VIBRACIONES LIBRES DE CASCARAS CILINDRICAS TOMANDO EN CONSIDERACION LAS DEFORMACIONES POR ESFUERZOS CORTANTES Y LA INERCIA DE ROTACION

FELIPE MARCIAL DUEÑAS

"TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL".

Aprovada por:

Presidente

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA-BRASIL
NOVEMBRO 1971

a la memoria de mi padre

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento a los profesores Paulo A. Gomes y Luiz Bevilacqua quienes, en diferentes etapas, orientaron este trabajo de Tesis.

Como así también

a la OEA y COPPE, instituciones que contribuyeron con su apoyo económico a sustentar mi estada en la segunda de las nombradas

al profesor Fernando L.L.B.Carneiro, Jefe del Programa de Ingeniería Civil, por sus consejos y atenciones brindados en mi caracter de becario extranjero

al Coordenador de la COPPE profesor Alberto L. Coimbra.

Mi reconocimiento también, al profesor Juan S.Carmona por el estímulo recibido en relación al emprendimiento de estudios de posgraduación.

R E S U M E N

En este trabajo son estudiadas las vibraciones libres de cáscaras cilíndricas incluyendo, además de los efectos considerados usualmente, aquéllos correspondientes a las deformaciones producidas por las tensiones de cizallamiento y la inercia de rotación.

Se deducen las ecuaciones del movimiento basadas en los criterios e hipótesis semejantes a los usados por FLUGGE en el desarrollo de sus ecuaciones. Se demuestra que ambos sistemas de ecuaciones son congruentes entre sí.

Se aborda la solución de las ecuaciones del movimiento investigando con un conjunto de cinco soluciones generales.

Se llega al determinante de frecuencia para cáscaras de longitud finita y para dos diferentes condiciones de vinculación en los extremos: ambos extremos simplemente apoyados y ambos extremos perfectamente empotrados. Las soluciones son separadas en aquéllas correspondientes a los modos simétricos y aquéllas correspondientes a los modos antisimétricos.

S I N O P S E

Neste trabalho são estudadas as vibrações livres de cascas cilíndricas incluindo-se, além dos efeitos considerados usualmente, aquêles correspondentes às deformações produzidas pelas tensões de cizalhamento e a inércia à rotação.

São deduzidas as equações do movimento baseadas nos critérios e hipóteses usados por FLUGGE na instituição de suas equações. Demonstra-se que ambos os sistemas de equações são congruentes entre eles.

Aborda-se a solução das equações do movimento investigando um conjunto de cinco soluções gerais.

Chega-se ao determinante de frequência para cascas de comprimento finito e para duas diferentes condições de contôrno nos extremos: ambos os extremos simplesmente apoiados e ambos os extremos perfeitamente engastados. As soluções são separadas naquelas correspondentes aos modos simétricos e naquelas correspondentes aos modos antisimétricos.

A B S T R A C T

Free vibrations of cylindrical shells are studied including, besides the effects usually considered, the influ ence of transverse shear deformation and rotatory inertia.

Motion equations are deduced on the basis of the assumptions similar to those used by FLUGGE in the development of his equations. Compatibility of both equations sets is showed.

The solution of motion equations is undertaken by means of a set of five general solutions.

One arrives at the frequency determinant for finite length shells and for two different boundary conditions: both ends simply-supported and both ends fixed. Solutions are se parated in those corresponding to symmetrical modes and those corresponding to antisymmetrical modes.

I N D I C E

N O T A C I O N

Letras latinas minúsculas

a	Radio de la superficie media de la cáscara cilíndrica
h	Espesor de la pared del cilindro
u,v,w	Componentes del desplazamiento en las direcciones axial, tangencial y radial; w positivo hacia el interior del cilindro
m	Número de semiondas axiales
n	Número de ondas circunferenciales
a_k	Coeficientes de la ecuación (4.10)
k', k''	Coeficientes de corte ("Shear coefficients") para las direcciones axial, y tangencial
p_x, p_θ, p_r	Fuerzas externas actuantes en el elemento en las direcciones axial, tangencial y radial
p,q	Parte real y parte imaginaria de las raices complejas
r	Coordenada radial medida a partir del eje del cilindro
x	Coordenada axial
z	Coordenada radial medida a partir de la superficie media

Letras latinas mayúsculas

A Area de la sección transversal

A_{ij} Elementos del determinante (4.8)

B_r, C_r Constantes de integración

D_1, D_2 Coeficientes en las soluciones para los modos simétricos

D_3, D_4 Coeficientes en las soluciones para los modos antisimétricos

E Módulo de elasticidad

G Módulo de elasticidad transversal

I $h^2/12$

L Longitud de la cáscara

N_x, N_θ, M_x, $M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x}$, Q_x, Q_θ Esfuerzos y momentos resultantes de integrar las tensiones a lo largo del espesor h

$U(x), V(x)$, $W(x)$ Forma de las ondas en las direcciones axial, tangencial y transversal

U_o, V_o, W_o Amplitudes en las direcciones axial, tangencial y transversal

Letras griegas minúsculas

α_r Raices de la ecuación (4.10)

α^* α^2

β $h^2/12a^2$

$\gamma_{x\theta}, \gamma_{r\theta}$ Distorsiones en los planos x,θ r,θ y x,r repecti

γ_{xr} vamente

$\gamma_{\theta z}, \gamma_{zx}$ Distorsiones en los planos θ,z y z,x

$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$, ε_r Dilataciones en las direcciones axial, tangencial y radial

ε_z Dilatación en la dirección radial, mas referida a la superficie media

η_3 Raiz de la ecuación (4.10)

θ Coordenada angular

κ_r, κ'_r, κ''_r, κ'''_r Coeficientes que relacionan las amplitudes en las direcciones axial, angular x, tangencial y angular θ a aquélla en la dirección transversal

ν Coeficiente de Poisson

ρ Densidad de masa del material de la cáscara

σ_x, σ_θ, σ_z Componentes de la tensión normales a los planos θ,z, z,x y x,θ

$\tau_{x\theta}, \tau_{\theta z}$, τ_{zx} Componentes de la tensión tangenciales a los planos θ,z, z,x y x,θ

ψ_x, ψ_θ Componentes de la rotación de una normal a la superficie media en los planos x,z y x,θ respectivamente

ω_0^2 $E/[\rho a^2(1-\nu^2)]$

ω Frecuencia circular

<u>Letras griegas mayúsculas</u>

Ω^2 Factor de frecuencia, $\rho a^2(1-\nu^2)\omega^2/E$

$\Psi_{x0}, \Psi_{\theta 0}$ Amplitudes en las direcciones angular x y angular θ

$\Psi_x(x), \Psi_\theta(x)$ Forma de las ondas en las direcciones angulares x y θ

Subíndices

r Se refiere a las raices de la ecuación (4.10)

C A P I T U L O   I

INTRODUCCION

1.1. Consideraciones generales

Se tratará en este trabajo de cáscaras cilíndricas circulares, de espesor constante, y cuya relación espesor-radio, h/a , es menor que 0.1. Condición esta última que nos asegura estar dentro del dominio de las así llamadas cáscaras delgadas.

En consecuencia serán válidos los criterios e hipótesis usados por TIMOSHENKO[2] y FLUGGE[1] en sus respectivos análisis de las cáscaras cilíndricas. Se introducirán allí, sólo las modificaciones necesarias para tener en cuenta las deformaciones producidas por las tensiones tangenciales, en las ecuaciones que tratan de las deformaciones y, aquéllas necesarias para tener en cuenta la inercia de rotación, en las ecua ciones que tratan del equilibrio dinámico.

Se asume que el material constitutivo de las cáscaras es isótropo, homogéneo y linealmente elástico. Precisamente por ser elásticas, las cáscaras vibran cada vez que son perturbadas de su posición de equilibrio estable, o cada vez que son excitadas a hacerlo por la acción de fuerzas periódicas externas. En el primer caso las vibraciones son libres, y son denominadas de forzadas en el segundo. El presente trabajo se limitará al estudio de las vibraciones libres.

La superficie ideal cilíndrica, coaxial con la cáscara, y cuyo radio es la media aritmética entre el radio interno y el externo será, para todos los efectos, la superficie de referencia.

La superficie correspondiente a las fibras medias de la cáscara, definida por la totalidad de los puntos distanciados h/2 de las superficies interna y externa, se denomina superficie media. Esta superficie se deforma siguiendo en su movimiento las deformaciones de la cáscara.

En ausencia de perturbaciones (ya sean geométricas o dinámicas) la cáscara está en reposo, y las dos superficies definidas anteriormente coinciden.

Cuando una cáscara de longitud finita vibra libremente, su superficie media puede adoptar una gran variedad de configuraciones con relación a la superficie de referencia.

Su configuración dependerá de una serie de factores (que serán analizados más adelante), entre ellos, el modo predominante de vibración y las condiciones de vinculación en los extremos. Un punto cualquiera poderá experimentar, en general, un movimiento con componentes en el sentido transversal, axial y tangencial.

Si se hiciera una sección ideal normal al eje, y se observaran las vibraciones transversales, mirando en el sentido axial, se verian una serie de ondas completas sobre la circunferencia directriz de referencia, Fig. 1.1. Se denominará n al número de estas ondas.

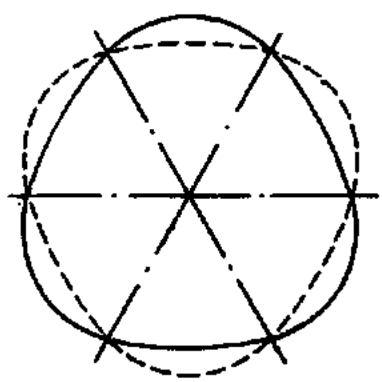


Fig. 1.1

Si ahora se observan las vibraciones transversales mirando el cilindro perpendicularmente a su eje, se verán, en el sentido axial, una o varias semiondas a lo largo de las generatrices de referencia. Estas ondas son altamente influenciadas en su forma por las condiciones de vinculación en los extremos, y se asemejan a aquéllas de vigas coincidentes con las generatrices, y sujetas a las mismas condiciones de vinculación en los extremos que las de la cáscara en cuestión, Fig. 1.2.

Se designará con m al número de ondas longitudina les. En caso de no existir ningún tipo de vinculación en los

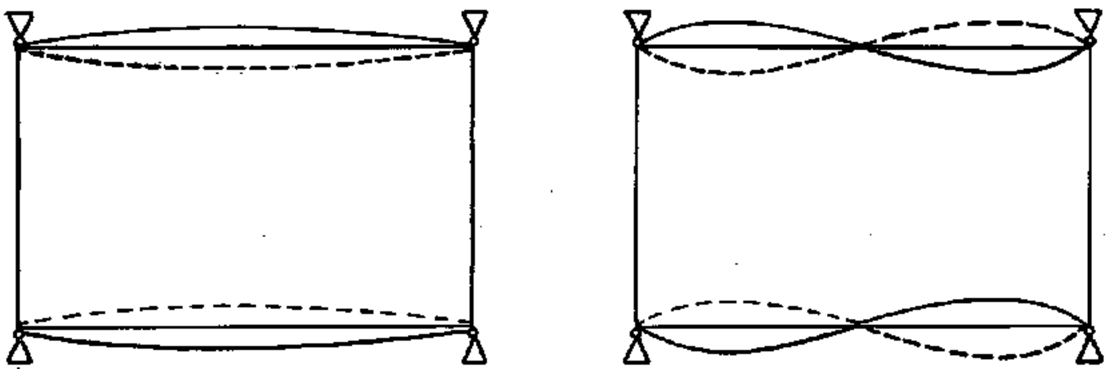


Fig. 1.2

extremos (extremos libres), las generatrices de la superficie media no se deforman, conservándose rectilíneas (poseen únicamente un movimiento traslatorio), por lo tanto, en este caso sólo existen ondas circunferenciales, siendo $m = 0$.

