

DISTRIBUCION VERTICAL DE CONCENTRACIONES EN ESCURRIMENTOS  
TURBULENTOS CON SUPERFICIE LIBRE

PATRICIO CORDERO ORTIZ

TESIS SOMETIDA AL CUERPO DOCENTE DE LA COORDENACION DE LOS  
PROGRAMAS DE POST-GRADUACION DE INGENIERIA DE LA UNIVERSI -  
DAD FEDERAL DE RIO DE JANEIRO COMO PARTE DE LOS REQUISITOS  
NECESARIOS PARA OBTENCION DEL GRADO DE "MASTER" EN CIENCIAS  
(M. Sc.)

Aprobada por

*Luiz Carlos Vieira da Silva*  
*Flávio Mascari*  
*Clelio Ramalho*

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
MAYO DE 1971

A    M A R I A N A

AGRADECIMIENTOS

Al Profesor Rui Carlos Da Vieira Silva por la acertada orientación dada para el desarrollo de la presente Tesis.

Al Profesor Fernando Luiz Lobo B. Carneiro que nunca me negó su valiosa ayuda.

Al personal Docente y Administrativo de la Coordinación de Programas de Post-Graduación de Ingeniería "COPPE" .

A la " OEA " por la ayuda financiera.

## S I N O P S I S

La presente tesis trata del establecimiento de la distribución de concentraciones en flujo turbulento con partículas sólidas suspendidas. Empléanse dos tratamientos analíticos diferentes:

El primero consiste en una generalización del principio de similitud cinemática de Th. von Kármán. El perfil de concentraciones así obtenido aplícase satisfactoriamente para elevadas concentraciones de partículas gruesas y concuerda con experiencias realizadas en laboratorio,<sup>19</sup> en donde la mayor parte del transporte efectuóse en la zona baja del flujo. Con todo, la distribución de velocidades a que se llega, ajústase con bastante precisión, en toda la vertical, a los valores medidos.

El segundo tratamiento está basado en el coeficiente de transferencia de sedimentos. Consíguese de este modo una distribución de concentraciones aplicable a toda la vertical. Los resultados teóricos concuerdan, con razonable precisión, con mediciones efectuadas en la zona media del Río Grande, Nuevo México.<sup>14</sup>

En los dos tratamientos es posible calcular la descarga sólida total en suspensión, mediante integración directa.

Finalmente, la descarga sólida en suspensión calculada con el segundo procedimiento se compara con la dada por el Proceso Modificado de Einstein.

## S I N Ó P S E

A presente tese trata do estabelecimento da distribuição de concentrações em fluxo turbulento com partículas sólidas suspensas. São empregados dois tratamentos analíticos distintos:

O primeiro consiste em uma generalização do princípio de similaridade cinemática de Th. von Kármán. O perfil de concentrações assim obtido aplica-se satisfatoriamente para elevadas concentrações de partículas grossas e concorda com experiências realizadas em laboratório,<sup>19</sup> onde a maior parte do transporte efetuou-se na zona baixa do fluxo. Contudo, a distribuição de velocidades a que se chega, ajusta-se com bastante precisão, em toda a vertical, a dados medidos.

O segundo tratamento está baseado no coeficiente de transferência de sedimentos. Consegue-se deste modo uma distribuição de concentrações aplicável a toda a vertical. Os resultados teóricos - concordam, com razoável precisão, com medições realizadas no médio Rio Grande, Novo México.<sup>14</sup>

Nos dois tratamentos é possível calcular a descarga sólida total em suspensão, mediante integração direta.

Finalmente, a descarga sólida em suspensão calculada pelo segundo procedimento, é comparada com a dada pelo Processo Modificado de Einstein.

ABSTRACT

The objective of this thesis is to determine the distribution of concentration in turbulent flow with suspended solid particles.

Two distinct analytic approaches are employed to determine the concentration distribution; the first one consists of a generalization of the similarity principle of Th. von Kármán, and the second has been based on the use of a sediment diffusion coefficient.

The concentration profile obtained by the first approach can be applied satisfactorily to flows with high concentration of coarse particles and the results agree substantially with experimental data of flows,<sup>19</sup> in which the major part of the transport took place at the lower part of the channel. On the other hand, the velocity profile obtained agrees to a high degree of accuracy with experimental data, throughout the depth of the channel.

The second approach leads to a concentration distribution that can be applied to the whole depth of the channel. The theoretical results described in this thesis are in agreement with those obtained by Nordin and Dempster in measurements taken at the Middle Rio Grande, New Mexico.<sup>14</sup>

The total suspended load is derived by direct integration of the concentration profile obtained by both methods. The solids discharge, derived from the second approach is compared with the one given by the Modified Procedure of Einstein.

I N D I C E

Sinopsis . . . . .	ii
Lista de Símbolos. . . . .	viii
CAPITULO I. INTRODUCCION. REVISION DE LA LITERATURA . . . . .	1
CAPITULO II. SIMILARIDAD CINEMATICA EN EL TRANSPORTE SOLIDO POR SUSPEN- SION. . . . .	26
2.1 Suposiciones . . . . .	26
2.2 Corrección de la densidad. . . . .	27
2.3 Corrección de la viscosidad dinámica . . . . .	31
2.4 Corrección de la velocidad de deposi- tación . . . . .	32
2.5 Ecuación del movimiento . . . . .	32
2.6 Ecuación de la continuidad . . . . .	35
2.7 Principio de similaridad. . . . .	38
2.8 Esfuerzo cortante turbulento . . . . .	49
2.9 Perfil de velocidades. . . . .	53
2.10 Perfil de concentraciones. . . . .	57
2.11 Variación de la viscosidad dinámica . . . . .	59

2.12	Variación de la velocidad de caída. . . . .	61
2.13	Comparación del perfil de velocidad des. con las experiencias . . . . .	66
2.14	Comparación del perfil de concentra- ciones con las experiencias . . . . .	93
2.15	Descarga sólida total en suspensión . . . . .	105
CAPITULO III. DISTRIBUCION DE SEDIMENTOS SUS- PENDIDOS BASADA EN EL COEFICI- ENTE DE TRANSFERENCIA DE SEDI- MENTOS . . . . .		
		109
3.1	Perfil de velocidades . . . . .	109
3.2	Coefficiente de transferencia de sedi- mentos. . . . .	110
3.3	Distribución de concentraciones . . . . .	112
3.4	Comparación de la teoría con las ex- periencias. . . . .	113
3.4.1	Comprobación del perfil de velocidades. . . . .	115
3.4.2	Comprobación del perfil de concentra- ciones. . . . .	119
3.5	Obtención del exponente $Z_2$ . . . . .	121
3.6	Descarga sólida total en suspensión . . . . .	125
3.7	Descarga sólida por arrastre . . . . .	128
3.8	Resultados. . . . .	128



CONCLUSIONES. . . . .	132
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS . . . . .	135
APENDICE. . . . .	139

LISTA DE SIMBOLOS

A	Escala de velocidad
$A_1$	Función definida por la ecuación (3.27)
a	Nivel de referencia y = a
B	Coefficiente
$C_*$	Variable definida por la ecuación (2.3)
c	Concentración
$c_m$	Concentración media en la vertical
d	Diámetro de las partículas
$d_1, d_2, d_3$	Coefficientes
F	Función adimensional
f	función adimensional
$G_A$	Descarga sólida por arrastro en toneladas por día
$G_S$	Descarga sólida total en suspensión en toneladas por día
$G_T$	Descarga sólida total en toneladas por día
g	Aceleración de la gravedad
h	Altura total del escurrimiento
$I_1$	Valor adimensional definido por la ecuación (1.26-a)
$I_2$	Valor adimensional definido por la ecuación (1.26-b)
i	Pendiente del fondo del canal
J	Gradiente de energía
$k_s$	Altura de rugosidad
l	Longitud de mezcla de Prandtl. Escala de longitud
ln	Logaritmo neperiano
log	Logaritmo decimal
m	Función adimensional
N	Coefficiente
n	Función adimensional
$n_2, n_3$	Exponentes
$P_f$	Peso del fluido sin sedimentos

$P_s$	Peso de los sedimentos sumergidos
$P$	Peso de la mezcla
$P_{f1}$	Potencia para vencer la resistencia hidraulica
$P_{st}$	Potencia total para sustentar partículas de varios diámetros
$P_{sw}$	Potencia para sustentar una partícula de diámetro dado
$P$	Presión. Función adimensional
$q_s$	Descarga sólida en suspensión por unidad de ancho y peso
$R$	Radio hidráulico
$R_E$	Número de Reynolds
$s$	Gravedad específica de los sedimentos
$s_t$	Parámetro característico de la turbulencia
$t$	tiempo
$u$	Componente de la velocidad en la dirección del eje x
$u_m$	Velocidad media en la vertical
$u_s$	Velocidad en la superficie libre
$u_f$	Velocidad de fricción
$V$	Volumen de la mezcla
$V_f$	Volumen del fluido sin sedimentos
$V_s$	Volumen de los sedimentos
$v$	Componente de la velocidad en la dirección del eje y
$W$	Velocidad de depositación de las partículas
$W_f$	Velocidad de depositación en agua en reposo
$X$	Factor de corrección
$x$	Coordenada en la dirección del flujo medio
$y$	Coordenada perpendicular a la dirección del flujo medio
$z$	Exponente en la distribución de concentraciones de la ecuación (1.7)
$Z_1$	Exponente en la distribución de concentraciones de la ecuación (2.55)
$Z_2$	Exponente en la distribución de concentraciones de la ecuación (3.17)
$\alpha$	Gravedad específica de los sedimentos sumergidos
$\beta$	Coefficiente

$\gamma$	Peso específico de la mezcla
$\gamma_f$	Peso específico del fluido
$\gamma_s$	Peso específico de los desimentos
$\gamma'_s$	Peso específico de los sedimentos sumergidos
$\Delta$	Expresión definida por $\Delta = K_s/X$
$\delta$	Espesor nominal de la subcapa laminar
$\epsilon_m$	Coefficiente de transferencia de momento o viscosidad cinemática aparente o virtual
$\epsilon_s$	Coefficiente de difusión o de transferencia de sedimentos
$\eta$	Factor adimensional
$\lambda$	Parámetro
$\nu$	Viscosidad cinemática
$\mu$	Viscosidad dinámica
$\zeta$	Factor adimensional
$\rho$	Densidad de la mezcla
$\rho_f$	Densidad del fluido
$\tau$	Esfuerzo cortante
$\psi_1, \psi_2, \psi_3$	Escalas adimensionales
$\chi$	Constante universal de von Kármán o coeficiente de cambio turbulento

## CAPITULO I

### INTRODUCCION - REVISION DE LA LITERATURA

Es de gran interés en varias ramas de la Ingeniería conocer el comportamiento de partículas discretas suspendidas en flujo turbulento. Aparte del conocimiento incompleto del mecanismo de la turbulencia, entran en juego numerosos factores que dificultan la solución del problema de la suspensión de sedimentos.

La forma de distribuirse las partículas sobre la vertical depende en grande parte de 1) concentración de las partículas; 2) tamaño de las partículas con respecto a la escala de la turbulencia del fluido.

Cuando la concentración es grande, existe interacción directa entre las partículas a través de choques y de efectos que el flujo ocasiona en la vecindad de los sedimentos. El movimiento relativo de las partículas con respecto al fluido puede causar una disipación extra de la energía cinética, amorteciendo la turbulencia;

ésta puede incluso ser anulada ante la presencia de concentraciones extremadamente altas. Si las partículas son muy finas, además de los efectos puramente hidrodinámicos tienen un papel importante otros, tal como la aglomeración de partículas.

El otro caso extremo corresponde a concentraciones muy pequeñas; puede entonces despreciarse la interferencia entre las partículas y considerar individualmente cada una de ellas. Si las partículas son grandes comparadas con la escala de la turbulencia, el incremento de la resistencia al flujo será el principal efecto de la turbulencia sobre las partículas; éstas seguirán más o menos el movimiento lento de los grandes remolinos caracterizados por la macro-escala de la turbulencia. Si por el contrario, las partículas son pequeñas comparadas con la micro-escala, ellas tenderán a seguir todas las componentes turbulentas del fluido, siendo la resistencia de las partículas de naturaleza enteramente viscosa.

Teóricamente se conoce poco acerca de la dinámica de la mezcla de partículas discretas de tamaño y concentración arbitrarias, en donde a la vez existe turbulencia. Para concentraciones altas de partículas finas, la mezcla puede considerarse como una suspensión homogénea y ser tratada como fluido no Newtoniano con ciertas características distintivas.

En los varios tratamientos analíticos sobre el problema de suspensión de sedimentos se considera la región ubicada desde una cierta distancia del fondo, de modo que los efectos de frontera ocasionados por el transporte de arrastre no influyan directamente. La formulación elemental sigue los principios de la mezcla y difusión turbulentas. Así, se supone que el movimiento es estacionario y que los valores medios de la distribución de sedimentos y de velocidad permanecen los mismos a lo largo del curso de agua (principio de uniformidad). La componente vertical de la velocidad turbulenta transporta fluido en sentido ascendente y descendente, mas el porcentaje neto de flujo a través de un área unitaria horizontal es cero. Superpuesta al movimiento de las partículas transportadas por el fluido merced a las fluctuaciones turbulentas está la velocidad de caída o de depositación  $W$ . Asumiendo que el mecanismo de difusión turbulenta es análogo al mecanismo de cambio de momento en el flujo y usando la ecuación de continuidad, O'Briend<sup>1</sup> llega a la siguiente ecuación diferencial para suspensión de sedimentos:

$$cW + \epsilon_s \frac{dc}{dy} = 0$$

1.1

en donde

$c$  = concentración de partículas suspendidas

$W$  = velocidad de depositación

$\epsilon_s$  = coeficiente de transferencia de sedimentos

$y$  = coordenada perpendicular a la dirección del flujo medio

La ecuación (1.1) implica un estado de equilibrio entre el porcentaje de sedimentos que descienden y la cantidad de los mismos que se movimentan en sentido ascendente gracias a las fluctuaciones turbulentas.

Empleando la hipótesis dada por Boussinesq<sup>2</sup> en analogía con el coeficiente de viscosidad cinemática para flujo laminar:

$$\tau = \rho_f \epsilon_m \frac{du}{dy} \quad 1.2$$

y combinando con la distribución lineal del esfuerzo cortante turbulento

$$\tau = \tau_0 (1 - y/h) \quad 1.3$$

se obtiene:

$$\frac{1}{\epsilon_m} = \frac{\rho_f \frac{du}{dy}}{\tau_0 (1 - y/h)} \quad 1.4$$



en donde:

$\epsilon_m$  = coeficiente de transferencia de momento, también llamado viscosidad cinemática aparente o virtual del flujo turbulento.

$\tau$  = esfuerzo cortante turbulento

$\tau_0$  = esfuerzo cortante en la pared (fondo)

$\rho_f$  = densidad del fluido

$u$  = componente de la velocidad del fluido en la dirección del flujo medio

Admitiendo la distribución logarítmica de velocidades dada por Keulegan<sup>22</sup>

$$\frac{u - u_s}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \left( \frac{y}{h} \right) \quad 1.5a$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\chi y} \quad 1.5b$$

Sustituyendo (1.5b) en (1.4) y aceptando  $\epsilon_m = \epsilon_s$ :

$$\epsilon_s = \epsilon_m = u_* \chi y \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right) \right] \quad 1.6$$

en donde:

$u_s$  = velocidad en la superficie libre

$u_* = \sqrt{T_0 / \rho_f} = \sqrt{g R J}$  = velocidad de fricción

$\chi$  = constante universal de von Kármán o coeficiente de cambio turbulento

$g$  = aceleración de la gravedad

$R$  = radio hidráulico

$J$  = gradiente de energía

La ecuación (1.6) da una distribución parabólica para  $\epsilon_m$ , anulándose para  $y = 0$  y  $y = h$ , el valor máximo ocurre en  $y = h/2$  y es  $\epsilon_{\text{máx}} = 0.25 u_* \chi h$ . Nótese la inconsistencia entre la distribución lineal del esfuerzo cortante, ecuación (1.3) y la distribución logarítmica de velocidades (ecuación 1.5a) que fué deducida para la capa de esfuerzo cortante constante.

Sustituyendo la ecuación (1.6) en la (1.1) e integrando obtiéndose:

$$\frac{c}{c_a} = \left( \frac{h-y}{y} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^Z \quad 1.7$$

con

$$Z = \frac{W}{u_* \chi} \quad 1.8$$

El valor de  $a$  es un nivel de referencia en donde se conoce

la concentración  $C = C_a$ . Einstein<sup>3</sup> sigue otro procedimiento mas lega a la misma ecuación (1.7).

Hunt<sup>4</sup> propuso un refinamiento a la teoría elemental de la difusión. Considerando flujo uniforme y estacionario y llevando en consideración el espacio ocupado por las partículas de sedimentos, la ecuación general para la difusión turbulenta de material uniforme es:

$$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + c \frac{d\epsilon_s}{dy} (\epsilon_m - \epsilon_s) + (1 - c) cw = 0 \quad 1.9$$

Siendo  $c$  la concentración en volumen, definida como el cuociente entre el volumen de sedimentos y el volumen total.

Despreciando el volumen de agua desplazado:

$$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + c \frac{d\epsilon_s}{dy} (\epsilon_m - \epsilon_s) + cw = 0 \quad 1.10$$

la cual es idéntica a la ecuación (1.1) cuando  $\epsilon_s = \epsilon_m$ . Si aceptamos que  $\epsilon_s = \epsilon_m$ , mas llevamos en consideración el volumen ocupado por las partículas, se tiene:

$$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + (1 - c) wc = 0 \quad 1.11$$

El coeficiente de difusión  $\epsilon_s$  usado por Hunt se obtiene con el mismo procedimiento empleado para de deducción de (1.6), con la diferencia de que  $du/dy$  se obtiene de:

$$\frac{u - u_s}{u_*} = \frac{1}{\chi} \left[ (1 - y/h)^{1/2} + B \ln \frac{B - (1 - y/h)^{1/2}}{B} \right] \quad 1.12$$

La ecuación (1.12) se consigue usando el principio de similitud de von Kármán. B es una constante a ser determinada con datos experimentales. Para agua sin sedimentos se asume que  $(du/dy)_{y=0}$  tiende a infinito; entonces  $B = 1$  y la ecuación se transforma en la dada por Th. von Kármán en su ley universal de distribución de velocidades<sup>2</sup>. Con la hipótesis de Boussinesq y la ecuación (1.12) substituídas en la (1.11), obtiéndose por integración la ecuación de Hunt para distribución de sedimentos suspendidos:

$$\left( \frac{c}{1 - c} \right) \left( \frac{c_a}{1 - c_a} \right) = \left[ \frac{\sqrt{1 - y/h}}{\sqrt{1 - a/h}} \left( \frac{B_s - \sqrt{1 - a/h}}{B_s - \sqrt{1 - y/h}} \right) \right]^Z \quad 1.13-a$$

en la cual

$$Z = \frac{W}{B_s \chi_s u_*} \quad 1.14$$

el subíndice s indica los términos referentes a sedimentos. Para pe queñas concentraciones puede usarse

$$\frac{c}{c_a} = \left[ \frac{\sqrt{1 - y/h}}{\sqrt{1 - a/h}} \left( \frac{B_s - \sqrt{1 - a/h}}{B_s - \sqrt{1 - y/h}} \right) \right]^2 \quad 1.13-b$$

Usando datos de Vanoni, Hunt mostró que su ecuación, con  $B_s$  y  $\chi_s$  calculados convenientemente, concordaba mejor con medidas de concentración que la ecuación (1.7).  $B_s$  varió entre 0.99 y 1, y  $\chi_s$  entre 0.31 y 0.44. El hecho de que la ecuación (1.7) posea una constante arbitraria en cuanto la (1.13-a) contiene 2, hace que los datos se adapten mejor a ésta última. Sin embargo la ecuación de Hunt no ha sido usada, posiblemente por su forma complicada y por contener más de una constante arbitraria.

Hans A. Einstein y Ning Chien<sup>5</sup> propusieron algunas modificaciones a la teoría en la cual está basada la ecuación (1.7) con el fin de explicar las divergencias entre la teoría y la práctica. Esta teoría está basada en la idea de la longitud de mezcla. Asímesa

que tanto el fluido como los sedimentos muévense verticalmente a través de un área horizontal situada al nivel  $y$ , una distancia que en media es igual a la longitud de mezcla. Después de esto tiene lugar la mezcla en la nueva capa vecina. Introduciendo otras suposiciones Einstein y Chien obtienen la ecuación:

$$\frac{C}{C_a} = \left[ \frac{1 - \sqrt{\frac{h-a}{h}}}{1 - \sqrt{\frac{h-y}{h}}} \right] \frac{Z}{1+N\chi Z} \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{h-a}{h}}}{1 + \sqrt{\frac{h-y}{h}}} \right] \frac{Z}{1-N\chi Z} \left[ \frac{\sqrt{\frac{h-a}{h}} + N\chi Z}{\sqrt{\frac{h-y}{h}}} \right] \frac{2Z}{N^2 \chi^2 Z^2 - 1}$$

1.15

en donde

$$Z = \frac{W}{\chi u_*}$$

1.8

$N$  es una constante a determinarse con datos de la experiencia. La ecuación (1.8), además de contener dos constantes arbitrarias, complica el cálculo de la descarga sólida en suspensión por su forma complicada. Para valores pequeños de  $Z$ , la (1.8) se reduce a la ecuación (1.7).

Han sido realizadas numerosas mediciones de distribución de sedimentos suspendidos por varios investigadores, ya sea en corrientes naturales o en laboratorio, demostrando que la forma de la

ecuación (1.7) concuerda con las experiencias. Sin embargo los valores de  $Z$  calculados con la fórmula (1.8) no corresponden a los valores medidos que en general resultan menores que los teóricos, indicando que la distribución de sedimentos suspendidos es más uniforme que lo predicho por la teoría expuesta. Las discrepancias existentes entre la teoría y la práctica se deben, en resumen, a dos causas: -elección inadecuada del coeficiente de transferencia de sedimentos; -determinación incorrecta del exponente  $Z$ .

Una de las correcciones empleadas para  $\epsilon_s$  es:

$$\epsilon_s = \beta \epsilon_m \quad 1.16$$

en donde  $\beta$  es una función del tamaño de las partículas. Por tanto el exponente de la distribución de sedimentos será  $Z = W/\beta \chi u_*$  que es de la misma forma que el dado por Hunt. En base a una serie de experiencias, Ismail<sup>6</sup> dio los siguientes resultados:

$$\epsilon_s = 1.5 \epsilon_m \quad \text{para granos de } 0.1 \text{ mm}$$

$$\epsilon_s = 1.3 \epsilon_m \quad \text{para granos de } 0.16 \text{ mm}$$

Tanto la ecuación (1.16) como la (1.6), anulan el valor de

$\epsilon_s$  para  $y = 0$  e  $y = h$ . Por el contrario experiencias realizadas por Neil L. Coleman<sup>7</sup> en laboratorio muestran que el coeficiente de transferencia de sedimentos aumenta con la distancia desde el fondo del canal, adquiriendo un valor máximo a una distancia aproximadamente igual a 20 ó 30% de la altura total tendiendo desde allí a mantenerse constante hasta la superficie libre.

La segunda dificultad refiérese a la determinación del exponente  $Z$  el cual a su vez depende de la velocidad de caída y del coeficiente de cambio turbulento. Numerosas ideas se han dado sobre la influencia de la concentración en la velocidad de depositación<sup>8, 9,10,11,12</sup> mas todavía no se ha encontrado una relación satisfactoria. El incluir una fórmula que de la variación de la velocidad de depositación con la concentración puede, además de complicar el cálculo, ocasionar errores en vez de mejorar la determinación de  $Z$ . Acostúmbrase por eso a emplear como velocidad de caída aquella que corresponde a la de depositación de partículas en agua tranquila,  $W_f$  dada por la ecuación de Rubey o tomada de las curvas estandar de velocidad de caída. Mas a pesar de usar  $W_f$  en vez de  $W$ , los resultados experimentales hacen preveer que el exponente  $Z$  no varia con la potencia 1 de  $W_f$  mas si con una potencia menor: Colby y Hembrée<sup>13</sup> encontraran una expresión del tipo  $Z \sim W_f^{0.7}$ , en cuanto Nordin y



Dempster<sup>14</sup> dieron la expresión  $Z \sim W^{0.55}$

En cuanto al coeficiente de cambio turbulento, éste posee para flujo paralelo de agua sin sedimentos un valor de  $\chi = 0.4$ , observándose que disminuye a medida que aumenta la concentración de partículas hasta un valor de 0.2 ó menos. Para explicar la disminución de  $\chi$  y por ende la disminución en el coeficiente de transferencia de momento, Vanoni<sup>15</sup> estableció la hipótesis de que la turbulencia disminuye cuando existe presencia de sedimentos. En efecto éstos se mantienen suspendidos merced a una velocidad vertical y la energía necesaria para que esto ocurra debe provenir de la turbulencia.

La cantidad de energía por unidad de tiempo o la potencia para mantener un grano en suspensión es igual al peso sumergido del grano multiplicado por su velocidad de caída. La potencia  $P_{sw}$  para sustentar partículas de sedimentos, de un dado tamaño o una dada velocidad, en una columna de fluido de sección transversal unitaria y altura igual a la profundidad  $h$  de la corriente es:

$$P_{sw} = \left( 1 - \frac{\gamma_f}{\gamma_s} \right) W \int_0^h c dy \quad 1.17-a$$

c está dado en peso por unidad de volumen. La ecuación (1.17-a) puede escribirse:

$$P_{sw} = \left(1 - \frac{\gamma_f}{\gamma_s}\right) W c_m h \quad 1.17-b$$

en donde  $C_m$  es la concentración media sobre la vertical. La potencia total será:

$$P_s = \sum P_{\epsilon w} = \left(1 - \frac{\gamma_f}{\gamma_s}\right) h \sum (C_m W) \quad 1.18$$

debiendo la sumatoria extenderse a todos los valores de  $W$ . La potencia  $P_{f,}$  para vencer la fricción sobre la columna de agua es:

$$P_{f,} = \gamma_f h u_m J \quad 1.19$$

en la cual  $u_m$  es la velocidad media del fluido; entonces:

$$\frac{P_{s,}}{P_{f,}} = \left(1 - \frac{\gamma_f}{\gamma_s}\right) \frac{\sum C_m W}{\gamma_f u_m J} \quad 1.20$$

Si se usa la potencia  $P_s'$  empleada para sustentar los sedimentos entre los niveles  $y_1$  e  $y_2$  se tiene:

$$\frac{P'_s}{P_f} = \left(1 - \frac{Y_f}{Y_s}\right) \frac{C_{ml} W}{\gamma_{f,m} u_j} \left(\frac{y_2 - y_1}{h}\right) \quad 1.21$$

en donde  $C_{ml}$  es la concentración media entre  $y_1$  e  $y_2$ .

Se han trazado gráficos<sup>16,17</sup> de  $P_s/P_f$ , y de  $P'_s/P_f$ , contra  $\chi$  que permiten una estimativa del valor del coeficiente de cambio turbulento.

Mikio Hino<sup>18</sup> trata del mismo problema partiendo de la ecuación de la energía para flujo con partículas suspendidas y de la ecuación de balance de aceleraciones para movimiento turbulento; aunque realiza algunas aproximaciones no muy justificables, la teoría desarrollada permite predecir el comportamiento de algunas características del flujo. La constante de von Kármán invariablemente decrece con el aumento de la concentración. Para flujos con partículas de flotación nula, la intensidad de la turbulencia aumenta al aumentar la concentración de sedimentos, decreciendo gradualmente a medida que la densidad de los sedimentos aumenta con relación a la densidad del fluido. La teoría también predice una rápida disminución del coeficiente de difusión.

H. A. Einstein y Ning Chien<sup>5</sup> propusieron una aproximación

de segundo orden para la teoría de suspensión de sedimentos. Asumiendo que las fluctuaciones de la velocidad siguen la ley normal del error, que la longitud de mezcla del flujo turbulento obedece a la función de distribución predicha e incluyendo las derivadas de orden superior de la concentración, Einstein y Chien llegan a:

$$Z_e = \frac{Z}{e^{-\left(L^2 Z^2 / \pi\right) + ZL \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{(2/\pi)ZL} \left[-x^2/2\right]} dx}} \quad 1.22$$

siendo

$$Z = \frac{W_f}{u_* \lambda}$$

$$L = \ln(1 + B\lambda)$$

$$B = \text{constante}$$

La diferencia entre los valores de  $Z$  calculados con la ecuación (1.22-a) y los calculados con (1.22) es pequeña para propósitos prácticos, afectando únicamente a partículas gruesas, las cuales ocupan un pequeño porcentaje entre los sedimentos suspendidos.

DESCARGA SÓLIDA TOTAL POR SUSPENSIÓN

Considerando que la velocidad de los sedimentos en la dirección del flujo medio es igual a la del fluido, la descarga sólida total en suspensión por unidad de peso, ancho y tiempo que se mueve desde el nivel  $y = a$  hasta la superficie libre, está dada por

$$q_s = \int_a^h c u dy \quad 1.23$$

Sustituyendo en la ecuación (1.23) el valor de  $c$  dado por la (1.7) y utilizando para  $u$  la ecuación dada por Keulegan

$$u = 5.75 u_* \log (30.2 y/\Delta) \quad 1.24$$

Einstein<sup>3</sup> llega a la siguiente expresión:

$$q_s = 11.6 u_* c_a a \left[ 2.303 \log \left( \frac{30.2 h}{\Delta} \right) \cdot I_1 + I_2 \right] \quad 1.25$$

con:

$$I_1 = 0.216 \frac{A^{(z-1)}}{(1-A)^z} \int_A^1 \left( \frac{1-y}{y} \right)^z dy \quad 1.26-a$$

$$I_2 = 0.216 \frac{A^{(z-1)}}{(1-A)^z} \int_A^1 \left( \frac{1-y}{y} \right)^z \log y dy \quad 1.26-b$$

en donde:

$$\Delta = \frac{k_s}{X}$$

$k_s$  = altura de rugosidad

$X$  = factor de corrección que es función de  $K_s / \delta$

$\delta$  = espesura de la subcapa laminar dada por Einstein como  
=  $11.6 \nu / u$ .

