas experiências de calibração. Para ambos, assumimos um modelo estocástico baseado numa expansão de primeira ordem Legendre-Uniforme polinômio de caos:

$$c_i = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}\xi, \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

em que ξ é uma variável aleatória uniforme com suporte $[-1, 1]$, e $\alpha_{i,0}$ representa o termo médio e $\alpha_{i,1}$ define o nível de variabilidade dos parâmetros a serem identificados.

O algoritmo de amostragem de dois níveis foi definido para produzir 10.000 amostras dos hiperparâmetros e, para cada uma dessas amostras, uma integração de Monte Carlo é calculada com 200 realizações. A convergência estocástica foi devidamente verificada.

Primeiramente o erro de modelo é encapsulado no parâmetro c_1 do primeiro modo interno de dissipação e depois o erro é encapsulado no parâmetro c_2 do segundo modo interno de dissipação. Do ponto de vista estocástico, caracterizamos como variável aleatória uniforme c_1 e c_2 com seus respectivos hiperparâmetros α_0 e α_1 representando, respectivamente, o valor esperado e a variância. Nesse ponto, a calibração se reduz a um problema de inferência bayesiana, o que requer a escolha das distribuições a priori.

Aqui é importante destacar a importância das distribuições a priori. Foram analisadas duas distribuições a priori porque diferente da abordagem anterior (erro de modelo aditivo), nesta abordagem tem-se menos orientação para a escolha dessa distribuição, além de ser um problema com mais dados observáveis e principalmente que respeita a física do modelo. Por isso paga-se um preço pela escolha da distribuição a priori a ser utilizada. Portanto dois casos foram adotados: no primeiro caso a distribuição a priori está contida num intervalo maior, que compreende o valor nominal de todos os parâmetros (Tabela 4.2); e no segundo caso, a distribuição a priori está baseada num intervalo que compreende

apenas o valor nominal dos parâmetros c_1 e c_2 (Tabela 4.3).

Tabela 4.2: Caso 1: Distribuição da priori baseada no valor nominal de todos os parâmetros

Parâmetros	Hiperparâmetros	Limite inferior	Limite Superior
c_1	α_0	0.15000	0.16005
	α_1	0.0001	0,14995
c_2	α_0	0.15000	0.16005
	α_1	0.0001	0,14995

Tabela 4.3: Caso 2: Distribuição da priori baseada no valor nominal dos parâmetros de amortecimento c_1 e c_2

Parâmetros	Hiperparâmetros	Limite inferior	Limite Superior
c_1	α_0	0.0009	0.02
	α_1	$9e^{-8}$	$1e^{-8}$
c_2	α_0	0.0009	0.02
	α_1	$9e^{-8}$	$1e^{-8}$

Para o primeiro caso temos as Figuras 4.11 e 4.12 apresentam a evolução das cadeias de hiperparâmetros para a identificação de c_1 e c_2 , para as duas experiências numéricas diferentes. Na Figura 4.13, mostramos a PDF completa dos parâmetros identificados. Essa figura demonstra claramente que ambas as abordagens levam a diferentes parâmetros identificados, tanto na variabilidade quanto nos valores médios.

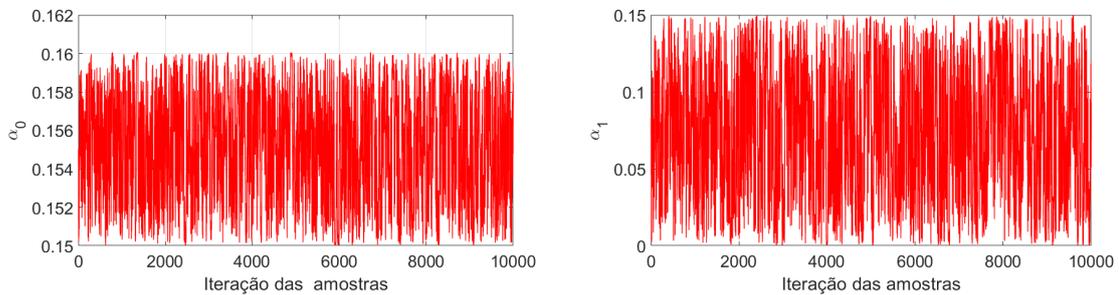


Figura 4.11: Caso 1: Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado no parâmetro c_1 .

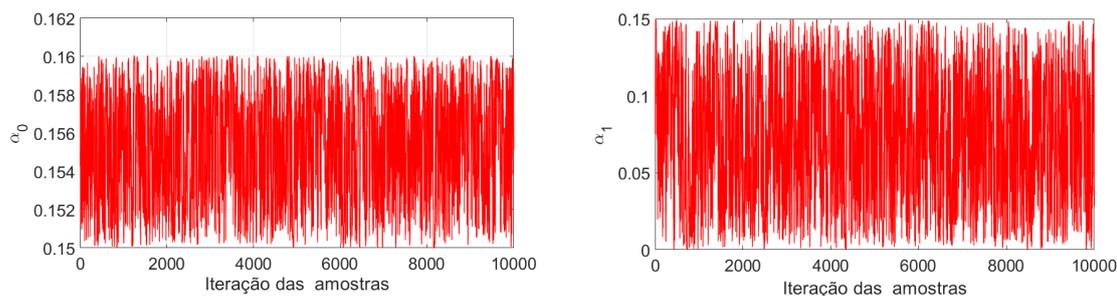


Figura 4.12: Caso 1: Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado no parâmetro c_2 .

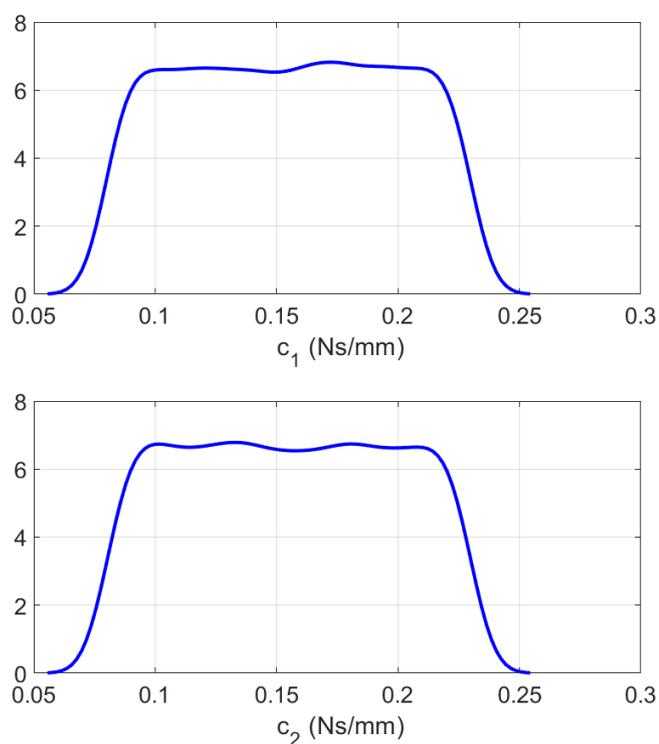


Figura 4.13: Caso 1: Função de distribuição de probabilidade c_1 e c_2 .

Para o segundo caso temos as Figuras 4.14 e 4.15 apresentam a evolução das cadeias de hiperparâmetros para a identificação de c_1 e c_2 , para as duas experiências numéricas diferentes. Na Figura 4.16, mostramos a PDF completa dos parâmetros identificados.

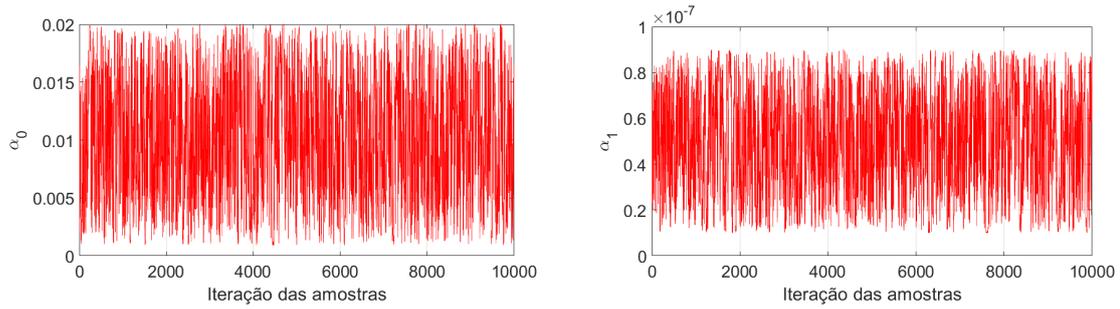


Figura 4.14: Caso 2: Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado no parâmetro c_1 .

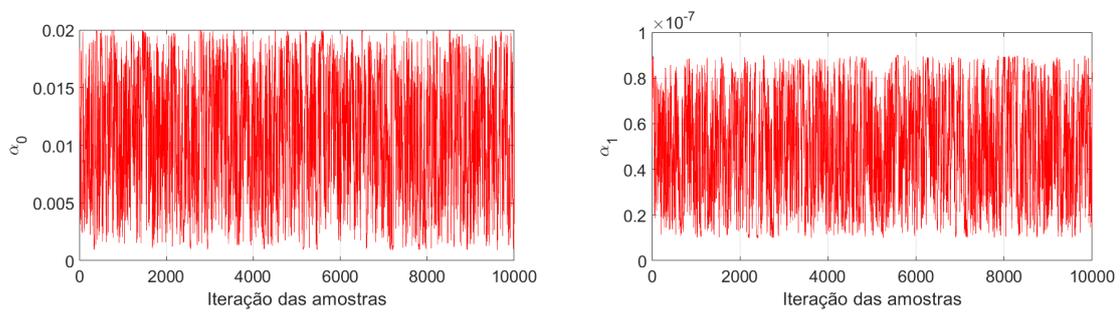


Figura 4.15: Caso 2: Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado no parâmetro c_2 .

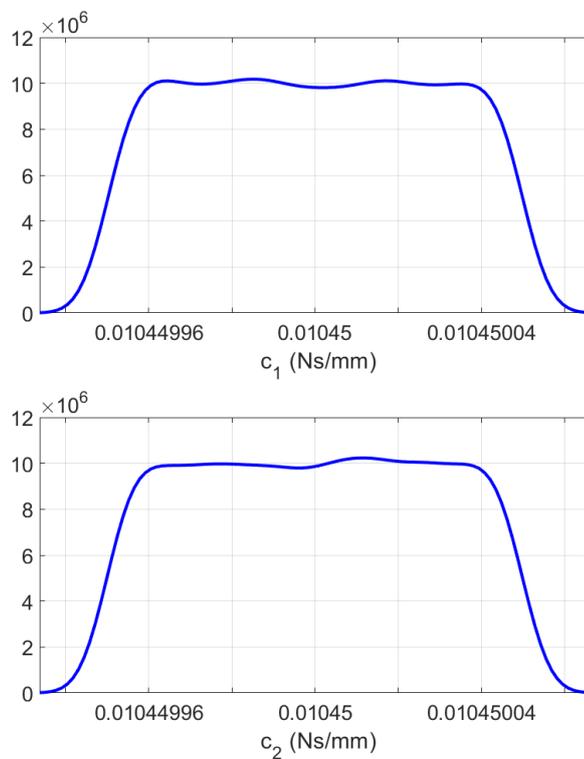


Figura 4.16: Caso 2: Função de distribuição de probabilidade c_1 e c_2 .

No erro do modelo encapsulado em um parâmetro, as previsões calculadas pela Eq. 2.34 são muito mais caras. Para lidar com isso, em vez de calcular a integral dupla envolvendo hiperparâmetros e o próprio parâmetro, usamos o valor máximo a posteriori de $p(\alpha | \mathcal{D})$, α_{MAP} , o valor mais provável de α condicional aos dados disponíveis. Realizamos testes numéricos preliminares, confirmando que as previsões do posterior completo ou usando o α_{MAP} levam a previsões semelhantes com o modelo calibrado.