1.2. Sobre las ecuaciones del movimiento

A las ecuaciones del movimiento se llegará estableciendo las condiciones de equilibrio de un elemento de cáscara, infinitamente pequeño en el sentido de las dimensiones de la superficie media y con espesor h finito en el sentido transversal.

En su equilibrio entrarán en juego las solicitaciones internas presentes, debidas a la continuidad del material constitutivo y aquéllas debidas a la inercia de traslación y rotación.

Si se expresan todas estas solicitaciones (fuerzas y momentos) en función de las componentes del movimiento (cinco en el presente análisis: u, v, w, traslaciones en los sentidos axial, tangencial y radial, y ψ_x , ψ_θ , rotaciones en los sentidos axial y tangencial), se tendrán las cinco ecuaciones siguientes,

$$\mathcal{L}_1\left\{u,\psi_x,v,\psi_\theta,w\right\} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\mathcal{L}_2\left\{u,\psi_x,v,\psi_\theta,w\right\} - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\mathcal{L}_3\left\{u,\psi_x,v,\psi_\theta,w\right\} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\mathcal{L}_4\left\{u,\psi_x,v,\psi_\theta,w\right\} - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} = 0$$

$$\mathcal{L}_5\left\{u,\psi_x,v,\psi_\theta,w\right\} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

que son homogéneas debido a la ausencia de solicitaciones externas variables con el tiempo, pues se trata de vibraciones libres. $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_5$, son operadores diferenciales simbólicos cuya expresión analítica será el asunto de discusión del capítulo III.

1.3. Sobre el método de solución y las condiciones de borde

El método de solución de las cinco ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (1.1), simultáneas y homogéneas, será el objeto del capítulo IV.

Las soluciones para los cinco movimientos posibles serán investigadas asumiendo que las expresiones que las representan son funciones de variables separables, en las tres variables presentes en el problema (las dos variables espaciales x, θ, y la variable tiempo, t).

Así la forma general de las soluciones será:

$$u_j(x, \theta, t) = f_j(x) \cdot g_j(\theta) \cdot h_j(t) \qquad (1.2)$$

$$j = 1, 2, \ldots, 5$$

En las cuales u_j representa cualquiera de los movimientos posibles (tres desplazamientos, u, v, w; dos rotaciones previamente multiplicadas por el radio a: $a\psi_x$, $a\psi_\theta$) f_j es una función sólo de x, y cuya expresión analítica tiene en cuenta las condiciones de contorno; g_j es una función trascendente de θ; h_j es una función del tiempo t, de la forma $e^{i\omega t}$, dado que se trata de un movimiento armónico.

Las cinco soluciones (1.2) deberán satisfacer, asimismo, las condiciones de borde, las cuales como se verá en la sección 4.3, son diez para cada caso (cinco en cada extremo de la cáscara), así resultarán diez ecuaciones, homogéneas si las condiciones de vinculación son también homogéneas:

$$\mathcal{B}_s\left\{u, \psi_x, v, \psi_\theta, w\right\} = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots, 10 \qquad (1.3)$$

Donde $\mathcal{B}_s$ es un operador simbólico cuya expresión analítica será tratada en la sección 4.3.

Así tratado el problema, resultarán, para condiciones dadas, las frecuencias naturales de vibración y la forma explícita y definida de las funciones f_j, g_j, h_j presentes en las soluciones.

C A P I T U L O II

REVISION DE LA LITERATURA

2.1. Consideraciones previas

Numerosos autores se han ocupado del análisis de vibraciones de cáscaras cilíndricas circulares. Los trabajos pueden clasificarse en dos grupos:

- aquéllos que tratan de las vibraciones simétricas en el sentido axial (en ellas es $n = 0$, sección 1.1)

- aquéllos que tratan de las vibraciones no simétricas (n cualquiera, entero positivo diferente de cero)

Las últimas son más generales, y las primeras serian un caso particular de éstas cuando algunos de los parámetros que entran en juego se anulan. En las vibraciones axialmente simétricas sólo aparecen tres componentes del movimiento (u, ψ_x, w) de un elemento infinitamente pequeño de cáscara en lugar de las cinco que aparecen $(u, \psi_x, v, \psi_\theta, w)$ en las vibraciones no simétricas cuando en el análisis de ambas entran las deformaciones por tensiones tangenciales y la inercia de rotación. Las componentes son sólo dos (u,w) cuando estos efectos son despreciados.

2.2. Vibraciones no simétricas

Este es el caso más general de las vibraciones de cáscaras cilíndricas. Las componentes del movimiento de un elemento infinitésimo de la cáscara son cinco en caso de que todos los efectos que influencian sean tomados en consideración y, corresponden a otras tantas soluciones a ser investigadas.

La mayoría de los autores conviene en despreciar los efectos de las deformaciones debidas a las tensiones tangenciales (shear strain effect) y los de la inercia de rotación (rotatory inertia effect). Estos efectos sólo son importantes para altas frecuencias, siendo que para bajas frecuencias ambos análisis deben dar resultados practicamente coincidentes. En caso de ser despreciados, entonces, las rotaciones ψ_x , ψ_θ pueden ser expresadas en función de u,v,w, y de este modo desaparecen de las ecuaciones, resultando un sistema de tres ecuaciones diferenciales simultáneas en lugar de cinco, y que son la base para investigar las tres soluciones u,v,w.

Entre estos trabajos se tiene el de YI-YUAN YU[7]. Este autor partiendo de las ecuaciones de equilibrio de las cáscaras cilíndricas, introduce las simplificaciones de DONNELL, las cuales consisten en asumir que para un cilindro los cam bios de curvatura y torsión son los mismos que aquéllos de una placa plana y que el efecto del esfuerzo cortante en el equilibrio según la dirección θ en las ecuaciones, es despreciable.

En un cierto punto de su análisis YI-YUAN hace esta importante suposición:

$$\frac{|\alpha_r^2|\, a^2}{n^2\, L^2} \ll 1$$

la cual sólo es válida si L/a es numéricamente considerable, esto es, si la longitud L es un múltiplo importante del radio a . Como consecuencia de esta suposición, la determinación de las raíces α_r (Sección 4.2) se simplifica sensiblemente. En efecto, en lugar de ser ocho, las raíces son cuatro, y todas con el valor absoluto, ya sean reales o imaginarias , igual.

A continuación resuelve el problema de vibración para tres diferentes condiciones de borde: cilindro simplemente apoyado en los dos extremos, perfectamente empotrado en los dos extremos y, finalmente, una combinación de ambos, un extremo apoyado y el otro empotrado.

KRAUS[11] hace un tratamiento del problema semejante al análisis de YI-YUAN, en el capítulo dedicado a las vibraciones libres de cáscaras de su libro.

ARNOLD y WARBURTON[12,8] en dos trabajos estudian las vibraciones de cáscaras de longitud finita, simplemente apoyada en los extremos en el primero, y empotradas en el segundo.

Tratando de los cilindros simplemente apoyados asumen funciones trigonométricas simples y conocidas de x dentro de las expresiones de las componentes del movimiento, usan el método energético (energía cinética, energía de deformación elástica) y, posteriormente con la aplicación de las ecuaciones de Lagrange llegan a las ecuaciones básicas para determinar la frecuencia.

También consiguen separar el efecto de la energía de flexión de aquél producido por la energía de dilatación lineal (stretching energy), llegando a la conclusión de que para n pequeño la energía de dilatación es importante siendo mínimo el efecto de flexión, invirtiéndose la proporción para altos valores de n.

Para los cilindros empotrados en ambos extremos asumen para la función de x , que aparece en las soluciones a ser investigadas, la misma expresión que para el caso de vibraciones libres de vigas rectas empotradas en ambos extremos y que, obviamente, satisfacen a las condiciones de borde. Esto equivale a suponer que la configuración axial de las vibraciones de la cáscara coinciden con la correspondiente en la viga, lo cual es una buena aproximación, pero no rigurosamente cierto.

FORSBERG[4] analiza también el problema de vibración de cáscaras cilíndricas despreciando también, como los anteriores, el efecto de la inercia de rotación y las deformaciones provenientes de las tensiones tangenciales. Partiendo de las tres ecuaciones de FLUGGE, y toma en consideración los efectos de las tres inercias de traslación. El autor canaliza su atención principalmente a la influencia de las condiciones de borde en las características modales de vibración. Así es tudia diez casos diferentes de condiciones de contorno. La evaluación final de la frecuencia y de las constantes que aparecen en las soluciones es numérica, del tipo de aproximaciones sucesivas (test and error procedure).

Existe un trabajo más reciente de WARBURTON[3] en el cual trata del problema en forma semejante a FORSBERG. Parte de las ecuaciones de FLUGGE pasando por una ecuación característica para determinar las raíces α_r, presentes en las soluciones, y finalmente, operando con las condiciones de contorno, llega al determinante que permite precisar las diferentes longitudes de cáscara correspondientes a una frecuencia dada. En este punto divide el análisis en dos, el de los modos simétricos y el de los modos antisimétricos. Adopta el tipo de evaluación numérica propuesto por FLUGGE en sus primeros trabajos sobre vibraciones de cáscaras simplemente apoyadas (1934) es decir, asumir la longitud L de la cáscara como incógnita a determinar con el determinante de frecuencia. El inconveniente de este método es que L aparece dentro de funciones trascendentes dificultando, como es de suponer, la investigación de los diferentes valores de L que anulan el determinante.

MIRSKY y HERRMANN[5] estudiaron el comportamiento de las cáscaras de longitud infinita, para el caso de propagación de ondas armónicas, considerando todos los efectos posibles inclusive la inercia de rotación y las deformaciones por tensiones cortantes. Su estudio, sin embargo, no abarca las condiciones de contorno, obvio pués trata de cáscaras de longitud infinita, y adopta como parámetro a determinar la velocidad axial de fase, y ésta a su vez función de la longitud de onda.

2.3. Vibraciones con simetría axial

Dentro del campo de las vibraciones con simetría a xial (n = 0) existen varios trabajos de diferentes autores. La mayoría de ellos incluye en sus consideraciones la inercia de rotación y la influencia de las deformaciones por corte.

LIN y MORGAN[10] estudian la propagación de ondas en cilindros de longitud infinita. Como superfície de referencia adoptan la centroide de las secciones trapezoidales en lugar de la superfície media cilíndrica. Por tratar de cilindros de longitud infinita no existe ninguna referencia a las condiciones de borde.