$\nu$  = viscosidad cinemática del agua

$a$  = nivel de referencia  $y = a$ , que delimita la zona del transporte de arrastre de la del transporte por suspensión y que es tomado por Einstein igual a dos veces el diámetro.

$$A = a/h$$

$c_a$  = concentración al nivel  $y = a$

$$z = W_f / 0.4 u_*$$

El factor  $(11.6 u_*)$  que aparece en la fórmula de la descarga es la velocidad en la interface de la subcapa laminar en el caso de fondos hidráulicamente lisos, o la velocidad que ocurre a una distancia desde el fondo igual a 3.68 veces el diámetro de rugosidad en tratándose de fondos rugosos. Los valores de las integrales  $I_1$  e  $I_2$  están dadas en gráficos, con  $A$  y  $Z$  como parámetros (referencia 3).

Los valores de la descarga sólida calculados con la ecuación (1.25), no concuerdan con experiencias realizadas<sup>13</sup> debido sobre todo a la introducción del valor de  $Z = W_f / 0.4 u_*$  que según se dijo no concuerda con la realidad. El propio Einstein mencionó esta dificultad. Por otro lado este proceso falla en el cálculo de la descarga de partículas bastante finas las cuales están distribuidas casi uniformemente sobre la vertical.

B. R. Colby y C. H. Hembree<sup>13</sup> formularan un proceso denominado "Proceso Modificado de Einstein". Fue aplicado por la primera vez para calcular la descarga del río Niobrara, cerca de Cody, Nebraska. El proceso se basa en las fórmulas de Einstein<sup>3</sup> y consiste en el cálculo de la descarga sólida para los varios diámetros aplicando métodos diferentes de cálculo para partículas de tamaño peque

ño y partículas de tamaño mayor. En la categoría de las partículas de diámetro menor, la descarga sólida para un dado diámetro se calcula multiplicando la descarga en suspensión en la zona muestreada por la relación entre la descarga teórica total de sedimentos suspendidos y la descarga teórica de sedimentos en suspensión en la zona muestreada para ese diámetro. Esa relación calculase dividiendo el producto, de la velocidad y concentración teóricas, integrado desde la superficie hasta la cima de la capa de fondo (capa de espesor igual a 2 veces el diámetro) por el producto similar integrado desde la superficie hasta el límite inferior de la zona muestreada. En la categoría de las partículas mayores, la descarga total se calcula siguiendo el método de Einstein, mas usando diferentes procesos para la evaluación del exponente  $Z$ , de la velocidad de fricción con respecto a las partículas  $u_*$  y de la intensidad de arrastre  $\phi$ . La principal dificultad del proceso modificado de Einstein está en la elección del diámetro límite que separa los diámetros en las dos categorías; una inadecuada elección conduce a resultados discordantes.

El presente trabajo tiene como objetivo el establecimiento de una formulación de uso fácil, que permita el cálculo de la descarga sólida con razonable precisión. Empléanse dos tratamientos a



nalíticos diferentes.

El primero de ellos se describe en el capítulo 2 y consiste en una generalización de la regla de similaridad de von Kármán. Se realizan las siguientes suposiciones: 1) Flujo bidimensional, estacionario y uniforme; 2) Las dos fases, fluido sólido pueden ser tratadas como una sola denominada mezcla, con gradiente de densidad; 3) Las partículas siguen el movimiento de la mezcla en la dirección del flujo medio y poseen una velocidad de depositación  $W$ . Partiendo de las ecuaciones del movimiento y continuidad de la mezcla para  $\rho$ -y  $\mu$  variables obriénense las siguientes ecuaciones para la distribución de velocidades y concentración:

$$u = \frac{u_*}{\chi} \ln \left( \frac{\lambda + y/h}{\lambda + y_0/h} \right) \quad 1.27$$

en donde

$\lambda$  = parámetro

$y_0$  = valor de  $y$  para el cual  $u = 0$

$$c = d_1 (\lambda + y/h)^{-z_1} - 1 \quad 1.28$$

en donde

$c$  = concentración en porcentaje de volumen líquido

$z_1$  = función adimensional dependiente de  $\chi$  y de la concentración  $c_b$  al nivel  $y = y_0$

$d_1$  = función adimensional dependiente de  $c_b$

La distribución (1.27) fue comparada con una serie de 16 experiencias realizadas en laboratorio por Einstein y Chien<sup>19</sup> y ella se ajusta con bastante precisión, en toda la vertical, a los datos medidos. Para concentraciones menores a 24000 ppm en media, el valor de  $\lambda$  puede hacerse igual a cero con lo que la ecuación (1.27) se transforma en la distribución dada por Keulegan. Las mismas experiencias se usaron para verificar la validez de (1.28) llegándose a concluir que ella aplícate únicamente en la zona baja del flujo comprendida entre  $y = y_0$  e  $y = 0.10$  a  $0.20h$ . Si llevamos en consideración que las experiencias fueron realizadas para diámetros superiores a 0.27 mm, la descarga sólida total en suspensión calculada a partir de la distribución (1.28) conduce a resultados satisfactorios, pues la mayor parte del transporte para ese clase de diámetros ocurre precisamente en la zona baja del flujo, pudiendo desprejarse la parte de sedimentos que se transportan en la zona alta. Al final del capítulo II se calcula la descarga mediante integración del producto (u.c) desde  $y = y_0$  hasta  $y = y_T$  en donde  $y_T$  es la ordenada para la cual la concentración es prácticamente nula.

Las descargas así obtenidas se comparan con las calculadas usando la expresión dada por Erling Navntoft<sup>20)</sup>

los resultados son prácticamente los mismos. En la gran mayoría de casos que ocurren en la realidad, la ecuación (1.28) está limitada en su uso porque:

- 1) Ella describe la distribución de concentraciones para partículas de diámetro mayor, generalmente superior a 0.27 mm, las cuales ocupan un pequeño porcentaje entre los sedimentos suspendidos.
- 2) Dada su forma aplícase para concentraciones elevadas, generalmente superiores a 10000 ppm en media

El segundo tratamiento analítico descrito en el capítulo 3 está basado en el coeficiente de transferencia de sedimentos y conduce a resultados mucho más generales y útiles. Así mismo también que el flujo es bidimensional, estacionario y uniforme, que las partículas tienen la misma velocidad del fluido en la dirección del flujo medio, poseyendo una velocidad  $W$  de depositación. Usando la distribución de velocidades dada por la ecuación (1.27) y aceptando las hipótesis de Prandtl dadas en su teoría de la longitud de mezcla se obtiene para el coeficiente de transferencia de sedimentos

la expresión:

$$\epsilon_s = \chi u_* (y + \lambda h) \quad 1.29$$

que coincide con experiencias realizadas por Coleman<sup>7</sup> hasta una altura que varía entre 0.20 h y 0.30 h: sin embargo la utilización de la ecuación (1.29) en toda la vertical no conduce a errores apreciables para propósitos prácticos, como puede concluirse del apéndice 1 y de los resultados obtenidos con mediciones realizadas en el río Grande, Nuevo México<sup>20</sup> (cap. 3). Empleando (1.29) y la ecuación diferencial de O'Briend se tiene:

$$\frac{c}{c_a} = \left( \frac{\lambda + y/h}{\lambda + a/h} \right)^{-Z_2} \quad 1.30$$

con 
$$Z_2 = \frac{W_f}{\chi u_*} \quad 1.31$$

La validez de la ecuación (1.30) se comprobó con 23 experiencias realizadas en los rios Bernalillo y Socorro, afluentes del río Grande en Nuevo México<sup>14</sup> concluyéndose que ella se aplica a toda la vertical, con una pequenísima discrepancia para diámetro supe

riores a 0.354 mm que casi no se encuentran en suspensión. Sin embargo los valores de  $Z_2$  calculados con 1.31 no concuerdan con los valores medidos. Esto llevó a una investigación adicional que culminó con la expresión

$$Z_2 = \frac{A_1 \ln \left( \frac{c_1}{100} \right)}{1 - A_1 \ln \left( \frac{\lambda + y_1/h}{\lambda + 2d/h} \right)} \quad 1.32$$

con

$$A_1 = 0.0346 \left( \frac{W_f}{u_*} \right)^{0.385} \ln \left( \frac{2d \cdot 10^6}{h} \right) \quad 1.33$$

en donde

$c_1$  = concentración en ppm al nivel  $y = y_1$ , que será de preferencia el nivel más bajo de muestreo

$d$  = diámetro de las partículas

La ecuación (1.32) fue comprobada con 92 mediciones, para diámetros comprendidos entre 0.0112 mm y 0.354 mm.

Finalmente, con las ecuaciones 1.30 y 1.27 se calculan las descargas sólidas totales en suspensión y los resultados se comparan con los obtenidos usando el Proceso Modificado de Einstein.

## CAPITULO II

### SIMILARIDAD CINEMATICA EN EL TRANSPORTE

#### SOLIDO POR SUSPENSION

##### 2.1 Suposiciones

Consideremos un canal abierto transportando partículas sólidas en suspensión. Aceptaremos las siguientes suposiciones básicas, previas al desarrollo de la teoría:

- 1- Flujo turbulento, bidimensional, estacionario y uniforme.
- 2- El transporte se realiza mediante las fluctuaciones turbulentas.
- 3- Las dos fases: fluido, sólido pueden juntarse en una única fase, con gradiente de densidad, denominada "mezcla".
- 4- Comportamiento Newtoniano de la mezcla. Esta suposición es aceptable, cuando la concentración media  $c$ , en volumen, es menor a 0.2. Concentraciones mayores al va

- lor indicado se encuentran muy raramente en la práctica.
- 5- El fluido es considerado incompresible, mas la densidad de la mezcla es variable.
  - 6- Los sedimentos siguen el movimiento de la mezcla en la dirección del flujo principal, mas, debido a que los se dimentos pueden tener mayor densidad que la mezcla, poseerán una velocidad diferente en el sentido vertical.
  - 7- El fondo puede ser móvil o rígido, mas plano para mantener la condición de uniformidad. Plano en el sentido de que las irregularidades del fondo sean lo suficientemente pequeñas para ser consideradas elementos rugosos. Cuando las dunas y barras del fondo, poseen una dimensión apreciable, aparte del efecto tridimensional ocasionado por la mudanza de forma, ocurren alteraciones en las cantidades características del transporte, tales como la velocidad de fricción y el coeficiente de cambio turbulento.

## 2.2 Corrección de la Densidad

Sean:

$\rho$  = densidad de la mezcla

$\gamma$  = peso específico de la mezcla

$P$  = peso de la mezcla

$P_f$  = peso del líquido sin sedimentos

$P_s$  = peso de los sedimentos sumergidos

$V$  = volumen de la mezcla

$V_f$  = volumen del líquido sin sedimentos

$V_s$  = volumen de los sedimentos

$\gamma_f$  = peso específico del líquido

$\gamma_s$  = peso específico de los sedimentos sumergidos

$c$  = concentración en tanto por uno de volumen líquido

$c_p$  = concentración en tanto por uno de peso líquido

$g$  = aceleración de la gravedad

Si tomamos un pequeño elemento de mezcla, podemos considerar en él que las partículas están distribuidas con una concentración uniforme, de manera que:

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{g} \frac{P}{V} = \frac{1}{g} \frac{P_f + P_s}{V_f + V_s} = \frac{1}{g} \frac{P_f + c_p P_f}{V_f + c V_f} = \frac{1}{g} \frac{P_f(1 + c_p)}{V_f(1 + c)}$$

Pero como  $P_s = c_p P_f$

$$V_s = c V_f$$



Se deduce que:

$$\hat{c}_p = \frac{\gamma'_s}{\gamma_f} c$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior e introduciendo la gravedad específica de las partículas sumergidas:

$$\alpha = \frac{\gamma'_s}{\gamma_f} \quad ; \quad \alpha \geq 1 \quad 2.1$$

obtiénese

$$\rho = \rho_f \left( \frac{1 + \alpha c}{1 + c} \right) \quad 2.2$$

Introduciremos la variable

$$C_* = \frac{1 + \alpha c}{1 + c} \quad 2.3$$

en la ecuación 2.2:

$$\rho = \rho_f C_*$$

La ecuación (2.2) representa la densidad instantánea de la mezcla, habiéndose tomado en cuenta el espacio ocupado por las partículas sólidas dentro del campo de flujo.

Como posteriormente aplicaremos las propiedades del flujo

turbulento, debemos dividir  $C_*$  en dos partes: una de ellas corresponde a la media de tiempo ajustado  $\bar{C}_*$  y la otra a la fluctuación  $C'_*$ :

$$C_* = \bar{C}_* + C'_* \quad 2.5$$

La fluctuación  $C'_*$  se debe a la fluctuación  $c'$  de la concentración y puede expresarse de la manera siguiente:

$$C_* = \bar{C}_* + C'_* = \frac{1 + \alpha(\bar{c} + c')}{1 + (\bar{c} + c')} \quad 2.6-a$$

$$C_* = \frac{1 + \alpha\bar{c}}{1 + \bar{c}} + \frac{(\alpha - 1)c'}{(1 + \bar{c} + c')(1 + \bar{c})} \quad 2.6-b$$

De donde:

$$\bar{C}_* = \frac{1 + \alpha\bar{c}}{1 + \bar{c}} \quad 2.7$$

$$C'_* = \frac{(\alpha - 1)c'}{(1 + \bar{c} + c')(1 + \bar{c})} \quad 2.8$$

Si bien la media en relación al tiempo de  $c'$  es igual a cero, no podemos decir a priori que  $C'_*$  sea también cero. Sin embargo podemos desarrollar  $C'_*$  en serie de Taylor de la siguiente manera:

$$c'_* = \frac{(\alpha - 1)}{(1 + \bar{c})^2} \left[ c' - \frac{c'^2}{(1 + \bar{c})} + \frac{c'^3}{(1 + \bar{c})^2} - \dots \right] \quad 2.9$$

Como  $c'$  es mucho menor que 1, sus potencias a partir de la segunda pueden despreciarse; por tanto:

$$c'_* \approx \frac{(\alpha - 1)c'}{(1 + \bar{c})^2} \quad 2.10$$

$$\bar{c}'_* \approx \frac{(\alpha - 1)\bar{c}'}{(1 + \bar{c})^2} = 0 \quad 2.11$$

Del mismo modo:

$$\frac{\partial c'_*}{\partial \hat{x}_i} \approx \frac{(\alpha - 1)}{(1 + \bar{c})^2} \frac{\partial c'}{\partial x_i} - \frac{2c'(\alpha - 1)}{(1 + \bar{c})^3} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = 0 \quad 2.12$$

$$\frac{\partial c'_*}{\partial t} \approx 0 \quad 2.13$$

### 2.3 Corrección de la Viscosidad Dinámica

La variación de la viscosidad dinámica  $\mu$ , se debe a la variación que sufre  $\rho$  con la concentración:

$$\mu = \mu(c) \quad 2.14$$

Admitiremos que:

$$\mu = \mu_f f(c) \quad 2.15$$

Siendo  $\mu_f$  la viscosidad del líquido puro y  $f$  una función todavía desconocida.

#### 2.4 Corrección de la Velocidad de Depositación

De modo semejante:

$$W = W(c) \quad 2.16$$

$$W = W_f F(c) \quad 2.17$$

Siendo  $W_f$  la velocidad de caída en agua limpia y  $F$  una función a determinar.

#### 2.5 Ecuación del Movimiento

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo bidimensional, con  $\rho$  y  $\mu$  variables son:

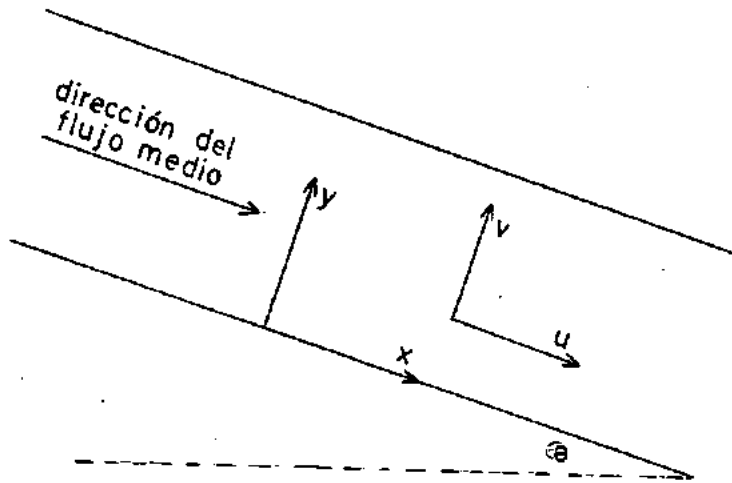


Fig. 2.1

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_f \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) f \right] + \mu_f \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) f \right] -$$

$$- \frac{2}{3} \mu_f \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) f \right] + \rho g i \quad 2.18$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_f \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) f \right] + \mu_f \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) f \right] -$$

$$- \frac{2}{3} \mu_f \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) f \right] + \rho g j \quad 2.19$$

Donde:

$p$  = presión

$g$  = aceleración de la gravedad

$i = \text{Sen } \theta =$  pendiente del fondo, que coincide con la pendiente energética  $J$  por tratarse de flujo uniforme

$$j = -\cos \theta$$

$u$  = velocidad instantánea en la dirección  $x$

$v$  = velocidad instantánea en la dirección  $y$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} = \text{derivada sustancial}$$

Nota: en lo que sigue, las "barras" encima de las letras o expresiones denotarán las medias con relación al tiempo y las "primas", fluctuaciones debidas a la turbulencia.

Para obtener la ecuación del movimiento como transporte de vorticidad, derivamos la ecuación (2.18) con respecto a "y" y la ecuación (2.19) con respecto a "x" y restamos:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \\ & = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dv}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{du}{dt} + 2\mu_f \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ f \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \\ & + g_i \frac{\partial p}{\partial y} - g_j \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad 2.20$$

Nótese que  $\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  no es necesariamente nulo como acontecería en caso de ser  $\rho$  constante.

Sustituyendo en la ecuación (2.20) los valores de  $\frac{du}{dt}$  y  $\frac{dv}{dt}$  dados por las ecuaciones (2.18) y (2.19) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \rho^2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \rho^2 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \\
 & + \frac{2}{3} \mu_f \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left[ f \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \mu_f \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[ f \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \\
 & + \mu_f \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ f \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \mu_f \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ f \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \\
 & - 2 \mu_f \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ f \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = 0 \qquad 2.21
 \end{aligned}$$

En la ecuación (2.21), se ha suprimido el término correspondiente a  $\vec{\nabla}_p \times \vec{\nabla}_p$ , porque tanto  $\vec{\nabla}_p$  como  $\vec{\nabla}_p$  siguen aproximadamente la misma dirección, es decir en sentido contrario al eje "y".

## 2.6 Ecuación de la continuidad

La ecuación de la continuidad para  $\rho$  variable está dada por:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad 2.22$$

Introduciendo la ecuación (2.4), la ecuación de la continuidad es equivalente a:

$$\boxed{\frac{dC_*}{dt} + C_* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0} \quad 2.23$$

Consideremos ahora el movimiento de los granos respecto a la mezcla. En la dirección del flujo medio asumiremos que los granos siguen el movimiento de la mezcla, o sea poseen la velocidad  $u$ . Debido a que los granos pueden ser más densos que la mezcla tendrán una velocidad diferente de  $v$  en la dirección vertical. Sea  $-W$  la velocidad de depositación. Considerando un elemento de profundidad unitaria en la dirección del eje  $Z$ :



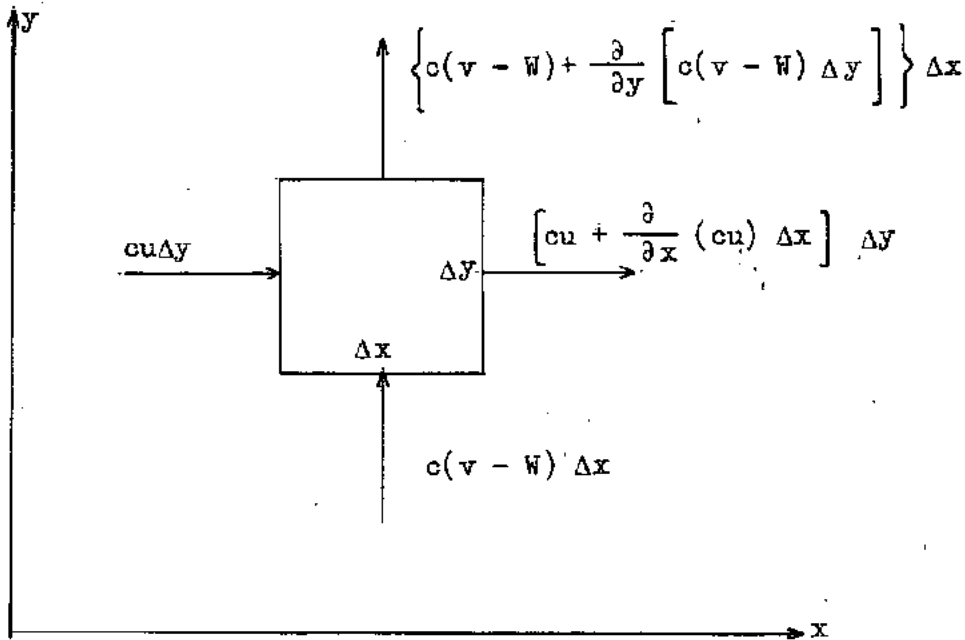


Fig. 2.2

Realizado el balance se obtiene:

$$\frac{dc}{dt} + c \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (cW) = 0 \quad 2.24$$

Combinando las ecuaciones (2.23) y (2.24) y con auxilio de la ecuación (2.4), se obtiene:

$$(c_*^2 - 2c_* + \alpha) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -(\alpha - c_*)(c_* - 1) \frac{\partial W}{\partial y} - W(\alpha - 1) \frac{\partial c_*}{\partial y} \quad 2.25$$

e introduciendo la ecuación (2.17):

$$(C_*^2 - 2C_* + \alpha) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - (\alpha - C_*) (C_* - 1) W_f \frac{\partial F}{\partial y} - W_f F (\alpha - 1) \frac{\partial C_*}{\partial y}$$

2.26

De esta forma, las ecuaciones (2.21), (2.23) y (2.26) constituyen un sistema consistente de ecuaciones que aproximan las dos fases (sólido-líquido) a una sola (mezcla) con gradiente de densidad.

## 2.7 Principio de Similaridad

En este numeral emplearemos la regla de similaridad cinemática de Th. von Kármán generalizándola en el sentido de que, además de considerar similaridad en las fluctuaciones de la velocidad aceptaremos también similaridad en las fluctuaciones de la concentración ( $c'$ ), velocidad de depositación ( $F'$ ) y viscosidad dinámica ( $f'$ ) debidas a la turbulencia.

Suponer que la mezcla posee fluctuaciones de velocidad similares en todos los puntos del campo de flujo, equivale a decir

que aquellas fluctuaciones turbulentas en una cierta posición y tiempo pueden obtenerse a partir de las fluctuaciones de otra posición y tiempo mediante cambio en las escalas de longitud y tiempo.

Para analizar las circunstancias en las cuales tal suposición se cumple, investigaremos el flujo en una pequeña región a un nivel "y<sub>0</sub>" sobre el fondo. Consideraremos un sistema de ejes moviéndose con el punto de ordenada "y<sub>0</sub>", a una velocidad de tiempo ajustado  $\bar{u}_0$ .

Siguiendo las propiedades del flujo turbulento, las componentes de la velocidad u, v, la concentración c (o C<sub>\*</sub>; cf. 4.2) y las funciones "f" y "F" pueden dividirse en dos partes, correspondientes a la media en relación al tiempo y a la fluctuación turbulenta respectivamente:

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$C_* = \bar{C}_* + C_*'$$

$$f = \bar{f} + f'$$

$$F = \bar{F} + F'$$

2.27

Como dijimos anteriormente, extenderemos la condición de

similaridad a  $C'_*$ ,  $f'$  y  $F'$ .

Expresemos ahora,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{f}$  y  $\bar{F}$  mediante serie de Taylor desde " $y_0$ ". Para ello despreciemos los términos de orden superior al segundo y recordemos que el sistema de ejes se mueve con una velocidad  $\bar{u}_0$ :

$$u = \bar{u} + u' = \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 y + \left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)_0 \frac{y^2}{2} + u'_0 \quad 2.28$$

Si se realiza el equilibrio entre la difusión turbulenta y el efecto de depositación, será  $\bar{v} = 0$ ; por tanto:

$$v = v' \quad 2.29$$

$$C_* = \bar{C}_* + C'_* = \bar{C}_{*0} + \left( \frac{d\bar{C}_*}{dy} \right)_0 y + \left( \frac{d^2\bar{C}_*}{dy^2} \right)_0 \frac{y^2}{2} + C'_{*0} \quad 2.30-a$$

Como las concentraciones menores que cero son físicamente imposibles, la fluctuación  $c'$  está limitada por el valor  $\bar{c}_0$ , de modo que  $c'$  dependerá de  $\bar{c}_0$ . Así mismo,  $C'_*$  estará limitado por

$$\bar{C}_{*0} = \frac{1 + \alpha \bar{c}_0}{1 + \frac{\alpha}{c_0}}, \text{ siendo } C'_* \text{ dependiente de } \bar{C}_{*0}$$

Admitiremos la dependencia simple:

$$C'_* \sim \bar{C}_{*0}$$

siendo  $v =$  proporcional

Ahora introducimos la propiedad m:

$$m = \bar{C}_{*0} + C_*' \text{ en la ecuación (2.30-a)}$$

$$C_* = \left( \frac{d\bar{C}_*}{dy} \right)_0 y + \left( \frac{d^2\bar{C}_*}{dy^2} \right)_0 \frac{y^2}{2} + m \quad 2.30-b$$

Siguiendo el mismo raciocinio, puesto que  $f$  es función de

c:

$$f = \bar{f} + f' = \bar{f}_0 + \left( \frac{d\bar{f}}{dy} \right)_0 y + \left( \frac{d^2\bar{f}}{dy^2} \right)_0 \frac{y^2}{2} + f' \quad 2.31-a$$

e introduciendo la propiedad n:

$$n = \bar{f}_0 + f' \text{ se obtiene:}$$

$$f = \left( \frac{d\bar{f}}{dy} \right)_0 y + \left( \frac{d^2\bar{f}}{dy^2} \right)_0 \frac{y^2}{2} + n \quad 2.31-b$$

De manera análoga:

$$F = \bar{F} + F' = \bar{F}_0 + \left(\frac{d\bar{F}}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2\bar{F}}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{2} + F' \quad 2.32-a$$

e introduciendo la propiedad p:

$$p = \bar{F} + F'$$

$$F = \left(\frac{d\bar{F}}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2\bar{F}}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{2} + p \quad 2.32-b$$

Por tanto admitir la hipótesis de similaridad, equivale a decir que existen las variables adimensionales  $u'_1$ ,  $v'_1$  y las funciones estandar adimensionales  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , correspondientes a las coordenadas adimensionales  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , , de modo que  $u'$ ,  $v'$  y  $m$ ,  $n$ ,  $p$  se obtengan multiplicando aquellas variables y funciones adimensionales por escalas apropiadas pertenecientes al nivel bajo consideración.

Eligiremos como factores de escala:

l para la longitud

A para la velocidad, con lo que:

$$x = lx, \quad 2.33-a$$

$$y = ly, \quad 2.33-b$$

$$t = \frac{1}{A} t_1 \quad 2.33-c$$

$$u' = Au'_1 \quad 2.33-d$$

$$v' = Av'_1 \quad 2.33-e$$

$$m = \psi_1 m_1 \quad 2.33-f$$

$$n = \psi_2 n_1 \quad 2.33-g$$

$$p = \psi_3 p_1 \quad 2.33-h$$

En donde  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  son escalas adimensionales.

