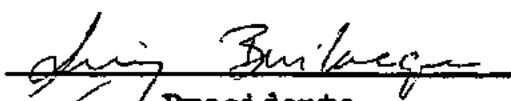
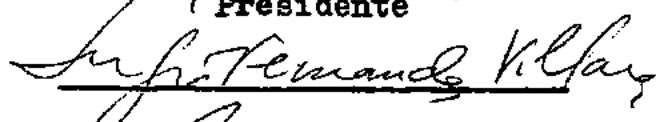
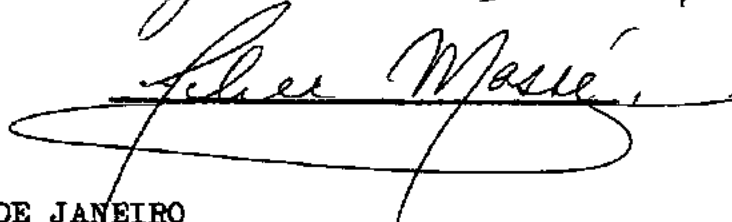


"ESTUDO DE UM PROBLEMA DE "SNAP" DINÂMICO MEDIANTE  
O MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV"

PAULO RIZZI

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRA  
MAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDE +  
RAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁ -  
RIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

  
Presidente  
  


RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

AGOSTO DE 1971

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Peter Hagedorn, pela eficiente orientação e incentivo.

À Universidade de Karlsruhe, na pessoa do Prof. E. Mettler, que tornou possível a realização desta pesquisa.

À COPPE, na pessoa do Prof. Alberto Luiz Coimbra.

Ao CNPQ e ao DAAD, pelo suporte financeiro.

R E S U M O

O método direto de Liapunov é utilizado para estudar o domínio de atração de uma das posições de equilíbrio estável de uma estrutura simples que apresenta um comportamento de "snap". O modelo mecânico estudado é uma estrutura plana simples que já foi utilizado por muitos outros autores para a discussão de certos aspectos típicos em problemas de "snap". Duas leis de amortecimento diferentes são consideradas e para cada caso são construídas funções de Liapunov através o uso de vários métodos, dentre os quais aqueles de Szegö, Willems e Infante recebem especial atenção. Para comparar as estimativas do domínio de atração obtidas por este procedimento com o domínio atual, as equações de movimento foram resolvidas em um computador analógico. Finalmente, é mostrado como o método direto pode ser utilizado para a resolução do problema de "snap" dinâmico. Cargas do tipo "degrau" e "impulsivas" são consideradas.

A B S T R A C T

Liapunov's direct method is used to study the domain of attraction of one of the stable equilibrium positions of a simple structure which presents a "snap-through" behavior. The mechanical model studied is a plane simple strut which has already been used by many other authors for the discussion of some aspects which are typical for "snap-through" problems. Two different damping laws are considered and for each case Liapunov functions are constructed using several different methods, among which the methods of Szegő, Willems and Infante receive special attention. In order to compare the estimates of the domain of attraction obtained by this procedure with the actual domain, the equations of motion were also solved on an analogue computer. Finally it is shown how the direct method can also be used to solve the problem of dynamic "snap-through" under loading. Step and impulsive-loading are considered.

## Í N D I C E

	AGRADECIMENTOS	1
	RESUMO	ii
	ABSTRACT	iii
1.	INTRODUÇÃO	1
1.1	Caso Normal	1
1.2	Curvas $P(f)$ com bifurcação	2
1.3	Curvas $P(f)$ com "reversão"	5
2.	OS MODELOS MECÂNICOS E SUAS CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS	9
2.1	Modêlo A	9
2.2	Modêlo B	10
2.3	Equações do movimento	10
2.4	Pontos de equilíbrio	13
2.5	A estabilidade dos pontos de equilíbrio	15
3.	ESTUDO DO DOMÍNIO DE ATRAÇÃO DO PONTO DE EQUILÍ- BRIO $y=y_1$ , ATRAVÉS DO MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV	20
3.1	Generalidades	20
3.2	Teorema I	22
3.3	Teorema II	22
3.4	O método de estimativa do domínio de atração	23
4.	ESTUDO DO PLANO DE FASE ATRAVÉS COMPUTAÇÃO ANA- LÓGICA	25
4.1	Esquemas de montagem dos elementos do computador	25
4.2	Estudo das trajetórias	28
4.3	Determinação do domínio de atração do ponto $y=y_1$	32
5.	CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE LIAPUNOV PARA O PONTO DE EQUILÍBRIO $y=y_1$	39

5.1	Preliminares	39
5.2	Energia como função de Liapunov	40
5.3	Método geral	43
5.4	Método de Szegö	47
5.5	Método de Willems	53
5.6	Método de Infante	56
5.7	Estimativa aperfeiçoada do domínio de atração	61
6.	O PROBLEMA DE "SNAP" DINÂMICO	70
6.1	Generalidades	70
6.2	Carregamento tipo "degrau"	72
6.3	Carregamento impulsivo	73
7.	DISCUSSÃO E CONCLUSÕES	78
	BIBLIOGRAFIA	81

## 1. INTRODUÇÃO

Carregando-se uma estrutura, de uma maneira quase -estática, com uma carga "P" ideal e chamando-se de "f" o deslocamento de um certo ponto da estrutura segundo uma direção fixa, a curva  $P(f)$  representa bem as principais características de deformação da estrutura. Esta curva pode ser de vários tipos, o que constitui um possível critério de classificação dos problemas de estabilidade na elastostática. O caso mais simples que se estuda na teoria elementar das estruturas é aquele que Pflüger [32] chama de

### 1.1 Caso normal

Nêste caso a curva  $P(f)$  é monotônica crescente, isto é, para cada valor de P há apenas um valor de f a êle associado. Êste fato está ligado ao teorema da unicidade na elastostática devido a Kirchhoff, cuja validade se restringe à teoria da elasticidade clássica. No caso de deformações finitas, em geral, o teorema apenas é válido quando o comportamento da estrutura é do tipo "normal" (ver [32], pg. 5). Na fig. 1.1 representamos uma curva  $P(f)$  típica para êste caso.

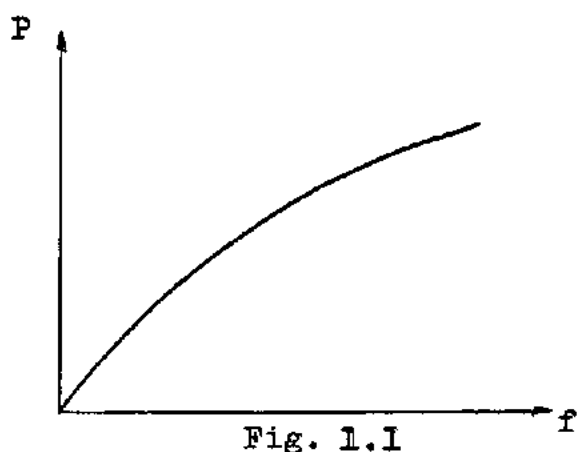


Fig. 1.1

## 1.2 Curvas $P(f)$ com bifurcação

É o caso que corresponde à flambagem clássica. Neste caso existem valores de  $P$  aos quais corresponde mais de um valor de  $f$ . Como exemplos, podemos citar a coluna carregada axialmente, o anel circular sob pressão radial uniforme e outras estruturas possuindo simetria de forma e carregamento. Uma curva  $P(f)$  típica está representada na fig. 1.2.

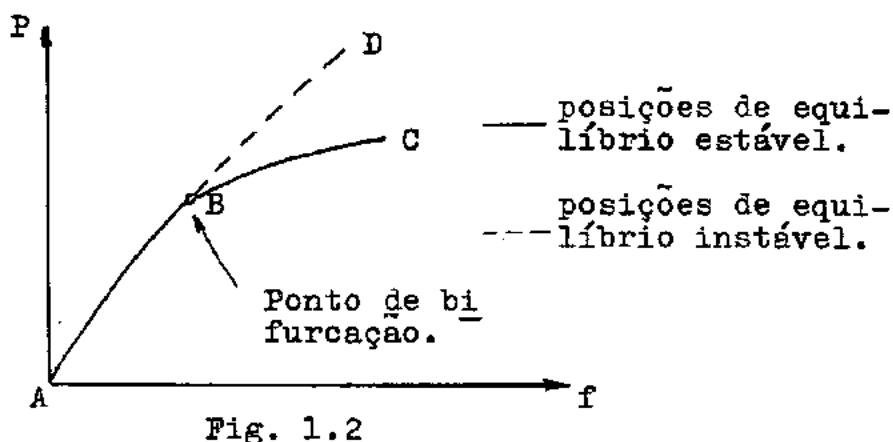


Fig. 1.2



Este tipo de flambagem é caracterizado pelo fato de haver duas posições de equilíbrio - uma estável e outra instável - infinitamente próximas, quando a carga  $P$  ultrapassa a carga "crítica"  $P_{crit}$  de um infinitésimo  $dP$ . A curva ABD corresponde à estrutura não-flambada enquanto que o ramo BC corresponde à estrutura flambada. Em geral, a configuração nos dois casos difere bastante. Assim, por exemplo, no caso da barra reta sujeita à compressão axial  $P$ , tem-se que a barra não-flambada permanece reta, isto é,  $f=0$ , e a barra flambada apresenta uma flecha máxima  $f \neq 0$  (Ver fig. 1.3).

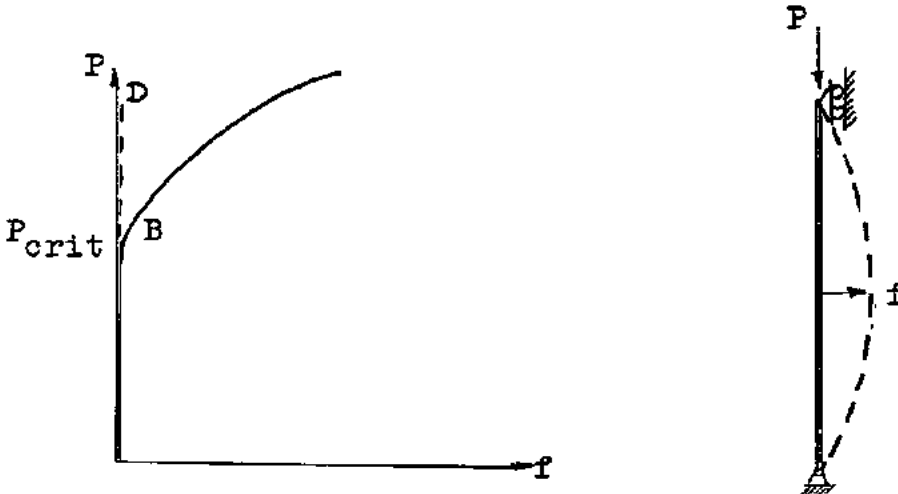


Fig. 1.3 Coluna carregada axialmente

Convém observar que o ramo ED da curva  $P(f)$ , devido à instabilidade, não pode ser realizado fisicamente.

O conceito de estabilidade envolve a idéia de movimento, e uma definição matematicamente precisa de estabilidade sòmente pode ser dada usando-se as equações diferenciais que regem o movimento da estrutura. A rigor, então, o estudo da estabilidade ultrapassa o âmbito da elastostática. No entanto, usando-se certos artifícios, como o teorema de Lagrange & Dirichlet sôbre a estabilidade do equilíbrio quando a energia potencial assume um mínimo, consegue-se discutir a estabilidade da estrutura, quando sujeita a cargas conservativas<sup>1</sup>. Isto explica, em parte, porque ainda hoje, em geral, a estabilidade de estruturas é estudada na elastostática é, porque a teoria da estabilidade de equações diferenciais é, às vêzes, pouco conhecida pelos que trabalham em estruturas. Uma das poucas tentativas feitas, em conciliar a teoria da estabilidade com a das estruturas, se deve a Leipholz [23]. Sôbre a estabilidade de estruturas sujeitas a cargas dependentes do tempo, veja-se o livro de Bolotin [1], que também estudou estruturas sujeitas a cargas não-conservativas independentes do tempo [2]. Sôbre o conceito moderno de estabilidade de estruturas elásticas, veja-se Koiter [20,21].

---

1 Usualmente é considerado trivial, pelos engenheiros, o fato de o equilíbrio ser estável se a função energia potencial assumir um mínimo nesta posição. No entanto, em sistemas contínuos não-lineares, a demonstração dêste teorema é bastante difícil e sòmente foi obtida em 1960 por Movchan [26].

### 1.3 Curvas $P(f)$ com "reversão"

Neste caso a curva  $P(f)$  é inicialmente crescente até atingir o máximo relativo em  $B$ , decrescendo, a seguir, até  $C$ , a partir de onde ela é novamente crescente (fig. 1.4).

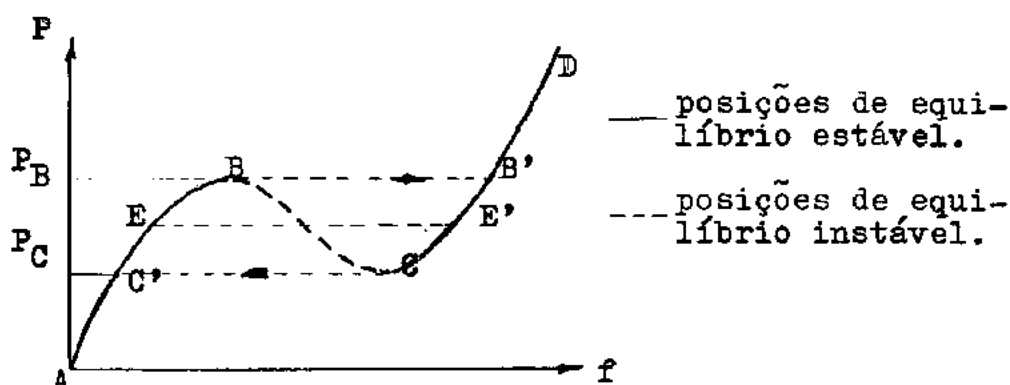


fig. 1.4 Curvas  $P(f)$  com reversão

A parte  $BC$  da curva  $P(f)$  corresponde a posições de equilíbrio instáveis. Para valores de  $P$  situados entre  $P_B$  e  $P_C$  a estrutura admite três posições de equilíbrio bastante distintas, das quais apenas duas são fisicamente realizáveis. Aumentando-se a carga  $P$ , de maneira quase-estática, a deformação  $f$ , inicialmente, aumenta continuamente. Quando  $P = P_B + dP$ , há apenas uma posição de equilíbrio próxima de  $B'$ , na curva  $CD$ . Logo, quando  $P$  atinge  $P_B$ , a estrutura deixa de estar em equilíbrio para entrar em movimento vibratório.

Se houver amortecimento, a estrutura tende para a nova posição de equilíbrio em  $B'$ . Na prática, o equilíbrio em  $B'$  é atingido após um tempo finito; o movimento de  $B$  para  $B'$  escapa ao campo da elastostática.

Por outro lado, se a carga  $P$  é diminuída de maneira quase-estática a partir de  $P_D > P_B$ , um fenômeno semelhante ocorre quando  $P$  atinge  $P_C$ . Em ambos os casos diz-se que ocorre "flambagem com eversão" ou "snap". Daqui em diante preferiremos o termo inglês ao português por ser este último pouco conhecido.

A característica essencial do "snap" é a passagem da estrutura de uma posição de equilíbrio à outra, a uma distância finita da primeira, no momento em que a carga ultrapassa o valor crítico de um infinitésimo.

Observe-se que o conceito de estabilidade, em geral, usado na elastostática, se refere a perturbações infinitésimas. Se permitirmos perturbações finitas, sempre será possível achar uma perturbação suficientemente grande tal que a estrutura passe do ponto  $E$  ao ponto  $E'$  (fig. 1.4).

Como modelos de estruturas sujeitas ao "snap", podemos citar; arcos de pequena curvatura; certos tipos de casacas, esféricas ou cilíndricas, bem como, certos tipos de treliças.

O problema de "snap" em arcos foi estudado, para carregamentos do tipo quase-estático, por Fung e Kaplan [5], Gjelsvik e Bodner [6], Schreyer e Masur [33], e outros. Nachbar apresentou um tipo diverso de estrutura, uma coluna restringida por um fio, também sujeito ao "snap" (ver [31]).

As curvas  $P(f)$  até aqui descritas correspondem apenas às posições de equilíbrio com  $P$  constante. Quando a carga  $P$  é uma função do tempo, as curvas perdem o seu significado físico imediato, e o comportamento da estrutura deve ser analisado utilizando-se as equações do movimento. De uma maneira geral, fala-se então em "flambagem dinâmica", se a estrutura é do tipo 1.2 ou 1.3 (secções 1.2, 1.3)

Para o caso em que  $P$  é uma função harmônica do tempo, muitos resultados foram obtidos por Bolotin [1] e Mettler [26], no que se refere a estruturas do tipo 1.2.

No que se refere a estruturas do tipo 1.3, sujeitas a cargas dinâmicas, muitos são os trabalhos publicados. Sem sermos exaustivos, mencionaremos Mettler e Weidenhammer [27,28], Hsu [10,11,12], e Hsu, Kuo e Plaut [13], que estudaram o problema dos arcos sujeitos a cargas do tipo "degrau", "impulsivas" e "retangular".

Por sua vez, Lock [24], Huang e Nachbar [14], Hegemier e Tzung [9] e outros, estudaram o problema de arcos viscoelásticos, ou sujeitos a amortecimento.

Sistemas simples, de um grau de liberdade, foram estudados por Huang e seus colaboradores [15,16] e por Nachbar e Huang [30]. O problema do "snap" para êstes sistemas, entretanto, só foi analisado para certos valôres de condições iniciais, o que deixa ainda uma grande lacuna neste estudo. O objetivo d'êste trabalho é, na medida do possível, contribuir para o preenchimento desta lacuna.

Assim sendo, para uma estrutura cuja característica estática corresponde ao tipo 1.3, procuraremos determinar quais as perturbações permitidas, das posições de equilíbrio correspondentes ao ramo AB (fig. 1.3), tais que a estrutura tenda novamente a êste estado de equilíbrio, e não ao ramo CD. Como êste problema sòmente pode ser resolvido usando-se as equações do movimento, permitiremos não sòmente afastamentos iniciais do equilíbrio, mas também velocidades iniciais não nulas. De certa maneira, poder-se-ia então falar em um problema de "snap dinâmico". Para abordar o problema, usaremos um modelo de estrutura com um só grau de liberdade<sup>1</sup>.

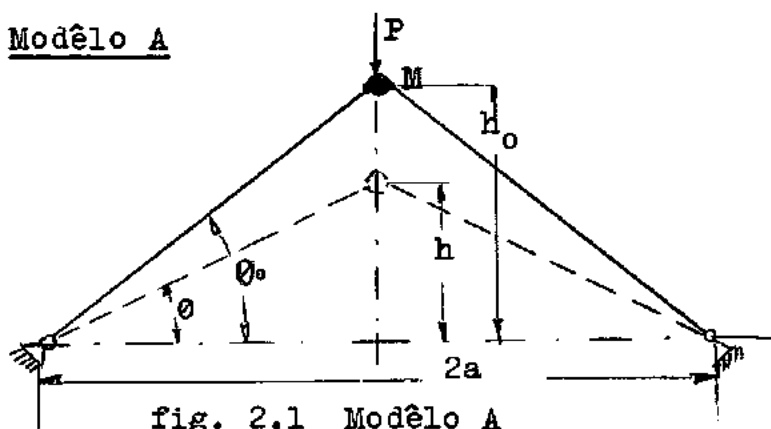
---

1 Resolvendo-se o problema, está também resolvido o problema de [30], como mostraremos em (6.2).

## 2. OS MODELOS MECÂNICOS E SUAS CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS

No nosso estudo nos referiremos a dois modelos mecânicos simples, de um grau de liberdade, descritos a seguir.<sup>1</sup>

### 2.1 Modêlo A



Na fig. 2.1, duas barras, consideradas sem massa, de comprimento natural (indeformado)  $a \cdot \sec \Theta_0$  e área de seção transversal  $A$ , são representadas, ligadas simetricamente, por meio de pinos sem atrito, a uma massa  $M$  e aos suportes. Nesta massa age a carga  $P$ , constante e vertical, que será sempre suposta positiva ou nula neste trabalho. Despreza-se os efeitos da gravidade. Assume-se que  $(h/a)^2 \ll 1$ , de modo que  $\Theta \cong h/a$ ,  $\Theta_0 \cong h_0/a$ .

---

<sup>1</sup> As equações diferenciais que regem o movimento de nos - sos modelos descrevem uma classe relativamente grande de sistemas mecânicos.

Assume-se, ainda, que o material constituinte das barras seja o de Voigt.<sup>1</sup>

## 2.2 Modêlo B

A massa  $M$  está ligada a um amortecedor linear, com coeficiente de amortecimento  $C$  (ver fig. 2.2). Valem as mesmas considerações tomadas em relação ao modêlo A, supondo-se agora, porém, que o material constituinte das barras seja o de Hook.

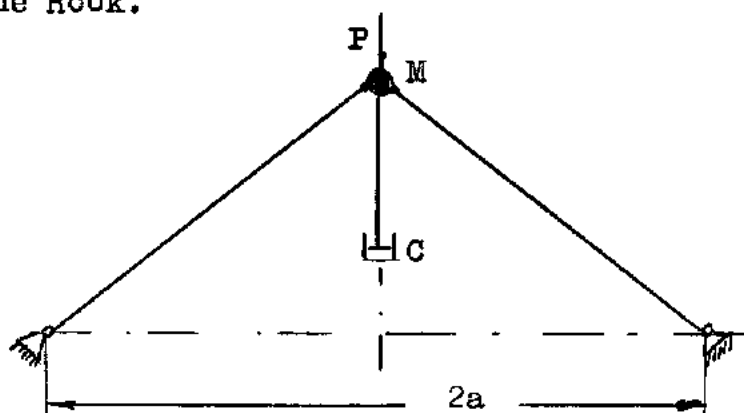


Fig. 2.2 Modêlo B.

## 2.3 Equações do movimento

Nesta secção apresentaremos as equações do movimento para ambos os modelos, e as transformaremos de modo a obtermos equações adimensionais.

---

1 Este modêlo é o mesmo utilizado por Nachbar e Huang [30] em sua análise.



2.3.1 Para o modelo A

Obtém-se diretamente a equação do movimento

$$2F \operatorname{sen} \Theta + P = M \frac{d^2(h_0 - h)}{dt^2}, \quad (2.1)$$

onde  $F$  é a força axial em cada barra, sendo portanto uma função de  $\Theta$ . A deformação  $\epsilon$  pode ser relacionada através a expressão

$$\epsilon = \frac{a \operatorname{sec} \Theta - a \operatorname{csc} \Theta_0}{a \operatorname{sec} \Theta_0} \quad (2.2)$$

e, lembrando que  $\Theta \cong h/a$ ,  $\Theta_0 \cong h_0/a$ , resulta

$$\epsilon = \frac{1}{2a^2} (h^2 - h_0^2). \quad (2.3)$$

Introduzimos, agora, a relação constitutiva do material de Voigt

$$\sigma = E\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt}, \quad (2.4)$$

e assumimos que  $F$  seja sempre menor que a carga de flambagem das barras, de modo que

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (2.5)$$

donde

$$F = A\sigma = AEE + A\eta \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.1), utilizando (2.3) e lembrando que  $\operatorname{sen} \Theta \cong h/a$ , resulta

$$AE \frac{h}{a^3} (h^2 - h_0^2) + \frac{2\eta A}{a^3} h^2 \frac{dh}{dt} + P + M \frac{d^2 h}{dt^2} = 0. \quad (2.7)$$

Esta equação pode ser escrita na forma

$$\frac{h}{h_0} \left[ \left( \frac{h}{h_0} \right)^2 - 1 \right] + \frac{2\eta}{E} \left( \frac{h}{h_0} \right)^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{h}{h_0} \right) + \frac{P_0^3}{4Eh_0^3} + \frac{M_0^3}{AEh_0^2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{h}{h_0} \right) = 0, \quad (2.8)$$

e introduzindo grandezas adimensionais

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{h}{h_0} , \\
 \tau &= t(Ah_0^2 E / Ma^3)^{1/2} , \\
 p &= Pa^3 / h_0^3 EA , \quad e \\
 k_A &= 2\eta (Ah_0^2 / a^3 ME)^{1/2} ,
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

teremos uma única equação para  $y(\tau)$  :

$$\ddot{y} + k_A \dot{y} + y^3 - y + p = 0 ,
 \tag{2.10}$$

onde  $(\dot{\phantom{x}}) = d/d\tau(\phantom{x})$ .