Novamente, a calibração é avaliada inicialmente observando a resposta do tempo de deslocamento para os dois casos. O primeiro caso é representado nas Figura 4.17 e 4.18 que corresponde aos resultados de cada calibração realizada. Percebemos que o modelo calibrado apresenta um comportamento um tanto diferente e fora de fase em relação ao modelo de referência \mathcal{M}_5 . Além disso, a previsão de incerteza parece ser estreita, o que pode refletir uma escolha não ideal para a discrepância do modelo estocástico.

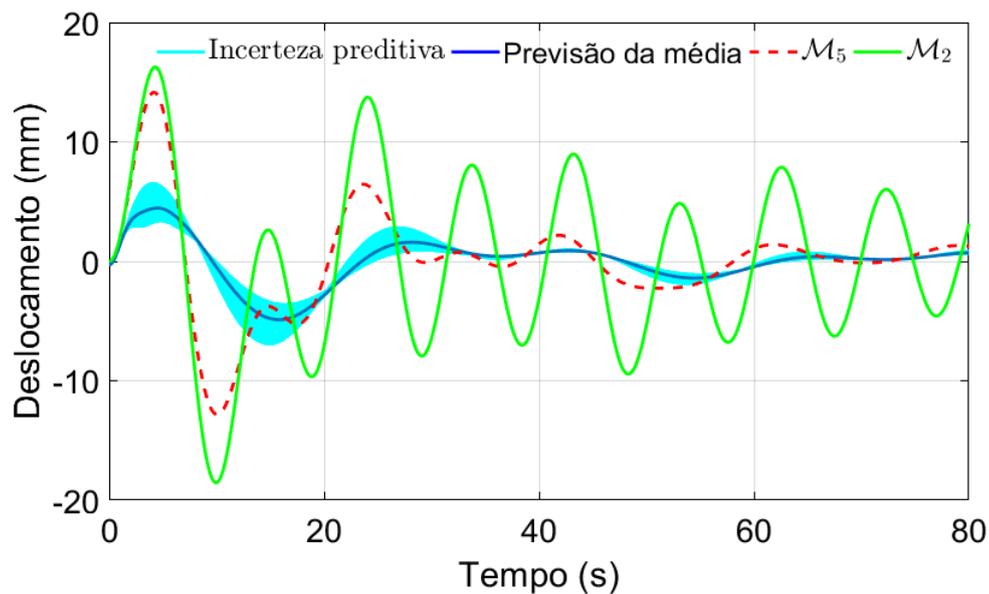


Figura 4.17: Calibração para caso 1: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_1 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

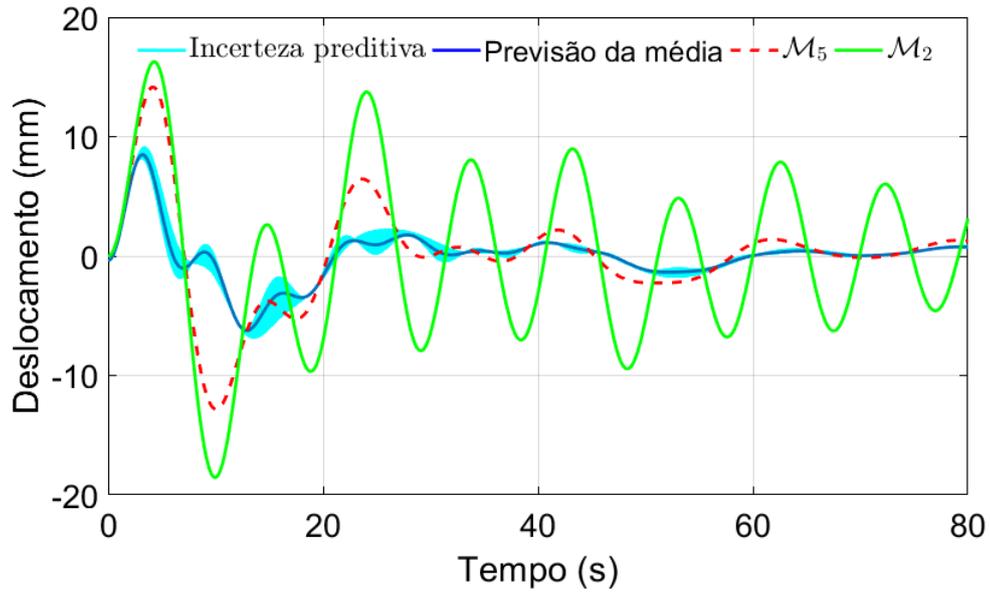


Figura 4.18: Calibração para caso 1: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_2 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

Com a distribuição a priori utilizada no segundo caso tem-se os resultados da calibração ilustrados nas Figuras 4.19 e 4.20 que correspondem aos resultados para o erro encapsulado nos parâmetros c_1 e c_2 separadamente. Nota-se que o resultado apresentado tem um comportamento melhor que o encontrado para o primeiro caso. Neste caso o modelo calibrado \mathcal{M}_2 é capaz de capturar o modelo de referência \mathcal{M}_5 dentro de uma faixa de incerteza preditiva.

Diante dos resultados apresentados para as diferentes distribuições a priori é possível observar como é sutil o problema e verificar como é sensível as distribuições a priori influenciando nitidamente nos resultados da calibração.

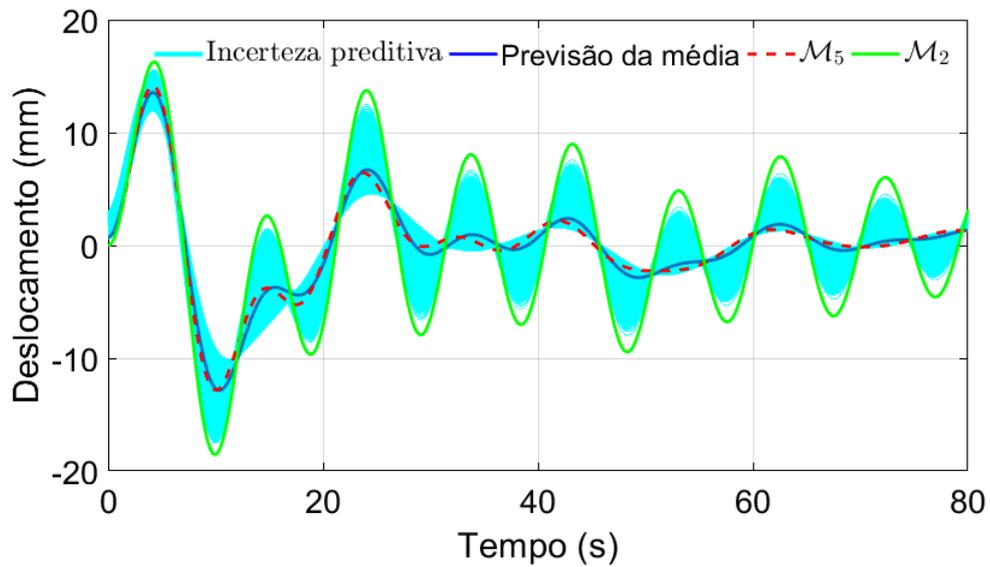


Figura 4.19: Calibração para caso 2: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_1 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

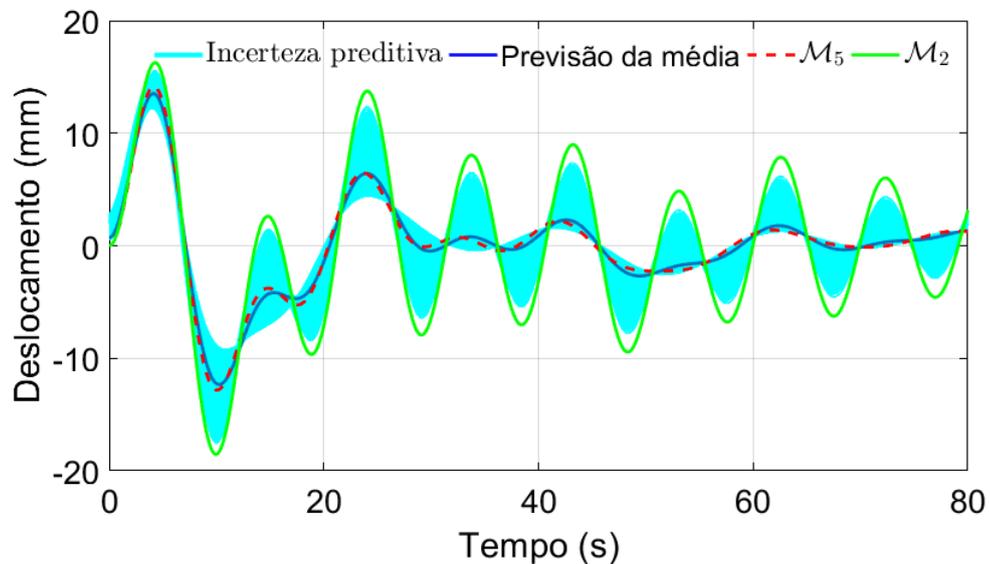


Figura 4.20: Calibração para caso 2: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com o parâmetro c_2 identificado com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

Após a análise realizada com o erro de modelo encapsulado nos parâmetros c_1 e c_2 separadamente, iniciamos um outro tipo de análise. O erro de modelo agora será encapsulado nos parâmetros para os seguintes casos c_1 e c_2 , k_1 e c_1 , k_2 e c_2 e finalmente k_1 , k_2 , c_1 e c_2 , simultaneamente. Adotamos outras distribuições a priori da Tabela 4.4 considerando o intervalos diferentes para os parâmetros que correspondem a mola elástica e parâmetros

de amortecimento.

Tabela 4.4: Distribuição da prior baseada no valor nominal de todos os parâmetros

Parâmetros	Hiperparâmetros	Limite inferior	Limite Superior
$k_1 = 0.267[N/m]$	α_1	0.600005	0.640005
	α_2	0.300005	0.599995
$k_2 = 0.042[N/m]$	α_1	0.600005	0.640005
	α_2	0.300005	0.599995
$c_1 = k_1/381.5[N/(m/s)]$	α_1	0.15000	0.16005
	α_2	0.0001	0,14995
$c_2 = k_2/72.8[N/(m/s)]$	α_1	0.15000	0.16005
	α_2	0.0001	0,14995

Nas Figuras 4.21, 4.22, 4.23 e 4.24 temos as ilustrações gráficas da evolução das cadeias dos hiperparâmetros, para os parâmetros k_1 e c_1 , k_2 e c_2 , respectivamente.

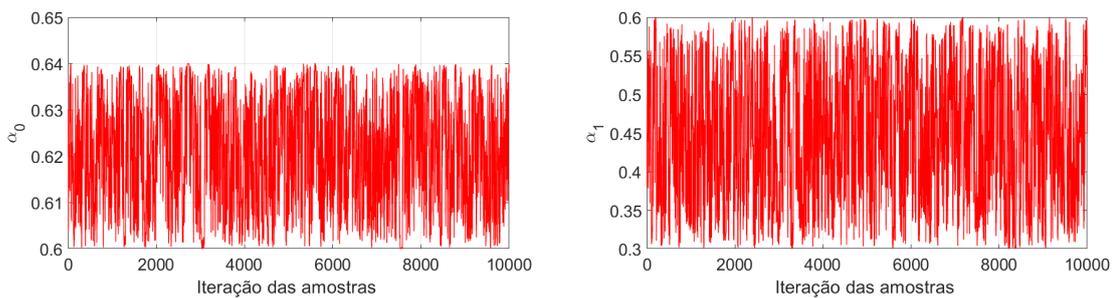


Figura 4.21: Evolução da cadeia dos hiperparâmetros para o erro encapsulado em k_1 quando k_1 e c_1 são identificados simultaneamente.