Con auxilio de las ecuaciones (2.33) podemos calcular los términos necesarios para substituirlos en las ecuaciones que caracterizan el movimiento y continuidad de la mezcla.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A}{1} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \quad 2.34-a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 + \left( \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_0 l y_1 + \frac{A}{\ell} \frac{\partial u'_1}{\partial y_1} \quad 2.34-b$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{A}{1} \frac{\partial v'_1}{\partial x_1} \quad 2.34-c$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{A}{1} \frac{\partial v'_1}{\partial y_1} \quad 2.34-d$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{A}{1} \left( \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v'_1}{\partial y_1} \right) \quad 2.34-e$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 + \left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)_0 y_1 + \frac{A}{l} \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1'}{\partial x_1} \right) \quad 2.34-f$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 + \left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)_0 y_1 + \frac{A}{l} \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1'}{\partial x_1} \right) \quad 2.34-g$$

$$2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{A}{l} \left( 2 \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1'}{\partial y_1} \right) \quad 2.34-h$$

$$2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A}{l} \left( 2 \frac{\partial v_1'}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} \right) \quad 2.34-i$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)_0 A \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{A^2}{l^2} \left( \frac{\partial^2 u_1'}{\partial y_1 \partial t_1} - \frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_1 \partial t_1} \right) \quad 2.34-j$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{A}{l^2} \left( \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_1^2} \right) \quad 2.34-k$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)_0 \frac{A}{l^2} \left( \frac{\partial^2 u_1'}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_1 \partial y_1} \right) \quad 2.34-l$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{A}{l^2} \left( 2 \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_1 \partial y_1} \right) \quad 2.34-m$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{A}{l^2} \left( 2 \frac{\partial^2 v_1'}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x_1 \partial y_1} \right) \quad 2.34-n$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{A}{l^2} \left( \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x_1^2} \right) \quad 2.34-o$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left( \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right)_o + \frac{A}{l^2} \left( \frac{\partial^2 u'_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x_1 \partial y_1} \right) \quad 2.34-p$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\psi_2}{l} \frac{\partial n_1}{\partial x_1} \quad 2.34-q$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left( \frac{d\bar{f}}{dy} \right)_o + \left( \frac{d^2 \bar{f}}{dy^2} \right)_o l y_1 + \frac{\psi_2}{l} \frac{\partial n_1}{\partial y_1} \quad 2.34-r$$

$$\rho = \rho_f \left[ \left( \frac{d\bar{C}_*}{dy} \right)_o l y_1 + \left( \frac{d^2 \bar{C}_*}{dy^2} \right)_o l^2 \frac{y_1^2}{2} + \psi_1 m_1 \right] \quad 2.34-s$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_f \frac{\psi_1}{l} \frac{\partial m_1}{\partial x_1} \quad 2.34-t$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \rho_f \left[ \left( \frac{d\bar{C}_*}{dy} \right)_o + \left( \frac{d^2 \bar{C}_*}{dy^2} \right)_o l y_1 + \frac{\psi_1}{l} \frac{\partial m_1}{\partial y_1} \right] \quad 2.34-u$$

De manera semejante se obtiene:

$$\frac{\partial C_*}{\partial x} = \frac{\psi_1}{l} \frac{\partial m_1}{\partial x_1} \quad 2.35-a$$

$$\frac{\partial \bar{C}_*}{\partial y} = \left( \frac{d\bar{C}_*}{dy} \right)_0 + \left( \frac{d^2\bar{C}_*}{dy^2} \right)_0 l y_1 + \frac{\psi_1}{1} \frac{\partial m_1}{\partial y_1} \quad 2.35-b$$

$$\frac{\partial \bar{C}_*}{\partial t} = \left( \frac{d\bar{C}_*}{dy} \right)_0 A \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \left( \frac{d^2\bar{C}_*}{dy^2} \right)_0 A l y_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{A}{\tau} \frac{\partial m_1}{\partial t_1} \quad 2.35-c$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = \left( \frac{d\bar{F}}{dy} \right)_0 + \left( \frac{d^2\bar{F}}{dy^2} \right)_0 l y_1 + \frac{\psi_3}{1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} \quad 2.35-d$$

Sustituyendo las expresiones (2.35-a, b, c); (2.33-b,d,e,f); (2.30-b) y (2.34-e) en la ecuación (2.23) y multiplicando todos los términos por  $1/A$ , se obtiene la siguiente ecuación adimensional:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d\bar{C}_*}{dy} \right)_0 l \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \left( \frac{d^2\bar{C}_*}{dy^2} \right)_0 l^2 y_1 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \psi_1 \frac{\partial m_1}{\partial t_1} + \\ & \left[ \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_0 \frac{1}{A} y_1 + \left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)_0 \frac{1}{A} \frac{y_1^2}{2} + u_1' \right] \psi_1 \frac{\partial m_1}{\partial x_1} + \\ & + v_1' \left[ \left( \frac{d\bar{C}_*}{dy} \right)_0 l + \left( \frac{d^2\bar{C}_*}{dy^2} \right)_0 l^2 y_1 + \psi_1 \frac{\partial m_1}{\partial y_1} \right] + \\ & + \left[ \left( \frac{d\bar{C}_*}{dy} \right)_0 l y_1 + \left( \frac{d^2\bar{C}_*}{dy^2} \right)_0 l^2 \frac{y_1^2}{2} + \psi_1 m_1 \right] \left( \frac{\partial u_1'}{\partial x_1'} + \frac{\partial v_1'}{\partial y_1'} \right) = 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación, en virtud del principio de similaridad, debe ser independiente de cantidades locales tales como

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_0 ; \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)_0 ; \left(\frac{d\bar{C}_*}{dy}\right)_0 \text{ y } \left(\frac{d^2\bar{C}_*}{dy^2}\right)_0 ;$$

por tanto:

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_0 \sim \frac{A}{l} \quad 2.37-a$$

$$\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)_0 \sim \frac{A}{l^2} \quad 2.37-b$$

$$\left(\frac{d\bar{C}_*}{dy}\right)_0 \sim \frac{1}{l} \quad 2.37-c$$

$$\left(\frac{d^2\bar{C}_*}{dy^2}\right)_0 \sim \frac{1}{l^2} \quad 2.37-d$$

De modo análogo, sustituyendo las expresiones (2.34), en la ecuación del movimiento (2.21); multiplicando todos los términos por  $l^2/A^2 \rho_f^2$  y sabiendo que  $\mu_f \sim A \rho_f \nu$ , obtendremos otra ecuación adimensional la cual debe también ser independiente de cantidades locales. La utilización de las expresiones (2.37-a, b, c, d) conduce a:

$$\left(\frac{d\bar{f}}{dy}\right)_0 \sim \frac{1}{l} \quad 2.37-e$$

$$\left(\frac{d^2\bar{f}}{dy^2}\right)_0 \sim \frac{1}{l^2} \quad 2.37-f$$

Así mismo la ecuación (2.26) fornece:

$$\left(\frac{d\bar{F}}{dy}\right)_0 \sim \frac{1}{l} \quad 2.37-g$$

$$\left(\frac{d^2\bar{F}}{dy^2}\right)_0 \sim \frac{1}{l^2} \quad 2.37-h$$

$$W_f \sim A \quad 2.37-i$$

La sustitución de las ecuaciones (2.33-a, b, d, e); (2.37-a, b) en las ecuaciones (2.28) y (2.29), conduce a:

$$u \sim A \quad 2.38$$

$$v \sim A \quad 2.39$$

Empleando las ecuaciones (2.30-b), (2.33-b, f), (2.37-c, d) y sustituyéndolas en la (2.4):

$$\rho \sim \rho_f$$

2.40

De la misma manera, con las ecuaciones (2.31-b), (2.32-b), (2.33-b, g, h), (2.37-e, f, g, h, i) sustituida en las (2.15) y (2.17) se llega a:

$$\mu \sim \mu_f$$

2.41

$$W \sim W_f$$

2.42

Combinando (2.37-i) con (2.42):

$$W \sim A$$

2.43

## 2.8 Esfuerzo cortante turbulento

Considerando el cambio de momento a través de un área unitaria horizontal situada en el nivel "y<sub>0</sub>" se obtiene:

$$\tau = - \overline{\rho uv}$$

2.44

Con ayuda de las relaciones (2.38), (2.39), (2.40) y (2.44) obtiéndose:

$$\tau \sim \rho_f A^2 \quad 2.44-a$$

Combinando esta última con la (2.37-a):

$$\tau \sim \rho_f l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_o^2 \quad 2.44-b$$

Como el factor de escala "l" se aplica a menos de un factor de multiplicación desconocido, podemos colocar el factor de proporcionalidad de la ecuación (2.44-b) igual a 1:

$$\tau = \rho_f l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)_o^2 \quad 2.45$$

Es evidente que, de las ecuaciones (2.37-i) y (2.44-a), nuestra suposición de similaridad se cumple solamente en la región de esfuerzo cortante turbulento constante. Mas por otro lado se sabe que en flujo de agua sin sedimentos, la distribución de velocidades que puede derivarse en la capa de esfuerzo cortante constante, aplíquese en la altura total. Llamemos por  $\tau_o$  a aquel esfuerzo cortante y admitamos que lo dicho se aplica también a flujo con partí-

culas suspendidas. Entonces tendremos:

$$\tau_o = \rho_f g R J = \rho_f u_*^2 \sim \rho_f A^2 \quad 2.46$$

en donde:

R = radio hidráulico que será semejante a la profundidad h  
para canales suficientemente anchos

$u_*$  = velocidad de fricción =  $\sqrt{\tau_o / \rho_f}$

J = pendiente energética

De las ecuaciones (2.43) y (2.46):

$$W \sim A$$

$$u_* \sim A$$

despréndese que  $W/u_*$  deberá ser un parámetro en las ecuaciones posteriores de distribuciones de velocidad y concentración. También, al deducir las ecuaciones (2.37), (2.38), (2.39), (2.40) y (2.41), debemos incluir como parámetros la gravedad específica de los sedimentos sumergidos  $\alpha$  y una cierta concentración a algún nivel de referencia.

Con las relaciones (2.37-a, b):

$$\delta = \frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_0}{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)_0} \quad \delta$$

$$\chi = -\chi \frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)}{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)} \quad 2.47-a$$

Del mismo modo, con las relaciones (2.37-c, d, e, f, g, h) se tiene:

$$1 = -\xi \frac{\left(\frac{d\bar{C}_*}{dy}\right)}{\left(\frac{d^2\bar{C}}{dy^2}\right)} \quad 2.47-b$$

$$1 = -\eta \frac{\left(\frac{d\bar{f}}{dy}\right)}{\left(\frac{d^2\bar{f}}{dy^2}\right)} \quad 2.47-c$$

$$1 = -\delta \frac{\left(\frac{d\bar{F}}{dy}\right)}{\left(\frac{d^2\bar{F}}{dy^2}\right)} \quad 2.47-d$$

Siendo  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\delta$ ,  $\chi$  factores adimensionales, dependientes de los parámetros  $W/u_*$ ,  $\alpha$  y  $\bar{C}_r$  ( $\bar{C}_r$  es la concentración a un ni



vel de referencia  $\bar{r}$  ).

## 2.9 Perfil de Velocidades

Sustituyendo en la ecuación (\*)

$$\tau_o = \rho_f u_*^2 = \rho_f l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2$$

el valor de  $l$  dado por la ecuación (2.47-a) tenemos:

$$\frac{u_*}{\chi} = - \frac{\left( \frac{du}{dy} \right)^2}{\left( \frac{d^2u}{dy^2} \right)^2} \quad 2.48-a$$

que resulta conduce a:

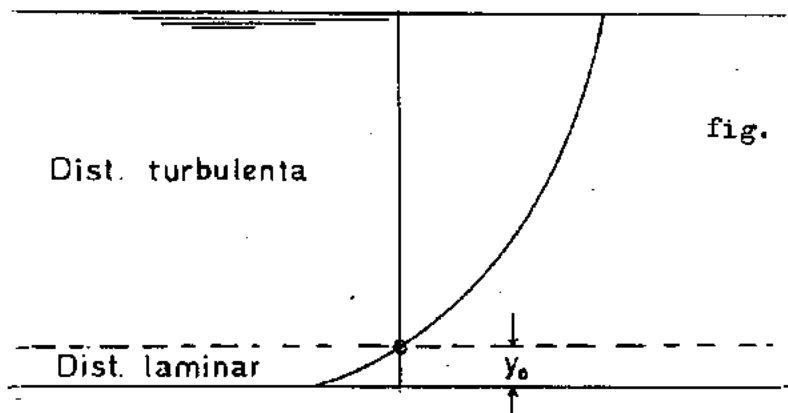
$$u = \frac{u_*}{\chi} \ln \left( \frac{\chi}{u_*} y + a \right) + b \quad 2.48-b$$

---

(\*) Suprimiremos las barras que denotan media en relación al tiempo, sin temor a confusión.

en donde  $a$  y  $b$  son constantes dimensionales de integración.

Para la determinación de las constantes  $a$  y  $b$ , precisamos de dos condiciones. Una de ellas es la condición de pared y sirve para ajustar la distribución de velocidad turbulenta a aquella existente en la subcapa laminar; de modo que la distribución de velocidad turbulenta se enlace con la de velocidad laminar en la vecindad inmediata de la pared, en donde el esfuerzo cortante laminar y turbulento sean del mismo orden de magnitud. Determinaremos pues una de las constantes con la condición de que  $u = 0$  a una cierta distancia  $y = y_0$  del fondo (fig. 2-4). En tratándose de fondos lisos, la distancia " $y_0$ " es del orden de la espesura de la subcapa laminar. Como la distribución logarítmica de velocidades se conserva para fondo rugoso, puede establecerse proporcionalidad entre la altura de rugosidad  $K_s$  y " $y_0$ ", de modo que  $y_0 = \gamma_1 K_s$ , siendo  $\gamma_1$  función del tipo de rugosidad.



La segunda condición consiste en el hecho de que a pesar de que la ecuación (2.48-b) se aplica solamente a la zona de esfuerzo cortante constante, consideraremos que ella es válida en toda la al tura; por tanto, para  $y = h$ ,  $u = u_s$  velocidad en la superficie libre.

Sustituyendo la primera condición en (2.48-b):

$$0 = \frac{u_*}{\lambda} \ln \left( \frac{\lambda}{u_*} y_0 + a \right) + b \quad 2.48-c$$

haciendo la diferencia entre (2.48-b) y (2.48-c):

$$u = \frac{u_*}{\lambda} \ln \left[ \frac{\frac{\lambda y}{u_*} + a}{\frac{\lambda}{u_*} y_0 + a} \right] = \frac{u_*}{\lambda} \ln \left[ \frac{y/h + \frac{au_*}{\lambda h}}{y_0/h + \frac{au_*}{\lambda h}} \right]$$

y llamando por

$$\lambda = \frac{au_*}{\lambda h} \quad 2.48-d$$

se tiene:

$$u = \frac{u_*}{\lambda} \ln \left( \frac{\lambda + y/h}{\lambda + y_0/h} \right)$$

2.49

La segunda condición da:

$$u_s = \frac{u_*}{\chi} \ln \left( \frac{\lambda + 1}{\lambda + y_0/h} \right) \quad 2.50$$

de donde el valor de  $\lambda$  viene expresado por:

$$\lambda = \frac{1 - \left( y_0/h \right) \exp \left( \frac{u_s \chi}{u_*} \right)}{\exp \left( \frac{u_s \chi}{u_*} \right) - 1} \quad 2.51$$

restando (2.50) de (2.49):

$$\frac{u - u_s}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \left( \frac{\lambda + y/h}{\lambda + 1} \right) \quad 2.52$$

La ecuación (2.49) ó la (2.52) dan la ley de distribución de velocidades para flujo turbulento con partículas suspendidas.

Puede observarse que la ecuación presentada por Keulegan para fondos rugosos, es una particularización de la ecuación (2.52) cuando el valor de  $\lambda$  es igual a cero.

## 2.10 Perfil de concentraciones

Con ayuda de la ecuación (2.49) calculamos:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\frac{\chi}{u_*} (y + \lambda h)} \quad ; \quad \frac{d^2u}{dy^2} = - \frac{1}{\frac{\chi}{u_*} (y + \lambda h)^2}$$

usando (2.47-a) podemos obtener el factor de escala  $l$ :

$$l = \chi y + \chi h \lambda \quad 2.53$$

Nótese que el factor de escala es igual a la longitud de mezcla asumida por Prandtl, con adición del término  $\chi h \lambda$ .

Sustituyendo el valor de  $l$  en la ecuación (2.47-b) se obtiene:

$$\frac{\frac{dC_*}{dy}}{\frac{d^2C_*}{dy^2}} = - \frac{\chi}{\xi} (y + \lambda h) \quad 2.54-a$$

Resolviendo obtiéndose:

$$C_* = \frac{a_1 (y + \lambda h)^1 - \xi/X}{1 - \xi/X} + b_1 \quad 2.54-b$$

en donde las constantes  $a_1$  y  $b_1$  se determinan con las dos condiciones siguientes:

la primera de ellas es que  $c = 0$  cuando  $y = y_r$ , o sea:

$$C_* = \frac{1 + \alpha c}{1 + c} = 1 \quad 2.54-c$$

La segunda condición es admitir que cuando  $(y + \lambda h) \rightarrow 0$ ,  $V_f = 0$  y la concentración definida por la relación  $V_s/V_f$  tenderá a un valor infinito:

$$C_* = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 + \alpha c}{1 + c} \right] = \alpha \quad 2.54-d$$

Sustituyendo estas dos condiciones:

$$b_1 = \alpha$$

$$a_1 = \frac{(1 - \alpha)(1 - \xi/X)}{(y_r + \lambda h)^1 - \xi/X}$$

valores que sustituidos en la ecuación (2.54-b), después de reemplazar  $C_*$  por

$$C_* = \frac{1 + \alpha c}{1 + c}$$

conducen a la ecuación:

$$c = \frac{(y_r/h + \lambda)^{1 - \xi/\chi}}{(y/h + \lambda)^{1 - \xi/\chi}} \quad 2.54-e$$

llamado por:

$$Z_1 = 1 - \xi/\chi \quad 2.54-f$$

$$d_1 = (y_r/h + \lambda)^{Z_1} \quad 2.54-g$$

llegamos finalmente a la ecuación que da la distribución de concentraciones en la vertical:

$$c = d_1 (\lambda + y/h)^{-Z_1} - 1 \quad 2.55$$

Nótese que  $Z_1$  depende de  $\xi$  y  $\chi$  y por tanto de  $W/u_*$ ,  $\alpha$  y

$c_r$ .

## 2.11 Variación de la viscosidad dinámica

Sustituyendo el factor de escala en la ecuación (2.47-c)

se tiene:

$$\frac{df}{dy} = \frac{-X}{n} (y + \lambda h) \quad 2.56-a$$

Integrando:

$$f = \frac{a_2 (y + \lambda h)^{1 - n/X}}{1 - n/X} + b_2 \quad 2.56-b$$

si  $Z'_1 = 1 - n/X$  2.56-c

$$f = \frac{a_2 (y + \lambda h)^{Z'_1}}{Z'_1} + b_2 \quad 2.56-d$$

cuando  $y = y_r$ ,  $c = 0$  y  $\mu = \mu_f$  y por ecuación (2.15)

$$f = 1$$

por tanto:

$$1 = \frac{a_2 (y_r + \lambda h)^{Z'_1}}{Z'_1} + b_2 \quad 2.56-e$$

con ayuda de (2.56-d, e), (2.54-g) y (2.55):

$$f = \frac{a_2 h^{Z'_1} d_1^{Z'_1/Z_1}}{Z'_1} \left[ \frac{1}{(1+c)^{Z'_1/Z_1} d_1^{Z'_1/Z_1}} - 1 \right] + 1 \quad 2.56-f$$

llamando por



$$d_2 = - \frac{a_2 h \frac{Z_1'}{Z_1} d_1 \frac{Z_1'}{Z_1}}{Z_1'} \quad 2.56-g$$

$$n_2 = \frac{Z_1'}{Z_1} \quad 2.56-f$$

la función  $f$  vendrá dada por

$$f = 1 - d_2 \left[ \frac{1}{(1+c)^{n_2}} - 1 \right] \quad 2.57$$

introduciendo en la (2.15):

$$u = U_F \left\{ 1 - d_2 \left[ \frac{1}{(1+c)^{n_2}} - 1 \right] \right\} \quad 2.58$$

siendo  $d_2$ ,  $n_2$  parámetros adimensionales, dependientes de  $W/u_x$ ,  $\alpha$  y  $c_r$ .

## 2.12 Variación de la velocidad de caída

Sustituyendo el factor de escala en la ecuación (2.47-d) se tiene:

$$\frac{\frac{dF}{dF}}{\frac{d^2 F}{dy^2}} = - \frac{\lambda}{\delta} (y + \lambda h) \quad 2.59-a$$

la cual integrada dos veces da:

$$F = \frac{a_3 (y + \lambda h)^{1 - \delta/X}}{1 - \delta/X} + b_3 \quad 2.59-b$$

si  $Z_1'' = 1 - \delta/X$

$$F = \frac{a_3 (y + \lambda h)^{Z_1''}}{Z_1''} + b_3 \quad 2.59-c$$

cuando  $y = y_r$ ,  $c = 0$  y  $W = W_f$  y por la ecuación (2.17).

$$F = 1$$

por tanto:

$$1 = \frac{a_3 (y_r + \lambda h)^{Z_1''}}{Z_1''} + b_3 \quad 2.59-d$$

con ayuda de las ecuaciones (2.54-g) y (2.55):

$$F = \frac{a_3 h^{Z_1''} d_1^{Z_1''/Z_1}}{Z_1''} \left[ \frac{1}{(1+c)^{Z_1''/Z_1}} - 1 \right] + 1 \quad 2.59-e$$

sea:

$$d_3 = \frac{a_3 h_1^{z_1''} d_1 z_1''/z_1}{z_1''} \quad 2.59-f$$

$$n_3 = z_1''/z_1 \quad 2.59-g$$

por tanto

$$F = 1 + d_3 \left[ \frac{1}{(1+c)^{n_3}} - 1 \right] \quad 2.60$$

y la variación en la velocidad de caída está dada por:

$$W = W_f \left\{ 1 + d_3 \left[ \frac{1}{(1+c)^{n_3}} - 1 \right] \right\} \quad 2.61$$

siendo  $d_3$  y  $n_3$  parámetros adimensionales, dependientes de  $W/u_*$ ,  $c$  y  $c_r$ , por consiguiente la ecuación (2.61) será implícita.

La ecuación (2.61) no puede considerarse como absolutamente cierta para describir la variación de la velocidad de caída con la concentración, pues aparte de los efectos puramente hidrodinámicos, pueden tener un papel importante otros efectos tales como aglomeración de partículas.

Por otro lado, tórnase difícil, si no imposible, una determinación general de los parámetros  $d_3$  y  $n_3$ . Investigaciones realizadas por Richardson y Zaki, indican una dependencia de la velocidad de caída con la concentración y el número de Reynolds  $R_E = W_f d/U$ , siendo  $d$  el diámetro de la partículas. De modo que este número de Reynolds debería entrar de alguna forma en los parámetros de la ecuación (2.61).

En mediciones efectuadas en los ríos Bernalillo, Bernardo y Socorro (zona media del río Grande en Nuevo México) se encontró una expresión de la forma:

$$W = W_f e^{-(2.3 m C 10^{-6})} \quad (c = \text{ppm}) \quad 2.62$$

en donde  $m$  depende del diámetro de las partículas y puede tener los siguientes valores medios:

Tabla 2.1

Intervalo (mm)	Media geométrica (mm)	$m$
0.0625 - 0.125	0.0884	8.42
0.125 - 0.250	0.177	4.05
0.250 - 0.500	0.354	2.84
0.500 - 1.000	0.707	2.02

Con la ecuación (2.62) y los valores de la tabla 2.1 se deduce que la variación de la velocidad de caída no es muy apreciable para diámetros mayores a 0.25 mm., inclusive con concentraciones de hasta 50000 ppm. Para los demás diámetros, la velocidad de caída puede considerarse, para propósitos prácticos, como efectivamente reducida para concentraciones mayores a 10000 ppm.

Numerosas ideas se han lanzado acerca de la variación de la velocidad de caída. En 1952, McNown y Lin<sup>8</sup> indicaron que la velocidad de depositación disminuye a medida que aumenta el material en suspensión, mas la ley de variación por ellos dada tampoco puede considerarse absolutamente general. Loyacano<sup>9</sup> en 1967 realizó experiencias en laboratorio y concluyó que en la mayoría de los casos existe aglomeración de partículas en suspensión y que por eso la velocidad de sedimentación aumenta con el aumento de material sólido en suspensión. Por otro lado, la inter-acción entre las partículas (choques) tienden a disminuir la velocidad de caída. En 1964, Ho<sup>10</sup> encontró que la velocidad de depositación de una partícula individual disminuye al aumentar la turbulencia.

En vista del gran número de factores que intervienen, tornase imposible una formulación matemática adecuada. Sería tal vez pre-

ferible, pasar su estudio al campo estadístico. Por otro lado, la inclusión de una expresión que de la variación de la velocidad de caída con la concentración, además de tornar más complicados los perfiles de concentración, podríamos caer en el peligro de incluir nuevos errores.

En los que sigue de nuestro estudio, aceptaremos que la velocidad de caída es la misma que en agua sin sedimentos:  $W = W_f$ . Además consideraremos que la gravedad específica  $\alpha$  de los sedimentos sumergidos influencia indirectamente a travez de  $W_f$ . Como concentración de referencia  $c_r$ , tomaremos la concentración que ocurre en  $y = y_0$  (punto en el cual  $u = 0$ ) y la llamaremos por  $c_b$ . De esta forma, nuestros parámetros serán:

$$W_f / u_* \text{ y } c_b$$

### 2.13 Comparación del perfil de velocidades con las experiencias

Con el objeto de averiguar la validez de la distribución de velocidades, usaremos las experiencias realizadas en laboratorio por H.A. Einstein y Nieng Chien<sup>3</sup>. Los experimentos fueron realizados en un canal de 1.006 pies de ancho por 1.17 pies de altura y 40 pies de longitud. La pendiente del canal podía regularse a voluntad.

El fondo fue cubierto de la misma clase de sedimentos que los mantenidos en suspensión y no se permitió que exista una depositación apreciable. El fondo teórico del modelo se definió de tal modo, que, el perfil de velocidades en el centro del canal siga, para agua sin sedimentos, una ley logarítmica. Se realizaron tres series de experiencias, correspondientes a los diámetros medios 1.3 mm; 0.92 mm; y 0.27 mm respectivamente. El peso específico de los sedimentos fue de  $2.65 \text{ gs/cm}^3$ . Los perfiles de velocidad y concentración, se midieron en el centro del canal, realizándose la corrección de las velocidades medidas debido a la presencia de sedimentos.

Para cada una de las 16 experiencias realizadas, se han determinado por el método de los mínimos cuadrados los valores de  $\chi$ ,  $\lambda$  y  $(u_s/u_*)$ . Estos valores se encuentran en la tabla 2.2 juntamente con los valores de  $u_*$ ,  $W_f/u_*$  y el diámetro  $d$ .

TABLA 2.2

Nº Exp.	diámetro (mm)	$\chi$	$u_s/u_*$	$u_*$ m/seg	$W_f/u_*$	$\lambda$ $10^3$	$X_1$
1	1.3	0.301	19.89	0.139	1.08	3.6	0.305
2	1.3	0.225	23.54	0.147	1.02	10.5	0.234
3	1.3	0.203	23.95	0.150	1.00	13.1	0.214
4	1.3	0.174	23.70	0.156	0.96	25.9	0.194
5	1.3	0.126	26.18	0.158	0.95	53.4	0.151
6	0.92	0.298	21.58	0.133	0.90	0.0	0.298
7	0.92	0.281	22.09	0.135	0.89	0.0	0.281
8	0.92	0.266	26.69	0.132	0.91	0.0	0.266
9	0.92	0.249	22.86	0.133	0.90	0.0	0.249
10	0.92	0.234	22.34	0.143	0.84	4.5	0.238
11	0.27	0.363	20.92	0.132	0.34	2.7	0.371
12	0.27	0.267	21.93	0.129	0.35	3.2	0.275
13	0.27	0.231	24.00	0.129	0.35	4.5	0.236
14	0.27	0.185	25.06	0.141	0.32	27.8	0.206
15	0.27	0.143	26.86	0.136	0.33	41.7	0.167
16	0.27	0.118	26.80	0.145	0.31	80.2	0.156

Usando estos valores, se han dibujado en papel semilogarítmico los valores de  $(u-u_s)/u_*$  contra  $(\lambda + y/h)/(\lambda + 1)$ . Los gráficos se encuentran en las figuras (2.5), (2.6) y (2.7), para los diámetros 1.3; 0.92 y 0.27 mm respectivamente. Puede observarse que, a pesar del hecho de que la ecuación (2.52) fue deducida para la capa de es fuerzo cortante constante, ella describe con gran precisión las velo



PERFILES DE VELOCIDAD PARA PARTICULAS DE 1.3 mm  
EQUACION Nº (2.52)

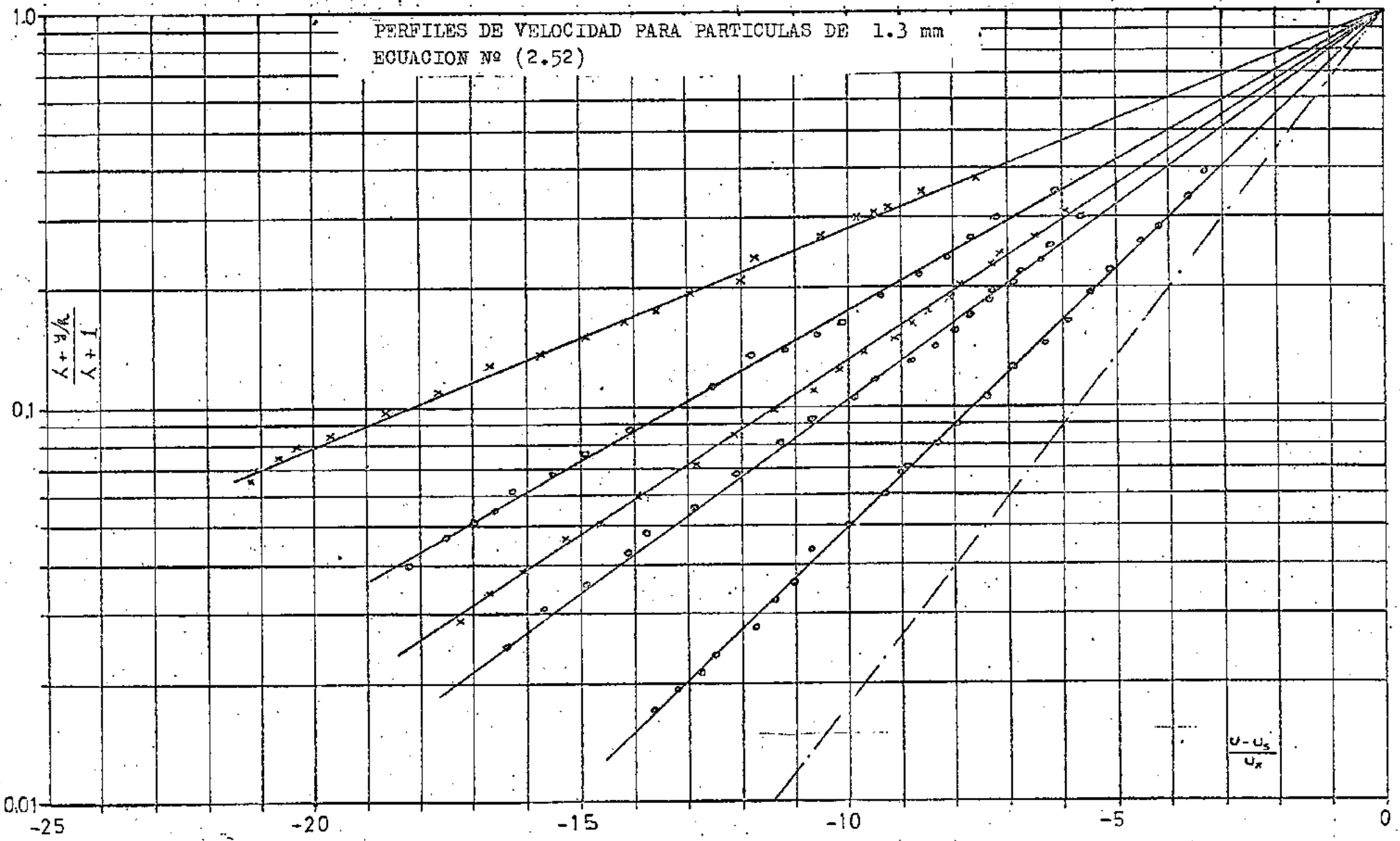


FIG. 2.5

PERFILES DE VELOCIDAD PARA PARTICULAS DE 0.92 mm  
ECUACION N° (2.52)