### 2.3.2 Para o modelo B

A equação do movimento é, agora

$$2F \operatorname{sen} \theta + P = M \frac{d^2}{dt^2} (h_0 - h) + C \frac{d}{dt} (h - h_0) .
 \tag{2.11}$$

A equação das deformações (2.2, 2.3) é a mesma, e a relação constitutiva do material hookeano é

$$\sigma = E \epsilon .
 \tag{2.12}$$

Introduzindo nova grandeza adimensional

$$k_B = C (a^3 / SME h_0^2)^{1/2} ,
 \tag{2.13}$$

e procedendo como no caso anterior, obteremos

$$\ddot{y} + k_B \dot{y} + y^3 - y + p = 0 .
 \tag{2.14}$$

## 2.4 Pontos de equilíbrio

Os pontos de equilíbrio (singulares) são definidos por  $\dot{y} = \text{constante}$ , donde se tem

$$\dot{y} = 0 \quad , \quad \ddot{y} = 0 \quad . \quad (2.15)$$

o que nos dá :

$$y^3 - y + p = 0 \quad , \quad (2.16)$$

para ambos os modelos.

As três raízes da Eq. (2.16) podem ser obtidas explicitamente, para intervalos de variação da carga  $p$ , da seguinte maneira:

Para  $0 < p \leq 2/(3\sqrt{3})$ , seja  $3\alpha = \text{sen}^{-1} [3\sqrt{3} p/2]$ , onde  $0 < \alpha \leq \pi/6$ . Então as raízes são  $y = y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $y_1 \geq y_2 \geq 0 > y_3$  (ver fig. 2.3), sendo dadas por

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\alpha, \\ y_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{sen}\alpha \quad , \\ y_3 &= -\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\alpha. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para  $p = 2/(3\sqrt{3})$ , as raízes  $y_1$  e  $y_2$  se confundem:

$$y_1 = y_2 = \sqrt{1/3} \quad \text{e} \quad ,$$

para  $p > 2/(3\sqrt{3})$ , há somente uma raiz real. Seja

$\bar{p} = 3\sqrt{3} p/2$  e considere-se  $\bar{p} \geq 1$ ; resulta então

$$y_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[ \bar{p} + (\bar{p}^2 - 1)^{1/2} \right]^{1/3} + \left[ \bar{p} - (\bar{p}^2 - 1)^{1/2} \right]^{1/3} \right\} \quad (2.18)$$

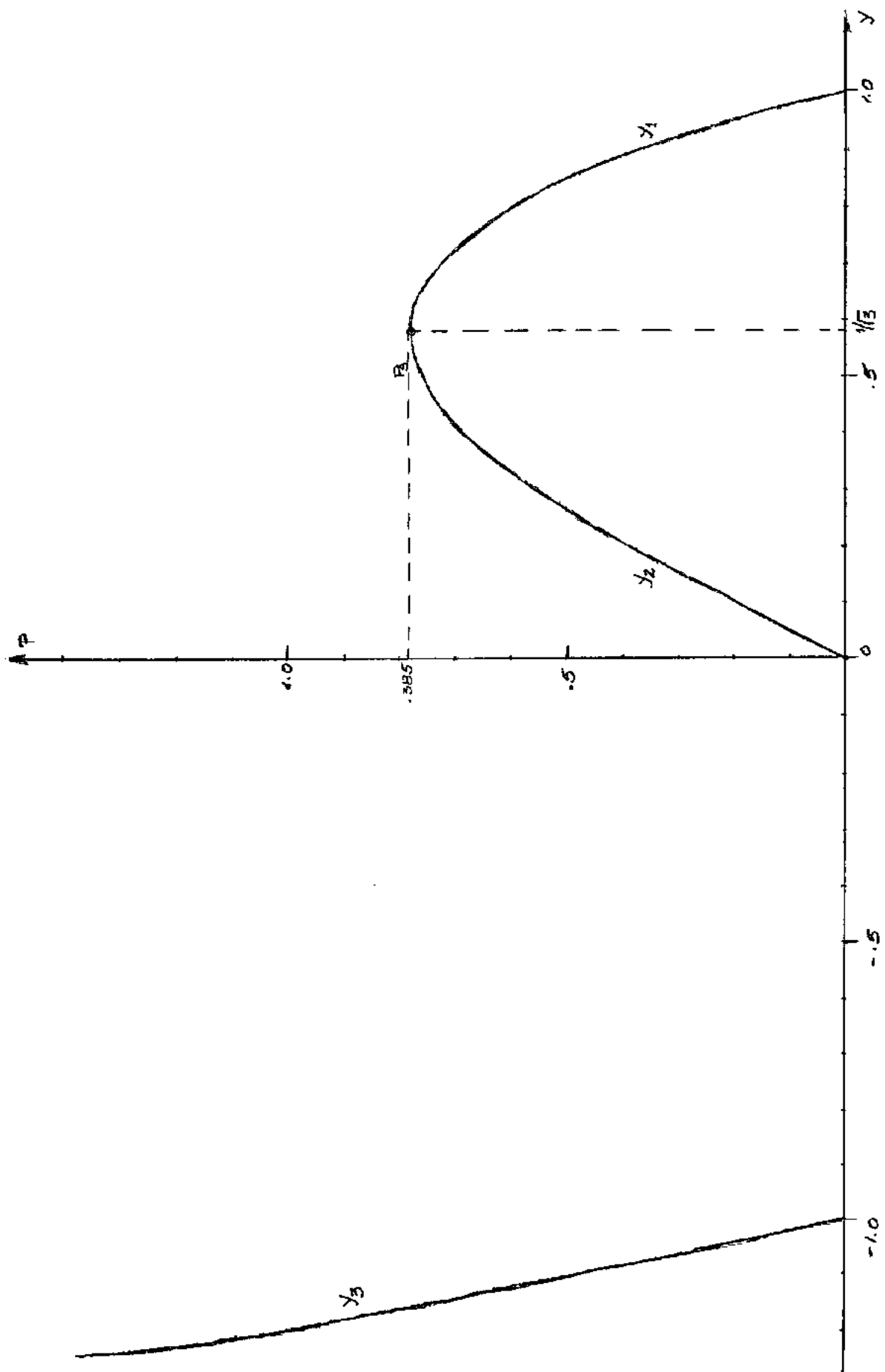


Fig. 2.3 Pontos de equilibrio função do parâmetro de carga P.

## 2.5 A estabilidade dos pontos de equilíbrio

Estudaremos, nesta secção, a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio. O conceito de estabilidade aqui adotado corresponde à definição clássica de Liapunov (veja-se [3,8,22,25]).

### 2.5.1 Modêlo A

por meio das substituições

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad (2.19)$$

a Eq.(2.10) pode ser posta sob a forma de um sistema de duas equações de primeira ordem, não linear, real e autônomo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_A x_1^2 x_2 + x_1 - x_1^3 - p. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio  $y=y_1$ , efetua-se uma transformação de coordenadas tal que este ponto de equilíbrio seja deslocado para a origem:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_1, \\ z_2 &= x_2; \end{aligned} \quad (2.21)$$

nessas novas coordenadas as equações (2.20) tomam a forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -k_A (z_1 + y_1)^2 z_2 + (z_1 + y_1) - (z_1 + y_1)^3 - p, \end{aligned} \quad (2.22)$$

e lembrando da equação (2.16),

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -k_A(z_1 + y_1)^2 z_2 - [(3y_1^2 - 1)z_1 + 3y_1 z_1^2 + z_1^3]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Estudamos, inicialmente, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 0$ , ou seja  $y \equiv y_1$ , do sistema linearizado correspondente ao (2.23) :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -k_A y_1^2 z_2 - (3y_1^2 - 1)z_1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Procuraremos soluções do sistema (2.24) na forma

$$z_1 = A_1 e^{\lambda t}, \quad z_2 = A_2 e^{\lambda t}, \quad (2.25)$$

obtendo, então a equação característica

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ (1 - 3y_1^2) & -k_A y_1^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

cujas raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são dadas por

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} k_A y_1^2 \pm \left( \frac{1}{4} k_A^2 y_1^4 + 1 - 3y_1^2 \right)^{1/2}. \quad (2.26)$$

Vê-se, pela fig. 2.3, que para  $0 \leq \bar{p} < 1$ , resulta  $(1 - 3y_1^2) < 0$ . Examinando a expressão (2.25), verifica-se que, para  $y \equiv y_1$ , ambas as raízes, com  $k_A > 0$ , têm sempre parte real negativa, podendo haver um par de raízes complexas conjugadas ou duas raízes reais negativas, dependendo do valor de  $k_A$ , supondo dado o valor de  $p$ . Em ambos os casos, a posição de equilíbrio da equação linearizada é assintoticamente estável. Dos teoremas de Liapunov sôbre a linearização (ver [3,8,22,25]), sabemos que êste resultado também é válido para o sistema não-linear.

A posição de equilíbrio  $y \equiv y_1$  é, portanto, com  $k_A > 0$ , assintoticamente estável. Para  $0 < k_A < \frac{2}{y_1^2} (3y_1^2 - 1)^{1/2}$ , tem-se um par de raízes complexas, o que corresponde a um foco, e para  $k_A > \frac{2}{y_1^2} (3y_1^2 - 1)^{1/2}$ , temos duas raízes reais negativas e, portanto, um ponto nodal. Com  $k_A = 0$ , pode-se mostrar, de outra maneira, que o equilíbrio é ainda estável, embora não assintoticamente, e teremos um ponto central (ver fig. 2.4).

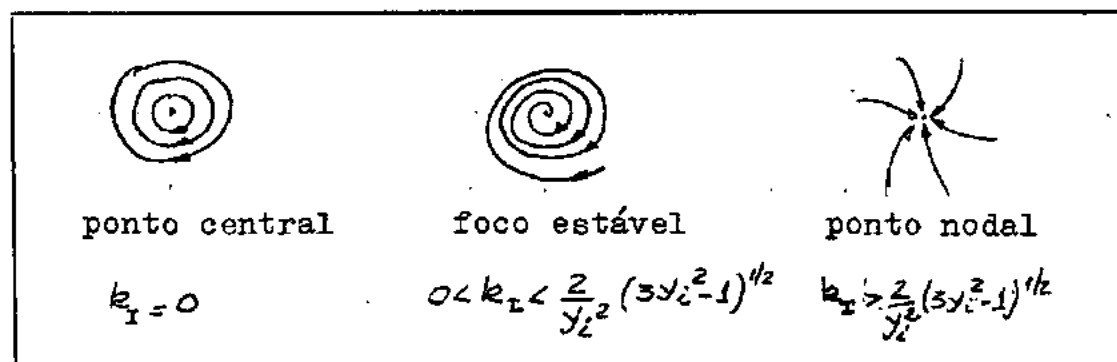


Fig. 2.4 Os pontos de equilíbrio  $y_1$  e  $y_3$

Para o ponto de equilíbrio  $y \equiv y_3$ , também vale  $(1 - 3y_3^2) < 0$ , e seguem-se as mesmas considerações feitas no caso anterior. A solução  $y \equiv y_3$ , com  $k_A > 0$ , é, portanto, sempre assintoticamente estável.

No estudo de  $y \equiv y_2$  verifica-se que  $(1 - 3y_2^2) > 0$ , para  $0 \leq \bar{p} < 1$ , e da Eq. (2.25) conclue-se que as duas raízes,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , são ambas reais, sendo uma positiva e a outra negativa, o que corresponde à instabilidade. Dos teoremas sôbre a linearização sabemos que êste resultado é também válido para o sistema não-linear.

Assim sendo, a solução  $y = y_2$  é instável, tratando-se de um ponto sela. (ver fig. 2.5).

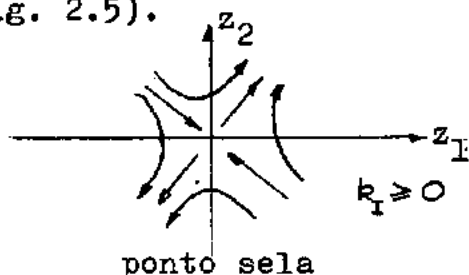


Fig. 2.5 O ponto de equilíbrio  $y_2$

Resta ainda discutir a estabilidade dos pontos de equilíbrio para o caso de  $\bar{p} = 1$ . Neste caso os pontos de equilíbrio  $y_1$  e  $y_2$  se confundem, ou seja  $y_1 = y_2 = 1/\sqrt{3}$ . As raízes da equação característica serão

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} k_A y_2^2 \pm \frac{1}{2} k_A y_2^2$$

sendo que pelo menos uma é nula. Com  $k_A = 0$ , o ponto de equilíbrio do sistema linearizado ainda é estável, embora não assintoticamente. Neste caso, no entanto, a partir deste resultado, não podemos tirar conclusões respectivas à estabilidade da equação completa. É precisamente o caso dito "crítico"<sup>1</sup> na teoria da estabilidade [3,25], sendo que a estabilidade ou não só pode ser decidida pelos termos não-lineares. Este estudo, bem mais complexo, não será feito aqui.

Se observarmos a fig. 2.3 novamente, verificamos, agora, que a curva que relaciona  $P$  com a coordenada  $y$  da posição de equilíbrio é do tipo 1.3, visto anteriormente.

---

1 Não confundir com a mesma denominação que certos autores dão para o ponto singular.



Desta maneira, se considerarmos a carga  $P$ , não constante, mas quaseestaticamente crescente, teremos ocorrência de "snap" para  $p_g = 2/(3\sqrt{3})$ .

### 2.5.2 Modêlo B

Para o modêlo B, procedendo da mesma maneira, teremos o sistema linearizado

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -k_B z_2 - (3y_1^2 - 1)z_1\end{aligned}\tag{2.26}$$

com as raízes da equação característica agora, sendo

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k_B}{2} \pm \left(\frac{1}{4}k_B^2 + 1 - 3y_1^2\right)^{1/2}\tag{2.27}$$

Para efeito de estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio, esta equação (2.27), é idêntica à Eq. (2.25), sendo que, desta maneira, valem as mesmas conclusões tiradas anteriormente. A única diferença reside nos valores de  $k_B$  que tornam os pontos de equilíbrio estável,  $y_1$  e  $y_3$ , em pontos nodais ou focos estáveis. Para  $0 < k_B < 2(3y_1^2 - 1)^{1/2}$  teremos focos estáveis e para  $k_B > 2(3y_1^2 - 1)^{1/2}$ , pontos nodais.

### 3. ESTUDO DO DOMÍNIO DE ATRAÇÃO DO PONTO DE EQUILÍBRIO $Y \equiv Y_1$ , ATRAVÉS DO MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV

#### 3.1 Generalidades

Queremos estudar quais são os deslocamentos iniciais relativos à posição de equilíbrio e quais as velocidades iniciais permitidas, tais que o movimento correspondente tenda à posição de equilíbrio  $y \equiv y_1$  com  $t \rightarrow \infty$ . Inicialmente formularemos o problema de maneira precisa e exporemos o método a ser utilizado.

Estudando o domínio de atração do ponto de equilíbrio  $y = y_1$ , trabalharemos sempre com coordenadas  $z_1$  e  $z_2$ , correspondentes à transformação (2.21). Adotando a notação matricial, as equações diferenciais são então escritas na forma

$$\dot{\underline{z}} = \underline{f}(\underline{z}) \quad (3.1)$$

com  $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$ . Sabemos que, para  $k_I > 0$ , a solução trivial de (3.1) é assintoticamente estável. Chamemos de  $\underline{z}(\underline{z}_0, \tau)$  a solução de (3.1) com  $\underline{z}(\underline{z}_0, 0) = \underline{z}_0$ . Define-se, então, o domínio de atração  $\Omega$  da solução trivial de (3.1) como sendo o conjunto dos pontos  $\underline{z}_0 \neq \underline{0}$ , com a propriedade  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \underline{z}(\underline{z}_0, \tau) = \underline{0}$ , isto é,

$$\Omega = \left\{ \underline{z}_0 \neq \underline{0} / \lim_{\tau \rightarrow \infty} \underline{z}(\underline{z}_0, \tau) = \underline{0} \right\}. \quad (3.2)$$

O domínio de atração é, às vezes, também chamada de "domínio de estabilidade assintótica" ou de "região de estabilidade". Evitaremos este último termo, para que não se confunda o domínio de atração com a região de estabilidade no espaço dos parâmetros do sistema [ver 8, pág. 109] .

Devida à estabilidade assintótica de  $\underline{z} = \underline{0}$ , sabemos que certamente existe um domínio de atração que não se reduz ao ponto  $\underline{z} = \underline{0}$  . Em geral, é muito difícil ou mesmo impossível obter o domínio de atração referente à solução trivial de uma equação (3.1) não-linear qualquer. Os processos analíticos existentes fornecem uma estimativa desta região.

O processo analítico que melhor se adapta ao estudo do domínio de atração do ponto de equilíbrio baseia-se no segundo método de Liapunov, também chamado de "método direto" [8,22] . Este método, em sua forma generalizada por La Salle e outros, permite determinar analiticamente, domínios  $\Omega_\epsilon$ , de maneira que  $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ , isto é, determinam-se subdomínios do domínio de atração. Os teoremas de Liapunov modificados [8,22] , são dados a seguir.

### 3.2 Teorema I

"Dado um sistema de equações diferenciais (3.1), com um ponto singular na origem, seja  $V(\underline{z})$  uma função com derivadas parciais de primeira ordem contínuas e definida com respeito ao sinal em uma vizinhança  $\mathcal{A}_\epsilon$  da origem, de tal maneira que sua derivada euleriana  $\dot{V}(\underline{z})$ , tomada em relação ao sistema de equações (3.1), seja semi-definida de sinal contrário ao de  $V(\underline{z})$  em  $\mathcal{A}_\epsilon$  e seja  $M$  o maior sub-conjunto invariante do conjunto  $\dot{V}(\underline{z})=0$ , então toda trajetória que inicia em  $\mathcal{A}_\epsilon$  tende para  $M$ ."

### 3.3 Teorema II

"Dado um sistema de equações diferenciais (3.1) com um ponto singular na origem, se é possível determinar uma função escalar apropriada  $V(\underline{z})$ , com derivadas parciais de primeira ordem contínuas e definida com respeito ao sinal em uma vizinhança  $\mathcal{A}_\epsilon$  da origem, de tal maneira que sua derivada euleriana  $\dot{V}(\underline{z})$ , tomada em relação ao sistema (3.1) seja semi-definida de sinal contrário ao de  $V(\underline{z})$  em  $\mathcal{A}_\epsilon$ , e tal que  $\dot{V}(\underline{z}) = 0$  não seja solução de (3.1) exceto para a origem, então o ponto singular  $\underline{z}=\underline{0}$  é assintoticamente estável e toda solução que inicia em  $\mathcal{A}_\epsilon$  tende para a origem."

#### 3.4 O método de estimativa do domínio de atração

As função escalares  $V(z)$  mencionadas nos teoremas acima são denominadas de "funções de Liapunov" [8,22] . Geométricamente,  $V(z)=cte.$  é uma família de curvas fechadas que circundam o ponto singular. A derivada euleriana da função  $V(z)$  é

$$\dot{V}(z) = \text{grad}V \cdot \dot{z} = \text{grad}V \cdot f(z) . \quad (3.3)$$

Se o sinal de  $\dot{V}(z)$  é contrário ao de  $V(z)$ , então as trajetórias do sistema de equações (3.1) penetram, de fora para dentro, as curvas fechadas  $V(z)=cte.$ , e, desta forma, aproximam-se do ponto singular. A região do espaço de estado limitada pela curva fechada  $V(z) = C_1$ , se totalmente contida em  $\Omega$  é, então, um sub-domínio do domínio de atração. Assim sendo, desenvolveu-se uma técnica que permite, de uma maneira geral, encontrar estas regiões.

Procuramos, inicialmente, construir uma função de Liapunov  $V(z)$ . Procuramos, a seguir, a maior curva fechada  $V(z)=C$  que está inteiramente contida na região do espaço de estado onde  $\dot{V}(z)$  é semi-definida de sinal contrário ao de  $V(z)$ . Verificamos, a seguir, se  $\dot{V}(z)=0$  não é solução de (3.1) a menos do ponto  $z=Q$ , e assim sendo, a região do espaço de estado limitada por esta curva  $V(z)=C$ , é o maior<sup>1</sup> sub-domí

---

1 Como veremos mais adiante, Cap. 5., é possível, por meio de certos artifícios, determinarmos sub-domínios maiores.

nio do domínio de atração que é possível encontrar com a função de Liapunov construída.

Na ausência de amortecimento, isto é, com  $k_I = 0$ , a posição de equilíbrio  $y = y_1$  é estável, porém não assintoticamente. Diz-se, também, que o equilíbrio possui "estabilidade fraca". Note-se que, neste caso, não existe um domínio de atração, ou melhor, o domínio de atração é vazio pois o único ponto com a propriedade (3.2) é o próprio ponto  $z_0 = Q$ .

Observe-se ainda, para o caso de amortecimento nulo, que, se  $\dot{V}(z) = 0$  em todo o espaço de estado, as trajetórias do sistema não penetram nem saem das curvas fechadas  $V(z) = \text{cte.}$  permanecendo, desta forma, sôbre as mesmas. Assim sendo, as curvas fechadas  $V(z) = \text{cte.}$  são soluções do sistema (3.1) para o caso de amortecimento nulo. A maior curva fechada  $V(z) = C$ , contida inteiramente na região do espaço de estado onde  $\dot{V}(z)$  é definida com respeito ao sinal, e não ultrapassa a posição equivalente a  $y = y_2$ , é a maior trajetória que circula em tórno de ponto  $y = y_1$  sômente.

#### 4. ESTUDO DO PLANO DE FASE ATRAVÉS COMPUTAÇÃO ANALÓGICA

Neste capítulo estudaremos o comportamento das soluções, no plano de fase, resolvendo as equações com o auxílio de um computador analógico.

##### 4.1 Esquemas de montagem dos elementos do computador

###### 4.1.1 Para o modelo A

A equação (2.10) pode ser escrita na forma

$$\ddot{y} = -k_A y^2 \dot{y} - y^3 + y - p, \quad (4.1)$$

ou

$$\frac{\ddot{y}}{\beta} = -\frac{k_A y^2 \dot{y}}{\beta} - \frac{y^3}{\beta} + \frac{y}{\beta} - \frac{p}{\beta}. \quad (4.2)$$

Seja

$$\omega = \frac{y}{\beta} \quad (4.3)$$

e introduzindo em (4.2), teremos

$$\dot{\omega} = -\beta^2 k_A \omega^2 \dot{\omega} - \beta^2 \omega^3 + \omega - \frac{p}{\beta}. \quad (4.4)$$

A equação (4.4) é equivalente à equação (4.1). O esquema do circuito utilizado para a resolução desta equação está mostrado na fig. 4.1, com a chave R na posição A. Os valores de  $\beta$  a serem utilizados são determinados pela limitação dos elementos do computador.

Os resultados são obtidos diretamente, em um "plotter". Se utilizarmos a escala de plotagem  $\beta : 1$ , obteremos, no plano de fase, as curvas  $(y, \dot{y})$ .

