



UM MÓDULO ANALÍTICO-NUMÉRICO PARA CÁLCULO DE PERFIS
VERTICAIS DE VELOCIDADE EM ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE
LIVRE

Thalles Augusto Abreu Araujo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Paulo Cesar Colonna Rosman

Rio de Janeiro
Dezembro de 2019

UM MÓDULO ANALÍTICO-NUMÉRICO PARA CÁLCULO DE PERFIS
VERTICAIS DE VELOCIDADE EM ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE
LIVRE

Thalles Augusto Abreu Araujo

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
OCEÂNICA.

Examinada por:

Prof. Paulo Cesar Colonna Rosman, Ph.D.

Prof. Marcos Nicolas Gallo, D.Sc.

Dra. Lidiane dos Santos Lima, D.Sc.

Prof. Afonso Augusto Magalhães de Araujo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2019

Araujo, Thalles Augusto Abreu

Um módulo analítico-numérico para cálculo de perfis verticais de velocidade em escoamentos com superfície livre/Thalles Augusto Abreu Araujo. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XVIII, 103 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Paulo Cesar Colonna Rosman

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Oceânica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 89 – 90.

1. Hidrodinâmica. 2. Modelagem analítico-numérica.
3. Corpos d'água naturais. 4. Superfície livre.
5. Perfil vertical. I. Rosman, Paulo Cesar Colonna. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Oceânica. III. Título.

*Júlia, a nós. Que trabalhos como
este sirvam como impulso e
ferramenta para projetos futuros.
Você merece parte deste diploma.
Obrigado.*

Agradecimentos

A Deus, por todo o privilégio e graça.

À Júlia, minha amiga e companheira, por todo o amor e dedicação em tornar possíveis os meus – e os nossos – sonhos. *Muito* obrigado.

Ao professor Paulo Rosman, que, em boa compreensão a respeito do meu dia-a-dia atribulado de trabalho, me orientou com paciência e dedicação.

À Marise, que, com toda a dedicação de uma profissional verdadeiramente excepcional, me guiou por anos em meio à pós-graduação na COPPE/UFRJ, economizando-me tempo e energia – desde antes da minha primeira matrícula neste programa até certamente após a obtenção deste título.

À minha família – meu pai Paulo, minha mãe Sueli e minha irmã Thalysa –, por toda a compreensão a respeito da minha ausência em meio a uma jornada dupla de trabalho + pós-graduação.

Aos meus amigos e colegas da Marinha do Brasil, sobretudo aos militares da Divisão de Previsão Numérica e aos civis da Rede de Modelagem Observação Oceanográfica, por um dia-a-dia descontraído e alegre. Agradecimentos especiais aos que me ajudaram de maneira mais ativa nos momentos em que eu mais precisei me dedicar à pós-graduação: Comandante Leandro Machado, Comandante Flávia Rodrigues, Tenente Andressa D’Agostini, Tenente Damião e Tenente Luz.

Aos meus amigos da COPPE/UFRJ, sobretudo os pertencentes à Costeira, do andar de baixo e do andar de cima, de todas as gerações com as quais tive a oportunidade de conviver, pela alegre convivência e por toda a camaradagem, tanto em tempos de aulas e quanto em tempos de pesquisa. Agradecimentos especiais à amiga Mônica Buckmann, pelo tempo e pela energia despendidos ao gentilmente me ajudar com parte do processo burocrático da conclusão deste trabalho.

À banca avaliadora desta dissertação, pelo investimento de tempo e de energia requeridos para a avaliação deste trabalho.

A todos os professores da COPPE/UFRJ dos quais fui alunos, pelos ensinamentos passados.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que financiou parte dos meus estudos relativos a este título durante meu primeiro ingresso na COPPE/UFRJ, no primeiro semestre de 2014.

A todos os indivíduos, grupos, comunidades e instituições que, silenciosamente, ajudam a tantos todos os dias. Agradecimentos especiais aos altruístas que, gratuitamente, desenvolvem e mantêm as seguintes ferramentas que tanto utilizei durante este processo: SisBaHiA[®]; CoppeT_EX; Sistema Operacional Linux/Ubuntu; e linguagens de programação *Python*, *SageMath* e *Octave*. Agradecimentos especiais aos seguintes altruístas que, gratuitamente, idealizaram e mantêm canais de ensino de excepcional qualidade: Grant Sanderson, fundador do canal *3Blue1Brown*, e Stephen Welch, fundador do canal *Welch Labs*.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UM MÓDULO ANALÍTICO-NUMÉRICO PARA CÁLCULO DE PERFIS
VERTICAIS DE VELOCIDADE EM ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE
LIVRE

Thalles Augusto Abreu Araujo

Dezembro/2019

Orientador: Paulo Cesar Colonna Rosman

Programa: Engenharia Oceânica

Equações analítico-numéricas capazes de simular escoamentos hidrodinâmicos tridimensionais (x, y, z, t) a partir de informações bidimensionais horizontais (x, y, t) são de grande valia. Este trabalho apresenta um conjunto de equações capaz de fazer isto de maneira a calcular variações verticais tanto na magnitude quanto na direção do escoamento, apresentando um forte potencial para ser utilizado como uma ferramenta operacional para monitorar fenômenos como intrusão de água salina, erosão costeira e alagamento. Tais equações são válidas para corpos d'água naturais com superfície livre e de águas rasas, sejam elas interiores, estuarinas ou marinhas, desde que tais corpos sejam verticalmente homogêneos (mesmo que lateralmente estratificados) e cuja pressão seja hidrostática. Um perfil aprimorado de viscosidade turbulenta, de formato parabólico, é apresentado. Ele analiticamente satisfaz condições de contorno dinâmicas do fundo e da superfície. A partir dele, deduz-se um perfil *preliminar* de velocidade, de formato logarítmico, válido para escoamentos permanentes e uniformes. Então, a partir deste perfil preliminar de velocidade, deduz-se um perfil *ajustado* de velocidade, que representa os termos da equação de Navier-Stokes mais relevantes para escoamentos geofísicos, inclusive as acelerações advectivas não-lineares. Tal perfil ajustado de velocidade é plenamente calculado a partir de variáveis independentes da dimensão vertical (independentes de z). Tal perfil é então posto à prova em dois cenários de modelagem numérica: (1) um canal retilíneo com um talude (modelo 2D) e (2) um canal curvilíneo de fundo horizontal (modelo 3D). O conjunto de equações proposto se mostra potencialmente capaz de simular ambos os cenários com êxito, tendo, inclusive, simulado um escoamento secundário helicoidal no segundo cenário.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

AN ANALYTICAL-NUMERICAL MODULE TO CALCULATE VERTICAL PROFILES OF VELOCITY IN FREE SURFACE FLOWS

Thalles Augusto Abreu Araujo

December/2019

Advisor: Paulo Cesar Colonna Rosman

Department: Ocean Engineering

Analytical-numerical equations capable of simulating three-dimensional hydrodynamic flows (x, y, z, t) from horizontal two-dimensional information (x, y, t) are of great value. This work presents a set of equations capable of doing so in such a way that it calculates vertical variations on both magnitude and direction of the flow, presenting a strong potential for being used as an operational tool to monitor phenomena such as salt water intrusion, coastal erosion, and flooding. These equations are valid for natural water bodies of free surface and shallow waters, fresh or salt, as long as these bodies are vertically homogeneous (even if laterally stratified) and whose pressure is hydrostatic. A refined turbulent viscosity profile of parabolic shape is presented. It analytically satisfies both bottom and surface dynamic boundary conditions. From it, a *preliminary* velocity profile of logarithmic shape is deduced, valid for steady and uniform flows. Then, from this preliminary velocity profile, an *adjusted* velocity profile is deduced, which represents the most relevant terms of the Navier-Stokes equation for geophysical flows, including the nonlinear advective accelerations. Such adjusted velocity profile can be fully deduced from variables that do not depend on the vertical dimension (independents of z). Such profile is then put to test under two numerical modelling scenarios: (1) a straight channel with a slope (2D model) and (2) a curvilinear channel with horizontal bottom (3D model). The proposed set of equations proves to be potentially capable of successfully simulating both scenarios, having even simulated a secondary helical flow in the second scenario.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xviii
1 Introdução	1
1.1 Motivação e hipótese científica	5
1.2 Objetivos	6
2 Referencial Teórico	7
2.1 Modelos de turbulência	7
2.2 O Sistema Base de Hidrodinâmica Ambiental (SisBaHiA [®])	8
2.2.1 O módulo analítico-numérico do SisBaHiA [®]	9
2.3 Velocidade de atrito	11
2.4 Escoamento secundário helicoidal	12
3 O modelo matemático	14
3.1 Classificação de escoamentos e perfis	17
3.2 Perfis verticais considerados neste trabalho	20
3.3 Estratégias de integração e funções de forma (p^F, p^S)	21
3.4 Introdução ao perfil preliminar (u_i^0)	24
3.5 Introdução ao perfil ajustado (u_i)	24
3.6 A função não-linear $f_i(\Psi_i^0)$	25
3.7 O perfil de viscosidade turbulenta (v_{i3})	26
3.7.1 Conceituação	26
3.7.2 Dedução matemática	28
3.8 Expressões completas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)	29
3.9 Expressões compactas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)	31
3.10 Fluxos dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)	31
3.11 Derivadas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)	32
3.12 Componente vertical da velocidade (w^0)	33
3.13 Velocidade de atrito direcional (u_i^*)	38
3.13.1 Velocidade de atrito direcional referente ao fundo (u_i^{*F})	39

3.13.2	Velocidade de atrito direcional referente à superfície (u_i^{*S}) . . .	40
3.13.3	Velocidade de atrito direcional combinada (u_i^*)	41
3.14	Parametrizações das tensões nos contornos	42
3.14.1	Tensão do leito no fundo (τ_i^{*F})	43
3.14.2	Tensão do vento na superfície (τ_i^{*S})	43
3.15	Condições de contorno do perfil preliminar ($\tau_i^{0F}, \tau_i^{0S}, u_i^{0F}, u_i^{0S}$)	44
3.15.1	Condição de contorno dinâmica de fundo (CCDF, τ_i^{0F})	44
3.15.2	Condição de contorno dinâmica de superfície (CCDS, τ_i^{0S}) . . .	46
3.15.3	Condição de contorno cinemática de fundo (CCCF, u_i^{0F}) . . .	46
3.15.4	Condição de contorno cinemática de superfície (CCCS, u_i^{0S}) . .	47
3.16	Condições de contorno do perfil ajustado ($\tau_i^F, \tau_i^S, u_i^F, u_i^S$)	47
3.16.1	Condição de contorno dinâmica de fundo (CCDF, τ_i^F)	47
3.16.2	Condição de contorno dinâmica de superfície (CCDS, τ_i^S) . . .	48
3.16.3	Condição de contorno cinemática de fundo (CCCF, u_i^F) . . .	48
3.16.4	Condição de contorno cinemática de superfície (CCCS, u_i^S) . .	49
3.17	Discretização da dimensão vertical	49
3.17.1	Integração vertical discreta	50
3.18	Relação de grandezas com dimensão vertical discretizada	53
3.19	Termos da equação de conservação de <i>momentum</i> (Ψ_i^0)	53
3.19.1	Aceleração local	53
3.19.2	Aceleração advectiva em x	54
3.19.3	Aceleração advectiva em y	54
3.19.4	Aceleração advectiva em z	54
3.19.5	Aceleração de Coriolis	54
3.19.6	Aceleração pelo gradiente de pressão barotrópica	55
3.19.7	Aceleração pelo gradiente de pressão baroclínica	55
4	Simulações computacionais	56
4.1	Resultados experimentais	56
4.2	Canal retilíneo com talude	56
4.3	Canal curvilíneo de fundo horizontal	58
5	Resultados e discussão	63
5.1	Canal retilíneo com talude	63
5.1.1	Escoamento descendo o talude	64
5.1.2	Escoamento subindo o talude	69
5.2	Canal curvilíneo de fundo horizontal	75
5.2.1	Estação mais à montante	77
5.2.2	Estação mais à jusante	79
5.3	Considerações adicionais	84

6	Conclusão	86
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	88
	Referências Bibliográficas	89
A	Dedução das equações do modelo matemático	91
A.1	Introdução ao perfil preliminar (u_i^0)	91
A.2	Introdução ao perfil ajustado (u_i)	93
A.3	O perfil de viscosidade turbulenta (v_{i3})	95
A.4	Expressões compactas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)	96
A.5	Fluxos dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)	97
A.6	Derivadas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)	98
A.7	Velocidade de atrito direcional referente ao fundo (u_i^{*F})	99
A.8	Velocidade de atrito direcional referente à superfície (u_i^{*S})	100
A.9	Relação de grandezas com dimensão vertical discretizada	101

Lista de Figuras

1.1	Esquema de coordenadas para os modelos 3D e 2DH, onde NR é o Nível de Referência. Para o caso do modelo 2DH, \hat{u}_z exemplifica uma variável promediada na vertical. Adaptado de ROSMAN (1997).	3
1.2	Rio Ibicuí (RS), ilustrando os padrões de sedimentação observados em rios meandrantés, induzidos pela circulação secundária helicoidal. Extraído de BRASIL DAS ÁGUAS (em 20 de novembro de 2018).	5
2.1	Interface gráfica da tela de inicialização do Sistema Base de Hidrodinâmica Ambiental, SisBaHiA [®]	8
2.2	Esquema tridimensional de um escoamento secundário helicoidal. Adaptado de GRAF e BLANCKAERT (2002).	13
3.1	Lista de símbolos utilizados neste trabalho.	16
4.1	Comparação entre o perfil preliminar e os resultados do experimento de YU (1987). Caso para vento a favor do escoamento.	57
4.2	Comparação entre o perfil preliminar e os resultados do experimento de YU (1987). Caso para vento contra o escoamento.	57
4.3	Cota batimétrica do canal retilíneo com talude. Trata-se de um canal hipotético, retilíneo e simétrico em x e em y . Seu comprimento total é de 9600 m e sua largura, de 300 m. Ele possui um talude de inclinação 1:100 ao meio (6 m verticais ÷ 600 m horizontais). De um lado desse talude, há uma extensão de 4000 m com cota batimétrica igual a 2 m (isto é, $h = 2$ m); do outro, há uma extensão de 4000 m com cota batimétrica igual a 8 m (isto é, $h = 8$ m). O <i>zoom</i> na imagem se refere à porção da malha referente ao talude.	59

4.4	Malha de cálculo do canal retilíneo com talude. As linhas grossas delimitam os elementos de cálculo, todos quadrangulares. As interseções entre as linhas grossas e as linhas finas representam os nós de cálculo do modelo. As regiões mais detalhadas, relativas ao talude, apresentam uma distância de 12,50 m entre os nós de cálculo longitudinais ao canal e de 50 m entre os nós de cálculo transversais ao canal. As regiões menos detalhadas, de fundo horizontal, apresentam uma distância de 200 m entre os nós de cálculo longitudinais ao canal e de 50 m entre os nós de cálculo transversais ao canal. O <i>zoom</i> na imagem se refere à porção da malha referente ao talude.	60
4.5	Tabela de atributos da modelagem do canal retilíneo com talude, extraídas do SisBaHiA [®]	61
4.6	Cota batimétrica do canal curvilíneo de fundo horizontal. Trata-se de um canal hipotético e curvilíneo. Seu comprimento total é de aproximadamente 1860 m e sua largura varia de aproximadamente 50 m (porção mais larga) a aproximadamente 40 m (porção mais estreita). Seu fundo é plano e com cota batimétrica constante igual a 2 m (isto é, $h = 2$ m) ao longo de toda a sua extensão.	61
4.7	Malha de cálculo do canal curvilíneo de fundo horizontal. As linhas grossas delimitam os elementos de cálculo, quadrangulares e triangulares. As interseções entre as linhas grossas e as linhas finas representam os nós de cálculo do modelo. A distância média aproximada entre os nós de cálculo da malha varia entre 3 m e 7 m.	62
4.8	Tabela de atributos da modelagem do canal curvilíneo de fundo horizontal, extraídas do SisBaHiA [®]	62
5.1	Vista em planta da elevação da superfície em estado estacionário referente ao canal retilíneo com talude para o cenário do escoamento descendo o talude (isto é, para nordeste caso o eixo <i>y</i> apontasse para norte). O <i>zoom</i> na imagem se refere à porção da malha referente ao talude.	65
5.2	Vista em planta da velocidade promediada na coluna d'água (2DH) em estado estacionário referente ao canal retilíneo com talude para o cenário do escoamento descendo o talude (isto é, para nordeste caso o eixo <i>y</i> apontasse para norte). O <i>zoom</i> na imagem se refere à porção da malha referente ao talude, que apresenta somente as magnitudes dos vetores.	66

- 5.3 Componentes x ($i \equiv 1$, acima) e y ($i \equiv 2$, abaixo) da **velocidade média** e dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®] (linear)**, **preliminar (linear)** e **ajustado (não-linear)**. Perfis resultantes da simulação numérica do **canal retilíneo com talude** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Situação para o escoamento **descendo o talude**. A curva azul pouco aparece porque a diferença entre ela e a curva verde é, para este caso, desprezível. 67
- 5.4 **Componente vertical de velocidade**, w^0 , obtida através da equação da continuidade para escoamentos incompressíveis imposta às variáveis $u_1^0 \equiv u^0$ e $u_2^0 \equiv v^0$. Perfil resultante da simulação numérica do **canal retilíneo com talude** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação do modelo matemático descrito no Capítulo 3 (Seção 3.12) desta dissertação com **41 níveis verticais**. Situação para o escoamento **descendo o talude**. Em analogia às outras figuras apresentadas, ao perfil de w^0 também foi atribuída a cor verde porque ele foi calculado a partir dos **perfis preliminares (lineares)** em x e em y . A reta pontilhada verde constante se refere à velocidade vertical média ao longo da coluna d'água. 68
- 5.5 Vista em planta da **elevação da superfície em estado estacionário** referente ao **canal retilíneo com talude** para o cenário do **escoamento subindo o talude** (isto é, **para sudoeste** caso o eixo y apontasse para norte). O *zoom* na imagem se refere à porção da malha referente ao talude. 70
- 5.6 Vista em planta da **velocidade promediada na coluna d'água (2DH) em estado estacionário** referente ao **canal retilíneo com talude** para o cenário do **escoamento subindo o talude** (isto é, **para sudoeste** caso o eixo y apontasse para norte). O *zoom* na imagem se refere à porção da malha referente ao talude, que apresenta somente as magnitudes dos vetores. 71

5.7	Componentes x ($i \equiv 1$, acima) e y ($i \equiv 2$, abaixo) da velocidade média e dos perfis de velocidade do SisBaHiA[®] (linear) , preliminar (linear) e ajustado (não-linear) . Perfis resultantes da simulação numérica do canal retilíneo com talude através do módulo 2DH do SisBaHiA [®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com 41 níveis verticais . Situação para o escoamento subindo o talude . A curva azul pouco aparece porque a diferença entre ela e a curva verde é, para este caso, desprezível.	72
5.8	Componente vertical de velocidade , w^0 , obtida através da equação da continuidade para escoamentos incompressíveis imposta às variáveis $u_1^0 \equiv u^0$ e $u_2^0 \equiv v^0$. Perfil resultante da simulação numérica do canal retilíneo com talude através do módulo 2DH do SisBaHiA [®] seguido da aplicação do modelo matemático descrito no Capítulo 3 (Seção 3.12) desta dissertação com 41 níveis verticais . Situação para o escoamento subindo o talude . Em analogia às outras figuras apresentadas, ao perfil de w^0 também foi atribuída a cor verde porque ele foi calculado a partir dos perfis preliminares (lineares) em x e em y . A reta pontilhada verde constante se refere à velocidade vertical média ao longo da coluna d'água.	73
5.9	Vista em planta da elevação da superfície em estado estacionário referente ao canal curvilíneo com de fundo horizontal	76
5.10	Vista em planta da velocidade promediada na coluna d'água (2DH) em estado estacionário referente ao canal curvilíneo com de fundo horizontal . Por questões estéticas, apenas um quarto dos vetores referentes a cada nó de cálculo está sendo exibido.	77
5.11	Componentes x ($i \equiv 1$, acima) e y ($i \equiv 2$, abaixo) da velocidade média e dos perfis de velocidade do SisBaHiA[®] (linear) , preliminar (linear) e ajustado (não-linear) . Perfis resultantes da simulação numérica do canal curvilíneo de fundo horizontal através do módulo 2DH do SisBaHiA [®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com 41 níveis verticais . Perfis representativos da estação mais a montante (primeira curva, a norte) do domínio de modelagem. A curva azul pouco aparece porque a diferença entre ela e a curva verde é, para este caso, desprezível.	78

- 5.12 Vista em planta da **velocidade média** e da variação vertical dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®] (linear)**, **preliminar (linear)** e **ajustado (não-linear)**. Perfis resultantes da simulação numérica do **canal curvilíneo de fundo horizontal** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Perfis representativos da estação mais a **montante (primeira curva, a norte)** do domínio de modelagem. Apenas 11 dos 41 vetores são apresentados na imagem por uma questão estética. São apresentados os seguintes vetores: o de fundo (nulo), mais 9 níveis verticais, mais o de superfície, todos equiespaçados. Assim, o vetor ao lado da palavra “fundo”, no gráfico referente ao perfil **ajustado (não-linear)**, se refere a um vetor *próximo* ao fundo, e não *no* fundo, pois a velocidade *no* fundo é nula. Uma escala linear de transparência foi atribuída aos vetores: quanto mais transparente um vetor, mais próximo ao fundo ele se localiza. 80
- 5.13 Vista em planta da **velocidade** do escoamento para o **canal curvilíneo de fundo horizontal**. A porção dentro do *zoom* apresenta, para a estação mais a **montante**, quatro níveis de velocidade 3D simulados pelo módulo 3D do SisBaHiA[®]. As velocidades fora da caixa de *zoom* representam velocidades 2DH. 81
- 5.14 Componentes x ($i \equiv 1$, acima) e y ($i \equiv 2$, abaixo) da **velocidade média** e dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®] (linear)**, **preliminar (linear)** e **ajustado (não-linear)**. Perfis resultantes da simulação numérica do **canal curvilíneo de fundo horizontal** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Perfis representativos da estação mais a **juvante (segunda curva, a sul)** do domínio de modelagem. A curva azul pouco aparece porque a diferença entre ela e a curva verde é, para este caso, desprezível. 82

- 5.15 Vista em planta da **velocidade média** e da variação vertical dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®] (linear)**, **preliminar (linear)** e **ajustado (não-linear)**. Perfis resultantes da simulação numérica do **canal curvilíneo de fundo horizontal** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Perfis representativos da estação mais a **jusante (segunda curva, a sul)** do domínio de modelagem. Apenas 11 dos 41 vetores são apresentados na imagem por uma questão estética. São apresentados os seguintes vetores: o de fundo (nulo), mais 9 níveis verticais, mais o de superfície, todos equiespaçados. Assim, o vetor ao lado da palavra “fundo”, no gráfico referente ao perfil **ajustado (não-linear)**, se refere a um vetor *próximo* ao fundo, e não *no* fundo, pois a velocidade *no* fundo é nula. Uma escala linear de transparência foi atribuída aos vetores: quanto mais transparente um vetor, mais próximo ao fundo ele se localiza. 83
- 5.16 Vista em planta da **velocidade** do escoamento para o **canal curvilíneo de fundo horizontal**. A porção dentro do *zoom* apresenta, para a estação mais a **jusante**, quatro níveis de velocidade 3D simulados pelo módulo 3D do SisBaHiA[®]. As velocidades fora da caixa de *zoom* representam velocidades 2DH. 85

Lista de Tabelas

3.1	Classes de perfis verticais de velocidade a que este trabalho faz referência.	20
3.2	Comparação entre os perfis verticais de viscosidade turbulenta considerados neste trabalho: o perfil do atual módulo 3D-AN do SisBaHiA [®] e o perfil aprimorado, proposto por este trabalho. Atributos de destaque se encontram em negrito	21
3.3	Comparação entre os perfis verticais de velocidade considerados neste trabalho: o perfil do atual módulo 3D-AN do SisBaHiA [®] ; o perfil 3D-AN preliminar, proposto por este trabalho; e o perfil 3D-AN ajustado, proposto por este trabalho. Atributos de destaque se encontram em negrito	22
3.4	Discretização da dimensão vertical.	50

Capítulo 1

Introdução

Modelos de hidrodinâmica ambiental são ferramentas indispensáveis a uma boa gestão de corpos d'água naturais. Munidos de equações que descrevem a mecânica dos fluidos geofísicos, eles permitem o estudo de processos referentes a diversos fenômenos de interesse, como circulação hidrodinâmica, qualidade das águas e processos sedimentológicos. Sem eles, é difícil se ter uma visão completa (multidisciplinar) e integrada (interdisciplinar) de corpos d'água complexos como rios, lagos, estuários, baías, mares, oceanos e zonas costeiras.

Existe uma vasta gama de *tipos de modelos* de hidrodinâmica ambiental. Modelos conceituais, matemáticos, analíticos, analógicos, físicos, numéricos ou computacionais são alguns exemplos (ROSMAN, 2019). Modelos conceituais e modelos matemáticos descrevem, cada um à sua maneira, um escoamento hidrodinâmico. Todos os outros tipos listados, cada um à sua maneira, tem como objetivo resolver os modelos conceituais e matemáticos, de modo a fornecer ferramentas para estudos diagnósticos, prognósticos e de dinâmica de processos. Este trabalho focará em *modelos analíticos*, em *modelos numéricos* e em modelos que surgem a partir da interação entre esses dois tipos: *modelos analítico-numéricos*. Mais especificamente, focará na capacidade desses tipos de modelos de descrever escoamentos hidrodinâmicos tridimensionais e complexos.

Modelos analíticos são compostos pelas soluções gerais das equações diferenciais que descrevem um escoamento hidrodinâmico. Eles são poderosíssimos quando aplicáveis em situações práticas, pois, através de uma única equação explícita, permitem a solução de um modelo matemático em qualquer posição e instante do domínio espaço-tempo modelado. Assim, quando resolvidos por computadores, o esforço computacional despendido é mínimo. Em contrapartida, por não terem solução geral conhecida para escoamentos pouco simplificados, eles requerem uma idealização excessiva e irrealista, incompatível com a grande maioria dos casos práticos. Assim, quando aplicados, muitas vezes adotam simplificações que desprezam parte dos princípios físicos do fenômeno representado. Por esses motivos, pouquíssimos

modelos analíticos são efetivamente aplicáveis.

Modelos numéricos são compostos pela tradução numérica e discreta do conjunto de equações diferenciais que descrevem um escoamento hidrodinâmico. Eles são muito robustos, desde que sejam respeitadas as condições de validade dos métodos numéricos utilizados, e podem resolver praticamente qualquer modelo matemático. Por isso, são aplicáveis a praticamente qualquer situação prática. Em contrapartida, eles só fazem contas passo a passo, isto é, a passos discretos e unidirecionais ao longo do domínio temporal, o que requer um grande esforço computacional. Entretanto, devido à capacidade dos computadores de fazerem contas muito rapidamente, esta atualmente é a maneira mais comum de se resolver modelos matemáticos de hidrodinâmica ambiental.

Modelos analítico-numéricos, por sua vez, agrupam vantagens tanto de modelos analíticos quanto de modelos numéricos. Quando utilizados, parte do modelo matemático em questão é resolvida através de um modelo analítico e parte através de um modelo numérico. Em outras palavras, as partes não resolvíveis analiticamente são calculadas numericamente.

Os *modelos matemáticos* que descrevem escoamentos hidrodinâmicos tridimensionais, sejam eles resolvidos por modelos analíticos, numéricos ou analítico-numéricos, podem ser escritos em diferentes números de dimensões. Os mais completos e complexos são os tridimensionais (3D), seguidos pelos bidimensionais (2D) e então pelos unidimensionais (1D). Os *modelos 3D* descrevem as variações do escoamento em três dimensões espaciais (x , y e z) e em uma dimensão temporal (t). Os *modelos 2D*, com menor complexidade e conseqüente menor capacidade de descrição, descrevem variações do escoamento em duas dimensões espaciais (x e y ou x e z ou y e z) e em uma dimensão temporal (t). Os *modelos 1D*, ainda menos complexos, descrevem variações do escoamento em uma dimensão espacial (x ou y ou z) e em uma dimensão temporal (t). Uma descrição detalhada sobre esses modelos matemáticos pode ser encontrada em (ROSMAN, 1997).

Um *modelo 3D* descreve um escoamento tridimensional em toda a sua completude. Eles podem ser utilizados para descrever o escoamento de praticamente qualquer corpo d'água natural. Em termos de hidrodinâmica ambiental aplicada, eles tipicamente são apenas utilizados em situações em que os modelos 2D e 1D deixam de representar processos físicos relevantes. Em outras palavras, modelos mais simplificados são preferíveis a modelos mais sofisticados em situações em que os modelos simplificados representam satisfatoriamente todos os processos físicos relevantes. Isso porque modelos 3D, por serem mais completos e complexos, requerem tanto mais esforço computacional quanto mais tempo de processamento do que modelos 2D e 1D.

Um *modelo 2D* é obtido através da promediação de um modelo 3D ao longo de

uma dimensão específica (Figura 1.1). Este procedimento é feito pela aplicação de uma integral de linha ao longo dessa dimensão e posterior aplicação das condições de contorno correspondentes. A informação sobre a variação do escoamento ao longo da dimensão promediada é, então, perdida, sendo somente preservada a informação referente a suas condições de contorno. Existem dois principais tipos de modelos 2D: os oriundos da promediação da dimensão vertical (z) e os oriundos da promediação de uma das dimensões horizontais (x ou y). Os primeiros são os 2D-horizontais (2DH), pois são bidimensionais e contêm descrições do escoamento apenas nas direções horizontais. Os segundos são os 2D-verticais (2DV), pois são bidimensionais e contêm descrições do escoamento na dimensão vertical em uma das dimensões horizontais. Modelos 2DH são tipicamente utilizados para simular escoamentos cujas variações verticais são irrelevantes, como por exemplo escoamentos em baías verticalmente homogêneas. Modelos 2DV são tipicamente utilizados para simular escoamentos cujas variações em alguma direção horizontal são irrelevantes, como por exemplo alguns estuários, a fim de se estudar o comportamento de cunhas salinas (DE MIRANDA *et al.*, 2002).

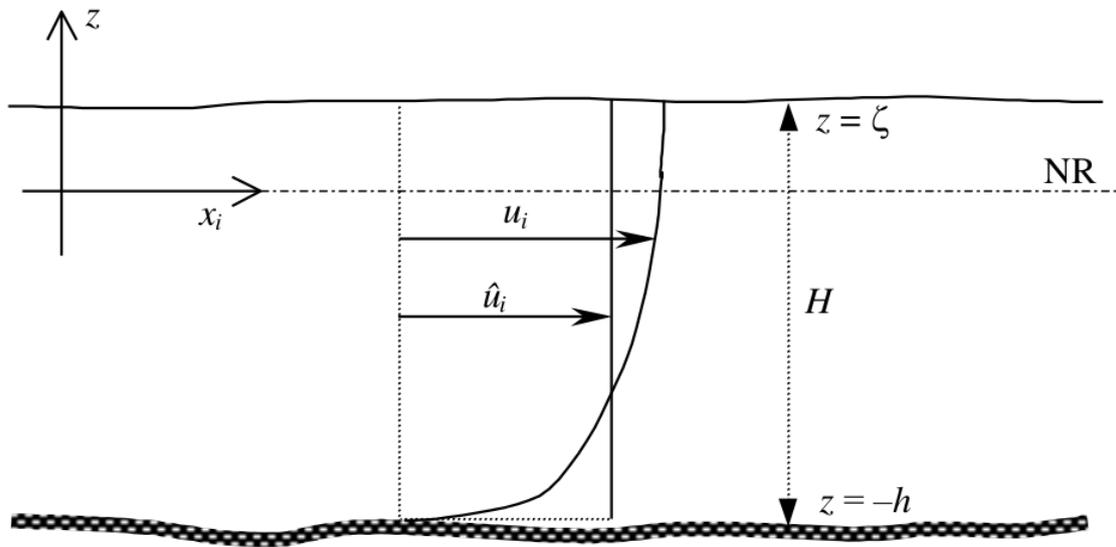


Figura 1.1: Esquema de coordenadas para os modelos 3D e 2DH, onde NR é o Nível de Referência. Para o caso do modelo 2DH, \hat{u}_i exemplifica uma variável promediada na vertical. Adaptado de ROSMAN (1997).

Os *modelos 1D*, por conseguinte, são obtidos através da promediação de um modelo 2D ao longo de uma dimensão específica. O procedimento é análogo, feito pela aplicação de uma integral de linha ao longo da dimensão em questão e posterior aplicação das condições de contorno correspondentes.¹ Os mesmos princípios sobre a perda da informação ao longo da dimensão promediada se aplicam, sendo somente

¹Eles também podem, de maneira mais genérica, ser obtidos pela aplicação de uma integral de superfície em um modelo 3D ao longo das dimensões a serem promediadas.

preservadas as informações referentes às condições de contorno das dimensões intermediadas.

Este trabalho focará no desenvolvimento teórico de um modelo tridimensional analítico-numérico (3D-AN) que, quando em uso, operará em parceria com um modelo numérico 2DH. Se trata de um conjunto de equações capaz de estimar perfis verticais de um escoamento hidrodinâmico que é simulado por um modelo numérico 2DH. A ideia é que o modelo numérico 2DH faça suas contas e que, a cada passo de tempo, uma fórmula analítica independente seja utilizada para estimar perfis verticais do escoamento. Esta fórmula terá termos que são resolvidos analiticamente e termos que só podem ser calculados numericamente via módulo 2DH. Ressalta-se, contudo, que a proposta deste trabalho não é, de fato, implementar tais equações em algum modelo computacional, e sim desenvolver um estudo teórico a seu respeito.

Fórmulas analítico-numéricas que estimam perfis verticais dessa forma não são inéditas. A título de exemplo, temos o atual módulo 3D-AN do Sistema Base de Hidrodinâmica Ambiental (SisBaHiA[®]), que será explorado em detalhes neste trabalho. Porém, a questão é que atualmente essas fórmulas assumem idealizações nos escoamentos que comumente são incompatíveis com a realidade. Exemplos dessas idealizações são: escoamento estacionário; ausência de acelerações advectivas; ausência de influência da rotação da Terra; massa específica uniforme; cota da superfície livre e cota batimétrica constantes; e rugosidade equivalente de fundo constante. Em alguns casos, tais idealizações se aplicam a corpos d'água naturais de forma aproximada, com variações temporais e espaciais que se dão de maneira suave (isto é, matematicamente contínuas e sem grandes derivadas). Nestes casos, estas fórmulas fornecem resultados úteis, porém comumente com exatidão questionável. Em outros casos, bastante comuns, uma ou mais dessas idealizações não se aplicam ao escoamento nem de forma aproximada. Nestes casos, estas fórmulas não fornecem bons resultados e sua aplicação não é recomendada. Na prática, isso significa que, apesar de suas vantagens, elas não podem ser utilizadas em todos os corpos d'água naturais.