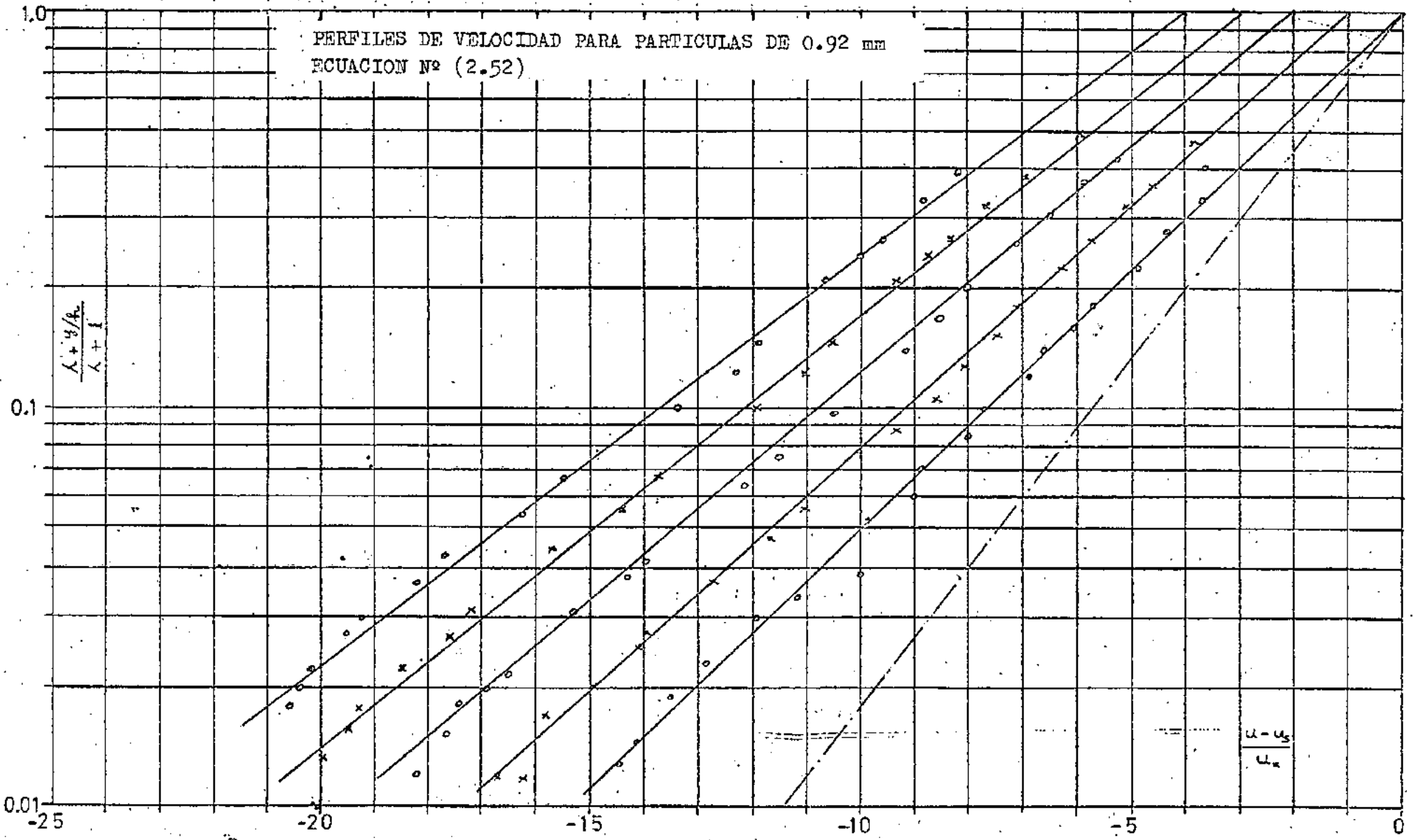


Fig. 2.6

PERFILES DE VELOCIDAD PARA PARTICULAS DE 0.27 mm  
ECUACION N° (2.52)

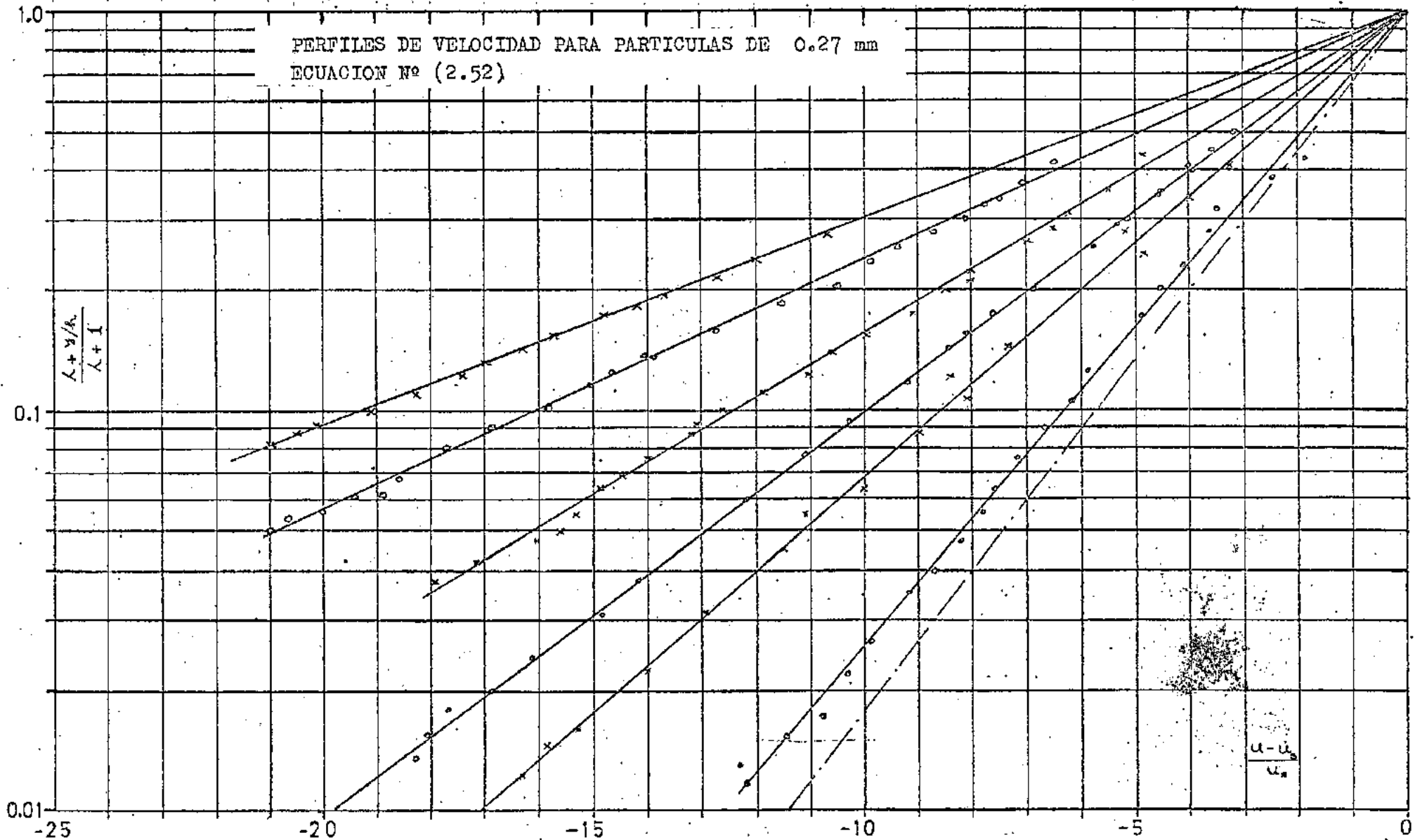


Fig. 2.7

tidades medidas en toda la vertical.

- Notas:
- 1) La línea de trazo de las figuras corresponde a la distribución de velocidades para agua sin sedimentos ( $\chi = 0.4$ )
  - 2) En algunas de las experiencias se ha desplazado la abscisa hacia la izquierda para evitar la superposición de puntos.

Como dijimos anteriormente, la distribución de velocidades dada por la ecuación de Keulegan:

$$\frac{u - u_s}{u} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{y}{h} \quad 2.64$$

constituye una aproximación de la distribución de velocidades dada por la ecuación (2.52), cuando  $\lambda = 0$ .

Es de esperarse pues, que para valores pequeños de  $\lambda$ , la ecuación (2.64) describa las velocidades medidas con cierta aproximación. Con el fin de comparar las dos ecuaciones, se han planteado en papel semilogarítmico los valores de  $(u - u_s)/u$  contra  $y/h$ . Estos gráficos se encuentran en las figuras (2.8), (2.9) y (2.10) para las tres clases de diámetros. Allí se han trazado las mejores rec-

PERFILES DE VELOCIDAD PARA PARTICULAS DE 1.3 mm  
ECUACION Nº (2.64)

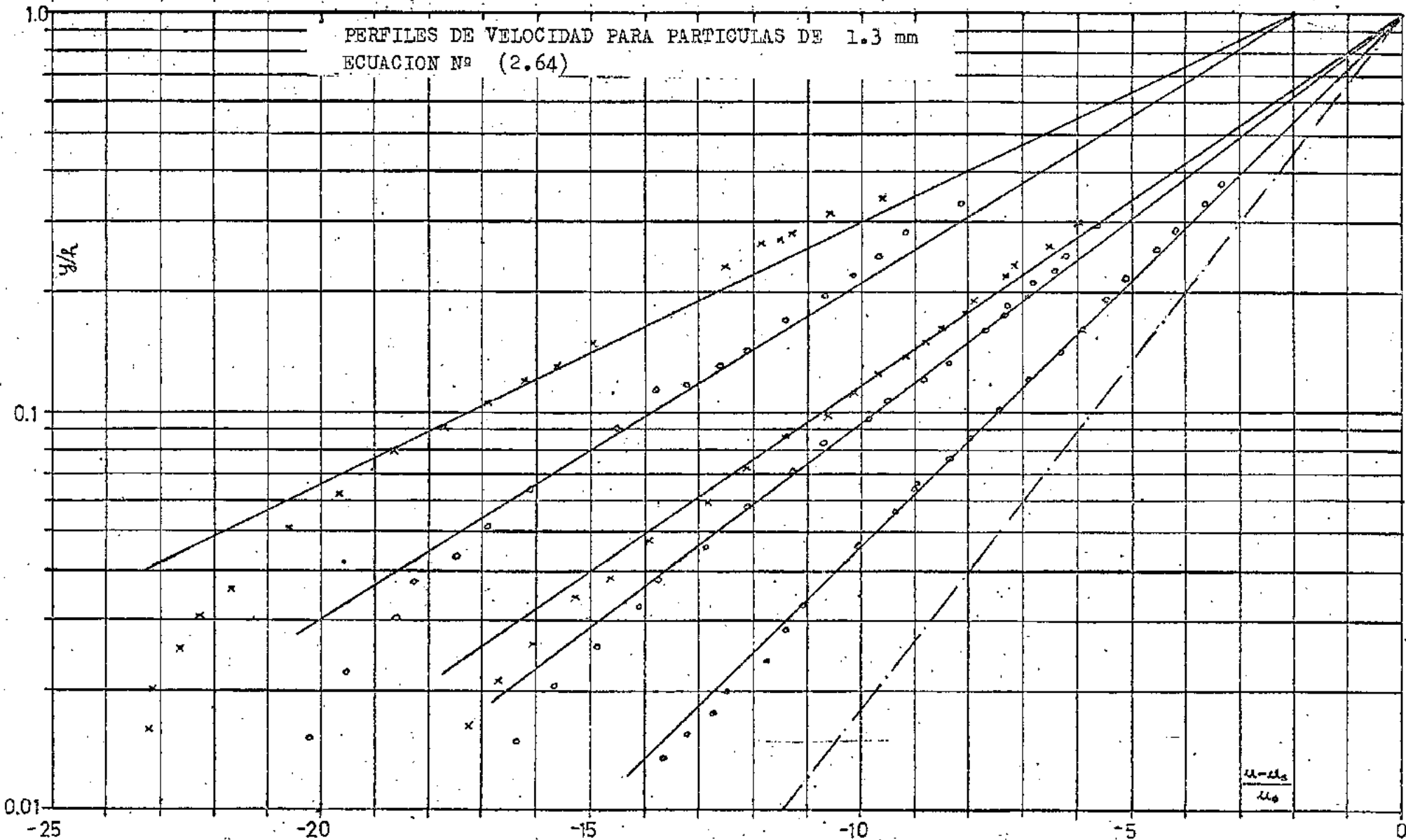


Fig. 2.8

PERFIL DE VELOCIDAD CORRESPONDIENTE A LA  
EXPERIENCIA Nº 10 , ECUACION Nº (2.64)

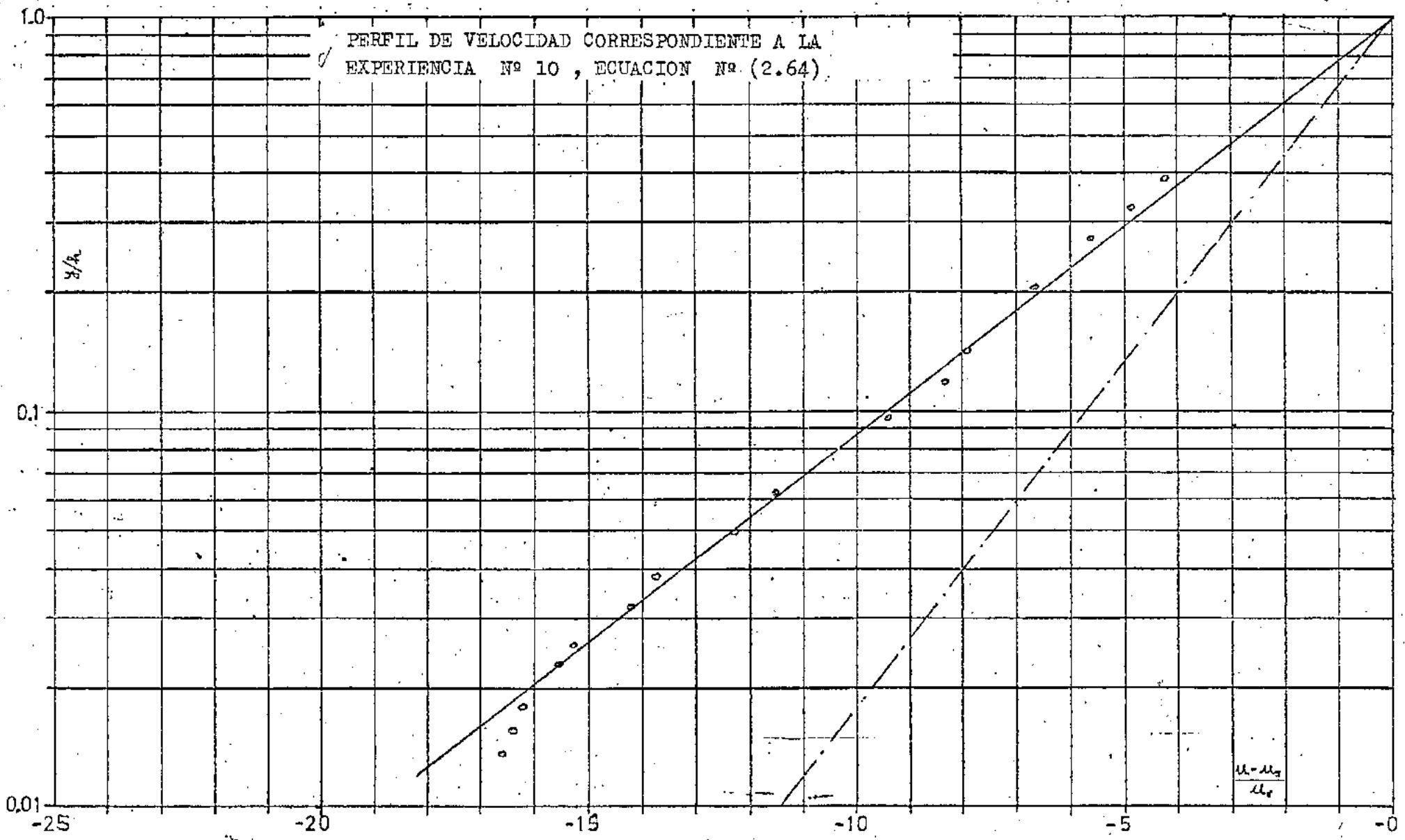


Fig. 2.9

PERFILES DE VELOCIDAD PARA PARTICULAS DE 0.27 mm  
ECUACION N° (2.64)

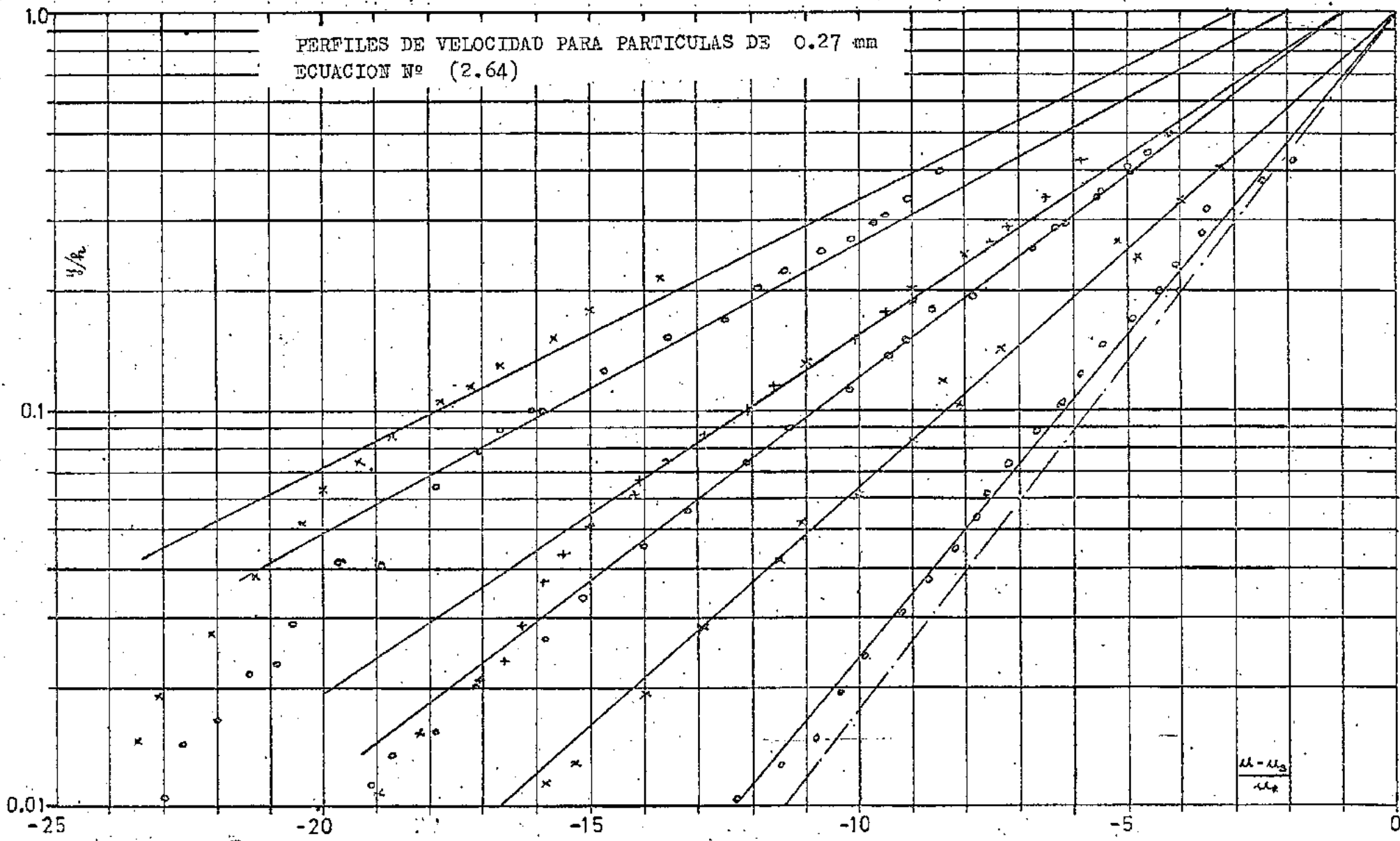


Fig. 2.10

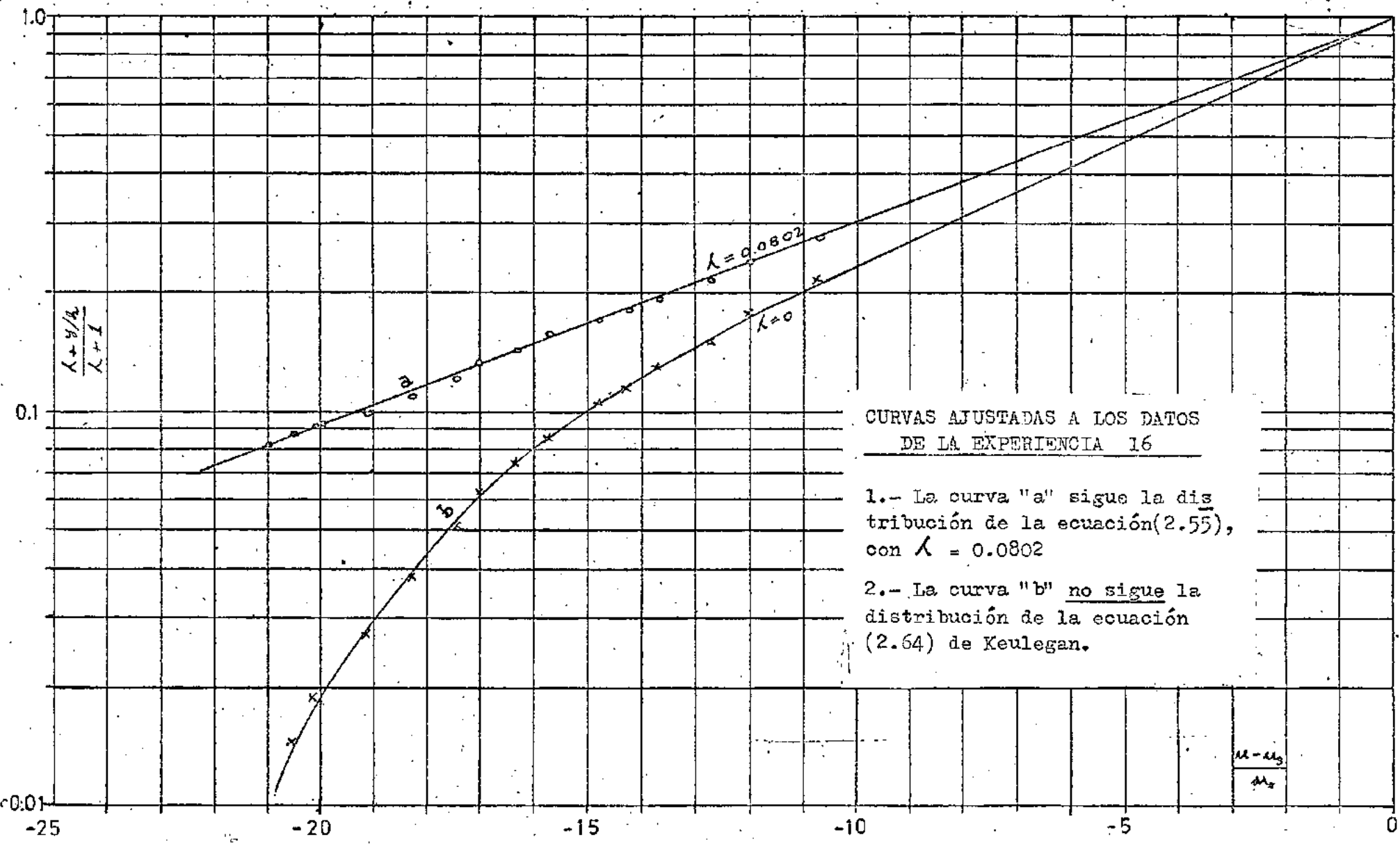
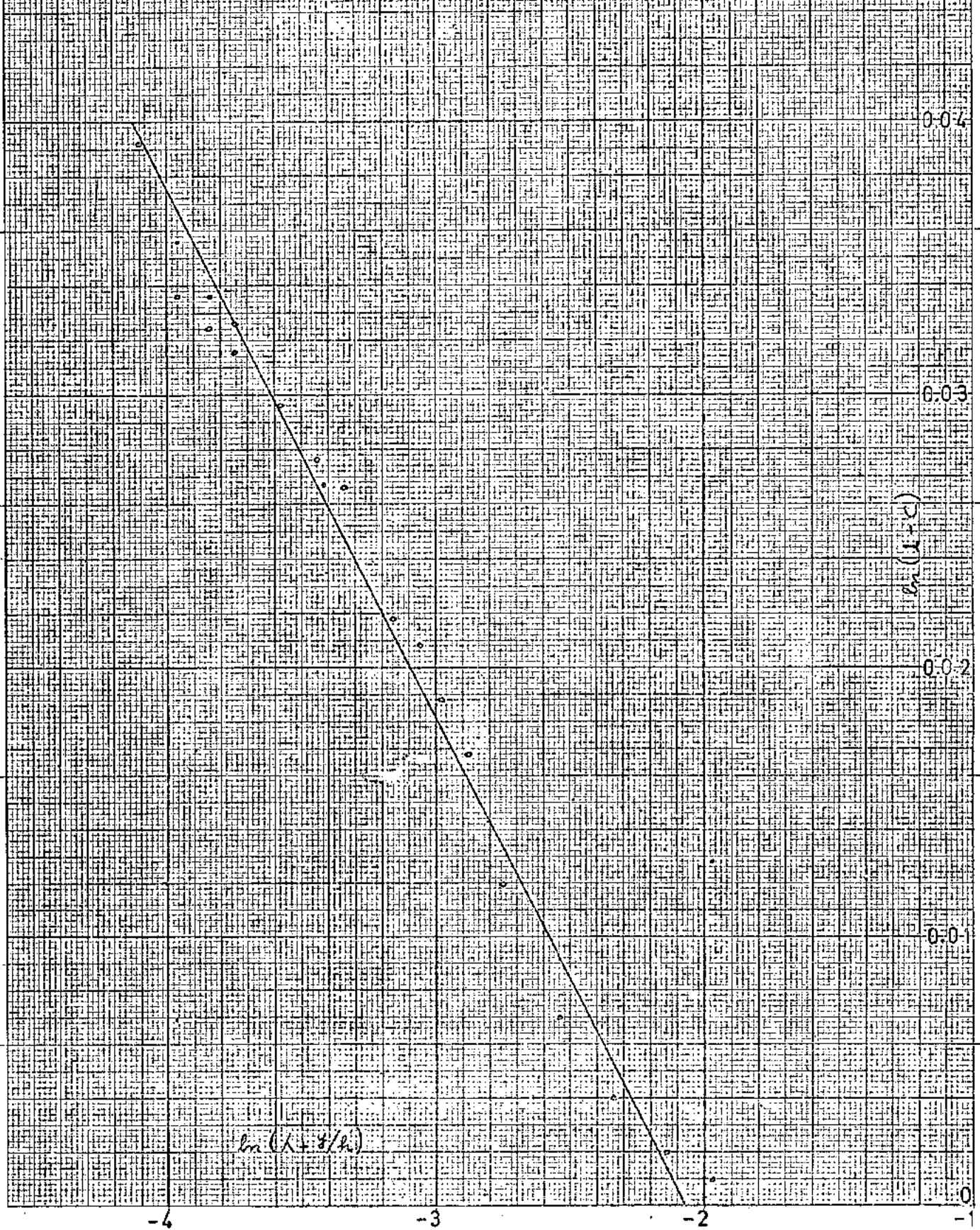




Fig. 2.12

PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 1. ECUACION (2.55)



PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 2. ECUACION (2.55)