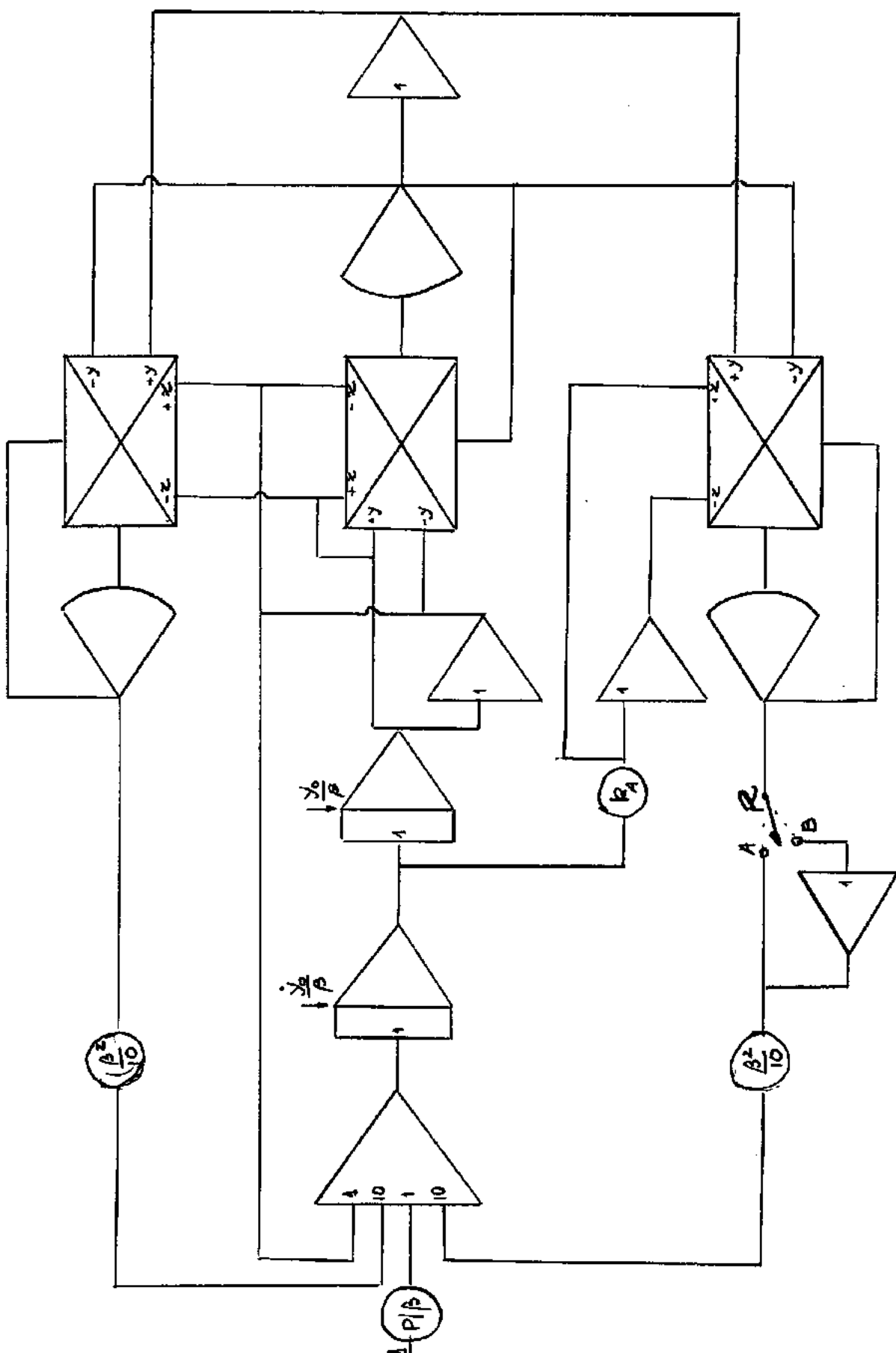


Fig. 4.1 Esquema de circuito para o modelo A



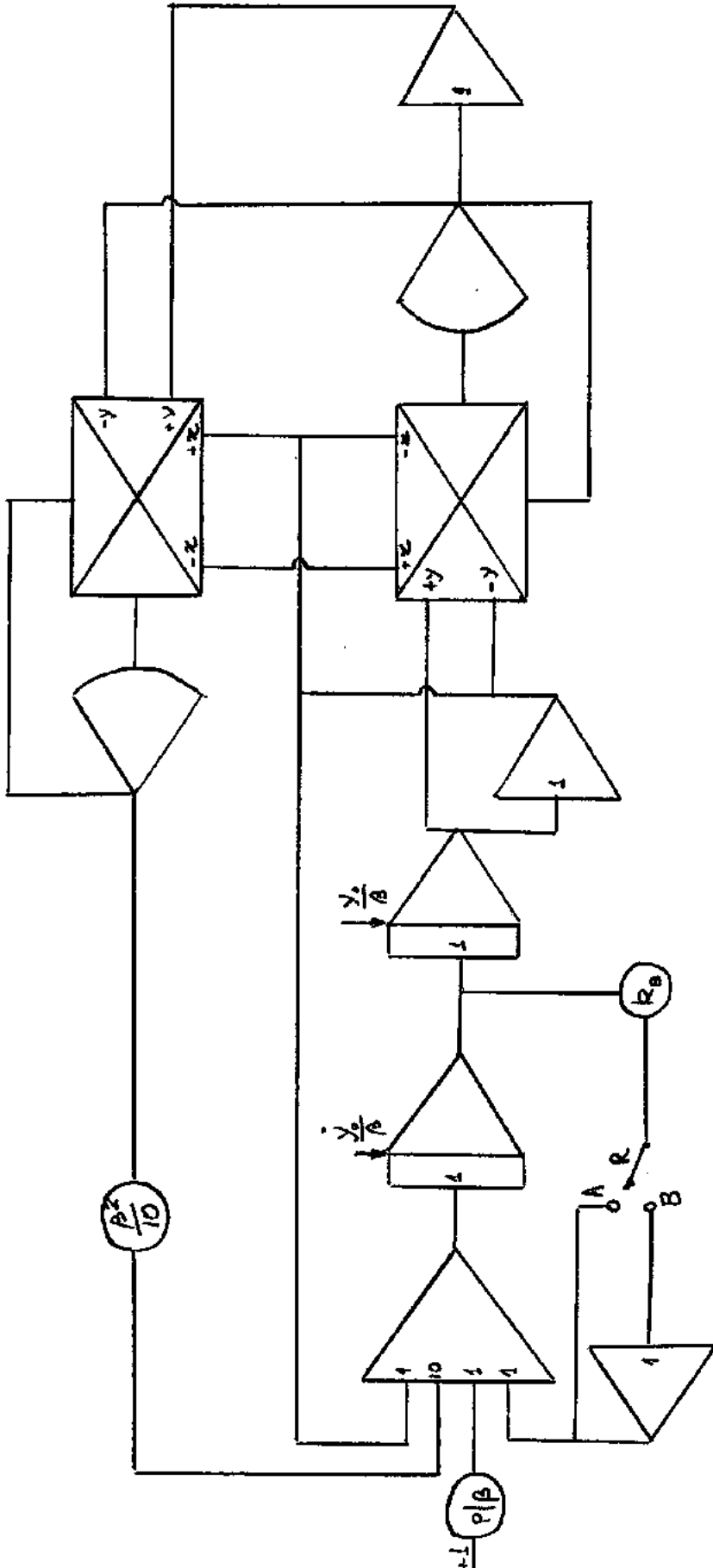


Fig. 4.2 Esquema do circuito para o modelo B.

#### 4.1.2 Para o modelo B

O procedimento é análogo. Nêste caso a equação a ser resolvida será:

$$\ddot{w} = -k_B \dot{w} + \beta^2 w^3 - w + P/\beta \quad (4.5)$$

O esquema do circuito está representado na fig. 4.2, com a chave R na posição A .

#### 4.2 Estudo das trajetórias

Como, nesta secção, faremos sòmente um estudo qualitativo das trajetórias, não nos preocuparemos em tratar os môdêlos A e B separadamente.

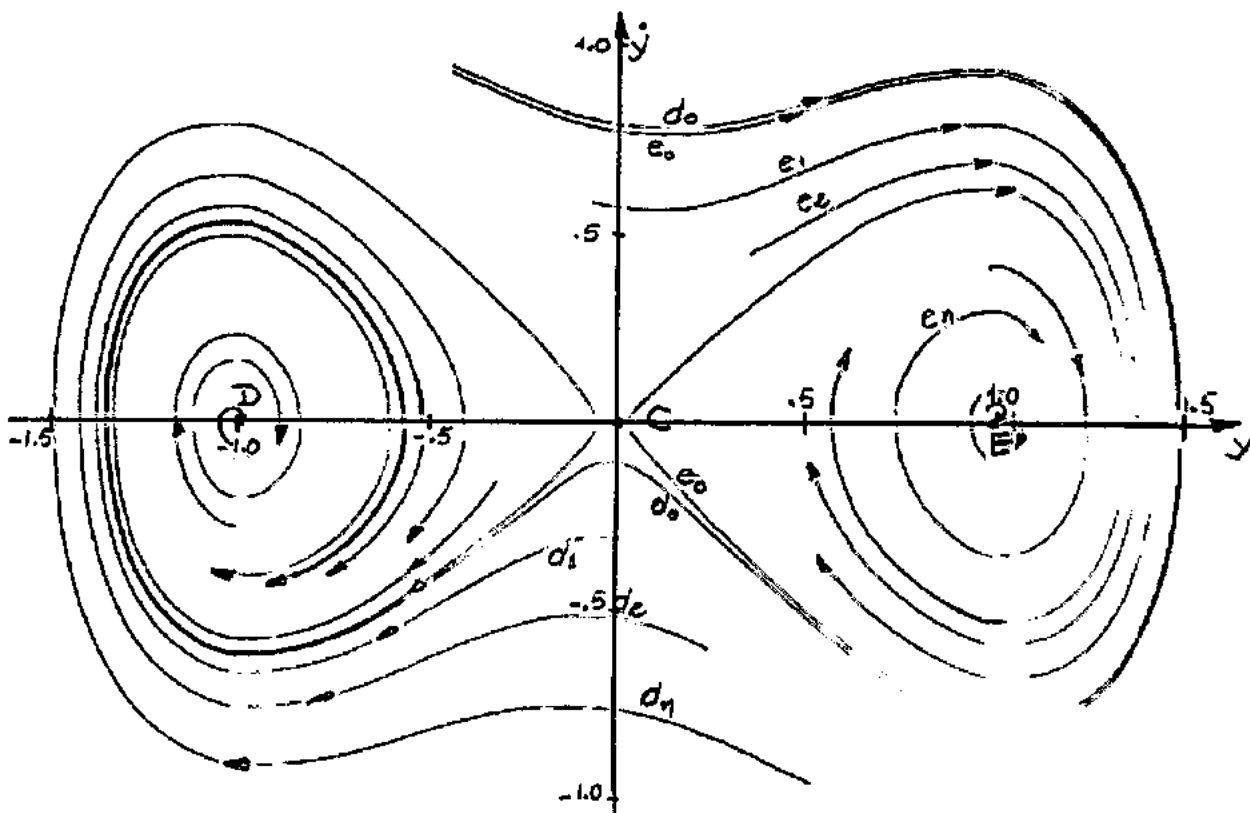


Fig. 4.3 Curvas de fase com amortecimento:  $p=0$

Observou-se, durante os trabalhos no analógico, que as curvas são qualitativamente equivalentes em ambos os casos, ou seja, que a lei do amortecimento não tem influência apreciável sobre o aspecto geral das curvas de fase.

Na fig. 4.3 mostramos algumas soluções para o caso  $p=0$ , e na fig. 4.4, para  $p \neq 0$ , com amortecimento. Estão representadas as trajetórias  $e_i$ , que são "atraídas" para o ponto de equilíbrio  $E$ ,  $y=y_1$ , e as trajetórias  $d_i$  que vão para o ponto  $D$ ,  $y=y_3$ .

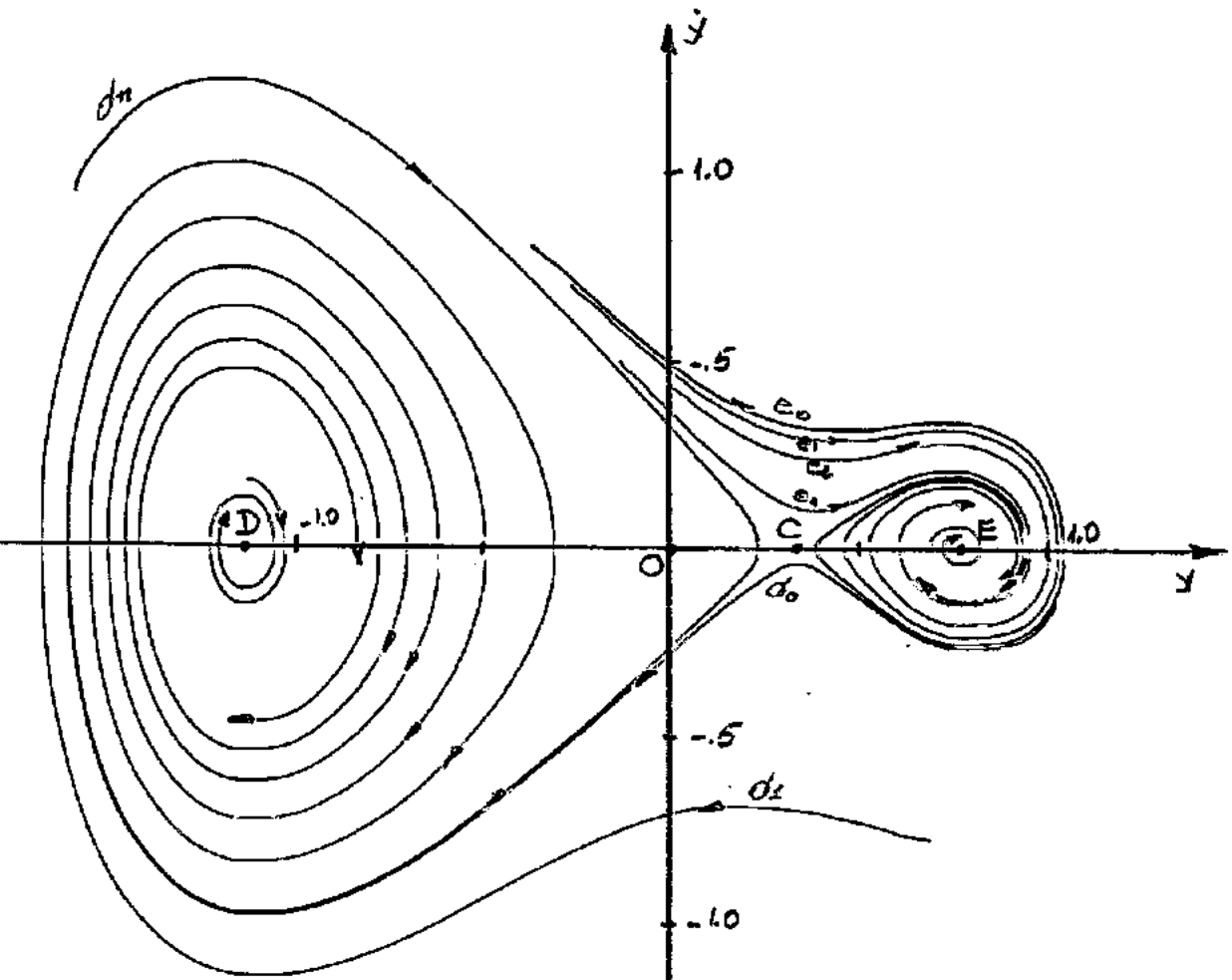


Fig. 4.4 Curvas de fase com amortecimento;  $p \neq 0$

No limite,  $e_0$  é a "última" curva que é atraída para o ponto E, isto é, qualquer trajetória à esquerda, dentro de certos limites, vai para o ponto D.<sup>1</sup> Por outro lado,  $d_0$  representa a primeira trajetória que é atraída para o ponto singular D, ou seja, qualquer trajetória à direita, dentro de certos limites, vai para o ponto E.

Para o caso de amortecimento nulo, nas figuras 4.5 e 4.6, estão representadas as trajetórias, no plano de fase, para  $p=0$  e  $p \neq 0$ , respectivamente.

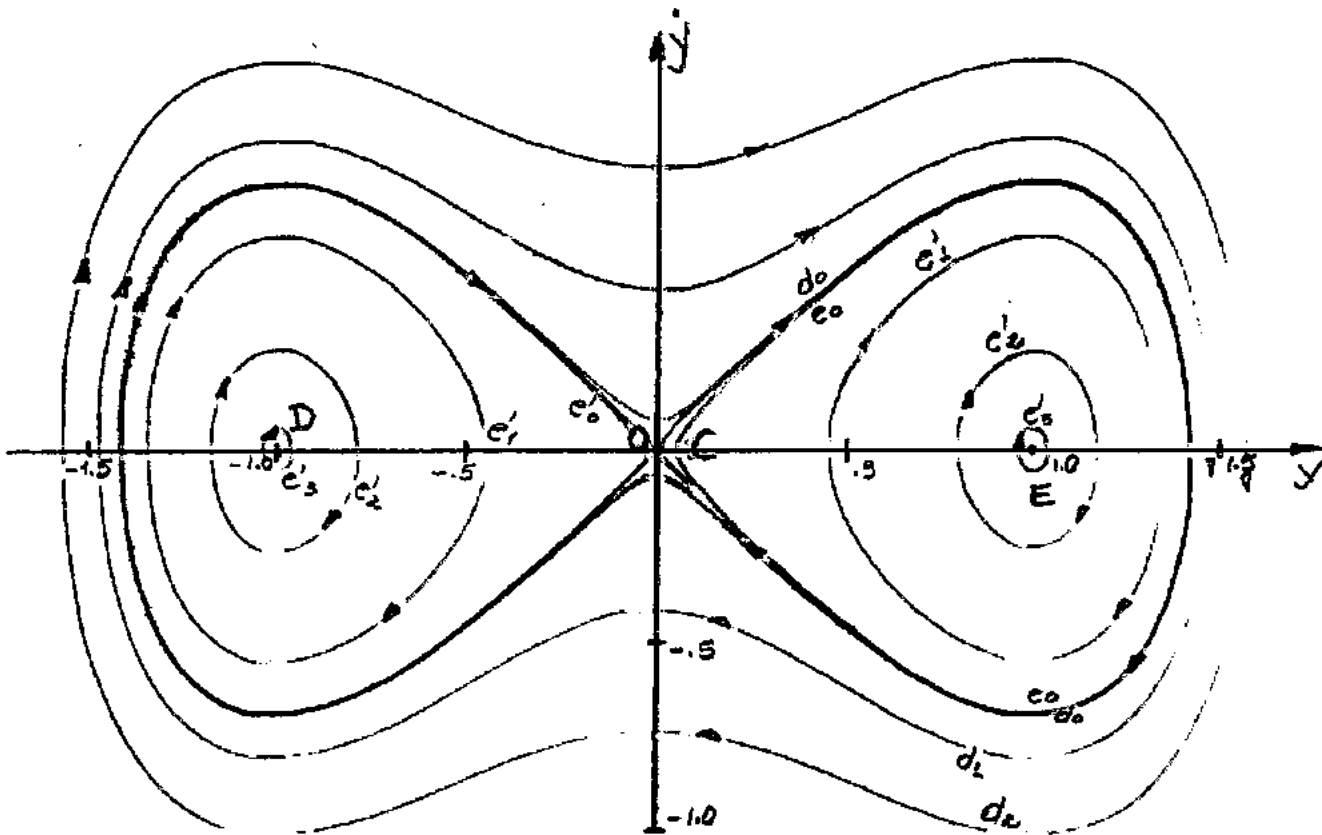


Fig. 4.5 Curvas de fase para amortecimento nulo;  $p=0$

1 Veremos mais adiante, na secção 4.3, que há curvas à esquerda de  $e_0$  que são atraídas por E e à direita de  $d_0$  que vão para D.

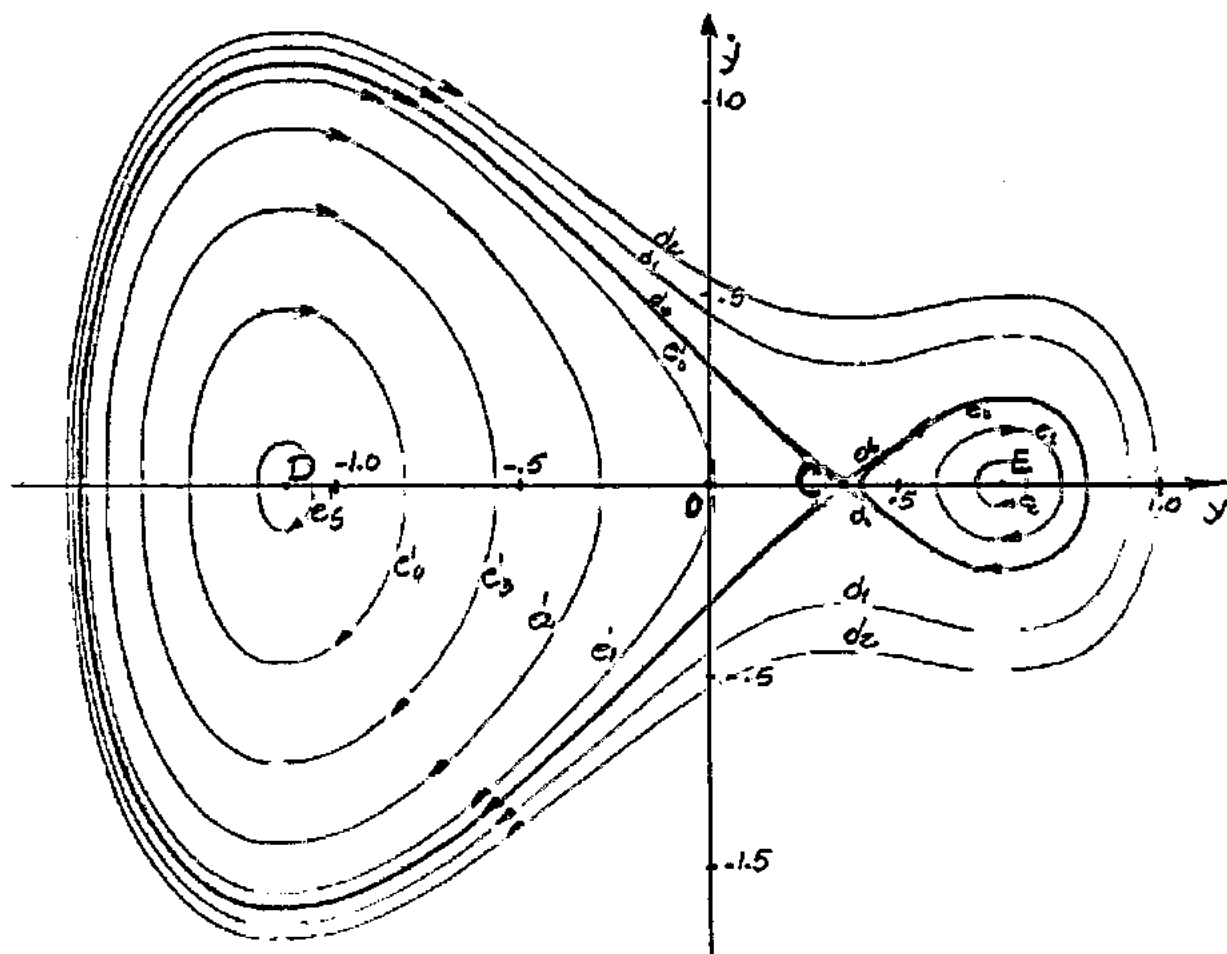


Fig. 4.6 Curvas de fase para amortecimento nulo;  $p \neq 0$

Estão representadas as trajetórias  $e_1$  e  $e_1'$ , que circulam em torno dos pontos de equilíbrio  $y \approx y_1$  (E) e  $y \approx y_3$  (D), respectivamente. Estão também representadas as soluções  $d_1$ , que circulam em torno de ambos os pontos. Assim sendo, existe uma trajetória  $e_0$ , que circula somente em torno do ponto E, para a qual qualquer trajetória à esquerda circulará em torno de ambos os pontos.

É de interesse determinar as trajetórias  $e_0$ , que representam as fronteiras do domínio de atração, definido no capítulo anterior.

### 4.3 Determinação do domínio de atração do ponto $y=y_1$

É muito difícil a determinação de valores de condições iniciais tais que obtenhamos as curvas limites  $e_0$ . Para tanto, adotamos outra técnica.

A análise das figuras anteriores (4.3 a 4.6) nos sugere um procedimento adequado. As curvas  $e_0$  atingem o ponto sela  $C$  ( $y=y_2$ ). Assim sendo, se efetuarmos a integração no outro sentido,  $\tau < 0$ , é fácil obter trajetórias que partam do ponto sela, sendo portanto curvas limites  $e_0$ . Para que tenhamos as curvas limites em torno do ponto  $y=y_1$  (ou curvas que circulam somente em torno deste ponto ou trajetórias que são atraídas pelo mesmo), perturbamos o sistema no sentido deste ponto de equilíbrio estável, ou seja, iniciamos a integração num ponto  $P(y_2 - \Delta y, 0)$ .

Observando as equações (4.4, 4.5), o único termo afetado pela mudança de variável  $Z' = -Z$  é aquele que representa o amortecimento, que troca de sinal. Os esquemas dos circuitos de integração são os mesmos, (figs. 4.1 e 4.2) com a chave R ligada na posição B.

A figura 4.7 nos mostra um par de curvas,  $e_0$  e  $e_0'$ , típico. A região hachurada representa o domínio de atração do ponto de equilíbrio E ( $y=y_1$ ), e aquela sem hachuras, o domínio de atração de D.