Quando tais idealizações não se aplicam, a única alternativa para se obter representações verticais confiáveis do escoamento é através da utilização de um modelo 3D. Isso requer um maior esforço computacional e mais tempo de processamento, devido não somente ao maior número de camadas verticais com que o modelo terá que lidar, mas também devido às interações entre elas. Entretanto, é comum que apenas pequenas porções do domínio modelado necessitem dos atributos dinâmicos dos modelos 3D, sendo o restante de seu domínio compatível com uma dinâmica 2DH (PRANDLE, 2009). Mesmo nesses casos, dependendo do fenômeno de interesse e do modelo computacional utilizado, é comum que todo o domínio necessite ser modelado através de modelos 3D. Exemplos de estudos de caso em que isso

acontece são:

1. Lagoa dos Patos, RS: o encontro de água doce com água salgada em sua conexão com o mar gera forças de gradiente de pressão baroclínicas que são significativas apenas em uma pequena porção do domínio modelado, entretanto, essenciais para a boa representação do escoamento como um todo.
2. Rios meandrantés: as fortes acelerações advectivas nos meandros desses rios propiciam uma circulação tridimensional – escoamento secundário helicoidal – que resulta nos padrões de sedimentação observados (Figura 1.2), fenômeno impossível de ser observado através de simulações 2DH.



Figura 1.2: Rio Ibicuí (RS), ilustrando os padrões de sedimentação observados em rios meandrantés, induzidos pela circulação secundária helicoidal. Extraído de BRASIL DAS ÁGUAS (em 20 de novembro de 2018).

É neste contexto que este trabalho busca desenvolver um método analítico-numérico mais versátil do que os atuais. Através da melhora da representação física destes modelos, pretende-se expandir a gama de tipos de escoamentos que eles podem simular.

1.1 Motivação e hipótese científica

A **motivação** deste trabalho é propiciar a representação tridimensional de um escoamento através da sua simulação numérica 2DH de modo a representar todos os ter-

mos da equação de Navier-Stokes mais relevantes para escoamentos em corpos d'água naturais. Tais corpos devem ter superfície livre, ser verticalmente homogêneos e suas pressões devem ser aproximadamente hidrostáticas.

Tal realização propiciaria a *modelagem tridimensional* de corpos d'água naturais de modo a se obter uma *representação física robusta* aliada às *vantagens da utilização um modelo 2DH*. Em outras palavras, seria possível modelar escoamentos com fortes acelerações advectivas não-lineares em três dimensões espaciais através de uma simulação computacional que, em relação a simulações 3D usuais, é supostamente

- mais estável,
- mais rápida e
- computacionalmente mais econômica.

Desta forma, este trabalho considera a seguinte **hipótese científica**: quando escoamentos hidrodinâmicos tridimensionais são simulados por modelos numéricos verticalmente promediados, é possível estimar seus perfis verticais através de métodos analítico-numéricos que representem todos os termos da equação de Navier-Stokes mais relevantes para escoamentos em corpos d'água naturais.

1.2 Objetivos

O **objetivo** deste trabalho é desenvolver um conjunto de equações analítico-numéricas que possibilite a estimativa de perfis verticais de escoamentos hidrodinâmicos de corpos d'água naturais através da simulação numérica verticalmente promediada destes escoamentos. Em outras palavras, trata-se de uma ferramenta capaz de estimar perfis verticais realistas a partir de simulações do tipo 2DH. O foco deste trabalho se encontra nos termos não-lineares da equação de Navier-Stokes, isto é, os termos $u \frac{\partial u_i}{\partial x}$, $v \frac{\partial u_i}{\partial y}$ e $w \frac{\partial u_i}{\partial z}$.

Os termos mais relevantes da equação de Navier-Stokes para escoamentos em corpos d'água naturais devem ser representados, de modo que o conjunto de equações será válido para escoamentos com fortes acelerações advectivas não-lineares e que tenham superfície livre, sejam verticalmente homogêneos e cujas pressões sejam aproximadamente hidrostáticas.

Capítulo 2

Referencial Teórico

2.1 Modelos de turbulência

Existem diversos modelos de turbulência descritos na literatura (DE SOUZA *et al.*, 2011). Entre eles, o utilizado pelo modelo hidrodinâmico do SisBaHiA[®] é um modelo multi-escala, baseado em Simulação de Grandes Vórtices (*Large Eddy Simulation*, LES) (ROSMAN, 2019). Descrito por ROSMAN (1987), se trata de uma generalização das tradicionais promediações temporais de Reynolds e é calculada através de uma integral de convolução que age nas quatro dimensões do domínio espaço-tempo (x , y , z e t). Escalas características para a filtragem de cada uma dessas dimensões devem ser fornecidas ao modelo. Elas definem uma mínima escala de interesse para cada dimensão. Quanto maiores forem tais escalas, menos detalhado será um sinal filtrado.

O ponto de partida para o estabelecimento de diferentes modelos de turbulência é a definição da viscosidade turbulenta. Cada modelo apresenta uma proposta para sua definição, com diferentes graus de complexidade e níveis de abrangência. De maneira geral, eles podem ser classificados de acordo com a quantidade de equações diferenciais que o definem (RODI, 1984), assim:

1. Modelos algébricos, de zero equações diferenciais (*zero-equation models*)
2. Modelos de uma equação diferencial (*one-equation models*)
3. Modelos de duas equações diferenciais (*two-equation models*)
4. Modelos de N equações diferenciais

Estes e outros modelos de turbulência serão explorados em detalhe ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

2.2 O Sistema Base de Hidrodinâmica Ambiental (SisBaHiA[®])

O SisBaHiA[®] (Figura 2.1), já mencionado neste trabalho, é um sistema profissional de modelos computacionais para estudos e projetos de corpos d'água naturais (ROSMAN, 2019). Ele está em constante desenvolvimento pelo COPPE/UFRJ – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – e é registrado pela Fundação COPPETEC – órgão gestor de convênios e contratos de pesquisa do COPPE/UFRJ.



Figura 2.1: Interface gráfica da tela de inicialização do Sistema Base de Hidrodinâmica Ambiental, SisBaHiA[®].

O SisBaHiA[®] possui uma série de modelos dinamicamente acopláveis entre si, possibilitando o estudo integrado de diferentes processos físicos. Os mais relevantes para este trabalho são:

1. *Modelo Hidrodinâmico*: Um modelo de circulação hidrodinâmica 3D ou 2DH otimizado para corpos d'água naturais. Sua discretização temporal se dá

via diferenças finitas e sua discretização espacial se dá via elementos finitos quadráticos; seus parâmetros de entrada podem variar no tempo e no espaço; e sua modelagem de turbulência é multi-escala e baseada em Simulação de Grandes Vórtices (*Large Eddy Simulation*, LES).

2. *Modelos de Transporte de Sedimentos e Evolução Morfológica de Fundo*: Um conjunto de modelos que computam transporte de sedimentos, taxas de erosão e sedimentação do fundo. Pode ser acoplado ao Modelo Hidrodinâmico 3D ou 2DH.
3. *Modelos de Qualidade de Água*: Um conjunto de modelos eulerianos para simulação acoplada de até 11 parâmetros de qualidade de água. Pode ser acoplado ao Modelo Hidrodinâmico 3D ou 2DH.

2.2.1 O módulo analítico-numérico do SisBaHiA[®]

Descrito por (ROSMAN, 2019), o atual módulo 3D-AN do SisBaHiA[®], assim como seu módulo 3D (puramente numérico), opera em conjunto com seu módulo 2DH (também puramente numérico). Ele permite a obtenção do escoamento tridimensional através de uma estimativa analítica do perfil vertical de velocidade em todos os passos de tempo da simulação. A posição da superfície livre (ζ) e as velocidades horizontais médias na coluna d'água (U e V) são obtidas numericamente pelo módulo 2DH e posteriormente utilizadas na fórmula analítica do perfil vertical de velocidades.

Seu modelo turbulência é algébrico, ou seja, define o perfil de viscosidade turbulenta sem a utilização de equações diferenciais. O perfil de viscosidade turbulenta é definido como uma parábola, nula nos contornos (superfície e fundo) e máxima em meia-coluna. É exatamente este formato parabólico que garante um perfil logarítmico para as componentes horizontais de velocidade, comumente observado em escoamentos turbulentos em tubulações de contornos rugosos.

Tais abordagens, contudo, se tratam de aproximações, pois supõem um escoamento lentamente variável e suavemente variado, de modo que acelerações locais e advectivas são supostas desprezíveis. De fato, o escoamento típico em muitos corpos d'água naturais se comporta dessa maneira. Nestes casos, o módulo 3D-AN proverá bons resultados desde que o terreno tenha declives suaves. Entretanto, escoamentos com zonas de forte recirculação, mesmo que estacionários, podem ter termos advectivos significativos. Nestes casos, o módulo 3D-AN não proverá bons resultados, sendo aconselhável o uso do módulo 3D. (Advertência importante para premissas!)

A dedução dos perfis verticais das componentes horizontais do vetor velocidade ($u(z)$ e $v(z)$) se dão da seguinte forma:

1. Idealiza-se a equação de conservação de *momentum* linear (equação de Navier-Stokes), de modo que sejam considerados nulos os termos referentes

- à aceleração local,
- às acelerações advectivas,
- à aceleração de Coriolis,
- à variação da pressão hidrostática devido às diferenças de massa específica e
- às tensões turbulentas dinâmicas não relacionadas à direção vertical.

Somente são considerados não-nulos os termos referentes

- à variação da pressão hidrostática devido à declividade da superfície livre e
- à tensão turbulenta dinâmica relacionada à direção vertical.

2. Define-se um perfil parabólico para a viscosidade cinemática turbulenta, nulo nos contornos ($z = -h$ e $z = \zeta$) e máximo em meia-coluna ($z = \frac{\zeta-h}{2}$).

3. Define-se uma velocidade de atrito característica (u_*), típica para condições turbulentas estacionárias, como função das tensões nos contornos (τ^F e τ^S).

4. Integra-se a equação de conservação de *momentum* linear verticalmente e, utilizando-se as definições descritas e após manipulações de equações íntegro-diferenciais, chega-se a uma expressão analítica para os perfis verticais das componentes horizontais de velocidade ($u(x, y, z, t)$ e $v(x, y, z, t)$).

5. Como a integral vertical deste perfil não provê o fluxo calculado numericamente pelo módulo 2DH, isto é, UH para a direção x e VH para a direção y , propõe-se um ajuste à tensão de fundo de modo que o fluxo obtido seja o esperado. Assim, $\tau_{\text{ajustado}}^F = M\tau^F$, onde τ_{ajustado}^F é o parâmetro utilizado no perfil analítico-numérico final e M é um parâmetro adimensional que satisfaz a condição de fluxos coincidentes. Desta forma, o fluxo segundo o módulo 3D-AN coincide com o fluxo segundo o módulo 2DH.

Assim, finalmente obtém-se o perfil analítico-numérico desejado. Ele é uma função da constante de Von Karman (κ), da velocidade de atrito característica (u_*), da massa específica característica (ρ , considerada constante), das tensões do fundo e da superfície (respectivamente τ^F e τ^S), da cota da superfície livre (ζ), da cota batimétrica (h), e da rugosidade equivalente do fundo (ε^F).

Além, das consequências diretas da nulidade suposta para alguns termos da equação de Navier-Stokes, dois aspectos mais sutis são relevantes para a abrangência

deste módulo. Em primeiro lugar, apesar de tal perfil poder variar temporalmente (de acordo com t) e horizontalmente (de acordo com x e com y) dentro do modelo numérico, sua dedução considerou um fluxo estacionário (independente de t) e horizontalmente uniforme (independente de x e de y). É por este motivo que, para que o módulo 3D-AN atual forneça bons resultados, as variações temporais e espaciais devem ser suaves, isto é, matematicamente contínuas e sem grandes derivadas. Em segundo lugar, a nulidade do termo baroclínico, apesar de não requerer um fluido homogêneo com relação a seus constituintes passivos, o requer com relação a seus constituintes ativos, forçando-o a ter massa específica uniforme.

O 3D-AN atual não trabalha com perfis de variáveis escalares.

A Equação 2.1 representa o perfil vertical do coeficiente cinemático de viscosidade turbulenta presente nos módulos 3D e 3D-AN da mais recente versão do SisBaHiA[®] (ROSMAN, 2019).

$$\begin{aligned} v_{i3}(x, y, z, t) &= \kappa |u_i^*| (h + z) \left(1 - \frac{h + z}{H}\right) \\ &= \frac{\kappa |u_i^*|}{H} (h + z) (\zeta - z) \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.3 Velocidade de atrito

A velocidade de atrito é uma velocidade fictícia em mecânica dos fluidos. Ela é tida como a raiz quadrada da razão entre a tensão atuante em um contorno sólido (τ) e a densidade do fluido que o toca (ρ). Como a dimensão de tensão é força por unidade de área (no S.I., N m^{-2}) e a dimensão de densidade é massa por unidade de volume (no S.I., kg m^{-3}), a raiz quadrada de sua razão possui dimensão de velocidade (no S.I., m s^{-1}). Este é o motivo pelo qual esta grandeza é chamada de “velocidade” de atrito.

Matematicamente, em um caso unidimensional idealizado com escoamento horizontal, temos que

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad . \tag{2.2}$$

Assim, para uma determinada densidade, maiores velocidades de atrito significarão maiores tensões. Como a tensão em um contorno é proporcional ao cisalhamento do escoamento paralelo a este contorno, temos que a velocidade de atrito também é proporcional a este cisalhamento¹. Matematicamente, para o caso idealizado mencionado,

¹ Mais precisamente, proporcional à raiz quadrada deste cisalhamento.

$$\tau = \rho v \frac{\partial u}{\partial z} \quad \therefore \quad u^* = \sqrt{\frac{\rho v \frac{\partial u}{\partial z}}{\rho}} = \sqrt{v \frac{\partial u}{\partial z}} \quad . \quad (2.3)$$

E assim se dá a relevância da velocidade de atrito no estudo de escoamentos próximos a contornos sólidos: apesar da condição de não-deslizamento impor uma velocidade nula *em* um contorno, é possível, através da velocidade de atrito, de se estimar a velocidade do escoamento *nas proximidades* deste contorno.

2.4 Escoamento secundário helicoidal

O escoamento secundário helicoidal é um tipo de escoamento típico de canais curvos, como meandros de rios. A geometria tridimensional de um canal curvo – o formato das calhas e a batimetria – induz, através das não-linearidades do escoamento, uma circulação em forma de helicóide (AZPIROZ-ZABALA *et al.*, 2017). A Figura 2.2, extraída de GRAF e BLANCKAERT (2002), apresenta um esquema tridimensional de um escoamento secundário helicoidal.

Neste tipo de escoamento,

- a velocidade no sentido longitudinal ao canal escoo rumo à jusante;
- a velocidade no sentido transversal varia de direção conforme a cota vertical: a corrente em superfície escoo rumo aos quadrantes da calha convexa e a corrente próxima ao fundo escoo rumo aos quadrantes da calha côncava;
- a velocidade vertical é sobretudo forçada pelos gradientes batimétricos, sendo positiva (para cima) ao longo da calha côncava e negativa (para baixo) ao longo da calha convexa;
- a elevação da superfície é maior ao longo da calha convexa e menos ao longo da calha côncava;
- a velocidade verticalmente promediada é maior ao longo da calha côncava e menos ao longo da calha convexa.

É esta configuração de escoamento que, em rios meandrantos, induz a movimentação de meandros e os padrões de sedimentação como os observados na Figura 1.2 (AZPIROZ-ZABALA *et al.*, 2017). Tal escoamento, contudo, é indetectável por modelos 2DH, pois eles não admitem variações verticais de velocidade.

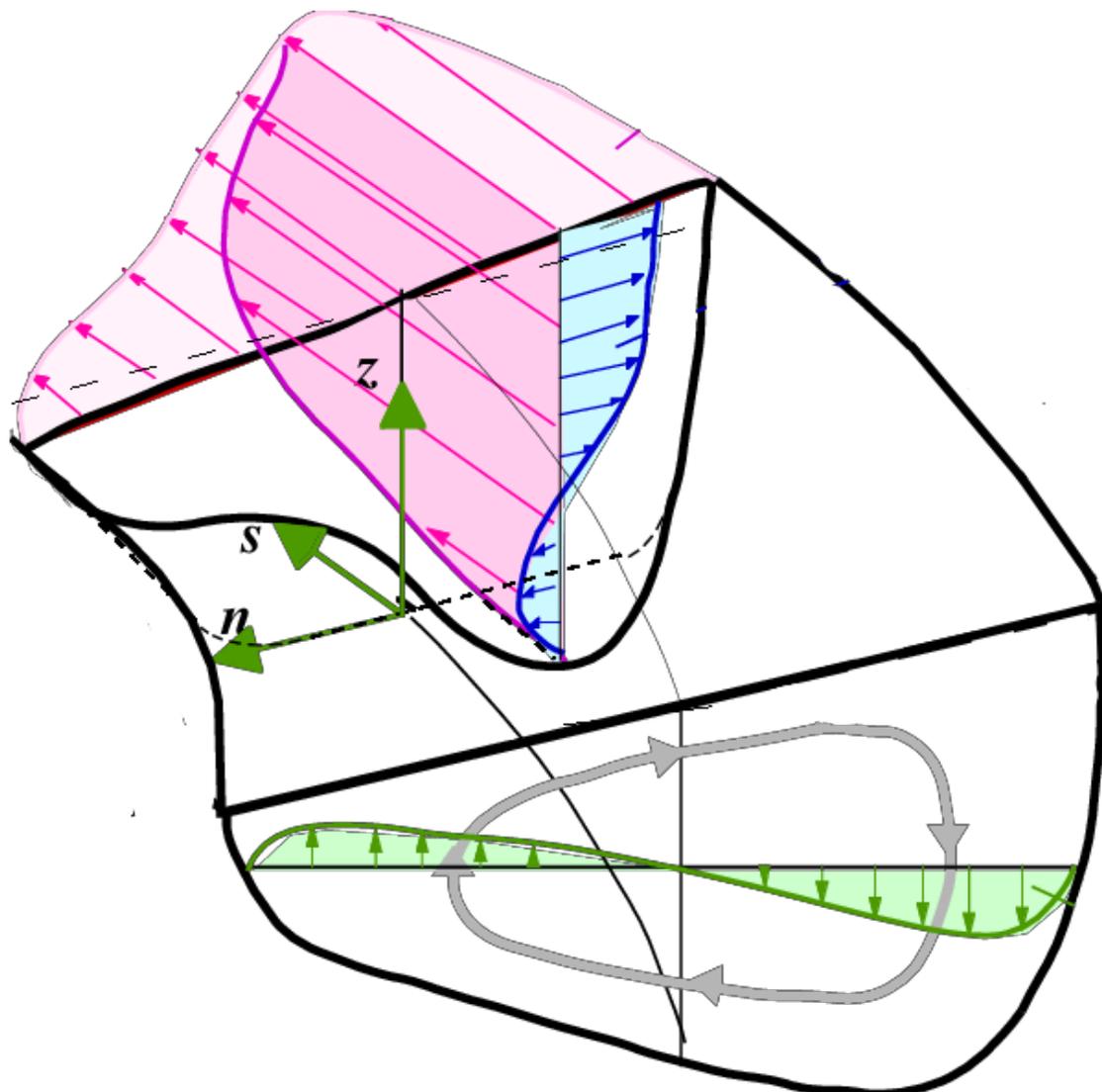


Figura 2.2: Esquema tridimensional de um escoamento secundário helicoidal. Adaptado de GRAF e BLANCKAERT (2002).

Capítulo 3

O modelo matemático

O modelo proposto neste trabalho se propõe a ampliar a abrangência matemática do atual módulo 3D-AN do SisBaHiA[®] através da consideração de mais princípios físicos. Assim, espera-se que a configuração atual deste módulo do SisBaHiA[®] seja um caso particular do modelo proposto neste trabalho. Equações de perfis verticais de velocidade são obtidas de maneira análoga, porém com a consideração de mais termos da equação da conservação de *momentum*, antes desconsiderados.

Este procedimento se baseia na manipulação do termo de difusão vertical de *momentum* linear da equação de conservação de *momentum* ($\frac{\partial}{\partial z} (v_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial z})$). A partir de uma equação de conservação de *momentum* simplificada, será obtido, analiticamente, um perfil de velocidades preliminar, a que este trabalho se referirá como “perfil preliminar”. Este perfil será, então, a “peça fundamental” a partir da qual os termos da equação da conservação de *momentum* serão inferidos.

Como este perfil foi obtido analiticamente em função das variáveis bidimensionais (2DH) que definem o escoamento, suas derivadas também podem ser calculadas em função destas mesmas grandezas (através da regra de derivação popularmente conhecida como “regra da cadeia”). Posteriormente, os termos da equação de conservação de *momentum* serão inferidos a partir desta “peça fundamental” (o perfil preliminar). Por fim, a dimensão vertical será discretizada a fim de que ela possa ser verticalmente integrada por métodos numéricos.

Assim, os módulos tridimensional analítico-numérico (3D-AN) e bidimensional horizontal (2DH) trocarão informações a cada passo de tempo, de modo que o módulo 2DH, numérico, se beneficie do 3D-AN ao passo que o módulo 3D-AN estima os perfis através das informações fornecidas pelo módulo 2DH. Ressalta-se que tal processo *não* se trata de um “pós-processamento” – trata-se de uma metodologia de modelagem tridimensional em que as diferentes dimensões espaciais se interagem a cada passo de tempo.

Tal método, devido às aproximações que considera (isto é, corpo d’água vertical-

mente homogêneo e pressão hidrostática), é válido em corpos d'água rasos¹, como estuários, rios, reservatórios e lagunas. Contudo, ele não se aplica a casos como os seguintes:

- regiões com quebra de ondas de gravidade de superfície (pois a pressão não é hidrostática);
- dinâmica em oceano aberto (pois o perfil de viscosidade não necessariamente é aproximadamente parabólico); e
- regiões de campo-próximo, isto é, próximos a jatos forçados no escoamento, como nas proximidades de emissários submarinos (pois nem a pressão é hidrostática nem o perfil de viscosidade necessariamente é parabólico).

A **Seção 3.1** introduz as definições das classes de escoamentos/perfis referidas neste trabalho – *real*, *preliminar* e *ajustado* – e define as variáveis Ψ_i , $\hat{\Psi}_i$ e Ψ_i^0 , que respectivamente representam o somatório dos termos da equação de Navier-Stokes para cada uma destas classes. A **Seção 3.2** introduz os diferentes perfis verticais de viscosidade turbulenta e de velocidade que são considerados neste trabalho. O foco desde trabalho são os *perfis ajustados* de velocidade, que são calculados a partir dos *perfis preliminares* de velocidade, sendo ambos deduzidos a partir de *perfis aprimorados* de viscosidade turbulenta. A **Seção 3.3** introduz a estratégia de integração vertical para a obtenção dos perfis de velocidade e apresenta as funções de forma p^F e p^S , que são polinômios lagrangeanos de primeiro grau utilizados no cálculo destes perfis. A **Seção 3.4** introduz a origem matemática do *perfil preliminar*, denotado por u_i^0 , proposto por este trabalho. A **Seção 3.5** introduz a origem matemática do *perfil ajustado*, denotado por u_i , proposto por este trabalho. A **Seção 3.6** define a função $f_i(\Psi_i^0)$, que compila todos os termos do perfil ajustado que não são resolvíveis analiticamente. A **Seção 3.7** apresenta a dedução matemática do *perfil aprimorado* de viscosidade turbulenta, denotado por v_{i3} . A **Seção 3.8** apresenta as expressões matemáticas para o *perfil preliminar* (u_i^0) e para o *perfil ajustado* (u_i) de velocidades, ambos deduzidos a partir do *perfil aprimorado* de viscosidade turbulenta (v_{i3}). A **Seção 3.9** define as variáveis auxiliares A_i^0 , B_i^0 , A_i e B_i , que permitem uma escrita compacta das expressões apresentadas na seção anterior. A **Seção 3.10** apresenta as expressões matemáticas das *integrais* $\left(\int_{-h}^{\zeta} [\dots] dz\right)$ dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i) de velocidades, que serão posteriormente utilizadas para a garantia da manutenção da velocidade média do escoamento, U_i . A **Seção 3.11** apresenta as expressões matemáticas das *derivadas* $\left(\frac{\partial [\dots]}{\partial x_j}\right)$ dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i) de velocidades, que serão posteriormente utilizadas para a dedução

¹ Isto é, corpos d'água cujas dimensões horizontais são ordens de grandeza maiores que as dimensões verticais.

dos termos de Ψ_i^0 . A **Seção 3.12** apresenta a dedução matemática da velocidade vertical, denotada por w^0 , obtida através da aplicação da equação da continuidade para escoamentos incompressíveis em um campo de escoamento preliminar (u_i^0). A **Seção 3.13** apresenta a definição matemática da velocidade de atrito direcional, denotada por u_i^* , um vetor em (x, y) que é função das velocidades de atrito do fundo (u_i^{*F}) e da superfície (u_i^{*S}) e representativo para toda a coluna d'água. A **Seção 3.14** apresenta as parametrizações das tensões do leito no fundo (τ_i^{*F}) e do vento na superfície (τ_i^{*S}) utilizadas no processamento dos resultados apresentados neste trabalho. A **Seção 3.15** apresenta as condições de contorno dinâmicas e cinemáticas referentes ao *perfil preliminar* (u_i^0) através da definição da formulação das seguintes variáveis: tensão no fundo (τ_i^{0F}), tensão na superfície (τ_i^{0S}), velocidade no fundo (u_i^{0F} , sempre nula) e velocidade na superfície (u_i^{0S}). A **Seção 3.16** apresenta as condições de contorno dinâmicas e cinemáticas referentes ao *perfil ajustado* (u_i) através da definição da formulação das seguintes variáveis: tensão no fundo (τ_i^F), tensão na superfície (τ_i^S), velocidade no fundo (u_i^F , sempre nula) e velocidade na superfície (u_i^S). A **Seção 3.17** apresenta as formulações que descrevem o esquema de discretização da dimensão vertical assim como os métodos numéricos utilizados para as integrações verticais. A **Seção 3.18** lista todas as grandezas necessárias à resolução dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i) em suas versões com a dimensão vertical discretizada. Finalmente, a **Seção 3.19** apresenta as formulações para cada um dos termos que compõe a variável Ψ_i^0 em suas versões com a dimensão vertical discretizada.

A Figura 3.1 apresenta os principais símbolos que são utilizados neste trabalho.

Símbolo	Função de...	Significado
ζ	(x,y,t)	Altura da superfície livre
h	(x,y,t)	Cota batimétrica
$H = h + \zeta$	(x,y,t)	Altura do tirante hidráulico
$\varepsilon^F, \varepsilon^S$	(x,y,t)	Rugosidade equivalente do fundo e da superfície
g	constante	Aceleração gravitacional
κ	constante	Constante de von Kármán
U_i	(x,y,t)	Velocidade verticalmente promediada na direção i
u_i^*	(x,y,t)	Velocidade de atrito
$\hat{\rho}$	(x,y,t)	Massa específica promediada verticalmente
a_i	latitude	Aceleração de Coriolis
θ	latitude	Latitude
Ω	constante	Velocidade angular de rotação da Terra

Figura 3.1: Lista de símbolos utilizados neste trabalho.

fusão vertical de *momentum* linear foi isolado por uma questão de clareza de leitura e interpretação, uma vez que ele é o termo utilizado para a dedução dos perfis verticais. Neste sistema, a variável v_{i3} representa o coeficiente cinemático de viscosidade turbulenta e a variável u_i representa a velocidade de um escoamento real, resolvível apenas numericamente. Todos os outros termos da equação (além do de difusão vertical de *momentum* linear), a serem matematicamente tratados da mesma forma, foram concentrados na variável Ψ_i , que é a variável a sofrer simplificações dependendo do perfil ao qual ela se refere (real, preliminar ou ajustado), conforme detalhado a seguir. O índice i nas variáveis se referem à direção do escoamento, sendo x para $i \equiv 1$ e y para $i \equiv 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(v_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) = \Psi_i(x, y, z, t) \\ \Psi_i(x, y, z, t) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + u \frac{\partial u_i}{\partial x} + v \frac{\partial u_i}{\partial y} + w \frac{\partial u_i}{\partial z} - a_i \\ \quad + g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{g}{\rho} \int_z^\zeta \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dz' \\ \quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{i1} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{i2} \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

A Equação 3.3 representa a conservação de *momentum* linear (equação de Navier-Stokes) para **escoamentos preliminares**. Neste sistema, a variável v_{i3} possui um perfil vertical parabólico oriundo de um modelo de turbulência algébrico, a ser explicado nas próximas seções, e a variável u_i^0 representa o campo de velocidade em um escoamento preliminar, resolvível analiticamente. Todos os outros termos da equação (além do de difusão vertical de *momentum* linear), a serem matematicamente tratados da mesma forma, foram concentrados na variável $\hat{\Psi}_i$. A variável $\hat{\Psi}_i$ representa a promediação vertical² de todos os termos que compõem a variável Ψ_i da Equação 3.2. O índice i nas variáveis se referem à direção do escoamento, sendo x para $i \equiv 1$ e y para $i \equiv 2$.

² Na verdade, as deduções matemáticas se dão de forma que perfis preliminares (u_i^0) idênticos podem ser obtidos tanto para $\hat{\Psi}_i \equiv \frac{1}{H} \int_{-h}^\zeta \Psi_i dz$ quanto para $\hat{\Psi}_i \equiv 0$. Em verdade, qualquer $\hat{\Psi}_i$ verticalmente homogêneo (isto é, que não dependa de z) resultará no exato mesmo u_i^0 , mesmo que $\hat{\Psi}_i$ varie lateral (isto é, dependa de x e de y) e/ou temporalmente (isto é, dependa de t). Desta forma, a expressão $\frac{1}{H} \int_{-h}^\zeta \Psi_i dz$ não necessita ser de fato calculada na metodologia proposta, uma vez que ela não depende de z . Contudo, estabelecer $\hat{\Psi}_i \equiv \frac{1}{H} \int_{-h}^\zeta \Psi_i dz$ ao invés de $\hat{\Psi}_i \equiv 0$ realça a integridade de u_i^0 . Em outras palavras, **por mais simplificado que u_i^0 possa parecer, ele é aquele obtido ao se utilizar resultados de saída de modelos 2DH para o cálculo da promediação vertical de todos os termos de Ψ_i .**

Tabela 3.1: Classes de perfis verticais de velocidade a que este trabalho faz referência.

Classificação	Função Ψ	Resolução
Real	$\Psi_i(x, y, z, t) = f(u_i, \rho, \zeta)$	apenas numericamente
Preliminar	$\hat{\Psi}_i(x, y, t) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} \Psi_i dz$	analiticamente
Ajustado	$\Psi_i^0(x, y, z, t) = f(u_i^0, \hat{\rho}, \zeta)$	analítico-numericamente

Este trabalho não possui a pretensão de abordar estimativas de *perfis reais* de maneira numérica. Perfis reais, calculados numericamente, serão, de fato, oportunamente utilizados neste trabalho, porém calculados externamente e apenas para fins de comparação a perfis preliminares e a perfis ajustados. Pretende-se que a metodologia aqui proposta aborde a estimativa de *perfis preliminares* de maneira analítica e a estimativa de *perfis ajustados* de maneira analítico-numérica. Assim, **a partir desta seção, este trabalho se referirá a perfis preliminares como u_i^0 (representados pela Equação 3.3) e a perfis ajustados como u_i (representados pela Equação 3.4).**

3.2 Perfis verticais considerados neste trabalho

Este trabalho considera um total de cinco perfis verticais: dois perfis verticais de viscosidade turbulenta e três perfis verticais de velocidade. Um dos perfis de viscosidade turbulenta e um dos perfis de velocidade são oriundos do atual módulo 3D-AN do SisBaHiA[®]. Os demais, isto é, um perfil de viscosidade turbulenta e dois perfis de velocidade, são propostos por este trabalho.

A Tabela 3.2 compara os dois **perfis verticais de viscosidade turbulenta** considerados por este trabalho. A Tabela 3.3 compara os três **perfis verticais de velocidade** considerados por este trabalho.

Em suma, este trabalho propõe **dois passos de melhora** em relação às equações presentes no atual módulo 3D-AN do SisBaHiA[®]:

1. a substituição do *perfil simplificado* de viscosidade turbulenta pelo *perfil aprimorado* de viscosidade turbulenta, a fim de se obter um perfil preliminar de velocidade mais fiel às condições de contorno dinâmicas do fundo e da superfície; e
2. o cálculo de um *perfil ajustado* de velocidade a partir deste *perfil preliminar*

Tabela 3.2: Comparação entre os **perfis verticais de viscosidade turbulenta** considerados neste trabalho: o perfil do atual módulo 3D-AN do SisBaHiA[®] e o perfil aprimorado, proposto por este trabalho. Atributos de destaque se encontram em **negrito**.

Nome atribuído	Perfil simplificado	Perfil aprimorado
Origem	Atual módulo 3D-AN do SisBaHiA [®]	Proposto por este trabalho
Descrição	<ul style="list-style-type: none"> • Formato parabólico. • Nulo no fundo e na superfície. • Não satisfaz condições de contorno dinâmicas analiticamente. 	<ul style="list-style-type: none"> • Formato parabólico. • Positivo no fundo e na superfície. • Satisfaz condições de contorno dinâmicas analiticamente.
Variável atribuída	Apenas no Referencial Teórico (Capítulo 2)	v_{i3}

obtido, de modo que o perfil ajustado considere todos os termos da equação de Navier-Stokes (inclusive os não-lineares) que são relevantes para escoamentos típicos em corpos d'água naturais verticalmente homogêneos.

3.3 Estratégias de integração e funções de forma

$$(p^F, p^S)$$

Para a resolução das Equações 3.3 e 3.4, equações diferenciais, faz-se necessário integrá-las verticalmente (em z). De maneira geral, uma integração vertical pode ser

- indefinida: $\int [\dots] dz$;
- definida entre o fundo e a superfície: $\int_{-h}^{\zeta} [\dots] dz$;
- definida entre o fundo e uma profundidade genérica: $\int_{-h}^z [\dots] dz$; ou
- definida entre uma profundidade genérica e a superfície: $\int_z^{\zeta} [\dots] dz$.