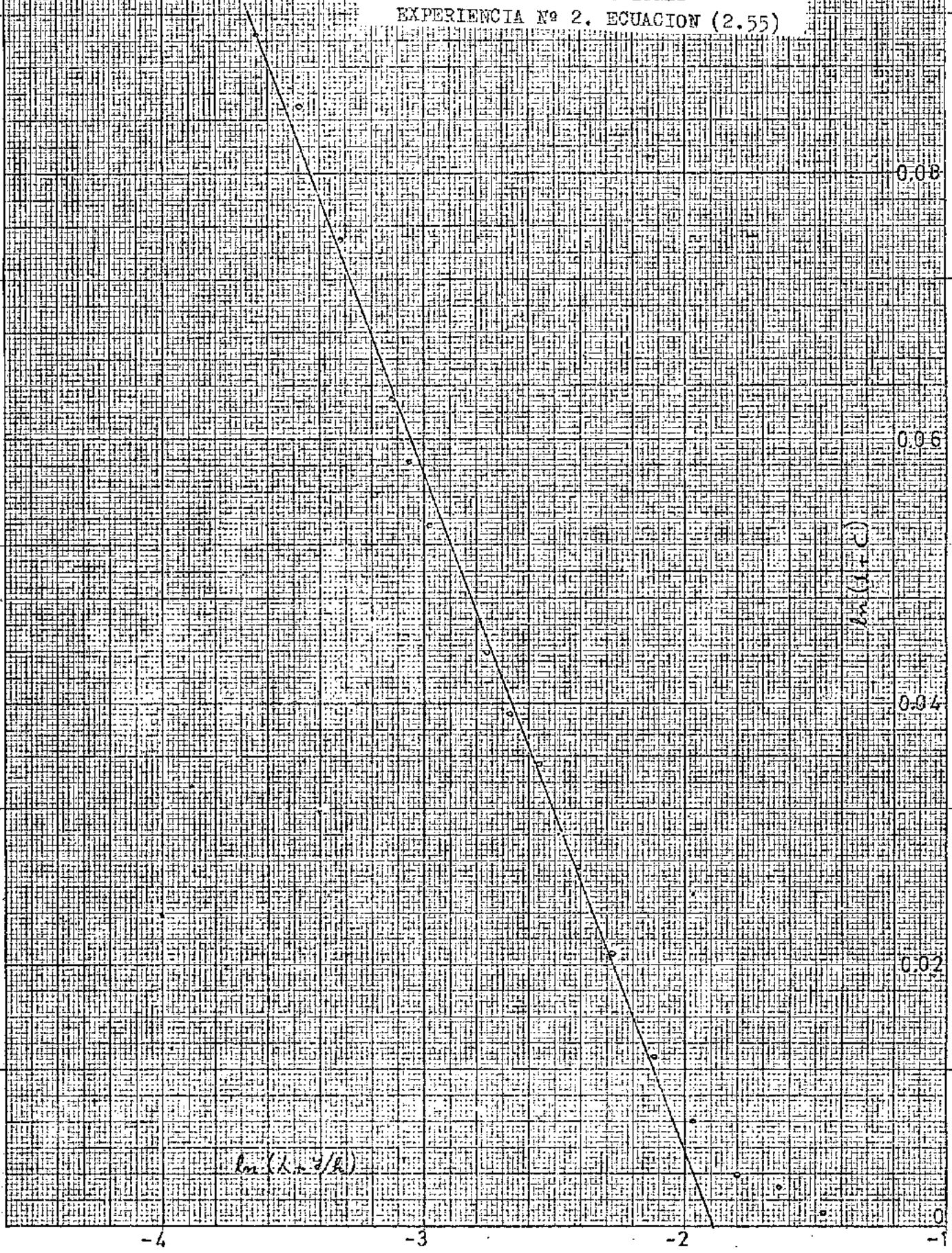




Fig. 2.24

PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 3. ECUACION (2.55)

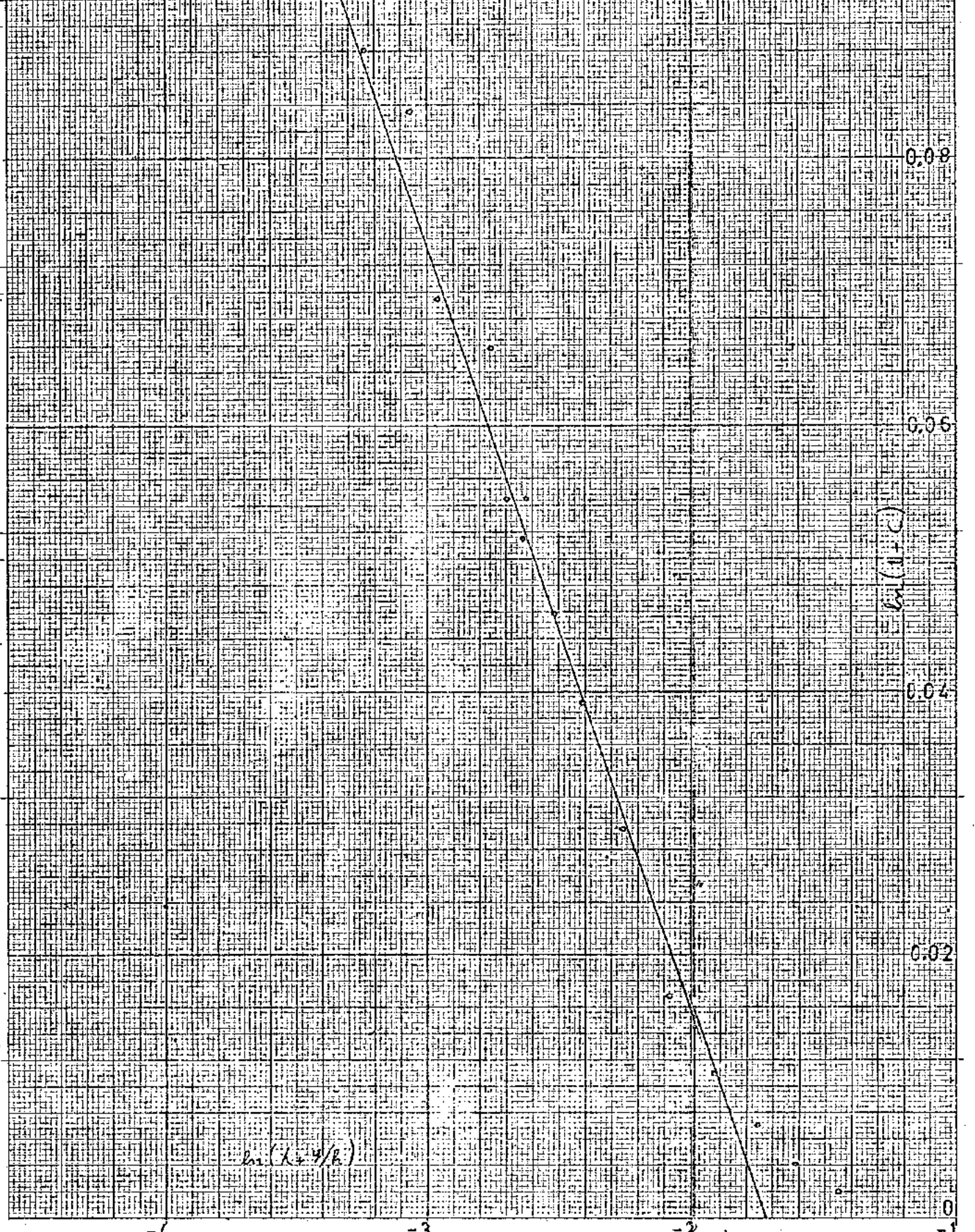
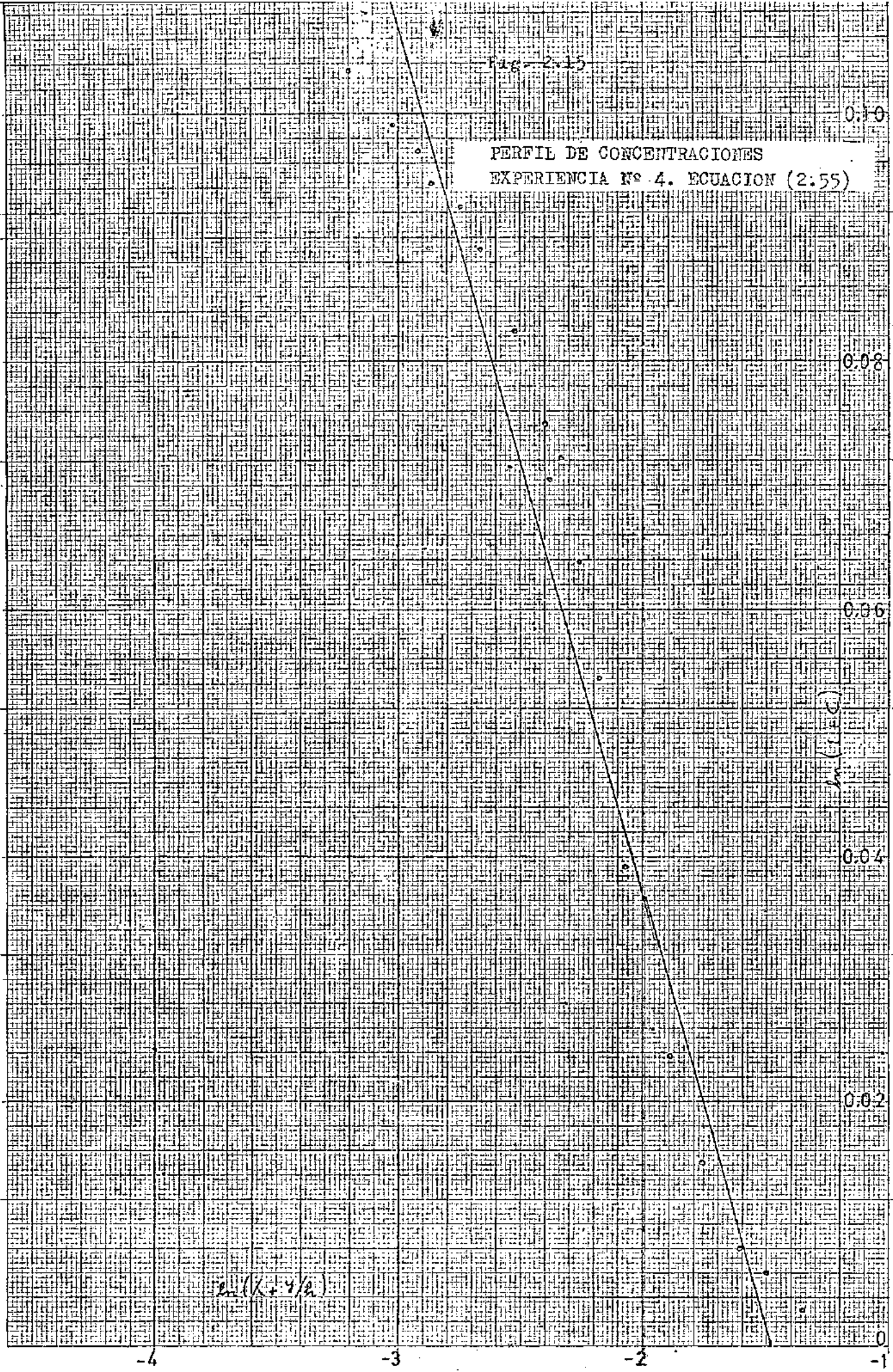


Fig. 2.15

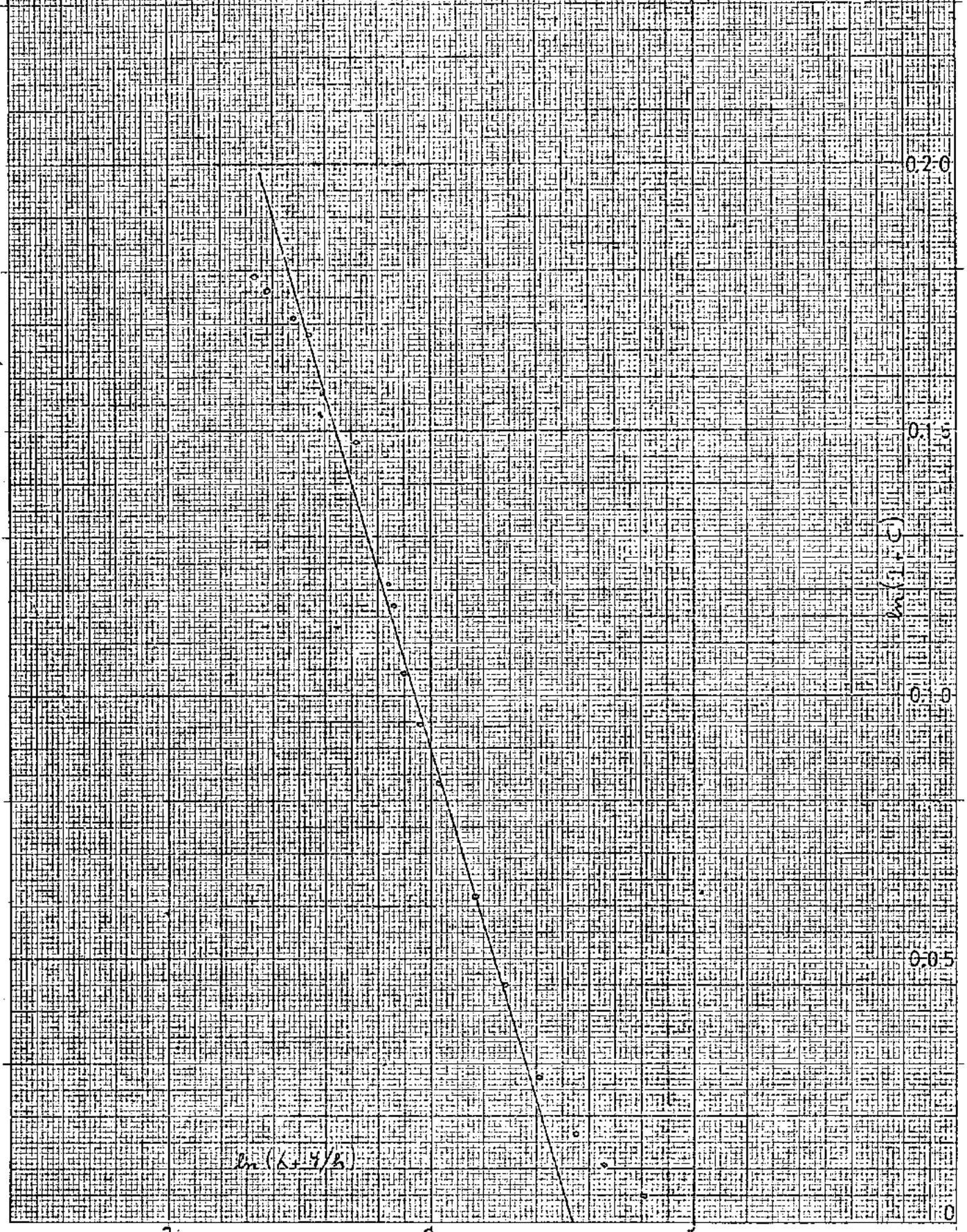
PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA N° 4. ECUACION (2.55)





PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 5. ECUACION (2.55)

6.5.2.16



$\ln(L-1/2)$

$\ln(C)$

-3

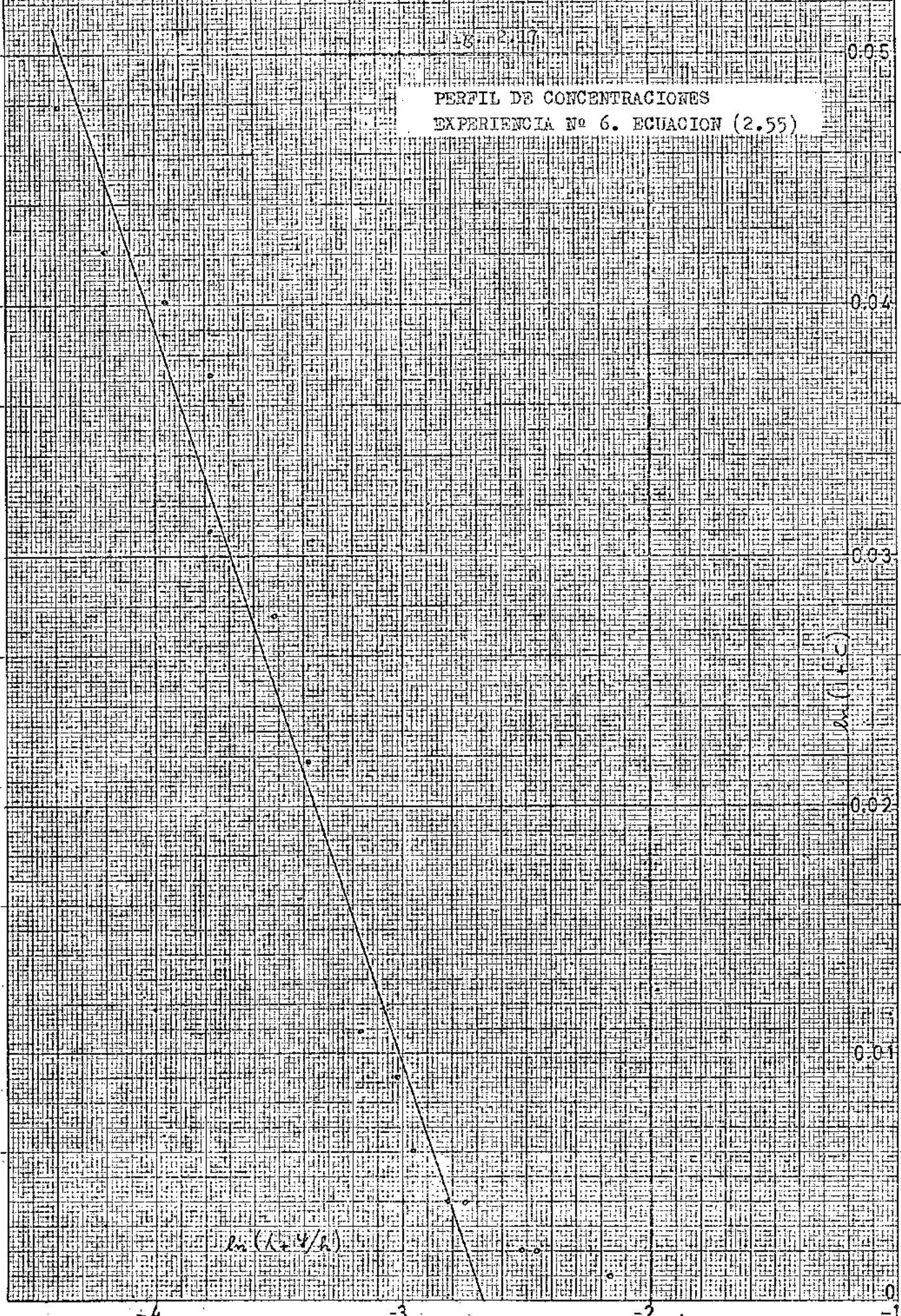
-2

-1

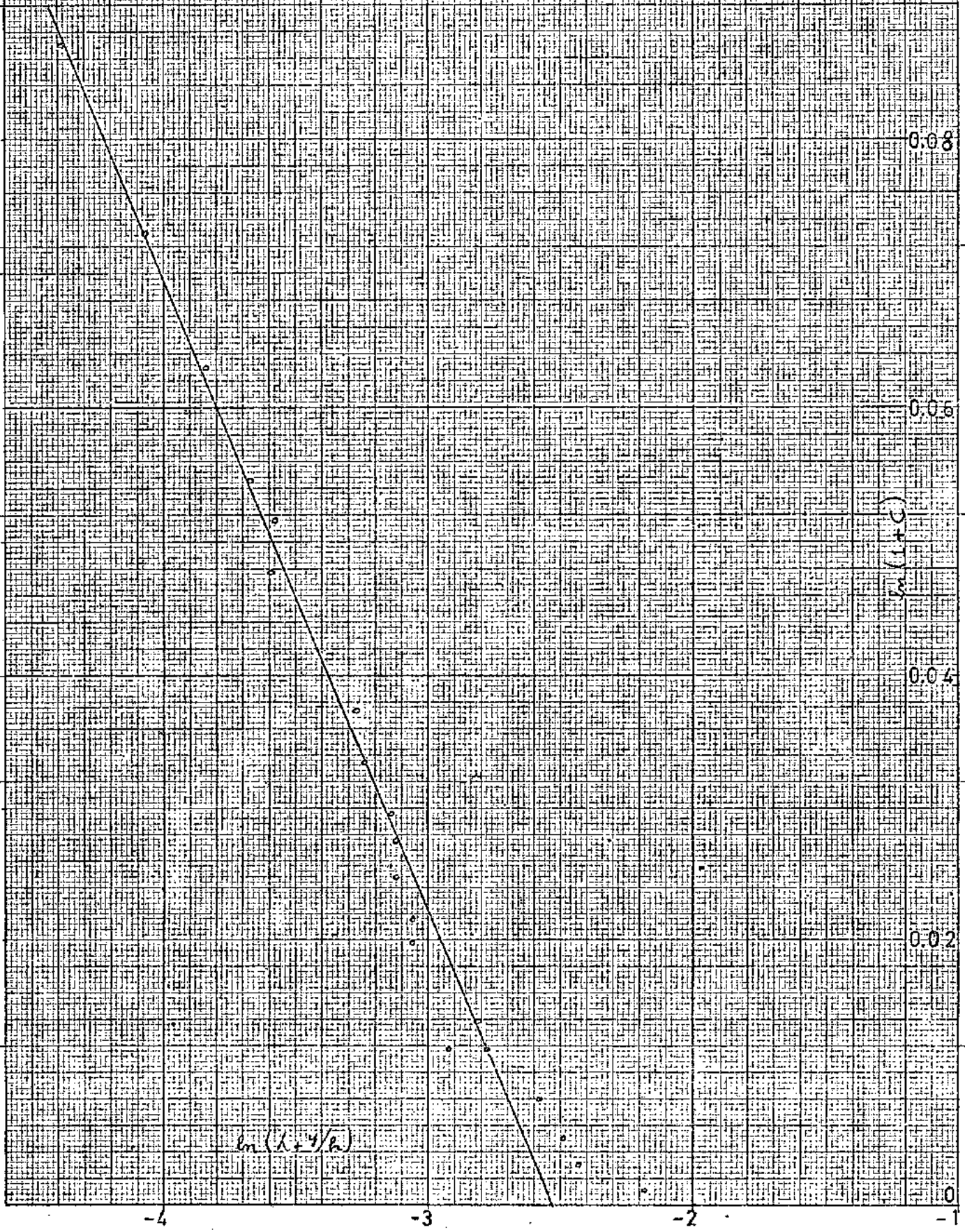
0

15.11.17

PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 6. ECUACION (2.55)



PERFIL DE CONCENTRACIONES  
 EXPERIENCIA N° 7. ECUACION (2.55)





PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 8. ECUACION (2.55)

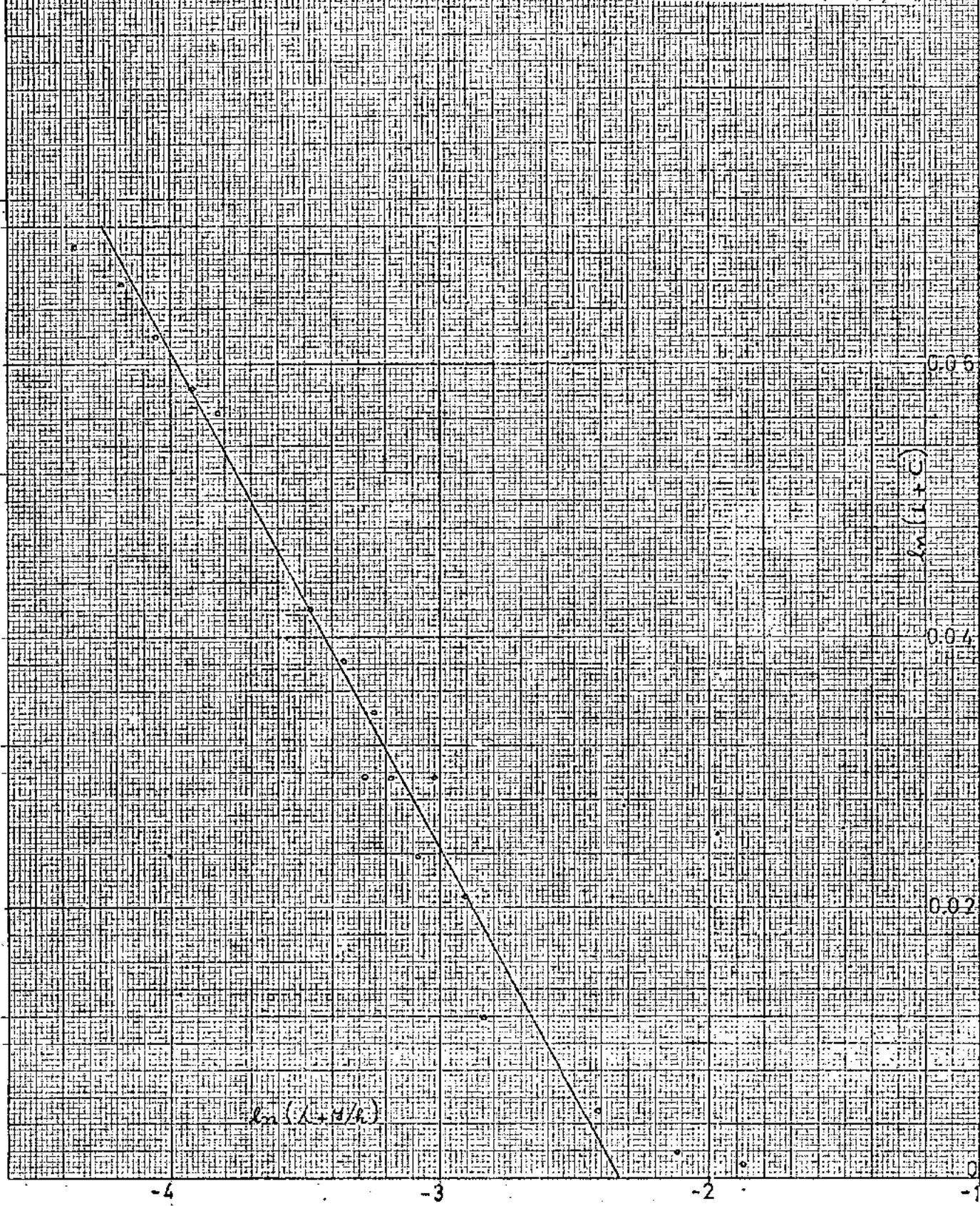




Fig 2.20

PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 9. ECUACION (2.55)