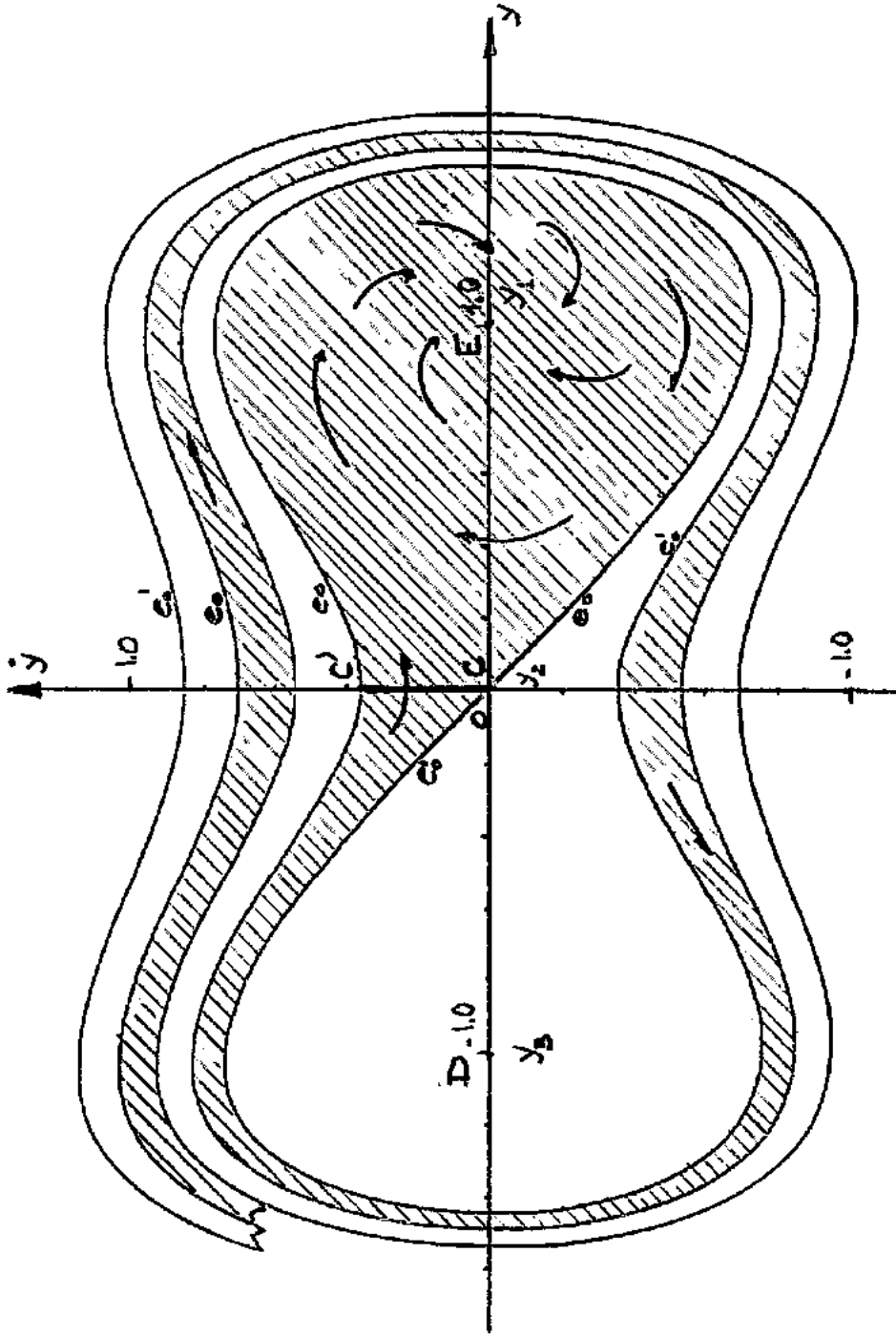


Fig. A.7 Domínios de atração dos pontos de equilíbrio  $y_1, y_2, y_3$ , para um certo amortecimento, sem carga ( $p=0$ ).

Observe-se que, no sentido mais amplo, as afirmações feitas em 4.2, a respeito de curvas à esquerda e à direita de  $e_0$ , não são válidas. Sob um ponto de vista global, não tem sentido a classificação "direita" ou "esquerda". Observe-se, ainda, que o domínio de atração do ponto de equilíbrio é aberto.

Para que se possa estudar melhor o problema, nos preocuparemos somente com a região de todas as trajetórias que são atraídas para o ponto E ( $y=y_1$ ) e que iniciem no semi-plano  $y > y_2$ , sem nunca deixá-lo. A região onde isto é verdadeiro, é aquela limitada pela curva  $e_0$  e pelo segmento CC', da reta  $y=y_2$ . Esta região será, por nós, chamada de "região de atração".

Nas figuras 4.8 a 4.11 estão representadas as regiões de atração do ponto  $y=y_1$ , para ambos os modelos, para  $p=0$  e  $p \neq 0$ , com diferentes valores de amortecimento.



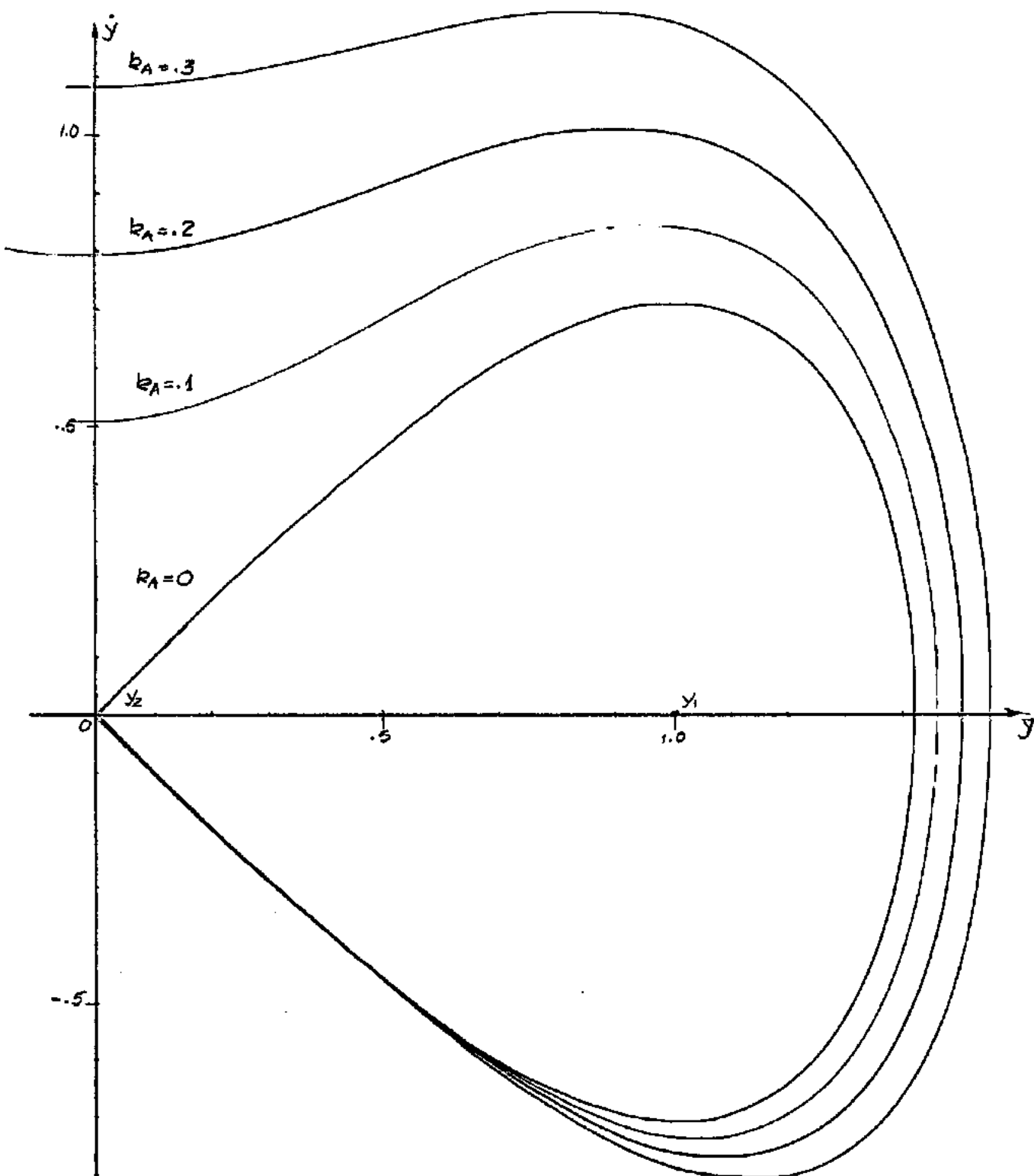


Fig. 4.8 Regiões de atração para o modelo A, com  $p=0$

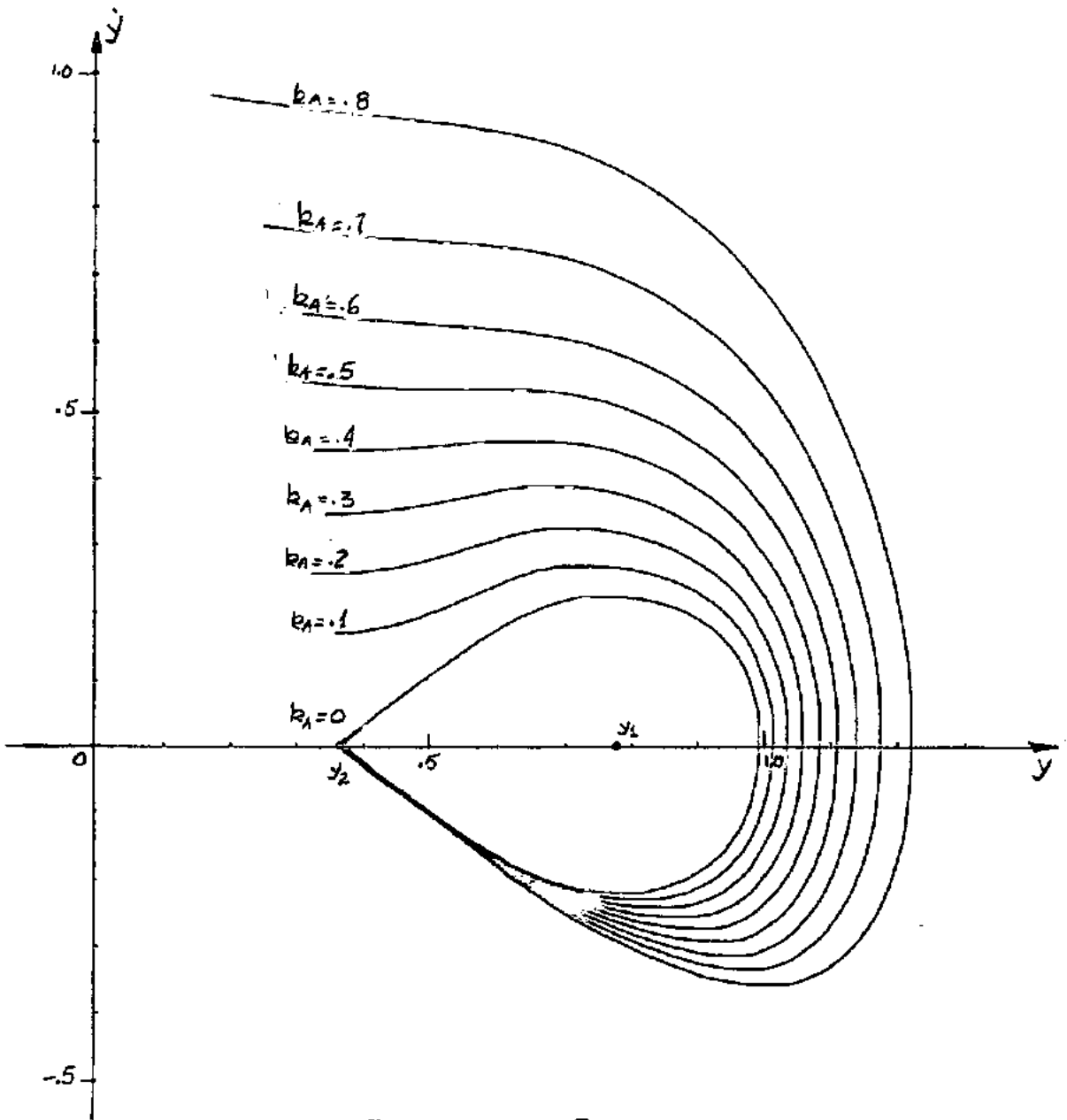


Fig. 4.9 Regiões de atração para o modelo A, com  $p=.30$

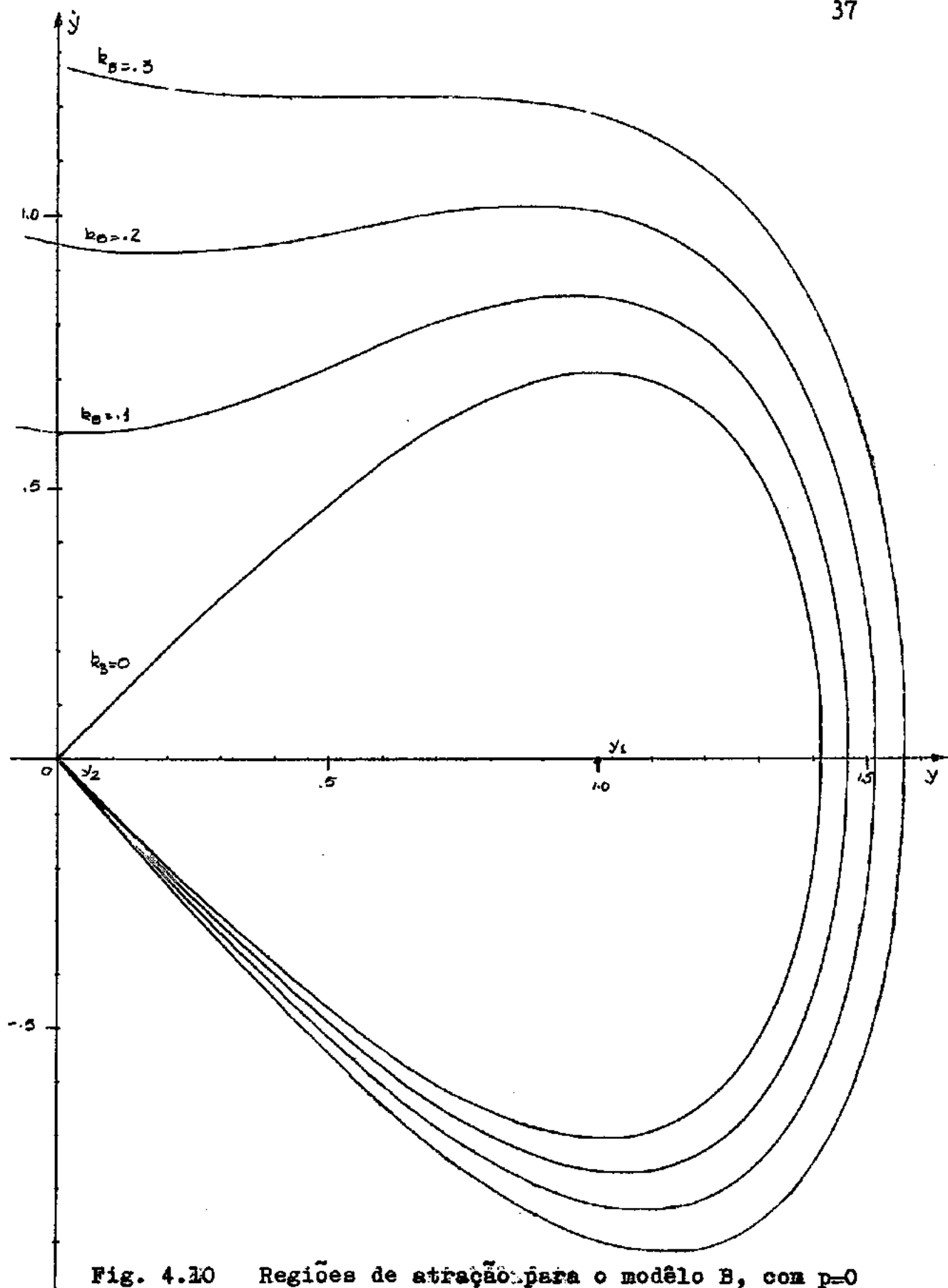


Fig. 4.10 Regiões de atração para o modelo B, com  $p=0$

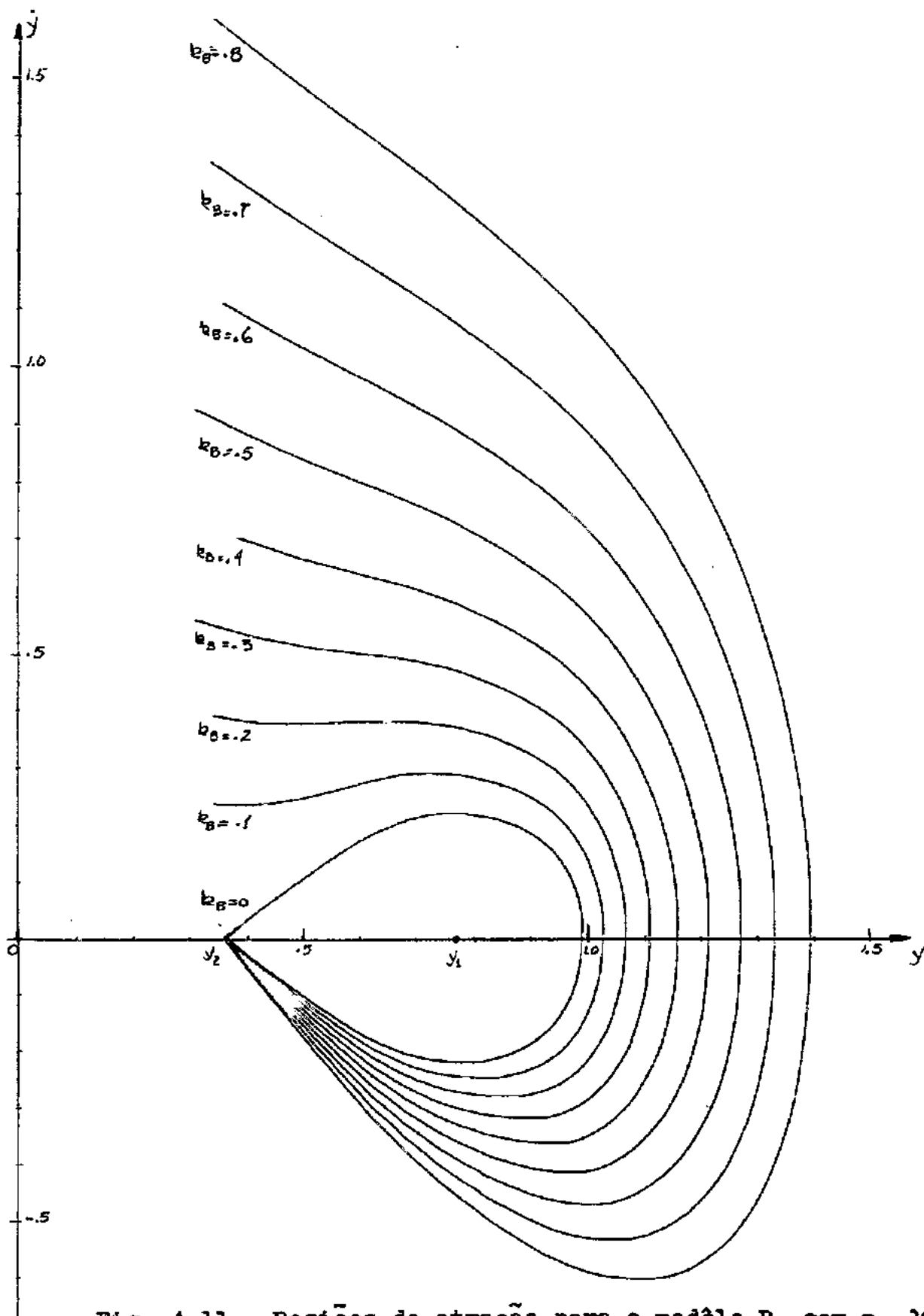


Fig. 4.11 Regiões de atração para o modelo B, com  $p = .30$

## 5. CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE LIAPUNOV PARA O PONTO DE EQUILÍBRIO $Y \equiv Y_1$

### 5.1 Preliminares

A construção de funções de Liapunov é um capítulo à parte no que se refere à aplicação do método direto de Liapunov. Muitos métodos foram desenvolvidos e outros o serão ainda, porque o campo está ainda amplamente aberto para a pesquisa. Nós, na tentativa de obter uma boa estimativa do domínio de atração, utilizaremos, dentre os métodos existentes na literatura [ver 7], dois métodos gerais, e aqueles de Szegö, Willems e Infante.

Para facilitar a aplicação dos métodos, reescreveremos as equações de interesse sob uma forma conveniente.

Os sistemas de equações (2.24) e (2.27), transformados em relação ao ponto de equilíbrio  $y=y_1$ , podem ser escritos

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -g_I(z_1)z_2 - f(z_1), \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde

$$f(z_1) = (3y_1^2 - 1)z_1 + 3y_1z_1^2 + z_1^3. \quad (5.2)$$

Para o modelo A,

$$g_A(z_1) = k(z_1 + y_1)^2, \quad (5.3)$$

e para o modelo B,

$$\varepsilon_B(z_1) = k_B \quad (5.4)$$

## 5.2 Energia como função de Liapunov

Seja o sistema de equações diferenciais (5.1). A energia potencial, em relação à origem, é dada por

$$U(z_1) = \int_0^{z_1} f(z) dz = (3y_2^2 - 1) \frac{z_1^2}{2} + y_2 z_1^3 + \frac{z_1^4}{4}, \quad (5.5)$$

e tomando a função energia<sup>1</sup>,

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2 + U(z_1), \quad (5.6)$$

acha-se, facilmente,

$$\dot{V}(z_1, z_2) = -\varepsilon_I(z_1) z_2^2. \quad (5.7)$$

O sinal de  $V(z)$  depende de  $U(z_1)$ . Na origem, a função potencial atinge um ponto de mínimo, e além disto  $U(Q)=0$ . No ponto de equilíbrio instável  $z_1=y_2-y_1$ , a função potencial atinge um ponto de máximo, de modo que valem as relações<sup>2</sup>:

1 Note-se que só constam os termos relativos à energia cinética e potencial. A energia dissipada no amortecimento não é considerada.

2 Lembrar que para  $p=\bar{p}$ , o ponto  $(y_2-y_1, 0)$  é a própria origem. Neste caso a função potencial terá um ponto de inflexão sobre a reta  $y=y_2-y_1$ , não valendo, desta maneira, as relações (5.8) e (5.9).

$$V(\underline{z}) > 0 \text{ para } z_1 \geq y_2 - y_1 \text{ e } z_1 \neq 0 \neq z_2, \quad \text{I}$$

$$V(\underline{z}) = 0 \text{ para } \underline{z} = \underline{0} . \quad (5.8)$$

$$\dot{V}(\underline{z}) \leq 0 \neq \underline{z} , g_I(z_1) \neq 0 ,$$

$$\dot{V}(\underline{z}) = 0 \text{ para } z_2 = 0 . \quad (5.9)$$

É necessário que tomemos  $V(\underline{z})$  no semi-plano  $z_1 > y_2 - y_1$ , pois, caso contrário, não estariam preenchidas as condições do teorema II, já que o ponto sela  $P(y_2 - y_1, 0)$  é, além da origem, também solução do sistema.

A maior curva  $V(\underline{z}) = \text{cte.}$ , contida no semi-plano  $z_1 \geq y_2 - y_1$ , excetuando-se o ponto  $P(y_2 - y_1, 0)$ , nos dará a melhor estimativa, do domínio de atração da origem, possível mediante o uso desta função de Liapunov.

Se  $g(z_1) = 0$ , então  $\dot{V}(\underline{z}) = 0 \neq z_1$  e  $z_2$ , de maneira que ainda estão satisfeitas as condições do teorema I. De fato, neste caso, esta função de Liapunov nos dará as soluções do sistema (5.1). A maior curva que circula em torno da origem somente (sem circular também em torno de outros pontos de equilíbrio), é aquela que passa infinitamente próxima ao ponto sela,  $P(y_2 - y_1, 0)$  no semi-plano  $z_1 \geq y_2 - y_1$ .