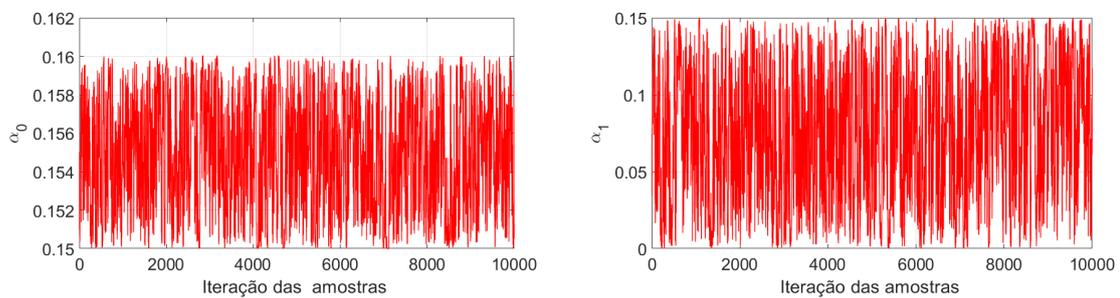


Figura 4.22: Evolução da cadeia dos hiperparâmetro para o erro encapsulado em c_1 quando k_1 e c_1 são identificados simultaneamente.

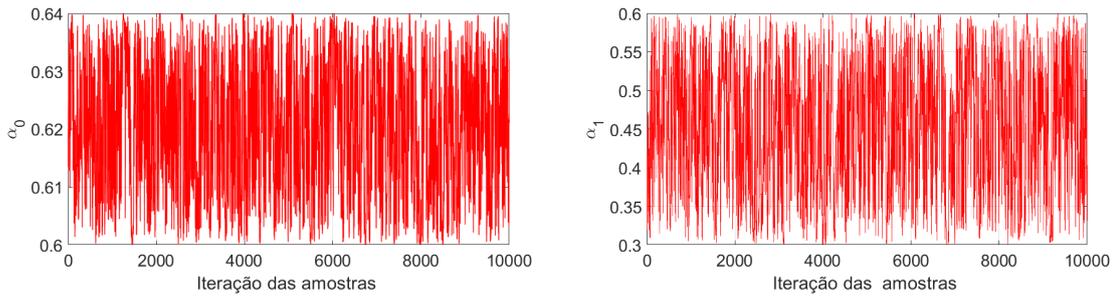


Figura 4.23: Evolução da cadeia dos hiperparâmetro para o erro encapsulado em k_2 quando k_2 e c_2 são identificados simultaneamente.

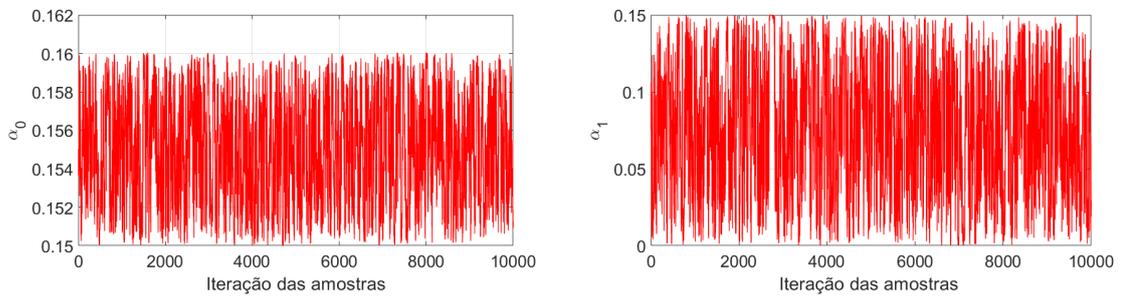


Figura 4.24: Evolução da cadeia dos hiperparâmetro para o erro encapsulado em c_2 quando k_2 e c_2 são identificados simultaneamente.

Na Figura 4.25 e 4.26 mostramos a pdf completa dos parâmetros k_1 e c_1 , k_2 e c_2 que foram identificados simultaneamente.

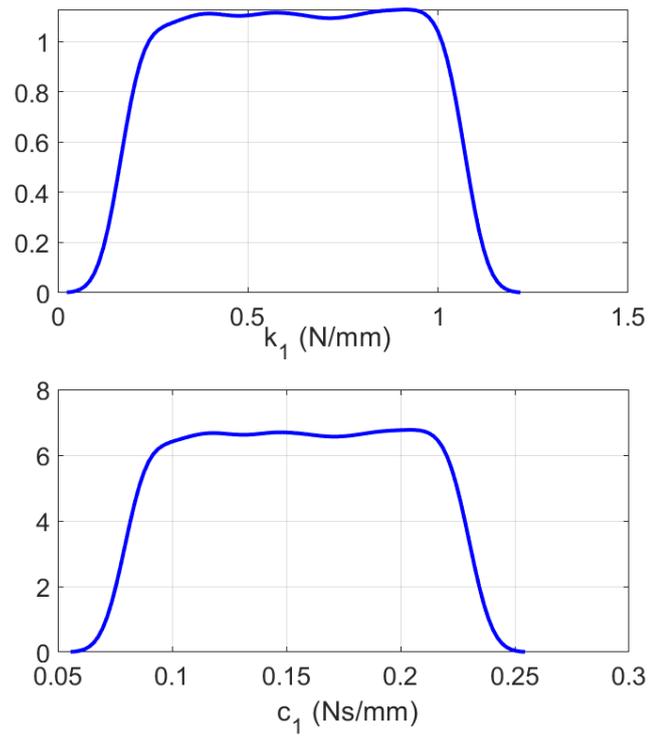


Figura 4.25: Função de distribuição de probabilidade k_1 e c_1 .

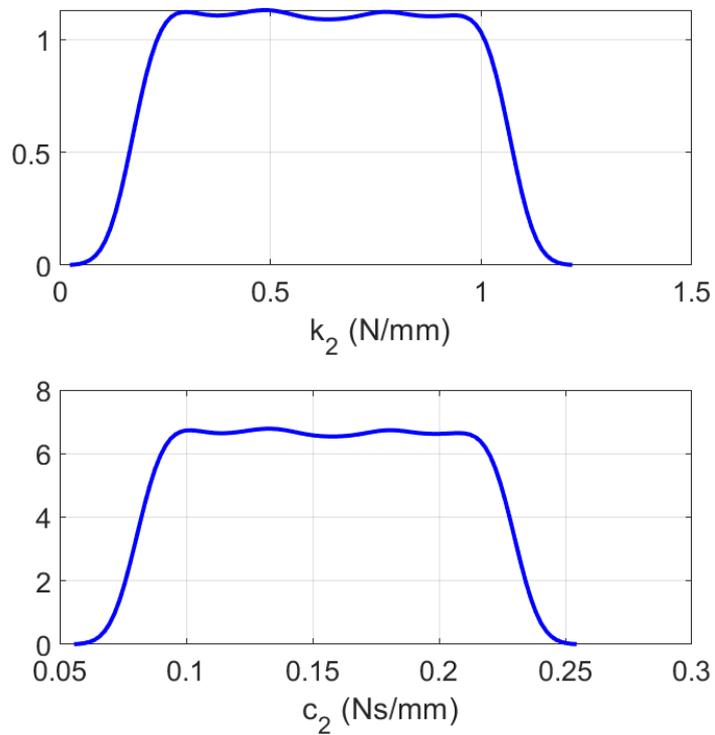


Figura 4.26: Função de distribuição de probabilidade k_2 e c_2 .

É importante ressaltar também que para avaliar as previsões novamente utilizamos o valor máximo a posterior (α_{MAP}). A Figura 4.27 demonstra que o modelo calibrado

quando o erro é encapsulado nos parâmetros c_1 e c_2 simultaneamente apresenta um desempenho pouco satisfatório em relação às previsões.

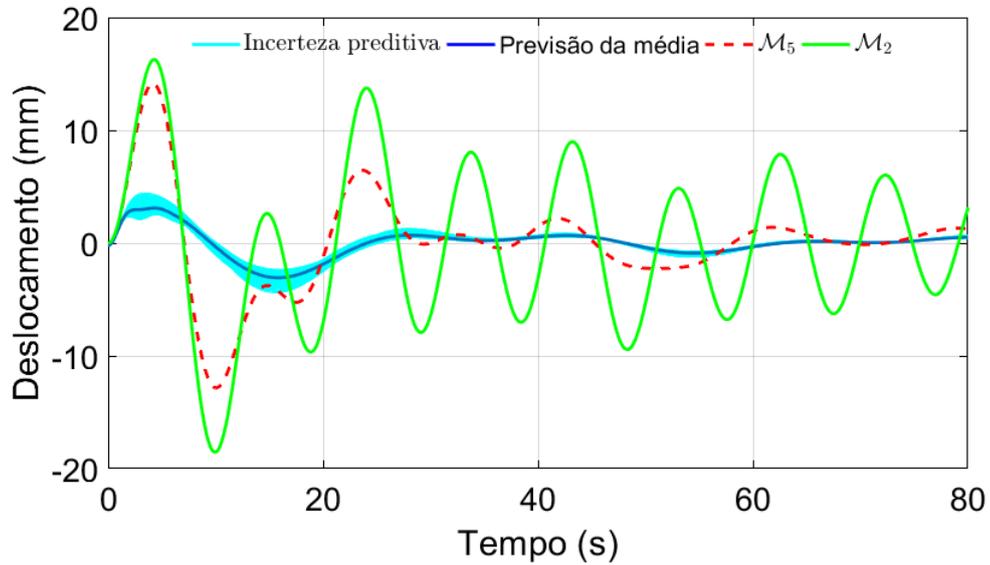


Figura 4.27: Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com os parâmetros c_1 e c_2 identificados simultaneamente com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

Os resultados apresentados para o erro de modelo encapsulado nos parâmetros k_1 e c_1 e nos parâmetros k_2 e c_2 simultaneamente estão demonstrados nas Figuras 4.28 e 4.29. Os resultados das previsões dos deslocamentos são muito parecidos. Mais uma vez a previsão da incerteza parece ser bem estreita e o modelo calibrado ilustra um comportamento muito amortecido.

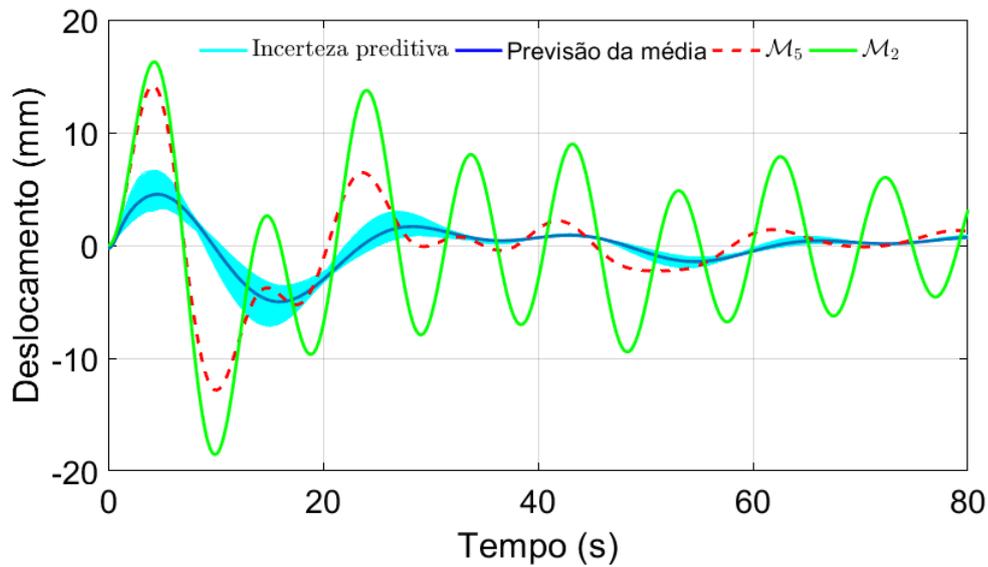


Figura 4.28: Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com os parâmetros k_1 e c_1 identificados simultaneamente com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