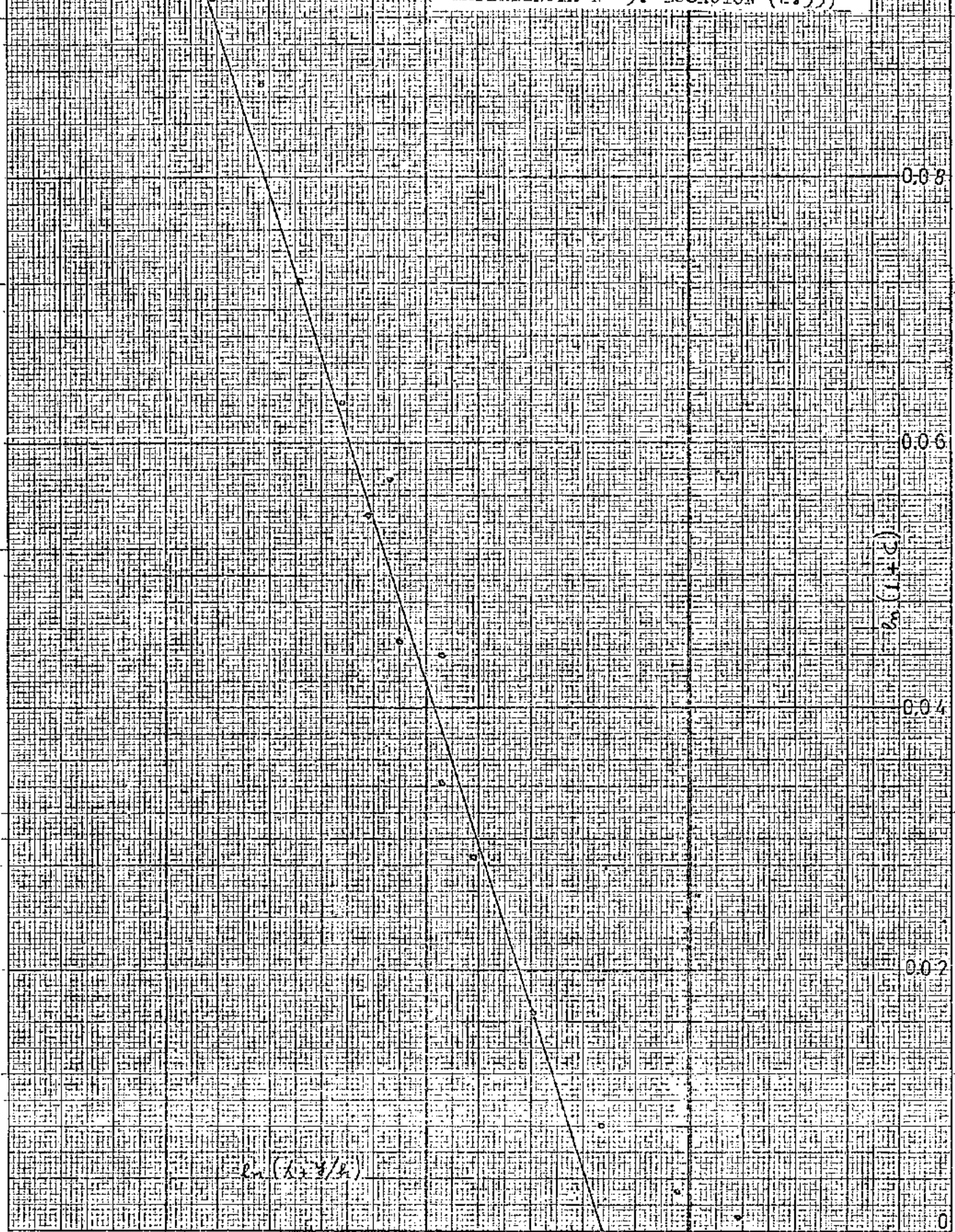
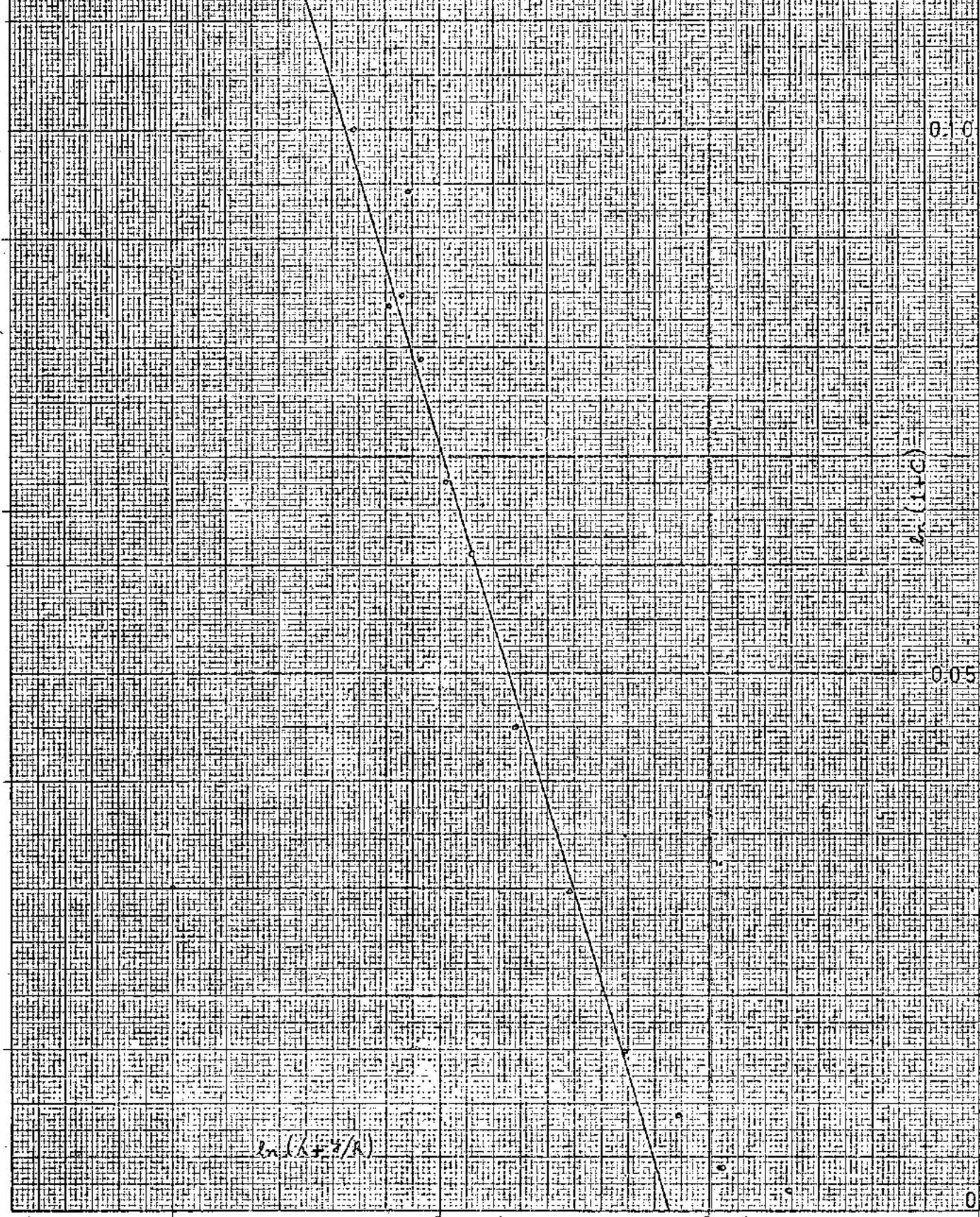
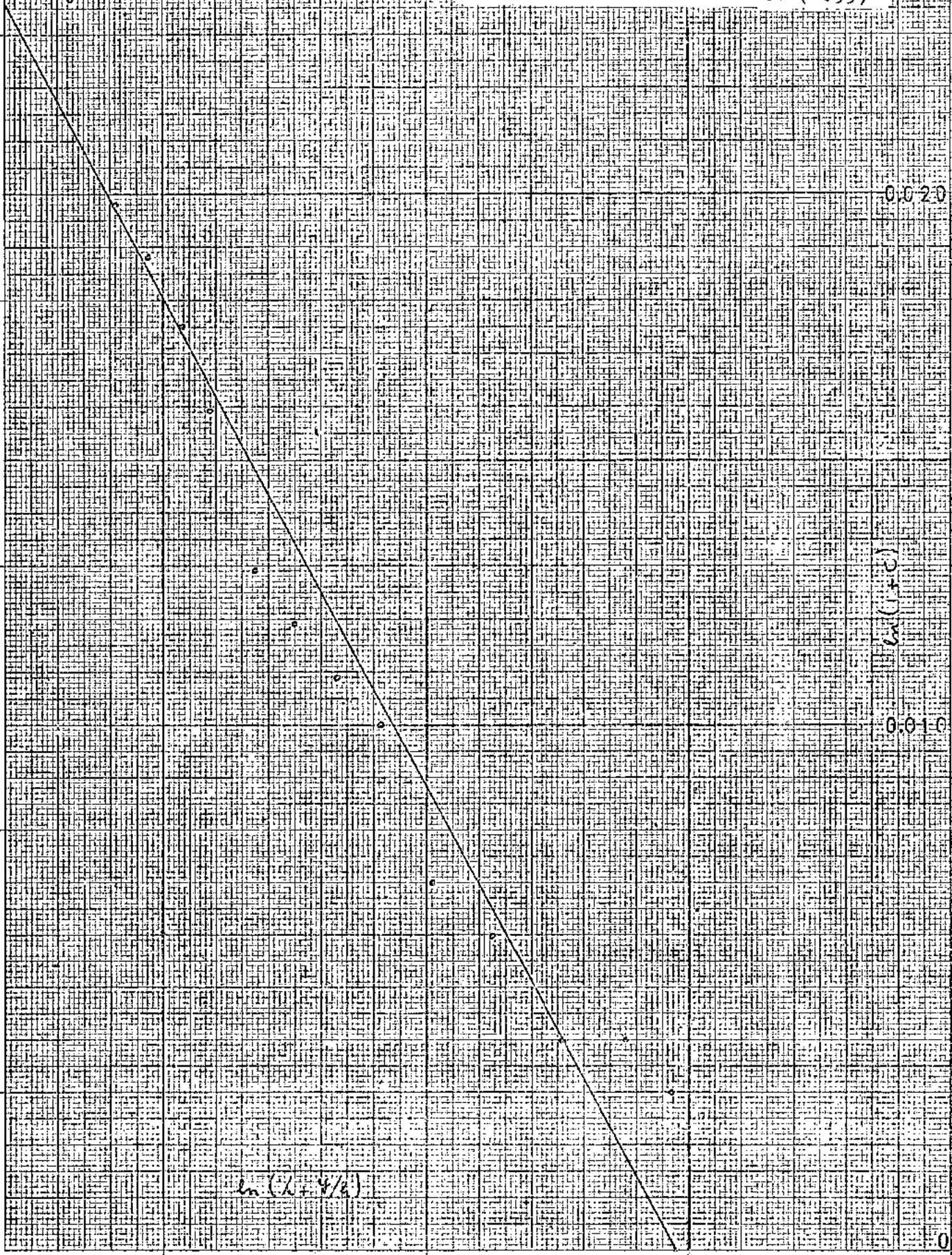


Fig. 2.2  
 PERFIL DE CONCENTRACIONES  
 EXPERIENCIA Nº 10. ECUACION (2.55)



PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 11. ECUACION (2.55)



PAPIERS CANSON - FRANCE



PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 12. ECUACION (2.55)

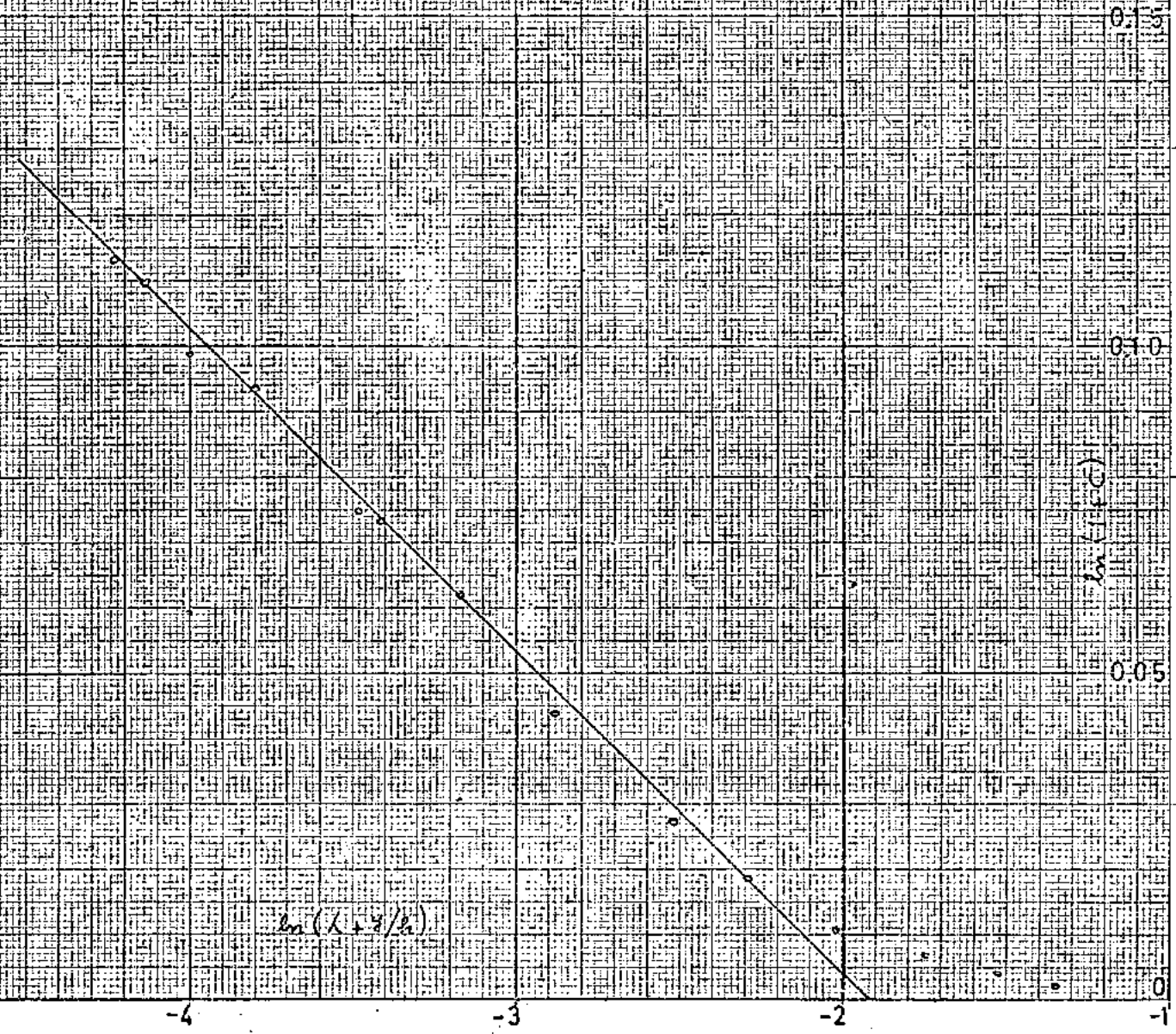
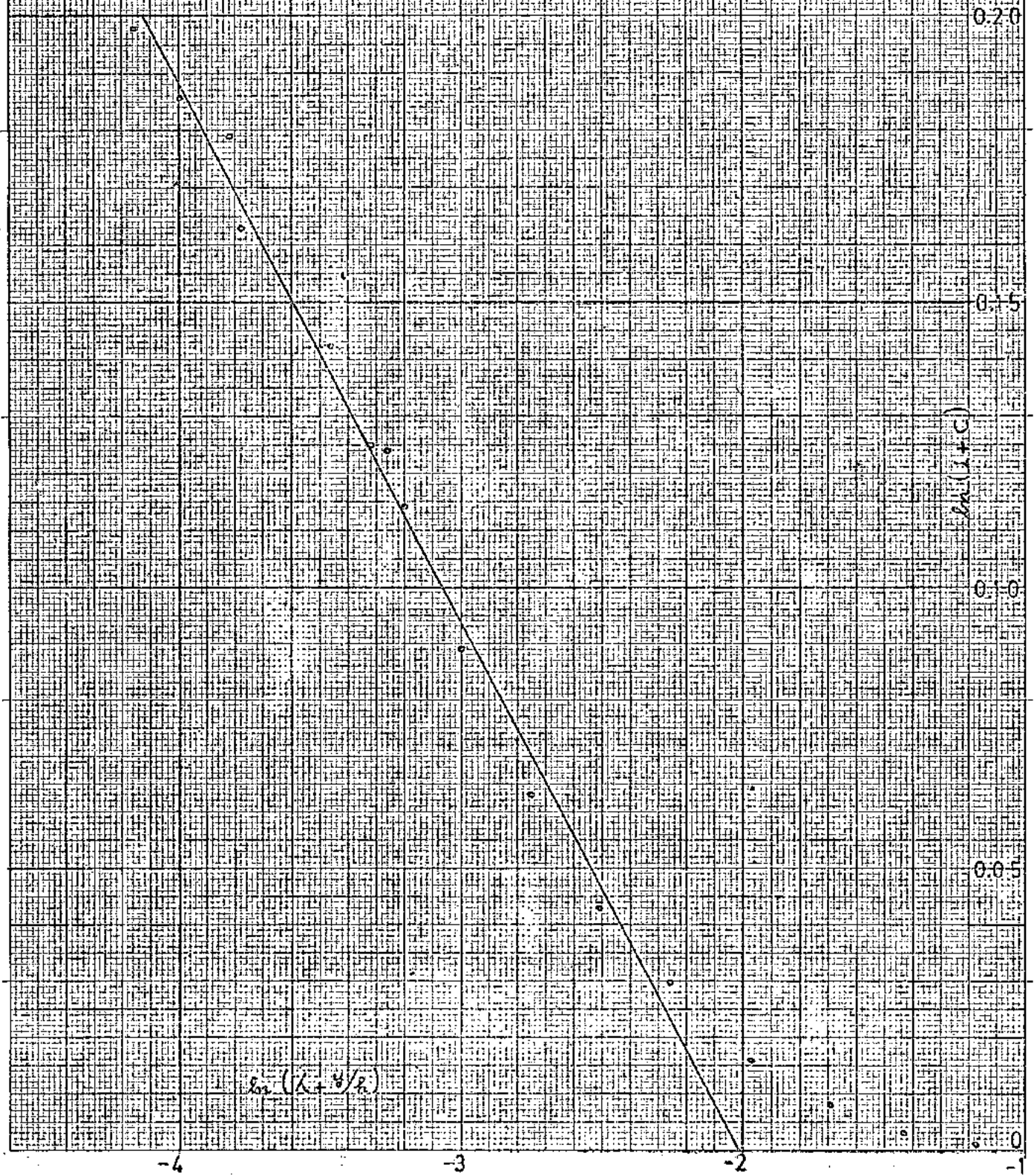


Fig. 24

PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 13. ECUACION (2.55)





PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 14. ECUACION (2.55)

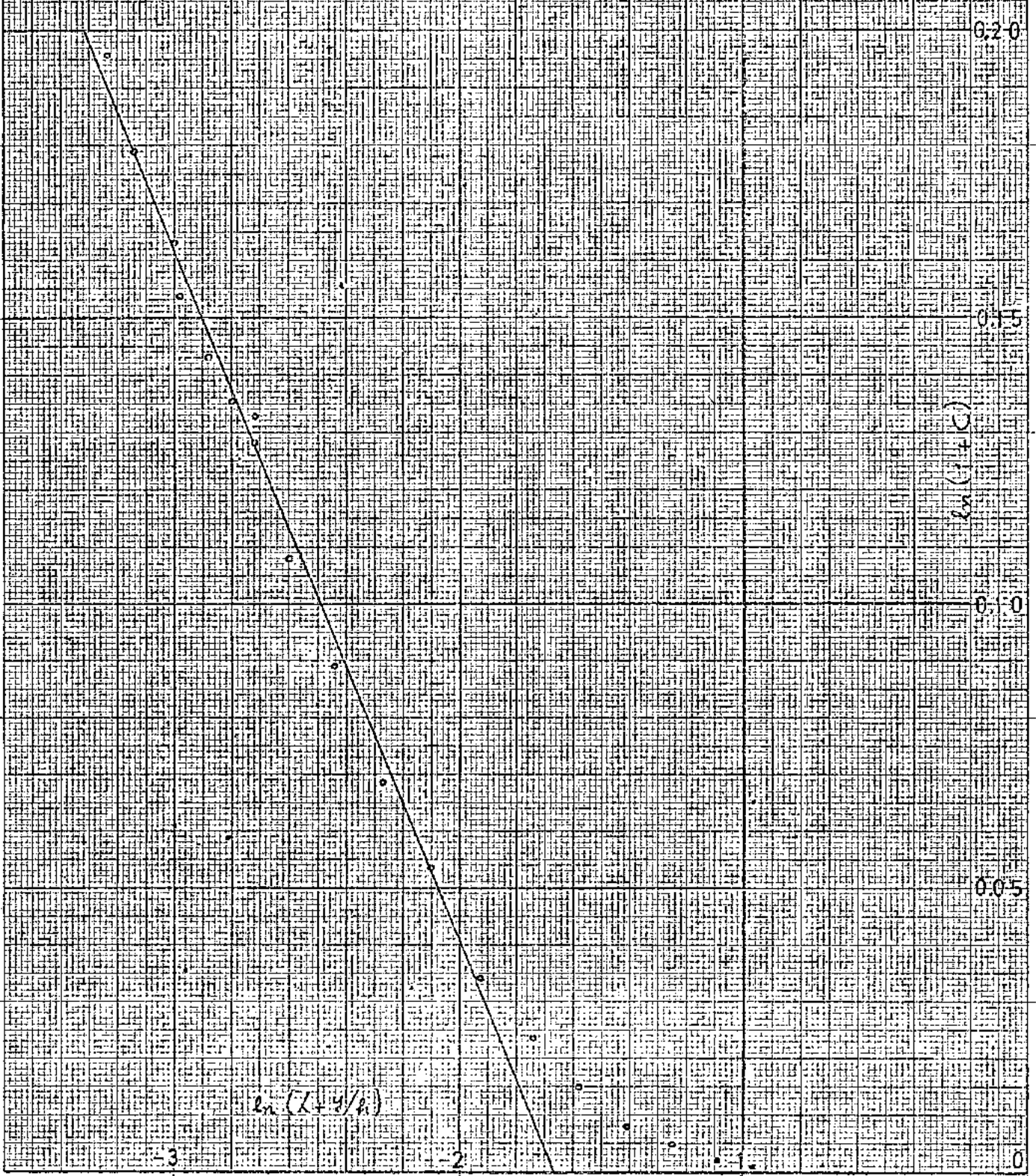


Fig. 2/26

PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 15. ECUACION (2.55)

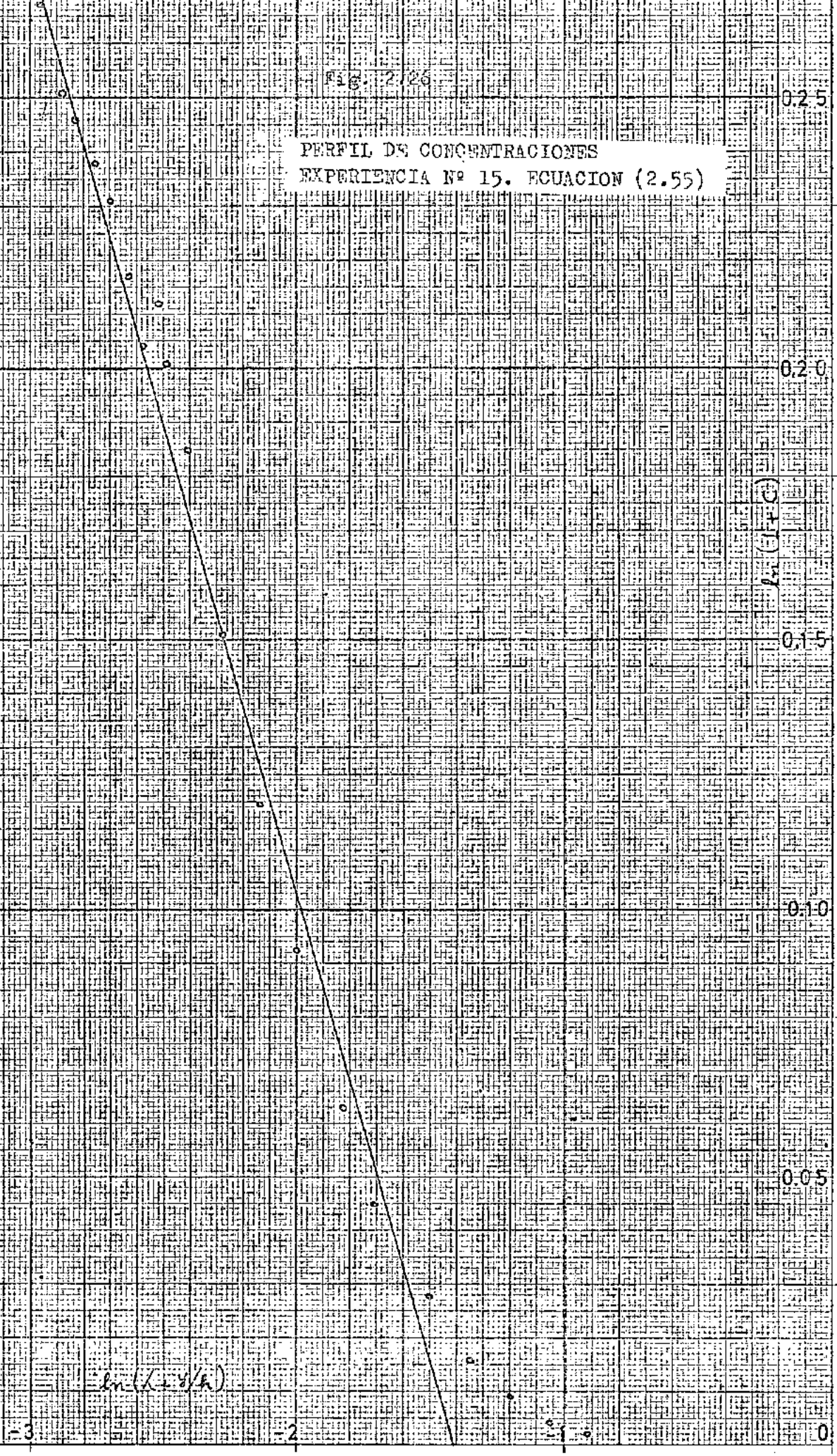


Fig. 2.21

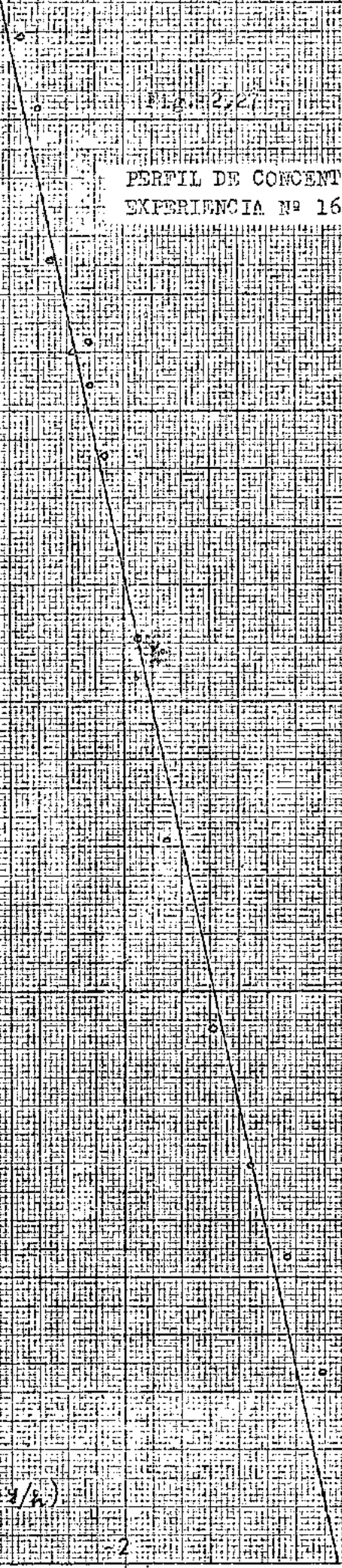
PERFIL DE CONCENTRACIONES  
EXPERIENCIA Nº 16. ECUACION (2.55)

0.25  
0.20  
0.15  
0.10  
0.05  
0

$r(r, z)$

$\ln(k_1 z / h)$

3 -2 -1 0





tas de ajuste con los datos medidos y determinado nuevos valores de  $\chi = \chi_1$  que se encuentran en la tabla 2.2. Obsérvese que el perfil logarítmico usual de distribución de velocidades, no se aplica para elevadas concentraciones. La figura (2.11) es un gráfico típico, correspondiente a la experiencia 16 que muestra la diferencia entre las ecuaciones (2.52) y (2.64).

Con los resultados obtenidos podemos concluir que, para propósitos prácticos, el valor de  $\lambda$  puede hacerse igual a cero cuando la concentración media sobre la vertical es menor a 24000 ppm.

#### 2.14 Comparación del perfil de concentraciones con las experiencias

Con ayuda de los valores calculados de  $\lambda$ , se han planteado en papel aritmético los valores de  $\ln(\lambda + y/h)$  contra  $\ln(1 + c)$ . Estos gráficos se encuentran en las figuras (2.12) a (2.27). En ellos se trazaron las mejores rectas de ajuste a los valores medidos. Auxiliados con estas figuras calculamos:

- El exponente  $Z_1$  que será la pendiente de la recta
- El valor de  $(\lambda + y_R/h) = e^{b_R}$ , en donde  $y_R$  es la ordenada para la cual  $c = 0$ ;  $b_R$  es el valor de la abscisa corres-

pendiente al punto de intersección de la recta con el eje

$\ln(\lambda + y/h)$ .

- El valor de  $d_1 = (\lambda + y_r/h)^{Z_1}$

Los valores de  $Z_1$ ,  $d_1$  y  $(\lambda + y_r/h)$  se encuentran en la tabla 2.3 para cada una de las 16 experiencias. De esta tabla se concluye que la ecuación (2.55) describe adecuadamente la distribución de concentración en la parte baja del flujo y hasta una altura que varía del 10 al 20% de la altura total. Mas tratándose de los diámetros usados en las experiencias, la mayor parte del transporte por suspensión ocurre precisamente en esa zona. Podemos por tanto, para efectos de cálculo de descarga sólida total por suspensión, obtener una buena aproximación despreciando la parte de sedimentos que pueden transportarse sobre el nivel  $y_r$ .