Uma integral indefinida ($\int [\dots] dz$) inicialmente resultaria em uma anti-derivada genérica a ser posteriormente aplicada a uma condição de contorno conhecida. Uma

Tabela 3.3: Comparação entre os **perfis verticais de velocidade** considerados neste trabalho: o perfil do atual módulo 3D-AN do SisBaHiA[®]; o perfil 3D-AN preliminar, proposto por este trabalho; e o perfil 3D-AN ajustado, proposto por este trabalho. Atributos de destaque se encontram em **negrito**.

Nome atribuído	3D-AN SisBaHiA [®]	3D-AN preliminar	3D-AN ajustado	
Origem	Atual módulo 3D-AN do SisBaHiA [®]	Proposto por este trabalho	Proposto por este trabalho	
Classificação (vide Seção 3.1)	Preliminar	Preliminar	Ajustado	
Viscosidade de dedução	Perfil de viscosidade simplificado	Perfil de viscosidade aprimorado	Perfil de viscosidade aprimorado	
Variável atribuída	Apenas no Referencial Teórico (Capítulo 2)	u_i^0	u_i	
Termos de Navier-Stokes	$\frac{\partial u_i}{\partial t}$	×	×	✓
	$u \frac{\partial u_i}{\partial x}$	×	×	✓
	$v \frac{\partial u_i}{\partial y}$	×	×	✓
	$w \frac{\partial u_i}{\partial z}$	×	×	✓
	a_i	×	×	✓
	$-g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$	✓	✓	✓
	$-\frac{g}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_i} (\zeta - z)$	×	×	✓
	$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_{i1} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)$	×	×	×
	$\frac{\partial}{\partial y} \left(v_{i2} \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)$	×	×	×
	$\frac{\partial}{\partial z} \left(v_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)$	✓	✓	✓

integral definida entre o fundo e a superfície $\left(\int_{-h}^{\zeta} [\dots] dz\right)$ resultaria na perda da dimensão vertical. Uma integral definida entre o fundo e uma profundidade genérica $\left(\int_{-h}^z [\dots] dz\right)$ resultaria em um perfil vertical descrito a partir da condição de contorno de fundo (em $z = -h$). Uma integral definida entre uma profundidade genérica e a superfície $\left(\int_z^{\zeta} [\dots] dz\right)$ resultaria em um perfil vertical descrito a partir da condição de contorno de superfície (em $z = \zeta$).

De modo a se obter perfis verticais (isto é, funções de z), opta-se pelas duas últimas formas de integração: $\int_{-h}^z [\dots] dz$ e $\int_z^{\zeta} [\dots] dz$. Dentre elas, a primeira faz uso somente da condição de contorno do fundo e a segunda faz uso somente da condição de contorno da superfície.

Em geral, a solução particular de uma equação diferencial de primeira ordem requer somente uma única condição de contorno. Assim, a solução particular baseada na condição de contorno *do fundo* é capaz de prover o valor da função *na superfície*. Da mesma forma, a solução particular baseada na condição de contorno *da superfície* é capaz de prover o valor da função *no fundo*. Contudo, um requisito para que isto aconteça é que as soluções da equação diferencial em questão tenham sido obtidas analiticamente. Contudo, isso se aplica somente para os perfis preliminares, não para os perfis ajustados, já que estes são obtidos através de uma aproximação da equação da conservação de *momentum*.

Desta maneira, faz-se necessário introduzir as funções de forma

$$p^F(x, y, z, t) \equiv \frac{\zeta - z}{H} \quad (3.5)$$

e

$$p^S(x, y, z, t) \equiv \frac{h + z}{H} \quad . \quad (3.6)$$

A função p^F é a função de forma do fundo. Ela adquire seu valor máximo, 1, no fundo ($z = -h$) e seu valor mínimo, 0, na superfície ($z = \zeta$). A função p^S é a função de forma da superfície. Ela adquire seu valor mínimo, 0 no fundo ($z = -h$) e seu valor máximo, 1, na superfície ($z = \zeta$). Em qualquer profundidade, temos que $p^F + p^S = 1$.

Assim, pode-se interpretar seu uso conjunto como pesos de ponderação para o cálculo de uma média ponderada ao longo da coluna d'água: quanto mais perto do fundo, maior será o peso de p^F sobre p^S e vice-versa. Este trabalho adota esta forma de integração para os perfis preliminares e ajustados, de modo que ambos satisfaçam suas condições de contorno tanto no fundo quanto na superfície.

3.4 Introdução ao perfil preliminar (u_i^0)

A equação do perfil preliminar é dada por:

$$\begin{aligned}
 u_i^0(x, y, z, t) &= u_i^{0F} + \frac{\tau_i^{0F}}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^F}{v_{i3}} dz' + \frac{\tau_i^{0S}}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \\
 &= u_i^{0S} - \frac{\tau_i^{0F}}{\hat{\rho}} \int_z^{\zeta} \frac{p^F}{v_{i3}} dz' - \frac{\tau_i^{0S}}{\hat{\rho}} \int_z^{\zeta} \frac{p^S}{v_{i3}} dz'
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

que deve ser expressa

- ou em função da CCDF, da CCDS e da CCCF
- ou em função da CCDF, da CCDS e da CCCS.

3.5 Introdução ao perfil ajustado (u_i)

A equação do perfil ajustado é dada por:

$$\begin{aligned}
 u_i(x, y, z, t) &= p^F \left(u_i^F + \frac{\tau_i^F}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^F}{v_{i3}} dz' + \frac{\tau_i^S}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \right) \\
 &+ p^S \left(u_i^S - \frac{\tau_i^F}{\hat{\rho}} \int_z^{\zeta} \frac{p^F}{v_{i3}} dz' - \frac{\tau_i^S}{\hat{\rho}} \int_z^{\zeta} \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \right) \\
 &+ p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
 &+ p^S \int_z^{\zeta} \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^{\zeta} \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
 &- p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^{\zeta} \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
 &- p^S \int_z^{\zeta} \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz'
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

que necessariamente deve ser expressa em função da CCDF, da CCDS, da CCCF e da CCCS.

3.6 A função não-linear $f_i(\Psi_i^0)$

De modo a abreviar a maneira com que escrevemos o perfil ajustado (u_i), definimos a função $f_i(\Psi_i^0)$, definida por

$$\begin{aligned}
 f_i(\Psi_i^0) \equiv & p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
 & + p^S \int_z^\zeta \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
 & - p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
 & - p^S \int_z^\zeta \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz'
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Temos que sua derivada vertical é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(f_i(\Psi_i^0))}{\partial z} = & -\frac{1}{H} \int_{-h}^z \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' + \frac{p^F p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \\
 & + \frac{1}{H} \int_z^\zeta \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz' - \frac{p^S p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \\
 & + \frac{1}{H} \int_{-h}^z \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz' - \frac{p^F p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \\
 & - \frac{1}{H} \int_z^\zeta \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' + \frac{p^S p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz'
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Temos que sua integral do fundo à superfície é dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{\zeta} f_i(\Psi_i^0) dz &= \int_{-h}^{\zeta} \left(p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' \right) dz \\
&+ \int_{-h}^{\zeta} \left(p^S \int_z^{\zeta} \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^{\zeta} \Psi_i^0 dz' \right) dz' \right) dz \\
&- \int_{-h}^{\zeta} \left(p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^{\zeta} \Psi_i^0 dz' \right) dz' \right) dz \\
&- \int_{-h}^{\zeta} \left(p^S \int_z^{\zeta} \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' \right) dz
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.7 O perfil de viscosidade turbulenta (v_{i3})

O coeficiente cinemático de viscosidade turbulenta, v_{i3} , neste trabalho chamado apenas de “viscosidade”, é uma grandeza-chave para modelagem matemática de escoamentos hidrodinâmicos (CHEN e DE SWART, 2016; ZITMAN e SCHUTTELAARS, 2012). Conforme explicado na Seção 2.1, ela é a grandeza que define a complexidade de um modelo de turbulência.

Em modelos de turbulência algébricos – os mais simples – é comum expressá-la através de um perfil vertical de formato parabólico, com valores positivos na coluna d’água e nulos no fundo e na superfície. Quando aplicados na equação de conservação de *momentum* linear (equações de Navier-Stokes) simplificada para escoamentos estacionários e uniformes (Equação A.4), tais perfis de viscosidade originam perfis verticais de velocidade de formato logarítmico.

Uma sólida definição de um perfil de viscosidade é, portanto, essencial para o objetivo deste trabalho.

3.7.1 Conceituação

Conforme apresentado na Seção 2.2.1, a Equação 2.1 representa o perfil vertical de viscosidade turbulenta presente nos módulos 3D e 3D-AN da mais recente versão do SisBaHiA[®] (versão 10, em 18 de novembro de 2019). A respeito deste perfil, pode-se tecer as seguintes considerações:

1. A relação entre o perfil de viscosidade (v_{i3}) e seu perfil de velocidade correspondente não satisfaz analiticamente a equação de conservação de *momentum* linear (equação de Navier-Stokes) simplificada para escoamentos estacionários ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) e uniformes ($\frac{\partial}{\partial x_i} = 0$) (Equação A.4);

2. A CCDF não é analiticamente satisfeita devido ao fato de que $v_{i3} = 0$ em $z = -h$;
3. A CCDS não é analiticamente satisfeita devido ao fato de que $v_{i3} = 0$ em $z = \zeta$;
4. v_{i3} possui perfil vertical de formato parabólico (assim, o perfil de velocidade correspondente possui perfil vertical de formato logarítmico);
5. Seu valor máximo é $\frac{H\kappa|u_{*i}|}{4}$; e
6. Sua profundidade de valor máximo sempre corresponde ao meio da coluna d'água (isto é, à cota $z = \frac{\zeta-h}{2}$).

Em suma, as limitações apresentadas nos itens 1, 2 e 3, acima, se devem ao fato de que tal perfil de viscosidade apresenta valores nulos nos contornos (no fundo e na superfície). Tal perfil, ao ser aplicado na equação de Navier-Stokes simplificada para escoamentos estacionários e uniformes (Equação A.4), gera um perfil de velocidade logarítmico cujas velocidades tendem ao infinito nos contornos devido a uma divisão por zero: a divisão pelo valor da viscosidade nos contornos.

A fim de contrapor tal obstáculo, uma prática usual é manualmente inserir a rugosidade equivalente do fundo, ε^F , nos termos logarítmicos do perfil de velocidade obtido. Apesar desta manobra de fato gerar um perfil de velocidade que é realista em muitos casos, esta prática leva às limitações apresentadas nos itens 1, 2 e 3, acima, além de não tratar de maneira análoga e simétrica a rugosidade equivalente da superfície, ε^S .

Desta forma, no intuito de generalizar o perfil apresentado (Equação 2.1), este trabalho propõe a modelagem matemática de uma nova expressão para o perfil de viscosidade para escoamentos típicos de corpos d'água naturais, de modo que

- a rugosidade equivalente do fundo, ε^F , não tenha que ser artificialmente inserida nas equações;
- a rugosidade equivalente da superfície, ε^S , seja considerada de maneira análoga e simétrica à rugosidade equivalente do fundo; e
- as condições de contorno dinâmicas de fundo (CCDF) e de superfície (CCDS) sejam analiticamente atendidas.

Para tanto, o perfil de viscosidade proposto é inspirado no perfil apresentado na Equação 2.1. O perfil proposto será, então, inicialmente utilizado para a dedução do perfil *preliminar* de velocidade (u_i^0) e posteriormente utilizado no tratamento matemático dos perfis *ajustados* de velocidade (u_i).

O perfil proposto de viscosidade (v_{i3}) deve obedecer às seguintes imposições:

1. A relação entre o perfil de viscosidade (v_{i3}) e o perfil preliminar de velocidade (u_i^0) deve analiticamente satisfazer a equação de conservação de *momentum* linear (equação de Navier-Stokes) simplificada para escoamentos estacionários ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) e uniformes ($\frac{\partial}{\partial x_i} = 0$) (Equação A.4);
2. A CCDF $\left(v_{i3}^F \frac{\partial u_i^0}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \frac{\tau_i^{0F}}{\rho} \right)$ deve ser analiticamente satisfeita – consequentemente, v_{i3} deve ser positivo no fundo ($v_{i3}^F > 0$);
3. A CCDS $\left(v_{i3}^S \frac{\partial u_i^0}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\tau_i^{0S}}{\rho} \right)$ deve ser analiticamente satisfeita – consequentemente, v_{i3} deve ser positivo na superfície ($v_{i3}^S > 0$);
4. v_{i3} deve ser positivo em toda a coluna d'água, inclusive, conforme mencionado, nos contornos inferior e superior (isto é, $v_{i3}^F > 0$ e $v_{i3}^S > 0$);
5. v_{i3} deve ter perfil parabólico (pois assim u_i^0 é logarítmico);
6. Seu valor máximo deve ser $\frac{H\kappa|u_{*i}|}{4}$, igual ao do perfil que serviu como inspiração; e
7. Sua profundidade de valor máximo deve ser função de τ_i^F , τ_i^S , ε^F e ε^S , não necessariamente coincidindo com o meio da coluna d'água ($\frac{\zeta-h}{2}$), diferentemente do perfil que serviu como inspiração. Isto é uma consequência natural do fato de que as viscosidades no fundo e na superfície poderão ser diferentes.

Por fim, ressalta-se que tal perfil de viscosidade, similarmente à presente no SisBaHiA[®] (Equação 2.1), se tratará de uma *viscosidade direcional*. O par de índices (i, j) em v_{ij} indicará a *difusão turbulenta de momentum linear da direção i ao longo da direção j* . Assim,

- v_{13} representará a difusão de *momentum* linear da direção x ao longo da direção z e
- v_{23} representará a difusão de *momentum* linear da direção y ao longo da direção z .

3.7.2 Dedução matemática

Matematicamente, uma parábola pode ser definida através da multiplicação entre duas retas. Sabendo-se que as raízes destas retas também serão raízes da parábola resultante, é possível verificar que a única parábola que obedece às imposições acima listadas é

$$v_{i3}(x, y, z, t) = M_i (h + z + \varepsilon^F)(\zeta - z + \varepsilon^S) \quad , \quad (3.12)$$

onde

$$M_i(x, y, t) = \frac{4\Upsilon_i}{H_0^2} \quad (3.13)$$

é uma grandeza que determina a curvatura da parábola (abreviado pela letra “M” por uma questão de conveniência, devido à frequência com que ocorre nas equações apresentadas neste trabalho), que por sua vez é parametrizado por

$$\Upsilon_i(x, y, t) = \frac{H\kappa |u_{*i}|}{4} \quad , \quad (3.14)$$

que representa a viscosidade máxima que ocorre em uma coluna d’água, e por

$$H_0(x, y, t) \equiv H + \varepsilon^F + \varepsilon^S \quad (3.15)$$

(também abreviado devido à frequência com que ocorre nas equações apresentadas neste trabalho).

3.8 Expressões completas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)

Após a resolução da equação referente ao **perfil preliminar** (u_i^0) , Equação A.8), utilizando-se as definições de p^F e p^S respectivamente das Equações 3.5 e 3.6 e a definição de v_{i3} da Equação 3.12, temos que

$$\begin{aligned} u_i^0(x, y, z, t) &= u_i^{0F} + \left[\frac{(\tau_i^{0F}(H + \varepsilon^F) - \tau_i^{0S}\varepsilon^F)}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \ln \left(\frac{h + z + \varepsilon^F}{\varepsilon^F} \right) \\ &\quad + \left[\frac{(\tau_i^{0F}\varepsilon^S - \tau_i^{0S}(H + \varepsilon^S))}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \ln \left(\frac{\zeta - z + \varepsilon^S}{H + \varepsilon^S} \right) \\ &= u_i^{0S} + \left[\frac{(\tau_i^{0F}(H + \varepsilon^F) - \tau_i^{0S}\varepsilon^F)}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \ln \left(\frac{h + z + \varepsilon^F}{H + \varepsilon^F} \right) \\ &\quad + \left[\frac{(\tau_i^{0F}\varepsilon^S - \tau_i^{0S}(H + \varepsilon^S))}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \ln \left(\frac{\zeta - z + \varepsilon^S}{\varepsilon^S} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Após a resolução da equação referente ao **perfil ajustado** (u_i , Equação A.16), utilizando-se as definições de p^F e p^S respectivamente das Equações 3.5 e 3.6 e a definição de v_{i3} da Equação 3.12, temos que

$$\begin{aligned}
u_i(x, y, z, t) = & p^F \left(u_i^F + \left[\frac{(\tau_i^F(H + \varepsilon^F) - \tau_i^S \varepsilon^F)}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \ln \left(\frac{h + z + \varepsilon^F}{\varepsilon^F} \right) \right. \\
& + \left. \left[\frac{(\tau_i^F \varepsilon^S - \tau_i^S(H + \varepsilon^S))}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \ln \left(\frac{\zeta - z + \varepsilon^S}{H + \varepsilon^S} \right) \right) \\
& + p^S \left(u_i^S + \left[\frac{(\tau_i^F(H + \varepsilon^F) - \tau_i^S \varepsilon^F)}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \ln \left(\frac{h + z + \varepsilon^F}{H + \varepsilon^F} \right) \right. \\
& + \left. \left[\frac{(\tau_i^F \varepsilon^S - \tau_i^S(H + \varepsilon^S))}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \ln \left(\frac{\zeta - z + \varepsilon^S}{\varepsilon^S} \right) \right) \\
& + p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' + p^S \int_z^\zeta \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
& - p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz' - p^S \int_z^\zeta \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz'
\end{aligned} \tag{3.17}$$

A respeito do **perfil preliminar** (u_i^0) (Equação 3.16), pode-se dizer que:

1. **Os únicos termos que variam na vertical são os logaritmos.** Em outras palavras, toda a variação vertical está matematicamente concentrada nos logaritmos, sendo os outros termos meros escalares 2DH que variam somente em (x, y, t) e escalam tais logaritmos.
2. Há **duas expressões** para o perfil preliminar (u_i^0).

A respeito do **perfil ajustado** (u_i) (Equação 3.17), pode-se dizer que:

1. **Os únicos termos que variam na vertical são os logaritmos e os termos Ψ_i^0 , p^F e p^S .** Em outras palavras, toda a variação vertical está matematicamente concentrada nos logaritmos e nos termos Ψ_i^0 , p^F e p^S , sendo os outros termos meros escalares 2DH que variam somente em (x, y, t) e escalam tais logaritmos e tais termos Ψ_i^0 , p^F e p^S .
2. Há **uma expressão** para o perfil ajustado (u_i).

3.9 Expressões compactas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)

Devido aos seus tamanhos, as Equações 3.16 e 3.17 não são manejo prático. No intuito de facilitar seu manuseio, a Seção A.4 apresenta variáveis auxiliares que serão, a partir deste momento, utilizadas para escrever expressões compactas para estas grandezas.

A **forma compacta do perfil preliminar** (idêntico às Equações A.8 e 3.16) é dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} u_i^0(x, y, z, t) &= u_i^{0F} + A_i^0 Z^{FF} + B_i^0 Z^{SF} \\ &= u_i^{0S} + A_i^0 Z^{FS} + B_i^0 Z^{SS} \end{aligned}} \quad . \quad (3.18)$$

A **forma compacta do perfil ajustado** (idêntico às Equações A.16 e 3.17) é dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} u_i(x, y, z, t) &= p^F \left(u_i^F + A_i Z^{FF} + B_i Z^{SF} \right) \\ &\quad + p^S \left(u_i^S + A_i Z^{FS} + B_i Z^{SS} \right) \\ &\quad + f_i \left(\Psi_i^0 \right) \end{aligned}} \quad . \quad (3.19)$$

3.10 Fluxos dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)

De modo a integrar o perfis preliminar (Equação 3.18) e ajustado (Equação 3.19) ao longo da coluna d'água $\left(\int_{-h}^{\zeta} [\dots] dz \right)$ e apresentá-los de forma já compacta, faz-se necessário definir também a integral das seguintes variáveis auxiliares:

- $Z^{FF}, Z^{SF}, Z^{FS}, Z^{SS}$; e
- $p^F Z^{FF}, p^F Z^{SF}, p^S Z^{FS}, p^S Z^{SS}$.

Tal lista de integrais se encontra na a Seção A.5.

Desta forma, o **fluxo do perfil preliminar** $\left(\int_{-h}^{\zeta} [\text{Equação 3.18}] dz \right)$ é dado por:

$$\boxed{
\begin{aligned}
\int_{-h}^{\zeta} u_i^0 dz &= u_i^{0F} H - A_i^0 H^{FF} - B_i^0 H^{SF} \\
&= u_i^{0S} H - A_i^0 H^{FS} - B_i^0 H^{SS}
\end{aligned}
} \quad . \quad (3.20)$$

Analogamente, o **fluxo do perfil ajustado** $\left(\int_{-h}^{\zeta} [\text{Equação 3.19}] dz \right)$ é dado por:

$$\boxed{
\begin{aligned}
\int_{-h}^{\zeta} u_i dz &= \frac{(u_i^F + u_i^S)}{2} H \\
&\quad + A_i (P^{FF} + P^{FS}) + B_i (P^{SF} + P^{SS}) \\
&\quad + \int_{-h}^{\zeta} f_i(\Psi_i^0) dz
\end{aligned}
} \quad . \quad (3.21)$$

3.11 Derivadas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)

Esta seção destina-se a apresentar fórmulas para as derivadas $\left(\frac{\partial[\dots]}{\partial x_j} \right)$ dos perfis preliminar e ajustado tal que $j \in \{1, 2, 3, 4\} \equiv \{x, y, z, t\}$. Desta forma, uma mesma fórmula do tipo $\frac{\partial[\dots]}{\partial x_j}$ pode ser utilizada para calcular quaisquer uma das seguintes derivadas: $\frac{\partial[\dots]}{\partial x}$, $\frac{\partial[\dots]}{\partial y}$, $\frac{\partial[\dots]}{\partial z}$ e $\frac{\partial[\dots]}{\partial t}$.

De modo a apresentar as expressões de tais derivadas já de forma compacta, faz-se necessário definir algumas variáveis intermediárias, apresentadas na Seção A.6.

Desta forma, como a derivada do perfil preliminar é dada por

$$\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} = \frac{\partial A_i^0}{\partial x_j} Z^{FF} + \frac{\partial B_i^0}{\partial x_j} Z^{SF} + \frac{\partial Z^{FF}}{\partial x_j} A_i^0 + \frac{\partial Z^{SF}}{\partial x_j} B_i^0 \quad , \quad (3.22)$$

temos que a **derivada do perfil preliminar** $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} [\text{Equação 3.18}] \right)$ é dada por:

$$\boxed{
\begin{aligned}
\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} &= A_i^0 P_j + B_i^0 R_j \\
&\quad + \frac{\partial A_i^0}{\partial x_j} Z^{FF} + \frac{\partial B_i^0}{\partial x_j} Z^{SF} + A_i^0 Q_j Z^F + B_i^0 S_j Z^S
\end{aligned}
} \quad , \quad (3.23)$$

onde toda a variação vertical está matematicamente concentrada nos termos Z^{FF} , Z^{SF} , Z^F e Z^S . Todos os outros termos não variam na vertical, isto é, não dependem de z .

A Equação 3.24 apresenta um exemplo do uso das variáveis auxiliares.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^0}{\partial z} &= \frac{\partial u_2^0}{\partial x_3} \\
&= A_2^0 \cancel{P_3^0} + B_2^0 \cancel{R_3^0} \\
&\quad + \frac{\partial A_2^0}{\partial x_3} Z^{FF} + \frac{\partial B_2^0}{\partial x_3} Z^{SF} + A_2^0 Z^F \cancel{Q_3^1} + B_2^0 Z^S \cancel{S_3^{-1}} \\
&= A_2^0 Z^F - B_2^0 Z^S
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Este esquema funciona para todas as possíveis derivadas em que

$$i \in \{1, 2\} \equiv \{x, y\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, 2, 3, 4\} \equiv \{x, y, z, t\} \quad ,$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \\
&\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} \quad .
\end{aligned}$$

3.12 Componente vertical da velocidade (w^0)

A componente vertical do vetor velocidade, denotada por w^0 , é obtida através da equação da continuidade para escoamentos incompressíveis imposta às variáveis $u_1^0 \equiv u^0$ e $u_2^0 \equiv v^0$. Desta forma, pode-se dizer que w^0 se trata da velocidade vertical “preliminar”, uma vez que foi obtida através do escoamento horizontal preliminar (u_i^0). Contudo, este trabalho não se propõe a estimar uma velocidade vertical “ajustada” (análoga a u_i). Tal procedimento se encontra fora do escopo deste trabalho por ser computacionalmente ineficiente em relação à proposta original. Tal ineficiência se deve ao fato de que os perfis ajustados (u_i) não podem ser expressos de maneira puramente analítica, diferentemente dos perfis preliminares (u_i^0). Assim, o cálculo de $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ e de $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}$ somente seria possível através da computação de derivadas horizontais de maneira puramente numérica em um sistema de coordenadas do

tipo “*sigma* (σ)”³, o que significativamente reduziria a eficiência computacional do método. Por este motivo, este trabalho se refere à variável w^0 simplesmente como “velocidade vertical”, sem a expressão “preliminar” a acompanhando.

Temos que a equação da continuidade para escoamentos incompressíveis imposta às variáveis $u_1^0 \equiv u^0$, $u_2^0 \equiv v^0$ e w^0 é dada por⁴:

$$\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{\partial w^0}{\partial z} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial w^0}{\partial z} \equiv - \left(\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} \right) \quad . \quad (3.25)$$

Pela Equação 3.23, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^0}{\partial x} &= A_1^0 P_1 + B_1^0 R_1 \\ &+ \frac{\partial A_1^0}{\partial x_1} Z^{FF} + \frac{\partial B_1^0}{\partial x_1} Z^{SF} + A_1^0 Q_1 Z^F + B_1^0 S_1 Z^S \end{aligned} \quad . \quad (3.26)$$

Da mesma forma, ainda pela Equação 3.23, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^0}{\partial y} &= A_2^0 P_2 + B_2^0 R_2 \\ &+ \frac{\partial A_2^0}{\partial x_2} Z^{FF} + \frac{\partial B_2^0}{\partial x_2} Z^{SF} + A_2^0 Q_2 Z^F + B_2^0 S_2 Z^S \end{aligned} \quad . \quad (3.27)$$

Assim, pelas Equações 3.25, 3.26 e 3.27, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^0}{\partial z} &= - \left(\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} \right) \\ &= - (A_1^0 P_1 + B_1^0 R_1 + A_2^0 P_2 + B_2^0 R_2) \\ &\quad - \left(\frac{\partial A_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2^0}{\partial x_2} \right) Z^{FF} - \left(\frac{\partial B_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2^0}{\partial x_2} \right) Z^{SF} \\ &\quad - (A_1^0 Q_1 + A_2^0 Q_2) Z^F - (B_1^0 S_1 + B_2^0 S_2) Z^S \end{aligned} \quad . \quad (3.28)$$

De modo a escrever a Equação 3.28 de forma compacta, definimos que:

³ Sistema de coordenadas cuja componente vertical acompanha a variação horizontal tanto da cota batimétrica quanto da elevação da superfície do fluido.

⁴ Note que a velocidade vertical, w^0 , **não** pode ser denotada como “ u_3^0 ”, uma vez que, em todo este trabalho, $i \in \{1, 2\} \neq \{1, 2, 3\}$. Se, por exemplo, alguém aplicar a errônea condição $i \equiv 3$ na Equação 3.23, seu cálculo estará **errado** e sequer fará sentido matemático ou físico.

$$\left\{ \begin{array}{l} W^0(x, y, t) \equiv - (A_1^0 P_1 + B_1^0 R_1 + A_2^0 P_2 + B_2^0 R_2) \\ W^{FF}(x, y, t) \equiv - \left(\frac{\partial A_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2^0}{\partial x_2} \right) \\ W^{SF}(x, y, t) \equiv - \left(\frac{\partial B_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2^0}{\partial x_2} \right) \\ W^F(x, y, t) \equiv - (A_1^0 Q_1 + A_2^0 Q_2) \\ W^S(x, y, t) \equiv - (B_1^0 S_1 + B_2^0 S_2) \end{array} \right. . \quad (3.29)$$

E, assim, temos que a Equação 3.28 pode ser escrita da seguinte forma compacta:

$$\frac{\partial w^0}{\partial z} = W^0 + W^{FF} Z^{FF} + W^{SF} Z^{SF} + W^F Z^F + W^S Z^S \quad , \quad (3.30)$$

onde somente os termos Z^{FF} , Z^{SF} , Z^F e Z^S variam verticalmente (isto é, dependem de z). Todos os outros termos, para um dado ponto (x, y, t) , se comportam como meros escalares para as funções que variam verticalmente.

De modo a obter uma expressão para a velocidade vertical w^0 , é necessário integrar a equação 3.30 verticalmente, isto é, integrá-la em z . Novamente, a discussão sobre integrações verticais constante na Seção 3.3 se aplica: se faz necessário utilizar tanto a CCCF quanto a CCCS para, posteriormente, aplicar as funções de forma p^F e p^S nas equações resultantes.

Integrando a Equação 3.30 entre $-h$ e z , temos que

$$[w^0(x, y, z, t)]^F = \int_{-h}^z \frac{\partial w^0}{\partial z'} dz' - \frac{\partial h}{\partial t} \quad . \quad (3.31)$$

Integrando a Equação 3.30 entre z e ζ , temos que

$$[w^0(x, y, z, t)]^S = - \int_z^\zeta \frac{\partial w^0}{\partial z'} dz' + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad . \quad (3.32)$$

De modo a solucionar as equações 3.31 e 3.32, é necessário deduzir expressões que representem as integrais que as compõem.

Temos, pela Equação 3.30, que a integral que compõe a Equação 3.31 é

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^z \frac{\partial w^0}{\partial z'} dz' &= W^0 \int_{-h}^z 1 dz' + W^{FF} \int_{-h}^z Z^{FF} dz' + W^{SF} \int_{-h}^z Z^{SF} dz' \\
&\quad + W^F \int_{-h}^z Z^F dz' + W^S \int_{-h}^z Z^S dz'
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Temos, pela Equação 3.30, que a integral que compõe a Equação 3.32 é

$$\begin{aligned}
\int_z^\zeta \frac{\partial w^0}{\partial z'} dz' &= W^0 \int_z^\zeta 1 dz' + W^{FF} \int_z^\zeta Z^{FF} dz' + W^{SF} \int_z^\zeta Z^{SF} dz' \\
&\quad + W^F \int_z^\zeta Z^F dz' + W^S \int_z^\zeta Z^S dz'
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Assim, de modo a se obter uma expressão compacta para w^0 , faz-se necessário expressar as integrais das Equações 3.33 e 3.34 de forma compacta. Como todos os integrandos presentes nestas equações são funções analíticas, é possível deduzí-los analiticamente. Após os cálculos e definições de novas variáveis, tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{l}
Z^{FFF}(x, y, z, t) \equiv \int_{-h}^z Z^{FF} dz' = \frac{Z^{FF}}{Z^F} - (h + z) \\
Z^{SFF}(x, y, z, t) \equiv \int_{-h}^z Z^{SF} dz' = -\frac{Z^{SF}}{Z^S} - (h + z) \\
Z^{FFS}(x, y, z, t) \equiv \int_z^\zeta Z^{FF} dz' = -\frac{Z^{FF}}{Z^F} - H^{FF} + (h + z) \\
Z^{SFS}(x, y, z, t) \equiv \int_z^\zeta Z^{SF} dz' = \frac{Z^{SF}}{Z^S} - H^{SF} + (h + z)
\end{array} \right. \tag{3.35}$$

e que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-h}^z Z^F dz' = Z^{FF} \\ \int_{-h}^z Z^S dz' = -Z^{SF} \\ \int_z^\zeta Z^F dz' = -Z^{FS} \\ \int_z^\zeta Z^S dz' = Z^{SS} \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Utilizando tais definições, temos que a Equação 3.31 é dada por

$$\begin{aligned} [w^0(x, y, z, t)]^F &= \left(W^0(h+z) + W^{FF} Z^{FFF} + W^{SF} Z^{SFF} \right. \\ &\quad \left. + W^F Z^{FF} + W^S (-Z^{SF}) \right) - \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Similarmente, temos que a Equação 3.32 é dada por

$$\begin{aligned} [w^0(x, y, z, t)]^S &= - \left(W^0(\zeta - z) + W^{FF} Z^{FFS} + W^{SF} Z^{SFS} \right. \\ &\quad \left. + W^F (-Z^{FS}) + W^S Z^{SS} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Aplicando as funções de forma nas Equações 3.37 e 3.38, temos que

$$w^0(x, y, z, t) \equiv p^F [w^0(x, y, z, t)]^F + p^S [w^0(x, y, z, t)]^S \quad (3.39)$$

Assim, finalmente temos a **equação da velocidade vertical**:

$$\begin{aligned}
w^0(x, y, z, t) = & -p^F \frac{\partial h}{\partial t} + p^S \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\
& + p^F \left(W^{FF} Z^{FFF} + W^{SF} Z^{SFF} \right. \\
& \quad \left. + W^F Z^{FF} + W^S (-Z^{SF}) \right) \\
& - p^S \left(W^{FF} Z^{FFS} + W^{SF} Z^{SFS} \right. \\
& \quad \left. + W^F (-Z^{FS}) + W^S Z^{SS} \right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Note que esta equação obedece tanto a CCCF quanto a CCCS no que se refere às velocidades verticais: no fundo (em $z = -h$), todos os termos se ajustam de modo que $w^0 = -\frac{\partial h}{\partial t}$; na superfície (em $z = \zeta$), todos os termos se ajustam de modo que $w^0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$.

3.13 Velocidade de atrito direcional (u_i^*)

O conceito de velocidade de atrito (u^*), descrito na Seção 2.3, é essencial para a parametrização da viscosidade turbulenta (ν_{i3}), descrita na Seção 3.7. Contudo, a formulação da Equação 2.2 (Seção 2.3) não possui dois atributos essenciais ao modelo matemático proposto neste trabalho: ela (1) não é tratada de forma direcional e (2) faz referência a apenas um contorno. O tratamento direcional é essencial porque o fato do escoamento ser direcional (isto é, variar em x e em y) dá origem a uma viscosidade turbulenta anisotrópica. A referência a mais de um contorno é essencial porque corpos d'água naturais tipicamente possuem dimensões horizontais muito maiores que dimensões verticais, de modo que tensões tanto no fundo quanto na superfície forcem o escoamento.