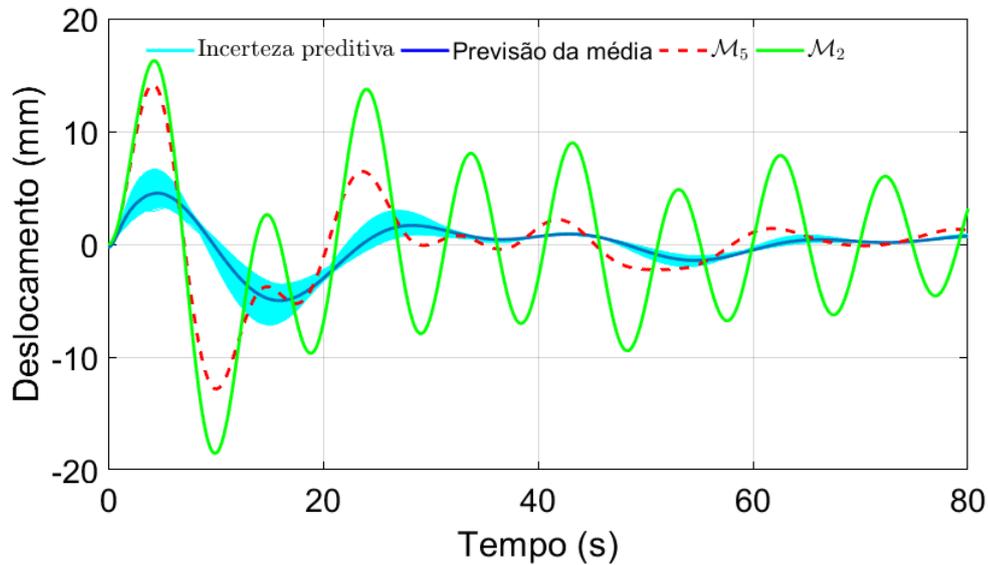


Figura 4.29: Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com os parâmetros k_2 e c_2 identificados simultaneamente com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

Outra análise importante também realizada foi o erro de modelo embutido em todos os parâmetros do modelo, tais como, k_1 , k_2 , c_1 e c_2 , simultaneamente. Neste caso, houve uma maior demanda do algoritmo para obter as previsões necessárias. A Figura 4.30 demonstra este resultado, de acordo com as previsões geradas, o modelo calibrado apresenta uma brusca alteração da resposta não capturando as previsões. Assim é preciso refletir na

escolha para a discrepância do modelo estocástico.

Os resultados apresentados com erro de modelo encapsulado em parâmetros simultaneamente não apresentaram bom desempenho, mas como notamos anteriormente na discussão sobre a distribuição a priori, o problema é muito sensível sendo interessante analisar outras distribuições a priori para estes casos.

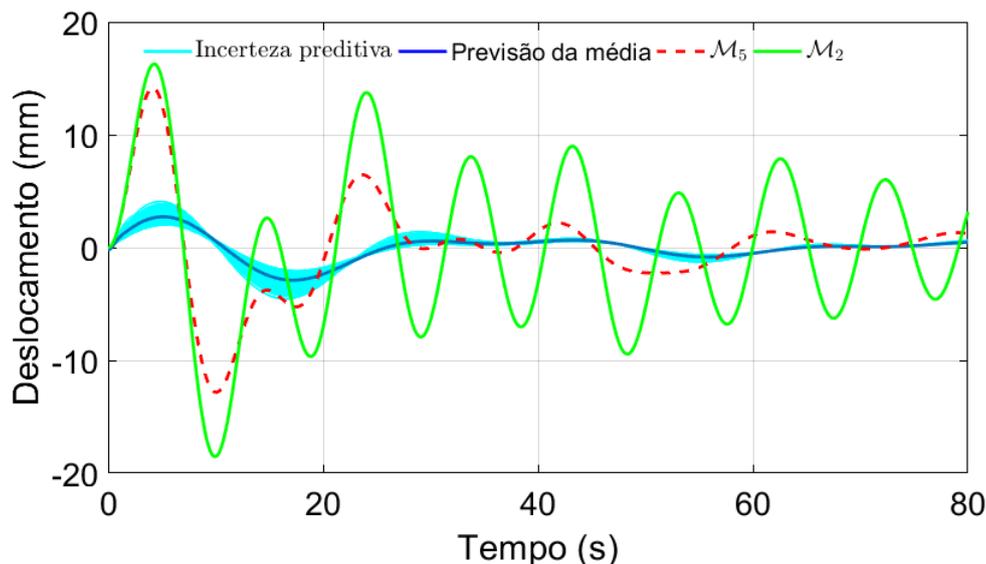


Figura 4.30: Calibração: comparando a média preditiva e a resposta das amostras \mathcal{M}_2 com todos os parâmetros identificados simultaneamente com a verdade \mathcal{M}_5 e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

A seguir serão ilustradas as etapas de Validação e Extrapolação que estão aqui ilustradas somente para as previsões realizadas com relação aos parâmetros c_1 e c_2 para as duas abordagens (erro de modelo aditivo e erro de modelo encapsulado em um parâmetro). É válido salientar que os resultados de erro de modelo encapsulado em um parâmetro serão ilustrados os obtidos no segundo caso descrito na análise da distribuição a priori. Nestas etapas avalia-se o modelo calibrado em um cenário diferente da calibração.

4.2 Resultados da Validação

Para qualificar a capacidade preditiva das versões calibradas do \mathcal{M}_2 , estabelecemos uma estratégia de validação. De fato, como a validação não pode ser alcançada no sentido geral [31], decidimos verificar o desempenho dos modelos calibrados em diferentes

cenários, caracterizados pelo carregamento representando um conteúdo de maior frequência no intervalo: $([2, 8]w_n \left(\frac{rad}{s}\right))$. Nessa faixa, o amortecimento aumenta naturalmente o que implica um período transitório mais curto. Levando isso em consideração, apenas analisamos a resposta dinâmica no período correspondente aos primeiros 30 segundos.

A etapa de validação é ilustrada, nas Figuras 4.31 e 4.32, onde as previsões com o modelo calibrado são comparadas com a verdade fornecida por \mathcal{M}_5 e com a forma inicial de \mathcal{M}_2 . A comparação é realizada usando a média preditiva e um número de amostras demonstrando as incertezas da previsão associadas às versões calibradas do \mathcal{M}_2 . É importante destacar o bom desempenho do modo de calibração em um cenário não incluído na calibração.

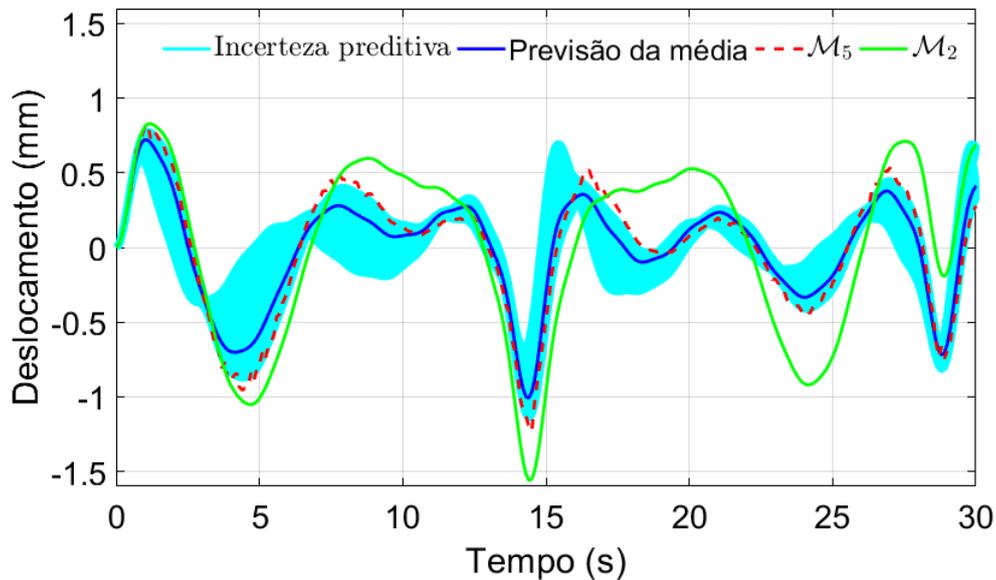


Figura 4.31: Validação - erro de modelo aditivo: comparando a média preditiva e as amostras resposta (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

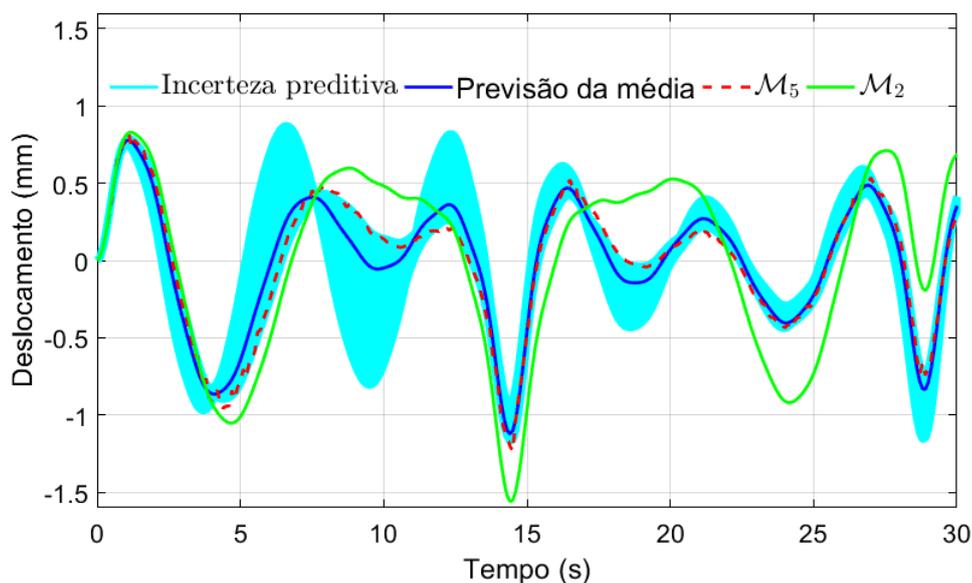


Figura 4.32: Validação - erro de modelo aditivo: comparando a média preditiva e as amostras resposta (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

Ilustramos, resumidamente, nas Figuras 4.33 e 4.34 os testes de validação aplicados à abordagem de erro do modelo encapsulados nos parâmetros c_1 e c_2 separadamente para o caso 2. Comparando-se as previsões do modelo calibrado \mathcal{M}_2 com o modelo de referência \mathcal{M}_5 pode-se notar nestes gráficos, após aproximadamente 13 segundos, um bom desempenho do modelo de calibração.