TABLA 2.3

Nº exp.	$Z_1$ $\times 10^2$	$d_1$	$(\lambda + y_r/h)$	$c_b$ $\times 10^2$
1	1.94	0.9608	0.128	7.90
2	5.17	0.9074	0.152	19.20
3	5.75	0.9060	0.179	19.70
4	7.05	0.9010	0.228	20.20
5	16.60	0.7850	0.232	34.40
6	2.96	0.9237	0.069	11.80
7	4.70	0.8880	0.080	18.90
8	3.66	0.9180	0.096	19.00
9	6.17	0.8670	0.098	23.00
10	8.28	0.8380	0.118	29.00
11	0.92	0.9814	0.130	5.25
12	4.97	0.9085	0.145	21.40
13	9.48	0.8270	0.134	39.60
14	12.10	0.8180	0.189	42.00
15	17.30	0.7850	0.246	50.50
16	22.90	0.7520	0.286	51.60

La concentración  $c_b$ , correspondiente al nivel "y<sub>0</sub>", puede calcularse con la ecuación (2.55) usando el valor de  $\lambda + y_0/h$  obtenido de la solución de:

$$-\frac{u_s}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \left[ \frac{\lambda + y_0/h}{\lambda + 1} \right] \quad 2.64$$

los valores de  $c_b$  se indican también en la tabla 2.3

#### Variación del exponente $Z_1$

Como dijimos (Cf. 2.12) el exponente  $Z_1$  será función de  $c_b$  y de  $W_{f/u_*}$ , vale decir que como  $\chi$  es también función de  $W_{f/u_*}$ , podemos expresar  $Z_1$  como dependiente de  $\chi$  y de  $c_b$ . Con tal propósito se han planteado en la figura (2.28) los valores de  $Z_1$  contra  $(c_b/\chi)$  en papel doblemente logarítmico. La recta de ajuste corresponde a la ecuación

$$Z_1 = 0.061 \left( \frac{c_b}{\chi} \right) \quad 2.65$$

#### Variación del coeficiente $d_1$

En la figura 2.29 están planteados los valores de  $(1 - d_1)$

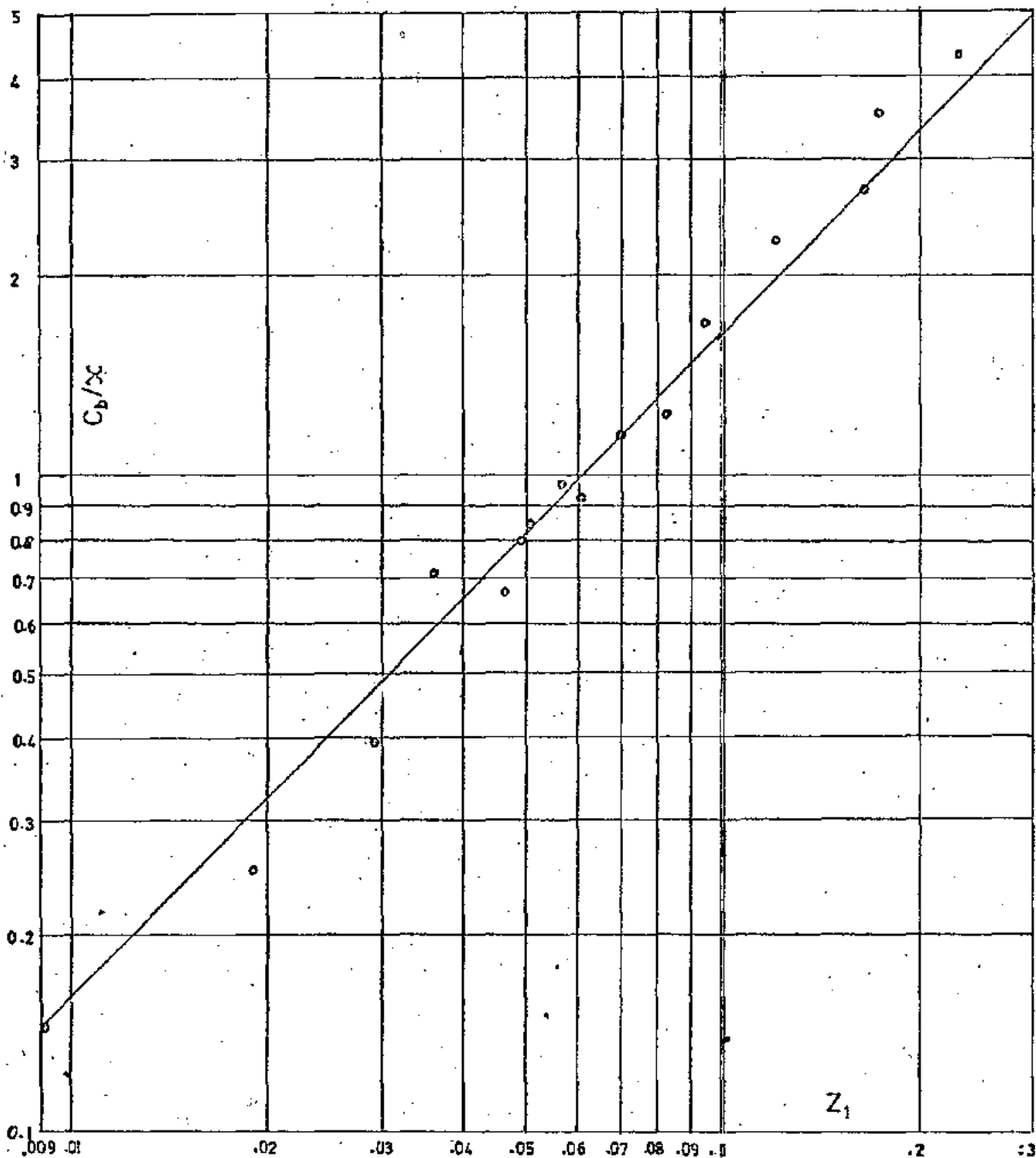


Fig. 2.28

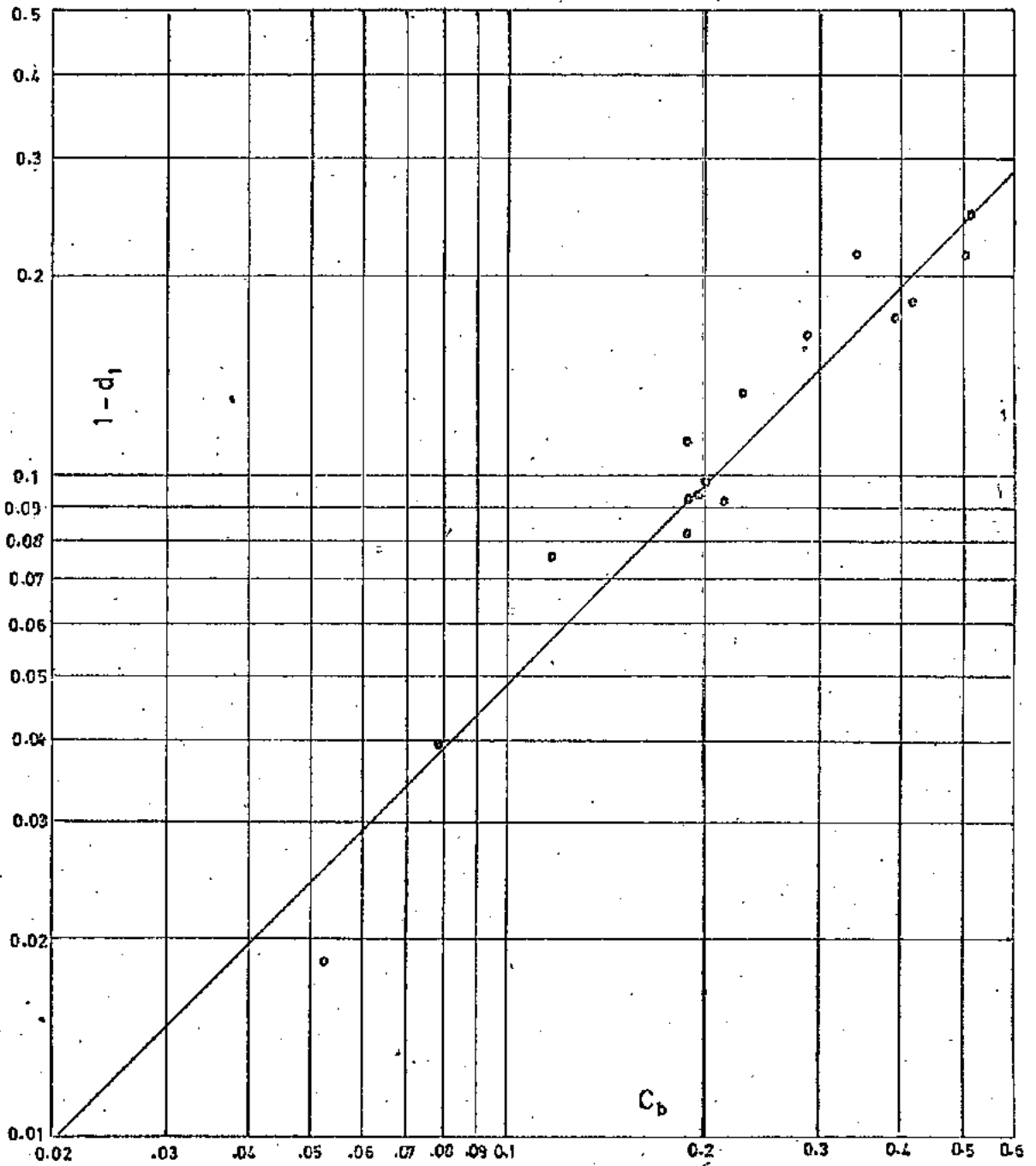


Fig. 2.29

contra  $c_b$ . La recta de ajuste aproximase muy bien a los valores medidos y tiene como ecuación

$$d_1 = 1 - 0.48 c_b \quad 2.66$$

### Variación del coeficiente $\chi$

A este respecto se han sugerido diversas teorías, tales como la de Mikio Hino<sup>18</sup> y las de H. A. Einstein y Ning Chien<sup>19</sup>, pero todavía ninguna de ellas puede considerarse satisfactoria.

Con vista a establecer comparación, citaremos brevemente la teoría dada por Mikio Hino:

Su estudio parte de dos ecuaciones: la de la energía para flujo paralelo con partículas suspendidas y la ecuación de balance de aceleraciones para movimiento turbulento; la ecuación final a la que llega es:

$$\frac{\chi_o}{\chi} = \frac{(1 + \beta c_m)}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + 4B \chi_o (1 + \beta c_m) S_1 \right]^{1/2} \right\} \quad 2.67$$

en donde:

$\chi_0$  = valor de  $\chi$  para  $c = 0$

$\beta$  = constante positiva

$c_m$  = concentración media sobre la vertical

$B$  = constante

$S_1$  = parámetro característico de la turbulencia y que viene dado por:

$$S_1 = \frac{g(S - 1) W_f c_m (h - \delta)}{u_*^3 \ln \frac{h}{\delta}} \quad 2.68$$

$$S = \frac{\rho_s}{\rho_f}$$

$\delta$  = espesor de la subcapa laminar

En el caso de flujo con sedimentos generalmente encontrados en observaciones de campo y experiencias de laboratorio, el término  $(1 + \beta c_m)$  puede hacerse igual a 1. Con esta condición, y después de sustituir el valor de  $S_1$  en la ecuación (2.67) se llega a la siguiente expresión, dada por H. Shimura y que constituye una aproximación de la ecuación (2.67)

$$\frac{1}{\chi} = \frac{1}{\chi_0} \frac{\beta_1 (S - 1) c_m g W_f (h - \delta)}{u_*^3 \left( \ln \frac{h}{\delta} - 1 \right)} \quad 2.69$$



Siendo  $\beta_1$  una Cte que la determinó Shimura basado en experiencias de Vanoni e Ismail como siendo  $\beta_1 = 4.8$ .

Si llamamos por:

$$M_1 = \frac{X_0 \beta_1 (S - 1) g W_f (h - \delta)}{u_*^3 \left( \ln \frac{h}{\delta} - 1 \right)} \quad 2.70-a$$

tenemos

$$X = \frac{X_0}{1 + M_1 c_m} \quad 2.70-b$$

En la tabla 2.4 se encuentran los valores de  $\chi$  calculados con la expresión anterior. La concentración media se determinó integrando la ecuación (2.55) desde  $y_0$  hasta  $y_r$ :

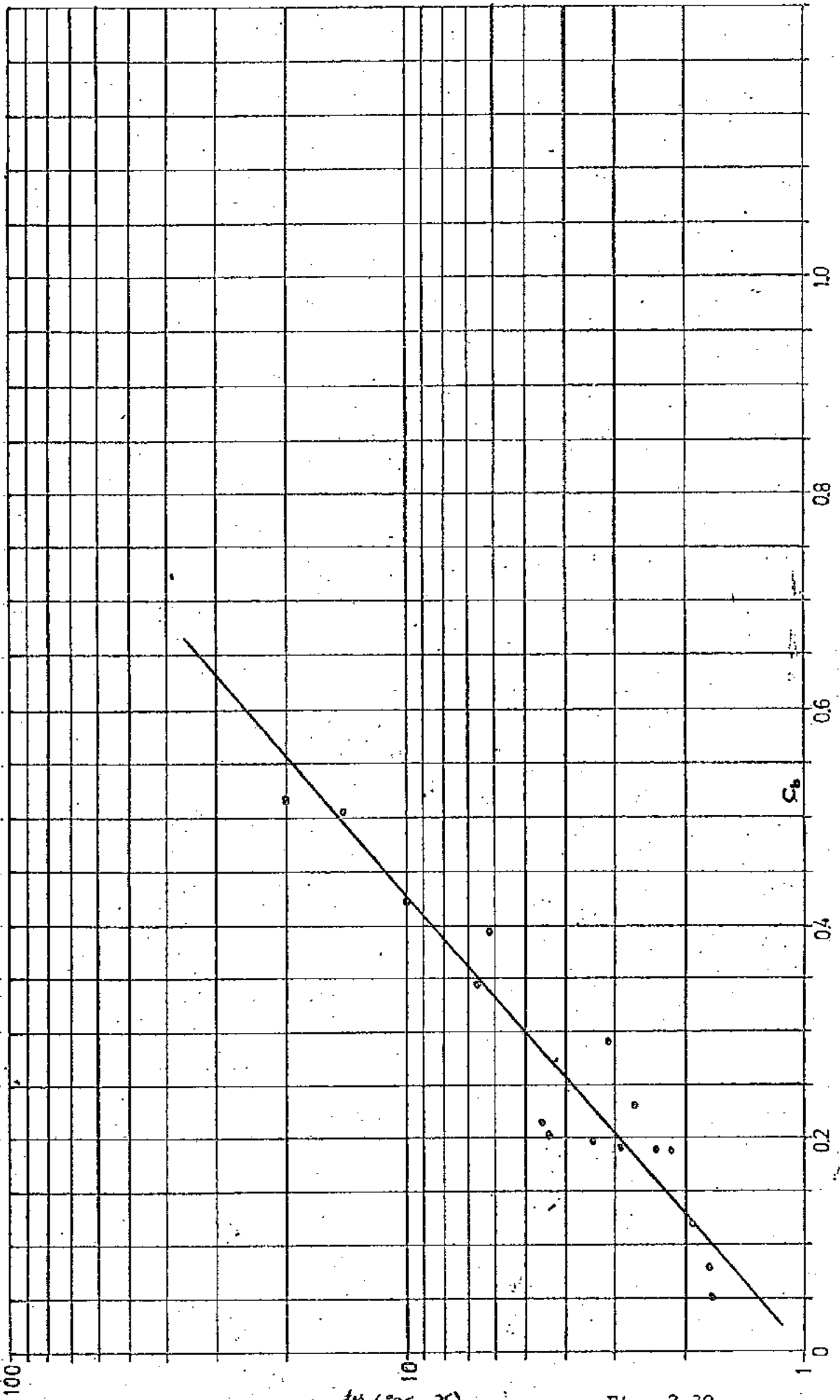
$$c_m = \frac{z_1 \left[ (c_b + 1)^{1/z_1} - 1 \right] - c_b}{(1 - z_1) \left[ (c_b + 1)^{1/z_1} - 1 \right]} \quad 2.71$$

La principal dificultad de (2.70) radica en el valor de  $\beta_1$  que no es Cte. y parece variar nuevamente con la concentración. En la misma tabla se encuentran los valores de  $\chi$  calculados con el valor medio de los  $\beta_1$  medidos ( $\bar{\beta}_1 = 3.44$ ).

Dentro del rango de las experiencias realizadas, se tentó ajustar los valores de  $\chi$  en función de  $W_f/u_*$  y de  $c_b$ . Una ecuación que da resultados más o menos satisfactorios se dedujo basándonos en la fig. (2.30) y es de la forma

$$\frac{1}{\chi} = \frac{1}{\chi_0} + \frac{W_f}{u_*} \left[ e^{(5.4c_b)} - 1 \right] \quad 2.72$$

Los valores de  $\chi$  obtenidos con la ecuación (2.72) se hallan en la tabla 2.4.



$$1 + \frac{hM}{4\pi} \left( \frac{x}{1} - \frac{x}{1} \right)$$

Fig. 2.30

TABLA 2.4

Nº exp.	$c_m$	$\bar{X}$ medido	$\bar{X}$ Ec. 2.70; $\beta_1 = 4.8$	$\bar{X}$ Ec. 2.70; $\beta_1 = 3.44$	$\bar{X}$ Ec. 2.72
1	0.0182	0.301	0.238	0.282	0.326
2	0.0480	0.225	0.172	0.208	0.229
3	0.0515	0.203	0.186	0.219	0.227
4	0.0586	0.174	0.174	0.208	0.227
5	0.1157	0.126	0.119	0.149	0.131
6	0.0286	0.298	0.119	0.233	0.303
7	0.0442	0.281	0.163	0.196	0.245
8	0.0362	0.266	0.177	0.211	0.242
9	0.0570	0.249	0.135	0.167	0.212
10	0.0751	0.234	0.134	0.166	0.176
11	0.0091	0.363	0.358	0.369	0.383
12	0.0475	0.267	0.242	0.273	0.306
13	0.0915	0.231	0.177	0.210	0.195
14	0.1100	0.185	0.196	0.229	0.189
15	0.1490	0.143	0.151	0.184	0.139
16	0.1670	0.118	0.163	0.196	0.137

## 2.15 Descarga Sólida total por suspensión

Si despreciamos la parte de sedimentos que se transportan arriba del nivel  $y_r$ , la descarga sólida total en suspensión, por unidad de ancho y de peso siene dada por:

$$q_s = \int_{y_o}^{y_r} c u dy \quad 2.73$$

Introduciendo las ecuaciones (2.49) y (2.55) y realizando la integración se obtiene:

$$q_s = \frac{u_* h d_1^{1/Z_1}}{\chi} \left\{ 1 + \frac{\ln(1 + c_b)}{(1 - Z_1)} - \frac{1}{(1 + c_b)^{1/Z_1}} - \frac{1}{(1 - Z_1)^2} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + c_b)^{1/Z_1 - 1}} \right] \right\}$$

Puesto que  $Z_1$ ,  $d_1$ ,  $\chi$  dependen de  $c_b$ , el problema consiste en resolver un sistema implícito, precisándose conocer el valor de  $c_b$ . Este dato se obtiene en base a una concentración  $c_1$  a un nivel  $y_1$  conseguido de mediciones.

De este modo se ha obtenido la descarga en suspensión, con auxilio de las ecuaciones (2.65), (2.66), (2.72), (2.75) y del valor medido  $c_1$ . Los resultados para cada una de las 16 experiencias se indican en la tabla 2.6 (la descarga total en suspensión se ha expresado en toneladas por día  $(T/D) = G_S$ ).

Para comparar los resultados, se indican en la misma tabla las descargas ( $G_{S1}$ ) calculadas con los valores de  $Z_1$ ,  $d_1$ ,  $c_b$  y  $\chi$  medidos. Constan además las descargas ( $G_{S2}$ ) calculadas con la fórmula dada por Erling Navntoft<sup>20</sup>.

### Limitación

La ecuación (2.55) que da la distribución de sedimentos suspendidos, solamente se aplica dentro del rango de las experiencias realizadas y para diámetros superiores a 0.27 mm. Efectivamente en estas condiciones, la mayor parte del transporte ocurre en la zona baja. Mas en tratándose de diámetros menores, la distribución de concentraciones tiende cada vez a ser más uniforme de modo que la descarga en suspensión calculada con (2.75) conducirá a resultados bastante menores que los que ocurren en la realidad. Por otro lado, en el transporte sólido por suspensión que ocurre en la mayoría de los ríos,

las partículas que aportan a la descarga son en su mayoría precisamente las de diámetro inferior a 0.27 mm.

Finalmente, dada la forma de la ecuación (2.55) queda restringido su uso para elevadas concentraciones, más o menos del orden de 10000 ppm o más, en media.

TABLA 2.5

Nº exp.	$c_b \times 10^{23}$ calculado	$\lambda \times 10^3$ calculado	$G_S$ (T/D) calculado	$G_{S1}$ (T/D)	$G_{S2}$ (T/D) medido
1	7.74	2.87	22.4	22.8	21.9
2	19.16	11.36	68.6	70.1	69.3
3	19.51	12.07	84.2	85.3	83.5
4	19.96	25.51	112.8	113.3	109.5
5	34.41	53.28	163.6	163.4	167.2
6	11.87	0.01	17.5	17.4	16.5
7	18.75	0.00	32.4	33.1	32.0
8	19.03	0.00	48.3	48.2	45.9
9	23.18	0.00	51.0	50.5	49.5
10	29.55	4.90	77.3	76.1	74.4
11	5.43	5.25	15.3	14.7	16.5
12	21.43	2.89	68.1	67.8	65.3
13	35.46	3.20	113.0	119.7	114.7
14	43.44	26.49	194.5	190.3	183.1
15	53.23	49.00	313.2	299.0	275.3
16	52.50	61.00	328.9	326.1	314.5



CAPITULO III

DISTRIBUCION DE SEDIMENTOS SUSPENDIDOS  
BASADA EN EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA  
DE SEDIMENTOS

3.1 Perfil de Velocidades

Emplearemos la distribución de velocidades obtenida en el capítulo II.

$$\frac{u_y - u_s}{u_*} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\lambda + y/h}{\lambda + 1} \right) \quad 3.1$$

Si  $\lambda = 0(*)$ :

$$\frac{u - u_s}{u_*} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{y}{h} \right) \quad 3.2$$

La velocidad media para la ecuación (3.2) obtiéndose integrándola desde  $y = y_0$  ( $u = 0$ ) hasta  $y = h$  y dividiendo por  $h - y_0$ . Si en la integración pasamos al límite con  $y_0$  tendiendo a cero, se llega a la siguiente expresión aproximada:

$$u_s = \frac{u_*}{\chi} + u_m \quad 3.3$$

en donde  $u_m$  es la velocidad media. La validez de la ecuación (3.3) se comprobó con las 16 experiencias del capítulo II en donde los valores de  $u_s$  y  $u_m$  fueron medidos; el error máximo encontrado no pasó de 2%. Sustituyendo (3.3) en (3.1) y (3.2) obtiéndose:

$$u = u_m + \frac{u_*}{\chi} \ln \left( \frac{\lambda + y/h}{\lambda + 1/e} \right) \quad 3.4$$

$$u = u_m + \frac{u_*}{\chi} \left( \ln \frac{y}{h} + 1 \right) \quad 3.5$$

en donde la velocidad media ocurre a una altura igual a  $h/e$ .

### 3.2 Coefficiente de Transferencia de Sedimentos

Consideremos un flujo bidimensional, estacionario y uniforme. En la presente formulación, se siguen los principios de la mezcla y difusión turbulenta, asumiendo que el mecanismo de la suspensión de sedimentos es análogo al de cambio de momento en el flujo.

---

\* Nota: en gran parte de casos prácticos, la concentración media es menor a 24000 ppm pudiendo hacerse  $\lambda = 0$

Aceptando las ideas de la longitud de mezcla de Prandtl<sup>2</sup> y colocando

$\epsilon_m = \epsilon_s$  tenemos:

$$\tau = \rho_f \epsilon_s \frac{du}{dy} \quad 3.6$$

$$\epsilon_s = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \quad 3.7$$

$$\text{con } l = \chi y \quad 3.8$$

La suposición de la ecuación (3.8) es razonable si se toma en consideración de que el esfuerzo cortante en el fondo es igual a cero debido a la desaparición de las fluctuaciones. Por otro lado, en el capítulo II, para  $\lambda \neq 0$  se llegó a la expresión:

$$l = \chi (y + \lambda h) \quad 3.9$$

el coeficiente de difusión es por tanto

$$\epsilon_s = \chi^2 (y + \lambda h)^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \quad 3.10$$

y para  $\lambda = 0$

$$\epsilon_s = \chi^2 y^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \quad 3.11$$

De las ecuaciones (3.1) y (3.5)

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\chi(y + \lambda h)} \quad 3.12$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\chi y} \quad 3.13$$

valores que introducidos en (3.10) y (3.11) conducen finalmente a

$$\epsilon_s = \chi u_* (y + \lambda h) \quad 3.14$$

$$\epsilon_s = \chi u_* y \quad 3.15$$

Las formas lineales de las dos últimas ecuaciones concuerdan con experiencias realizadas por Coleman<sup>7</sup> en una altura que va desde la capa laminar hasta un 20% a 30% de la altura total. A partir de allí, las experiencias muestran que el coeficiente de transferencia de sedimentos tiende a mantenerse constante hasta la superficie libre. Sin embargo, el empleo de las ecuaciones (3.14) y (3.15) en toda la altura no conduce a errores mayores en la obtención del perfil de concentraciones, como puede concluirse del apéndice I y de mediciones realizadas en el río Grande en Nuevo México<sup>14</sup>

### 3.3 Distribución de concentraciones

Con las mismas suposiciones admitidas en 3.2, O'Briend<sup>1</sup>

llegó a la siguiente ecuación diferencial para la distribución de concentraciones

$$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + w c = 0 \quad 3.16$$

introduciendo el valor de  $\epsilon_s$  dado por la 3.14, separando variables e integrando desde  $y = a$  hasta  $y = y$  obtiéndose

$$\frac{c}{c_a} = \left( \frac{\lambda + y/h}{\lambda + a/h} \right)^{-Z_2} \quad 3.17$$

y para  $\lambda = 0$

$$\frac{c}{c_a} = \left( \frac{y/h}{a/h} \right)^{-Z_2} \quad 3.18$$

con  $Z_2 = \frac{W}{X u_*} \quad 3.19$

$a$  es un nivel de referencia en donde se conoce la concentración  $c_a$

### 3.4 Comparación de la teoría con las experiencias

Para eso se emplearan 23 observaciones realizadas en los ríos Bernalillo y Socorro, afluentes del río Grande, Nuevo México<sup>14</sup>. Todos los datos usados se encuentran en el trabajo presentado por

Carl F. Nordin, Jr. y George R. Dempster, Jr. "Vertical Distribution of Velocity and Suspended Sediment Middle Rio Grande New Mexico".

Las distribuciones verticales de velocidad y sedimentos suspendidos fueron definidas en varias verticales, cuyo número varió de 2 á 5, excepto en un caso, en que se obtuvieron 15 perfiles de velocidad. El número de puntos en la vertical varió de 4 á 5 siendo obtenidos en horizontes,  $(h - y)/y$ , aproximadamente iguales. Midiéronse también la descarga líquida, ancho, profundidad media, temperatura del agua, pendiente de la línea de agua y muestras del material de fondo.

Los sedimentos en suspensión se dividieron en las 4 siguientes clases de diámetros en milímetros: 0.002 - 0.0625; 0.0625 - 0.125; 0.125 - 0.250; 0.250 - 0.500, correspondientes a las medias geométricas 0.0112mm, 0.0884mm, 0.177mm y 0.354mm respectivamente. Distribuciones teóricas para estas clases se determinaron usando las velocidades de caída dadas por la figura 5 de "Inter-Agency Report Nº 4", 1941. La distribución de tamaños de partículas de las muestras de material de fondo se determinaron por tamizado y los diámetros  $d_{65}$ ,  $d_{50}$ ,  $d_{35}$  correspondientes al 65, 50 y 35 por ciento respectivamente del material que pasa, se obtuvieron de distribuciones

logarítmicas de probabilidad.

Para los datos obtenidos, la relación ancho altura es grande de modo que puede aproximarse el radio hidráulico  $R$  a la altura  $h$ . Además, en todas las 23 mediciones con excepción de 2, la concentración media sobre la vertical fue menor a 24000 ppm, entonces conforme se dijo en el capítulo II,  $\lambda = 0$  y por esta razón usaremos la ecuaciones (3.5) y (3.18) para realizar la comprobación.

#### 3.4.1 Comprobación del perfil de velocidades

Empleando los valores medidos se plotearon en papel semilogarítmico los valores de la velocidad contra las respectivas profundidades observándose que los puntos se ajustaban a una recta, es decir, ellos seguían la ley logarítmica de la ecuación (3.5). El coeficiente de cambio turbulento se midió usando la expresión:

$$\frac{u_1 - u_2}{\log y_1 - \log y_2} = \frac{2.3 u_*}{x} = m_1 \quad 3.20$$

en donde  $u_1$  y  $u_2$  son las velocidades en los niveles  $y_1$  e  $y_2$  respectivamente y  $m_1$  es la pendiente de la recta; de este modo

$$\chi = \frac{2.3 u_*}{m_1} \quad 3.21$$

También puede determinarse  $\chi$  con la siguiente expresión obtenida de la ecuación (3.5)

$$\chi = \frac{[\ln(h/y_1) - 1] u_*}{u_m - u_1} \quad 3.22$$

para calcular  $\chi$  con la (3.22) se usó para  $u_1$  la velocidad medida en el punto que, en general, coincidía con el más bajo de nuestro. Los valores de  $\chi$  así calculados se encuentran en la table 3.1 y ellos son prácticamente los mismos que los calculados usando la ecuación (3.21)



TABLA 3.1

Río	Descarga líquida $Q(m^3/s)$	Ancho $b(m)$	Profundidad $h(m)$	Velocidad media $(m/s)$	$u^*$ $(m/s)$	$X$
Bernalillo	61.0	82.4	0.780	0.950	0.0796	0.549
	59.1	82.4	0.756	0.951	0.0785	1.074
	55.8	121.0	0.515	0.896	0.0646	0.883
	58.6	114.8	0.720	0.710	0.0762	0.313
	50.4	81.7	0.754	0.820	0.0810	1.191
	34.0	132.0	0.433	0.598	0.0606	0.347
	32.8	113.0	0.442	0.662	0.0615	0.981
	32.8	121.8	0.466	0.576	0.0629	0.329
	34.0	80.9	0.604	0.701	0.0714	0.665
	41.0	132.2	0.405	0.765	0.0585	0.447
	40.5	116.9	0.598	0.580	0.0710	0.620
	39.9	122.3	0.458	0.716	0.0622	0.757
	40.5	81.0	0.595	0.840	0.0710	0.540
Socorro	19.7	53.4	0.466	0.794	0.0543	0.246
	19.7	73.5	0.305	0.885	0.0440	0.215
	19.7	136.3	0.202	0.720	0.0440	0.370
	19.7	61.6	0.440	0.731	0.0650	0.434
	25.2	67.6	0.354	1.050	0.0543	0.282
	25.5	71.0	0.366	0.980	0.0551	0.289
	24.8	99.8	0.326	0.762	0.0567	0.504
	23.8	112.1	0.278	0.765	0.0521	0.370
	102.0	78.6	0.701	1.850	0.0769	0.176
	97.6	71.5	0.725	1.940	0.0780	0.129

Obsérvase que los valores de  $\chi$  tienen una amplia variación desde 0.129 hasta 1.191. Para el río Socorro,  $\chi$  es generalmente menor a 0.4, mas para el río Bernalillo los valores superan a 0.4 contradiciendo a las teoría expuestas en el capítulo I. Esto se debe a que en el río Socorro, el fondo es mas o menos plano y la suposición de flujo bidimensional queda relativamente satisfecha. Por el contrario observaciones realizadas en el río Bernalillo muestran un fondo formado por dunas de altura considerable, llegando a veces a poseer una altura igual a la mitad de la profundidad total. Bajo estas condiciones ocurren variaciones laterales extremas en la sección transversal y el flujo presenta características tridimensionales. A este respecto, Sayre y Albertson (1961) obtuvieron valores de  $\chi$  variando de 0.34 a 2.77 para agua sin sedimentos con obstáculos rugosos aislados; sin embargo, de las pendientes de las líneas medias trazadas mediante el ploteo de  $u/u_*$  contra la rugosidad relativa, determinaron que la media integral de  $\chi$  era de hecho una constante con un valor de 0.38. Ellos atribuyeron la amplia variación de los valores de  $\chi$ , determinados por medio del perfil de velocidades, al efecto tridimensional y a la gran escala de vórtices.

### 3.4.2 Comprobación del perfil de concentraciones

Con los valores medidos para cada uno de los diámetros pre establecidos, se dibujó en papel doblemente logarítmico las concentraciones contra las profundidades. Los puntos ajustáronse a una recta lo cual indica que ellos satisfacen la ley de distribución de concentraciones dada por la ecuación (3.18). Excepcionalmente, para diámetros comprendidos entre 0.25 y 0.50mm, nótase una pequeñísi ma discrepancia de los valores medidos con los dados por la ecuación (3.18); mas para efectos de cálculo de descarga sólida total en suspensión esa discrepancia no ocasiona errores serios: si se lleva en consideración que partículas de ese tamaño se encuentran muy pocas en suspensión.

Los valores de  $Z_2$  medidos obtuviéronse de los gráficos anteriores mediante medida de la pendiente de la recta, pues:

$$Z_2 = \frac{\ln(c_1/c_2)}{\ln(y_2/y_1)} \quad 3.23$$

los resultados para 92 mediciones se indican en la tabla 3.2; como érase de esperar, los valores medidos de  $Z_2$  no coinciden con los calculados con la expresión  $Z_2 = W_f / \chi u_*$ . Por esta razón haremos un estudio adicional en el próximo párrafo.