Dessa forma, faz-se necessário a dedução de uma expressão para a velocidade de atrito que seja

1. vetorial em x e em y , tendo uma direção definida e uma magnitude que seja insensível à orientação do sistema de coordenadas; e
2. função tanto da tensão no fundo quanto da tensão na superfície, sendo representativa para toda a coluna d'água.

Contudo, para a definição de uma velocidade de atrito direcional que atenda a tais requisições, é necessária também a definição

- de uma velocidade de atrito direcional referente ao fundo (u_i^{*F}); e
- de uma velocidade de atrito direcional referente à superfície (u_i^{*S}).

Nesse sentido, esta seção se destina a apresentar a modelagem matemática destas grandezas.

A velocidade de atrito direcional combinada, denotada neste trabalho como u_i^* , é a velocidade de atrito que atende aos dois requisitos listados acima. A expressão “direcional” significa ser vetorial em x e em y (requisito 1) e a expressão “combinada” significa abranger tanto as tensões do fundo quanto as da superfície (requisito 2). Ela é parametrizada em função

- da velocidade de atrito direcional referente ao fundo e
- da velocidade de atrito direcional referente à superfície.

A velocidade de atrito direcional referente ao fundo, denotada neste trabalho como u_i^{*F} , é parametrizada em função

- da tensão direcional do leito no fundo (τ_i^{*F}) e
- da densidade do fluido promediada na coluna d’água ($\hat{\rho}$).

A velocidade de atrito direcional referente à superfície, denotada neste trabalho como u_i^{*S} , é parametrizada em função

- da tensão direcional do vento na superfície (τ_i^{*S}) e
- da densidade do fluido promediada na coluna d’água ($\hat{\rho}$).

As parametrizações das tensões do leito no fundo (τ_i^{*F}) e do vento na superfície (τ_i^{*S}) serão apresentadas na Seção 3.14.

3.13.1 Velocidade de atrito direcional referente ao fundo (u_i^{*F})

Temos que a equação da velocidade de atrito direcional referente ao fundo é dada por:

$$\boxed{u_i^{*F}(x, y, t) = \frac{\tau_i^{*F}}{\sqrt{\hat{\rho} \tau^{*F}}}} \quad . \quad (3.41)$$

Pode-se verificar que a condição imposta na Equação A.32 é obedecida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(u_1^{*F})^2 + (u_2^{*F})^2} &= \sqrt{\left(\frac{\tau_1^{*F}}{\sqrt{\hat{\rho}\tau^{*F}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2^{*F}}{\sqrt{\hat{\rho}\tau^{*F}}}\right)^2} = \\
\sqrt{\frac{(\tau_1^{*F})^2}{\hat{\rho}\tau^{*F}} + \frac{(\tau_2^{*F})^2}{\hat{\rho}\tau^{*F}}} &= \sqrt{\frac{(\tau_1^{*F})^2 + (\tau_2^{*F})^2}{\hat{\rho}\tau^{*F}}} = \quad . \quad (3.42) \\
\sqrt{\frac{(\tau^{*F})^2}{\hat{\rho}\tau^{*F}}} &= \sqrt{\frac{\tau^{*F}}{\hat{\rho}}}
\end{aligned}$$

3.13.2 Velocidade de atrito direcional referente à superfície

$$(u_i^{*S})$$

A dedução da velocidade de atrito direcional referente à superfície se dá de maneira totalmente análoga à dedução da velocidade de atrito direcional referente ao fundo (Seção 3.13.1).

Temos que a **equação da velocidade de atrito direcional referente à superfície** é dada por:

$$\boxed{u_i^{*S}(x, y, t) = \frac{\tau_i^{*S}}{\sqrt{\hat{\rho}\tau^{*S}}}} \quad . \quad (3.43)$$

Pode-se verificar que a condição imposta na Equação A.35 é obedecida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(u_1^{*S})^2 + (u_2^{*S})^2} &= \sqrt{\left(\frac{\tau_1^{*S}}{\sqrt{\hat{\rho}\tau^{*S}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2^{*S}}{\sqrt{\hat{\rho}\tau^{*S}}}\right)^2} = \\
\sqrt{\frac{(\tau_1^{*S})^2}{\hat{\rho}\tau^{*S}} + \frac{(\tau_2^{*S})^2}{\hat{\rho}\tau^{*S}}} &= \sqrt{\frac{(\tau_1^{*S})^2 + (\tau_2^{*S})^2}{\hat{\rho}\tau^{*S}}} = \quad . \quad (3.44) \\
\sqrt{\frac{(\tau^{*S})^2}{\hat{\rho}\tau^{*S}}} &= \sqrt{\frac{\tau^{*S}}{\hat{\rho}}}
\end{aligned}$$

3.13.3 Velocidade de atrito direcional combinada (u_i^*)

A velocidade de atrito direcional combinada, u_i^* , deve ser uma função de u_i^{*F} (Equação 3.41) e de u_i^{*S} (Equação 3.43).

Um estudo conduzido por ROSMAN (2019) testou diversas formulações para a *magnitude* de uma velocidade de atrito combinada não-direcional, isto é, $u^* = f(u^{*F}, u^{*S})$. Neste estudo, duas formulações para esta magnitude geraram resultados condizentes com medições em laboratório:

- quando ela é calculada como a média simples entre as magnitudes de u^{*F} e u^{*S} , isto é, $u^* = \frac{u^{*F} + u^{*S}}{2}$; e
- quando ela é considerada simplesmente como o maior valor entre u^{*F} e u^{*S} , isto é, $u^* = \max(u^{*F}, u^{*S})$.

Como resultados pouco melhores foram observados no segundo caso, a formulação adotada neste trabalho é a segunda, isto é,

$$u^*(x, y, t) = \max(u^{*F}, u^{*S}) \quad . \quad (3.45)$$

Em relação ao *sentido* da velocidade de atrito direcional combinada, este trabalho o considerou como sendo o sentido médio entre os vetores u_i^{*F} e u_i^{*S} , isto é, o vetor unitário

$$\frac{\frac{u_i^{*F} + u_i^{*S}}{2}}{\left\| \frac{u_i^{*F} + u_i^{*S}}{2} \right\|} = \left(\frac{u_i^{*F} + u_i^{*S}}{\sqrt{(u_1^{*F} + u_1^{*S})^2 + (u_2^{*F} + u_2^{*S})^2}} \right) \quad . \quad (3.46)$$

Este sentido corresponde

- tanto ao sentido médio dos vetores u_i^{*F} e u_i^{*S} quando ambos são considerados unitários e sobre um mesmo plano;
- quanto ao sentido em meia-coluna ($z = \frac{\zeta-h}{2}$) resultante de uma interpolação linear entre os vetores u_i^{*F} e u_i^{*S} que considera tanto suas diferentes magnitudes quanto suas distintas posições na coluna d'água.

Dessa forma, conforme as considerações apresentadas, finalmente temos a **equação da velocidade de atrito direcional combinada:**

$$u_i^*(x, y, t) = \left(\frac{u_i^{*F} + u_i^{*S}}{\underbrace{\sqrt{(u_1^{*F} + u_1^{*S})^2 + (u_2^{*F} + u_2^{*S})^2}}_{\text{Vetor unitário}}} \right) u^* \quad (3.47)$$

Tal formulação também satisfaz a condição da magnitude de u_i^* ser insensível à orientação do sistema de coordenadas. Isto é, a Equação 3.47 satisfaz à Equação 3.48 para quaisquer possíveis orientações do sistema de coordenadas.

$$u^*(x, y, t) = \sqrt{(u_1^*)^2 + (u_2^*)^2} \quad (3.48)$$

O conjunto das Equações 3.47, 3.41 e 3.43 satisfaz as duas requisições mencionadas no início desta seção: a velocidade de atrito direcional combinada, u_i^* , é

1. vetorial em x e em y , possuindo uma direção definida e uma magnitude insensível à orientação do sistema de coordenadas; e
2. uma função tanto da tensão no fundo quanto da tensão na superfície, sendo representativa para toda a coluna d'água.

3.14 Parametrizações das tensões nos contornos

A escolha das parametrizações das tensões do leito no fundo (τ_i^{*F}) e do vento na superfície (τ_i^{*S}) não influenciam diretamente a metodologia proposta neste trabalho. Pelo fato delas apenas servirem como condições de contorno externas, elas podem ser calculadas de diferentes maneiras. De modo geral, parametrizações mais sofisticadas provirão resultados mais exatos.

Contudo, ressalta-se que, na metodologia proposta, como os perfis de velocidade dependem dessas tensões, suas parametrizações não podem depender da velocidade do escoamento em cotas verticais específicas (como a velocidade próxima ao fundo para definir τ_i^{*F} e a velocidade na superfície para definir τ_i^{*S}). Se assim fosse, essas tensões dependeriam do escoamento e o escoamento dependeria dessas tensões e, portanto, a metodologia de dedução dos perfis teria que ser outra.

A informação sobre a velocidade do escoamento de maior grau de complexidade que pode ser utilizada nestas parametrizações, sem prejuízo da metodologia proposta, é a velocidade do escoamento promediada em toda a coluna d'água, isto é, a variável U_i . Isto porque U_i é uma variável provida por modelos 2DH, que, conforme mencionado, são os tipos de modelos que fornecerão os dados de entrada para a confecção dos perfis preliminares e ajustados.

Desta forma, esta seção destina-se a apresentar as parametrizações das tensões do leito no fundo (τ_i^{*F}) e do vento na superfície (τ_i^{*S}) que foram utilizadas para a confecção dos resultados apresentados na Capítulo 5.

3.14.1 Tensão do leito no fundo (τ_i^{*F})

A tensão do leito no fundo utilizada no processamento dos resultados apresentados neste trabalho é a mesma utilizada no módulo 2DH do SisBaHiA[®] (ROSMAN, 2019). Ela é parametrizada em função da

- velocidade média do escoamento ao longo da coluna d'água (U_i);
- da densidade do fluido promediada na coluna d'água ($\hat{\rho}$);
- altura da coluna d'água (H);
- rugosidade equivalente do fundo (ε^F); e
- aceleração gravitacional (g).

A tensão do leito no fundo relativa à velocidade de atrito é, então, dada por

$$\tau_i^{*F}(x, y, t) = \hat{\rho} \beta U_i \quad , \quad (3.49)$$

onde o parâmetro β é dado por

$$\beta(x, y, t) = \frac{g}{C_h^2} \sqrt{U_1^2 + U_2^2} \quad , \quad (3.50)$$

onde C_h , a constante de Chézy, é dada por

$$C_h(x, y, t) = 18 \log_{10} \left(\frac{6H}{\varepsilon^F} \right) \quad . \quad (3.51)$$

A magnitude da tensão do leito no fundo é dada pela Equação A.30.

3.14.2 Tensão do vento na superfície (τ_i^{*S})

A tensão do vento na superfície utilizada no processamento dos resultados apresentados neste trabalho é a proposta por WU (1982), posteriormente aprimorada por HERBACH (2011). Ela é parametrizada em função da

- velocidade do vento a 10 m acima da cota da superfície (W_i); e

- densidade do ar atmosférico (ρ_A).

A tensão do vento na superfície é, então, dada por

$$\tau_i^{*S}(x, y, t) = \left(\rho_A C_D \sqrt{W_1^2 + W_2^2} \right) W_i \quad , \quad (3.52)$$

onde o coeficiente de arrasto C_D é dado por

$$C_D(x, y, t) = \min \left[\left(0.80 + 0.065 \sqrt{W_1^2 + W_2^2} \right) 10^{-3}, 0.00275 \right] \quad , \quad (3.53)$$

onde $\rho_A = 1.225 \text{ kg m}^{-3}$ é a densidade atribuída ao ar atmosférico.

A magnitude da tensão do vento na superfície é dada pela Equação A.33.

3.15 Condições de contorno do perfil preliminar

$$\left(\tau_i^{0F}, \tau_i^{0S}, u_i^{0F}, u_i^{0S} \right)$$

O perfil preliminar, apresentado na Seção 3.4, pode ser representado a partir de quaisquer uma das Equações A.8, 3.16 e 3.18, sendo todas elas completamente equivalentes e idênticas. Ele possui quatro condições de contorno a partir das quais o perfil pode ser completamente definido:

- Condição de contorno dinâmica de fundo (CCDF, determinada pela definição de τ_i^{0F});
- Condição de contorno dinâmica de superfície (CCDS, determinada pela definição de τ_i^{0S});
- Condição de contorno cinemática de fundo (CCCF, determinada pela definição de u_i^{0F}); e
- Condição de contorno cinemática de superfície (CCCS, determinada pela definição de u_i^{0S}).

Esta seção destina-se a apresentar a formulação matemática de cada uma delas.

3.15.1 Condição de contorno dinâmica de fundo

$$\left(\text{CCDF}, \tau_i^{0F} \right)$$

A CCDF do perfil preliminar se refere à relação entre a viscosidade turbulenta no fundo (ν_{i3}^F), o cisalhamento vertical do escoamento preliminar horizontal no fundo

$\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial z}\Big|_{z=-h}\right)$, a tensão do leito no fundo (τ_i^{0F}) e a densidade do fluido no fundo ($\hat{\rho}$).
Matematicamente, ela é expressa por

$$v_{i3}^F \frac{\partial u_i^0}{\partial z}\Big|_{z=-h} = \frac{\tau_i^{0F}}{\hat{\rho}} \quad , \quad (3.54)$$

onde

- v_{i3}^F é definido pela Equação A.18;
- $\hat{\rho}$ é a densidade do fluido promediada na coluna d'água, definida externamente pelo módulo 2DH;
- $\frac{\partial u_i^0}{\partial z}\Big|_{z=-h}$ é o cisalhamento vertical resultante, a ser modelado pelo módulo analítico-numérico; e
- τ_i^{0F} é a tensão do leito no fundo, a ser definida.

A definição de τ_i^{0F} , contudo, **não** guarda relação com a definição de τ_i^{*F} , definido pela Equação 3.49. Neste trabalho, $\tau_i^{0F} \neq \tau_i^{*F}$ porque τ_i^{0F} é a variável do perfil preliminar que garantirá que seu fluxo, definido pela Equação 3.20, seja igual ao fluxo determinado pelo módulo 2DH, isto é, $U_i H$. Assim, τ_i^{*F} é uma grandeza utilizada apenas para determinar a velocidade de atrito (vide Seção 3.13), não guardando relação direta com τ_i^{0F} .

A obtenção de τ_i^{0F} se dá da seguinte forma:

1. Impõe-se que a Equação 3.20 é igual ao fluxo esperado pelo módulo 2DH, isto é,

$$U_i H = u_i^{0F} H - A_i^0 H^{FF} - B_i^0 H^{SF} \quad . \quad (3.55)$$

2. Expande-se os termo referentes A_i^0 e B_i^0 , definidos na Equação A.21.
3. Isola-se o termo referente a τ_i^{0F} .

Desta forma, o τ_i^{0F} obtido é aquele que garante que o perfil preliminar tenha fluxo e velocidade média iguais às modeladas pelo módulo 2DH em uso.

Assim, finalmente temos a **equação da tensão do leito no fundo relativa à CCDF do perfil preliminar**:

$$\tau_i^{0F}(U_i(x, y, t)) = \frac{\tau_i^{0S} (H^{FF} \varepsilon^F + H^{SF} (H + \varepsilon^S)) - (U_i - u_i^{0F}) M_i \hat{\rho} H_0 H^2}{(H^{FF} (H + \varepsilon^F) + H^{SF} \varepsilon^S)} \quad . \quad (3.56)$$

3.15.2 Condição de contorno dinâmica de superfície (CCDS, τ_i^{0S})

O fato da tensão do vento servir como uma condição de contorno externa que faz com que, independentemente do tipo de perfil – *preliminar* ou *ajustado* –, a tensão do vento deve ser a mesma. Desta forma, em todo este trabalho, temos que

$$\underbrace{\tau_i^{0S}(x, y, t)}_{\text{Tensão do vento para o perfil preliminar } (u_i^0)} = \underbrace{\tau_i^S(x, y, t)}_{\text{Tensão do vento para o perfil ajustado } (u_i)} = \underbrace{\tau_i^{*S}(x, y, t)}_{\text{Tensão do vento parametrizada por WU (1982)}} . \quad (3.57)$$

Ainda assim, neste trabalho, τ_i^{0S} e τ_i^S são tratados como distintos. A motivação para isto, conforme mencionado anteriormente, é manter explícita a ideia de que as condições de contorno do perfil preliminar (u_i^0) são matematicamente independentes das condições de contorno do perfil ajustado (u_i). Temos que, no caso da tensão do vento em superfície, ela é a mesma para ambos os perfis ($\tau_i^{0S} = \tau_i^S$). Contudo, o mesmo não se aplica, por exemplo, para a velocidade do escoamento em superfície ($u_i^{0S} \neq u_i^S$).

Assim, temos que a magnitude da tensão do vento atuante na superfície é dada por

$$\tau^{0S}(x, y, t) = \tau^S(x, y, t) = \sqrt{(\tau_1^{0S})^2 + (\tau_2^{0S})^2} = \sqrt{(\tau_1^S)^2 + (\tau_2^S)^2} . \quad (3.58)$$

3.15.3 Condição de contorno cinemática de fundo (CCCF, u_i^{0F})

A CCCF é a condição de não-deslizamento, isto é, de velocidade nula junto ao fundo. Matematicamente, $u_i^{0F} = 0$. A expressão u_i^{0F} , contudo, foi continuamente apresentada nas equações deste trabalho por uma questão de simetria entre os contornos do fundo e da superfície e para deixar explícita a ideia de que um determinado perfil de velocidade pode ser função de duas condições de contorno dinâmicas e de duas condições de contorno cinemáticas.

3.15.4 Condição de contorno cinemática de superfície (CCCS, u_i^{0S})

O perfil preliminar u_i^0 pode ser expresso tanto em função da CCCF quanto em função da CCCS (Equação 3.18). Em ambos os casos, pode-se provar que a velocidade superficial é dada por

$$u_i^{0S}(x, y, t) = A_i \ln\left(\frac{H + \varepsilon^F}{\varepsilon^F}\right) + B_i \ln\left(\frac{\varepsilon^S}{H + \varepsilon^S}\right) . \quad (3.59)$$

3.16 Condições de contorno do perfil ajustado ($\tau_i^F, \tau_i^S, u_i^F, u_i^S$)

O perfil ajustado, apresentado na Seção 3.5, pode ser representado a partir de quaisquer uma das Equações A.16, 3.17 e 3.19, sendo todas elas completamente equivalentes e idênticas. Ele possui quatro condições de contorno a partir das quais o perfil pode ser completamente definido:

- Condição de contorno dinâmica de fundo (CCDF, determinada pela definição de τ_i^F);
- Condição de contorno dinâmica de superfície (CCDS, determinada pela definição de τ_i^S);
- Condição de contorno cinemática de fundo (CCCF, determinada pela definição de u_i^F); e
- Condição de contorno cinemática de superfície (CCCS, determinada pela definição de u_i^S).

Esta seção destina-se a apresentar a formulação matemática de cada uma delas.

3.16.1 Condição de contorno dinâmica de fundo (CCDF, τ_i^F)

A CCDF do perfil ajustado é totalmente análoga à CCDF do perfil preliminar. Ou seja, τ_i^F é o parâmetro do perfil ajustado que garante que seu fluxo seja condizente com a velocidade média do escoamento modelado por um modelo 2DH. Matematicamente, temos

$$\left\{ \tau_i^F = \frac{\tau_i^S[\beta^S] + M_i \hat{\rho} H_0 H [\alpha]}{[\beta^F]} \right. , \quad (3.60)$$

onde α , β^F e β^S são variáveis auxiliares dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = (U_i - u_i^F) H - \int_{-h}^{\zeta} f_i(\Psi_i^0) dz + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial [f_i(\Psi_i^0)]}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \right) \\ \beta^F = (H + \varepsilon^F) (P^{FF} + P^{FS}) + \varepsilon^S (P^{SF} + P^{SS}) - \frac{H}{2} (H^{FF} - H^{SF}) \\ \beta^S = \varepsilon^F (P^{FF} + P^{FS}) + (H + \varepsilon^S) (P^{SF} + P^{SS}) - \frac{H}{2} (H^{FS} - H^{SS}) \end{array} \right. . \quad (3.61)$$

3.16.2 Condição de contorno dinâmica de superfície (CCDS, τ_i^S)

Conforme mencionado para a CCDS referente ao perfil preliminar, o fato da tensão do vento servir como uma condição de contorno externa que faz com que, independentemente do tipo de perfil – *preliminar* ou *ajustado* –, a tensão do vento deve ser a mesma. Desta forma, em todo este trabalho, temos que

$$\underbrace{\tau_i^{0S}(x, y, t)}_{\substack{\text{Tensão do vento para} \\ \text{o perfil } \textit{preliminar} (u_i^0)}} = \underbrace{\tau_i^S(x, y, t)}_{\substack{\text{Tensão do vento para} \\ \text{o perfil } \textit{ajustado} (u_i)}} = \underbrace{\tau_i^{*S}(x, y, t)}_{\substack{\text{Tensão do vento} \\ \text{parametrizada por} \\ \text{WU (1982)}}} . \quad (3.62)$$

3.16.3 Condição de contorno cinemática de fundo (CCCF, u_i^F)

A CCCF é a condição de não-deslizamento, isto é, de velocidade nula junto ao fundo. Matematicamente, $u_i^F = 0$. A expressão u_i^F , contudo, foi continuamente apresentada nas equações deste trabalho por uma questão de simetria entre os contornos do fundo e da superfície e para deixar explícita a ideia de que um determinado perfil de velocidade pode ser função de duas condições de contorno dinâmicas e de duas condições de contorno cinemáticas.

3.16.4 Condição de contorno cinemática de superfície (CCCS, u_i^S)

Diferentemente da CCCS do perfil preliminar, a CCCS do perfil ajustado é definida de modo tal que o perfil ajustado satisfaça a CCDS. Como o perfil ajustado é uma função de $f_i(\Psi_i^0)$ e como $\frac{\partial[f_i(\Psi_i^0)]}{\partial z} \neq 0$ em superfície, temos que a velocidade do perfil ajustado deve equilibrar o cisalhamento em superfície de modo a garantir que o cisalhamento observado e o vento correspondam um ao outro.

Matematicamente, temos

$$u_i^S = u_i^F - \frac{\tau_i^F (H^{FF} - H^{SF}) - \tau_i^S (H^{FS} - H^{SS})}{M_i \hat{\rho} H_0 H} - H \left. \frac{\partial[f_i(\Psi_i^0)]}{\partial z} \right|_{z=\zeta} . \quad (3.63)$$

3.17 Discretização da dimensão vertical

De modo se resolver o perfil proposto (Equação 3.19), é necessário integrar verticalmente a função $f_i(\Psi_i^0)$. Para isso, se faz necessário discretizarmos a dimensão vertical, uma vez que os termos de Ψ_i^0 (Equação 3.4), apesar de terem sido deduzidos de maneira analítica, não podem ser integrados analiticamente.

Assim, temos que a coluna d'água será descrita por N pontos e, conseqüentemente, discretizada em $N - 1$ subcamadas. A variável vertical independente, então, deixará de ser z e passará a ser k .

A espessura de cada subcamada será dada por

$$\Delta z(x, y, t) \equiv \frac{H}{N - 1} . \quad (3.64)$$

Assim, a variável contínua z terá uma variável discreta análoga z_k :

$$z_k(x, y, t) \equiv -h + k \Delta z , \quad (3.65)$$

onde $k \in \{1, 2, \dots, N - 2, N - 1\}$.

A Tabela 3.4 sumariza a discretização espacial imposta.

Tabela 3.4: Discretização da dimensão vertical.

\mathbf{k}	\mathbf{z}_k
0	$-h$
1	$-h + \Delta z$
2	$-h + 2\Delta z$
\vdots	\vdots
l	$-h + l\Delta z$
\vdots	\vdots
$N - 3$	$\zeta - 2\Delta z$
$N - 2$	$\zeta - \Delta z$
$N - 1$	ζ

3.17.1 Integração vertical discreta

De modo a se resolver o perfil proposto, é necessário, conforme mencionado, integrá-lo verticalmente. Assim, integrais contínuas serão substituídas por integrais discretas.

Integrais definidas do fundo a uma profundidade genérica, isto é, de $-h$ a z no domínio contínuo,

$$F(x, y, z, t) = \int_{-h}^z f(x, y, z', t) dz' \quad , \quad (3.66)$$

serão substituídas por integrais definidas de 0 a k no domínio discreto:

$$\mathcal{I}^F(f_k(x, y, t)) \equiv$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{se } k = 0 \\ \Delta z \left(\frac{5}{12}f_0 + \frac{2}{3}f_1 - \frac{1}{12}f_2 \right) & \text{se } k = 1 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_0 + \frac{29}{24}f_1 + \frac{11}{24}f_2 - \frac{1}{24}f_3 \right) & \text{se } k = 2 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_0 + \frac{7}{6}f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 - \frac{1}{24}f_4 \right) & \text{se } k = 3 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_0 + \frac{7}{6}f_1 + \frac{23}{24}f_2 + \frac{25}{24}f_3 + \frac{1}{2}f_4 - \frac{1}{24}f_5 \right) & \text{se } k = 4 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_0 + \frac{7}{6}f_1 + \frac{23}{24}f_2 + \sum_{l=3}^{k-2} f_l + \frac{25}{24}f_{k-1} + \frac{1}{2}f_k - \frac{1}{24}f_{k+1} \right) & \text{se } 5 \leq k \leq N - 2 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_0 + \frac{7}{6}f_1 + \frac{23}{24}f_2 + \sum_{l=3}^{N-4} f_l + \frac{23}{24}f_{N-3} + \frac{7}{6}f_{N-2} + \frac{3}{8}f_{N-1} \right) & \text{se } k = N - 1 \end{array} \right. \quad (3.67)$$

Integrais definidas de uma profundidade genérica à superfície, isto é, de z a ζ no domínio contínuo,

$$F(x, y, z, t) = \int_z^\zeta f(x, y, z', t) dz' \quad , \quad (3.68)$$

serão substituídas por integrais definidas de k a $N - 1$ no domínio discreto:

$$\mathcal{I}^S(f_k(x, y, t)) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } k = N - 1 \\ \Delta z \left(\frac{5}{12}f_{N-1} + \frac{2}{3}f_{N-2} - \frac{1}{12}f_{N-3} \right) & \text{se } k = N - 2 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_{N-1} + \frac{29}{24}f_{N-2} + \frac{11}{24}f_{N-3} - \frac{1}{24}f_{N-4} \right) & \text{se } k = N - 3 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_{N-1} + \frac{7}{6}f_{N-2} + f_{N-3} + \frac{1}{2}f_{N-4} - \frac{1}{24}f_{N-5} \right) & \text{se } k = N - 4 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_{N-1} + \frac{7}{6}f_{N-2} + \frac{23}{24}f_{N-3} + \frac{25}{24}f_{N-4} + \frac{1}{2}f_{N-5} - \frac{1}{24}f_{N-6} \right) & \text{se } k = N - 5 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_{N-1} + \frac{7}{6}f_{N-2} + \frac{23}{24}f_{N-3} + \sum_{l=k+2}^{N-4} f_l + \frac{25}{24}f_{k+1} + \frac{1}{2}f_k - \frac{1}{24}f_{k-1} \right) & \text{se } 1 \leq k \leq N - 6 \\ \Delta z \left(\frac{3}{8}f_{N-1} + \frac{7}{6}f_{N-2} + \frac{23}{24}f_{N-3} + \sum_{l=3}^{N-4} f_l + \frac{23}{24}f_2 + \frac{7}{6}f_1 + \frac{3}{8}f_0 \right) & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

Integrais definidas do fundo à superfície, isto é, de $-h$ a ζ no domínio contínuo,

$$\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= \int_{-h}^{\zeta} f(x, y, z, t) dz \\ &= \int_{-h}^z f(x, y, z', t) dz' + \int_z^{\zeta} f(x, y, z', t) dz' \end{aligned} \quad , \quad (3.70)$$

serão substituídas por integrais definidas de 0 a $N - 1$ no domínio discreto:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f_k(x, y, t)) &\equiv \Delta z \left(\frac{3}{8}f_0 + \frac{7}{6}f_1 + \frac{23}{24}f_2 + \sum_{l=3}^{N-4} f_l + \frac{23}{24}f_{N-3} + \frac{7}{6}f_{N-2} + \frac{3}{8}f_{N-1} \right) \\ &= \mathcal{I}^F(f_k(x, y, t)) + \mathcal{I}^S(f_k(x, y, t)) \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.18 Relação de grandezas com dimensão vertical discretizada

A Seção A.9 apresenta uma lista de grandezas já apresentadas neste trabalho, porém com dimensão vertical discretizada.

3.19 Termos da equação de conservação de *momentum* (Ψ_i^0)

Os termos referentes à variável Ψ_i^0 (Equação 3.4), apesar de terem sido deduzidos analiticamente através do perfil preliminar (u_i^0), devem ser escritos com dimensão vertical discreta de modo que possam ser verticalmente integrados de acordo com a equação que define o perfil ajustado (Equações A.16, 3.17 e 3.19, todas idênticas).

Assim, **versão discreta da variável Ψ_i^0** (definida continuamente na Equação 3.4) é dada por:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{ik}^0(x, y, t) &\equiv \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial t} + u_k^0 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x} + v_k^0 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial y} + w_k^0 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial z} - a_{ik}^0 \\
 &\quad + g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{g}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_i} (\zeta - z_k) \\
 &= \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x_4} + u_{1k}^0 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x_1} + u_{2k}^0 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x_2} + w_k^0 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x_3} - a_{ik}^0 \\
 &\quad + g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{g}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_i} (H - k \Delta z)
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Esta seção destina-se a expor a versão discreta das variáveis que compõem a variável Ψ_i^0 .

3.19.1 Aceleração local

Conforme a Equação A.41 e o esquema de discretização da dimensão vertical descrito na Seção 3.17, a **equação da aceleração local com dimensão vertical discreta** é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x_4} &= A_i P_4 + B_i R_4 \\
 &\quad + \frac{\partial A_i}{\partial x_4} Z_k^{FF} + \frac{\partial B_i}{\partial x_4} Z_k^{SF} + A_i Q_4 Z_k^F + B_i S_4 Z_k^S
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

3.19.2 Aceleração advectiva em x

Conforme as Equações A.39 e A.41 e o esquema de discretizaçã da dimensão vertical descrito na Seção 3.17, a **equação da aceleração advectiva em x com dimensão vertical discreta** é dada por:

$$u_{1k}^0 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x_1} = \left(A_1 Z_k^{FF} + B_1 Z_k^{SF} \right) \left(A_i P_1 + B_i R_1 + \frac{\partial A_i}{\partial x_1} Z_k^{FF} + \frac{\partial B_i}{\partial x_1} Z_k^{SF} + A_i Q_1 Z_k^F + B_i S_1 Z_k^S \right) \quad (3.74)$$

3.19.3 Aceleração advectiva em y

Conforme as Equações A.39 e A.41 e o esquema de discretizaçã da dimensão vertical descrito na Seção 3.17, a **equação da aceleração advectiva em y com dimensão vertical discreta** é dada por:

$$u_{2k}^0 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x_2} = \left(A_2 Z_k^{FF} + B_2 Z_k^{SF} \right) \left(A_i P_2 + B_i R_2 + \frac{\partial A_i}{\partial x_2} Z_k^{FF} + \frac{\partial B_i}{\partial x_2} Z_k^{SF} + A_i Q_2 Z_k^F + B_i S_2 Z_k^S \right) \quad (3.75)$$

3.19.4 Aceleração advectiva em z

Conforme as Equações A.41, A.27 e A.45 e o esquema de discretizaçã da dimensão vertical descrito na Seção 3.17, a **equação da aceleração advectiva em z com dimensão vertical discreta** é dada por:

$$w_k^0 \frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x_3} = w_k^0 (A_i Z_k^F - B_i Z_k^S) \quad (3.76)$$

3.19.5 Aceleração de Coriolis

Conforme a Equação A.39 e o esquema de discretizaçã da dimensão vertical descrito na Seção 3.17, a **equação da aceleração de Coriolis com dimensão vertical discreta** é dada por:

$$\begin{aligned}
a_{ik}^0(x, y, t) &\equiv \begin{cases} 2\Omega \sin(\theta) u_{2k}^0 & \text{se } i \equiv 1 \\ -2\Omega \sin(\theta) u_{1k}^0 & \text{se } i \equiv 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\Omega \sin(\theta) (A_2 Z_k^{FF} + B_2 Z_k^{SF}) & \text{se } i \equiv 1 \\ -2\Omega \sin(\theta) (A_1 Z_k^{FF} + B_1 Z_k^{SF}) & \text{se } i \equiv 2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

3.19.6 Aceleração pelo gradiente de pressão barotrópica

A equação da aceleração pelo gradiente de pressão barotrópica é trivial, sem variação vertical, e dada pela expressão:

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \tag{3.78}$$

3.19.7 Aceleração pelo gradiente de pressão baroclínica

Conforme o esquema de discretização da dimensão vertical descrito na Seção 3.17, a equação da aceleração pelo gradiente de pressão baroclínica com dimensão vertical discreta é dada por:

$$\frac{g}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_i} (\zeta - z_k) = \frac{g}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_i} (H - k \Delta z) \tag{3.79}$$

Capítulo 4

Simulações computacionais

Em termos de resultados comparados a experimentos, este trabalho comparou os resultados do perfil preliminar com os resultados obtidos por YU (1987).

Em termos de modelagem numérica, este trabalho propõe um total de três cenários de simulação numérica através dos módulos 2DH e 3D do SisBaHiA[®]:

1. Módulo 2DH: Canal retilíneo com talude – escoamento descendo o talude;
2. Módulo 2DH: Canal retilíneo com talude – escoamento subindo o talude; e
3. Módulo 3D: Canal curvilíneo de fundo horizontal.

4.1 Resultados experimentais

As figuras 4.1 e 4.2 ilustram a comparação entre o perfil preliminar, proposto por este trabalho, e resultados encontrados no experimento de YU (1987). Os parâmetros utilizados para a definição dos perfis se encontram no cabeçalho de cada figura.