Assim sendo,

$$V(\underline{z}) = U(\bar{z}_1) , \quad (5.10)$$

---

1 Note-se que, para  $p < \bar{p}$ , existem valores de  $z_1 < y_2 - y_1$ , tais que  $V(\underline{z}) > 0$ .

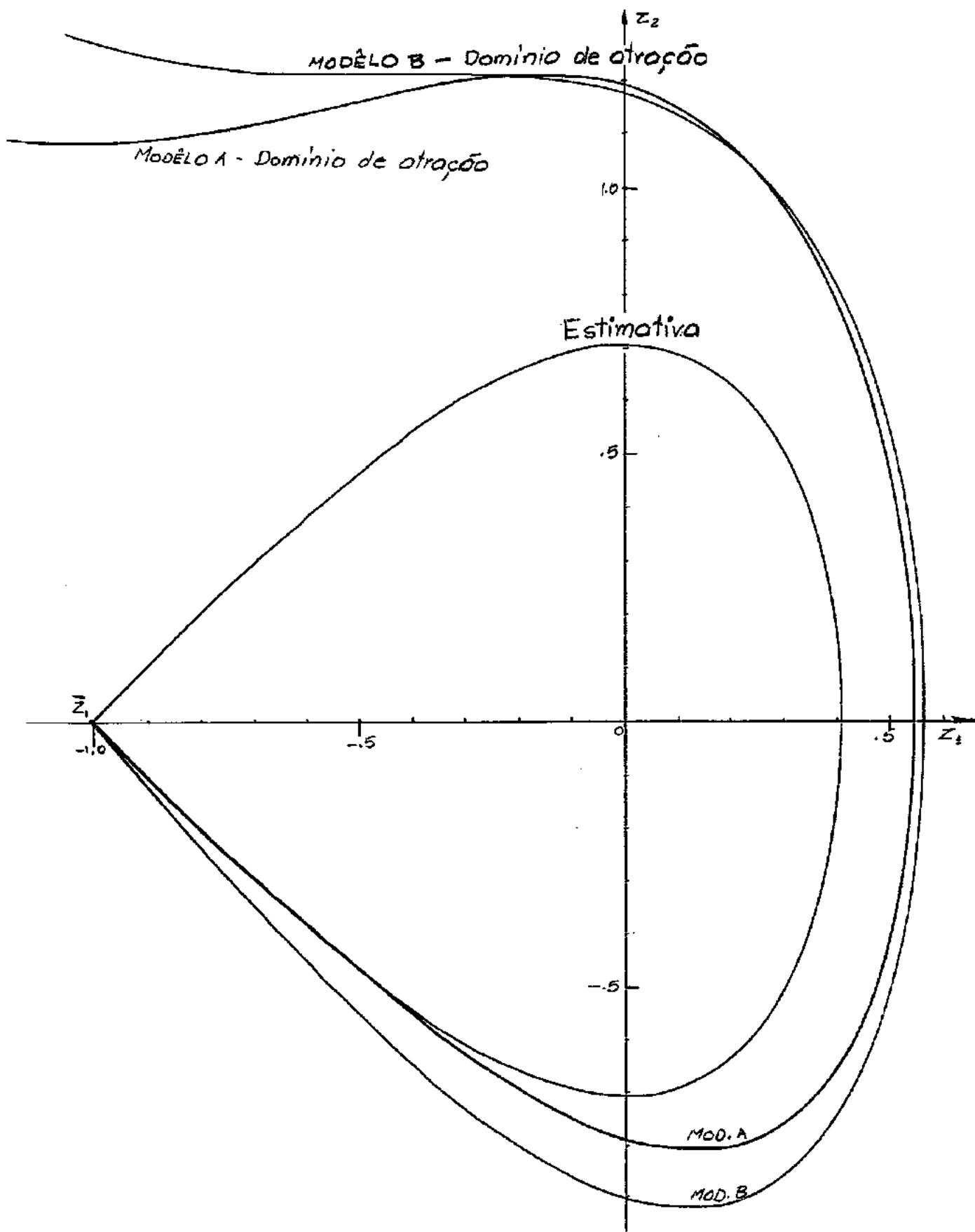


Fig. 5.1 Estimativa obtida pelo método da energia, para ambos os modelos com  $p=0$ ,  $k_1=.30$



de modo que

$$z_2^2 + z_1^2 [3y_1^2 - 1 + 2y_1 z_1 + \frac{z_1^2}{z_2}] - \bar{z}_1^2 [3y_1^2 - 1 + 2y_1 \bar{z}_1 + \frac{\bar{z}_1^2}{z_2}] = 0 \quad (5.11)$$

onde  $\bar{z}_1 = y_2 - y_1$ .

Na fig. 5.1 representamos esta curva.

Note-se que a função de Liapunov assim construída não leva em consideração o termo de amortecimento. Para amortecimento nulo, teremos o resultado exato. Para qualquer valor ou tipo de amortecimento, a região encontrada permanece inalterada, o que nos leva a uma estimativa pobre do domínio de atração. Assim sendo, devemos pesquisar funções de Liapunov que levem em conta o amortecimento.

### 5.3 Método geral

Este método consiste em se tomar uma função  $\dot{V}_1(\underline{z}) > 0$  em todo o espaço de estado (exceto na origem onde  $\dot{V}_1(\underline{z}) = 0$ ) e achar uma função  $V(\underline{z})$  correspondente, para o sistema linearizado, para então calcular uma nova função  $\dot{V}(\underline{z})$ , tomando-se, agora, o sistema de equações original. Demonstra-se que a função  $V(\underline{z})$  é uma função de Liapunov para o sistema completo, em uma certa vizinhança da origem, a qual é determinada pela análise do sinal de  $V(\underline{z})$ , bem como de  $\dot{V}(\underline{z})$ .

Este método só será, aqui, aplicado para o modelo A.

Reescrevendo as equações (2.23) e (2.24) do sistema completo, e do sistema linearizado correspondente,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -k_A(y_1 + z_1)^2 z_2 - \left[ (3y_1^2 - 1) + 3y_1 z_1 + z_1^2 \right] z_1,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_A y_1^2 x_2 - (3y_1^2 - 1)x_1,\end{aligned}$$

seja a função

$$\dot{V}_1(\underline{x}) = -(x_1^2 + x_2^2) > 0, \quad \forall x_1, x_2; \quad \underline{x} \neq \underline{0}. \quad (5.12)$$

Seja a função da forma

$$V_2(\underline{x}) = \frac{1}{(3y_1^2 - 1)} \left[ A x_1^2 + B x_1 x_2 + C x_2^2 \right], \quad (5.13)$$

com A, B e C, constantes a determinar. Calculando a derivada euleriana em relação ao sistema linearizado, teremos:

$$\dot{V}_2(\underline{x}) = -\frac{1}{(3y_1^2 - 1)} \left\{ B(3y_1^2 - 1)x_1 x_2 + [3k_A y_1^2 + 2C(3y_1^2 - 1) - 2A]x_1 x_2 + (2Ck_A y_1^2 - B)x_2^2 \right\} \quad (5.14)$$

Da identidade

$$\dot{V}_2(\underline{x}) = \dot{V}_1(\underline{x}), \quad (5.14)$$

vem que

$$B = 1,$$

$$C = 3/2k_A \quad e \quad (5.15)$$

$$A = \frac{(9 + k_A^2)y_1^2 - 3}{2k_A},$$

de modo que

$$V(\underline{z}) = \frac{1}{3y_1^2 - 1} \left[ \frac{3}{2k_A} z_2^2 + z_1 z_2 + \frac{(9 + k_A^2)y_1^2 - 3}{2k_A} z_1^2 \right], \quad (5.16)$$

com a derivada euleriana em relação ao sistema de equações completo

$$\dot{V}(\underline{z}) = -\frac{1}{(3y_1^2-1)} \left\{ [(3y_1^2-1) + 3z_1^2 + 6y_1z_1] z_1^2 + \left[ \left( \frac{3}{k_A} + k_A \right) z_1^2 + \left( \frac{9}{k_A} y_1 + 2y_1 \right) z_1^2 \right] z_2 + [(3y_1^2-1) + 3y_1z_1 + z_1^2] z_1 z_2 \right\} \quad (5.17)$$

É fácil a verificação de que  $V(\underline{z})$  é realmente função de Liapunov<sup>1</sup> para o sistema de equações (2.23) em uma certa vizinhança da origem.

Calculamos numéricamente a curva  $\dot{V}(\underline{z})=0$ , assim como a maior  $V(\underline{z})=cte.$  que está inteiramente contida na região de  $\dot{V}(\underline{z}) > 0$ .

Na fig. 5.2 está representada a região encontrada através deste procedimento.

Observe-se, fig. 5.2, que a estimativa da região de atração do ponto de equilíbrio é muito ruim. De fato, raramente encontram-se funções de Liapunov que dêem boas estimativas. Isto só é possível quando a equação original apresenta um ponto singular com estabilidade total. Quando se sabe que o ponto de equilíbrio possui estabilidade local, deve-se fazer maiores restrições para  $\dot{V}(\underline{z})$ . Para valores particulares de  $p$  e  $k_A$ , é possível, por meio de tentativas, obter resultados melhores. No entanto, estamos interessados em um método que nos dê bons resultados em todo o campo dos parâmetros  $p$  e  $k_I$ . Daí a pesquisa de métodos especiais.

---

1 Note-se que para  $k_A=0$ , a função  $V(\underline{z})$  deixa de existir.

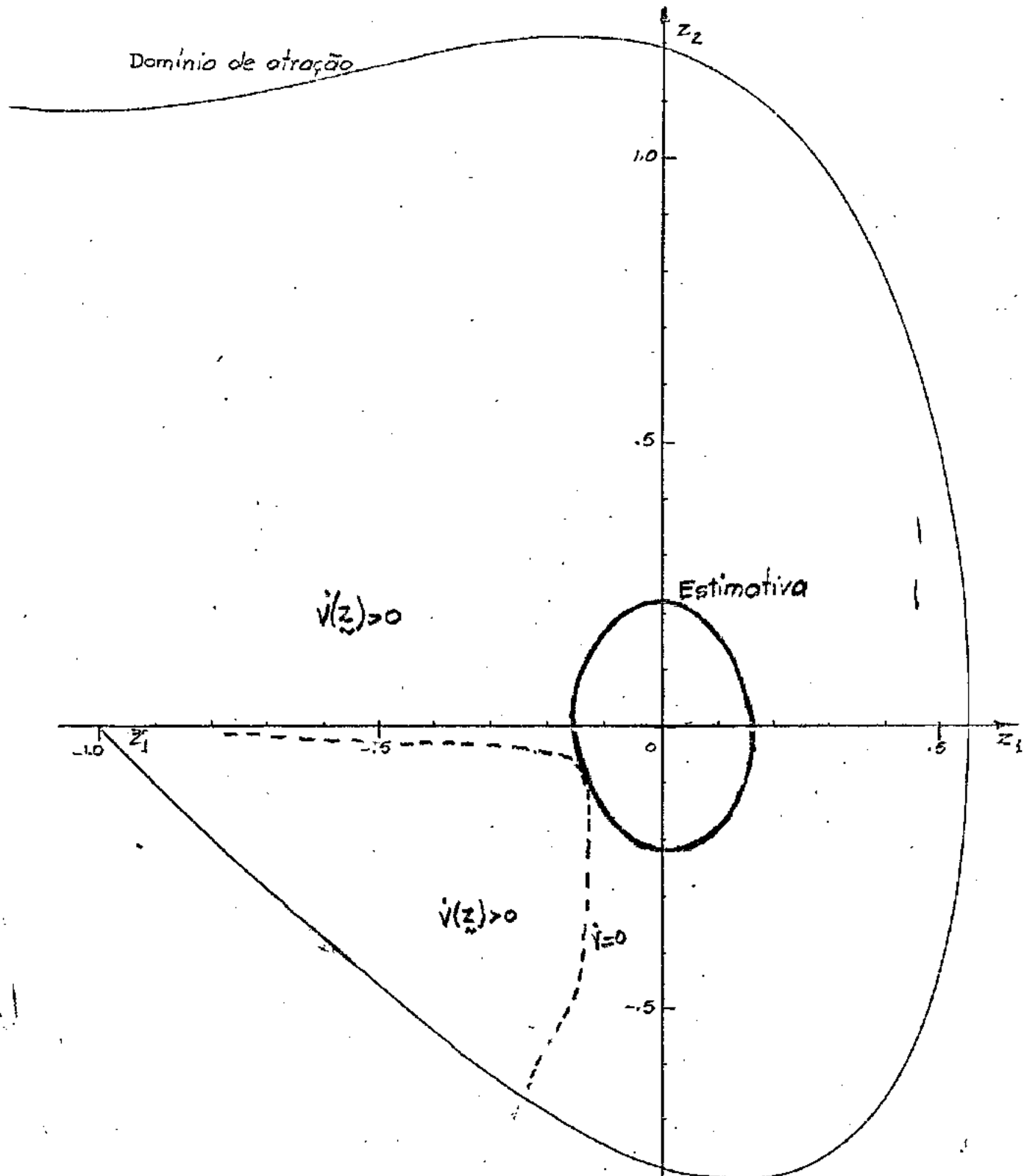


Fig. 5.2 Estimativa obtida pelo método geral, para o modelo A, com  $p=0$ ,  $k_A=.30$

#### 5.4 Método de Szegő

Construiremos, nesta secção, as funções de Liapunov dadas pelo método apresentado por Szegő [34,36,37].

Reescrevendo o sistema de equações (5.1)

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -g_1(z_1)z_2 - f(z_1),\end{aligned}\tag{5.1}$$

seja

$$\begin{aligned}g_1(z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n, \\ f(z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n,\end{aligned}\tag{5.18}$$

donde vem que

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -z_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n.\end{aligned}\tag{5.19}$$

Seja  $V(\underline{z})$  da forma

$$V(\underline{z}) = a_{11}(z_1)z_1^2 + 2a_{12}(z_1)z_1z_2 + z_2^2,\tag{5.20}$$

teremos que

$$\dot{V}(\underline{z}) = 2a_{11}'(z_1)z_1z_2 + 2a_{12}'(z_1)z_2^2 - z_2 \left\{ z_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \right\} \{ a_{12}(z_1)z_1 + z_2 \}.\tag{5.21}$$

Considere-se a função auxiliar

$$\psi(\underline{z}) = 2a_{11}'(z_1)z_1z_2 + 2a_{12}'(z_1)z_2^2 - z_2 \left\{ z_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \right\} \{ a_{12}'(z_1) + z_2 \},\tag{5.22}$$

que é da mesma forma de (5.21).  $\psi(\underline{z})$  é agora posta sob forma quadrática em  $z_2$ ,

$$\psi(\underline{z}) = A(z_1)z_2^2 + B(z_1)z_2 + C(z_1),\tag{5.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
 A(z_1) &= z \left[ a'_{12}(z_1) - \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n \right], \\
 B(z_1) &= z \left[ a'_{11}(z_1) z_1 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n a'_{12}(z_1) z_1 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \right], \\
 C(z_1) &= -z a'_{12}(z_1) z_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Para obter uma função  $\psi(z)$  semi-definida, as raízes  $z_2$  de  $\psi(z)$  são impostas a coincidir, tomando-se  $A(z_1)=B(z_1)=0$ . Teremos então

$$\begin{aligned}
 a'_{12}(z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n, \\
 a'_{11}(z_1) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n \right)^2 + \frac{1}{z_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

A função  $V_1(z)$  associada a  $\psi(z)$  é, então.

$$V_1(z) = z_2^2 + \left[ z \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^{n+1} \right] z_2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^{n+1} + \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^{n+1} \right)^2. \tag{5.26}$$

Escolhamos, agora, a função  $V(z)$  com a mesma forma de (5.26), mas com os coeficientes deixados arbitrários, com o objetivo de obter uma função  $\dot{V}(z)$  negativa semi-definida.

$$V(z) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n b_n z_1^{n+1} \right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n a_n z_1^{n+1} + 2z_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n b_n z_1^{n+1} + z_2^2, \tag{5.27}$$

e teremos

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z) &= 2z_2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_n b_n z_1^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n b_n z_1^{n+1} + z_2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n a_n z_1^n + \\
 &+ 2z_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_n b_n z_1^n - z \left\{ \left[ z_2 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n b_n z_1^{n+1} \right] \left[ z_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Se tomarmos

$$A_n = 1/(n+1), \quad B_n = 2/(n+1) \quad \text{e} \quad C_n = 1/(n+1), \tag{5.29}$$

teremos

$$V(z) = \left[ z_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} b_n z_1^{n+1} \right]^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z_1^{n+1}, \tag{5.30}$$

$$\dot{V}(\underline{z}) = -2 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} b_n z_1^{n+1} \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \right]. \quad (5.31)$$

Utilizando (5.18) e lembrando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} b_n z_1^{n+1} = \int_0^{z_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n dz, \quad (5.32)$$

obteremos

$$V(\underline{z}) = \left( z_2 + \int_0^{z_1} g_1(z) dz \right)^2 + 2 \int_0^{z_1} f(z) dz, \quad (5.33)$$

$$\dot{V}(\underline{z}) = -2 \int_0^{z_1} g_2(z) dz \cdot f(z_1). \quad (5.34)$$

É fácil demonstrar<sup>1</sup> que  $V(\underline{z})$  é função de Liapunov no semi-plano  $z_1 \geq y_2 - y_1$ , sendo, desta maneira, aplicável o teorema II.

1 a)  $f(z_1)$  é a força restauradora, de modo que

$$f(z_1) < 0 \quad \text{para} \quad y_2 - y_1 < z_1 < 0$$

$$f(z_1) > 0 \quad \text{para} \quad z_1 > 0, \quad z_1 < y_2 - y_1$$

$$b) \int_0^{z_1} g_1(z) dz > 0 \quad \text{para} \quad z_1 > 0$$

$$\int_0^{z_1} g_1(z) dz < 0 \quad \text{para} \quad z_1 < 0$$

sendo, assim  $\dot{V}(\underline{z}) < 0$  para  $z_1 > y_2 - y_1$ , e  $\dot{V}(\underline{z}) = 0$  somente na origem e sobre a reta  $z_1 = y_2 - y_1$ , e  $V(\underline{z})$  é positivo-definido para  $z_1 > y_2 - y_1$ .

Note-se que para  $g_1(z_1) = 0$ ,  $\dot{V}(\underline{z}) = 0$  qualquer que se ja  $\underline{z}$  e valem as considerações feitas em 5.2.

A maior curva  $V(z)$  contida no semi-plano  $z_1 \geq y_2 - y_1$  é aquela que tem apenas um ponto sobre a reta  $z_1 = y_2 - y_1$ .

Chamando de

$$\bar{z}_1 = y_2 - y_1, \quad (5.35)$$

a curva  $V(z)$  que tem somente um ponto sobre a reta mencionada é aquela que tem uma raiz sobre a mesma reta, ou seja

$$\text{Det}(V(\bar{z}_1, z_2) - C) = 0, \quad (5.36)$$

onde  $\text{Det}(\ )$  representa o determinante da equação entre parênteses. Teremos,

$$C = \int_0^{\bar{z}_1} f(z) dz, \quad (5.37)$$

de maneira que a curva procurada é dada por

$$(z_2^2 + \int_0^{z_1} g_I(z_1) dz)^2 + \int_0^{z_1} f(z) dz - \int_0^{\bar{z}_1} f(z) dz = 0. \quad (5.37)$$

Nas figs. 5.3 e 5.4 estão representada as regiões limitadas por estas curvas, para o caso de  $k_I = .3$ ,  $p=0$ , para os modelos A e B respectivamente, e são comparadas com os domínios de atração.

Como podemos verificar, em relação à região encontrada em 5.2, (ver fig. 5.1), temos uma melhora, na estimativa, no 2º e 4º quadrantes. Note-se que para  $k_I = 0$ , obteremos o mesmo resultado de 5.2.

Poderíamos, já aqui, considerarmos a união das regiões encontradas nesta secção e na 5.2, como melhor estimativa. Deixaremos, entretanto, para mais tarde (ver 5.7) uma discussão mais completa a respeito.



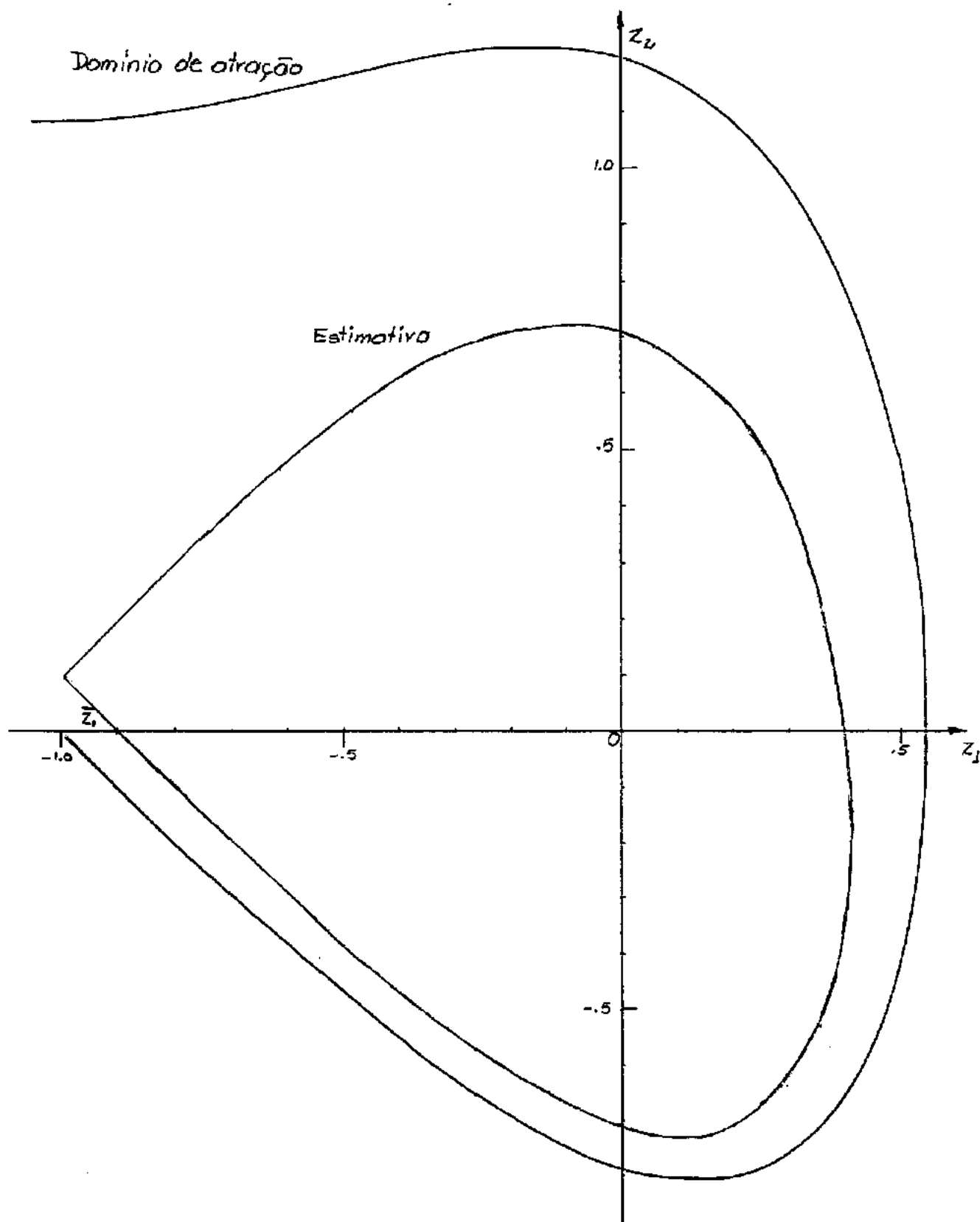


Fig. 5.3 Estimativa obtida pelo método de Szegö, para o modelo A, com  $p=0$ ,  $k_A=.30$

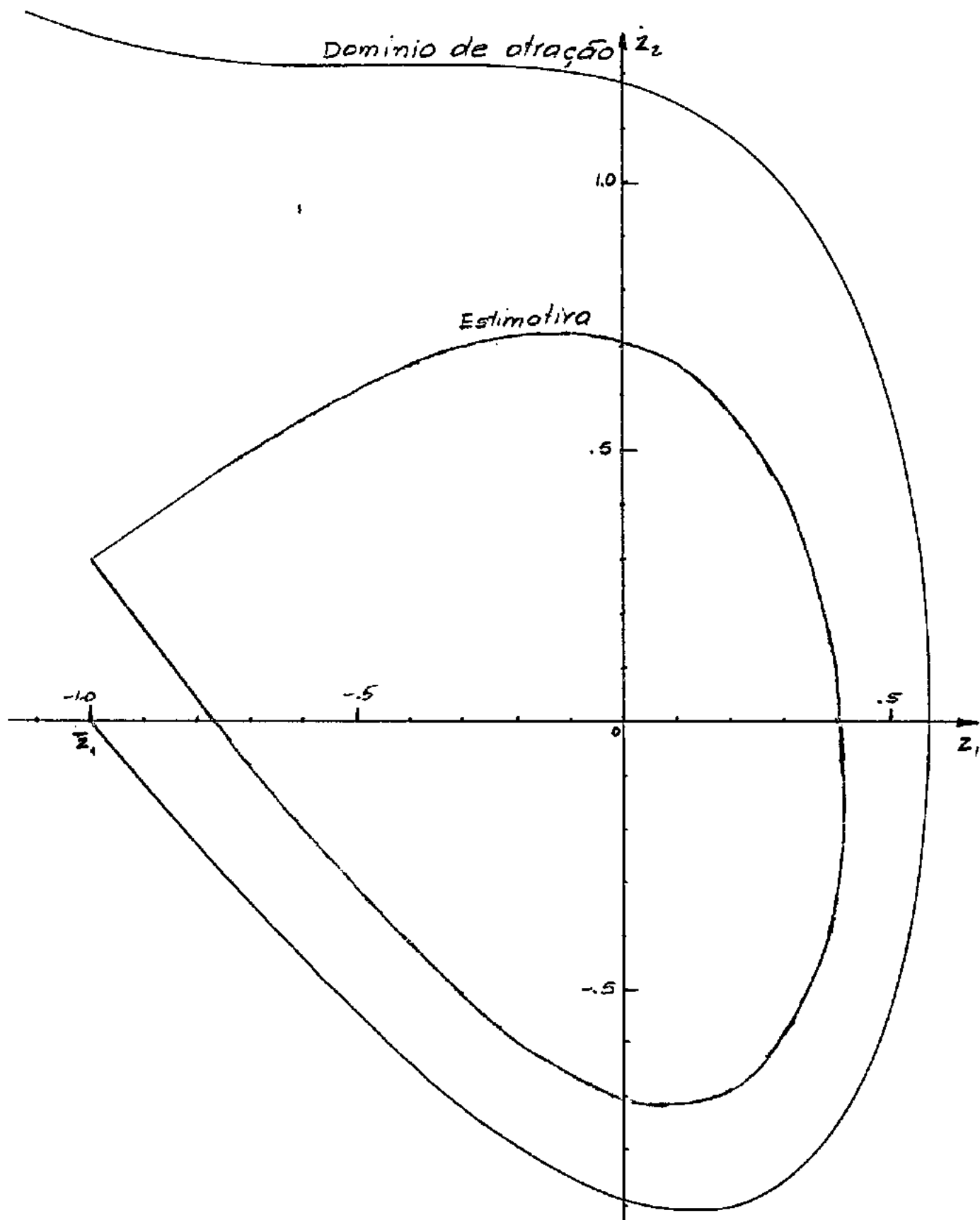


Fig. 5.4 Estimativa obtida pelo método de Szegő, para o modelo B, com  $p=0$ ,  $k_B=.30$

## 5.5 Método de Willems

Como havíamos mencionado na secção anterior, poder-se-ia unir as regiões encontradas em 2.2 e 2.4, obtendo assim uma estimativa melhor do domínio de atração. O método de Willems [38,39] foi estudado, prevendo esta possibilidade. A função de Liapunov conseguida é dada em função de um parâmetro  $\alpha$ , e através a variação deste parâmetro dentro de um intervalo permitido, acham-se infinitas regiões, sendo que a estimativa do domínio de atração é dada pela união destas regiões. Aplicaremos o método somente para o modelo B.