TABLA 3.2

$Z_2$ Medido					$Z_2$ Calculado con 3.26			
RÍO	0.0112	0.0884	0.177	0.354	0.0112	0.0884	0.177	0.354
Bernalillo	0.062	0.408	0.637	1.050	0.049	0.324	0.675	1.142
	0.038	0.273	0.457	0.355	0.029	0.232	0.488	0.249
	0.046	0.363	0.748	1.114	0.040	0.323	0.865	1.050
	0.091	0.328	0.749	1.440	0.062	0.247	0.703	1.588
	0.097	0.438	0.741	1.198	0.069	0.297	0.734	1.080
	0.049	0.500	0.956	1.329	0.044	0.388	0.955	1.310
	0.021	0.271	0.542	0.534	0.027	0.272	0.654	0.388
	0.013	0.447	0.927	1.744	0.017	0.353	0.920	1.670
	0.044	0.409	0.832	1.410	0.036	0.312	0.830	1.500
	0.013	0.175	0.457	0.719	0.018	0.242	0.633	0.885
	0.027	0.282	0.612	1.464	0.036	0.286	0.705	1.450
	0.015	0.141	0.514	0.861	0.018	0.177	0.533	0.656
	0.018	0.383	0.902	1.723	0.024	0.310	0.890	1.660
Socorro	0.097	0.544	0.966	0.844	0.071	0.450	1.060	0.781
	0.063	0.491	1.186	0.864	0.063	0.498	1.370	0.623
	0.081	0.560	1.096	1.138	0.075	0.585	1.188	1.050
	0.056	0.551	0.989	1.038	0.054	0.460	1.040	0.980
	0.027	0.781	1.979	1.346	0.032	0.713	1.560	1.157
	0.031	1.051	1.308	1.551	0.037	0.865	1.520	1.750
	0.025	0.280	0.827	0.626	0.033	0.380	0.900	0.502
	0.028	0.756	1.816	1.487	0.038	0.713	1.660	1.560
	0.017	0.207	0.635	1.579	0.023	0.304	0.865	1.950
	0.004	0.301	1.179	1.955	0.068	0.415	1.270	1.946

### 3.5 Obtención del exponente $Z_2$

En el capítulo primero llegamos a la conclusión de que los factores que intervienen en la distribución de concentraciones debían ser función de los parámetros  $W_f/u_*$ , la gravedad específica de los sedimentos sumergidos  $\alpha$  y una cierta concentración  $c_r$  a un nivel de referencia. Es conveniente también indicar que la temperatura afecta al transporte de sedimentos en suspensión. Lane, Carlson y Manson<sup>21</sup> encontraron que para sedimentos menores a 0.3mm el transporte aumentaba a medida que la temperatura decrecía, mas para partículas con diámetro superior a 0.3mm los efectos de la temperatura eran muy pequeños.

Sumarizaremos los parámetros que intervienen en el exponente  $Z_2$  del siguiente modo:

- 1)  $W_f/u_*$  - comparando los valores medidos de  $Z_2$  con los calculados con la expresión  $W_f/\chi u_*$  conclúyese que el parámetro  $W_f/u_*$  interviene en  $Z_2$  mas con una potencia menor a 1. Después de varias tentativas con 92 valores medidos encontrose que la potencia 0.385 era adecuada. El efecto de temperatura actúa indirectamente a través de la velocidad de caída.
- 2) Concentración de referencia  $c_a$ . Se usó para  $a$  el nivel ubicado a una distancia igual a 2 veces el diámetro de la partícula. La elección de este nivel se hizo en base de que éste es según Einstein<sup>3</sup> el nivel que separa la zona del transporte de arrastre de la de suspensión. Encontrose que el mejor ajuste se obtenía con el logaritmo neperiano de la concentración.

3) Diámetro  $d$ . Tal como en el caso de la concentración intervenía con su logaritmo natural. Aquí también la temperatura actúa indirectamente a través de  $d$ .

Con este orden de ideas, se ploteó en papel doblemente logarítmico los valores medidos de  $Z_2$  contra la variable

$$\left(\frac{W_f}{u_*}\right)^{0.385} \ln\left(\frac{c_a}{100}\right) \ln\left(\frac{2d \cdot 10^6}{h}\right)$$

$c_a$  está en p.p.m. y fue tomada de los perfiles medidos de concentración. El diámetro  $d$  varió desde 0.002 mm hasta 0.5 mm. El gráfico correspondiente se encuentra en la figura 3.1. Los puntos ajustan-se con razonable precisión a una recta, cuya ecuación es:

$$Z_2 = 0.0346 \left(\frac{W_f}{u_*}\right)^{0.385} \ln\left(\frac{c_a}{100}\right) \ln\left(\frac{2d \cdot 10^6}{h}\right) \quad 3.24$$

El valor de  $c_a$  puede obtenerse a partir de la distribución (3.18) mediante el conocimiento de la concentración  $c$ , al nivel  $y$ :

$$c_a = c \left(\frac{y/h}{2d/h}\right)^{Z_2} \quad 3.25$$

La concentración  $c$ , deberá tomarse de preferencia la correspondiente al nivel más bajo de muestreo. Sustituyendo (3.25) en

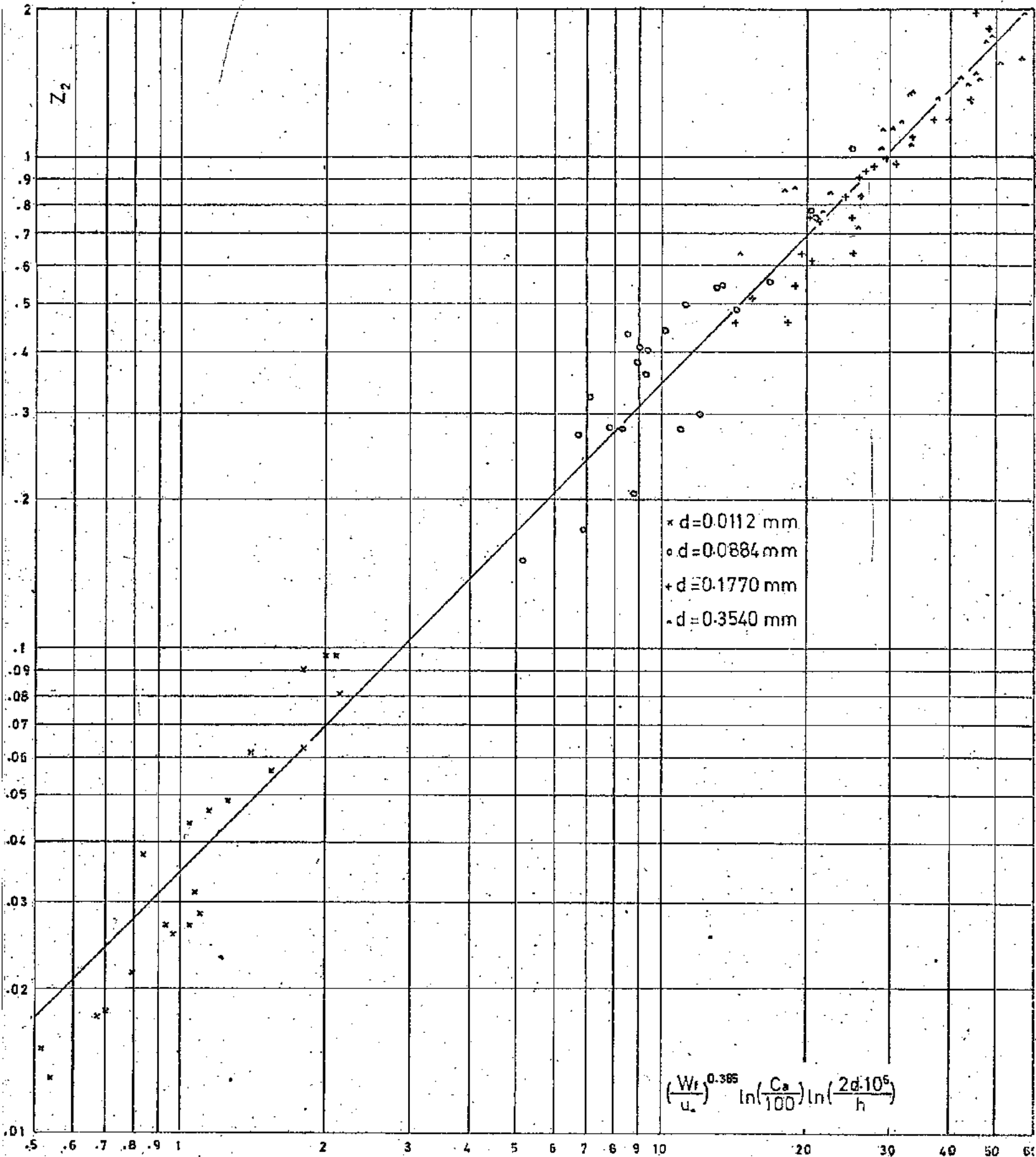


Fig. 3.1

(3.24) y resolviendo para  $Z_2$  se llega a:

$$Z_2 = \frac{A_1 \ln \left( \frac{c_1}{100} \right)}{1 - A_1 \ln \left( y_1 / 2d \right)} \quad 3.26$$

con

$$A_1 = 0.0346 \left( \frac{W_f}{u_*} \right)^{0.385} \ln \left( \frac{2d \cdot 10^6}{h} \right) \quad 3.27$$

$c_1$  en p.p.m.

Caso de ser  $\lambda \neq 0$ , basta sustituir las ordenadas  $y_i$  por  $(y_i + \lambda h)$ . Los valores de  $Z_2$  calculados con la expresión (3.26) se indican en la tabla 3.2.

Nota: Como se dijo, la temperatura desempeña un papel importante sobre todo en partículas de diámetro pequeño de modo que una inadecuada medición de aquella repercute en el cálculo de  $Z_2$ . Esta imprecisión aparente no causa errores serios para propósitos de cálculo de descarga sólida total en suspensión. Obsérvese por ejemplo el valor medido de  $Z_2$  para la experiencia 23 correspondiente al diámetro 0.0112 mm y el valor calculado; el primero posee un valor de 0.004 en cuanto el segundo es igual a 0.068. En ambos casos podemos decir que los sedimentos están distribuidos casi uniformemente sobre la vertical. Por otro lado, los valores de la descar



ga sólida en suspensión usando los dos  $Z_2$  fueron prácticamente los mismos. Por esta razón y con el único fin de obtener un mejor ajuste, unos 6 valores calculados de  $Z_2$  fueron corregidos.

### 3.6 Descarga sólida total en suspensión

La descarga sólida total en suspensión, obtiéndose integrando el producto  $(uc)$  desde el nivel  $y = a$  hasta  $y = h$ . Siguiendo la idea de Einstein<sup>3</sup>, usaremos para  $a$  el valor  $a = 2d$ . Con ayuda de las ecuaciones (3.4) y (3.17), después de realizada la integración se llega a:

$$G_s = \frac{0.0864 u_* b(\lambda + a/h)^{Z_2} h c_a}{X} \left\{ \left[ \frac{(\lambda + 1)^{1-Z_2} - (\lambda + a/h)^{1-Z_2}}{(1 - Z_2)} \right] \right. \\ \left. \left[ \frac{u_m X}{u_*} - \ln(\lambda + 1/e) \right] + \left[ \frac{(\lambda + 1)^{1-Z_2} \ln(\lambda + 1) - (\lambda + a/h)^{1-Z_2} \ln(\lambda + a/h)}{(1 - Z_2)} \right] \right. \\ \left. - \left[ \frac{(\lambda + 1)^{1-Z_2} - (\lambda + a/h)^{1-Z_2}}{(1 - Z_2)^2} \right] \right\} \text{ con } Z_2 \neq 1 \quad 3.28-a$$

en donde

$G_s$  es la descarga sólida total en suspensión en toneladas por día (T/D)

$c_a$  es la concentración en el nivel  $a = 2d$ , en ppm y puede obtenerse de la ecuación (3.25)

$b$  ancho

Para  $Z_2 = 1$  tenemos:

$$G_s = \frac{0.0864 u_* b (\lambda + a/h) h c_a}{\chi} \left\{ \left[ \frac{u_m \chi}{u_*} - \ln(\lambda + 1/e) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ \ln(\lambda + 1) - \ln(\lambda + a/h) \right] + \left[ \frac{\ln^2(\lambda + 1) - \ln^2(\lambda + a/h)}{2} \right] \right\} \quad 3.28-b$$

Para la mayoría de casos prácticos,  $\lambda = 0$  ( $c_m < 24000$  ppm) y entonces:

Para  $Z_2 \neq 1$

$$G_s = \frac{0.0864 u_* b h (a/h)^{Z_2} c_a}{\chi} \left\{ \left[ \left( \frac{u_m \chi}{u_*} + 1 \right) \left( \frac{1 - (a/h)^{1-Z_2}}{1 - Z_2} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ \frac{(a/h)^{1-Z_2} \ln(a/h)}{1 - Z_2} \right] - \left[ \frac{1 - (a/h)^{1-Z_2}}{(1 - Z_2)^2} \right] \right\} \quad 3.29-a$$

Para  $Z_2 = 1$

$$G_s = \frac{0.0864 u_*^b a c_a}{\chi} \left[ \left( \frac{\bar{u}}{u_*} + 1 \right) \ln(h/a) - \frac{\ln^2(a/h)}{2} \right] \quad 3.29-b$$

Nota: Al aplicar las ecuaciones (3.28) y (3.29), implícitamente está usándose la velocidad  $u_a$  correspondiente al nivel  $y = 2d$ . Eventualmente en algunos casos puede acontecer que  $u_a$  sea negativo; esto quiere decir que  $2d$  es menor que  $y_0$  punto en cual la velocidad es nula. En tales casos es preferible realizar la integración del producto  $uc$ , desde  $y = 0$  hasta  $y = h$ , con lo que se obtiene:

Para  $Z_2 \neq 1$ :

$$G_s = \frac{0.0864 u_*^b h (y_0/h)^{Z_2} c_b}{\chi} \left[ \frac{\ln(h/y_0)}{1-Z_2} - \frac{1 - (y_0/h)^{1-Z_2}}{(1-Z_2)^2} \right] \quad 3.30-a$$

Para  $Z_2 = 1$

$$G_s = \frac{0.0432 u_*^b y_0 c_b}{\chi} \cdot \left[ \ln^2(h/y_0) \right] \quad 3.30-b$$

En donde  $y_0$  se obtiene del perfil de velocidades:

$$\frac{y_0}{h} = \frac{1}{\exp(1 + \chi \frac{u_m}{u})} \quad 3.31$$

$C_b$  es la concentración en partes por millón correspondiente a  $y = y_0$  calculada de:

$$c_b = c_1 \left( \frac{y_1}{y_0} \right)^{2.2} \quad 3.32$$

Se tomará de preferencia para  $c_1$  el valor medido en el punto más bajo de muestreo.

### 3.7 Descarga sólida por arrastre

De acuerdo con Einstein<sup>3</sup>, asumiremos que la velocidad media en la zona de arrastre es igual  $11.6u_*$ , siendo así la descarga será:

$$G_A = 0.0864 \cdot (11.6u_*)^3 \cdot b \cdot a \cdot c_a \quad 3.33$$

en donde

$G_A$  = descarga sólida por arrastre en toneladas por día

$a$  = altura de la zona de arrastre e igual a 2 veces el diámetro  
metro

$b$  = ancho

$c_a$  = concentración obtenida en  $y = 2d$ , calculada de la ecuación (3.25)

### 3.8 Resultados

La descarga sólida total por suspensión se calculó de 3 mo

dos diferentes:

1ª) Se usaron las ecuaciones (3.29), empleando los valores de  $\chi$  medidos,  $Z_2$  medidos,  $a = 2d$ , y,  $c_a$  tomada de los perfiles de concentración. Los resultados se encuentran en la primera columna de la tabla 3.3

2ª) Usando las ecuaciones (3.29). Los valores de  $\chi$  se calcularon con la ecuación (3.22) usando para  $u$ , la velocidad medida en el punto que, en general, coincidía con el más bajo de muestreo.  $Z_2$  se calculó con la ecuación (3.26),  $c_a$  con la (3.25). Los resultados están en la segunda columna de la tabla 3.3.

3ª) Usando las ecuaciones (3.30), (3.31) y (3.32) y los valores de  $\chi$  y  $Z_2$  medidos. Estos resultados se encuentran en la tercera columna de la tabla 3.3.

Finalmente, en la última columna de la tabla están los valores de la descarga sólida en suspensión calculados con el Proceso Modificado de Einstein.

TABLA 3.3

RÍO	$G_s$ (T/D) Ecuación 3.29 $Z_2$ medido	$G_s$ (T/D) Ecuación 3.29 $Z_2$ calculado	$G_s$ (T/D) Ecuación 3.30 $Z_2$ medido	$G_s$ (T/D) Proceso Mo- dificado Einstein
Bernalillo	10967	11285	11016	11489
	7937	8046	7948	7812
	7682	7801	7917	7810
	5771	6161	6037	6409
	5811	5933	6072	5578
	9774	10138	10114	11735
	9814	9621	9830	10012
	8741	8872	9053	10451
	10688	11059	10713	11685
	13026	12175	13026	14470
	10994	10638	11028	12387
	9616	9506	9626	10049
	12178	12202	12214	13132
	Socorro	9921	10555	10160
10749		10624	10881	11761
11120		11202	11205	11837
11078		11292	11100	12915
37354		34623	38109	33911
39483		40164	40011	37674
30179		29819	30184	31069
35084		33008	35228	30279
1077343		1038291	1088598	1150070
1002920		910648	1015566	1102567

TABLA 3.4

La Tabla 3.4 contiene los valores de la descarga sólida por arrastre calculados con la ecuación (3.33) y los de la descarga sólida total  $G_T$

RÍO	$G_s$ (T/D) ecuación (3.29) $Z_2$ calculado	$G_A$ (T/D) ecuación (3.33)	$G_T = G_s + G_A$ (T/D)
Bernalillo	11285	231	11516
	8046	194	8258
	7801	164	7965
	6161	761	6922
	5933	190	6123
	10138	350	10488
	9621	80	9701
	8872	1019	9891
	11059	654	11713
	12175	90	12265
	10638	542	11180
	9506	82	9588
	12202	1027	13229
Socorro	10555	162	10717
	10624	310	10934
	11202	131	11333
	11292	175	11467
	34623	1796	36419
	40164	2930	43094
	29819	171	29990
	33008	1477	34485
	1038291	6441	1044732
910648	7836	918484	

### CONCLUSIONES

1. La distribución de velocidades sigue adecuadamente la ley logarítmica expresada por la ecuación (2.49), o por la (3.2) en caso de concentraciones no muy elevadas.
2. La ley de distribución de concentraciones dada por la ecuación (2.55) es aplicable en la zona baja del flujo, hasta una altura de 0.10 h a 0.20 h.
3. La ecuación (2.55) posee dos limitaciones: a) adáptase bien únicamente para partículas gruesas con diámetro generalmente mayor a 0.27 mm; b) dada su forma es utilizada para altas concentraciones, de preferencia mayores a 10000 ppm en media.
4. Los parámetros en las distribuciones de velocidad y concentración son funciones de  $W/u_*$ ;  $\alpha$  y la concentración a un cierto nivel de referencia.  $\alpha$  puede intervenir indirectamente a través de  $W$  y de  $d$ .
5. La distribución de concentraciones dada por la ley potencial de la ecuación (3.17) aplícase a toda la vertical. Los granos que, en media geométrica, poseen un diámetro su



perior a 0.354 mm, presentan un pequeño desvío con respecto a la distribución mencionada.

6. En la mayoría de los casos que ocurren en la naturaleza, la concentración media sobre la vertical es menor a 24000 ppm, pudiendo hacerse  $\lambda = 0$  y usar la ecuación simplificada (3.18).
7. Los parámetros que intervienen en el exponente de distribución de concentraciones  $Z_2$  pueden resumirse a 3:  $W/u_*$ ,  $d$  y una concentración  $c_1$  al nivel de referencia  $y_1$  que será de preferencia el más bajo de muestreo.
8. Los valores del exponente  $Z_2$  calculados con la fórmula semiempírica de la ecuación (3.26), concuerdan con razonable precisión con los valores medidos para un amplio intervalo de diámetros, comprendidos entre 0.002 mm y 0.5 mm.
9. El hecho de que los granos con diámetro mayor a 0.354 mm se desvíen un poco de la distribución (3.18), no origina error apreciable para efectos de cálculo de descarga sólida total en suspensión, si se lleva en consideración que partículas superiores a tal diámetro aportan a la descarga con porcentaje reducido.
10. La descarga sólida total en suspensión calcúlase por sim-

ple aplicación de la fórmula (3.28) o de la (3.30), usando los valores de  $Z_2$  dados por la ecuación (3.26). Este procedimiento puede considerarse bastante general si se toma en cuenta que la formulación teórica fue conferida en dos ríos que presentaban características completamente diferentes: uno de ellos poseía fondo más o menos plano y ofrecía pequeña resistencia al flujo; el otro, por el contrario, presentó fondo con dunas de altura considerable y gran resistencia al flujo.

11. Las descargas sólidas obtenidas con uso de la ecuación (3.29) y de la (3.30) empleando los valores medidos de  $Z_2$ , no difieren apreciablemente, para propósitos prácticos, con las dadas por la ecuación (3.29) usando los valores calculos de  $Z_2$  y aquellas obtenidas mediante el Proceso Modificado de Einstein.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. M.P.O'Brien: "Review of the Theory of Turbulent Flow and its Relations to Sediment Transportation", Trans. Am. Geophysical Union, Vol. 14, 1933, pp. 487-491.
2. Hermann Schlichting: "Boundary Layer Theory", Sixth Edition, Chapter XIX.
3. H.A.Einstein: "The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows", United States Department of Agriculture, Technical Bulletin Nº 1026, Sep. 1950.
4. Hunt, J.N.: "The turbulent transport of suspended sediment in open channels", Proc. Roy.Soc. (A)224, Nº 1158, 322-35 (1954).
5. H.A.Einstein and Ning Chien: "Second Approximation to the Solution of the Suspended Load Theory", M.R.D. Sediment Series Nº 3, Corps of Engineers, Missouri River Division, Omaha, Nebraska, Enero 1954.
6. Ismail, H.M.: "Turbulent transfer mechanism of suspended sediment in closed channels", Trans. A.S.C.E. 117 (1952).
7. Neil L. Coleman: "Flume Studies of the Sediment Transfer Coefficient", Water Resources Research,

Vol. 6 Nº 3, Junio de 1970.

8. McNow, J.S., and P.N.Lin:
 

"Sediment concentration and fall velocity"  
402 pp., Proceedings of the Second Mid -  
western Conference on Fluid Mechanics ,  
Coll. Engraving Bull. 149, Ohio State U -  
niversity, Columbus, 1952.
9. Loyacano, J.N.:
 

"Fall velocity of sand particles in tur-  
bulent flume flow", 76 pp. Master's the-  
sis, Colorado State University, Fort Co-  
llins, 1967.
10. Ho, H.W.:
 

"Fall velocity of a sphere in a field of  
oscillating fluid", 78 pp. Ph.D. thesis,  
State University of Iowa, Iowa City, 1964.
11. Jobson, H.E.:
 

"Vertical mass transfer in open channels  
flow", 204 pp., U.S. Geol. Surv. Open  
File Rep., 1968.
12. J.F. Richardson and W.N. Zaki:
 

"Sedimentation and Fluidisation", Trans.  
Instn. Chem. Engrs. Vol. 32, 1954.
13. Colby, B.R. and Hembree C.H. :
 

"Computations of Total Sediment Dischar-  
ge, Niobrara River near Cody, Nebr." ,  
U.S. Geological Survey Water-Supply Pa -  
per 1375, 1955.
14. Nordin, C.F. and Dempster, G.R. :
 

"Vertical Distribution of Velocity and

- Suspended Sediment Middle Rio Grande New Mexico", U.S. Geological Survey Professional Paper 462-B, 1963
15. Vito A. Vanoni: "Transportation of Suspended Sediment by Water", Trans. A.S.C.E., Vol. 111, 1946.
16. Vito A. Vanoni: "Sediment transportaton Mechanics: Suspension of Sediment", Journal of the Hydraulics Division, Proc. of the A.S.C.E. Sep. 1963.
17. Raudkivi, A.J.: "Loose Boundary Hydraulics", Chapter 8.
18. Mikio Hino: "Turbulent Flow with Suspended Particles" Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 89, No HY4, Julio de 1963.
19. H.A. Einstein and Ning Chien: "Effects of Heavy Sediment Concentration Near the Bed on Velocity and Sediment Distribution", University of California, Institute of Engineering, Research, 1955.
20. Erling Navntoft: "A Theory of the velocity and Suspended Load Distribution in a Two-Dimensional Steady and Uniform Open Channel Flow", Acta Polytechnica Scandinavica, 1970.
21. Lane, E.W., Carlson, E.J. and Manson, O.S.: "Low temperature increases sediment transportation in Colorado River, Civil Engineering (Sep. 1949)
22. Keulegan, G.H., "Laws of turbulent flow in open channels: U.S. Natl. Bur. Standards, Jour. Research, Vol 81 No 6 pp. 707-741

FALTA À FOLHA

138

APENDICE

PERFIL DE CONCENTRACIONES EMPLEANDO DOS EXPRESIONES  
PARA EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE SEDIMENTOS

De acuerdo con experiencias realizadas en laboratorio por Neil L. Coleman<sup>7</sup>, conclúyese que el coeficiente de transferencia de sedimentos no sigue la forma del de transferencia de momento sino que  $\epsilon_s$  aumenta con la distancia desde el fondo hasta adquirir un valor máximo, ubicado a una altura comprendida entre 20% a 30% de la profundidad total, tendiendo a partir de allí a mantenerse constante hasta la superficie libre.

Con ayuda de datos de 16 experiencias, procediose al ploteo de  $\epsilon_s/u_*h$  contra  $y/h$ . Los gráficos mostraron que para  $y/h$  menor que  $\eta$ , el coeficiente adimensional de transferencia de sedimentos ( $\epsilon_s/u_*h$ ), variaba, con razonable precisión, linealmente con  $y/h$ . Para  $y/h$  mayor a  $\eta$ ,  $\epsilon_s/u_*h$  podía considerarse una constante igual a  $\zeta$ . La figura 4.1 muestra un esquema de esta variación:

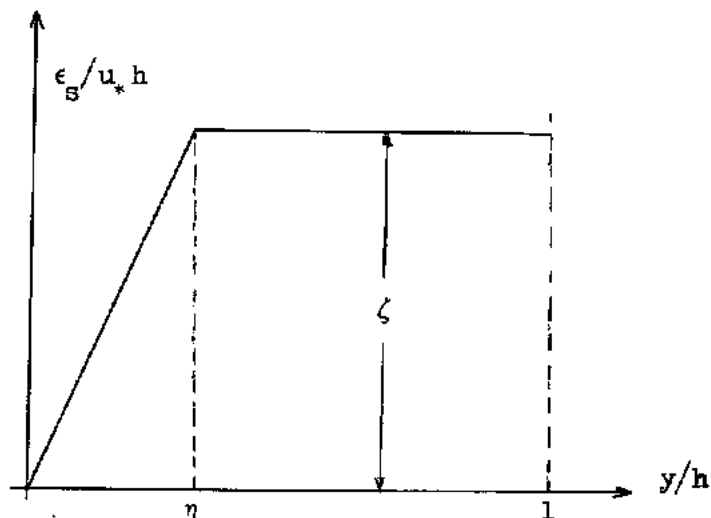


Fig. 4.1

Los valores adimensionados  $\eta$ ,  $\zeta$  serán dependientes de los parámetros  $W/u_*$ ,  $d$  y de una concentración  $c_r$  a un dado nivel de referencia;  $\eta$  varía de 0.2 a 0.3.

Segun esto, las ecuaciones que dan la variación del coeficiente de transferencia de sedimentos serán:

$$\frac{\epsilon_s}{u_* h} = \frac{\zeta}{\eta} \frac{y}{h}, \text{ para } 0 \leq \frac{y}{h} \leq \eta \quad 4.1-a$$

$$\frac{\epsilon_s}{u_* h} = \zeta, \text{ para } \eta < \frac{y}{h} < 1 \quad 4.1-b$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial de O'Briend obtiéndose, después de realizada la integración, las siguientes distribuciones de sedimentos suspendidos:



$$c = c_a \left( \frac{y}{a} \right)^{-Z_3} \quad \text{para } 0 < \frac{y}{h} \leq \eta \quad 4.2-a$$

$$c = c_\eta e^{Z_3} e^{-\frac{Z_3 y}{\eta h}}, \quad \text{para } \eta \leq \frac{y}{h} \leq 1 \quad 4.2-b$$

en donde

$$Z_3 = \frac{W}{(\xi/\eta)u_*}$$

$$c_\eta = c_a \left( \frac{\eta h}{a} \right)^{-Z_3}$$

Obsérvase que la ecuación (4.2-a) es la misma que la obtenida en el capítulo 3 para distribución de sedimentos en suspensión, mas con los valores de  $Z_3$  diferentes de  $Z_2$

En la figura 4.2 se encuentran los gráficos de las ecuaciones (4.2-a) y (4.2-b) correspondientes a la medición número 3 del río Bernalillo, para un diámetro de 0.0884 mm. Los valores de  $Z_3 = 0.27$  y  $\eta = 0.241$  fueran medidos y se empleó como nivel de referencia  $a/h = 0.05$ .

En la misma figura se indica con línea de trazos el gráfico de la ecuación (4.2-a), para la misma medición, mas empleando el valor de  $Z_3 = 0.36$  obtenido en el capítulo 3. Para propósitos prác-

ticos, la distribución dada por las ecuaciones (4.2) y la obtenida en el capítulo precedente no difieren apreciablemente.

Con los datos de los perfiles de concentración de los ríos Bernalillo y Socorro<sup>14</sup> se midieron los valores de  $\eta$  y  $Z_3$ , obteniéndose gráficos similares a los de la figura 4.2 y comprobando así la validez de las ecuaciones (4.2). Empero no fue posible encontrar expresiones adecuadas para  $r$  y  $Z_3$ .

Concluimos finalmente que la suposición hecha en el capítulo 3, de que el coeficiente de transferencia de sedimentos varía linealmente en toda la vertical, es válida.