4.2 Canal retilíneo com talude

Este cenário consiste em uma simulação numérica através do módulo 2DH do SisBaHiA[®]. Trata-se de um canal hipotético, retilíneo e simétrico em x e em y . Seu comprimento total é de 9600 m e sua largura, de 300 m. Ele possui um talude de inclinação 1:100 ao meio (6 m verticais \div 600 m horizontais). De um lado desse talude, há uma extensão de 4000 m com cota batimétrica igual a 2 m (isto é, $h = 2$ m); do outro, há uma extensão de 4000 m com cota batimétrica igual a 8 m (isto é, $h = 8$ m).

Dois cenários de simulação foram considerados: um para o escoamento *descendo* o talude (indo para o sentido de crescimento dos eixos x e y) e outro para o escoamento *subindo* o talude (indo para o sentido de decrescimento dos eixos x e y). Em

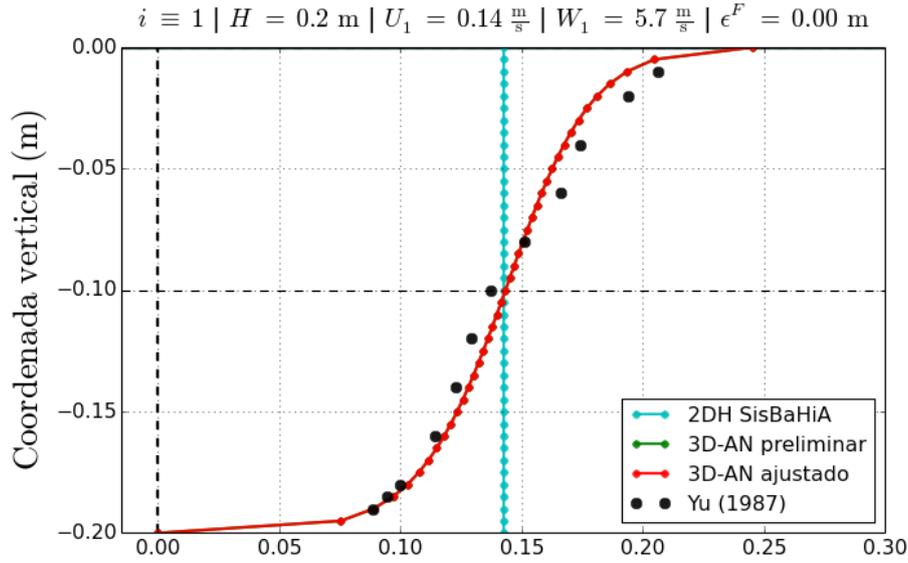


Figura 4.1: Comparação entre o perfil preliminar e os resultados do experimento de YU (1987). Caso para **vento a favor** do escoamento.

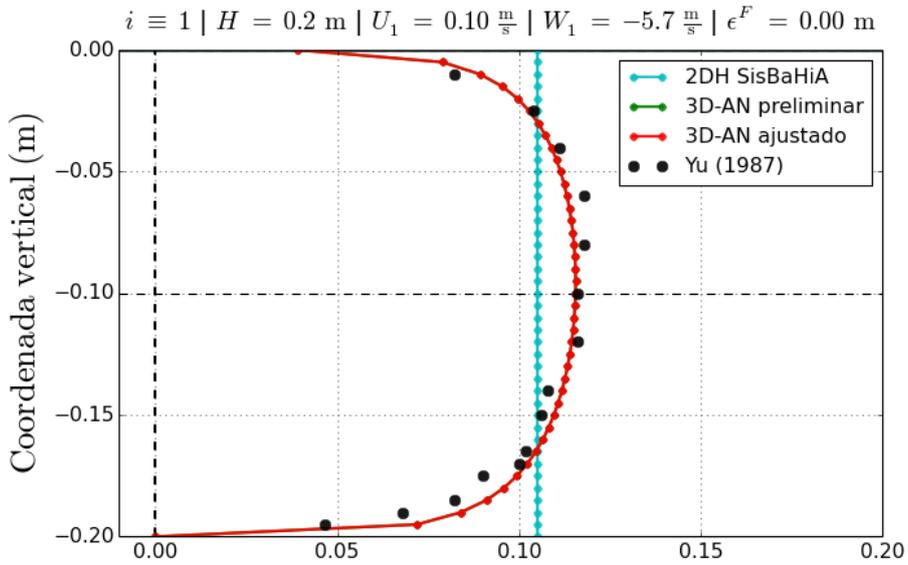


Figura 4.2: Comparação entre o perfil preliminar e os resultados do experimento de YU (1987). Caso para **vento contra** o escoamento.

ambos, as seguintes variáveis foram consideradas constantes: densidade do fluido ($\hat{\rho} = 1025 \text{ kg m}^{-3}$), rugosidade equivalente do fundo ($\varepsilon^F = 0,08 \text{ m}$) e rugosidade equivalente da superfície ($\varepsilon^S = 0,03 \text{ m}$). A rotação da Terra foi considerada nula. Todos os perfis foram estimados no mesmo instante de tempo e após o escoamento ter atingido condições estacionárias.

Este cenário avalia a sensibilidade do perfil ajustado (u_i), proposto por este trabalho, a variações *horizontais* e *verticais* no escoamento, às quais o perfil preliminar (u_i^0) é insensível. Tais variações horizontais se dão na forma de fortes não-linearidades nas direções longitudinal ao canal e vertical. Dessa forma, o que está

sendo avaliado é a capacidade do perfil ajustado (u_i) de bem representar acelerações advectivas não-lineares nas direções longitudinal ao canal e vertical (x , y e z , sendo x e y simétricos entre si). A Equação 4.1 apresenta tais termos na equação de Navier-Stokes.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_i^0}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial u_i}{\partial x}}_{\text{Termo em avaliação}} + \underbrace{v \frac{\partial u_i}{\partial y}}_{\text{Termo em avaliação}} + \underbrace{w \frac{\partial u_i}{\partial z}}_{\text{Termo em avaliação}} = \\
 & - \underbrace{g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}}_{\text{Termo sempre relevante}} - \underbrace{\frac{g}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_i}}_{\text{Termo sempre relevante}} (\zeta - z) + \alpha_i^0 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(v_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)}_{\text{Termo sempre relevante}}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

A Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mostram, respectivamente, a cota batimétrica, a malha de cálculo e uma tabela de atributos da modelagem, todos referentes a este canal retilíneo e extraídas do SisBaHiA[®].

4.3 Canal curvilíneo de fundo horizontal

Este cenário consiste em uma simulação numérica através do módulo 3D do SisBaHiA[®]. Trata-se de um canal hipotético e curvilíneo. Seu comprimento total é de aproximadamente 1860 m e sua largura varia de aproximadamente 50 m (porção mais larga) a aproximadamente 40 m (porção mais estreita). Seu fundo é plano e com cota batimétrica constante igual a 2 m (isto é, $h = 2$ m) ao longo de toda a sua extensão.

Esta simulação admite um escoamento que flui predominantemente para o sentido de decrescimento do eixo x (isto é, para oeste, caso o eixo y apontasse para norte), passando por duas regiões de curvaturas opostas. As seguintes variáveis foram consideradas constantes: densidade do fluido ($\hat{\rho} = 1025 \text{ kg m}^{-3}$), rugosidade equivalente do fundo ($\varepsilon^F = 0,02 \text{ m}$) e rugosidade equivalente da superfície ($\varepsilon^S = 0,03 \text{ m}$). A rotação da Terra foi considerada nula. Todos os perfis foram estimados no mesmo instante de tempo e após o escoamento ter atingido condições permanentes.

Este cenário avalia a sensibilidade do perfil ajustado (u_i), proposto por este trabalho, a variações *horizontais* no escoamento, às quais o perfil preliminar (u_i^0) é insensível. Tais variações horizontais se dão na forma de fortes não-linearidades nas direções x e y . Dessa forma, o que está sendo avaliado é a capacidade do perfil ajustado (u_i) de bem representar acelerações advectivas não-lineares nas direções x e y (sendo x e y assimétricos). Tais acelerações, em canais curvados como o simulado, geram um *escoamento secundário helicoidal*, observado, por exemplo, em curvas de

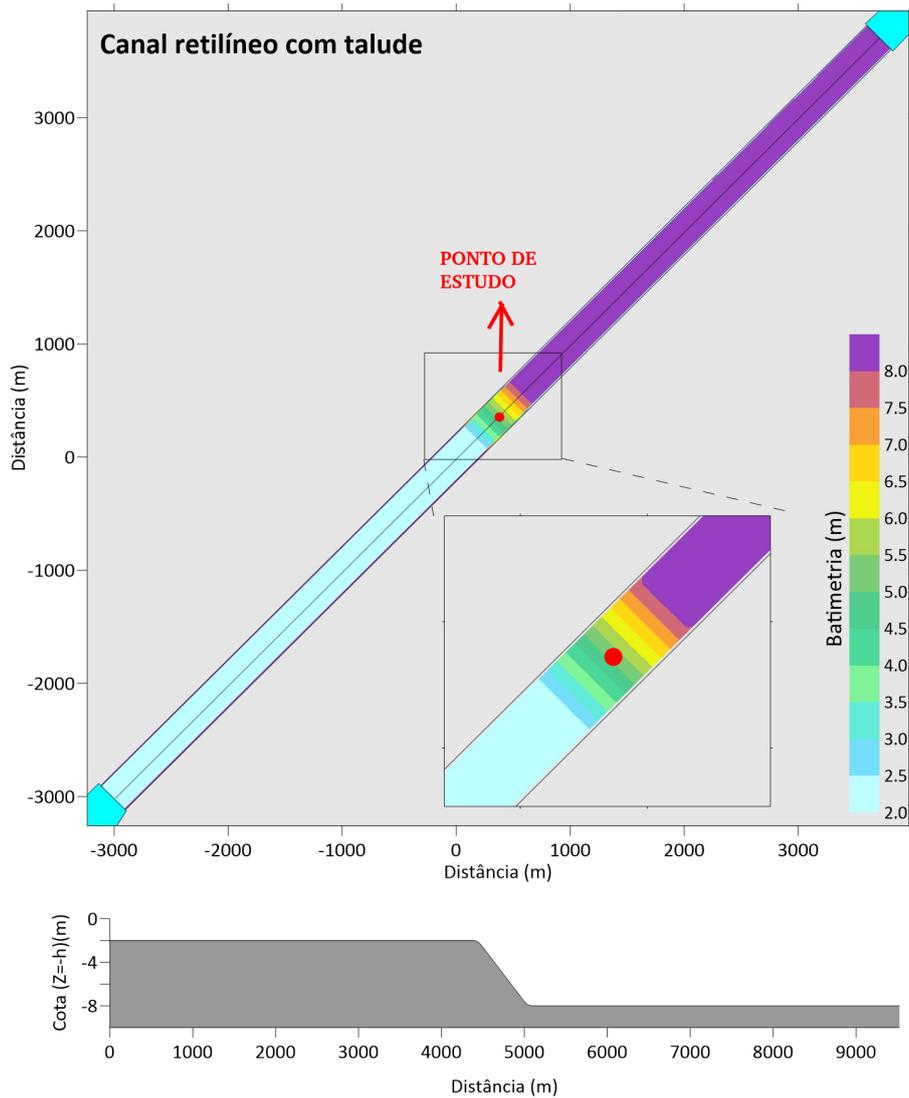


Figura 4.3: **Cota batimétrica do canal retilíneo com talude.** Trata-se de um canal hipotético, retilíneo e simétrico em x e em y . Seu comprimento total é de 9600 m e sua largura, de 300 m. Ele possui um talude de inclinação 1:100 ao meio (6 m verticais \div 600 m horizontais). De um lado desse talude, há uma extensão de 4000 m com cota batimétrica igual a 2 m (isto é, $h = 2$ m); do outro, há uma extensão de 4000 m com cota batimétrica igual a 8 m (isto é, $h = 8$ m). O *zoom* na imagem se refere à porção da malha referente ao talude.

rios. A Equação 4.2 apresenta tais termos na equação de Navier-Stokes.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial y_i}{\partial t} + \overbrace{u \frac{\partial u_i}{\partial x}}^{\text{Termo em avaliação}} + \overbrace{v \frac{\partial u_i}{\partial y}}^{\text{Termo em avaliação}} + \cancel{w \frac{\partial u_i}{\partial z}}^{\approx 0} = \\
 & - \underbrace{g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}}_{\text{Termo sempre relevante}} - \cancel{\frac{g}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_i} (\zeta - z)}^{\approx 0} + \cancel{\alpha_i}^{\approx 0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(v_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)}_{\text{Termo sempre relevante}}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

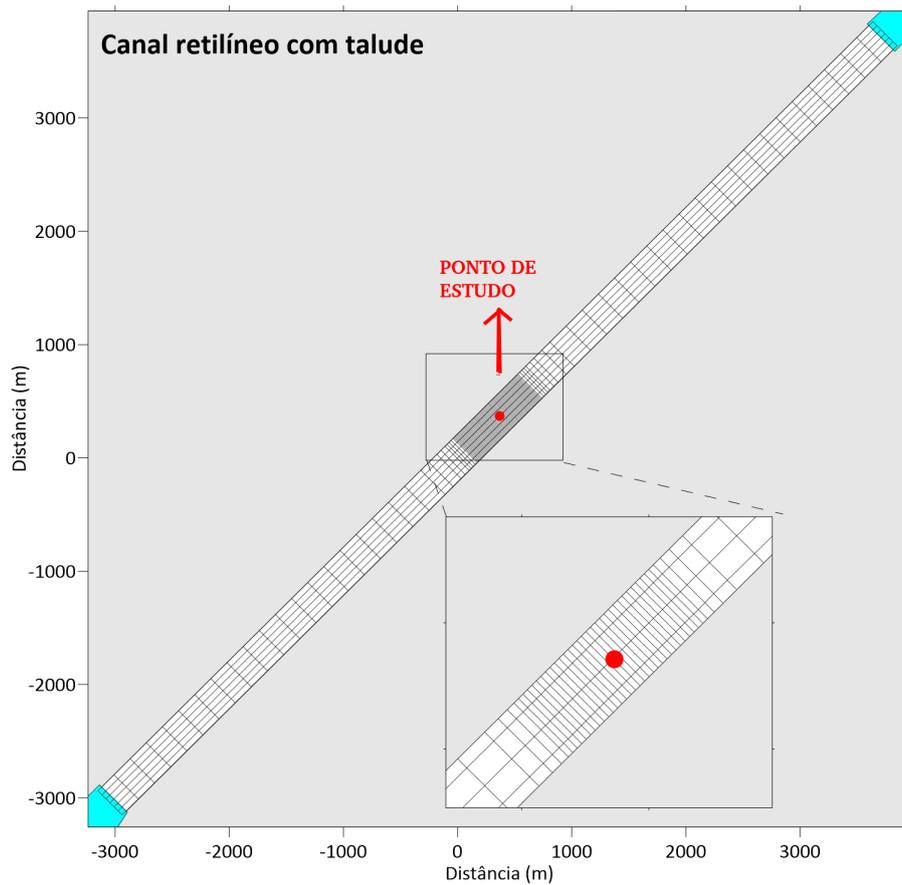


Figura 4.4: **Malha de cálculo do canal retilíneo com talude.** As linhas grossas delimitam os elementos de cálculo, todos quadrangulares. As interseções entre as linhas grossas e as linhas finas representam os nós de cálculo do modelo. As regiões mais detalhadas, relativas ao talude, apresentam uma distância de 12,50 m entre os nós de cálculo longitudinais ao canal e de 50 m entre os nós de cálculo transversais ao canal. As regiões menos detalhadas, de fundo horizontal, apresentam uma distância de 200 m entre os nós de cálculo longitudinais ao canal e de 50 m entre os nós de cálculo transversais ao canal. O *zoom* na imagem se refere à porção da malha referente ao talude.

A Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 mostram, respectivamente, a cota batimétrica, a malha de cálculo e uma tabela de atributos da modelagem, todos referentes a este canal curvilíneo e extraídas do SisBaHiA[®].

Elementos Totais:	180
Quadrangulares	72
Triangulares	0
Nós Totais:	847
Internos	595
Contorno Terra	247
Contorno Aberto	7
Terra/Aberto	2
Banda Máxima:	16
Domínio Discretizado:	
Área da Malha =	2878732.646 m ²
Área no NA Médio =	2878732.646 m ²
Volume de Água =	14393312.512 m ³
Prof. Média =	5.000 m

Figura 4.5: Tabela de atributos da modelagem do canal retilíneo com talude, extraídas do SisBaHiA[®].

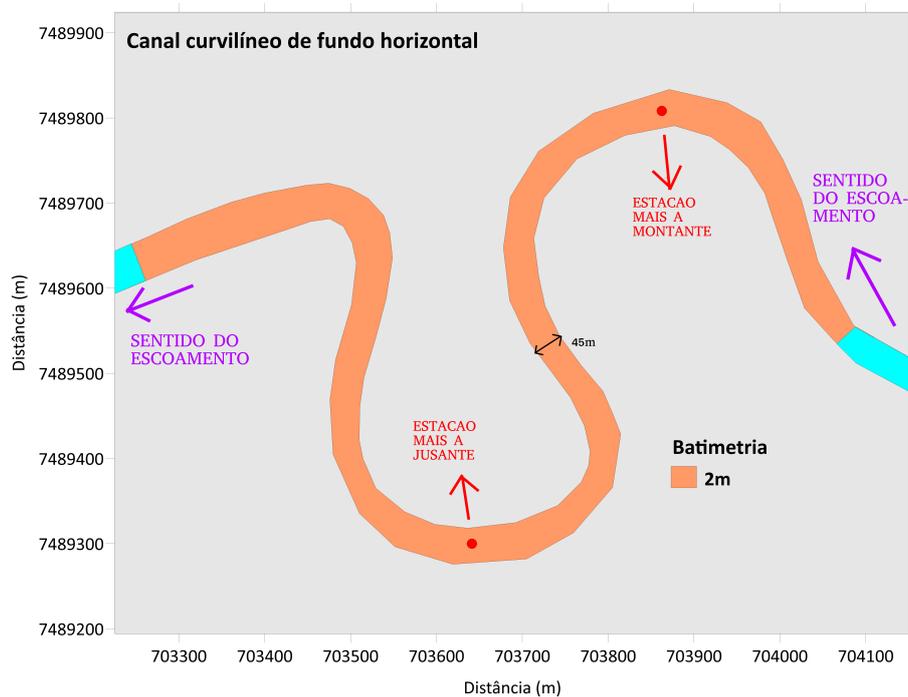


Figura 4.6: Cota batimétrica do canal curvilíneo de fundo horizontal. Trata-se de um canal hipotético e curvilíneo. Seu comprimento total é de aproximadamente 1860 m e sua largura varia de aproximadamente 50 m (porção mais larga) a aproximadamente 40 m (porção mais estreita). Seu fundo é plano e com cota batimétrica constante igual a 2 m (isto é, $h = 2$ m) ao longo de toda a sua extensão.

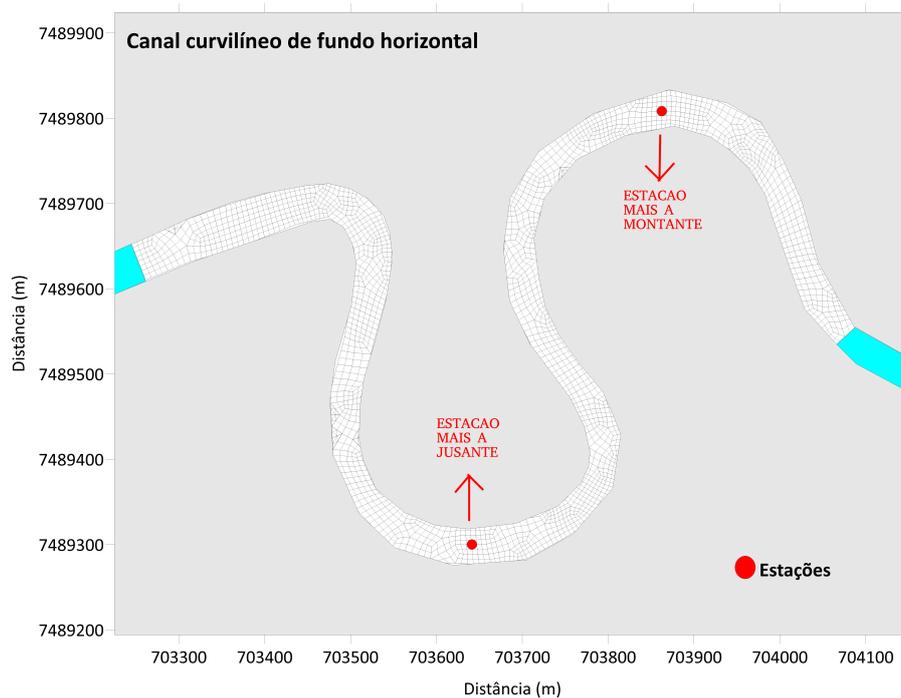


Figura 4.7: **Malha de cálculo do canal curvilíneo de fundo horizontal.** As linhas grossas delimitam os elementos de cálculo, quadrangulares e triangulares. As interseções entre as linhas grossas e as linhas finas representam os nós de cálculo do modelo. A distância média aproximada entre os nós de cálculo da malha varia entre 3 m e 7 m.

Elementos Totais:	517
Quadrangulares	507
Triangulares	10
Nós Totais:	2347
Internos	1751
Contorno Terra	589
Contorno Aberto	9
Terra/Aberto	2
Banda Máxima:	38
Domínio Discretizado:	
Área da Malha =	76152.604 m ²
Área no NA Médio =	76152.604 m ²
Volume de Água =	152305.207 m ³
Prof. Média =	2.000 m

Figura 4.8: **Tabela de atributos da modelagem do canal curvilíneo de fundo horizontal,** extraídas do SisBaHiA[®].

Capítulo 5

Resultados e discussão

Este capítulo se destina a apresentar os resultados das simulações computacionais descritas no Capítulo 4.

A transferência de resultados entre o módulo 2DH do SisBaHiA[®] e o módulo 3D-AN proposto por este trabalho foi conduzida, para cada ponto de interesse da malha de cálculo, de acordo com os seguintes passos:

1. Aquisição dos resultados 2DH dos nós de cálculo de interesse através da interface gráfica do SisBaHiA[®], sendo tais nós compostos por um conjunto de cinco estações de gravação de resultados:
 - uma central no ponto (x_0, y_0) ;
 - uma adjacente no ponto $(x_0 + \Delta x, y_0)$;
 - uma adjacente no ponto $(x_0 - \Delta x, y_0)$;
 - uma adjacente no ponto $(x_0, y_0 + \Delta y)$; e
 - uma adjacente no ponto $(x_0, y_0 - \Delta y)$.
2. Cálculo das derivadas horizontais dos parâmetros 2DH através do método de diferenças finitas aplicadas em elementos quadrangulares retangulares.
3. Introdução de tais resultados em um algoritmo de solução do modelo analítico-numérico proposto por este trabalho, escrito na linguagem de programação *Python*.
4. Execução deste algoritmo e consequente obtenção dos perfis desejados.

5.1 Canal retilíneo com talude

A simulação numérica referente ao canal retilíneo é um mero ensaio teórico analítico a respeito da contribuição das forçantes não-lineares a um escoamento estacionário

que trafega por regiões com gradientes batimétricos. As Seções 5.1.1 e 5.1.2 apresentam os resultados das simulações numéricas (2DH) e analítico-numéricas (3D-AN) respectivamente para os cenários do escoamento descendo o talude e do escoamento subindo o talude do canal retilíneo. Tratam-se de **duas** simulações numéricas distintas em situações de escoamento permanente, uma para cada sentido de escoamento. Os princípios físicos de cada cenário são opostos e análogos. Dessa forma, seus textos foram escritos de forma conjunta, um à semelhança do outro, de modo que ambos possam ser completos e independentes um do outro. Neste sentido, suas expressões e palavras-chave se encontram em negrito, de modo a facilitar uma leitura dinâmica.

5.1.1 Escoamento descendo o talude

A Figura 5.1 apresenta a vista em planta da **elevação da superfície** em estado estacionário. Observa-se uma elevação de superfície mais alta à montante e mais baixa à jusante, o que induz a força de gradiente de pressão barotrópica que é a força-motriz do escoamento. Observa-se também uma **abrupta redução** da elevação na região do talude. Na região de fundo horizontal à montante (onde é mais **raso**), a elevação apresentou **baixos gradientes longitudinais**; na região de fundo horizontal à jusante (onde é mais **profundo**), a elevação apresentou **baixos gradientes longitudinais**.

A Figura 5.2 apresenta a vista em planta da **velocidade promediada na coluna d'água (2DH)** em estado estacionário. Observa-se, por uma questão de manutenção de vazão, uma velocidade promediada mais **alta** à montante (onde é mais **raso**) e mais **baixa** à jusante (onde é mais **profundo**). Observa-se também uma **abrupta redução** da velocidade na região do talude. Na região de fundo horizontal à montante (onde é mais **raso**), a velocidade apresentou **baixos gradientes longitudinais**; na região de fundo horizontal à jusante (onde é mais **profundo**), a velocidade apresentou **baixos gradientes longitudinais**.

A Figura 5.3 apresenta os **perfis de velocidade horizontal** em estado estacionário para a região central do talude. A figura apresenta dois gráficos, um para o escoamento na direção x (acima) e outro para o escoamento na direção y (abaixo). Ambos são **positivos** e eles são iguais. O fato de ambos serem **positivos** se deve à orientação da rampa, conforme descrito na Seção 4.2. O fato deles serem iguais se deve ao fato de que o canal retilíneo é simétrico ao longo da linha $x = y$. Assim, o escoamento observado em uma direção acaba por ser o mesmo observado na outra direção.

A legenda da figura apresenta quatro perfis distintos: a velocidade média do escoamento, o perfil 3D-AN do SisBaHiA[®], o perfil preliminar e o perfil ajustado – estes dois últimos, propostos por este trabalho. Contudo, aparentemente, o gráfico

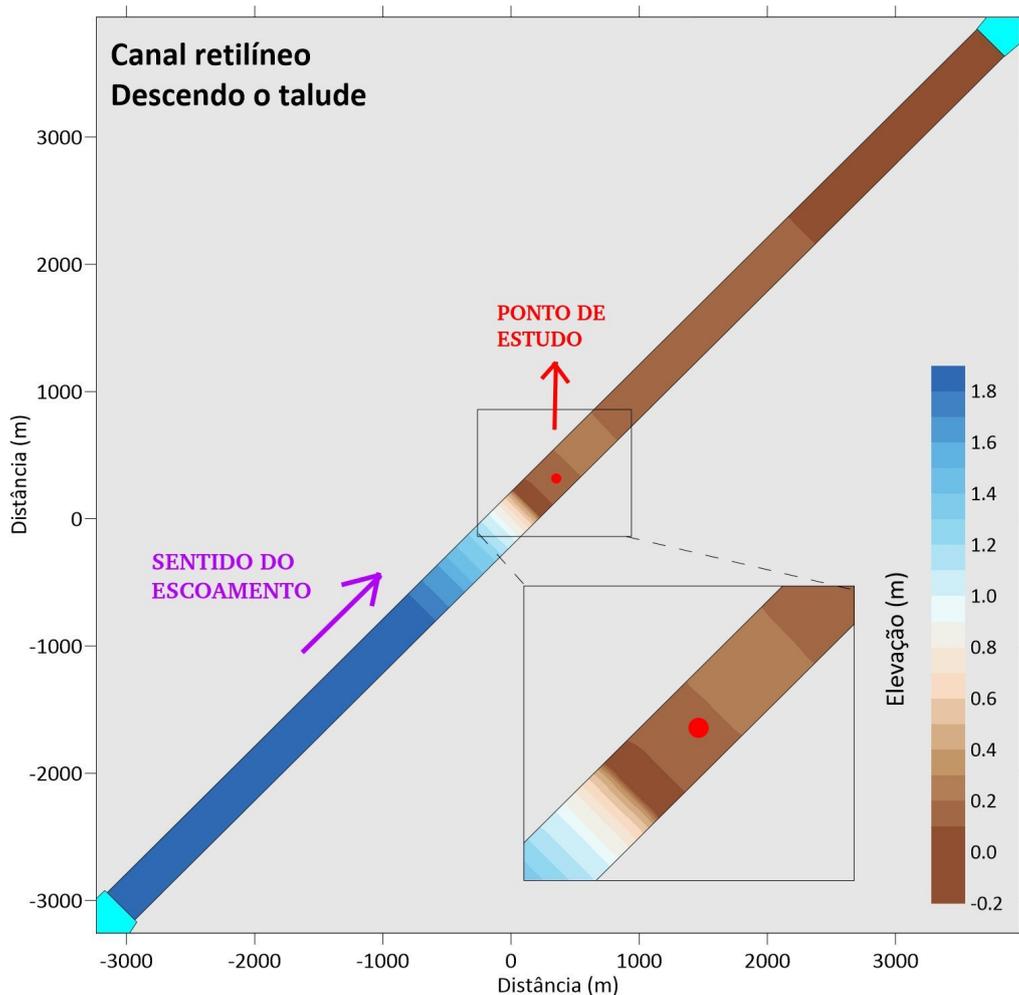


Figura 5.1: Vista em planta da **elevação da superfície em estado estacionário** referente ao **canal retilíneo com talude** para o cenário do **escoamento descendo o talude** (isto é, **para nordeste** caso o eixo y apontasse para norte). O **zoom** na imagem se refere à porção da malha referente ao talude.

aparenta conter apenas três perfis. Isto ocorre porque, para este caso, a diferença entre o perfil 3D-AN do SisBaHiA[®] e o perfil preliminar é desprezível. Assim, há praticamente três perfis restantes a serem analisados.

O perfil referente à velocidade média, extraído da simulação 2DH do SisBaHiA[®], é, obviamente, invariante na vertical. É a magnitude desta velocidade que regula a velocidade média dos outros perfis. Os outros perfis – o preliminar e o ajustado –, são nitidamente diferentes. Pelas deduções matemáticas do Capítulo 3, temos que o perfil preliminar é incapaz de representar o efeito de qualquer não-linearidade, ao passo que o perfil ajustado, por sua vez, as representa, supostamente estando mais próximo da realidade.

Nesta figura (Figura 5.3), o perfil ajustado, em relação ao perfil preliminar, se apresenta **menos veloz perto do fundo e mais veloz em superfície e sub-superfície**. O perfil ajustado, então, nesta situação, acaba por sofrer uma tensão

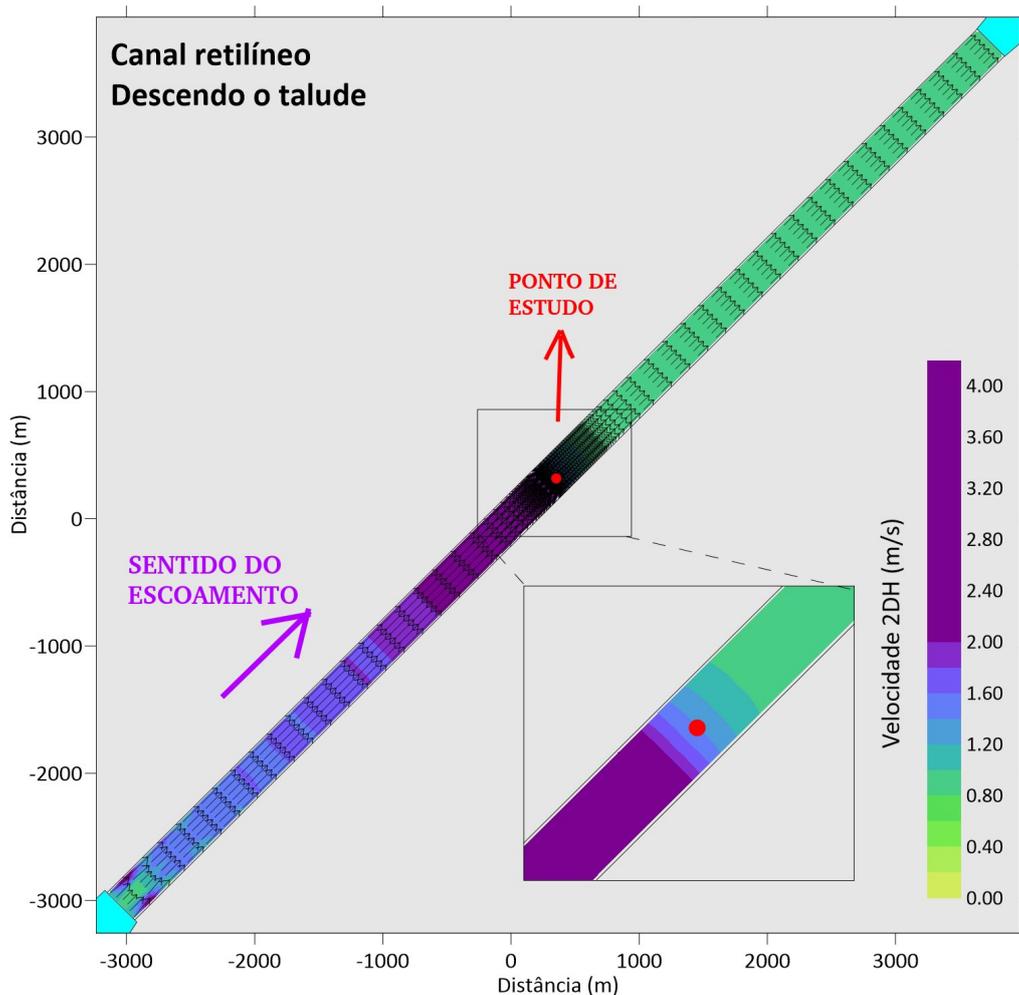


Figura 5.2: Vista em planta da **velocidade promediada na coluna d'água (2DH) em estado estacionário** referente ao **canal retilíneo com talude** para o cenário do **escoamento descendo o talude** (isto é, para nordeste caso o eixo y apontasse para norte). O *zoom* na imagem se refere à porção da malha referente ao talude, que apresenta somente as magnitudes dos vetores.

junto ao fundo **menos intensa** devido à presença do leito no fundo.

A Figura 5.4, por sua vez, apresenta a **componente vertical de velocidade** referente à mesma simulação – simulação numérica referente ao **canal retilíneo com talude** para o cenário do **escoamento descendo o talude**.