HERRMANN y MIRSKY[9] hacen un análisis semejante al anterior, mas partiendo de la teoría de la elasticidad tridimensional para establecer sus ecuaciones básicas. Por otra parte, al final, hacen un estudio comparativo de los resultados de las difernte teorías.

PEI CHI CHOU[13] aplica el método de las características en la solución de las tres ecuaciones diferenciales resultantes de aplicar los criterios de ambos trabajos anteriores en su deducción. Este autor menciona la posibilidad de aplicar las condiciones de contorno sin resolver, sin embargo, explícitamente el problema.

C A P I T U L O III

ECUACIONES DINAMICAS DE LAS CASCARAS CILINDRICAS CIRCULARES

3.1. Consideraciones generales

Nos proponemos deducir las ecuaciones generales de las cáscaras cilíndricas circulares teniendo en cuenta las deformaciones producidas por las tensiones de cizallamiento(también llamadas tangenciales o cortantes). Se trata de cáscaras de espesor constante, delgadas (relación espesor-radio menor que 0.1), hechas de un material homogéneo, elástico, isótropo y que cumple la ley de Hooke. Así como en la teoría clásica de las cáscaras, se asume que:

a) el espesor h es pequeño en comparación con el radio a de la superficie media

b) las deformaciones son suficientemente pequeñas de tal manera que las cantidades de segundo orden o mayor, pueden ser despreciadas en las componentes de las dilataciones

c) la componente de la tensión, normal a la superficie media, σ_z, es pequeña en comparación con las otras componentes de la tensión, y puede ser despreciada.

Una cuarta hipótesis de la teoría clásica, la que establece que una normal a la superficie media no deformada, permanece normal después de la deformación, no será respetada para tener en cuenta las deformaciones producidas por las tensiones tangenciales. Adoptar las hipótesis enunciadas equivale a reducir el problema de las deformaciones de una cáscara al estudio de las deformaciones de su superficie media como se verá más adelante. La hipótesis b) es necesaria para mantener el problema dentro del dominio lineal.

3.2. Sistema de cooordenadas

Consideramos una cáscara cilíndrica circular de longitud L, espesor h, y radio de la superficie media a.

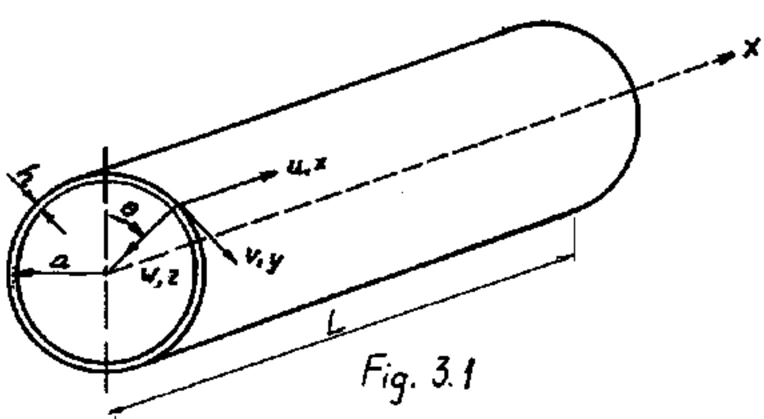


Fig. 3.1

En la Fig. 3.1 se muestra el sistema de coordenadas; la coordenada axial x está dirigida según el eje del cilindro, la coordenada angular θ según el movimiento de las agujas de un reloj y, finalmente, la coordenada z según una normal a la superficie media, positiva hacia el interior del cilindro.

Un punto cualquiera de la cáscara quedará definido por las coordenadas x, θ, z, es decir su posición está referida a la superficie media. En cuanto que un punto de esta última estará definido por sus coordenadas x, θ.

Las componentes del desplazamiento de un punto son u, v, w, y dirigidas según las direcciones axial, tangencial y radial respectivamente.

3.3. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Para analizar el equilibrio de un elemento infinitamente pequeño de cáscara sometido a solicitaciones internas, considérase un elemento limitado por dos pares de planos, de los cuales, un par son dos planos perpendiculares al eje x y separados por dx, y el restante son dos planos radiales que forman un ángulo $d\theta$.

En la Fig. 3.2 se observa el elemento de cáscara y los esfuerzos (normales y tangenciales) y momentos (de flexión y de torsión) que lo solicitan.

Deben cumplirse las condiciones de equilibrio para las tres direcciones, axial, radial y tangencial.

La suma de las componentes* de todos los esfuerzos en la dirección x debe ser nula; de la misma forma para las

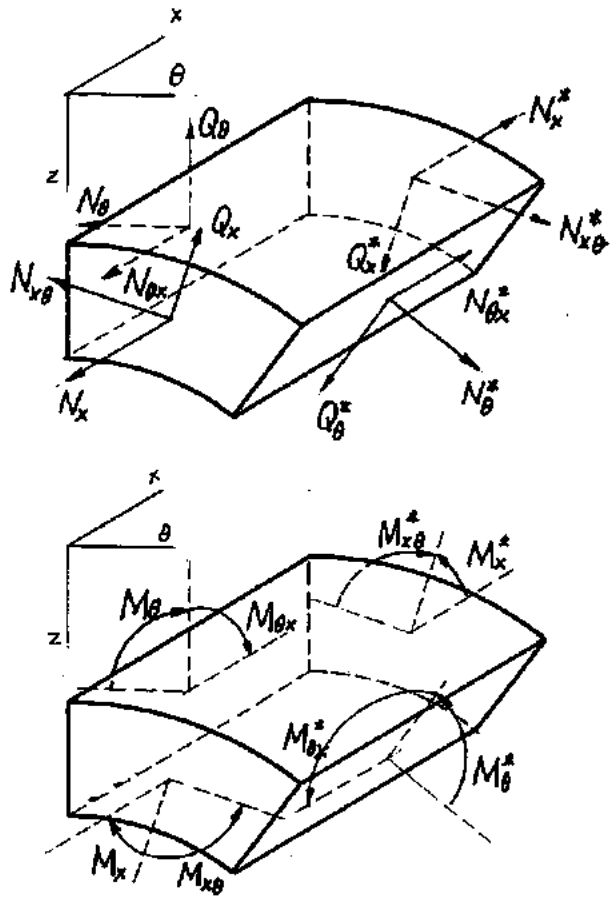


Fig. 3.2

---

*En la Fig. 3.2 debe interpretarse el asterisco como el valor de la solicitación en el lado opuesto más el incremento; por ejemplo:

$$N_x^* \cong N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}\, dx$$

direcciones θ , z :

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) a\, d\theta - N_x\, a\, d\theta + \left(N_{\theta x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} d\theta\right) dx -$$

$$- N_{\theta x}\, dx + p_x\, dx\, a\, d\theta = 0$$

$$\left(N_\theta + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dx - N_\theta\, dx + \left(N_{x\theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} dx\right) a\, d\theta -$$

$$- N_{x\theta}\, a\, d\theta - Q_\theta\, dx \frac{d\theta}{2} - \left(Q_\theta + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dx \frac{d\theta}{2} + p_\theta\, dx\, a\, d\theta = 0$$

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) a\, d\theta - Q_x\, a\, d\theta + \left(Q_\theta + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dx$$

$$- Q_\theta\, dx + N_\theta\, d\theta\, dx + p_r\, a\, d\theta\, dx = 0 \qquad (3.1)$$

El equilibrio de los momentos alrededor de los ejes x, θ, z, resulta en las ecuaciones:

$$\left(M_\theta + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dx - M_\theta\, dx - \left(M_{x\theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} dx\right) a\, d\theta +$$

$$+ M_{x\theta}\, a\, d\theta - Q_\theta\, dx\, a\, d\theta = 0$$

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) a\, d\theta - M_x a\, d\theta + \left(M_{\theta x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} d\theta\right) dx -$$

$$- M_{\theta x}\, dx - Q_x\, a\, d\theta\, dx = 0$$

$$- N_{x\theta}\, dx\, a\, d\theta + N_{\theta x}\, a\, d\theta\, dx - M_{\theta x}\, dx\, d\theta = 0 \qquad (3.2)$$

Despreciando los términos de segundo orden las ecuaciones (3.1) y (3.2) se transforman en:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + p_x = 0$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{Q_\theta}{a} + p_\theta = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_\theta}{a} + p_z = 0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - Q_\theta = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_x = 0$$

$$N_{x\theta} - N_{\theta x} + \frac{M_{\theta x}}{a} = 0 \qquad (3.4)$$

La última de las ecuaciones (3.4) es simplemente una identidad, por lo tanto puede dejar de ser considerada en los desarrollos que siguen, restando finalmente, cinco ecuaciones de equilibrio.

3.4. Estudio de las deformaciones

La deformación de una cáscara cilíndrica está caracterizada por las tres componentes u_A, v_A, w_A, del desplazamiento de un punto cualquiera A de la misma, situado, en general, a una distancia z de la superficie media. Las componentes u_A, v_A, w_A, tienen, respectivamente, las direcciones axial, tangencial y radial, y son funciones de x, θ, z, y en un análisis dinámico también del tiempo t. En el caso de cáscaras delgadas, como es el presente, puede determinarse u_A, v_A, w_A, en función de las componentes u,v,w, del desplazamiento de la superficie media (z = 0) y de los ángulos de rotación ψ_x, ψ_θ.

Los ángulos ψ_x, ψ_θ son respectivamente, las componentes de la rotación de una normal a la superficie media en los planos x,z y θ,z en la ocasión de la deformación.

En la Fig. 3.3 puede obsrvarse como es afectada la deformación total por causa de las deformaciones debidas a las tensiones tangenciales*.

---

*Por efecto del cizallamiento puro el elemento experimenta una distorsión pero no una rotación.

De acuerdo con las Fig.3.4 a) y Fig.3.4 b) los desplazamien

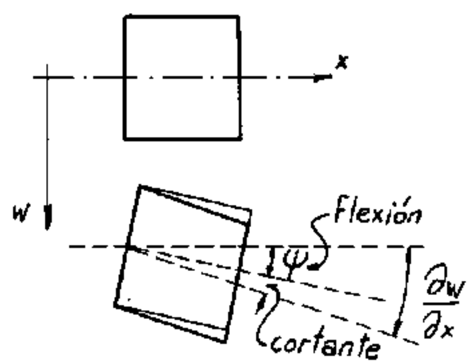


Fig. 3.3

tos de un punto cualquiera A en función de los desplazamientos y rotaciones de la superficie media pueden expresarse como funciones lineales de z.