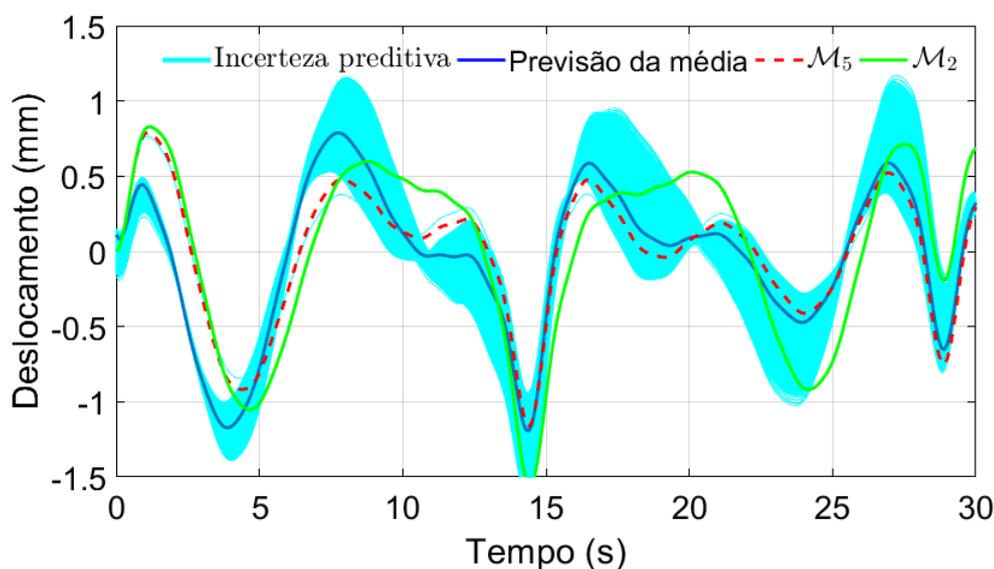


Figura 4.33: Validação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva e as amostras resposta (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

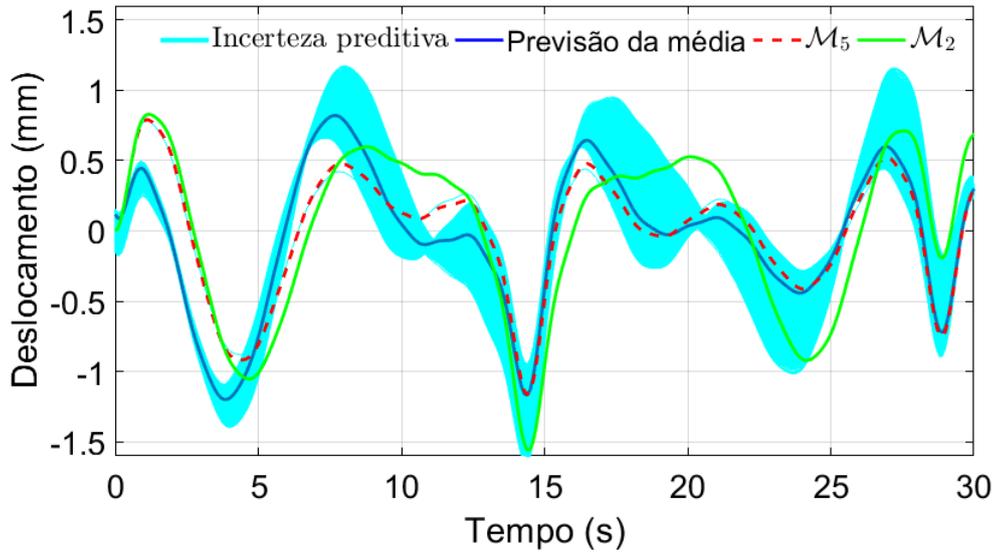


Figura 4.34: Validação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva e as amostras resposta (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2 .

4.3 Resultados da Extrapolação

A extrapolação depende do projeto de procedimentos rigorosos que levam em consideração o conhecimento sobre a física subjacente e qualquer outra informação disponível. Isso significa que tal avaliação depende fortemente da natureza do objetivo pretendido com a simulação e do novo cenário a ser explorado [60].

O objetivo fundamental ao lidar com essas duas estratégias de calibração é avaliar a capacidade preditiva dos modelos resultantes e quantificar incertezas. Não deve ser restrito ao cenário em que a calibração foi realizada e não considerando apenas os dados observáveis usados para identificar os parâmetros. Portanto, extrapolamos e realizamos testes adicionais e mais desafiadores em relação a QoIs em tais condições, a *velocidade* da massa em diferentes aspectos da previsão, a quantidade de dissipação ao longo do período da janela de tempo expressa na resposta deslocamento. Agora, excitamos o sistema com um conteúdo frequencial : $[0.25, 0.5]w_n \left(\frac{rad}{s}\right)$ e $[2, 8]w_n \left(\frac{rad}{s}\right)$.

Mostramos as respostas de velocidade nas Figuras 4.35 e 4.36 com erro de modelo aditivo e nas Figuras 4.37 e 4.38 com o erro de modelo encapsulado nos parâmetros para os resultados com os modelos nos quais o conteúdo frequencial : $[0.25, 0.5]w_n \left(\frac{rad}{s}\right)$. Vale ressaltar que as tendências dos comportamentos são muito próximos aos resultados da calibração.

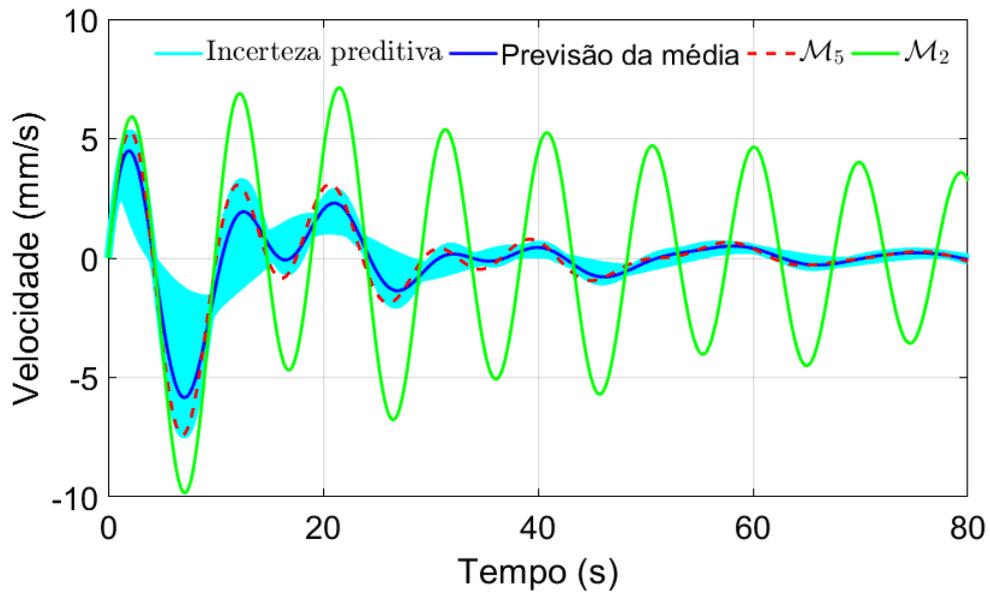


Figura 4.35: Extrapolação - erro do modelo aditivo: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2

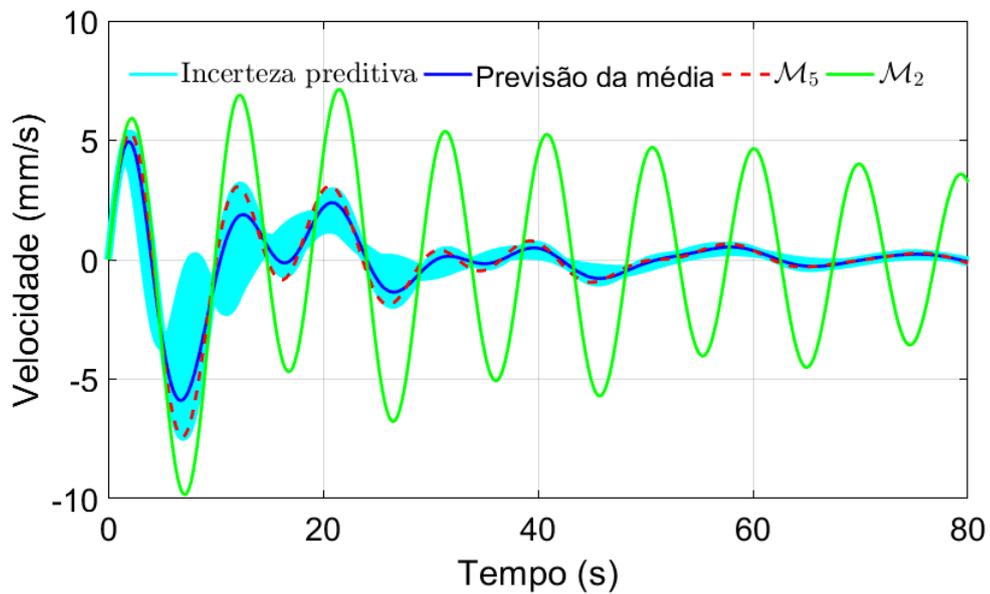


Figura 4.36: Extrapolação - erro do modelo aditivo: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2

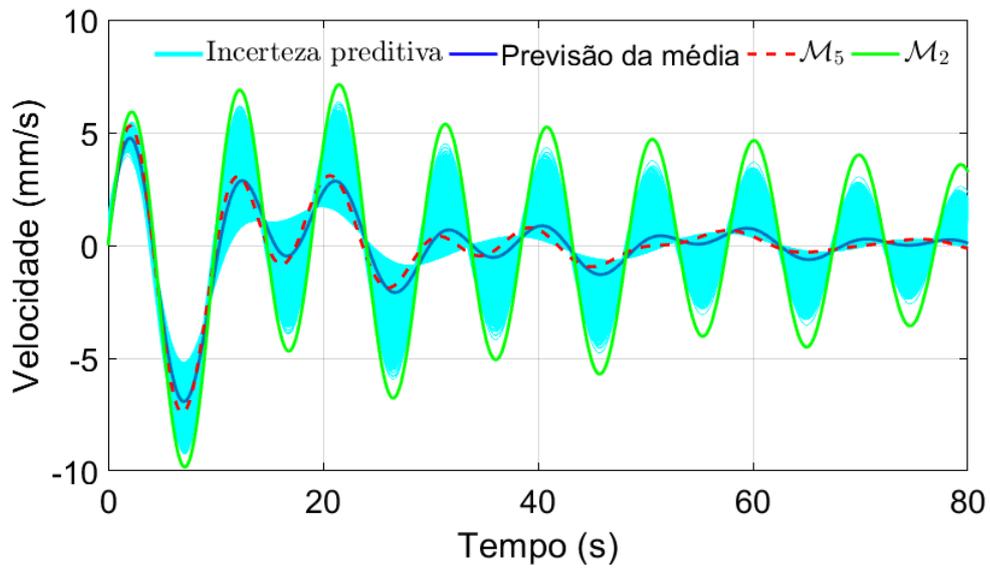


Figura 4.37: Extrapolação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2

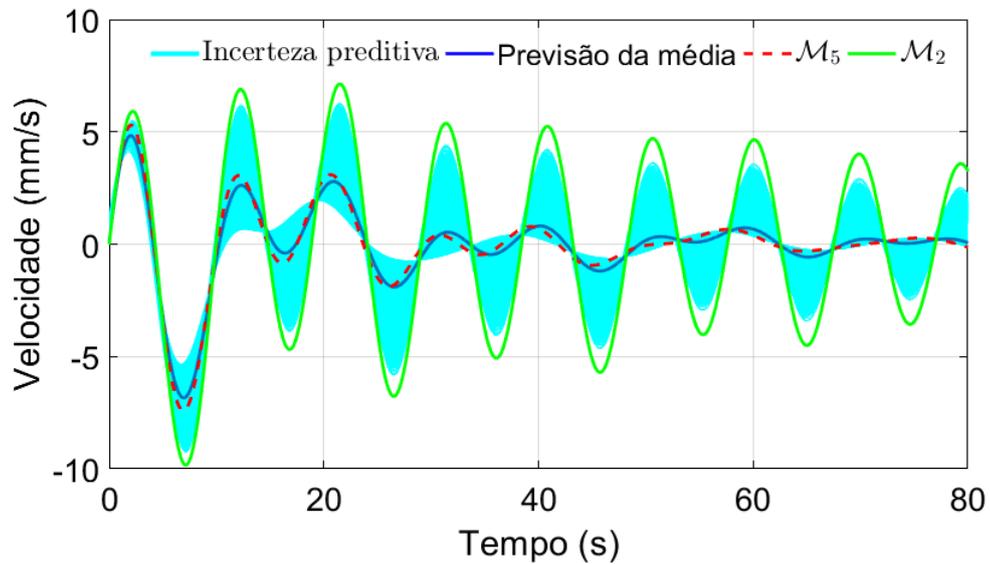


Figura 4.38: Extrapolação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2

Ilustramos também as respostas de velocidade nas Figuras 4.39 e 4.40 com erro de modelo aditivo e nas Figuras 4.41 e 4.42 com o erro de modelo incorporado para os resultados com os modelos nos quais o conteúdo frequencial : $[2, 8]w_n \left(\frac{rad}{s} \right)$. É importante

dizer que para esta estratégia de Extrapolação a abordagem de erro de modelo encapsulado em um parâmetro o bom desempenho é ilustrado após os 13 segundos aproximadamente.