Reescrevendo o sistema de equações para o modelo B

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -g_B(z_1)z_2 - f(z_1), \end{aligned} \quad (5.1)$$

com

$$g_B(z_1) = k_B, \quad (5.4)$$

verificamos ser idêntico ao sistema estudado por Willems em [39], a menos da função  $f(z_1)$ . Desta maneira, não apresentaremos o método [ver 38,39] e escreveremos diretamente o resultado, como em [39].

Teremos

$$V_\alpha(z) = \frac{k_B z_1^2}{2} + \frac{\alpha z_2^2}{2} + z_1 z_2 + \alpha F(z_1), \quad (5.38)$$

onde

$$F(z_1) = \int_0^{z_1} f(z) dz, \quad (5.39)$$

com

$$\alpha \gg 1/k_B . \quad (5.40)$$

Para  $\alpha \rightarrow \infty$ , teremos

$$V_\alpha(z) = \frac{z^2}{2} + \int_0^{z_1} f(z) dz , \quad (5.41)$$

que é a equação (5.6), sob outra forma.

Para  $\alpha = 1/k_B$ , teremos

$$V_{1/k_B}(z) = \frac{1}{2} (z_2 + k_B z_1)^2 + \int_0^{z_1} f(z) dz , \quad (5.42)$$

que é a eq. (5.33) aplicada ao modelo B, a menos de um fator.

Assim sendo, este método engloba aqueles de 5.2 e 5.4, permitindo, ainda, construir outras funções, para valores diferentes de  $\alpha$ .

Como em 5.4, a função  $V_\alpha(z)$  só é válida para  $z_1 \geq \bar{z}_1$ , e procedendo como na secção anterior, achamos a maior curva  $V(z) = C$ , que está contida neste semi-plano,

$$V_\alpha(z) = \frac{k_B \bar{z}_1^2}{2} - \alpha F(\bar{z}_1) - \frac{1}{2} \cdot z_1^2 , \quad (5.43)$$

ou

$$(z_2 + \frac{z_1}{\alpha})^2 + (\alpha k_B - 1)(z_1^2 - \bar{z}_1^2) / \alpha^2 + 2F(z_1) - 2F(\bar{z}_1) = 0. \quad (5.44)$$

Na fig. 5.5, são dadas as regiões encontradas para valores de  $\alpha$  e a região união, que é comparada com o domínio de atração, para  $k_B = .30$ ,  $p=0$ .

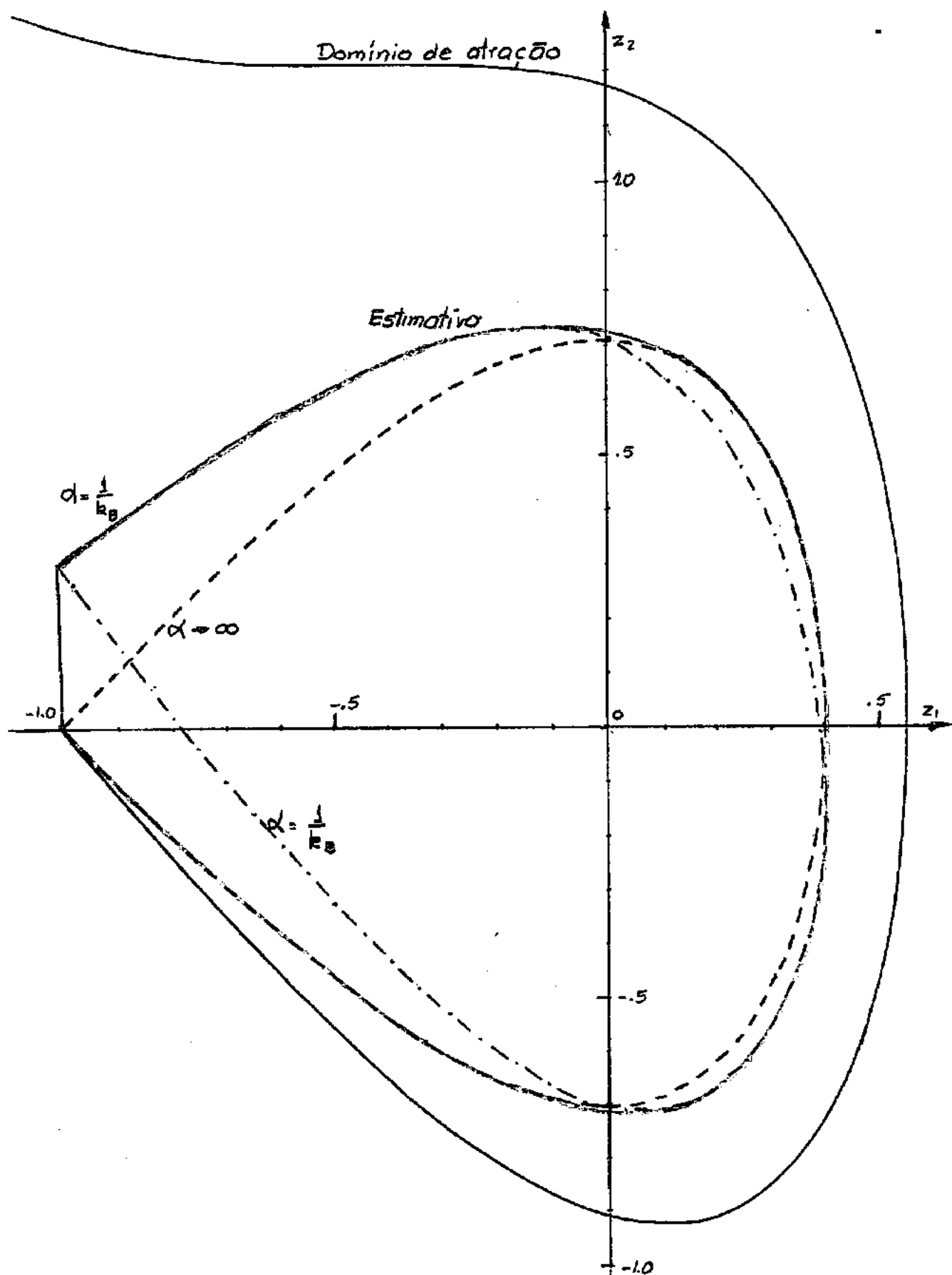


Fig. 5.6 Estimativa obtida pelo método de Willems para o modelo B, com  $p=0$ ,  $k_B=.30$

## 5.6 Método de Infante

O método de Infante [19], foi derivado a partir de considerações geométricas. Apresentaremos, a seguir, um resumo do mesmo, de maneira a facilitar a compreensão da aplicação.

Considere-se o sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= f_2(\underline{z}),\end{aligned}\tag{5.45}$$

e tomemos

$$f_3(\underline{z}) = \frac{\partial f_2(\underline{z})}{\partial z_2} \neq 0.\tag{5.46}$$

Mostra-se, que para o sistema modificado

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 - \int_0^{z_1} f_3(u, z_2) du + f_4(\underline{z}), \\ \dot{z}_2 &= f_2(\underline{z}) + f_5(\underline{z}),\end{aligned}\tag{5.47}$$

é possível encontrar uma integral de energia (independente do tempo), desde que as funções  $f_4(\underline{z})$  e  $f_5(\underline{z})$  satisfaçam

$$\frac{\partial f_4(\underline{z})}{\partial z_1} + \frac{\partial f_5(\underline{z})}{\partial z_2} = 0.\tag{5.48}$$

Se, por outro lado, as funções  $f_4(\underline{z})$  e  $f_5(\underline{z})$  forem convenientes, esta integral de energia é uma possível candidata a função de Liapunov.

Define-se como "produto cruzado"

$$\underline{z} = \int_0^{z_1} f_3(u, z_2) du \cdot f_2(\underline{z}) + z_2 f_5(\underline{z}) - f_2(\underline{z}) \cdot f_4(\underline{z}).\tag{5.49}$$

Mostra-se [19] que na região  $\underline{z}$  não negativo, a integral de energia é função de Liapunov.

No nosso caso,

$$f_2(\underline{z}) = -g_I(z_1)z_2 - f(z_1), \quad (5.50)$$

de modo que

$$f_3(\underline{z}) = -g_I(z_1). \quad (5.51)$$

Seja

$$G_I(z_1) = \int_0^{z_1} g_I(z) dz = - \int_0^{z_1} f_3(u, z_2) du, \quad (5.52)$$

de maneira que a eq. (5.47) ficará

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + G_I(z_1) + f_4(\underline{z}), \\ \dot{z}_2 &= -g_I(z_1)z_2 - f(z_1) + f_5(\underline{z}), \end{aligned} \quad (5.53)$$

e o "produto cruzado"

$$\underline{z} = [g_I(z_1)z_2 + f(z_1)] [G_I(z_1) + f_4(\underline{z})] + z_2 f_5(\underline{z}). \quad (5.54)$$

Se escolhermos

$$f_4(\underline{z}) = -G_I(z_1), \quad f_5(\underline{z}) = g_I(z_1)z_2, \quad (5.55)$$

que satisfazem as condições (5.48), obteremos o sistema modificado

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -f(z_1), \end{aligned} \quad (5.56)$$

e um produto cruzado

$$\underline{z} = g_I(z_1)z_2^2. \quad (5.57)$$

A integral de energia é dada por

$$V(\underline{z}) = z_2^2 + 2F(z_1) , \quad (5.58)$$

onde  $F(z_1)$  é dado por (5.39) . Observe-se que (5.49) é idêntica à (5.7), a menos do sinal. Desta maneira, a região de  $\underline{z}$  não negativa é a região de  $\hat{V}(\underline{z})$  calculado em 5.2, não positiva. Observe-se, também, que a eq.(5.58) é a própria eq.(5.6) de modo que para as funções  $f_4(\underline{z})$  e  $f_5(\underline{z})$  escolhidas, o método de Infante nos dá a mesma função de Liapunov encontrada em 5.2 .

Se, agora, escolhermos

$$\begin{aligned} f_4(\underline{z}) &= 0 , \\ f_5(\underline{z}) &= -g_I(z_1) \cdot G_I(z_1) , \end{aligned} \quad (5.59)$$

é fácil mostrar, por procedimento análogo, que os resultados obtidos serão aqueles dados pelo método de Szegö em 5.4 .

Seja  $h_I(z_1)$  uma função qualquer, e seja

$$H_I(z_1) = \int_0^{z_1} h_I(z) dz . \quad (5.60)$$

Escolhamos, agora,

$$\begin{aligned} f_4(\underline{z}) &= H_I(z_1) - G_I(z_1) , \\ f_5(\underline{z}) &= -H_I(z_1) \cdot g_I(z_1) - h_I(z_1) z_2 - g_I(z_1) , \end{aligned} \quad (5.61)$$

que satisfazem a condição (5.48) . Teremos o produto cruzado

$$\underline{Z} = z_2^2 [g_I(z_1) - h_I(z_1)] + f(z_1) \cdot H_I(z_1) . \quad (5.62)$$



Uma maneira de fazermos  $\underline{z}$  não negativo, é tomarmos

$$h_I(z_1) = \frac{1}{k_I \alpha} g_I(z_1), \quad (5.63)$$

de modo que, para  $\alpha \geq 1/k_I$ ,  $\underline{z}$  é não negativo<sup>1</sup> no semi-plano  $z_1 \geq \bar{z}_1$ .

A integral de energia será dada por

$$V(\underline{z}) = z_2^2 + \frac{2}{k_I \alpha} G_I(z_1) + \frac{1}{k_I \alpha} G_I(z_1)^2 + 2F(z_1). \quad (5.64)$$

Para o caso do modelo B, esta equação será idêntica à equação (5.38) obtida pelo método de Willems em 5.5, a menos de um fator.

Para o caso do modelo A, teremos uma equação com um parâmetro variável, e podemos proceder como em 5.5, tomando como estimativo do domínio de atração a união das regiões encontradas com os diversos valores de  $\alpha$ .

A fig. 5.6 estão representadas as regiões, bem como o domínio de atração, para o modelo A, com  $k_A = .30$  e  $p=0$ .

1 O produto cruzado será

$$\underline{z} = g_I(z_1) z_2^2 \left(1 - \frac{1}{k_I \alpha}\right) + \frac{1}{k_I \alpha} f(z_1) \cdot G_I(z_1),$$

e para  $\alpha \geq 1/k_I$ , o primeiro fator será não-negativo. Já foi visto em 5.4, que o segundo fator é não-negativo para  $z_1 \geq \bar{z}_1$ .

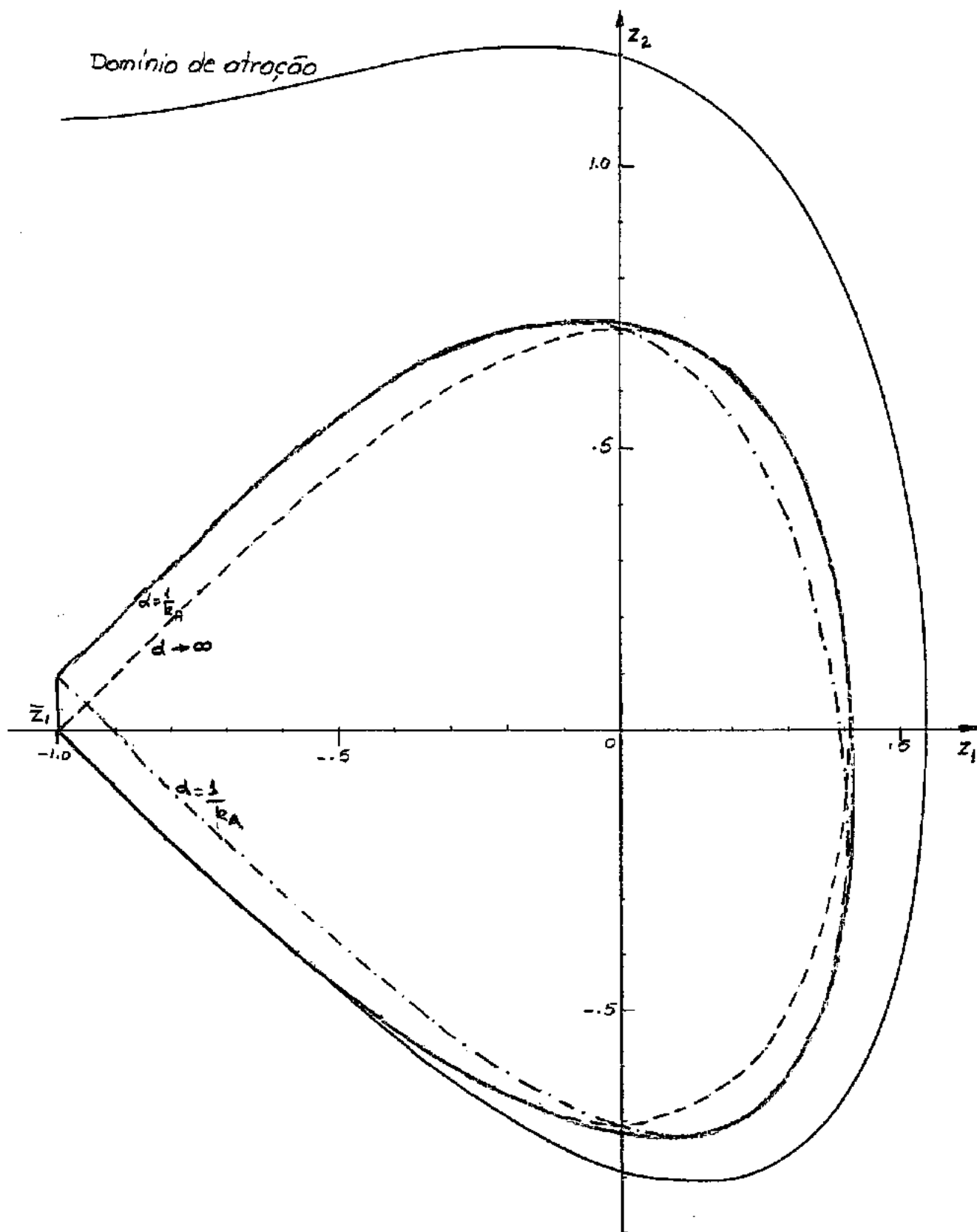


Fig. 5.6 Estimativa obtida pelo método de Infante para o modelo A, com  $p=0$ ,  $k_A=.30$

### 5.7 Estimativa aperfeiçoada do domínio de atração

Vimos, em 5.5 e 5.6 como melhorar a estimativa do domínio de atração, em relação às estimativas feitas em 5.2 e em 5.4, por meio da união das regiões calculadas para diversos valores de um parâmetro introduzido. Se, ao invés do parâmetro utilizado, usássemos os próprios coeficientes adimensionais de amortecimento como parâmetro, ou seja, se para calcular a estimativa do domínio de atração para  $k_I = \bar{K}_I$ , uníssemos as regiões dadas para valores de  $0_I \leq k_I \leq \bar{K}_I$ , obteríamos também uma estimativa melhorada. Demonstra-se a validade desta afirmação por verificação, ou seja, as nossas funções de Liapunov  $V(\underline{z})$  continuam sendo funções de Liapunov para o caso em que  $V(\underline{z})$  com o parâmetro  $k_I < \bar{K}_I$  é aplicado ao sistema de equações sujeito a  $\bar{K}_I$ .

Isto poderia parecer evidente, à primeira vista, ao engenheiro, pois poder-se-ia esperar que um aumento de amortecimento melhorasse a estabilidade e que fizesse com que o domínio de atração ficasse maior. Entretanto, isto não é verdadeiro, como podemos observar pela análise da fig. 4.7. Como havíamos visto, a área hachurada representa o domínio de atração do ponto  $y=y_1$ , e a não-hachurada, aquêle do ponto  $y=y_3$ , para um determinado valor de  $k_I$  e  $p$ . Se fixarmos  $p$ , e modificarmos o valor de  $k_I$ , pode-se mostrar que modificaremos também as curvas  $e_0$  e  $e_0'$ . Por exemplo, se fixarmos a

nossa atenção nas curvas  $e_0$  e  $e_0'$  nas proximidades do ponto sela,  $y=y_2$ , e estudarmos as equações linearizadas em relação a este ponto, observa-se que a inclinação das trajetórias neste ponto dependem de  $k_I$ . Assim sendo, os domínios de atração de  $y=y_1$  e  $y=y_3$  se modificam, e desta maneira, um ponto que antes pertencia ao domínio de atração de  $y=y_1$ , pertence, agora, ao domínio de atração de  $y=y_3$ , ou vice-versa. Desta maneira, a propriedade de que a região encontrada para  $k_I < \bar{k}_I$  é também uma estimativa do domínio de atração do ponto de equilíbrio para amortecimento  $\bar{k}_I$ , só é verdadeira por ser qualidade do processo de construção de funções de Liapunov, e não qualidade dos domínios de atração em si.

Para aperfeiçoarmos a nossa estimativa do domínio de atração, lançaremos mão de um artifício. Observe-se que até este momento, utilizamos somente curvas  $V(z)=C$  fechadas, como fronteiras da região de estimativa. Considere-se, agora, a região  $\Omega_1$  limitada pela curva  $C'$ , dada por  $V(z)=C_1$ ,  $C_1$  tomado de maneira a fazer com que esta curva contenha o ponto sela  $P(\bar{z}_1, 0)$ , e o segmento CB sobre a reta  $z_1=\bar{z}_1$  (ver fig.5.7); Diremos que  $\Omega_1$  é uma estimativa do domínio de atração. De fato, se uma trajetória em um ponto de  $\Omega_1$ , ela não intercepta  $C'$ , desde que  $V(z) < V(\bar{z}_1, 0)$ , para qualquer  $z$  em  $\Omega_1$ , e  $V(z)$  não aumenta ao longo das trajetórias. A mesma trajetória também não intercepta CB, já que, em todos os pontos de CB,  $dz_1/dt = z_2 > 0$ , de modo que as trajetórias vão da esquerda para a direita, entrando em  $\Omega_1$ .