Observa-se que a velocidade vertical é **negativa** ao longo de toda a coluna d'água. Isto é coerente com o fato do escoamento estar **descendo o talude**. Como

1. o gradiente longitudinal da cota batimétrica é muito maior que o da elevação da superfície,
2. o escoamento está **descendo o talude** e
3. o fluido é incompressível,

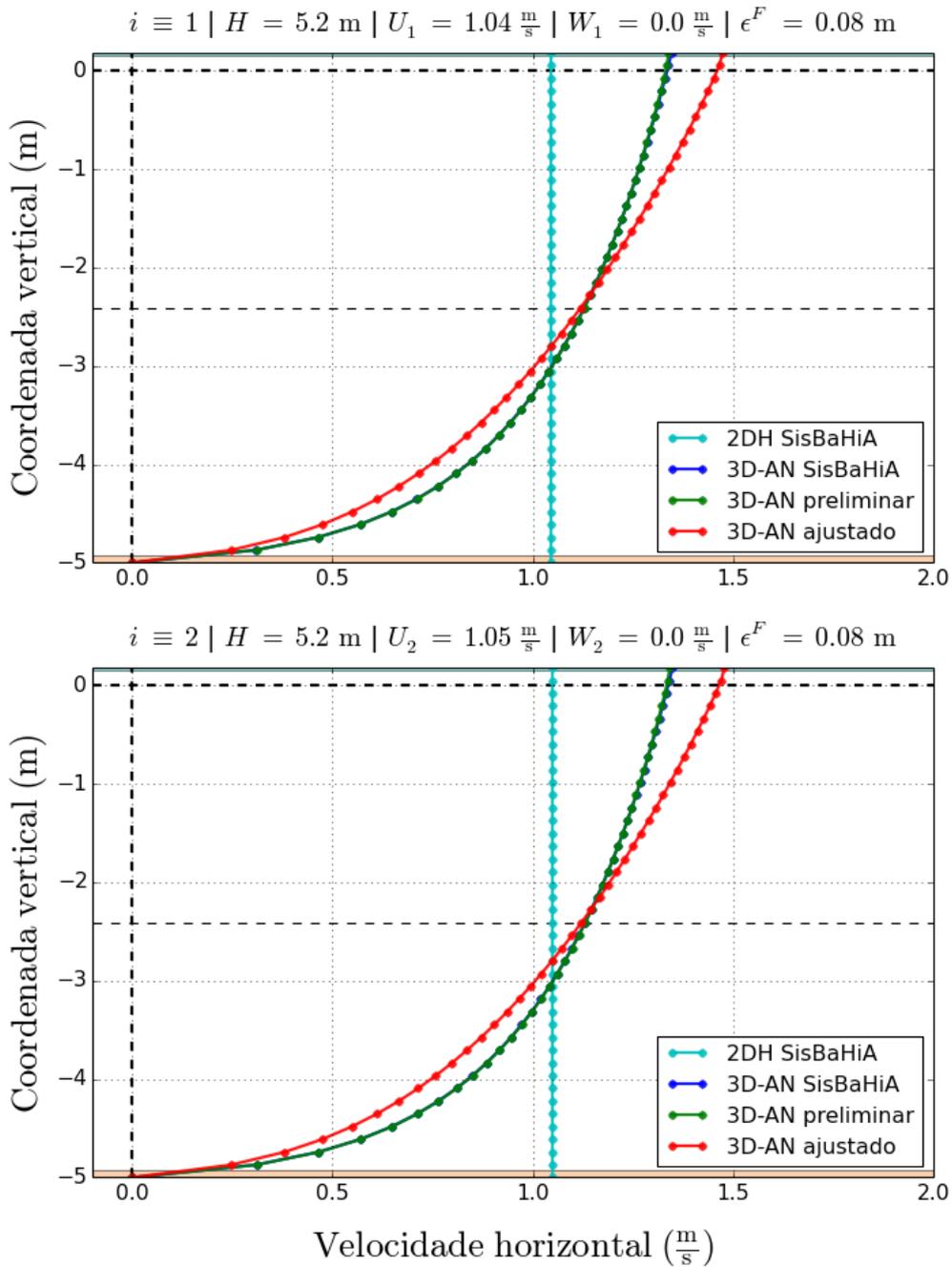


Figura 5.3: Componentes x ($i \equiv 1$, acima) e y ($i \equiv 2$, abaixo) da **velocidade média** e dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®]** (**linear**), **preliminar** (**linear**) e **ajustado** (**não-linear**). Perfis resultantes da simulação numérica do **canal retilíneo com talude** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Situação para o escoamento **descendo o talude**. A curva azul pouco aparece porque a diferença entre ela e a curva verde é, para este caso, desprezível.

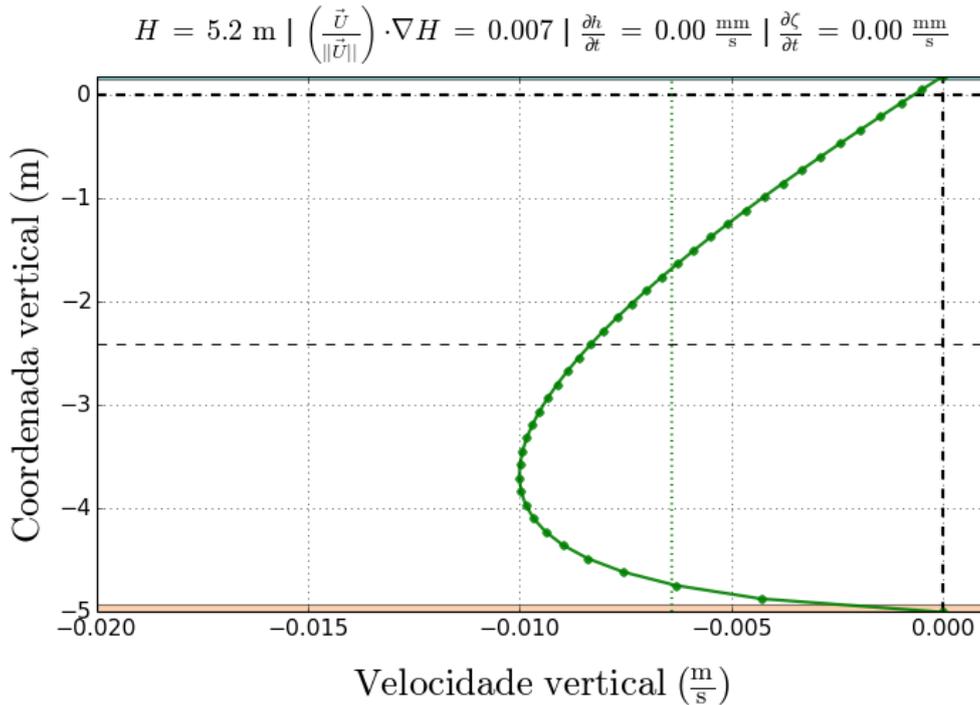


Figura 5.4: **Componente vertical de velocidade**, w^0 , obtida através da equação da continuidade para escoamentos incompressíveis imposta às variáveis $u_1^0 \equiv u^0$ e $u_2^0 \equiv v^0$. Perfil resultante da simulação numérica do **canal retilíneo com talude** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação do modelo matemático descrito no Capítulo 3 (Seção 3.12) desta dissertação com **41 níveis verticais**. Situação para o escoamento **descendo o talude**. Em analogia às outras figuras apresentadas, ao perfil de w^0 também foi atribuída a cor verde porque ele foi calculado a partir dos **perfis preliminares (lineares)** em x e em y . A reta pontilhada verde constante se refere à velocidade vertical média ao longo da coluna d'água.

a velocidade vertical obrigatoriamente deve ser **negativa (para baixo)**, a fim de preencher a coluna d'água, que, no referencial de uma partícula em movimento, está **aumentando**.

Observa-se também que sua magnitude máxima ocorre mais próxima ao fundo do que à superfície. Isto é coerente com o fato de que o gradiente batimétrico é o principal perturbado do escoamento: conforme o fundo varia e o escoamento por sobre ele escoar, velocidades verticais são induzidas por causa dessas variações. Assim, as parcelas de fluido mais próximas ao fundo acabam por ser as mais diretamente afetadas. Em outras palavras, uma parcela situada na superfície sofre menos influência dos gradientes batimétricos.

O **estiramento vertical** de uma parcela de fluido próxima ao fundo devido a gradientes batimétricos induz, por uma questão de manutenção de fluxo, uma **diminuição** local da magnitude da velocidade horizontal dessa partícula. Portanto, para esta partícula, tem-se que $u^0 = v^0 > 0$ em toda a coluna d'água e $\frac{\partial u_i^0}{\partial x} = \frac{\partial u_i^0}{\partial y} < 0$

na maior parte¹ da coluna d'água. Similarmente e pela análise das Figuras 5.3 e 5.4, temos que $w^0 < 0$ em toda a coluna d'água e $\frac{\partial u_i^0}{\partial z} > 0$ também em toda a coluna d'água.

Portanto, temos que $u^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x} = v^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial y} < 0$ na maior parte da coluna d'água e $w^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial z} < 0$ em toda a coluna d'água, o que configura uma **desaceleração advectiva** (porque u_i^0 e a soma dos três termos não-lineares possuem o **sinais opostos**: + e -).

Por fim, temos que o **perfil ajustado** referente ao cenário do **escoamento descendo o talude**, calculado a partir da metodologia proposta neste trabalho, apresentou:

- **desaceleração advectiva** em relação ao perfil preliminar $\left(u^0 = v^0 > 0 \quad \text{e} \quad u^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + v^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + w^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial z} < 0\right)$;
- velocidade média igual à modelada pelo modelo 2DH $\left(\int_{-h}^{\zeta} u_i \, dz = U_i\right)$;
- velocidade nula junto ao fundo $(u_i^F = 0)$;
- **menor tensão** junto ao fundo em relação ao perfil preliminar $(\tau_i^F < \tau_i^{0F})$;
- um escoamento **menos veloz próximo ao fundo** em relação ao perfil preliminar;
- um escoamento **mais veloz próximo à superfície** em relação ao perfil preliminar;
- uma velocidade superficial auto-ajustável de modo a sempre analiticamente satisfazer a CCDS, isto é, preservar a relação teórica entre o cisalhamento em superfície $\left(\left|\frac{\partial u_i^0}{\partial z}\right|_{z=\zeta}\right)$ e a tensão do vento em superfície (τ_i^S) .

5.1.2 Escoamento subindo o talude

A Figura 5.5 apresenta a vista em planta da **elevação da superfície** em estado estacionário. Observa-se uma elevação de superfície mais alta à montante e mais baixa à jusante, o que induz a força de gradiente de pressão barotrópica que é a força-motriz do escoamento. Observa-se também uma **suave redução** da elevação

¹ A exceção, neste caso, é uma camada próxima ao fundo de cerca de 1 m de espessura. Nesta camada, parcelas de fluido **pouco velozes** devido à fricção com o fundo **aceleram** ao escoar. Isto ocorre porque, nesta camada, a **aceleração** devido ao **distanciamento** do fundo (**menos atrito**) sobrepõe o efeito de **desaceleração** devido ao **espessamento** vertical da coluna d'água. O mesmo não ocorre no restante da coluna d'água. Ressalta-se, contudo, que esta dinâmica apenas se aplica aos termos $\frac{\partial u_i^0}{\partial x}$ e $\frac{\partial u_i^0}{\partial y}$. Ao considerarmos todas as contribuições não-lineares $\left(u^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + v^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + w^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial z}\right)$, temos que uma **desaceleração** se dá em todas as cotas da coluna d'água.

na região do talude. Na região de fundo horizontal à montante (onde é mais **profundo**), a elevação apresentou **baixos gradientes longitudinais**; na região de fundo horizontal à jusante (onde é mais **raso**), a elevação apresentou **suaves gradientes longitudinais**.

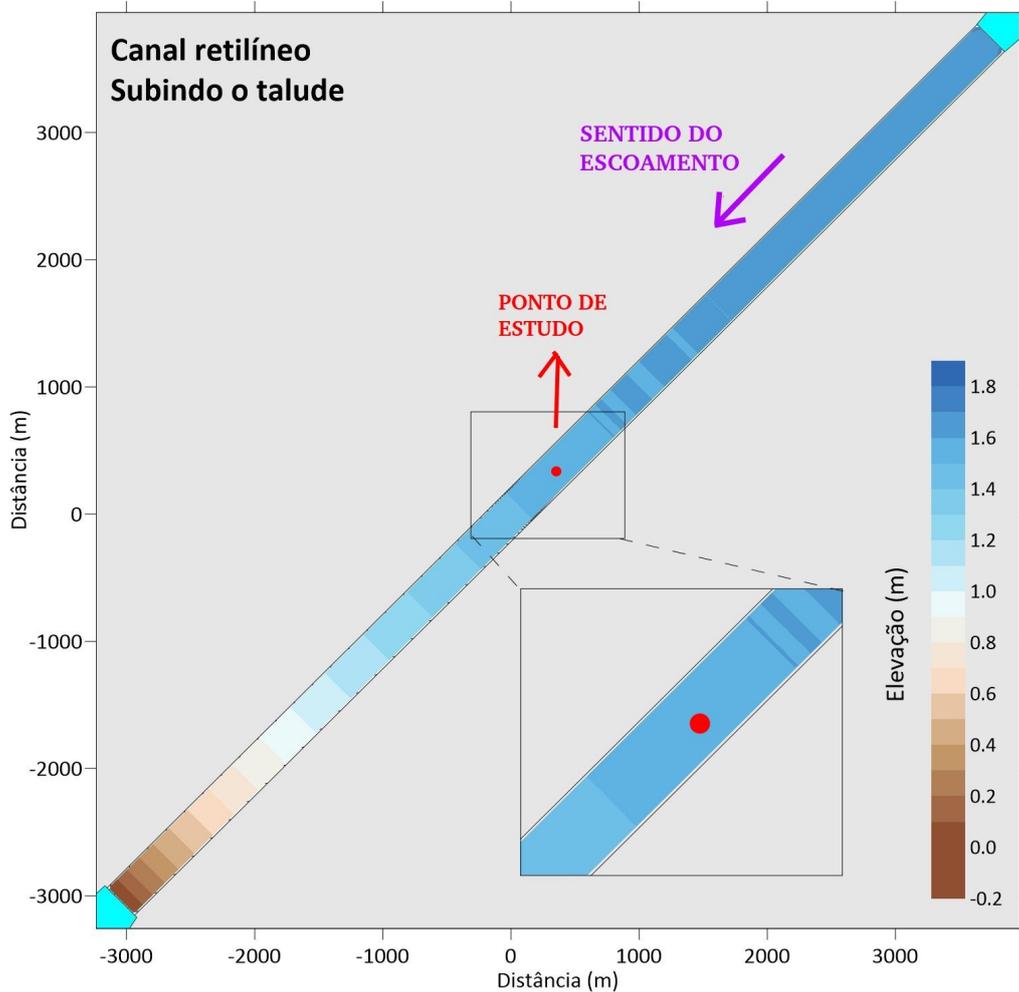


Figura 5.5: Vista em planta da **elevação da superfície em estado estacionário** referente ao **canal retilíneo com talude** para o cenário do **escoamento subindo o talude** (isto é, **para sudoeste** caso o eixo y apontasse para norte). O **zoom** na imagem se refere à porção da malha referente ao talude.

A Figura 5.6 apresenta a vista em planta da **velocidade promediada na coluna d'água (2DH)** em estado estacionário. Observa-se, por uma questão de manutenção de vazão, uma velocidade promediada mais **baixa** à montante (onde é mais **profundo**) e mais **alta** à jusante (onde é mais **raso**). Observa-se também um **abrupto aumento** da velocidade na região do talude. Na região de fundo horizontal à montante (onde é mais **profundo**), a velocidade apresentou **baixos gradientes longitudinais**; na região de fundo horizontal à jusante (onde é mais **raso**), a velocidade apresentou **suaves gradientes longitudinais**.

A Figura 5.7 apresenta os **perfis de velocidade horizontal** em estado esta-

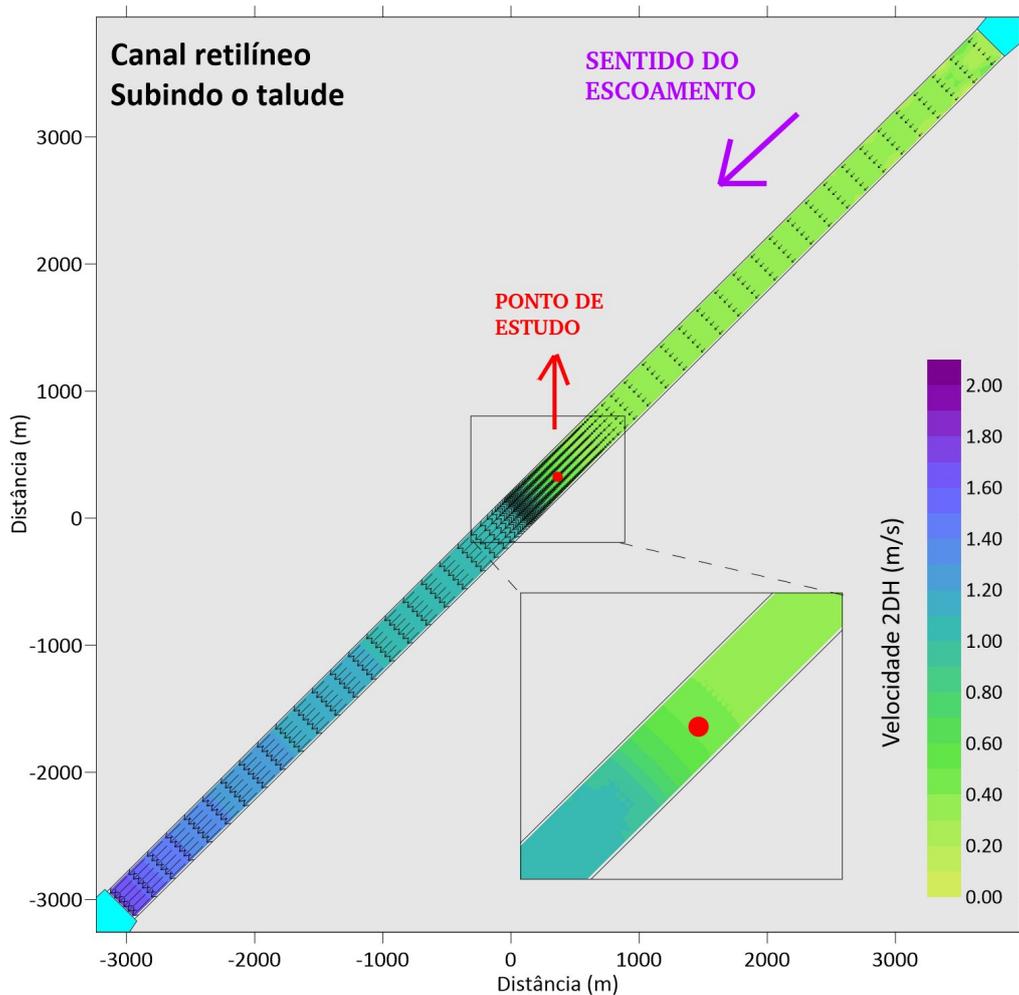


Figura 5.6: Vista em planta da **velocidade promediada na coluna d'água (2DH) em estado estacionário** referente ao **canal retilíneo com talude** para o cenário do **escoamento subindo o talude** (isto é, **para sudoeste** caso o eixo y apontasse para norte). O **zoom** na imagem se refere à porção da malha referente ao talude, que apresenta somente as magnitudes dos vetores.

cionário para a região central do talude. A figura apresenta dois gráficos, um para o escoamento na direção x (acima) e outro para o escoamento na direção y (abaixo). Ambos são **negativos** e eles são iguais. O fato de ambos serem **negativos** se deve à orientação da rampa, conforme descrito na Seção 4.2. O fato deles serem iguais se deve ao fato de que o canal retilíneo é simétrico ao longo da linha $x = y$. Assim, o escoamento observado em uma direção acaba por ser o mesmo observado na outra direção.

A legenda da figura apresenta quatro perfis distintos: a velocidade média do escoamento, o perfil 3D-AN do SisBaHiA[®], o perfil preliminar e o perfil ajustado – estes dois últimos, propostos por este trabalho. Contudo, aparentemente, o gráfico aparenta conter apenas três perfis. Isto ocorre porque, para este caso, a diferença entre o perfil 3D-AN do SisBaHiA[®] e o perfil preliminar é desprezível. Assim, há

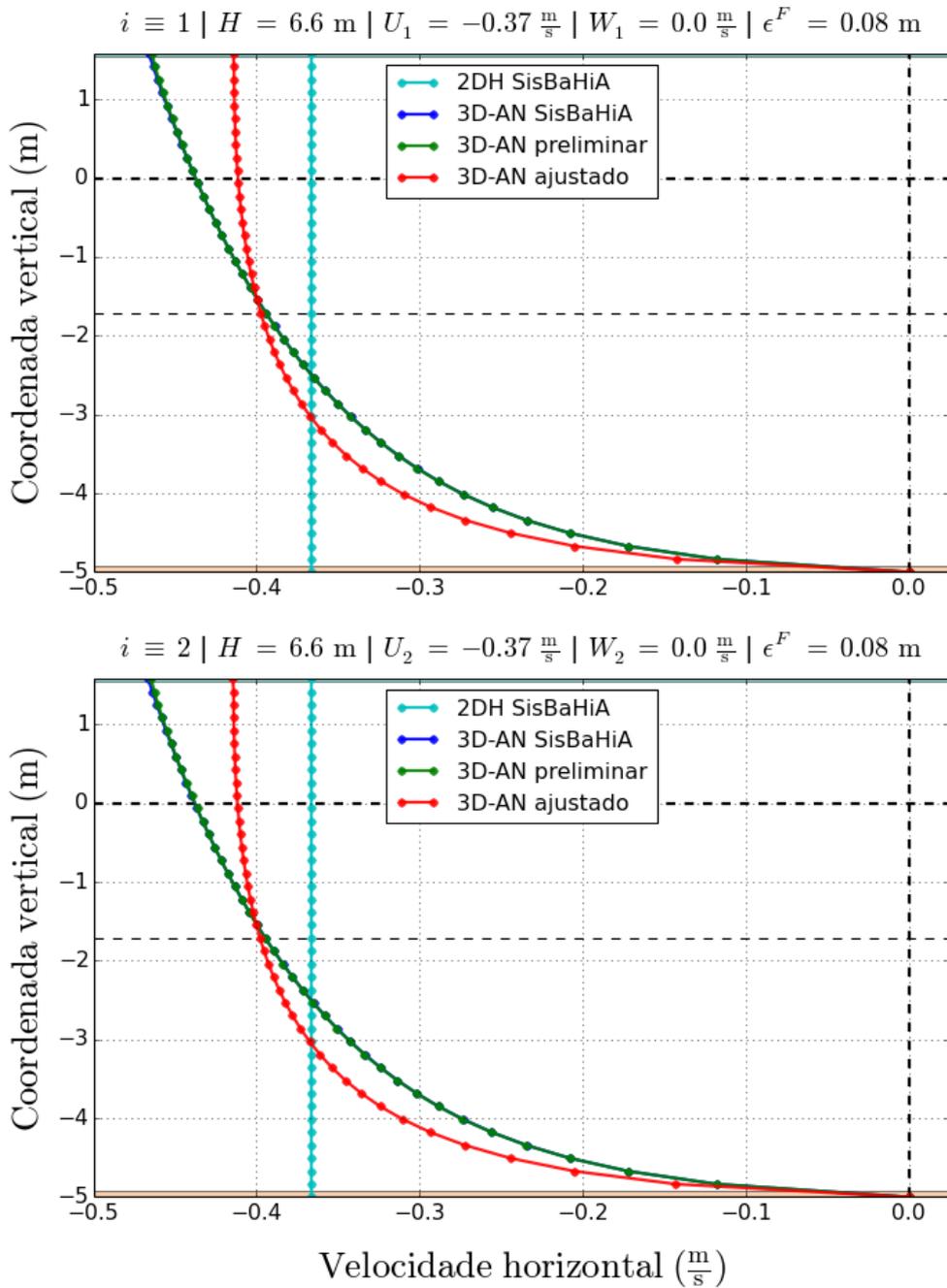


Figura 5.7: Componentes x ($i \equiv 1$, acima) e y ($i \equiv 2$, abaixo) da **velocidade média** e dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®] (linear)**, **preliminar (linear)** e **ajustado (não-linear)**. Perfis resultantes da simulação numérica do **canal retilíneo com talude** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Situação para o escoamento **subindo o talude**. A curva azul pouco aparece porque a diferença entre ela e a curva verde é, para este caso, desprezível.

praticamente três perfis restantes a serem analisados.

O perfil referente à velocidade média, extraído da simulação 2DH do SisBaHiA[®], é, obviamente, invariante na vertical. É a magnitude desta velocidade que regula a velocidade média do outros perfis. Os outros perfis – o preliminar e o ajustado –, são nitidamente diferentes. Pelas deduções matemáticas do Capítulo 3, temos que o perfil preliminar é incapaz de representar o efeito de qualquer não-linearidade, ao passo que o perfil ajustado, por sua vez, as representa, supostamente estando mais próximo da realidade.

Nesta figura (Figura 5.7), o perfil ajustado, em relação ao perfil preliminar, se apresenta **mais veloz perto do fundo** e **menos veloz em superfície e sub-superfície**. O perfil ajustado, então, nesta situação, acaba por sofrer uma tensão junto ao fundo **mais intensa** devido à presença do leito no fundo.

A Figura 5.8, por sua vez, apresenta a **componente vertical de velocidade** referente à mesma simulação – simulação numérica referente ao **canal retilíneo com talude** para o cenário do **escoamento subindo o talude**.

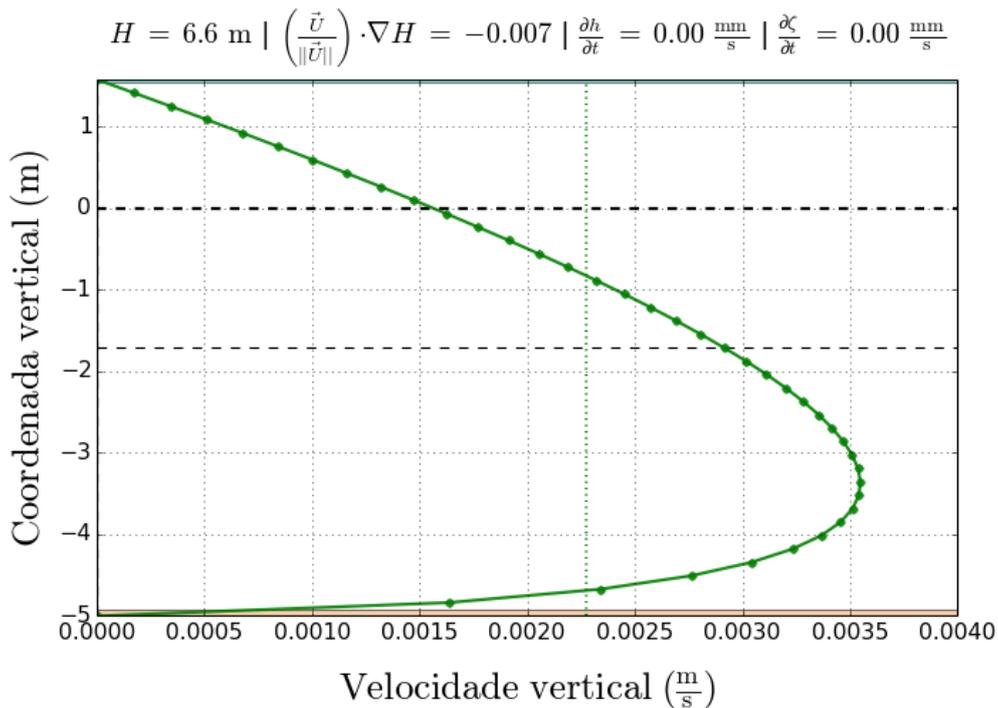


Figura 5.8: **Componente vertical de velocidade**, w^0 , obtida através da equação da continuidade para escoamentos incompressíveis imposta às variáveis $u_1^0 \equiv u^0$ e $u_2^0 \equiv v^0$. Perfil resultante da simulação numérica do **canal retilíneo com talude** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação do modelo matemático descrito no Capítulo 3 (Seção 3.12) desta dissertação com **41 níveis verticais**. Situação para o escoamento **subindo o talude**. Em analogia às outras figuras apresentadas, ao perfil de w^0 também foi atribuída a cor verde porque ele foi calculado a partir dos **perfis preliminares (lineares)** em x e em y . A reta pontilhada verde constante se refere à velocidade vertical média ao longo da coluna d'água.

Observa-se que a velocidade vertical é **positiva** ao longo de toda a coluna d'água. Isto é coerente com o fato do escoamento estar **subindo o talude**. Como

1. o gradiente longitudinal da cota batimétrica é muito maior que o da elevação da superfície,
2. o escoamento está **subindo o talude** e
3. o fluido é incompressível,

a velocidade vertical obrigatoriamente deve ser **positiva (para cima)**, a fim de preencher a coluna d'água, que, no referencial de uma partícula em movimento, está **diminuindo**.

Observa-se também que sua magnitude máxima ocorre mais próxima ao fundo do que à superfície. Isto é coerente com o fato de que o gradiente batimétrico é o principal perturbado do escoamento: conforme o fundo varia e o escoamento por sobre ele escoar, velocidades verticais são induzidas por causa dessas variações. Assim, as parcelas de fluido mais próximas ao fundo acabam por ser as mais diretamente afetadas. Em outras palavras, uma parcela situada na superfície sofre menos influência dos gradientes batimétricos.

O **achatamento vertical** de uma parcela de fluido próxima ao fundo devido a gradientes batimétricos induz, por uma questão de manutenção de fluxo, um **aumento** local da magnitude da velocidade horizontal dessa partícula. Portanto, para esta partícula, tem-se que $u^0 = v^0 < 0$ em toda a coluna d'água e $\frac{\partial u_i^0}{\partial x} = \frac{\partial u_i^0}{\partial y} > 0$ na maior parte² da coluna d'água. Similarmente e pela análise das Figuras 5.7 e 5.8, temos que $w^0 > 0$ em toda a coluna d'água e $\frac{\partial u_i^0}{\partial z} < 0$ também em toda a coluna d'água.

Portanto, temos que $u^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x} = v^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial y} < 0$ na maior parte da coluna d'água e $w^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial z} < 0$ em toda a coluna d'água, o que configura uma **aceleração advectiva** (porque u_i^0 e a soma dos três termos não-lineares possuem o **sinais iguais**: $-$ e $-$).

Por fim, temos que o **perfil ajustado** referente ao cenário do **escoamento subindo o talude**, calculado a partir da metodologia proposta neste trabalho, apresentou:

- **aceleração advectiva** em relação ao perfil preliminar $\left(u^0 = v^0 < 0 \quad \text{e} \quad u^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + v^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + w^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial z} < 0 \right)$;

² A exceção, neste caso, é uma camada próxima ao fundo de cerca de 1 m de espessura. Nesta camada, parcelas de fluido **pouco velozes** devido à fricção com o fundo **desaceleram** ao escoar. Isto ocorre porque, nesta camada, a **desaceleração** devido à **aproximação** do fundo (**mais atrito**) sobrepõe o efeito de **aceleração** devido ao **achatamento** vertical da coluna d'água. O mesmo não ocorre no restante da coluna d'água. Ressalta-se, contudo, que esta dinâmica apenas se aplica aos termos $\frac{\partial u_i^0}{\partial x}$ e $\frac{\partial u_i^0}{\partial y}$. Ao considerarmos todas as contribuições não-lineares $\left(u^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + v^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + w^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial z} \right)$, temos que uma **aceleração** se dá em todas as cotas da coluna d'água.

- velocidade média igual à modelada pelo modelo 2DH $\left(\int_{-h}^{\zeta} u_i dz = U_i\right)$;
- velocidade nula junto ao fundo $(u_i^F = 0)$;
- **maior tensão** junto ao fundo em relação ao perfil preliminar $(\tau_i^F > \tau_i^{0F})$;
- um escoamento **mais veloz próximo ao fundo** em relação ao perfil preliminar;
- um escoamento **menos veloz próximo à superfície** em relação ao perfil preliminar;
- uma velocidade superficial auto-ajustável de modo a sempre analiticamente satisfazer a CCDS, isto é, preservar a relação teórica entre o cisalhamento em superfície $\left(\left|\frac{\partial u_i^0}{\partial z}\right|_{z=\zeta}\right)$ e a tensão do vento em superfície (τ_i^S) .

5.2 Canal curvilíneo de fundo horizontal

A simulação numérica referente ao canal curvilíneo é um mero ensaio teórico descritivo a respeito da contribuição das forças não-lineares horizontais³ a um escoamento estacionário análogo ao de um trecho de rio meandrante. As Seções 5.2.1 e 5.2.2 apresentam os resultados das simulações numéricas (3D) e analítico-numéricas (3D-AN) respectivamente para a estação mais a montante e para a estação mais a jusante do canal curvilíneo. Trata-se de **uma** simulação numérica em situação de escoamento permanente que contém duas estações de estudo. Os princípios físicos de cada estação são opostos e análogos. Dessa forma, seus textos foram escritos de forma conjunta, um à semelhança do outro, de modo que ambos possam ser completos e independentes um do outro. Neste sentido, suas expressões- e palavras-chave se encontram em negrito, de modo a facilitar uma leitura dinâmica.

Em escoamentos curvilíneos, como os observados em meandros de rios, os termos não-lineares da equação de Navier-Stokes têm um importante papel na circulação local. Em tais regiões, observa-se, na coluna d'água, um escoamento secundário helicoidal, oriundo desta não-linearidades. Neste tipo de escoamento, cada camada de fluido escoar para uma direção diferente. Assim, a correta modelagem deste fenômeno, indetectável por modelos 2DH, é essencial para a correta modelagem de

³ Neste cenário, a força não-linear vertical $\left(w^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial z}\right)$ não será testada, pois, conforme mencionado na Seção 4.3, o canal curvilíneo modelado possui profundidade constante, o que inibe a formação de correntes verticais $(w^0 \approx 0)$. Dessa forma, este cenário pode ser encarado como uma aproximação a escoamentos típicos em rios meandrantes. Caso este canal curvilíneo apresentasse variações batimétricas, elas seriam detectadas pelo modelo matemático, haja vista os resultados obtidos nas simulações referentes ao canal retilíneo (Seção 5.1).

transporte de sedimentos, pois é a velocidade próxima ao fundo que determina a direção da tensão junto ao fundo.