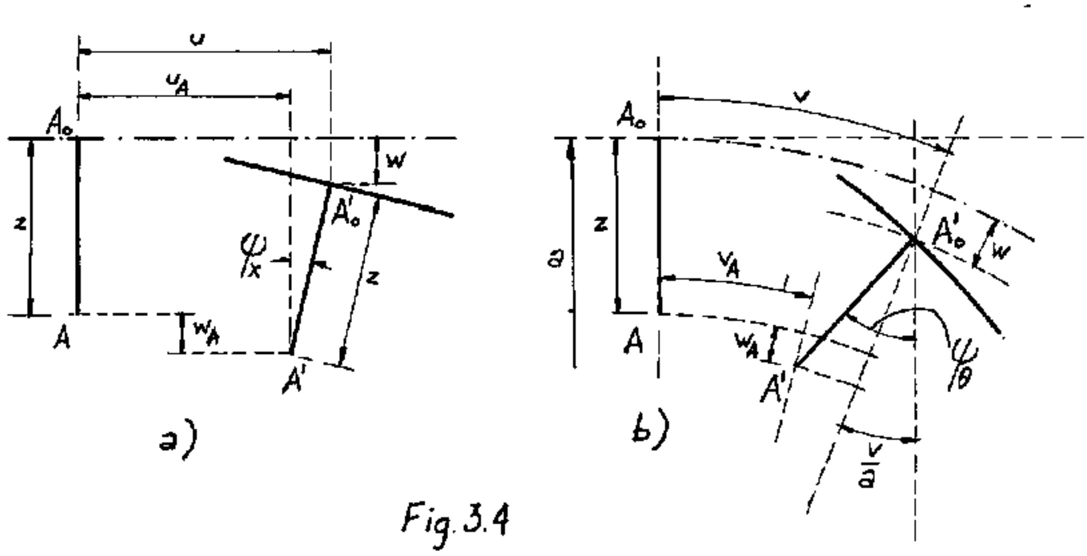


Fig. 3.4

Así u_A, v_A, w_A, pueden escribirse:

$$u_A(x,\theta,z,t) = u(x,\theta,t) - z\,\psi_x(x,\theta,t)$$

$$v_A(x,\theta,z,t) = v(x,\theta,t) - z\,\psi_\theta(x,\theta,t)$$

$$w_A(x,\theta,z,t) = w(x,\theta,t) \qquad (3.5)$$

Las dilataciones ε_x, ε_θ, ε_r, y las distorsiones γ_{xr}, $\gamma_{x\theta}$, $\gamma_{r\theta}$, para el caso de coordenadas cilíndricas en un cuerpo elástico son*:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xr} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \qquad \gamma_{x\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial w}{\partial r} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \qquad (3.6)$$

Para nuestro caso, en que las coordenadas en senti do radial son contadas a partir de la superficie media, y son z,w positivos hacia el interior del cilindro, las expresio nes (3.6) se transforman en (r = a - z):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_A}{\partial x} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_A}{\partial z} + \frac{\partial w_A}{\partial x} \qquad (3.7)$$

---

*BIEZENO, GRAMMEL - Engineering Mechanics, Vol. 1, p. 63.

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{a-z}\frac{\partial v_A}{\partial \theta} - \frac{w_A}{a-z} \qquad \gamma_{x\theta} = \frac{\partial v_A}{\partial x} + \frac{1}{a-z}\frac{\partial u_A}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w_A}{\partial z} \qquad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{a-z}\frac{\partial w_A}{\partial \theta} + \frac{\partial v_A}{\partial z} + \frac{v_A}{a-z} \qquad (3.7)$$

Reemplazando en las (3.7) las expresiones de u_A, v_A y w_A dadas por las (3.5), se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial \psi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{a-z}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{w}{a-z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} - z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{a-z}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{zx} = -\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{a-z}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta + \frac{v}{a-z} - \frac{z}{a-z}\psi_\theta \qquad (3.8)$$

En las expresiones (3.8), la tercera puede despreciarse de acuerdo con la hipótesis hecha en la sección 1.3 c) esto es $\sigma_z \cong 0$.

3.5. Fuerzas y momentos en función de los desplazamientos

Aceptada la hipótesis de la validez de la ley de Hooke se tienen las siguientes relaciones tensión-deformación:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_\theta\right) \qquad \tau_{x\theta} = G\gamma_{x\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\theta + \nu\,\varepsilon_x\right) \qquad \tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\theta z}$$

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx} \qquad (3.9)$$

Se pueden obtener las expresiones de los esfuerzos N y de los momentos M en función de los desplazamientos integrando los valores de las tensiones (3.9) a través del espesor h:

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \frac{a-z}{a}\, dz \;; \qquad N_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta\, dz$$

$$N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{x\theta} \frac{a-z}{a}\, dz \;; \qquad N_{\theta x} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta x}\, dz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \frac{a-z}{a}\, z\, dz \;; \qquad M_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta\, z\, dz$$

$$M_{x\theta} = -\int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{x\theta} \frac{a-z}{a}\, z\, dz \;; \qquad M_{\theta x} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta x}\, z\, dz \qquad (3.10)$$

Lo mismo puede hacerse con los esfuerzos cortantes Q_x y Q_θ :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \frac{a-z}{a} \, dz \quad ; \qquad Q_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta z} \, dz \tag{3.11}$$

Introduciendo las expresiones (3.8) en las (3.9), y éstas a su vez en las (3.10) y (3.11), (Apéndice A), resulta:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w\right) + \frac{h^2}{12a^2}\, a\, \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right]$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} + \frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{w}{a}\right)\right]$$

$$N_{x\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{12a^2}\, a\, \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x}\right]$$

$$N_{\theta x} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\nu}{a}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right]$$

$$M_\theta = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{a}\right] \tag{3.12}$$

$$M_{x\theta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} \right]$$

$$M_{\theta x} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \right]$$

$$Q_x = k' \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right]$$

$$Q_\theta = k'' \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta - \frac{v}{a} + \frac{h^2}{12a^2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta - \frac{v}{a} \right) \right] \qquad (3.12)$$

En las dos últimas expresiones de las (3.12) aparecen k' y k", son dos factores de corte o cizallamiento que dependen de la forma de la sección considerada, TIMOSHENKO.[16]

3.6. Ecuaciones diferenciales del movimiento

Para obtener las ecuaciones del movimiento a partir de las ecuaciones de equilibrio (3.3) y (3.4), basta sólo sustituir las fuerzas p_x, p_θ, p_z, por las fuerzas de inercia; e introducir la inercia de rotación en las ecuaciones de equilibrio de momentos. Sea:

(3.14)

inercia de traslación, dirección axial $p_x = -\rho h \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

inercia de traslación, dirección tangencial $p_\theta = -\rho h \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

inercia de traslación, dirección radial $p_z = -\rho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

inercia de rotación, eje x : $-\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}$

inercia de rotación, eje θ : $-\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}$ (3.15)

donde ρ es la densidad de masa por unidad de area y $\frac{h^3}{12}$ es el momento de inercia para un ancho unitario. Haciendo la sustitución indicada por las (3.14) e introduciendo las (3.15) en las ecuaciones (3.3) y (3.4), se obtienen las siguientes ecuaciones del movimiento en función de las tensiones:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_x = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{Q_\theta}{a} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (3.16)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - Q_\theta = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_\theta}{a} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (3.17)$$

Sustituyendo las relaciones (3.12) en las ecuaciones del movimiento (3.16), (3.17) se obtienen las cinco ecuaciones del movimiento en función de los desplazamientos y ro taciones (Apéndice A):

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta}-\nu\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\right.$$

$$\left.+a^2\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial\theta^2}\right)=\frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1-\nu}{2}k'a\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{1-\nu}{2}k'a\psi_x+\frac{h^2}{12a^2}\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\right.$$

$$\left.+a^3\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}a\frac{\partial^2\psi_x}{\partial\theta^2}+\frac{1+\nu}{2}a^2\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x\,\partial\theta}\right)=\frac{h^2}{12}\frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta}+\frac{1-\nu}{2}a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}-\frac{2+(1-\nu)k''}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}k''\psi_\theta-\frac{1-\nu}{2}k''\frac{1}{a}v+\frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{1-\nu}{2}a^2\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2}-\frac{2+(1-\nu^2)}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{1-\nu}{2}k''\psi_\theta-\frac{1-\nu}{2}k''\frac{1}{a}v\right)=$$

$$=\frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\quad(3.18)$$

$$\frac{1-\nu}{2}k''\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{1-\nu}{2}k''a\psi_\theta+\frac{1-\nu}{2}k''v+\frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{1-\nu}{2}a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\right.$$

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{1-\nu}{2}a^3\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}a^2\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\,\partial\theta}+a\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2}+$$

$$\left.+\frac{2+(1-\nu)k''}{2}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{1-\nu}{2}k''a\psi_\theta+\frac{1-\nu}{2}k''v\right)=\frac{h^2}{12}\frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial t^2}\quad(3.19)$$

$$\frac{1-\nu}{2} k' a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} k'' \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2+(1-\nu)k''}{2} \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{1-\nu}{2} k' a \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{1-\nu}{2} k'' \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{a} w + \frac{h^2}{12 a^2} \left(\frac{1-\nu}{2} k'' \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2+(1-\nu)k''}{2} \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2+(1-\nu)k''}{2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{a} w \right) =$$

$$= \frac{\rho a (1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (3.19)$$

Las (3.18), (3.19) son las ecuaciones que nos habiamos propuesto deducir en la sección 3.1, es decir, las ecuaciones del movimiento de las cáscaras cilíndricas teniendo en cuenta los efectos de membrana, flexión, deformaciones transversales debidas a las tensiones tangenciales, inercia de traslación en las direcciones axial, tangencial y transversal, y finalmente, la inercia de rotación en los planos x,z y θ,z. En el capítulo siguiente nos ocuparemos, precisamente, del método de solución de estas ecuaciones.

3.7. Observaciones

a) A partir de las ecuaciones (3.18), (3.19) se pueden obtener otras, menos generales, resultantes de introducir restricciones o bien simplificaciones.

Como primer ejemplo analizaremos la forma que toman las ecuaciones (3.18), (3.19) para el caso de vibraciones con simetría axial (axisimétricas). Allí se tiene que:

$$v = 0 \; ; \qquad \psi_\theta = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

y las cinco ecuaciones (3.18), (3.19) se reducen a solamente tres:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h^2}{12 a^2} a^2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} = \frac{\rho a (1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1-\nu}{2} k' a \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1-\nu}{2} k' a \psi_x + \frac{h^2}{12 a^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + a^3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \right) = \frac{h^2}{12} \frac{\rho a (1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{1-\nu}{2} k' a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1-\nu}{2} k' a \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{w}{a} -$$

$$- \frac{h^2}{12 a^2} \frac{1}{a} w = \frac{\rho a (1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (3.20)$$

Las (3.20) son las tres ecuaciones del movimiento para vibraciones axisimétricas de cáscaras cilíndricas teniendo en cuenta la inercia de rotación y las deformaciones transversales producidas por tensiones de cizallamiento.

b) Volviendo a las ecuaciones (3.18), (3.19) como una segunda posibilidad podriamos despreciar el efecto de las deformaciones debidas a las tensiones de cizallamiento, reteniendo el efecto de la inercia de rotación. Se trata aún, por supuesto, de vibraciones no simétricas.