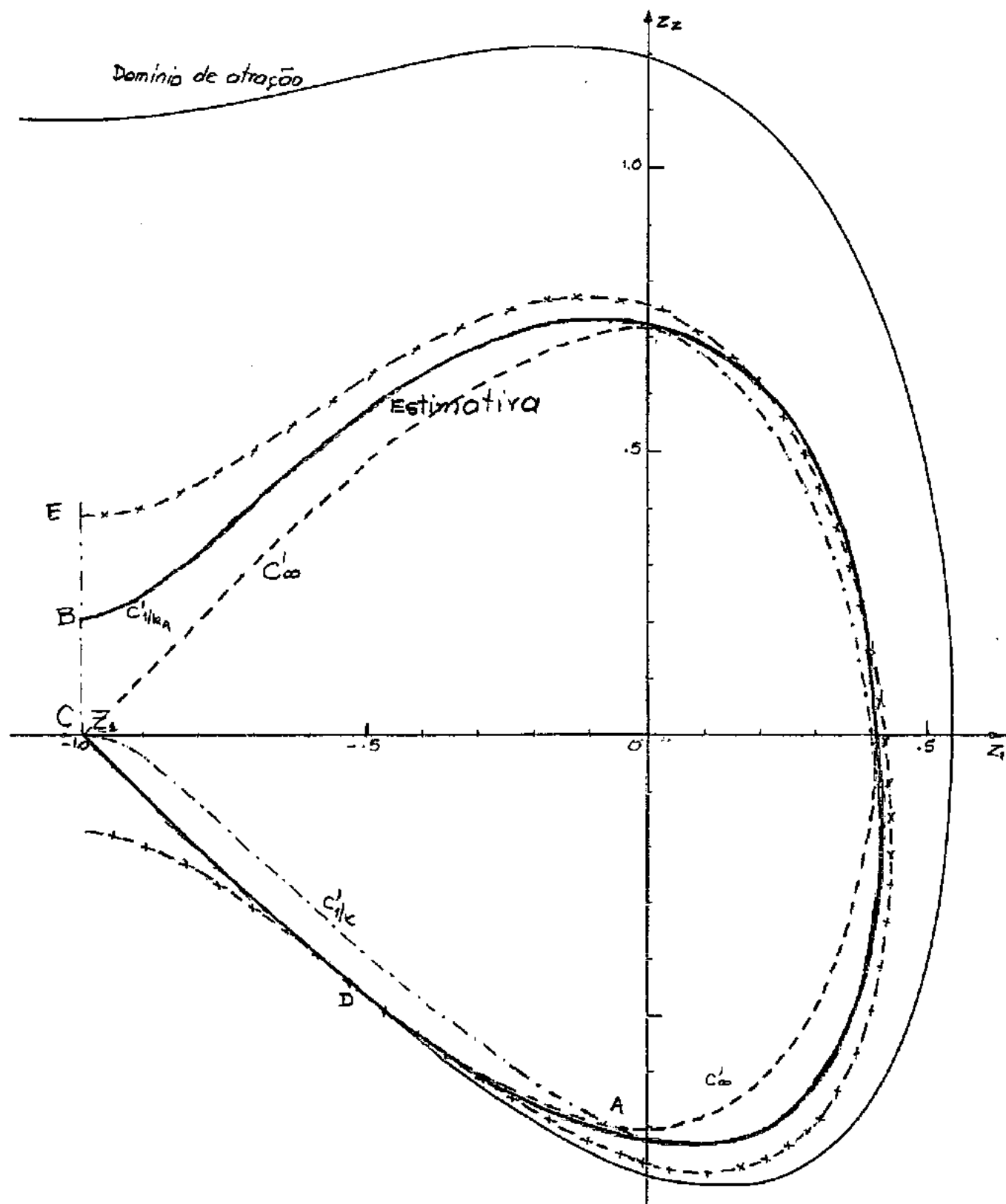


Fig. 5.7 Estimativa melhorada para o modelo A, com  $p=0, k_A=.30$

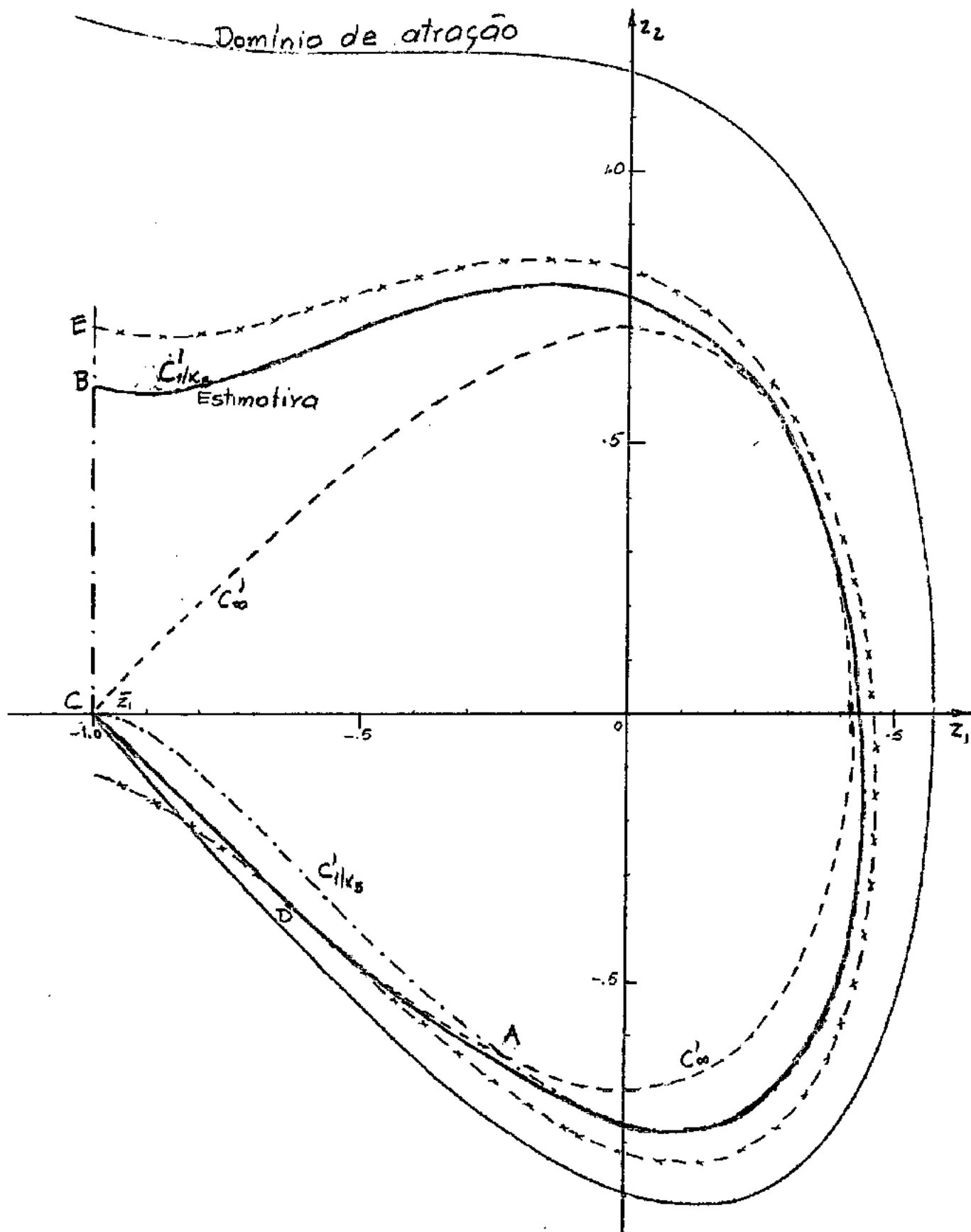


Fig. 5.8 Estimativa melhorada para o modelo B, com  $p=0, k_B=.30$

Como  $\hat{V}(z)$  não é idênticamente nula ao longo de nenhuma solução do sistema de equações, podemos concluir que  $\Omega_1$  é uma estimativa para o domínio de atração.

Observe-se que  $C'$  sendo aberta, envolve, no semi-plano  $z_1 \geq \bar{z}_1$ , tôdas as curvas fechadas, obtidas para os mesmos valores de  $k_I$  e  $p$ . Assim sendo, a estimativa dada por este método é melhorada em relação às estimativas anteriores.

Analicamente teremos

$$V_\alpha(z) = C_1 \quad (5.65)$$

onde

$$C_1 = V_\alpha(\bar{z}_1, 0), \quad (5.66)$$

e  $V(z)$  é dado por (5.64) para o modelo A e por (5.38), para o modelo B.

Para  $k_I = .3$  e  $p=0$ , representamos, nas figs. 5.7 e 5.8, as curvas dadas para alguns valores de  $\alpha$ , assim como a curva limitante da região união das regiões obtidas para todos os valores de  $\alpha$  permissíveis, para os modelos A e B respectivamente.

Voltando à fig. 5.7, observamos que  $C'_{1/k_I}$  intercepta  $C'_\infty$  no ponto A. Lembramos que  $C'_{1/k_I}$  é dada para  $\alpha = k_I$ , e  $C'_\infty$  para  $\alpha \rightarrow \infty$ . Existem infinitas curvas  $C'_{1/k_I}$  dadas por

$$V_{1/k_I}(z) = C_2, \quad (5.67)$$

com  $C_2 > C_1$ , que interceptam  $C'$  no trecho CA. Seja D este ponto de intersecção, e seja a região  $\Omega_2$  limitada pela curva  $C''_{1/k_I}$  (trecho ED), pela parte DC de  $C'_\infty$  e pelo segmento CE sobre a reta  $z_1 = \bar{z}_1$ . Diremos que  $\Omega_2$  é uma estimativa aperfeiçoada, em relação àquela obtida no início desta secção, do domínio de atração. De fato, qualquer trajetória que inicia em  $\Omega_2$  não sairá desta região através a curva EDC por ser a mesma construída de maneira que  $V(z)$  esteja na região de  $\dot{V}(z) < 0$ , ou seja, por partes, ela é construída através de funções de Liapunov. Da mesma maneira que anteriormente, as trajetórias que atravessam CE, por terem derivada em relação ao tempo negativa, o fazem da esquerda para a direita (fig. 5.7) de modo que entram em  $\Omega_2$ . Como  $\dot{V}(z)$  não é idênticamente nula em nenhuma solução do sistema diferencial, concluímos as trajetórias que iniciam em  $\Omega_2$ , nunca saem de  $\Omega_2$ , e são atraídas para o ponto de equilíbrio, de modo que  $\Omega_2$  é uma estimativa para o domínio de atração. Por ser  $C_2 > C_1$ , esta estimativa é melhor que aquela feita anteriormente.

É interessante tomar a maior curva  $C''_{1/k_I}$ , de modo que podemos obter a melhor estimativa. Para tanto, formularemos o problema de uma maneira geral.

Seja  $V_{1/k_I}(z)$  dado pela eq. (5.64), com  $\alpha = 1/k_I$ ,

$$V_{1/k_I}(z) = (z_2 - G_I(z_1))^2 - 2F(\bar{z}_1). \quad (5.68)$$



A curva  $C'$  é dada utilizando-se, por exemplo, a eq. (5.58). Teremos

$$z_2^2 + 2F(z_1) = 2F(\bar{z}_1) \quad , \quad (5.69)$$

donde tiramos o valor de  $z_2$  sôbre CD (fig. 5.7),

$$z_2 = - \left[ 2F(\bar{z}_1) - 2F(z_1) \right]^{1/2} . \quad (5.70)$$

Substituindo em (5.68), teremos

$$V(z) = \left\{ G_I(z_1) - \left[ 2F(\bar{z}_1) - 2F(z_1) \right]^{1/2} \right\}^2 + 2F(z_1) . \quad (5.71)$$

O valor máximo de  $V(z)$  sôbre CD de  $C'$  é dado para a ordenada  $z_1'$  dada pela equação <sup>1</sup>

$$\frac{dV(z)}{dz_1} = 2G(z)g(z) - 2g(z) \left[ 2F(\bar{z}_1) - 2F(z_1) \right]^{1/2} + 2G(z)g(z) \left[ 2F(\bar{z}_1) - 2F(z_1) \right]^{-1/2} . \quad (5.72)$$

Para  $p=0$  e  $k_I=.30$ , nas figuras 5.9 e 5.10, representamos as melhores estimativas obtidas para os modelos A e B respectivamente.

---

1 A raiz a ser considerada é, obviamente, aquela que se encontre entre as ordenadas relativas aos pontos C e D da fig. 5.7 . Nós, em nosso trabalho, achamos o valor máximo de  $V(z)$  numéricamente, utilizando um computador digital.

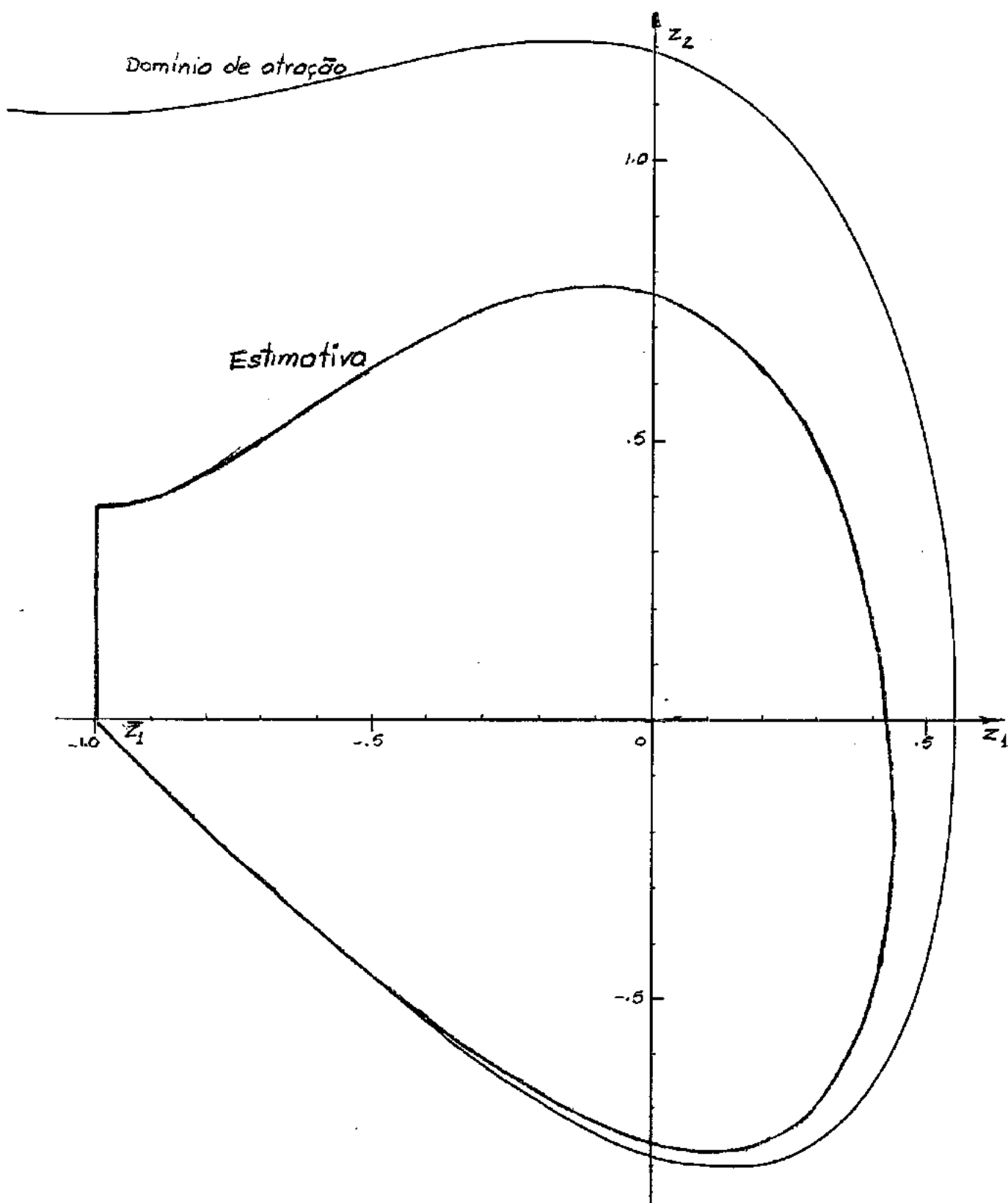


Fig. 5.9 Melhor estimativa para o modelo A, com  $p=0$ ,  $k_A=.30$

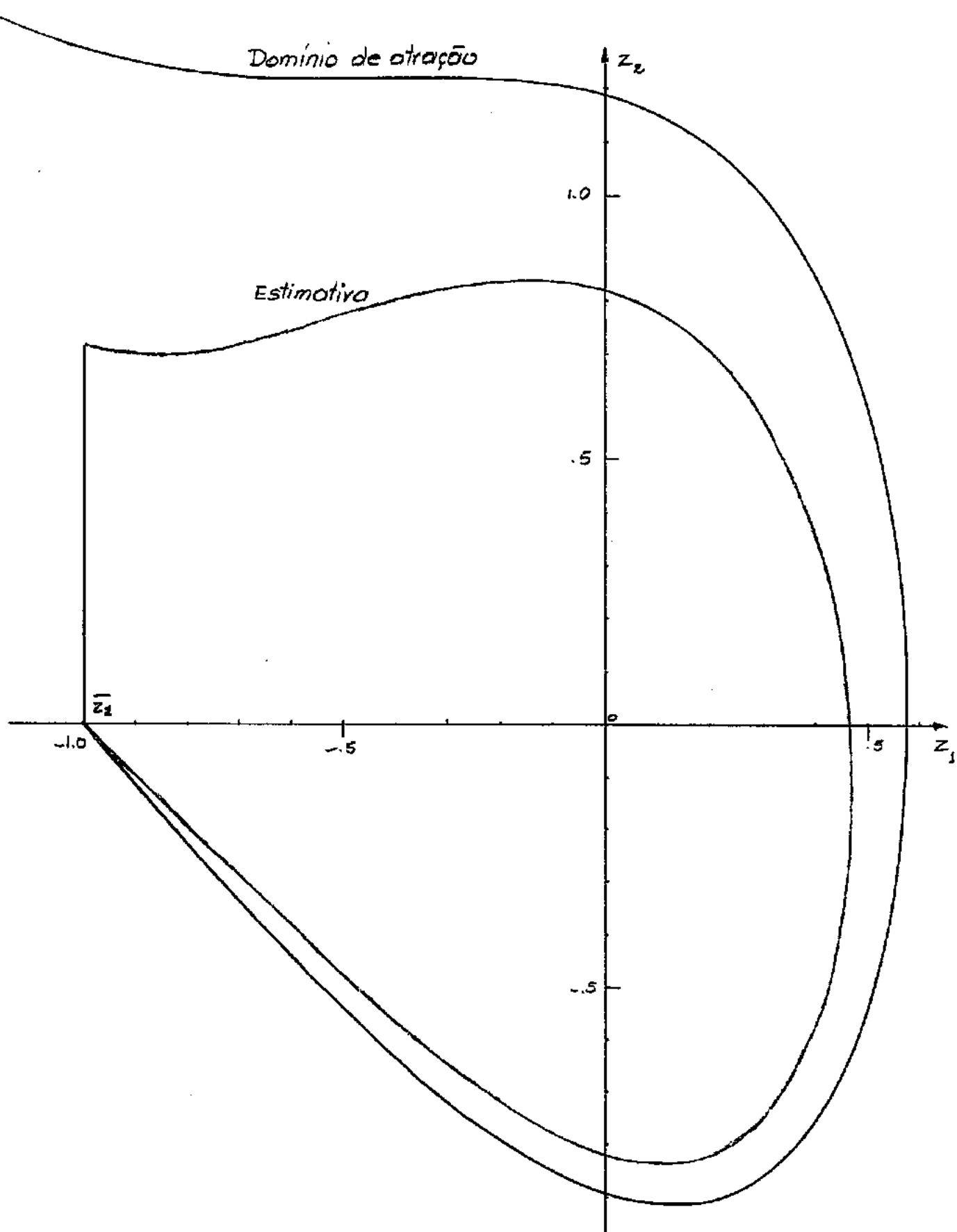


Fig. 5.10 Melhor estimativa para o modelo B, com  $p=0$ ,  $k_B=.30$

## 6. O PROBLEMA DE "SNAP" DINÂMICO

### 6.1 Generalidades

Consideremos as curvas de fase no plano  $(y, \dot{y})$  para carga e amortecimento genéricos. Verifica-se que para certas condições iniciais  $P(y_0, \dot{y}_0)$ , situadas no semi-plano  $y > y_2$ , as curvas de fase que ali se originam permanecem neste semi-plano para qualquer  $t \geq t_0$ . Os movimentos correspondentes, ou tendem assintoticamente para o ponto  $(y_1, 0)$  ou circulam em torno deste ponto somente. Quando isto ocorre, diremos que as condições iniciais  $P(y_0, \dot{y}_0)$  não levam à ocorrência de "snap". Por outro lado, quando uma curva de fase possui pelo menos um ponto em comum com a reta  $y = y_2$ , diremos que o ponto de condições iniciais leva à ocorrência de "snap". É claro que a ocorrência ou não do "snap" não depende somente do ponto de condições iniciais  $P(y_0, \dot{y}_0)$ , mas também dos parâmetros  $p$  e  $k_I$ .<sup>1</sup>

Dado um ponto de condições iniciais  $P(y_0, \dot{y}_0)$  e um certo valor de  $p < \bar{p}$ , mostra-se que sempre é possível determinar um certo  $\bar{k}_I(y_0, \dot{y}_0, p)$  tal que para todo  $k_I \geq \bar{k}_I$  não ocorre o "snap", sendo que para  $k_I < \bar{k}_I$  se verifica o contrário.<sup>2</sup>

---

1 O problema de "snap" dinâmico assim definido é, às vezes, também chamado de "problema de flambagem sob perturbação finita".

2 Para certos valores de  $p$ ,  $P(y_0, \dot{y}_0)$  não ocorre "snap" também para  $k = 0$ . Quando  $k = 0$ ,  $\nexists k < \bar{k}_I$  para o qual ocorra "snap".

O método direto de Liapunov pode ser utilizado para a obtenção de uma estimativa  $k_I^*$  de  $\bar{k}_I$ , com  $k_I^* \gg \bar{k}_I$ . Para tanto, procedemos da maneira seguinte:

Seja  $C^*$  a maior curva fronteira encontrada pela utilização da função de Liapunov  $V(z)$  dada por

$$V(z) = C(p, k_I) \cdot 1 \quad (6.1)$$

Se obrigarmos esta curva a passar pelo ponto de condições iniciais  $P(z_0)$ <sup>2</sup>, teremos

$$V(z_0) = C(p, k_I) \quad (6.2)$$

uma equação que relaciona os valores  $(z_{01}, z_{02}, p, k_I)$ .

Se fixarmos dois desses valores, teremos  $k_I^*$  função do terceiro. É fácil mostrar que o valor de  $k_I^*$  assim determinado é o menor possível, através a utilização da função de Liapunov  $V(z)$ .

Analiticamente teremos

$$k_I^* = h(z_{01}, z_{02}, p) \quad (6.3)$$

Consideraremos dois casos particulares: o caso de carregamento dinâmico tipo "degrau" e carregamento impulsivo.

1 Note-se esta curva é formada pela união das regiões determinadas pela variação do parâmetro  $\alpha$  e pelo segmento OE (fig. 5.7).

2 Como veremos adiante, não é sempre possível fazer esta curva passar pelo ponto  $P(z_0)$ .

## 6.2 Carregamento tipo "degrau"

Sejam dadas as condições iniciais

$$y_0 = 1 \quad , \quad \dot{y}_0 = 0 \quad . \quad (6.4)$$

Deseja-se determinar  $k_I^* = h(p)$  , para p dado

$$\begin{aligned} p^{0-} &= 0 \quad , \\ p^{0+} &= p_c \quad . \end{aligned} \quad (6.5)$$

Teremos

$$\begin{aligned} z_{01} &= 1 - y_1 \quad , \\ z_{02} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Seja

$$V(\underline{z}) = C^*(p, k_I) \quad , \quad (6.7)$$

a maior curva,  $C^*$ , obtida com  $V(\underline{z})$ , para dados valores de  $p$ ,  $k_I$  . A condição que (6.7) passe pelo ponto  $P(z_{01}, 0)$  é dada por

$$G_I^2(z_{01}) + 2F(z_{01}) = C^*(p_c, k_I) \quad . \quad (6.8)$$

Assim sendo, dado um valor de  $p_c$ , crítico, obtém-se um valor de  $k_I^*$ . Pode-se mostrar que a partir de um certo valor de  $p_c$ , o primeiro membro de (6.8) é menor do que o segundo, para qualquer valor de  $k_I^*$ , o que significa não ser possível fazer passar a curva  $C^*$  pelo ponto de condições iniciais.

Resolvemos a eq. (6.8) numericamente, apresentando os resultados nas figs. 6.1 e 6.2, para os modelos A e B respectivamente.

Estão também representadas as soluções exatas, obtidas através integração numérica pelo processo de Runge-Kutta.

### 6.3 Carregamento impulsivo

Seja o carregamento da forma

$$\begin{aligned} z_{02}^{0-} &= 0, \\ z_{02}^{0+} &= v_c, \end{aligned} \quad (6.9)$$

e sejam

$$\begin{aligned} p &= 0, \\ z_{01} &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Teremos, da mesma maneira como na secção anterior

$$v_c^2 = C(v_c, k_I), \quad (6.11)$$

que permite a determinação dos valores  $k_I^*$  em função de  $v_c$ .

Nas figs. 6.3 e 6.4 estão plotados os resultados obtidos, para os modelos A e B respectivamente, os quais são comparados com as soluções exatas.