A Figura 5.9 apresenta a vista em planta da **elevação da superfície** em estado permanente. Observa-se uma elevação de superfície mais alta à montante e mais baixa à jusante, o que induz a força de gradiente de pressão barotrópica que é a força-motriz do escoamento. Observa-se também uma forte assimetria no padrão de elevações nos trechos de maior curvatura do canal. Em ambas as curvas, à montante e à jusante, o gradiente de elevação da superfície aponta para os quadrantes convexos das curvas. Assim, de maneira geral, temos que

- a elevação é maior nos quadrantes convexos e menor nos quadrantes côncavos das curvas; e
- o gradiente de pressão barotrópica aponta para os quadrantes côncavos das curvas.

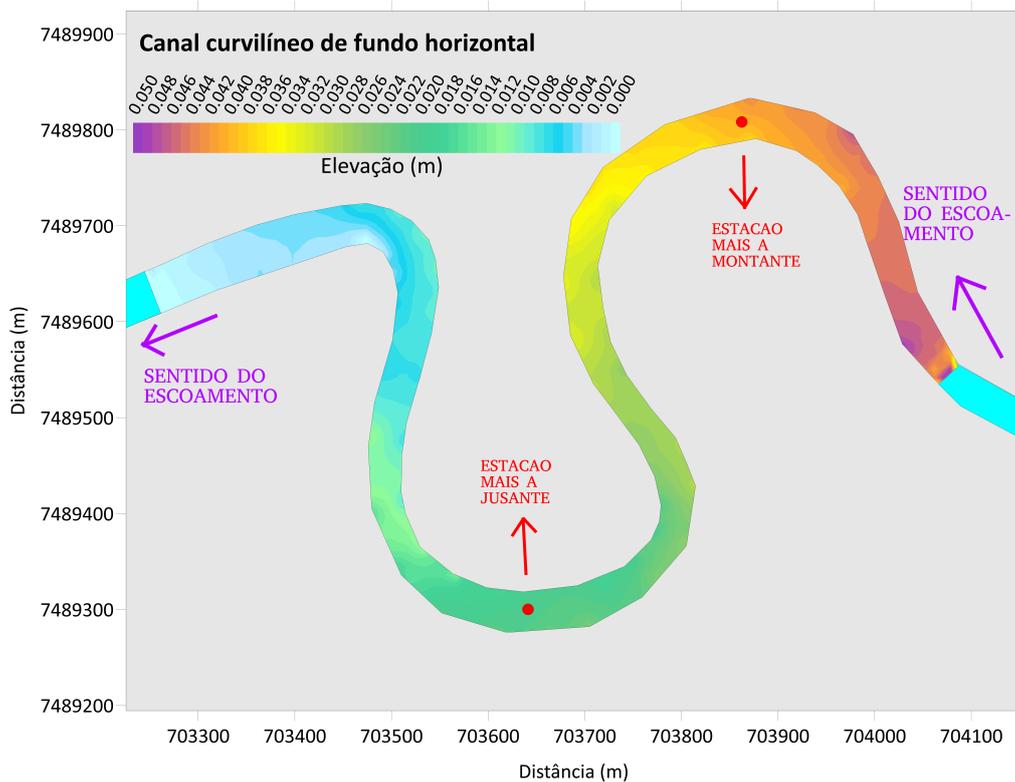


Figura 5.9: Vista em planta da **elevação da superfície em estado estacionário** referente ao **canal curvilíneo com de fundo horizontal**.

A Figura 5.10 apresenta a vista em planta da **velocidade promediada na coluna d'água (2DH)** em estado estacionário. Observa-se uma assimetria no padrão de velocidades nos trechos de maior curvatura do canal. Em ambas as curvas, à montante e à jusante, a velocidade promediada é maior nas proximidades das calhas dos lados côncavos e menos nas proximidades das calhas dos lados convexos.

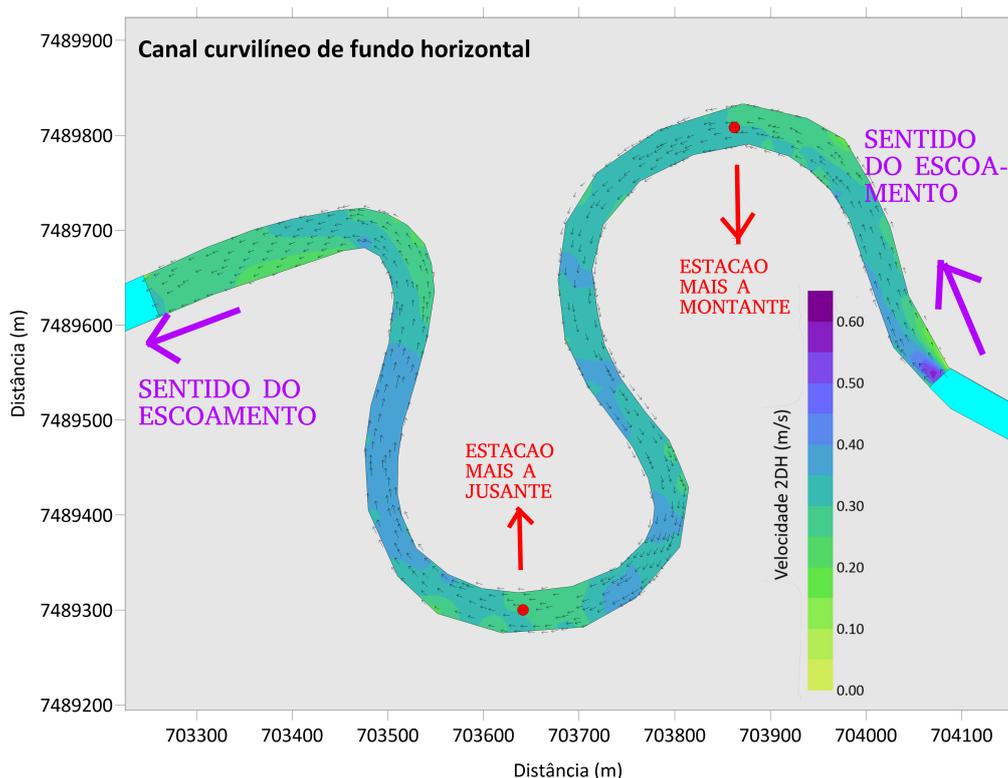


Figura 5.10: Vista em planta da **velocidade promediada na coluna d'água (2DH) em estado estacionário** referente ao **canal curvilíneo com de fundo horizontal**. Por questões estéticas, apenas um quarto dos vetores referentes a cada nó de cálculo está sendo exibido.

5.2.1 Estação mais à montante

A Figura 5.11 apresenta os **perfis de velocidade horizontal** em estado estacionário para a estação mais à **montante**. A figura apresenta dois gráficos, um para o escoamento na direção x (acima) e outro para o escoamento na direção y (abaixo). Observa-se que, para o escoamento na direção x , os perfis preliminar e ajustado são **praticamente iguais**, ao passo que, para o escoamento na direção y , eles são **muito diferentes**. Ainda, o gráfico referente à direção x apresenta um perfil ajustado **negativo** em toda a coluna d'água, enquanto que o referente à direção y apresenta um perfil ajustado **negativo** do fundo à meia-coluna e **positivo** da meia-coluna à superfície.

A Figura 5.12 apresenta estes mesmos perfis (os mesmos da Figura 5.11), porém, com vista em planta. Observa-se que todos os perfis são unidirecionais, com exceção do perfil ajustado, que é o único que apresenta variação de direção do escoamento em função da cota vertical. Este perfil uma estrutura tridimensional coerente com os escoamentos secundários helicoidais observados em canais curvos: a velocidade superficial aponta para os quadrantes convexos da curva ao passo que a velocidade nas proximidades do fundo aponta para os quadrantes côncavos da curva. Con-

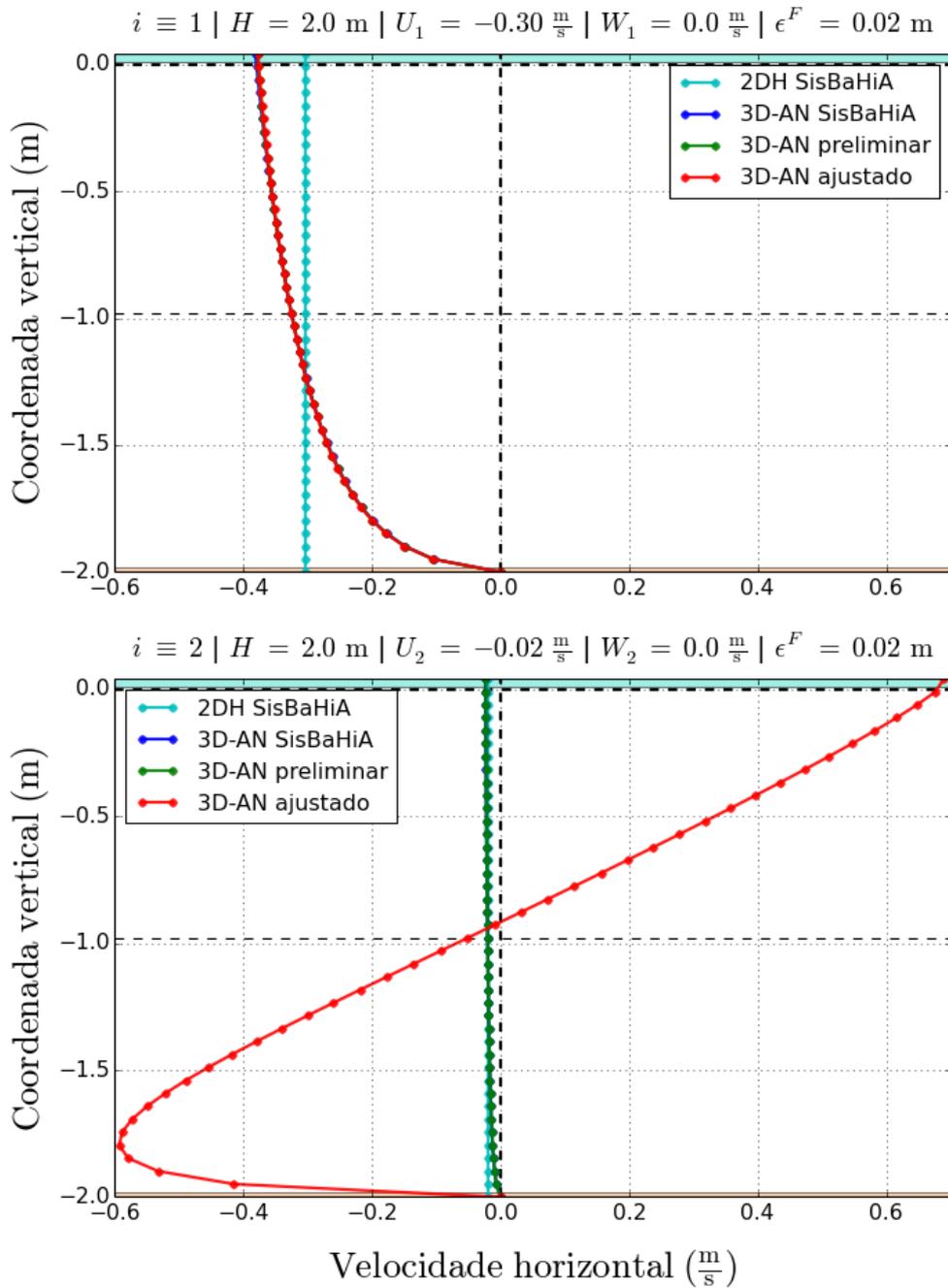


Figura 5.11: Componentes x ($i \equiv 1$, acima) e y ($i \equiv 2$, abaixo) da **velocidade média** e dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®] (linear)**, **preliminar (linear)** e **ajustado (não-linear)**. Perfis resultantes da simulação numérica do **canal curvilíneo de fundo horizontal** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Perfis representativos da estação mais a **montante (primeira curva, a norte)** do domínio de modelagem. A curva azul pouco aparece porque a diferença entre ela e a curva verde é, para este caso, desprezível.

tudo, verifica-se que tal estrutura tridimensional, quando comparada ao módulo 3D do SisBaHiA[®], apresenta magnitudes similares porém uma variação de direções exagerada. Tais perfis de velocidade em x e em y são similares em magnitude e em quadrantes de direções em relação aos obtidos por AZPIROZ-ZABALA *et al.* (2017).

A Figura 5.13 apresenta a vista em planta da velocidade do escoamento, sendo a porção dentro do *zoom* o resultado de uma simulação do módulo 3D do SisBaHiA[®] referente à estação mais a **montante**. As velocidades fora da caixa de *zoom* representam velocidades 2DH. Nota-se que a variação vertical da direção do escoamento é menos pronunciada nesta modelagem 3D em relação aos resultados da Figura 5.12. Contudo, os quadrantes das direções das velocidades do fundo e da superfície são coincidentes nas duas simulações.

5.2.2 Estação mais à jusante

A Figura 5.14 apresenta os **perfis de velocidade horizontal** em estado estacionário para a estação mais à **jusante**. A figura apresenta dois gráficos, um para o escoamento na direção x (acima) e outro para o escoamento na direção y (abaixo). Observa-se que, para o escoamento na direção x , os perfis preliminar e ajustado são **praticamente iguais**, ao passo que, para o escoamento na direção y , eles são **muito diferentes**. Ainda, o gráfico referente à direção x apresenta um perfil ajustado **negativo** em toda a coluna d'água, enquanto que o referente à direção y apresenta um perfil ajustado **positivo** do fundo à meia-coluna e **negativo** da meia-coluna à superfície.

A Figura 5.15 apresenta estes mesmos perfis (os mesmos da Figura 5.14), porém, com vista em planta. Observa-se que todos os perfis são unidirecionais, com exceção do perfil ajustado, que é o único que apresenta variação de direção do escoamento em função da cota vertical. Este perfil uma estrutura tridimensional coerente com os escoamentos secundários helicoidais observados em canais curvos: a velocidade superficial aponta para os quadrantes convexos da curva ao passo que a velocidade nas proximidades do fundo aponta para os quadrantes côncavos da curva. Contudo, verifica-se que tal estrutura tridimensional, quando comparada ao módulo 3D do SisBaHiA[®], apresenta magnitudes similares porém uma variação de direções exagerada. Tais perfis de velocidade em x e em y são similares em magnitude e em quadrantes de direções em relação aos obtidos por AZPIROZ-ZABALA *et al.* (2017).

A Figura 5.16 apresenta a vista em planta da velocidade do escoamento, sendo a porção dentro do *zoom* o resultado de uma simulação do módulo 3D do SisBaHiA[®] referente à estação mais a **jusante**. As velocidades fora da caixa de *zoom* represen-

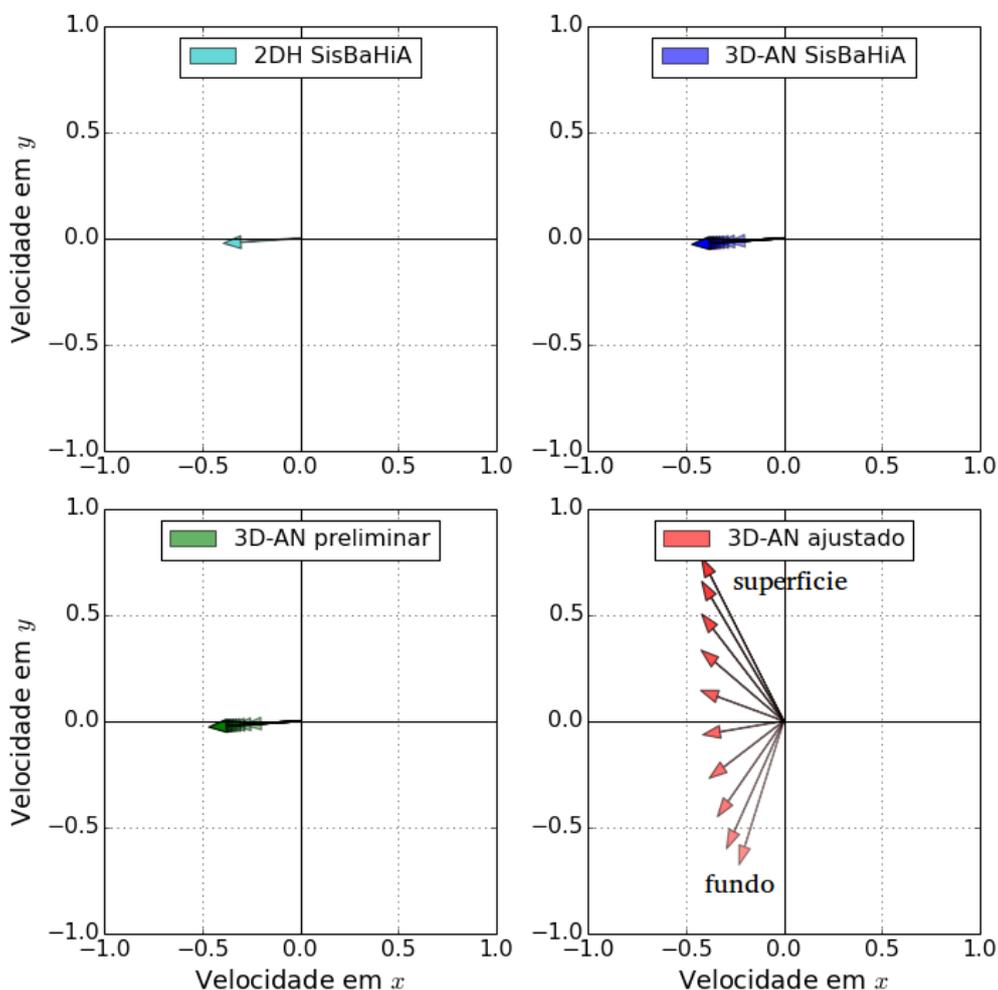


Figura 5.12: Vista em planta da **velocidade média** e da variação vertical dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®] (linear)**, **preliminar (linear)** e **ajustado (não-linear)**. Perfis resultantes da simulação numérica do **canal curvilíneo de fundo horizontal** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Perfis representativos da estação mais a **montante (primeira curva, a norte)** do domínio de modelagem. Apenas 11 dos 41 vetores são apresentados na imagem por uma questão estética. São apresentados os seguintes vetores: o de fundo (nulo), mais 9 níveis verticais, mais o de superfície, todos equiespaçados. Assim, o vetor ao lado da palavra “fundo”, no gráfico referente ao perfil **ajustado (não-linear)**, se refere a um vetor *próximo* ao fundo, e não *no* fundo, pois a velocidade *no* fundo é nula. Uma escala linear de transparência foi atribuída aos vetores: quanto mais transparente um vetor, mais próximo ao fundo ele se localiza.

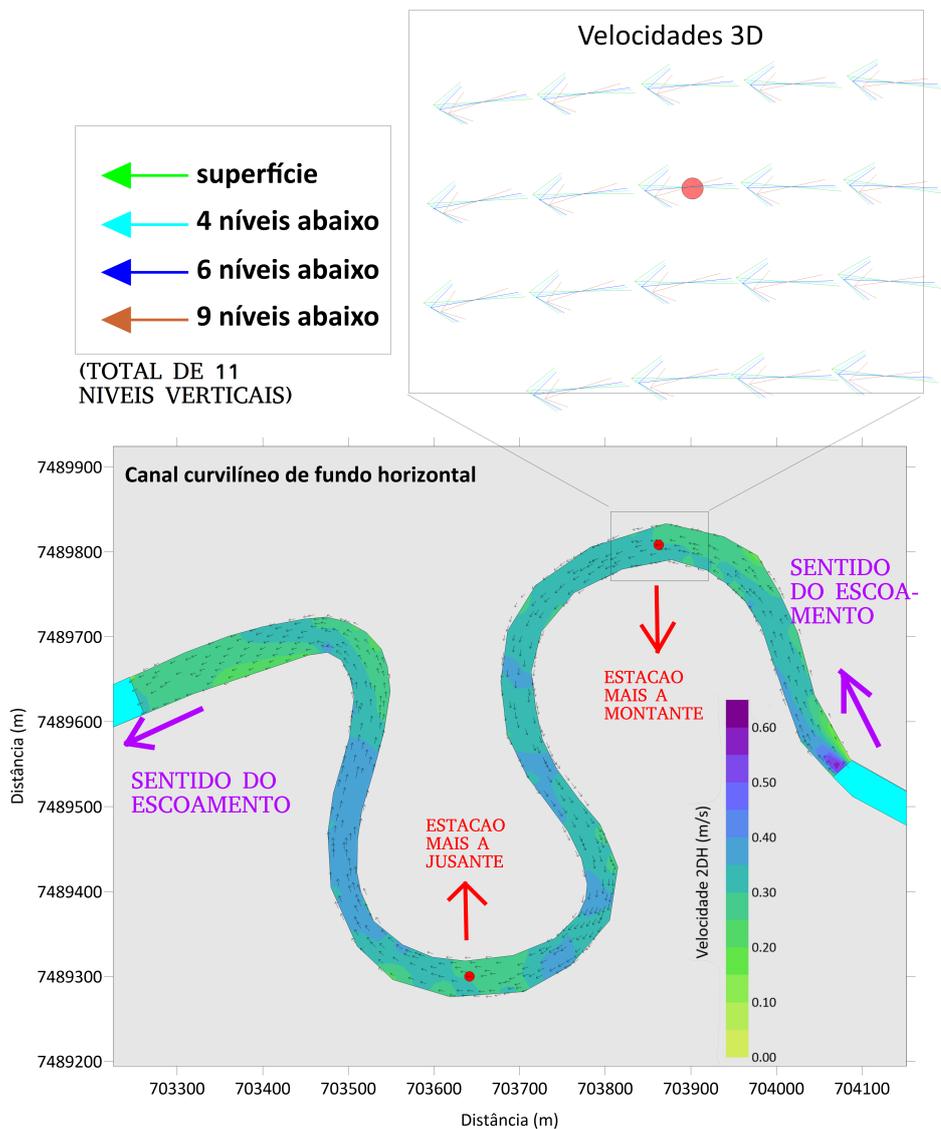


Figura 5.13: Vista em planta da **velocidade** do escoamento para o **canal curvilíneo de fundo horizontal**. A porção dentro do *zoom* apresenta, para a estação mais a **montante**, quatro níveis de velocidade 3D simulados pelo módulo 3D do SisBaHiA[®]. As velocidades fora da caixa de *zoom* representam velocidades 2DH.

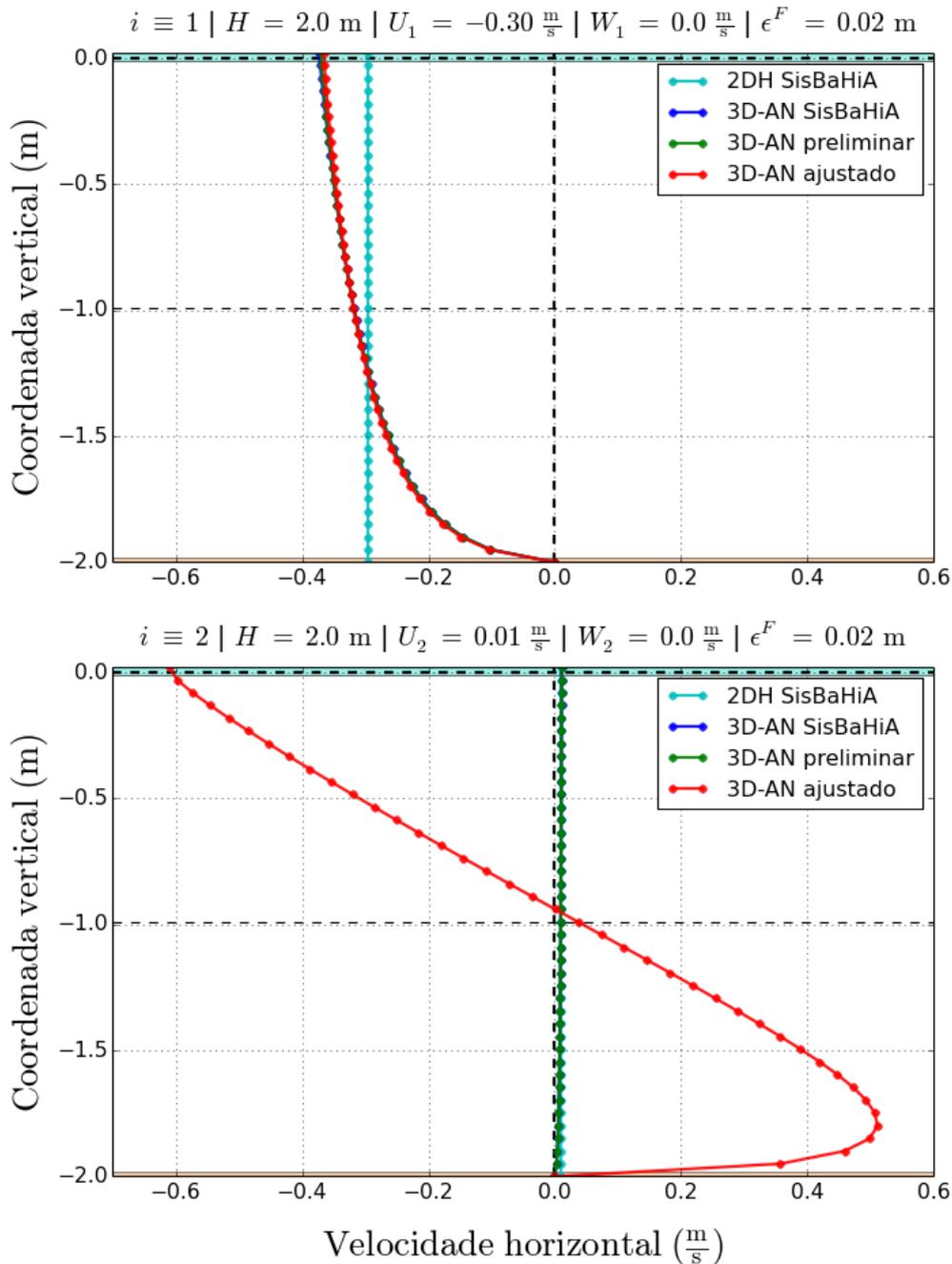


Figura 5.14: Componentes x ($i \equiv 1$, acima) e y ($i \equiv 2$, abaixo) da **velocidade média** e dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®] (linear)**, **preliminar (linear)** e **ajustado (não-linear)**. Perfis resultantes da simulação numérica do **canal curvilíneo de fundo horizontal** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Perfis representativos da estação mais a **jusante (segunda curva, a sul)** do domínio de modelagem. A curva azul pouco aparece porque a diferença entre ela e a curva verde é, para este caso, desprezível.

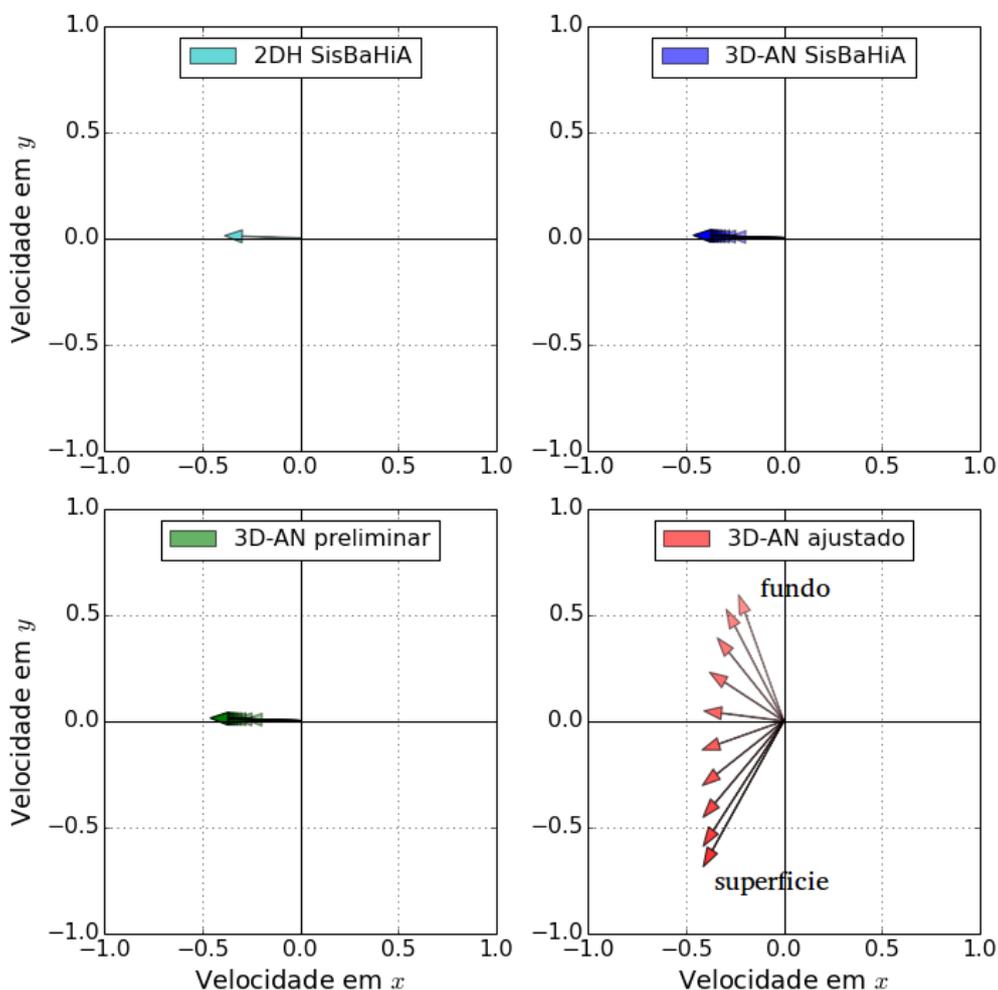


Figura 5.15: Vista em planta da **velocidade média** e da variação vertical dos perfis de velocidade do **SisBaHiA[®] (linear)**, **preliminar (linear)** e **ajustado (não-linear)**. Perfis resultantes da simulação numérica do **canal curvilíneo de fundo horizontal** através do módulo 2DH do SisBaHiA[®] seguido da aplicação completa do modelo matemático descrito no Capítulo 3 desta dissertação com **41 níveis verticais**. Perfis representativos da estação mais a **jusante (segunda curva, a sul)** do domínio de modelagem. Apenas 11 dos 41 vetores são apresentados na imagem por uma questão estética. São apresentados os seguintes vetores: o de fundo (nulo), mais 9 níveis verticais, mais o de superfície, todos equiespaçados. Assim, o vetor ao lado da palavra “fundo”, no gráfico referente ao perfil **ajustado (não-linear)**, se refere a um vetor *próximo* ao fundo, e não *no* fundo, pois a velocidade *no* fundo é nula. Uma escala linear de transparência foi atribuída aos vetores: quanto mais transparente um vetor, mais próximo ao fundo ele se localiza.

tam velocidades 2DH. Nota-se que a variação vertical da direção do escoamento é menos pronunciada nesta modelagem 3D em relação aos resultados da Figura 5.15. Contudo, os quadrantes das direções das velocidades do fundo e da superfície são coincidentes nas duas simulações.

5.3 Considerações adicionais

Durante o desenvolvimento deste trabalho, os perfis preliminares e ajustados foram testados em uma vasta gama de tipos de escoamentos que fogem do escopo deste trabalho. Como o objetivo deste trabalho é centrado nos termos não-lineares da equação de Navier-Stokes, tais resultados não foram apresentados. Porém, como a inclusão dos outros termos da equação de Navier-Stokes no modelo matemático proposto é análoga à inclusão dos termos não-lineares, o autor optou por fazê-la.

A motivação para isso foi garantir a robustez do modelo matemático de modo que ele pudesse ser utilizado por diferentes modeladores como uma *ferramenta* passível de aplicação a diferentes escoamentos geofísicos de águas rasas, sejam elas interiores, estuarinas ou marinhas.

Ressalta-se, contudo, que tais simulações foram feitas de maneira conceitual e informal, sem a utilização de modelos numéricos como o SisBaHiA[®] ou outros. Apenas o modelo tridimensional analítico-numérico descrito no Capítulo 3 foi utilizado. As derivadas cujos cálculos são necessários, nestes casos, tiveram seus valores estimados conceitualmente a partir das ordens de grandeza típicas das forçantes dos fenômenos investigados.

Dito isto, exemplos destes tipos de escoamentos que apresentaram resultados coerentes são:

- escoamentos com gradientes horizontais de densidade, típicos de estuários verticalmente homogêneos;
- escoamentos estacionários e uniformes em altas latitudes, com influência da rotação da Terra; e
- escoamentos na presença de ventos fortes a favor, contra e transversais ao escoamento superficial.

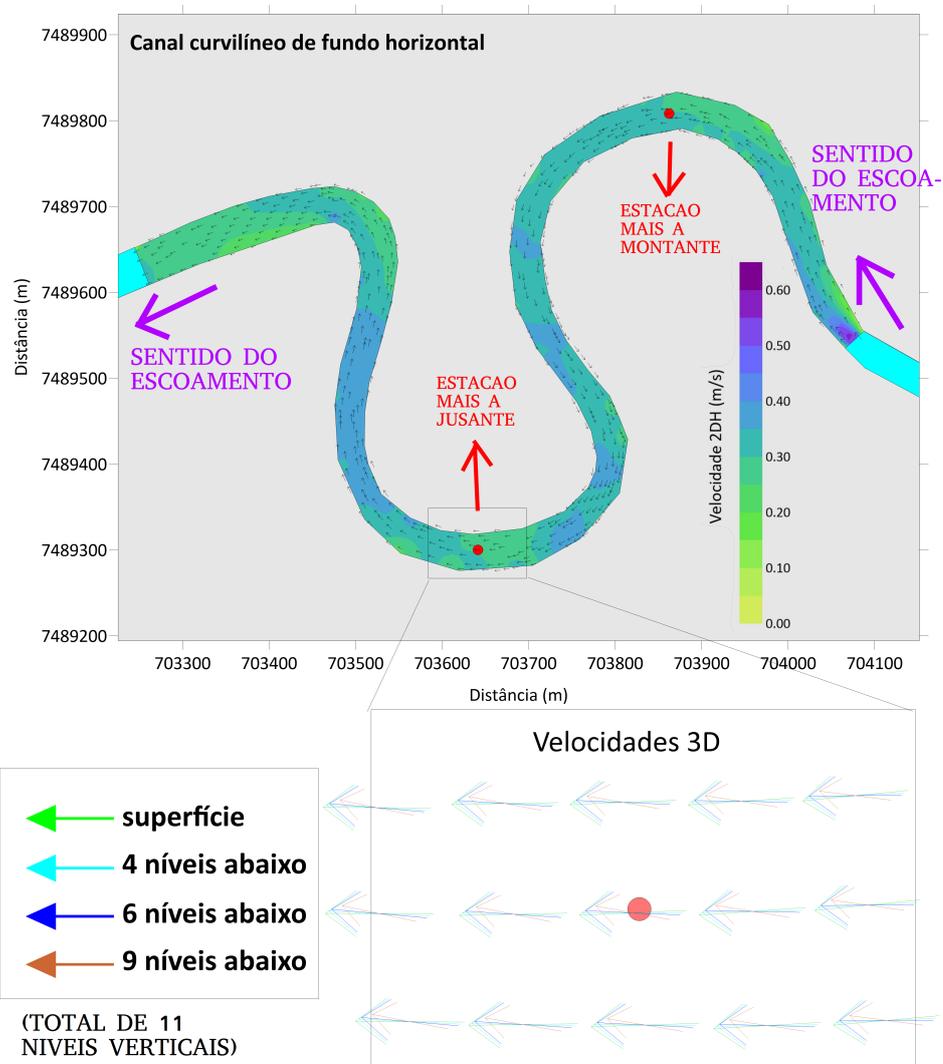


Figura 5.16: Vista em planta da **velocidade** do escoamento para o **canal curvilíneo de fundo horizontal**. A porção dentro do *zoom* apresenta, para a estação mais a **jusante**, quatro níveis de velocidade 3D simulados pelo módulo 3D do SisBaHiA[®]. As velocidades fora da caixa de *zoom* representam velocidades 2DH.