Observando las expresiones de las distorsiones en las (3.8), despreciar su efecto equivale a poner $\gamma_{zx}=0$, $\gamma_{\theta z}=0$ (el efecto de ε_z ya había sido previamente despreciado) para la superficie media (z = 0):

$$\gamma_{zx} = -\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta + \frac{v}{a} = 0$$

De estas dos expresiones obtenemos ψ_x y ψ_θ:

$$\psi_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \qquad \psi_\theta = \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{a} \tag{3.21}$$

Introduciendo las (3.21) en las ecuaciones (3.18), (3.19), y realizando combinaciones oportunas entre ellas, se obtienen las tres ecuaciones siguientes:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta} - \nu\frac{\partial w}{\partial x} +$$
$$+\frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + a^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial\theta^2}\right) = \frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta} + \frac{1-\nu}{2}a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{3}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} +\right.$$

$$+ \frac{3-\nu}{2} a \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \Big) = \frac{\rho a(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{a}\right)$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} + \frac{h^2}{12 a^2}\Big(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} - a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{3-\nu}{2} a \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} -$$

$$- a^3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2a \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{2}{a}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{a}\Big) =$$

$$= \frac{\rho a(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I \frac{\rho a(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} -$$

$$- I \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2}\right) \qquad (3.22)$$

En las ecuaciones (3.21) se ha puesto $I = h^2/12$, momento de inercia de la cáscara; I es el elemento que permite identificar los términos que tienen en cuenta la inercia de rotación. En consecuencia, las cinco ecuaciones del movimiento quedan reducidas a tres, cuando se desprecia el efecto de las deformaciones de cizallamiento y se retienen los restantes.

c) Para despreciar, además, el efecto de la inercia de rotación es sólo poner $I = 0$ en las (3.22):

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h^2}{12 a^2}\Big(\frac{1-\nu}{a}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} +$$

$$+ a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2}\Big) = \frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta} + \frac{1+\nu}{2}a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\theta} +$$

$$+\frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{3(1-\nu)}{2}a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{3-\nu}{2}a\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial\theta}\right) = \frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{w}{a} + \frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial\theta^2} - a^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} -\right.$$

$$-\frac{3-\nu}{2}a\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial\theta} - a^3\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2a\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial\theta^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} -$$

$$\left.-\frac{2}{a}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - \frac{w}{a}\right) = \frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (3.23)$$

Las ecuaciones (3.23) son las conocidas ecuaciones de FLUGGE[1], y coinciden con las ecuaciones usadas en el estudio de vibraciones de cáscaras cilíndricas por G.WARBURTON[3]. Las (3.23) tienen en cuenta el efecto de membrana, la rigidez a flexión y la inercia de traslación en las tres direcciones x, θ, z.

d) En las (3.23), los términos multiplicados por el factor $h^2/12a^2$ tienen en cuenta el efecto de la rigidez a flexión, de tal manera que si se asume que ese factor es muy pequeño, o sea

$$\frac{h^2}{12a^2} \cong 0$$

los términos restantes constituyen las <u>ecuaciones del movimiento de las membranas</u>:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2a}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \theta}-\nu\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial \theta}+\frac{1}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{a}{2}\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \theta}=$$

$$=\frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{w}{a}=\frac{\rho a(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (3.24)$$

Las ecuaciones (3.24) son muy poco usadas en vista de sus insalvables limitaciones. En efecto, ellas no permiten considerar la amplia variedad de vinculación en los extremos (FORSBERG[4]).

CAPITULO IV

METODO DE SOLUCION

4.1. Algunas consideraciones sobre el problema

Nos proponemos analizar las ecuaciones (3.18),(3.19) del movimiento de cáscaras cilíndricas obtenidas en la sección 3.6. Recordamos que en su deducción no fueron introducidas otras simplificaciones que las contenidas en las hipótesis iniciales de la teoría clásica de las cáscaras delgadas, a), b), c), sección 3.1, y aquéllas que resultaron de la integración de las tensiones:

- En el desarrollo en serie de los logaritmos sólo se consideró hasta el término $h^2/12a^2$ en relación a la unidad, despreciando los de grado superior; sección 3.5. y Apéndice A.

* En las integraciones de donde resultaron Q_x y Q_θ se introdujeron los coeficientes k' y k" para tomar en cuenta la distribución no uniforme de las tensiones τ_x y τ_θ a lo largo del espesor h.

Recordamos, también, que el método empleado en su deducción es aquél del equilibrio de un elemento de cáscara, FLUGGE[1], TIMOSHENKO[2], diferente del método energético usado por ARNOLD y WARBURTON[8] en sus primeros trabajos.

Basándose en las ecuaciones de DONNELL, que contienen grandes simplificaciones, y haciendo una importante suposición (sección 2.2) en un cierto punto de su análisis, YI-YUAN[7] consigue llegar a expresiones más o menos simples para las soluciones u,v,w.

Por causa de su generalidad, la resolución de las ecuaciones (3.18), (3.19) presenta cierta complejidad.

El método de solución consiste en asumir que la cáscara vibra en un modo natural, con una frecuencia circular natural ω .

Se asumen expresiones analíticas para las componentes del desplazamiento tal que sean directamente proporcionales a

funciones armónicas simples de ωt

funciones seno o coseno de múltiplos de θ

funciones exponenciales de x.

A continuación estas componentes del desplazamiento deben satisfacer a las (3.18), (3.19).

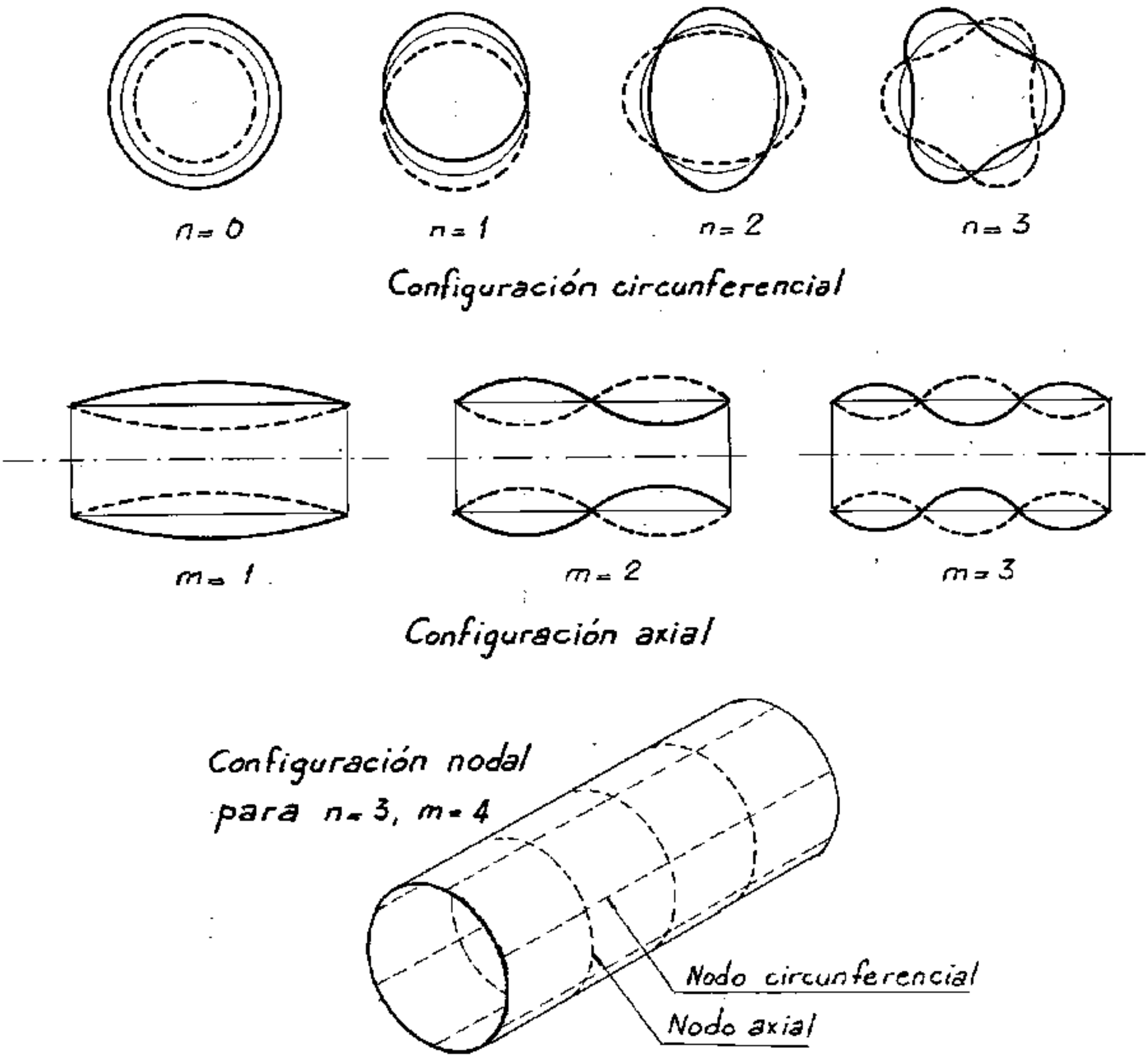


Fig. 4.1

La frecuencia natural de vibración de una cáscara cilíndrica corresponde a la configuración nodal, Fig. 4.1, es decir, al número de ondas circunferenciales n, y al número de semiondas axiales m.

4.2. Soluciones generales

Se puede asumir, para el caso de cáscaras cilíndricas de longitud finita, con diferentes posibles condiciones de borde en los extremos y vibrando armónicamente, que las soluciones generales de las ecuaciones (3.18), (3.19) son:

$$u(x,\theta,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{10} \kappa_{rn} B_{rn} e^{\alpha_{rn} x/a} \cos n\theta \right) e^{i\omega t}$$

$$a\,\psi_x(x,\theta,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{10} \kappa'_{rn} B_{rn} e^{\alpha_{rn} x/a} \cos n\theta \right) e^{i\omega t}$$

$$v(x,\theta,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{10} \kappa''_{rn} B_{rn} e^{\alpha_{rn} x/a} \operatorname{sen} n\theta \right) e^{i\omega t}$$

$$a\,\psi_\theta(x,\theta,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{10} \kappa'''_{rn} B_{rn} e^{\alpha_{rn} x/a} \operatorname{sen} n\theta \right) e^{i\omega t}$$

$$w(x,\theta,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{10} B_{rn} e^{\alpha_{rn} x/a} \cos n\theta \right) e^{i\omega t} \qquad (4.1)$$

Como nos limitaremos al caso de condiciones de borde homogéneas, recaeremos en un problema de auto-valores. Sien do así, a cada valor de n corresponderá una serie de auto--valores y podemos tratar el problema para un valor genérico de n, con lo cual se tiene:

$$u = \left(\sum_{r=1}^{10} \kappa_r B_r e^{\alpha_r x/a}\right) \cos n\theta \; e^{i\omega t}$$

$$a\psi_x = \left(\sum_{r=1}^{10} \kappa'_r B_r e^{\alpha_r x/a}\right) \cos n\theta \; e^{i\omega t}$$

$$v = \left(\sum_{r=1}^{10} \kappa''_r B_r e^{\alpha_r x/a}\right) \operatorname{sen} n\theta \; e^{i\omega t}$$

$$a\psi_\theta = \left(\sum_{r=1}^{10} \kappa'''_r B_r e^{\alpha_r x/a}\right) \operatorname{sen} n\theta \; e^{i\omega t}$$

$$w = \left(\sum_{r=1}^{10} B_r e^{\alpha_r x/a}\right) \cos n\theta \; e^{i\omega t} \qquad (4.2)$$

Si se designa con α el valor genérico de una raiz cualquiera, y si se pone

$$\kappa_r B_r = U_o \,, \quad \kappa'_r B_r = \psi_{xo} \,, \quad B_r \kappa''_r = V_o \,, \quad \kappa'''_r B_r = \psi_{\theta o} \,,$$

$$B_r = W_o \qquad (4.2')$$

para la misma raiz, se tienen las siguientes expresiones co-rrespondientes a las (4.2):

$$u = U_o\, e^{\alpha x/a} \cos n\theta \; e^{i\omega t}$$

$$a\psi_x = \psi_{xo}\, e^{\alpha x/a} \cos n\theta \; e^{i\omega t}$$

$$v = V_o\, e^{\alpha x/a}\, \mathrm{sen}\, n\theta \; e^{i\omega t}$$

$$a\psi_\theta = \psi_{\theta o}\, e^{\alpha x/a}\, \mathrm{sen}\, n\theta \; e^{i\omega t}$$

$$w = W_o\, e^{\alpha x/a} \cos n\theta \; e^{i\omega t} \qquad (4.3)$$

En las expresiones (4.1), (4.2), (4.3), n es un número entero que indica el número de ondas circunferenciales, α_r es un conjunto de números ligados a las ondas axiales y a las condiciones de borde, ω es la frecuencia circular del movimiento armónico, B_r (r = 1,...,10) son coeficientes de integración, κ_r son coeficientes de proporcionalidad y a es el radio de la superficie media.