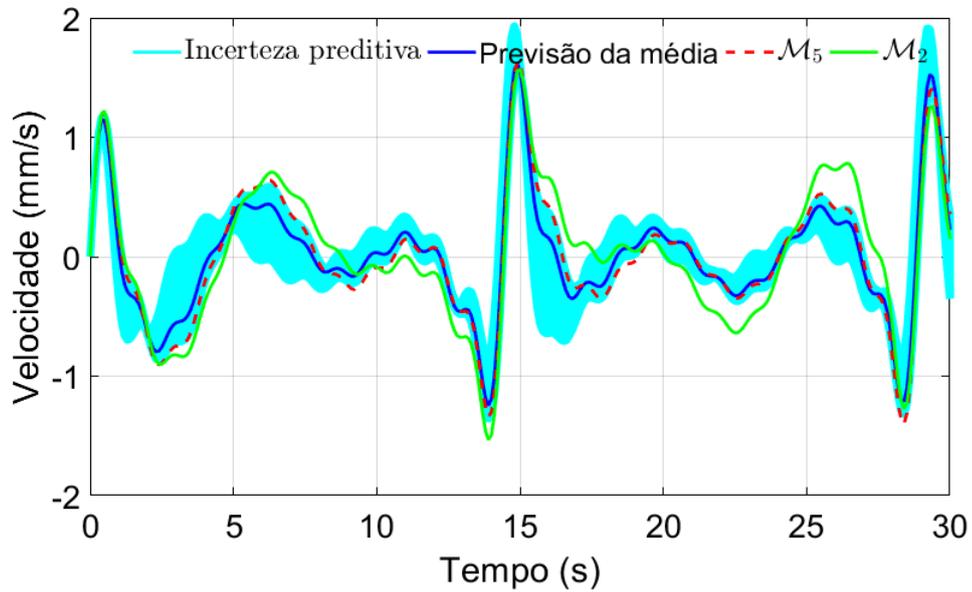


Figura 4.39: Extrapolação - erro do modelo aditivo: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2

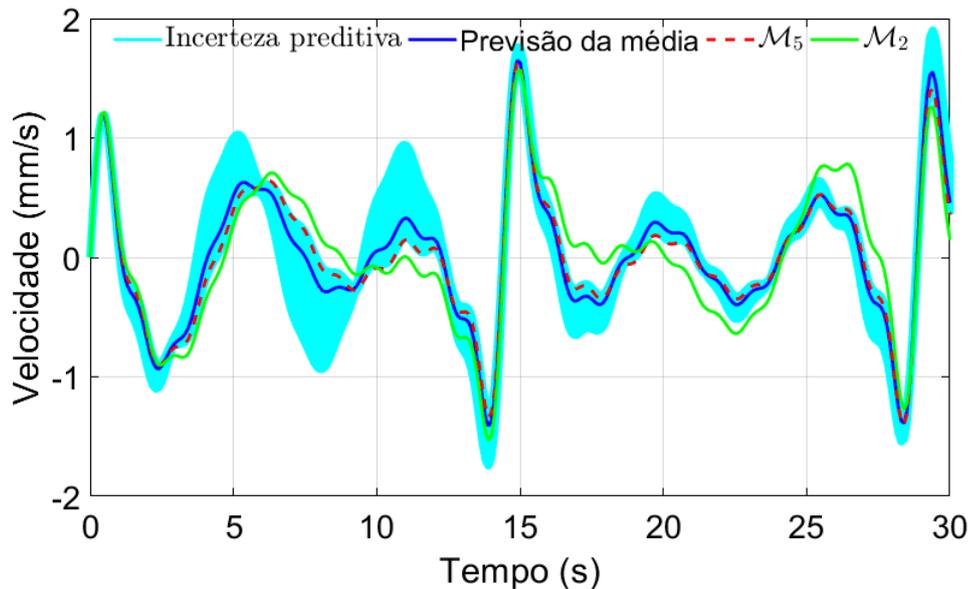


Figura 4.40: Extrapolação - erro do modelo aditivo: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2

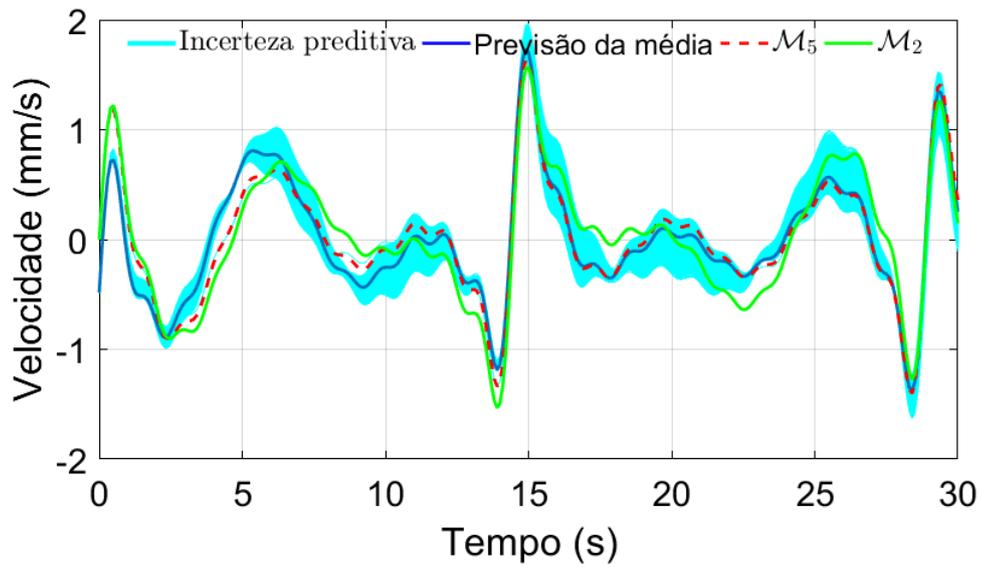


Figura 4.41: Extrapolação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_1) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2

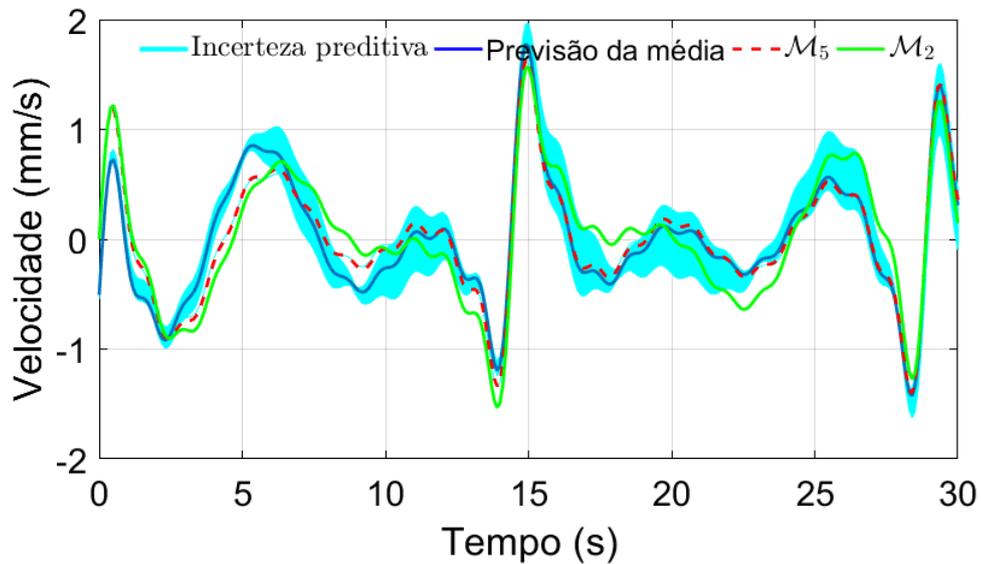


Figura 4.42: Extrapolação - erro de modelo encapsulado: comparando a média preditiva da velocidade e resposta de amostras (calibração c_2) com a verdade (\mathcal{M}_5) e o modelo original de baixa fidelidade \mathcal{M}_2

4.4 Análise do comportamento dissipativo

Por fim, voltamos a atenção para a capacidade dos modelos de capturar a dissipação do amortecimento ao longo do tempo. Neste ponto, é importante destacar que o objetivo

da calibração não é identificar parâmetros constitutivos, mas atualizar a capacidade de fazer previsões. Isso deve refletir na intenção da modelagem, que aqui está reproduzindo o comportamento de dissipação. Plotamos as curvas de histerese para as três experiências calibração, validação e extrapolação.

Calibração

A Figura 4.43 mostra uma diferença significativa nesse sentido entre \mathcal{M}_2 , antes da calibração, e \mathcal{M}_5 , considerada aqui a verdade de referência. A dissipação associada aos modelos calibrados com o erro de modelo aditivo e com o erro encapsulado em um parâmetro é mostrada nas Figuras 4.44 e 4.45, respectivamente. Claramente é possível observar uma melhoria significativa quando comparada ao modelo \mathcal{M}_2 não calibrado e em todos ilustra uma melhora na quantidade de energia dissipada.

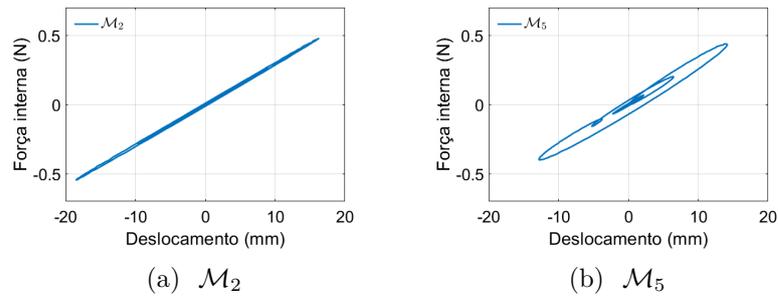


Figura 4.43: Curva de histerese para \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_5 antes da calibração.

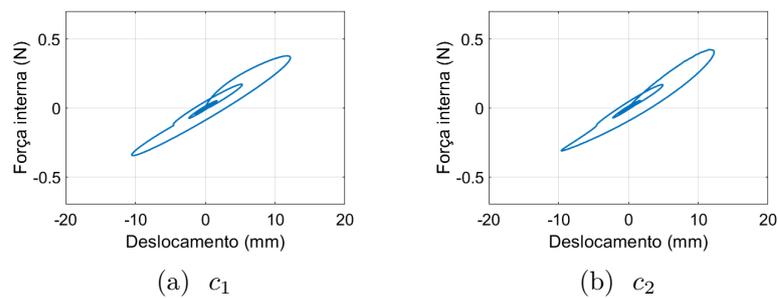


Figura 4.44: Calibração: Curva de histerese (erro de modelo aditivo) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2 .

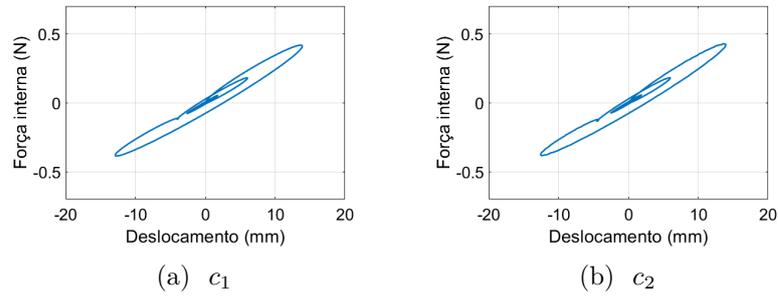


Figura 4.45: Calibração: Curva de histerese (erro de modelo encapsulado em um parâmetro) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2 .

Validação

A Figura 4.46 ilustra uma diferença do modelo \mathcal{M}_2 , na validação, e o modelo \mathcal{M}_5 , considerado aqui a verdade de referência. A dissipação associada aos modelos validados com o erro de modelo aditivo é ilustrada na Figura 4.47 e com a abordagem de erro modelo encapsulado em um parâmetro na Figura 4.48. É possível notar mais uma vez que comparando com o modelo \mathcal{M}_2 não calibrado o formato das curvas de histerese ilustra um comportamento muito parecido com o modelo de referência (\mathcal{M}_5). É possível observar uma melhora na quantidade de energia dissipada e uma diferença significativa do modelo não calibrado \mathcal{M}_2 .