Capítulo 6

Conclusão

De maneira geral, o modelo matemático descrito no Capítulo 3, o principal resultado deste trabalho, é um conjunto de equações analítico-numéricas que descrevem escoamentos hidrodinâmicos tridimensionais e não-lineares. Ele atingiu, com êxito, os seguintes feitos, válidos para escoamentos geofísicos de águas rasas:

- a formulação matemática de um **perfil aprimorado de viscosidade turbulenta** (ν_{i3}) de formato parabólico que analiticamente satisfaz a CCDF e a CCDS;
- a formulação matemática de um **perfil preliminar de velocidade** (u_i^0) de formato logarítmico que analiticamente satisfaz a CCDF e a CCDS e cujo fluxo (U_i) pode ser pré-determinado por modelos 2DH; e
- a formulação matemática de um **perfil ajustado de velocidade** (u_i) que possui os mesmos atributos do perfil preliminar, contudo, também é capaz de representar os seguintes termos da equação de Navier-Stokes: aceleração local; acelerações advectivas em x , em y e em z ; aceleração de Coriolis; aceleração devido ao gradiente de pressão barotrópica; aceleração devido ao gradiente de pressão baroclínica; e aceleração devido à difusão vertical turbulenta de *momentum* linear horizontal.

Tais perfis podem ser completamente calculados através das seguintes variáveis 2DH – e de suas derivadas horizontais e temporais de primeira ordem, caso não-desprezíveis –, que podem variar no tempo (podem variar em t), que podem ser horizontalmente não-uniformes (podem variar em x e em y) e que são independentes da dimensão vertical (não dependem de z):

- vetor velocidade média da coluna d'água (U_i);
- vetor intensidade do vento a 10 m de altura da superfície (W_i);

- cota batimétrica (h);
- elevação da superfície (ζ);
- rugosidade equivalente do fundo (ε^F);
- rugosidade equivalente da superfície (ε^S);
- densidade média da coluna d'água ($\hat{\rho}$); e
- latitude central do corpo d'água estudado (θ).

Tal método, contudo, devido às aproximações que considera (isto é, corpo d'água verticalmente homogêneo e pressão hidrostática), é válido em corpos d'água rasos¹, como estuários, rios, reservatórios e lagunas. Contudo, ele não se aplica a casos como os seguintes:

- regiões com quebra de ondas de gravidade de superfície (pois a pressão não é hidrostática);
- dinâmica em oceano aberto (pois o perfil de viscosidade não necessariamente é aproximadamente parabólico); e
- regiões de campo-próximo, isto é, próximos a jatos forçados no escoamento, como nas proximidades de emissários submarinos (pois nem a pressão é hidrostática nem o perfil de viscosidade necessariamente é parabólico).

Dado que um determinado perfil é matematicamente independente de seus perfis adjacentes, nada impede que as variáveis acima listadas sejam obtidas tanto através de resultados de modelagem computacional quanto através de medições em campo. Ademais, o modelador pode escolher o número de níveis verticais a ser considerado, sendo 7 o mínimo por causa do esquema de integração numérico utilizado para a dimensão vertical. Essa quantidade de níveis verticais pode ser consideravelmente maior do que a usualmente atribuída a modelos 3D numéricos. Isto é possível porque, no modelo proposto, todos os cálculos referentes às dimensões horizontais são analíticos e, após feitos estes cálculos, a dimensão vertical se torna um problema unidimensional. Em outras palavras, não são necessários cálculos numéricos além daquelas já efetuados por modelos 2DH.

Por este motivo, através da utilização do modelo matemático proposto por este trabalho, é potencialmente possível efetuar simulações hidrodinâmicas tridimensionais de maneira mais estável, rápida e computacionalmente menos custosa do que através da utilização de um modelo numérico tridimensional tradicional.

¹ Isto é, corpos d'água cujas dimensões horizontais são ordens de grandeza maiores que as dimensões verticais.

Conclui-se, desta forma, que foi desenvolvida uma ferramenta de modelagem tridimensional passível de aplicação em diferentes tipos de corpos d'água naturais descritos em duas dimensões.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

1. **Desenvolvimento de metodologia análoga para grandezas escalares**, de maneira a se calcular perfis verticais de salinidade, densidade, oxigênio dissolvido, entre outros parâmetros. Tal abordagem possibilitaria a modelagem de corpos d'água verticalmente estratificados, como estuários do tipo cunha salina.
2. **Desenvolvimento de metodologia análoga para modelos unidimensionais**: da mesma forma que a metodologia proposta baseou-se na formulação da viscosidade ao longo da dimensão promediada z e descreveu perfis verticais, uma abordagem alternativa é basear-se na formulação da viscosidade ao longo de dimensões promediadas como y e z de modo a calcular variações de velocidade no plano yz .

Referências Bibliográficas

- AZPIROZ-ZABALA, M., CARTIGNY, M. J. B., SUMNER, E. J., et al., 2017, “A General Model for the Helical Structure of Geophysical Flows in Channel Bends”, *Geophysical Research Letters*, v. 44 (dez.), pp. 11932–11941.
- CHEN, W., DE SWART, H. E., 2016, “Dynamic links between shape of the eddy viscosity profile and the vertical structure of tidal current amplitude in bays and estuaries”, *Ocean Dynamics*, v. 66 (fev.), pp. 299–312.
- DE MIRANDA, L. B., DE CASTRO, B. M., KJERFVE, B., 2002, *Princípios de Oceanografia Física de Estuários*. 1 ed. São Paulo, EDUSP.
- DE SOUZA, J. F. A., DE OLIVEIRA, L. R., DE AZEVEDO, J. L. L., et al., 2011, “Uma revisão sobre a turbulência e sua modelagem”, *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 29, n. 1 (fev.), pp. 21–41.
- GRAF, W. H., BLANCKAERT, K., 2002, *Flow Around Bends in Rivers*. In: Report, Ecole Polytechnique Fédérale, Laussane.
- HERSBACH, H., 2011, “Sea Surface Roughness and Drag Coefficient as Functions of Neutral Wind Speed”, *Journal of Physical Oceanography*, v. 41 (jan.), pp. 247–251.
- KUNDU, P. K., COHEN, I. M., DOWLING, D. R., 2012, *Fluid Mechanics*. 5 ed. Oxford, Elsevier.
- PRANDLE, D., 2009, *Estuaries – Dynamics, Mixing, Sedimentation and Morphology*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press.
- RODI, W., 1984, *Turbulence models and their application in hydraulics – a state of the art review*. 2 ed. Karlsruhe, Routledge.
- ROSMAN, P. C. C., 1987, *Modeling Shallow Water Bodies Via Filtering Techniques*. Tese de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.

- ROSMAN, P. C. C., 2019, *Referência Técnica do SisBaHiA*. Rio de Janeiro, Função COPPETEC.
- ROSMAN, P. C. C., 1997, *Subsídios para Modelagem de Sistemas Estuarinos*. Rio de Janeiro, ABRH.
- WU, J., 1982, “Wind-stress coefficients over sea surface from breeze to hurricane”, *Journal of Geophysical Research: Oceans*, v. 87, n. C12 (nov.), pp. 9704–9706.
- ZITMAN, T. J., SCHUTTELAARS, H. M., 2012, “Importance of cross-channel bathymetry and eddy viscosity parameterisation in modelling estuarine flow”, *Ocean Dynamics*, v. 62 (abr.), pp. 603–631.

Apêndice A

Dedução das equações do modelo matemático

Este apêndice contém as equações intermediárias que conduzem às equações finais apresentadas no Capítulo 3 deste trabalho.

A.1 Introdução ao perfil preliminar (u_i^0)

Conforme a Equação 3.3 e a Tabela 3.1, a conservação de *momentum* linear referente ao perfil preliminar pode ser expressa por

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(v_{i3} \frac{\partial u_i^0}{\partial z} \right) = \hat{\Psi}_i \quad . \quad (\text{A.1})$$

Integrando a Equação A.1 entre $-h$ e z , temos que

$$\left[\frac{\partial u_i^0}{\partial z} \right]^F = \frac{1}{v_{i3}} \frac{\tau_i^{0F}}{\hat{\rho}} + \frac{\hat{\Psi}_i}{v_{i3}} (h + z) \quad . \quad (\text{A.2})$$

Integrando a Equação A.1 entre z e ζ , temos que

$$\left[\frac{\partial u_i^0}{\partial z} \right]^S = \frac{1}{v_{i3}} \frac{\tau_i^{0S}}{\hat{\rho}} - \frac{\hat{\Psi}_i}{v_{i3}} (\zeta - z) \quad . \quad (\text{A.3})$$

Aplicando as funções de forma nas Equações A.2 e A.3, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i^0}{\partial z} &\equiv p^F \left[\frac{\partial u_i^0}{\partial z} \right]^F + p^S \left[\frac{\partial u_i^0}{\partial z} \right]^S \\
&= \frac{p^F \tau_i^{0F}}{v_{i3} \hat{\rho}} + \frac{p^S \tau_i^{0S}}{v_{i3} \hat{\rho}} + \cancel{p^F \frac{\hat{\Psi}_i}{v_{i3}} (h+z)} - \cancel{p^S \frac{\hat{\Psi}_i}{v_{i3}} (\zeta-z)} \quad , \quad (\text{A.4}) \\
&= \frac{p^F \tau_i^{0F}}{v_{i3} \hat{\rho}} + \frac{p^S \tau_i^{0S}}{v_{i3} \hat{\rho}}
\end{aligned}$$

onde os termos com a variável $\hat{\Psi}_i$ se anulam porque $p^F(h+z) - p^S(\zeta-z) = 0$ (vide comentários na nota de rodapé da página 18).

Integrando a Equação A.4 entre $-h$ e z , temos que

$$[u_i^0(x, y, z, t)]^F = u_i^{0F} + \frac{\tau_i^{0F}}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^F}{v_{i3}} dz' + \frac{\tau_i^{0S}}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \quad . \quad (\text{A.5})$$

Integrando a Equação A.4 entre z e ζ , temos que

$$[u_i^0(x, y, z, t)]^S = u_i^{0S} - \frac{\tau_i^{0F}}{\hat{\rho}} \int_z^\zeta \frac{p^F}{v_{i3}} dz' - \frac{\tau_i^{0S}}{\hat{\rho}} \int_z^\zeta \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \quad . \quad (\text{A.6})$$

Aplicando as funções de forma nas Equações A.5 e A.6, temos que

$$\begin{aligned}
u_i^0(x, y, z, t) &\equiv p^F [u_i^0(x, y, z, t)]^F + p^S [u_i^0(x, y, z, t)]^S \\
&= [u_i^0(x, y, z, t)]^F \quad . \quad (\text{A.7}) \\
&= [u_i^0(x, y, z, t)]^S
\end{aligned}$$

Assim, finalmente temos a **equação do perfil preliminar**:

$$\boxed{
\begin{aligned}
u_i^0(x, y, z, t) &= u_i^{0F} + \frac{\tau_i^{0F}}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^F}{v_{i3}} dz' + \frac{\tau_i^{0S}}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \\
&= u_i^{0S} - \frac{\tau_i^{0F}}{\hat{\rho}} \int_z^\zeta \frac{p^F}{v_{i3}} dz' - \frac{\tau_i^{0S}}{\hat{\rho}} \int_z^\zeta \frac{p^S}{v_{i3}} dz'
\end{aligned}
} \quad , \quad (\text{A.8})$$

que deve ser expressa

- ou em função da CCDF, da CCDS e da CCCF
- ou em função da CCDF, da CCDS e da CCCS.

A.2 Introdução ao perfil ajustado (u_i)

Conforme a Equação 3.4 e a Tabela 3.1, a conservação de *momentum* linear referente ao perfil ajustado pode ser expressa por

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(v_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) = \Psi_i^0 \quad . \quad (\text{A.9})$$

Integrando a Equação A.9 entre $-h$ e z , temos que

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial z} \right]^F = \frac{1}{v_{i3}} \frac{\tau_i^F}{\hat{\rho}} + \frac{1}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \quad . \quad (\text{A.10})$$

Integrando a Equação A.9 entre z e ζ , temos que

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial z} \right]^S = \frac{1}{v_{i3}} \frac{\tau_i^S}{\hat{\rho}} - \frac{1}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \quad . \quad (\text{A.11})$$

Aplicando as funções de forma nas Equações A.10 e A.11, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial z} &\equiv p^F \left[\frac{\partial u_i}{\partial z} \right]^F + p^S \left[\frac{\partial u_i}{\partial z} \right]^S \\ &= \frac{p^F}{v_{i3}} \frac{\tau_i^F}{\hat{\rho}} + \frac{p^S}{v_{i3}} \frac{\tau_i^S}{\hat{\rho}} + \frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' - \frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \end{aligned} \quad , \quad (\text{A.12})$$

onde os termos com a variável Ψ_i^0 não se anulam, diferentemente do perfil preliminar.

Integrando a Equação A.12 entre $-h$ e z , temos que

$$\begin{aligned} [u_i(x, y, z, t)]^F &= u_i^F + \frac{\tau_i^F}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^F}{v_{i3}} dz' + \frac{\tau_i^S}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \\ &\quad + \int_{-h}^z \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' \quad . \quad (\text{A.13}) \\ &\quad - \int_{-h}^z \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz' \end{aligned}$$

Integrando a Equação A.12 entre z e ζ , temos que

$$\begin{aligned}
[u_i(x, y, z, t)]^S &= u_i^S - \frac{\tau_i^F}{\hat{\rho}} \int_z^\zeta \frac{p^F}{v_{i3}} dz' - \frac{\tau_i^S}{\hat{\rho}} \int_z^\zeta \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \\
&\quad - \int_z^\zeta \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
&\quad + \int_z^\zeta \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz'
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Aplicando as funções de forma nas Equações A.13 e A.14, temos que

$$\begin{aligned}
u_i(x, y, z, t) &\equiv p^F [u_i(x, y, z, t)]^F + p^S [u_i(x, y, z, t)]^S \\
&\neq [u_i(x, y, z, t)]^F \\
&\neq [u_i(x, y, z, t)]^S
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Assim, finalmente temos a **equação do perfil ajustado**:

$$\begin{aligned}
u_i(x, y, z, t) &= p^F \left(u_i^F + \frac{\tau_i^F}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^F}{v_{i3}} dz' + \frac{\tau_i^S}{\hat{\rho}} \int_{-h}^z \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \right) \\
&\quad + p^S \left(u_i^S - \frac{\tau_i^F}{\hat{\rho}} \int_z^\zeta \frac{p^F}{v_{i3}} dz' - \frac{\tau_i^S}{\hat{\rho}} \int_z^\zeta \frac{p^S}{v_{i3}} dz' \right) \\
&\quad + p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
&\quad + p^S \int_z^\zeta \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
&\quad - p^F \int_{-h}^z \left(\frac{p^S}{v_{i3}} \int_z^\zeta \Psi_i^0 dz' \right) dz' \\
&\quad - p^S \int_z^\zeta \left(\frac{p^F}{v_{i3}} \int_{-h}^z \Psi_i^0 dz' \right) dz'
\end{aligned} \tag{A.16}$$

que necessariamente deve ser expressa em função da CCDF, da CCDS, da CCCF e da CCCS.

A.3 O perfil de viscosidade turbulenta (v_{i3})

Através do cálculo da derivada vertical da Equação 3.12 ($\frac{\partial v_{i3}}{\partial z}$), é possível determinar a cota de ocorrência da máxima viscosidade:

$$z_i^0 = \left(\frac{\zeta - h}{2} \right) - \frac{H}{2} \left[\frac{v_{i3}^F - v_{i3}^S}{\left(\sqrt{\Upsilon_i - v_{i3}^F} + \sqrt{\Upsilon_i - v_{i3}^S} \right)^2} \right] . \quad (\text{A.17})$$

Através da aplicação da Equação 3.12 nos contornos, é possível determinar as viscosidades no fundo e na superfície. Temos que a **viscosidade no fundo** é dada por

$$\begin{aligned} v_{i3}^F(x, y, t) &\equiv v_{i3}|_{z=-h} \\ &= M_i \varepsilon^F (H + \varepsilon^S) \\ &= \Upsilon_i \left[1 - \left(\frac{H - \varepsilon^F + \varepsilon^S}{H + \varepsilon^F + \varepsilon^S} \right)^2 \right] \end{aligned} . \quad (\text{A.18})$$

Analogamente, temos que a **viscosidade na superfície** é dada por

$$\begin{aligned} v_{i3}^S(x, y, t) &\equiv v_{i3}|_{z=\zeta} \\ &= M_i \varepsilon^S (H + \varepsilon^F) \\ &= \Upsilon_i \left[1 - \left(\frac{H + \varepsilon^F - \varepsilon^S}{H + \varepsilon^F + \varepsilon^S} \right)^2 \right] \end{aligned} . \quad (\text{A.19})$$

Através da análise das Equações A.18 e A.19 e de acordo com este simplificado modelo matemático, verifica-se que **a viscosidade em um contorno depende:**

- da viscosidade máxima que ocorre na coluna d'água (Υ_i);
- da altura da coluna d'água (H); e
- das rugosidades equivalentes de ambos os contornos (do fundo, ε^F , e da superfície, ε^S).

Assim, a partir da análise conjunta das Equações A.18 e A.19 e das condições de contorno dinâmicas (CCDF e CCDS),

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{i3}^F \frac{\partial u_i^0}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \frac{\tau_i^{0F}}{\hat{\rho}} \\ v_{i3}^S \frac{\partial u_i^0}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\tau_i^{0S}}{\hat{\rho}} \end{array} \right. , \quad (\text{A.20})$$

pode-se inferir, novamente de acordo com este simplificado modelo matemático, que as condições de contorno no fundo e na superfície obedecem a uma dinâmica guiada pelas seguintes proposições:

1. **A viscosidade turbulenta em um contorno é determinada primariamente pela sua rugosidade equivalente.**
2. **O cisalhamento vertical em um contorno é determinado primariamente pela tensão aplicada à sua superfície.**

A.4 Expressões compactas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)

O Sistema de Equações A.21 define as variáveis A_i^0 e B_i^0 , referentes ao **perfil preliminar**. Elas representam os termos 2DH que escalam os logaritmos da Equação 3.16. Seus índices subscritos (i) representam a direção do escoamento à qual eles se referem. Assim, as variáveis A_1^0 e B_1^0 se referem ao escoamento que flui na direção x e as variáveis A_2^0 e B_2^0 se referem ao escoamento que flui na direção y .

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^0(x, y, t) \equiv \left[\frac{\tau_i^{0F}(H + \varepsilon^F) - \tau_i^{0S}\varepsilon^F}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \\ B_i^0(x, y, t) \equiv \left[\frac{\tau_i^{0F}\varepsilon^S - \tau_i^{0S}(H + \varepsilon^S)}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

O Sistema de Equações A.22 define as variáveis A_i e B_i , referentes ao **perfil ajustado** e totalmente análogas às variáveis da Equação A.21. Elas representam os termos 2DH que escalam os logaritmos da Equação 3.17.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i(x, y, t) \equiv \left[\frac{\tau_i^F(H + \varepsilon^F) - \tau_i^S\varepsilon^F}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \\ B_i(x, y, t) \equiv \left[\frac{\tau_i^F\varepsilon^S - \tau_i^S(H + \varepsilon^S)}{M_i \hat{\rho} H_0 H} \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.22})$$

O Sistema de Equações A.23 define as variáveis Z^{FF} , Z^{SF} , Z^{FS} e Z^{SS} , que representam os logaritmos das expressões do perfil preliminar (Equação 3.16) e do

perfil ajustado (Equação 3.17). Seus índices sobrescritos (letras F e S) significam respectivamente “fundo” e “superfície”. O primeiro deles se refere aos termos do logaritmando: os cujo primeiro índice é F têm logaritmandos relacionados ao fundo (h e ε^F); os cujo primeiro índice é S têm logaritmandos relacionados à superfície (ζ e ε^S). O segundo deles se refere à presença (ou ausência) da variável H no denominador do logaritmando: caso seja diferente do primeiro, o denominador possui a variável H ; caso seja igual ao primeiro, não.

$$\left\{ \begin{array}{l} Z^{FF}(x, y, z, t) \equiv \ln \left(\frac{h + z + \varepsilon^F}{\varepsilon^F} \right) \\ Z^{SF}(x, y, z, t) \equiv \ln \left(\frac{\zeta - z + \varepsilon^S}{H + \varepsilon^S} \right) \\ Z^{FS}(x, y, z, t) \equiv \ln \left(\frac{h + z + \varepsilon^F}{H + \varepsilon^F} \right) \\ Z^{SS}(x, y, z, t) \equiv \ln \left(\frac{\zeta - z + \varepsilon^S}{\varepsilon^S} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.23})$$

Desta forma, os perfis preliminar e ajustado podem ser representados de maneira bastante mais compacta e prática.

A.5 Fluxos dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)

Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} H^{FF}(x, y, t) \equiv - \int_{-h}^{\zeta} Z^{FF} dz = H + (H + \varepsilon^F) \ln \left(\frac{\varepsilon^F}{H + \varepsilon^F} \right) \\ H^{SF}(x, y, t) \equiv - \int_{-h}^{\zeta} Z^{SF} dz = H + \varepsilon^S \ln \left(\frac{\varepsilon^S}{H + \varepsilon^S} \right) \\ H^{FS}(x, y, t) \equiv - \int_{-h}^{\zeta} Z^{FS} dz = H + \varepsilon^F \ln \left(\frac{\varepsilon^F}{H + \varepsilon^F} \right) \\ H^{SS}(x, y, t) \equiv - \int_{-h}^{\zeta} Z^{SS} dz = H + (H + \varepsilon^S) \ln \left(\frac{\varepsilon^S}{H + \varepsilon^S} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.24})$$

Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{FF}(x, y, t) \equiv \int_{-h}^{\zeta} p^F Z^{FF} dz = -\frac{2(H + \varepsilon^F)H^{FF} + H^2}{4H} \\ P^{SF}(x, y, t) \equiv \int_{-h}^{\zeta} p^F Z^{SF} dz = \frac{2\varepsilon^S H^{SF} - H^2}{4H} \\ P^{FS}(x, y, t) \equiv \int_{-h}^{\zeta} p^S Z^{FS} dz = \frac{2\varepsilon^F H^{FS} - H^2}{4H} \\ P^{SS}(x, y, t) \equiv \int_{-h}^{\zeta} p^S Z^{SS} dz = -\frac{2(H + \varepsilon^S)H^{SS} + H^2}{4H} \end{array} \right. \quad (\text{A.25})$$

A.6 Derivadas dos perfis preliminar (u_i^0) e ajustado (u_i)

Temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z^{FF}}{\partial x_j} = -\left[\frac{1}{\varepsilon^F} \frac{\partial \varepsilon^F}{\partial x_j} \right] + \left[\frac{\partial(h + z + \varepsilon^F)}{\partial x_j} \right] \left(\frac{1}{h + z + \varepsilon^F} \right) \\ \frac{\partial Z^{SF}}{\partial x_j} = -\left[\frac{1}{(H + \varepsilon^S)} \frac{\partial(H + \varepsilon^S)}{\partial x_j} \right] + \left[\frac{\partial(\zeta - z + \varepsilon^S)}{\partial x_j} \right] \left(\frac{1}{\zeta - z + \varepsilon^S} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.26})$$

Assim, se definirmos

$$\left\{ \begin{array}{l} P_j(x, y, t) \equiv - \left[\frac{1}{\varepsilon^F} \frac{\partial \varepsilon^F}{\partial x_j} \right] \\ Q_j(x, y, t) \equiv \left[\frac{\partial(h + z + \varepsilon^F)}{\partial x_j} \right] = \begin{cases} \frac{\partial(h + \varepsilon^F)}{\partial x_j} & \text{para } j \in \{1, 2, 4\} \\ 1 & \text{para } j \equiv 3 \end{cases} \\ R_j(x, y, t) \equiv - \left[\frac{1}{(H + \varepsilon^S)} \frac{\partial(H + \varepsilon^S)}{\partial x_j} \right] \\ S_j(x, y, t) \equiv \left[\frac{\partial(\zeta - z + \varepsilon^S)}{\partial x_j} \right] = \begin{cases} \frac{\partial(\zeta + \varepsilon^S)}{\partial x_j} & \text{para } j \in \{1, 2, 4\} \\ -1 & \text{para } j \equiv 3 \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{A.27})$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} Z^F(x, y, z, t) \equiv \frac{1}{(h + z + \varepsilon^F)} \\ Z^S(x, y, z, t) \equiv \frac{1}{(\zeta - z + \varepsilon^S)} \end{array} \right. , \quad (\text{A.28})$$

podemos escrever a Equação A.26 da seguinte forma compacta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z^{FF}}{\partial x_j} = P_j + Q_j Z^F \\ \frac{\partial Z^{SF}}{\partial x_j} = R_j + S_j Z^S \end{array} \right. . \quad (\text{A.29})$$

A.7 Velocidade de atrito direcional referente ao fundo (u_i^{*F})

A magnitude da *tensão direcional no fundo* é dada por

$$\tau^{*F}(x, y, t) = \sqrt{(\tau_1^{*F})^2 + (\tau_2^{*F})^2} . \quad (\text{A.30})$$

Por sua vez, a magnitude da *velocidade de atrito direcional referente ao fundo* deve obedecer às seguintes condições:

$$\begin{cases} u^{*F}(x, y, t) = \sqrt{(u_1^{*F})^2 + (u_2^{*F})^2} \\ u^{*F}(x, y, t) = \sqrt{\frac{\tau^{*F}}{\hat{\rho}}} \end{cases} . \quad (\text{A.31})$$

A primeira condição se refere à insensibilidade da magnitude à orientação do sistema de coordenadas. A segunda condição se refere à proporcionalidade entre a velocidade de atrito e a tensão.

Logo, pela Equação A.31, temos que

$$\sqrt{(u_1^{*F})^2 + (u_2^{*F})^2} = \sqrt{\frac{\tau^{*F}}{\hat{\rho}}} , \quad (\text{A.32})$$

que é uma condição que u_i^{*F} e τ_i^{*F} devem obedecer.

A.8 Velocidade de atrito direcional referente à superfície (u_i^{*S})

A magnitude da *tensão direcional na superfície* é dada por

$$\tau^{*S}(x, y, t) = \sqrt{(\tau_1^{*S})^2 + (\tau_2^{*S})^2} . \quad (\text{A.33})$$

Por sua vez, a magnitude da *velocidade de atrito direcional referente à superfície* deve obedecer às seguintes condições:

$$\begin{cases} u^{*S}(x, y, t) = \sqrt{(u_1^{*S})^2 + (u_2^{*S})^2} \\ u^{*S}(x, y, t) = \sqrt{\frac{\tau^{*S}}{\hat{\rho}}} \end{cases} . \quad (\text{A.34})$$

A primeira condição se refere à insensibilidade da magnitude à orientação do sistema de coordenadas. A segunda condição se refere à proporcionalidade entre a velocidade de atrito e a tensão.

Logo, pela Equação A.34, temos que

$$\sqrt{(u_1^{*S})^2 + (u_2^{*S})^2} = \sqrt{\frac{\tau^{*S}}{\hat{\rho}}} , \quad (\text{A.35})$$

que é uma condição que u_i^{*S} e τ_i^{*S} devem obedecer.

A.9 Relação de grandezas com dimensão vertical discretizada

Funções principais de z (respectivamente Equações A.23, A.28 e 3.35):

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_k^{FF}(x, y, t) \equiv \ln \left(\frac{h + z_k + \varepsilon^F}{\varepsilon^F} \right) = \ln \left(\frac{\varepsilon^F + k \Delta z}{\varepsilon^F} \right) \\ Z_k^{SF}(x, y, t) \equiv \ln \left(\frac{\zeta - z_k + \varepsilon^S}{H + \varepsilon^S} \right) = \ln \left(\frac{H + \varepsilon^S - k \Delta z}{H + \varepsilon^S} \right) \\ Z_k^{FS}(x, y, t) \equiv \ln \left(\frac{h + z_k + \varepsilon^F}{H + \varepsilon^F} \right) = \ln \left(\frac{\varepsilon^F + k \Delta z}{H + \varepsilon^F} \right) \\ Z_k^{SS}(x, y, t) \equiv \ln \left(\frac{\zeta - z_k + \varepsilon^S}{\varepsilon^S} \right) = \ln \left(\frac{H + \varepsilon^S - k \Delta z}{\varepsilon^S} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.36})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_k^F(x, y, t) \equiv \frac{1}{(h + z_k + \varepsilon^F)} = \frac{1}{(\varepsilon^F + k \Delta z)} \\ Z_k^S(x, y, t) \equiv \frac{1}{(\zeta - z_k + \varepsilon^S)} = \frac{1}{(H + \varepsilon^S - k \Delta z)} \end{array} \right. \quad (\text{A.37})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_k^{FFF}(x, y, t) \equiv \frac{Z_k^{FF}}{Z_k^F} - k \Delta z \\ Z_k^{SFF}(x, y, t) \equiv -\frac{Z_k^{SF}}{Z_k^S} - k \Delta z \\ Z_k^{FFS}(x, y, t) \equiv -\frac{Z_k^{FF}}{Z_k^F} - H^{FF} + k \Delta z \\ Z_k^{SFS}(x, y, t) \equiv \frac{Z_k^{SF}}{Z_k^S} - H^{SF} + k \Delta z \end{array} \right. \quad (\text{A.38})$$

Perfil preliminar (Equação 3.18):

$$u_{ik}^0(x, y, t) \equiv u_i^{0F} + A_i^0 Z_k^{FF} + B_i^0 Z_k^{SF} \quad (\text{A.39})$$

Perfil ajustado (Equação 3.19):

$$\begin{aligned}
u_{ik}(x, y, t) = & p_k^F (A_i Z_k^{FF} + B_i Z_k^{SF}) + p_k^S (u_i^S + A_i Z_k^{FS} + B_i Z_k^{SS}) \\
& + p_k^F \mathcal{I}^F \left[\frac{p_k^F}{v_{i3k}} \mathcal{I}^F (\Psi_{ik}^0) \right] + p_k^S \mathcal{I}^S \left[\frac{p_k^S}{v_{i3k}} \mathcal{I}^S (\Psi_{ik}^0) \right] \\
& - p_k^F \mathcal{I}^F \left[\frac{p_k^S}{v_{i3k}} \mathcal{I}^S (\Psi_{ik}^0) \right] - p_k^S \mathcal{I}^S \left[\frac{p_k^F}{v_{i3k}} \mathcal{I}^F (\Psi_{ik}^0) \right]
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Derivada do perfil preliminar (Equação 3.23):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{ik}^0}{\partial x_j} \equiv & A_i P_j + B_i R_j \\
& + \frac{\partial A_i}{\partial x_j} Z_k^{FF} + \frac{\partial B_i}{\partial x_j} Z_k^{SF} + A_i Q_j Z_k^{ZF} + B_i S_j Z_k^{ZS}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

O perfil de viscosidade (Equação 3.12):

$$\begin{aligned}
v_{i3k}(x, y, t) \equiv & M_i (h + z_k + \varepsilon^F) (\zeta - z_k + \varepsilon^S) \\
= & M_i (\varepsilon^F + k \Delta z) (H + \varepsilon^S - k \Delta z)
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Funções de forma (Equações 3.5 e 3.6):

$$\left\{ \begin{aligned} p_k^F(x, y, t) & \equiv \frac{\zeta - z_k}{H} = \frac{H - k \Delta z}{H} \\ p_k^S(x, y, t) & \equiv \frac{h + z_k}{H} = \frac{k \Delta z}{H} \end{aligned} \right. \tag{A.43}$$

Velocidade superficial do perfil ajustado:

$$\begin{aligned}
u_i^S(U_i(x, y, t)) = & 2U_i - \frac{2}{H} \left(A_i (P^{FF} + P^{FS}) + B_i (P^{SF} + P^{SS}) \right) \\
& - \frac{2}{H} \mathcal{I} \left(p_k^F \mathcal{I}^F \left(\frac{p_k^F}{v_{i3k}} \mathcal{I}^F (\Psi_{ik}^0) \right) \right) - \frac{2}{H} \mathcal{I} \left(p_k^S \mathcal{I}^S \left(\frac{p_k^S}{v_{i3k}} \mathcal{I}^S (\Psi_{ik}^0) \right) \right) \\
& + \frac{2}{H} \mathcal{I} \left(p_k^F \mathcal{I}^F \left(\frac{p_k^S}{v_{i3k}} \mathcal{I}^S (\Psi_{ik}^0) \right) \right) + \frac{2}{H} \mathcal{I} \left(p_k^S \mathcal{I}^S \left(\frac{p_k^F}{v_{i3k}} \mathcal{I}^F (\Psi_{ik}^0) \right) \right)
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Velocidade vertical (Equação 3.40):

$$\begin{aligned}
w_k^0(x, y, t) &= -p_k^F \frac{\partial h}{\partial t} + p_k^S \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\
&+ p_k^F \left(W^{FF} Z_k^{FFF} + W^{SF} Z_k^{SFF} + W^F Z_k^{FF} + W^S (-Z_k^{SF}) \right) \\
&- p_k^S \left(W^{FF} Z_k^{FFS} + W^{SF} Z_k^{SFS} + W^F (-Z_k^{FS}) + W^S Z_k^{SS} \right)
\end{aligned} \tag{A.45}$$