En las cinco ecuaciones (3.18), (3.19) si se pone:

$$\beta = \frac{h^2}{12a^2} \quad ; \qquad \frac{1}{\omega_o^2} = \frac{\rho a^2(1-\nu^2)}{E} \qquad (4.4)$$

y ordenando convenientemente los términos, se tiene:

$$\left[a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1+\beta)\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{\omega_o^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u + \left[\beta a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \right.$$
$$\left. -\beta\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right](a\psi_x) + \left[\frac{1+\nu}{2}a\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}\right]v + \left[-\nu a\frac{\partial}{\partial x}\right]w = 0$$

$$\left[\beta a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\beta\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]u+\left[\beta a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1-\nu}{2}k'-\beta\frac{1}{\omega_o^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right](a\psi_x)+\left[\beta\frac{1+\nu}{2}a\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}\right](a\psi_x)+$$
$$+\left[\frac{1-\nu}{2}k'a\frac{\partial}{\partial x}\right]w=0$$

$$\left[\frac{1+\nu}{2}a\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}\right]u+\left[\frac{1-\nu}{2}a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1+\beta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\omega_o^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]v+\left[\beta\frac{1-\nu}{2}a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''\right](a\psi_\theta)+$$
$$+\left[-(1+\beta)\frac{2+(1-\nu)k''}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]w=0$$

$$\left[\beta\frac{1+\nu}{2}a\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}\right](a\psi_x)+\left[\beta\frac{1-\nu}{2}a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\right.$$
$$\left.+(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''\right]v+\left[\beta\frac{1-\nu}{2}a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''-\right.$$
$$\left.-\beta\frac{1}{\omega_o^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right](a\psi_\theta)+\left[\beta\frac{\partial}{\partial\theta}+(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''\frac{\partial}{\partial\theta}\right]w=0$$

$$\left[-\nu a\frac{\partial}{\partial x}\right]u+\left[\frac{1-\nu}{2}k'a\frac{\partial}{\partial x}\right](a\psi_x)+\left[(1+\beta)\frac{2+(1-\nu)k''}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]v+$$
$$+\left[\beta\frac{\partial}{\partial\theta}+(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''\frac{\partial}{\partial\theta}\right](a\psi_\theta)+\left[-\frac{1-\nu}{2}k'a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+(1+\beta)+\frac{1}{\omega_o^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]w=0 \qquad (4.5)$$

Las expresiones (4.3) son soluciones del sistema (4.5), luego, deben satisfacerlo. Una vez introducidas las (4.3) en las (4.5), y después de realizar sustituciones oportunas, se llega a:

$$\left[\alpha^2-(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}n^2+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]U_0+\left[\beta\alpha^2+\beta\frac{1-\nu}{2}n^2\right]\psi_{x0}+$$
$$+\left[\frac{1+\nu}{2}n\alpha\right]V_0+\left[-\nu\alpha\right]W_0 = 0$$

$$\left[\beta\alpha^2+\beta\frac{1-\nu}{2}n^2\right]U_0+\left[\beta\alpha^2-\beta\frac{1-\nu}{2}n^2-\frac{1-\nu}{2}k'+\right.$$
$$\left.+\beta\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]\psi_{x0}+\left[\beta\frac{1+\nu}{2}n\alpha\right]\psi_{\theta0}+\left[\frac{1-\nu}{2}k'\alpha\right]W_0 = 0$$

$$\left[\frac{1+\nu}{2}\alpha n\right]U_0+\left[-\frac{1-\nu}{2}\alpha^2+(1+\beta)n^2+(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''-\right.$$
$$\left.-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]V_0+\left[-\beta\frac{1-\nu}{2}\alpha^2-\beta n^2-(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''\right]\psi_{\theta0}+$$
$$+\left[-(1+\beta)\frac{2+(1-\nu)k''}{2}n\right]W_0 = 0$$

$$\left[\beta\frac{1+\nu}{2}\alpha n\right]\psi_{x0}+\left[-\beta\frac{1-\nu}{2}\alpha^2-\beta n^2-(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''\right]V_0+$$
$$+\left[-\beta\frac{1-\nu}{2}\alpha^2+\beta n^2+(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''-\beta\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]\psi_{\theta0}+\left[\beta n+\right.$$
$$\left.+(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''n\right]W_0 = 0$$

$$\left[-\nu\alpha\right]U_o + \left[\frac{1-\nu}{2}k'\alpha\right]\psi_{x_o} + \left[-(1+\beta)\frac{2+(1-\nu)k'}{2}n\right]V_o +$$

$$+\left[\beta n + (1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''n\right]\psi_{\theta_o} + \left[-\frac{1-\nu}{2}k'\alpha^2 +\right.$$

$$\left. +(1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k'''n^2 + (1+\beta) - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right]W_o = 0 \qquad (4.6)$$

Las (4.6) constituyen un sistema de cinco ecuaciones lineales homogéneas que para que tengan otra solución que no sea la trivial es necesario que el determinante de quinto orden formado con los coeficientes sea igual a cero.

Si previamente hacemos:

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_o^2} \qquad (4.7)$$

Se da el nombre de factor de frecuencia a Ω, ya que sólo basta multiplicar éste por $\omega_o^2 = E/(\rho a^2(1-\nu^2))$ para obtener la frecuencia circular ω .

El determinante mencionado, con una notación compacta, será (4.8). Donde los elementos A_{ij} están dados por las siguientes expresiones:

$$A_{11} = \alpha^2 - (1+\beta)\frac{1-\nu}{2}n^2 + \Omega^2$$

$$A_{12} = A_{21} = \beta\alpha^2 + \beta\frac{1-\nu}{2}n^2$$

$$A_{13} = A_{31} = \frac{1+\nu}{2}n\alpha$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

$$A_{15} = A_{51} = -\nu\alpha$$

$$A_{22} = \beta\alpha^2 - \beta\frac{1-\nu}{2}n^2 - \frac{1-\nu}{2}k' + \beta\Omega^2$$

$$A_{24} = A_{42} = \beta\frac{1+\nu}{2}n\alpha$$

$$A_{25} = A_{52} = \frac{1-\nu}{2}k'\alpha$$

$$A_{33} = -\frac{1-\nu}{2}\alpha^2 + (1+\beta)n^2 + (1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k'' - \Omega^2$$

$$A_{34} = A_{43} = -\beta\frac{1-\nu}{2}\alpha^2 - \beta n^2 - (1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k''$$

$$A_{35} = A_{53} = -(1+\beta)\frac{2+(1-\nu)k''}{2}n$$

$$A_{44} = -\beta\frac{1-\nu}{2}\alpha^2 + \beta n^2 + (1+\beta)\frac{1-\nu}{2}k'' - \beta\Omega^2$$

$$A_{45} = A_{54} = \beta n + (1+\beta)\frac{1-\nu}{2} k'' n$$

$$A_{55} = -\frac{1-\nu}{2} k'\alpha^2 + (1+\beta)\frac{1-\nu}{2} k'' n^2 + (1+\beta) - \Omega^2$$

$$A_{14} = A_{23} = A_{32} = A_{41} = 0$$

En los elementos del determinante (4.8) aparecenlos coeficientes numéricos k', k", ν, que pueden ser fijadosdes de ahora facilitando así el manejo algebraico.

Al coeficiente de Poisson, ν, se dará un valor de 0.3, valor adoptado por la mayoría de los autores sobre este asunto, y será siempre el mismo a lo largo del presente trabajo. Los coeficientes k' y k" son los coeficientes de cizallamiento* en las direcciones axial y tangencial respectivamente y sus valores numéricos pueden ser asumidos, con suficiente aproximación, de acuerdo con MIRSKY y HERRMANN[5], Apéndice B, en

$$\nu = 0.3 \quad ; \qquad k' = k'' \cong \frac{\pi^2}{12} \cong 0.82 \qquad (4.9)$$

Con los valores numéricos (4.9) los coeficientes que aparecen en los elementos del determinante (4.8) pasan a:

$$A_{11} = \alpha^2 - 0.35(1+\beta) n^2 + \Omega^2$$

*S. TIMOSHENKO - Vibrations Problems in Engineering, p.330.

$$A_{12} = A_{21} = \beta^2\alpha^2 + 0.35 n^2$$

$$A_{13} = A_{31} = 0.65\, n\alpha$$

$$A_{22} = \beta\alpha^2 - 0.35\beta n^2 - 0.287 + \beta\Omega^2$$

$$A_{15} = A_{51} = -0.3\,\alpha$$

$$A_{24} = A_{42} = 0.65\,\beta\alpha n$$

$$A_{25} = A_{52} = 0.287\,\alpha$$

$$A_{33} = -0.35\,\alpha^2 + (1+\beta)(0.287 + n^2) - \Omega^2$$

$$A_{34} = A_{43} = -0.35\,\beta\alpha^2 - \beta n^2 - 0.287(1+\beta)$$

$$A_{35} = A_{53} = -1.287(1+\beta)\, n$$

$$A_{44} = -0.35\,\beta\alpha^2 + \beta n^2 + 0.287(1+\beta) - \beta\Omega^2$$

$$A_{55} = -0.287\,\alpha^2 + (1+\beta)(1 + 0.287 n^2) - \Omega^2$$

$$A_{45} = A_{54} = \beta n + 0.287(1+\beta)\, n$$

$$A_{14} = A_{41} = A_{23} = A_{32} = 0$$

El determinante (4.8) es simétrico respecto de la diagonal A_{ii} ($i = 1,2,\ldots,5$). Los elementos A_{ij} del mismo dependen de β, n, α, Ω y ν. Si se desarrollase el determinante (4.8) efectuando todas las operaciones indicadas entre sus elementos, poniendo en evidencia el factor Ω^2 se obtendría una ecuación algebraica de quinto grado en Ω^2. Esto indica que existen cinco valores del factor de frecuencia Ω, y consecuentemente de la frecuencia circular ω que satisfacen a la ecuación, estando determinadas todas las demás variables, configuración nodal y condiciones de borde.