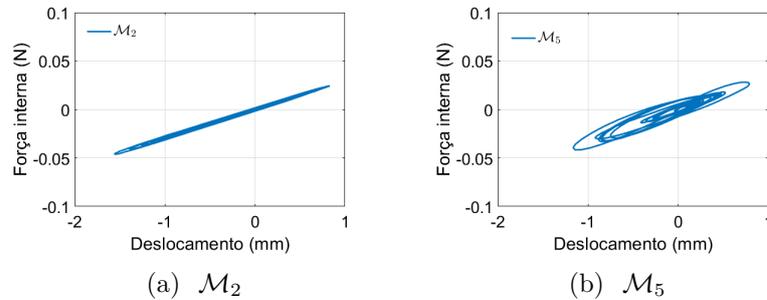


Figura 4.46: Curva de histerese para \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_5 na validação.

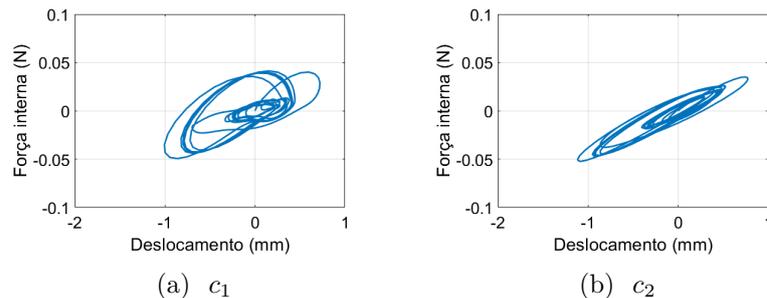


Figura 4.47: Validação: Curva de histerese (erro de modelo aditivo) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2 .

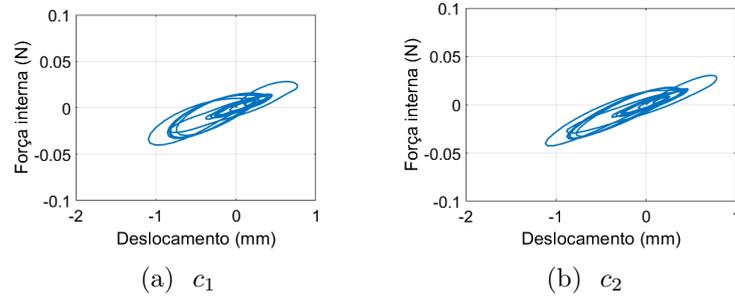


Figura 4.48: Validação: Curva de histerese (erro de modelo encapsulado em um parâmetro) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2 .

Extrapolação

Aqui é ilustrada a quantidade de dissipação expressa nas curvas de histerese para a estratégia de Extrapolação. Lembrando que a QoI investigada é a *velocidade* da massa para dois tipos diferentes de conteúdo frequencial. Nas Figuras 4.49, 4.50 e 4.51 são ilustradas as curvas para o conteúdo frequencial de $[0.25, 0.5]w_n \left(\frac{rad}{s}\right)$. Nas Figuras 4.52, 4.53 e 4.54 são ilustradas as curvas para o conteúdo frequencial de $[2, 8]w_n \left(\frac{rad}{s}\right)$. Para as duas estratégias pode-se observar que existe uma diferença significativa entre o modelo \mathcal{M}_2 não calibrado e o modelo de referência \mathcal{M}_5 , além de, tanto na abordagem de erro de modelo aditivo quanto na abordagem de erro encapsulado em um parâmetro as curvas de histerese apresentam um comportamento mais parecido com o modelo de referência \mathcal{M}_5 .

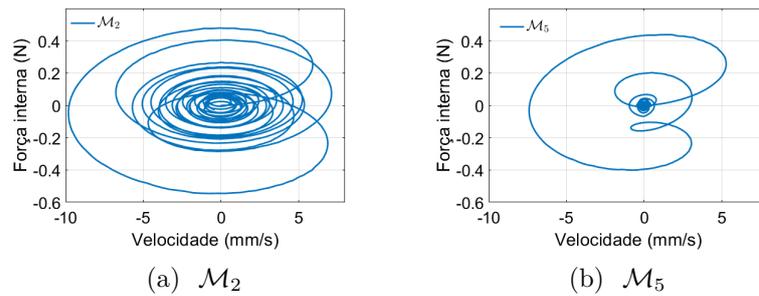


Figura 4.49: Curva de histerese para \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_5 na extrapolação.

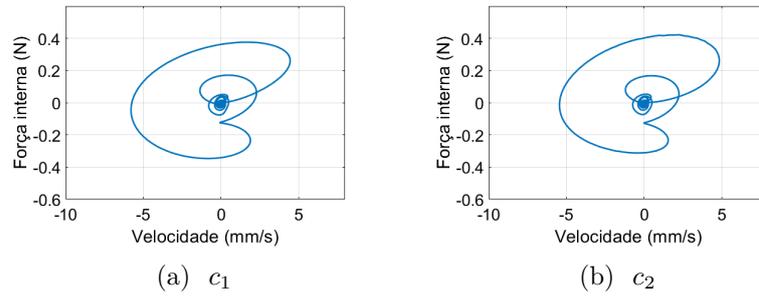


Figura 4.50: Extrapolação: Curva de histerese (erro de modelo aditivo) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2 .

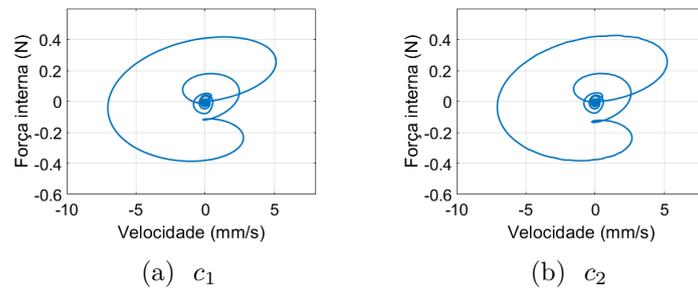


Figura 4.51: Extrapolação: Curva de histerese (erro de modelo encapsulado em um parâmetro) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2 .

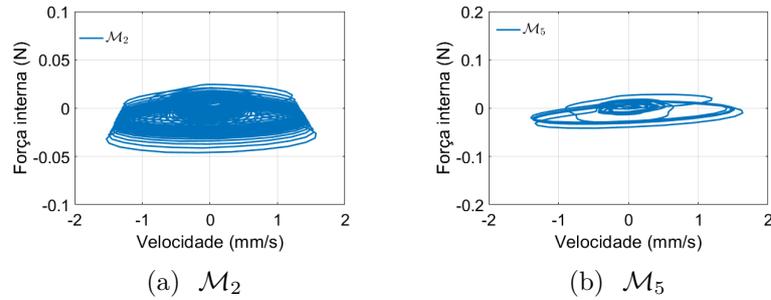


Figura 4.52: Curva de histerese para \mathcal{M}_2 e \mathcal{M}_5 na extrapolação.

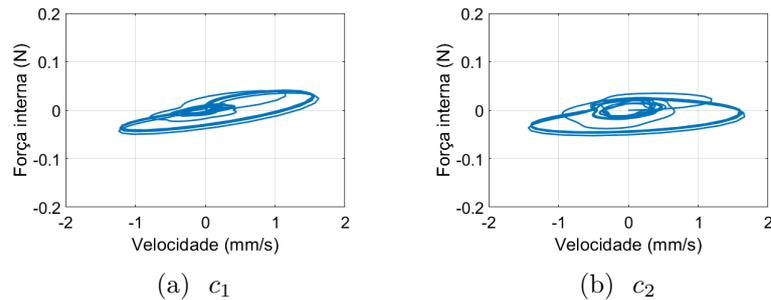


Figura 4.53: Extrapolação: Curva de histerese (erro de modelo aditivo) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2 .

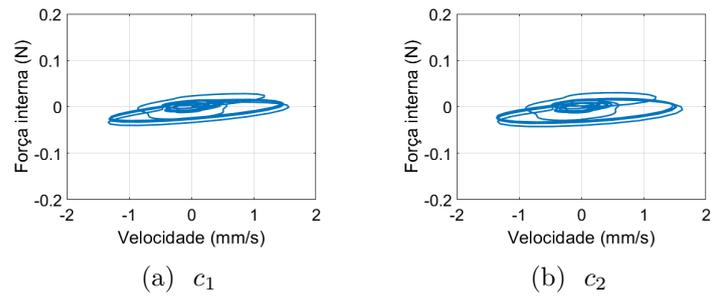


Figura 4.54: Extrapolação: Curva de histerese (erro de modelo encapsulado em um parâmetro) para \mathcal{M}_2 , c_1 e c_2 .

Capítulo 5

Conclusões

No presente trabalho, deu-se continuidade a esforços anteriores para avaliar modelos constitutivos viscoelásticos usando variáveis internas [2] e [16]. Eles constituem opções convenientes para formulações de Elementos Finitos em 3 dimensões (3D) aplicadas a problemas de Dinâmica e Vibrações, atribuídos independentemente a cada ponto de integração da grade computacional.

As variáveis internas não são grandezas físicas observáveis, assim o foco foi caracterizar e compreender o papel desempenhado por elas nos modelos constitutivos viscoelásticos. Para isso, como artifício de modelagem, foi construído um problema de calibração Bayesiana envolvendo modelos de diferente fidelidade. Essa diferença de fidelidade foi regulada pelo número de variáveis internas utilizadas em cada modelo.

Previamente à calibração, foi levada a cabo uma análise da resposta dinâmica de um sistema com um grau de liberdade para estabelecer, preliminarmente, a diferença entre modelos de variáveis internas tornando possível compreender que a ideia de modelos hierárquicos faz sentido. Sendo admissível a partir desta análise intitular modelos de alta fidelidade e modelos de baixa fidelidade. Neste trabalho o modelo que apresentou maior número de variáveis internas foi denominado de modelo de alta fidelidade, uma vez que, são mais representativos do ponto de vista de amortecimento. Outro ponto marcante foi a investigação da potência dissipada que balizou e coroou esta análise permitindo observar claramente as diferenças entre os modelos e orientar a análise da abordagem bayesiana.

Na inferência bayesiana foram utilizadas formulações inversas envolvendo modelos de alta fidelidade e modelos de baixa fidelidade. Utilizaram-se duas formulações para a calibração como erro de modelo aditivo e erro de modelo encapsulado em um parâmetro. Essas se diferenciam pela maneira como o erro de modelo é responsável pela discrepância produzida por um pequeno número de variáveis internas. Nesta etapa pretende-se abordar um aspecto específico: o papel desempenhado pelo número de variáveis internas.

É importante enfatizar que o uso de um pequeno número desses modos de dissipação interna garantiria economia computacional significativa, seja em memória seja no processamento. Diante dos resultados apresentados, pode-se dizer que as análises adotadas permitiram alcançar contribuições relevantes tanto no aspecto amortecimento quanto no aspecto computacional. O primeiro possibilitou uma melhor compreensão do comportamento e influência das variáveis internas nos diferentes modelos constitutivos viscoelásticos. E finalmente, o segundo permitiu visualizar que modelos de baixa fidelidade tem a capacidade preditiva de representar modelos de alta fidelidade caracterizando um papel inovador de um modelo estocástico simplificado de ordem reduzida poder ser capaz de representar modelos mais complexos.

O objetivo de próximos trabalhos é explorar a flexibilidade do erro de modelo encapsulado em um parâmetro de suportar modelos estocásticos mais sofisticados, como polinômios de ordem superior ou mesmo funções das variáveis de estado, alm de investigar a escolha da distribuição a priori e utilizar outras funções de verossimilhança para a modelagem.