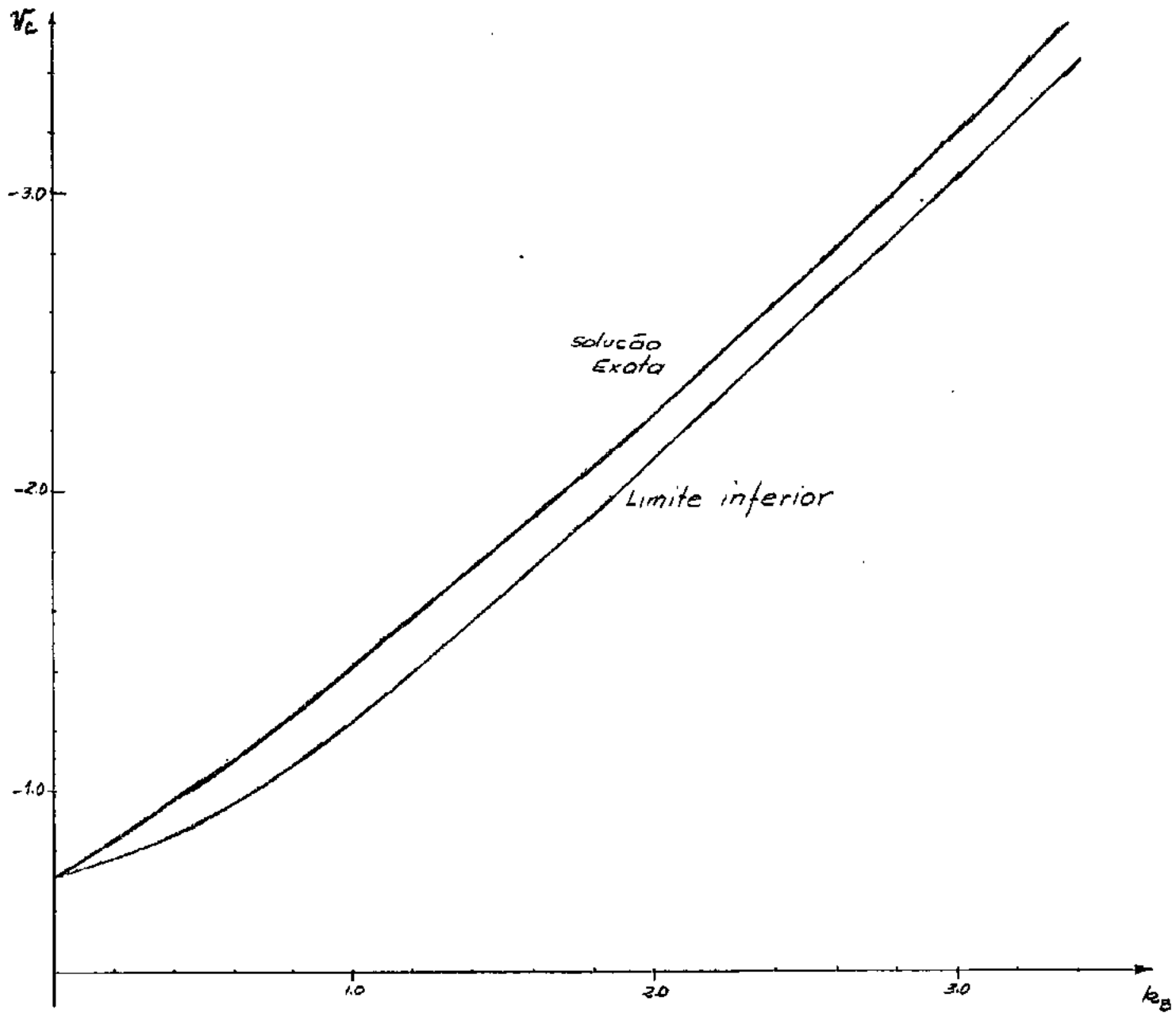


Fig. 6.4 Impulso crítico  $V_c$  vs. coef. de amortecimento  $k_B$   
 MODELO B



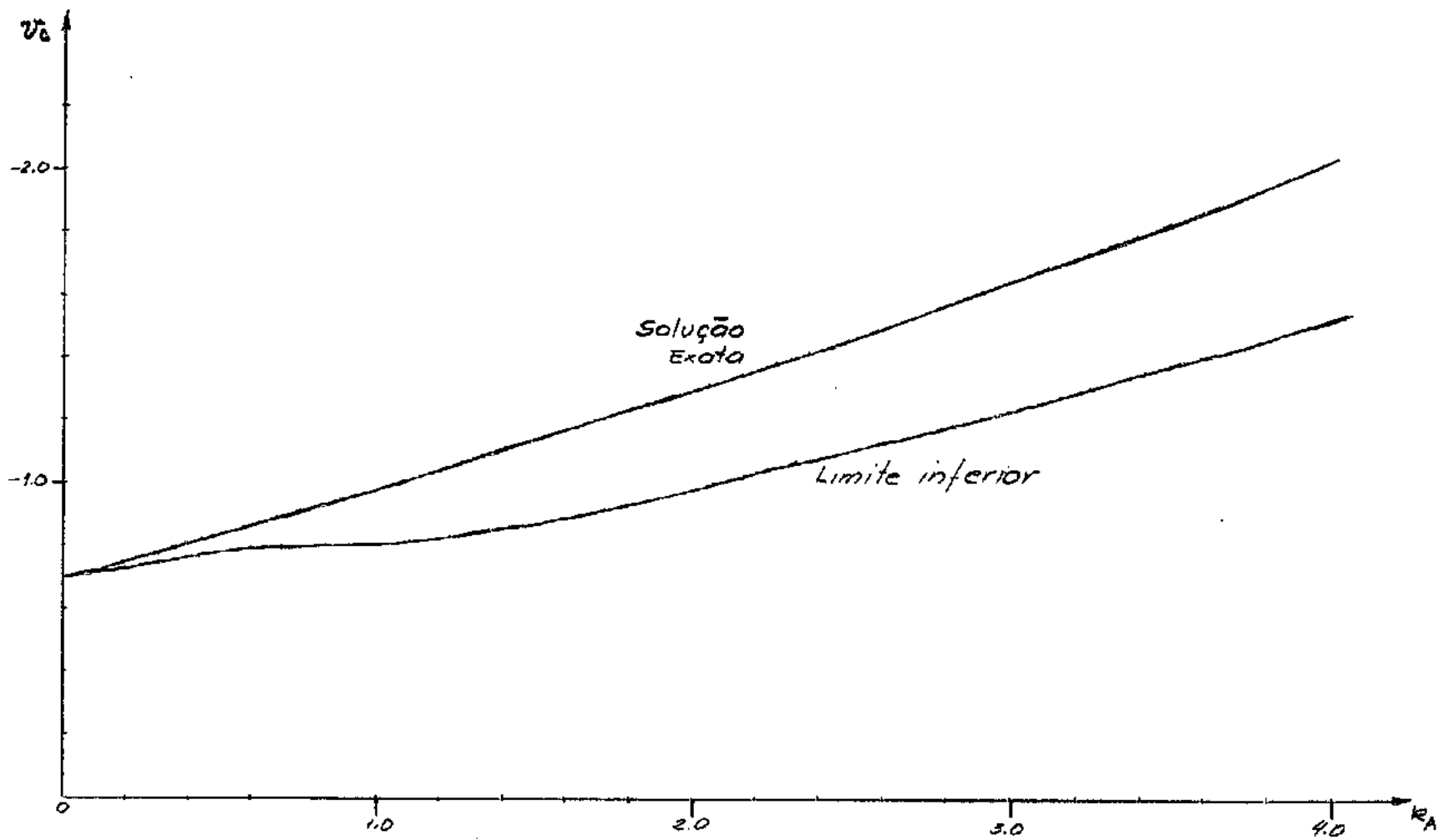


Fig. 6.3 Impulso crítico  $v_c$  vs. fator de viscosidade  $k_A$   
 MODELO A

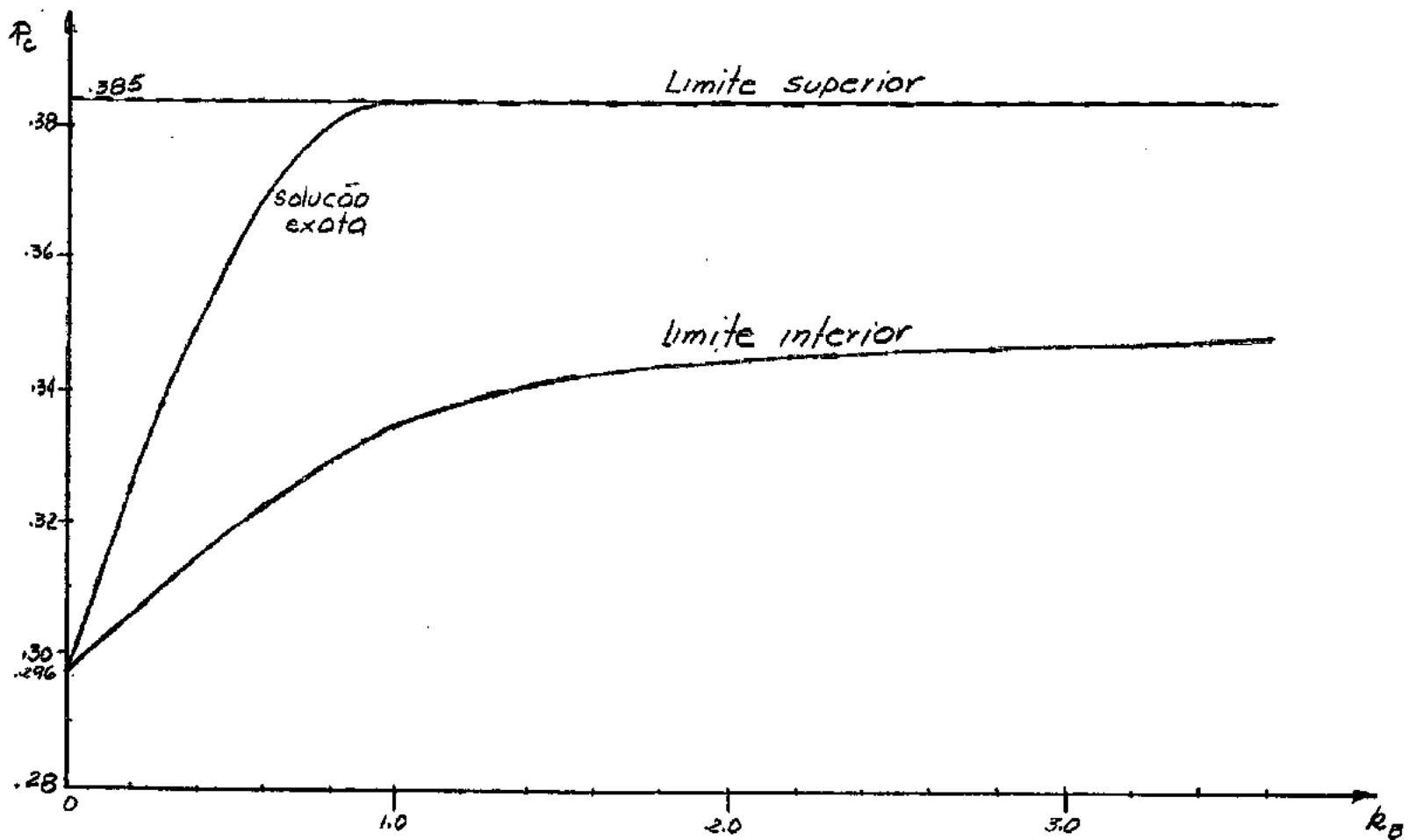


Fig. 6.2 Carga de flambagem dinâmica  $p_c$  vs. coef. de amortecimento  $k_B$   
 MODELO B

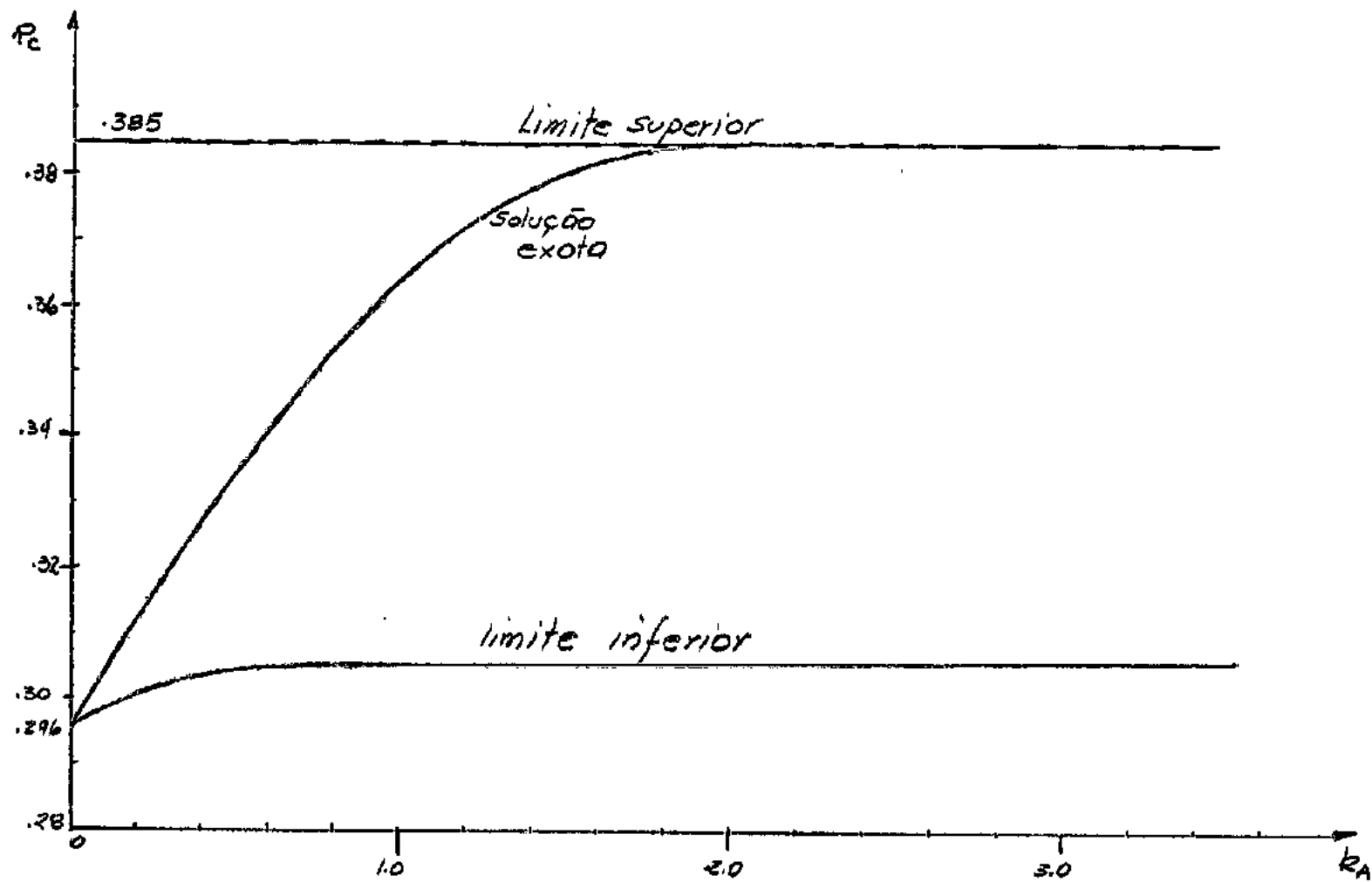


Fig. 6.1 Carga de flambagem dinâmica  $P_c$  vs. fator de viscosidade  $k_A$   
 MODELO A

## 7. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Como podemos observar nas figs. 6.1 a 6.4, os resultados obtidos representam uma estimativa pobre dos carregamentos limites, tipo "degrau" e impulsivo, para os quais ainda não ocorre o "snap". A estimativa é muito ruim no caso de carregamento tipo "degrau", com amortecimento viscoso (modelo A), sendo que pode ser considerada razoável nos demais casos.

Comparando os resultados obtidos em 6.2, para o modelo A, com aqueles obtidos por Nachbar e Huang [30], para o mesmo problema, verificamos serem os primeiros muito pobres em relação àquêles obtidos em [30]. Isto era de se esperar, uma vez que o método de análise desenvolvido no presente trabalho é geral, isto é, permite obter resultados para qualquer conjunto de valores  $(y_{01}, y_{02}, p)$ . O método de [30] é baseado na conservação da energia do sistema mecânico, levando em consideração a energia dissipada pelo amortecimento. Para tanto foi necessária, inicialmente, uma estimativa da trajetória, de modo a permitir o cálculo de energia dissipada. A estimativa da trajetória foi obtida por meio detentativas, levando-se em conta algumas restrições que deveriam ser satisfeitas, por imposição do sistema. Algumas destas restrições dependem das condições iniciais, de modo que o método desenvolvido em [30] é muito particular, uma vez que, fixados dois valores diferentes de  $(y_{01}, y_{02}, p)$  daqueles utilizados, a obtenção de um resultado envolve uma nova estimativa da trajetória.

Para o caso de carregamento impulsivo, as estimativas obtidas são boas, levando-se em conta a generalidade do método.

A qualidade das estimativas, no presente método, dependem exclusivamente das funções de Liapunov utilizadas.

Os métodos de obtenção de funções de Liapunov para equações simples, com pontos de equilíbrio localmente estáveis (por ex. equações de Liénard, que representam grande número de sistemas físicos) são, ainda hoje, muito precários. Os métodos que permitem uma estimativa melhor do domínio de atração são de natureza numérica, sendo portanto somente aplicáveis à equações diferenciais com parâmetros definidos, não permitindo, de uma maneira mais global, obter estimativas em todo o campo dos parâmetros.

Quanto aos métodos de construção de funções de Liapunov apresentados, parece-nos que aquele de Infante nos permite uma aplicação mais racionalizada. O método de Szegö, se convenientemente utilizado, pode levar-nos aos mesmos resultados, se bem que de uma maneira bem mais subjetiva e difícil.

Para sistemas com mais de um grau de liberdade, se se define convenientemente a ocorrência ou não do "snap", o presente método, adaptado, pode ser utilizado com sucesso, desde que seja possível obter funções de Liapunov que levem a uma estimativa razoável do domínio de atração.

Recapitulando, o método de análise através a teoria de Liapunov, é perfeitamente aplicável ao estudo do comportamento de sistemas estruturais que apresentam a característica de "snap". De um modo geral, a análise através as funções de Liapunov apresentadas no presente trabalho, é conveniente, desde só se deseje ter uma idéia dos valores limites para os quais ainda não ocorra o "snap". Para a obtenção de resultados mais precisos, enquanto não se dispuser de um método mais eficiente para a construção de funções de Liapunov, sugere-se a utilização da técnica de [30].

De qualquer maneira, acreditamos ser, este trabalho, uma contribuição ao estudo de problemas de "snap" dinâmico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOLOTIN, V.V.: "The Dynamic Stability of Elastic Systems", Holden-Day, San Francisco, 1964.
- [2] BOLOTIN, V.V.: "Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability", Pergamon Press, N.Y., 1963.
- [3] CETAEV, N.G.: "The Stability of Motion", Pergamon Press, New York, 1961.
- [4] CODDINGTON, E.A. and LEVINSON, N.: "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill, N.Y., 1955.
- [5] FUNG, Y.C. and KAPLAN, A.: "Buckling of Low Arches or Curved Beams of Small Curvature", NACA TN 2840, 1952.
- [6] GJELSVIK, A. and BODNER, S.R.: "The Energy Criterion and Snap Buckling of Arches", J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 88, EM5, 1962, pp. 87-134.
- [7] GUREL, O. and LAPIDUS, L.: "A Guide to the Generation of Liapunov Functions", Ind. and Engng. Chemistry, Vol. 61, 1969, pp 30-41.
- [8] HAHN, W.: "Stability of Motion", Springer, Berlin, 1967.
- [9] HEGEMER, G. A. and TZUNG, F.: "Influence of Damping on the Snapping of a Shallow Arch under Step Pressure Load", AIAA Journal, Vol. 17, 1969, pp. 1494-1499.

- [10] HSU, C.S.: "On Dynamic Stability of Elastic Bodies with Prescribed Initial Conditions", Int. J. Engng. Sciences, Vol. 4, 1966, pp. 1-21.
- [11] HSU, C.S.: "The Effects of Various Parameters on the Dynamic Stability of a Shallow Arch", J. of Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, Vol. 34, 1967, pp. 349-358.
- [12] HSU, C.S.: "Stability of Shallow Arches Against Snap-Through under Timewise Step Loads", J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, Vol. 90, 1968, pp. 31-39.
- [13] HSU, C.S., KUO, C.T. and PLAUT, R.H.: "Dynamic Stability Criteria for Clamped Shallow Arches under Time wise Step Loads", AIAA J., Vol. 7, 1969, pp. 1925-1931.
- [14] HUANG, N.C. and NACHBAR, W.: "Dynamic Snap-Through of Imperfect Viscoelastic Shallow Arches", J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, Vol. 35, 1968, pp. 289-296.
- [15] HUANG, N.C. and VAHIDI, B.: "Dynamic Snap-Through of an Elastic Imperfect Simple Shallow Truss", Zeits. f. Angew. Math. u. Phys., Vol. 19, 1968, pp. 501-509.
- [16] HUANG, N.C. and TSAI, W.T.: "Dynamic Snap-Through of an Elastic-Plastic simple Shallow Truss", Int. J. Sol. Structures, Vol. 5, 1969, pp. 737, 753.



- [17] HUMPHREYS, J.S.: "On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches", AIAA J., Vol. 4, 1966, pp. 878-886.
- [18] HUREWICZ, W.: "Lectures on Ordinary Differential Equations", sec. print., M.I.T., Technology Press, Wiley, N.Y.
- [19] INFANTE, E.F. and CLARK, L.G.: "A Method for the Determination of the Domain of Stability of Second Order Nonlinear Autonomous Systems", J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, Vol. 31, 1964, pp. 315-320.
- [20] KOITER, W.T.: "The Concept of Stability of Equilibrium for Continuous Bodies", Proc. Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Series B, Vol. 66, 1963, pp. 173-177.
- [21] KOITER, W.T.: "The Energy Criterion of Stability for Continuous Elastic Bodies", Proc. Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Series B, Vol. 68, 1965, pp. 178-202.
- [22] LA SALLE, J. P. and LEFSCHETZ, S.: "Stability by Liapunov's Direct Method With Applications", Academic Press, New York, 1961
- [23] LEIPHOLZ, H.: "Stabilitätstheorie", B.G. Teubner, 1968.
- [24] LOCK, M.H.: "Snapping of a Shallow Sinusoidal Arch under a Step Pressure Load", AIAA Journal, Vol. 14, 1966, pp. 1249-1256.

- [25] MALKIN, J.G.: "Theory of Stability of Motion", (em russo), Gostekhizdat, Moscou, 1952 (tradução inglesa: AEC-tr.-3352, United States Atomic Energy Commission, Wash.)
- [26] METTLER, E.: "Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen", Ing.-Arch., Vol. 17, 1949, pp. 418-449.
- [27] METTLER, E. und WEIDENHAMMER, F.: "Kinetischen Durchschlagen des Schwach gekrümmten Stäbes", Ing.-Arch., Vol. 29, 1960, pp. 301-315.
- [28] METTLER, E. und WEIDENHAMMER, F.: "Zur Probleme der kinetischen Durchschlagens schwach gekrümmter Stäbe", Ing.-Arch., Vol. 31, 1962, pp. 421, 432.
- [29] MOVCHAN, A.A.: "On the Stability of Motions of Continuous Bodies. Theorem of Lagrange and Applications", (em russo), Inzeneryj sbornik, Vol. 29, 1960.
- [30] NACHBAR, W. and HUANG, N.C.: "Dynamic Snap-Through of a Simple Viscoelastic Truss", Quart. Appl. Math., Vol. 25, 1967, pp. 65-82.
- [31] NACHBAR, W.: "Assymmetric Snap-Buckling of a Collumn Restrained by a Stiff Wire", Meccanica, Vol. 5, 1970, pp. 134-142.

- [32] PFLÜGER, A.: "Stabilitätsprobleme der Elastostatik", Springer, Berlin, 1964.
- [33] SCHREYER, H.L. and MASUR, F.: "Buckling of Shallow Arches", J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 92, EM4, 1966, pp. 1-19.
- [34] SCHULTZ, D.G.: "The Generation of Liapunov Functions" em "Advances on Control Systems-Theory and Applications", Vol. 2, Edit.: Leondes, C.T., Academic Press, N.Y., 1965.
- [35] SCHULTZ, D.G. and GIBSON, J.E.: "The Variable Gradient Method for Generating Liapunov Functions", Trans. Amer. Inst. Elect. Engrs., Vol. 81, 1962, Pt. II, pp. 203-210.
- [36] SUBRAMANIAN, P.V. et al. : "Development of Improved Liapunov Functions for Transient Power System Stability Study", Int. J. Syst. Sci., Vol. 1, 1970, pp. 143-151.
- [37] SZEGÖ, G.P.: "A Contribution to Liapunov's Second Method: Nonlinear Autonomous Systems", J. Basic Engng., Trans. ASME, Series D, Vol. 84, 1962, pp. 571-578.
- [38] WILLEMS, J.L.: Doctor's Thesis, University of Ghent, Bélgica, 1967. (em holandês)
- [39] WILLEMS, J.L.: "Improved Lyapunov Function for Transient Power-System Stability", Proc. IEE, Vol. 115, 1968, pp. 1315-1317.