Ordenados estos valores ω_s ($s = 1,2\ldots5$) en sentido creciente, ellos son las frecuencias naturales asociadas a otros tantos modos naturales de vibración. Para el valor más bajo de éstos, la componente radial del desplazamiento alcanza su mayor amplitud[3]. Para este último, que es el de mayor valor práctico, haremos las consideraciones que siguen.

Si se desarrolla el determinante (4.8) de la forma indicada anteriormente, mas poniendo en evidencia esta vez el factor α^2, y ordenando según sus potencias decrecientes resulta la ecuación:

$$a_0\,\alpha^{10} + a_1\,\alpha^8 + a_2\,\alpha^6 + a_3\,\alpha^4 + a_4\,\alpha^2 + a_5 = 0 \qquad (4.10)$$

Cuyos coeficientes tienen la forma:

$$a_k = a_k\left(h/a, \nu, k', k'', n, \omega\right) \qquad k = 0,1,\ldots,5 \qquad (4.11)$$

Las expresiones analíticas de los coeficientes a_k son considerablemente extensas y constan en el Apéndice C. Haciendo la sustitución $\alpha^* = \alpha^2$ en la ecuación (4.10) resulta evidente que se trata de una ecuación algebraica completa de quinto grado:

$$a_0 \alpha^{*5} + a_1 \alpha^{*4} + a_2 \alpha^{*3} + a_3 \alpha^{*2} + a_4 \alpha^{*} + a_5 = 0 \qquad (4.12)$$

Los coeficientes de (4.10) ó (4.12) son todos reales. Por tratarse de una ecuación algebraica de quinto grado tendrá cinco raices α_r^* (r = 1,2...5). Posteriormente, se llegará a la diez raices de la (4.10) por medio de:

$$\alpha_r = \pm\sqrt{\alpha_r^*} \qquad (4.13)$$

Con la condición de que sea $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$, $a_4 > 0$, $a_5 > 0$, la (4.12) tiene dos raices reales positivas, una real negativa, y dos complejas conjugadas (Apendice D). Sea

α_1^* una raiz real y positiva

α_2^* otra raiz real y positiva

α_3^* la raiz real y negativa

$\left.\begin{matrix}\alpha_4^* \\ \alpha_5^*\end{matrix}\right\}$ las dos raices complejas conjugadas

Teniendo en cuenta (4.13) las raices de (4.10) serán:

α_1^* se desdobla en $\begin{cases} +\alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{cases}$

α_2^* se desdpbla en $\begin{cases} +\alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{cases}$

α_3^* se desdobla en $\begin{cases} +i\eta_3 \\ -i\eta_3 \end{cases}$ (4.14)

$$\alpha_4^* \text{ se desdobla en } \begin{cases} +(p+iq) \\ -(p+iq) \end{cases}$$

$$\alpha_5^* \text{ se desdobla en } \begin{cases} +(p-iq) \\ -(p-iq) \end{cases} \tag{4.14}$$

donde α_1, α_2, η_3, p y q son cantidades reales y positivas. En las (4.2) se designará:

$$U(x) = \sum_{r=1}^{10} \kappa_r B_r e^{\alpha_r x/a}$$

$$\psi_x(x) = \sum_{r=1}^{10} \kappa'_r B_r e^{\alpha_r x/a}$$

$$V(x) = \sum_{r=1}^{10} \kappa''_r B_r e^{\alpha_r x/a}$$

$$\psi_\theta(x) = \sum_{r=1}^{10} \kappa'''_r B_r e^{\alpha_r x/a}$$

$$W(x) = \sum_{r=1}^{10} B_r e^{\alpha_r x/a} \tag{4.15}$$

Para la última de las (4.15) se tiene, sustituyendo las raices α_r por sus valores (4.14):

$$W(x) = B_1 e^{\alpha_1 x/a} + B_2 e^{-\alpha_1 x/a} + B_3 e^{\alpha_2 x/a} + B_4 e^{-\alpha_2 x/a} +$$

$$+ B_5 e^{i\eta_3 x/a} + B_6 e^{-i\eta_3 x/a} + B_7 e^{(p+iq)x/a} +$$

$$+ B_8 e^{-(p+iq)x/a} + B_9 e^{(p-iq)x/a} + B_{10} e^{-(p-iq)x/a} \qquad (4.16)$$

Sustituyendo las constantes B_r por otras C_r de manera tal que las funciones trascendentes de x sean más simples:

$$W(x) = C_1 \cosh \frac{\alpha_1 x}{a} + C_2 \operatorname{senh} \frac{\alpha_1 x}{a} + C_3 \cosh \frac{\alpha_2 x}{a} +$$

$$+ C_4 \operatorname{senh} \frac{\alpha_2 x}{a} + C_5 \cos \frac{\alpha_2 x}{a} + C_6 \operatorname{sen} \frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ e^{px/a}\left(C_7 \cos \frac{qx}{a} + C_8 \operatorname{sen} \frac{qx}{a}\right) + e^{-px/a}\left(C_9 \cos \frac{qx}{a} +\right.$$

$$\left. + C_{10} \operatorname{sen} \frac{qx}{a}\right) \qquad (4.17)$$

Donde los valores de las constantes C_r dependen de las condiciones de borde en los extremos $x = 0$, $x = L$ de la cáscara.

Las expresiones correspondientes a las (4.16),(4.17) para $U(x)$, $\psi_x(x)$, $V(x)$, $\psi_\theta(x)$ pueden obtenerse observando que sus coeficientes son proporcionales a los correspondientes en $W(x)$, con factores de proporcionalidad κ_r, κ'_r, κ''_r, κ'''_r $(r = 1,2,\ldots,10)$ respectivamente. Lo que por otra parte resulta evidente observando las ecuaciones (4.6) y teniendo presente las (4.2'), por ser las primeras lineales en U_0, ψ_{x0}, V_0, $\psi_{\theta 0}$, W_0, y además homogéneas.

Precisamente las ecuaciones (4.6) permiten determi nar los valores numéricos de los mencionados factores de proporcionalidad, por medio del siguiente artificio.

En las (4.6) recordando que sus coeficientes son los elementos A_{ij} del determinante (4.8), se tiene para cada raiz α_r:

$$\frac{A_{11}}{A_{15}}\left(\frac{U}{W}\right) + \frac{A_{12}}{A_{15}}\left(\frac{\Psi_x}{W}\right) + \frac{A_{13}}{A_{15}}\left(\frac{V}{W}\right) + \frac{A_{14}}{A_{15}}\left(\frac{\Psi_\theta}{W}\right) = -1$$

$$\frac{A_{21}}{A_{25}}\left(\frac{U}{W}\right) + \frac{A_{22}}{A_{25}}\left(\frac{\Psi_x}{W}\right) + \frac{A_{23}}{A_{25}}\left(\frac{V}{W}\right) + \frac{A_{24}}{A_{25}}\left(\frac{\Psi_\theta}{W}\right) = -1$$

$$\frac{A_{31}}{A_{35}}\left(\frac{U}{W}\right) + \frac{A_{32}}{A_{35}}\left(\frac{\Psi_x}{W}\right) + \frac{A_{33}}{A_{35}}\left(\frac{V}{W}\right) + \frac{A_{34}}{A_{35}}\left(\frac{\Psi_\theta}{W}\right) = -1$$

$$\frac{A_{41}}{A_{45}}\left(\frac{U}{W}\right) + \frac{A_{42}}{A_{45}}\left(\frac{\Psi_x}{W}\right) + \frac{A_{43}}{A_{45}}\left(\frac{V}{W}\right) + \frac{A_{44}}{A_{45}}\left(\frac{\Psi_\theta}{W}\right) = -1 \quad (4.18)$$

Las (4.18) constituyen un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas y permiten determinar los factores κ_r, κ'_r, κ''_r, κ'''_r, (r = 1,2,...,5), si previamente en los coeficientes A_{ij} se introducen los valores de las raices, Tabla I.

Una vez en posesión de los factores de la Tabla I, se pueden escribir las expresiones analíticas de $U(x)$, $\Psi_x(x)$, $V(x)$, $\Psi_\theta(x)$ correspondientes a las (4.16) y (4.17) ya escritas para W(x). Veamos para U(x):

T A B L A I

	1ª RAIZ		2ª RAIZ		3ª RAIZ		4ª RAIZ		5ª RAIZ	
	$+\alpha_1$	$-\alpha_1$	$+\alpha_2$	$-\alpha_2$	$+i\eta_3$	$-i\eta_3$	$+(p+iq)$	$-(p+iq)$	$+(p-iq)$	$-(p-iq)$
$\left(\frac{U}{W}\right)_r$	K_1	$-K_1$	K_2	$-K_2$	iK_3	$-iK_3$	K_4+iK_5	$-(K_4+iK_5)$	K_4-iK_5	$-(K_4-iK_5)$
$\left(\frac{\Psi_x}{W}\right)_r$	K'_1	$-K'_1$	K'_2	$-K'_2$	iK'_3	$-iK'_3$	$K'_4+iK'_5$	$-(K'_4+iK'_5)$	$K'_4-iK'_5$	$-(K'_4-iK'_5)$
$\left(\frac{V}{W}\right)_r$	K''_1	K''_1	K''_2	K''_2	K''_3	K''_3	$K''_4+iK''_5$	$K''_4+iK''_5$	$K''_4-iK''_5$	$K''_4-iK''_5$
$\left(\frac{\Psi_\ell}{W}\right)_r$	K'''_1	K'''_1	K'''_2	K'''_2	K'''_3	K'''_3	$K'''_4+iK'''_5$	$K'''_4+iK'''_5$	$K'''_4-iK'''_5$	$K'''_4-iK'''_5$

$$U(x) = \kappa_1 B_1 e^{\alpha_1 x/a} - \kappa_1 B_2 e^{-\alpha_1 x/a} + \kappa_2 B_3 e^{\alpha_2 x/a} -$$

$$- \kappa_2 B_4 e^{-\alpha_2 x/a} + i\kappa_3 B_5 e^{i\eta_3 x/a} - i\kappa_3 B_6 e^{-i\eta_3 x/a} +$$

$$+ (\kappa_4 + i\kappa_5) B_7 e^{(p+iq)x/a} - (\kappa_4 + i\kappa_5) B_8 e^{-(p+iq)x/a} +$$

$$+ (\kappa_4 - i\kappa_5) B_9 e^{(p-iq)x/a} - (\kappa_4 - i\kappa_5) B_{10} e^{-(p-iq)x/a}$$

$$U(x) = \kappa_1 C_2 \cosh\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_1 C_1 \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2 C_4 \cosh\frac{\alpha_2 x}{a} +$$

$$+ \kappa_2 C_3 \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a} + \kappa_3 C_6 \cos\frac{\eta_3 x}{a} - \kappa_3 C_5 \operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ e^{px/a}\left[(\kappa_4 C_7 + \kappa_5 C_8)\cos\frac{qx}{a} + (\kappa_4 C_8 - \kappa_5 C_7)\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right] +$$

$$+ e^{-px/a}\left[(-\kappa_4 C_9 + \kappa_5 C_{10})\cos\frac{qx}{a} + (-\kappa_4 C_{10} -\right.$$

$$\left. - \kappa_5 C_9)\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right] \qquad (4.20)$$