Referências Bibliográficas

- [1] MOSCHEN, I. D. C. *Sobre as funções Mittag – Leffler e o modelo fracionário de materiais viscoelásticos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.
- [2] CASTELLO, D. A., ROCHINHA, F. A., ROITMAN, N., et al. “Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 22, n. 8, pp. 1840–1857, 2008. ISSN: 08883270.
- [3] DOS SANTOS, E. F. *Atenuadores visco-elásticos para redução de oscilações aerodinâmicas de edifícios altos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 2003.
- [4] SILVA, R. P. *Desenvolvimento de metodologias para caracterização de materiais viscoelásticos em baixas frequências*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 2007.
- [5] MARRA, J. C. D. O. *Controle Híbrido de vibrações em estruturas sob excitação de banda larga utilizando neutralizador viscoelástico e filtro adaptativo*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.
- [6] DIACENCO, A. A. *Modelagem por elementos finitos de materiais compósitos estruturais incorporando material viscoelástico para o controle passivo de vibração e ruído*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Itajubá, 2010.
- [7] RIBEIRO, E. A., PEREIRA, J. T., ALBERTO BAVASTRI, C. “Passive vibration control in rotor dynamics: Optimization of composed support using viscoelastic materials”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 351, pp. 43–56, sep 2015. ISSN: 0022460X. doi: 10.1016/j.jsv.2015.04.007.
- [8] ZHOU, X., YU, D., SHAO, X., et al. “Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review”, *Composite Structures*, v. 136, pp. 460–480, feb 2016. ISSN: 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.10.014.

- [9] ENGINEERS, AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL, A. *Guide for verification and validation in computational solid mechanics*. Relatório técnico, 2006.
- [10] KAIPO, J; SOMERSALO, E. *Statistical and Computational Inverse Problems*. 2004.
- [11] WORDEN, K., HENSMAN, J. “Parameter estimation and model selection for a class of hysteretic systems using Bayesian inference”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 32, pp. 153–169, oct 2012. ISSN: 08883270. doi: 10.1016/j.ymsp.2012.03.019.
- [12] ZHANG, E., CHAZOT, J., ANTONI, J., et al. “Bayesian characterization of Young’s modulus of viscoelastic materials in laminated structures”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 332, n. 16, pp. 3654–3666, aug 2013. ISSN: 0022460X. doi: 10.1016/j.jsv.2013.02.032.
- [13] FIGUEIREDO, E., RADU, L., WORDEN, K., et al. “A Bayesian approach based on a Markov-chain Monte Carlo method for damage detection under unknown sources of variability”, *Engineering Structures*, v. 80, pp. 1–10, dec 2014. ISSN: 01410296. doi: 10.1016/j.engstruct.2014.08.042.
- [14] GREEN, P., CROSS, E., WORDEN, K. “Bayesian system identification of dynamical systems using highly informative training data”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 56-57, pp. 109–122, may 2015. ISSN: 08883270. doi: 10.1016/j.ymsp.2014.10.003.
- [15] GREEN, P. L., WORDEN, K. “Bayesian and Markov chain Monte Carlo methods for identifying nonlinear systems in the presence of uncertainty”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 373, n. 2051, pp. 20140405, sep 2015. ISSN: 1364-503X. doi: 10.1098/rsta.2014.0405.
- [16] BORGES, F., CASTELLO, D., MAGLUTA, C., et al. “An experimental assessment of internal variables constitutive models for viscoelastic materials”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 50-51, pp. 27–40, jan 2015. ISSN: 08883270.
- [17] HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering Mechanics*. Wiley, 2001. ISBN: 0-47183219-8.
- [18] MAUGIN, G. “The saga of internal variables of state in continuum thermo-mechanics (1893-2013)”, *Mechanics Research Communications*, v. 69, 06 2015.
- [19] ZHE DING, LI LI, Y. H. “A modified precise integration method for transient dynamic analysis in structural systems with multiple damping models”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 98, pp. 613–633, 2018.

- [20] KENNEDY, M. C., O'HAGAN, A. "Bayesian calibration of computer models", *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, v. 63, n. 3, pp. 425–464, 2001. ISSN: 1467-9868.
- [21] BRYNJARSDÓTIR, J., O. A. "Learning about physical parameters: the importance of model discrepancy", *Inverse Problems*, v. 30, n. 11, 2014.
- [22] SARGSYAN, K., NAJM, H. N., GHANEM, R. "On the Statistical Calibration of Physical Models", *International Journal of Chemical Kinetics*, v. 47, n. 4, pp. 246–276, 2015. ISSN: 1097-4601.
- [23] REGGIO, A., DE ANGELIS, M. "Modelling and identification of structures with rate-independent linear damping", *Meccanica*, v. 50, n. 3, pp. 617–632, mar 2015. ISSN: 0025-6455.
- [24] WINEMAN, ALAN. S , RAJAGOPAL, K. R. *Mechanical Response of Polymers An Introduction*. Press, Cambridge University, 2000.
- [25] MARQUES, S. P. C., CREUS, G. J. *Computational Viscoelasticity*. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 978-3-642-25310-2. doi: 10.1007/978-3-642-25311-9.
- [26] FLÜGGE, W. *Viscoelasticity*. Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 1975. ISBN: 978-3-662-02278-8. doi: 10.1007/978-3-662-02276-4.
- [27] HORSTEMEYER, M. F., BAMMANN, D. J. "Historical review of internal state variable theory for inelasticity", *International Journal of Plasticity*, v. 26, n. 9, pp. 1310–1334, sep 2010. ISSN: 07496419.
- [28] HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. John Wiley and Sons, 2001.
- [29] DA SILVA, L. A. *Internal Variable and Temperature Modeling Behavior of Viscoelastic Structures- A Control Analysis*. Tese de Doutorado, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, 2003.
- [30] CASTELLO, D. A. *Modelagem e Identificação de Materiais Viscoelásticos do Domínio do Tempo*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, 2004.
- [31] OLIVER, T. A., TEREJANU, G., SIMMONS, C. S., et al. "Validating predictions of unobserved quantities", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, pp. 1310 – 1335, 2015.

- [32] ORLANDE, HÉLCIO R. B. COLAÇO, COTTA, MARCELO J., C. P. N., GUIMARÃES, GILMAR BORGES, V. L. *Problemas Invesos em Transferência de Calor*. 2011. ISBN: 978-85-86883-53-8.
- [33] LA TORRE, D., KUNZE, H., MENDIVIL, F., et al. “Inverse Problems: Theory and Application to Science and Engineering 2015”, *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2015, pp. 1–3, 2015. ISSN: 1024-123X. doi: 10.1155/2015/796094.
- [34] NAGEL, JOSEPH; SUDRET, B. “Probabilistic Inversion for Estimating the Variability of Material Properties: A Bayesian Multilevel Approach”, *Proceedings of the 11th International Probabilistic Workshop*, 2013.
- [35] PAVLIK, M. *The Dependence of Suspension Viscosity on Particle Size, Shear Rate, and Solvent Viscosity (Ph.D. thesis)*. Tese de Doutorado, DePaul University, Illinois, 2009.
- [36] MORRISON, R. E., OLIVER, T. A., MOSER, R. D. “Representing model inadequacy: A stochastic operator approach”, *SIAM / ASA Journal on Uncertainty Quantification (JUQ)*, v. 6, n. 2, pp. 457 – 496, 2018.
- [37] MILES, P., HAYS, M., SMITH, R., et al. “Bayesian uncertainty analysis of finite deformation viscoelasticity”, *Mechanics of Materials*, v. 91, pp. 35–49, dec 2015. ISSN: 01676636.
- [38] SARGSYAN, K., HUAN, X., NAJM, H. N. “Embedded Model Error Representation for Bayesian Model Calibration”, *arXiv:1801.06768*, 2019.
- [39] SMITH, R. C. *Uncertainty Quantification: Theory, Implementation, and Applications*. North Carolina, North Carolina State University., SIAM, Computational Science & Engineering, 2014. ISBN: 978-1-611973-21-1.
- [40] HOFF, P. D. *A First Course in Bayesian Statistical Methods*. Springer Texts in Statistics. New York, NY, Springer New York, 2009. ISBN: 978-0-387-92299-7. doi: 10.1007/978-0-387-92407-6.
- [41] RESENDE, M., REGINA, C., BRIGHENTI, G. “Sensibilidade da priori na análise bayesiana de dados provenientes da distribuição normal”, pp. 709–713.
- [42] MILES, P., HAYS, M., SMITH, R., et al. “Bayesian uncertainty analysis of finite deformation viscoelasticity”, *Mechanics of Materials*, v. 91, pp. 35–49, dec 2015. ISSN: 01676636.

- [43] XIAO, H., WU, J., WANG, J.-X., et al. “Quantifying and reducing model-form uncertainties in Reynolds averaged Navier–Stokes equations: A data-driven, physics-informed Bayesian approach”, *Journal of Computational Physics*, v. 324, pp. 115–136, 08 2016.
- [44] PORTONE, T., MCDOUGALL, D. MOSER, R. D. “A Stochastic Operator Approach to Model Inadequacy with Applications to Contaminant Transport”, -, 2 2017.
- [45] LING, Y., MULLINS, J., MAHADEVAN, S. “Selection of model discrepancy priors in Bayesian calibration”, *Journal of Computational Physics*, v. 276, pp. 665 – 680, 2014.
- [46] LING, Y., MULLINS, J., MAHADEVAN, S. “Calibration of multi-physics computational models using Bayesian networks”, -, 6 2012.
- [47] PERNOT, P. “The parameter uncertainty inflation fallacy”, *The Journal of Chemical Physics*, v. 147, n. 10, pp. 104102, 2017.
- [48] PERNOT, P., CAILLIEZ, F. “A critical review of statistical calibration-prediction models handling data inconsistency and model inadequacy”, *AIChE Journal*, v. 63, n. 10, pp. 4642 – 4665, 2017.
- [49] HUAN, X., SAFTA, C., SARGSYAN, K., et al. “Global Sensitivity Analysis and Quantification of Model Error for Large Eddy Simulation in Scramjet Design”, *19th AIAA Non-Deterministic Approaches Conference*, 2017. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2017-1089>>.
- [50] F.RIZZIA1, M.KHALIL, R. J. J., B.L.BOYCE. “Bayesian modeling of inconsistent plastic response due to material variability”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 353, pp. 183–200, 2019.
- [51] ZIO, S., COSTA, H. F., GUERRA, G. M., et al. “Bayesian assessment of uncertainty in viscosity closure models for turbidity currents computations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 342, pp. 653 – 673, 2018.
- [52] BERLINER, L. “Physical-statistical modeling in geophysics”, *Journal of Geophysical Research*, v. 128, 2003.
- [53] STEPHEN WU, PANAGIOTIS ANGELIKOPOULOS, J. L. B. P. K. “Hierarchical Stochastic Model in Bayesian Inference for Engineering Applications: Theoretical Implications and Efficient Approximation”, *ASCE-ASME Journal of*

Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B: Mechanical Engineering, 2019.

- [54] ABHINAV SUBRAMANIAN, S. M. “Bayesian estimation of discrepancy in dynamics model prediction”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 123, pp. 351–368, 2019.
- [55] SOIZE, C., GHANEM, R. “Polynomial chaos representation of databases on manifolds”, *Journal of Computational Physics*, v. 335, pp. 201 – 221, 2017.
- [56] ADAMS, B. M., EBEIDA, M. S., ELDRED, M. S., et al. *Dakota, A Multilevel Parallel Object-Oriented Framework for Design Optimization, Parameter Estimation, Uncertainty Quantification, and Sensitivity Analysis: Version 6.0 User’s Manual*, 2014.
- [57] LUIZ ANTONIO AGUIRRE. *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. 3. ed ed. Belo Horizonte, 2007. ISBN: 978-85-7041-584-4.
- [58] ABDESSALEM, A. B., DERVILIS, N., WAGG, D., et al. “Model selection and parameter estimation of dynamical systems using a novel variant of approximate Bayesian computation”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 122, pp. 364–386, 2019.
- [59] SANDHU, R., PETTIT, C., KHALIL, M., et al. “Bayesian model selection using automatic relevance determination for nonlinear dynamical systems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 320, pp. 237–260, 2017.
- [60] ARENDT, P., W. APLEY, D., CHEN, W. “Quantification of Model Uncertainty: Calibration, Model Discrepancy, and Identifiability”, *Journal of Mechanical Design*, v. 134, pp. 100908, 09 2012. doi: 10.1115/1.4007390.