Procediendo en forma análoga con las restantes expresiones, se tiene:

$$\Psi_x(x) = \kappa_1' C_2 \cosh\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_1' C_1 \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2' C_4 \cosh\frac{\alpha_2 x}{a} +$$

$$+ \kappa_2' C_3 \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a} + \kappa_3' C_6 \cos\frac{\eta_3 x}{a} - \kappa_3' C_5 \operatorname{senh}\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+e^{px/a}\left[\left(\kappa'_4 C_7+\kappa'_5 C_8\right)\cos\frac{qx}{a}+\left(\kappa'_4 C_8-\kappa'_5 C_7\right)\operatorname{sen}\frac{qx}{a}+\right.$$

$$\left.+e^{-px/a}\left[\left(-\kappa'_4 C_9+\kappa'_5 C_{10}\right)\cos\frac{qx}{a}+\left(-\kappa'_4 C_{10}-\kappa'_5 C_9\right)\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right]\right. \quad (4.21)$$

$$V(x)=\kappa''_1 C_1\cosh\frac{\alpha_1 x}{a}+\kappa''_1 C_2\operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a}+\kappa''_2 C_3\cosh\frac{\alpha_2 x}{a}+$$

$$+\kappa''_2 C_4\operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a}+\kappa''_3 C_5\cos\frac{\eta_3 x}{a}+\kappa''_3 C_6\operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a}+$$

$$+e^{px/a}\left[\left(\kappa''_4 C_7+\kappa''_5 C_8\right)\cos\frac{qx}{a}+\left(\kappa''_4 C_8-\kappa''_5 C_7\right)\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right]+$$

$$+e^{-px/a}\left[\left(\kappa''_4 C_9-\kappa''_5 C_{10}\right)\cos\frac{qx}{a}+\left(\kappa''_4 C_{10}+\kappa''_5 C_9\right)\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right]$$

$$\psi_\theta(x)=\kappa'''_1 C_1\cosh\frac{\alpha_1 x}{a}+\kappa'''_1 C_2\operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a}+\kappa'''_2 C_3\cosh\frac{\alpha_2 x}{a}+$$

$$+\kappa'''_2 C_4\operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a}+\kappa'''_3 C_5\cos\frac{\eta_3 x}{a}+\kappa'''_3 C_6\operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a}+$$

$$+e^{px/a}\left[\left(\kappa'''_4 C_7+\kappa'''_5 C_8\right)\cos\frac{qx}{a}+\left(\kappa'''_4 C_8-\kappa'''_5 C_7\right)\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right]+$$

$$+e^{-px/a}\left[\left(\kappa'''_4 C_9-\kappa'''_5 C_{10}\right)\cos\frac{qx}{a}+\left(\kappa'''_4 C_{10}+\kappa'''_5 C_9\right)\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right]$$

(4.21)

Conviene aclarar que los parámetros κ, κ', κ'', κ''', dependen no sólo de los valores de α_r sino también de h/a, ν, n y Ω.

En este punto vemos que el problema es completamente determinado una vez que se consigue determinar el factor de frecuencia Ω, y las constantes C_r que aparecen en las ecuaciones (4.17). (4.20), (4.21). Para éllo será necesario satisfacer las condiciones de borde, las cuales serán estudiadas a continuación.

4.3. Condiciones de borde

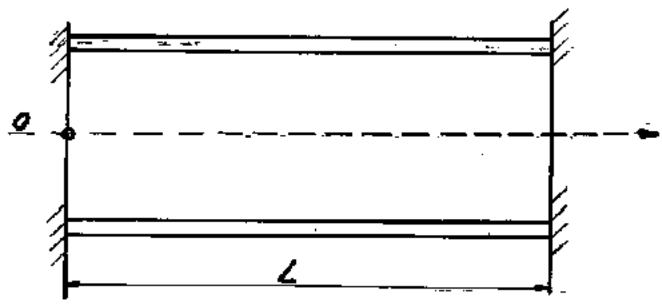
Las condiciones de borde resultan de la forma de vinculación en sus extremos $x = 0$, $x = L$. Dos formas diferentes de vinculación serán analizados en el presente trabajo:

1. Ambos extremos perfectamente empotrados
2. Ambos extremos simplemente apoyados

Los extremos de la cáscara están materializados por las circunferencias de radio a, resultantes de seccionar la superficie media de la misma con dos planos perpendiculares a su eje y correspondientes a las abscisas $x = 0$, $x = L$. Cada elemente infinitamente pequeño localizado sobre una cualquiera de esas circunferencias posee, como ya se vió en el Capítulo III, cinco movimientos posibles: tres traslaciones según las direcciones x, θ, z y dos rotaciones según los planos x, z y θ, z. Estos cinco movimientos corresponden a otros tantos grados de libertad.

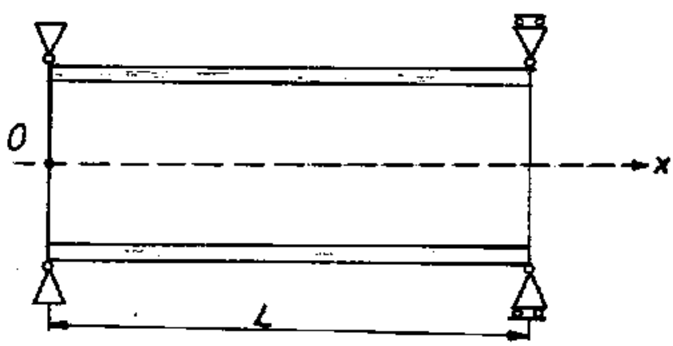
A cada restricción que se imponga a estos movimientos corresponderá una anulación de la expresión analítica que los representa. Por otra parte, a cada posible libertad de movimiento corresponderá una anulación de la expresión de la so licitación que por causa de una vinculación se transmitiría. Así se tiene:

1. Ambos extremos perfectamente empotrados



$$x = 0 \quad \begin{cases} u = 0 \\ \psi_x = 0 \\ v = 0 \\ \psi_\theta = 0 \\ w = 0 \end{cases} \qquad\qquad x = L \quad \begin{cases} u = 0 \\ \psi_x = 0 \\ v = 0 \\ \psi_\theta = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

2. Ambos extremos simplemente apoyados



$$x = 0 \begin{cases} N_x = 0 \\ M_x = 0 \\ v = 0 \\ \psi_\theta = 0 \\ w = 0 \end{cases} \qquad\qquad x = L \begin{cases} N_x = 0 \\ M_x = 0 \\ v = 0 \\ \psi_\theta = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Puede observarse que de la aplicación de las condiciones de borde resultarán diez ecuaciones lineales (cinco para cada extremo) en las diez constantes C_r que aparecen en las expresiones de $u, (a\psi_x)$, $v, (a\psi_\theta)$, w. Las diez ecuaciones son suficientes para determinar las diez constantes, lo cual rinde el problema determinado.

Por tratarse de ecuaciones homogéneas, para que exista otra solución que no sea la trivial es necesario que el determinante D de décimo orden formado con los coeficientes sea igual a cero.

Ahora bien, estos coeficientes dependen de las cantidades α_1, α_2, η_3, p y q, y también de la relación L/a, así como de h/a, ν, n, y Ω.

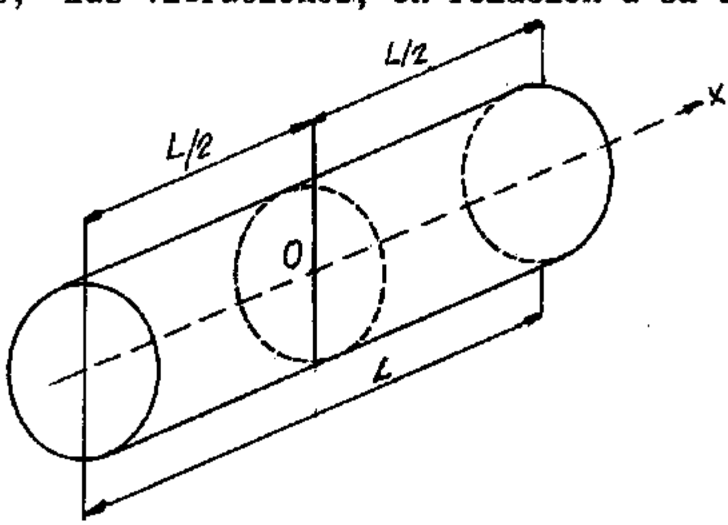
De aquí resulta el artifício que permite la evaluación numérica del factor de frecuencia Ω por medio de un proceso de aproximaciones sucesivas (trial and error procedure) En efecto, partiendo de una cáscara dada (h/a, ν, conocidos) y fijando el número de ondas circunferenciales (n, conocido) se da un valor arbitrario a Ω para, a continuación, pasando por la ecuación (4.12) obtener las raíces α_r y por el sistema (4.18) obtener los coeficientes κ_r, κ_r', κ_r'', κ_r''', los que junto con L/a y las condiciones de borde producen el determinante D.

Si el valor el valor de Ω escogido fué el correcto, el determinante al ser evaluado debe ser nulo. Si no se anula, el proceso se repite con otro Ω ajustado convenientemente, tantas veces como sea necesario hasta conseguir que D cambie de signo. El proceso continua hasta obtener Ω con el grado de exactitud que se desea.

Una vez conseguido el valor de Ω y consecuentemente, que el determinante D sea igual o muy próximo a cero, se está en condiciones de determinar las diez constantes C_r por medio de las diez ecuaciones homogéneas ya mencionadas.

Llegados a este punto, conviene hacer uso del siguiente artifício que permite reducir a cinco el orden del determinante D.

Si las condiciones de borde son idénticas en ambos extremos, y si se traslada el origen de coordenadas x a la sección del centro de la cáscara, es decir a la distancia L/2 de ambos extremos; las vibraciones, en relación a su configu



ración axial, pueden ser separadas en <u>modos simétricos</u> y <u>modos antisimétricos</u> [3].

a) Modos simétricos

Para que en la expresión de W(x), (4.17), desaparezcan las funciones impares y queden allí solamente funciones pares, es necesario que:

$$C_2 = C_4 = C_6 = 0 \ ; \qquad C_7 = C_9 \ ; \qquad C_8 = -C_{10}$$

Si $2C_7 = D_1$ y $2C_8 = D_2$ se tiene que las expresiones de $U(x)$, $\psi_x(x)$, $V(x)$, $\psi_\theta(x)$, para los modos simétricos son:

$$U(x) = \kappa_1 C_1 \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2 C_3 \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a} - \kappa_3 C_5 \operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ (\kappa_4 D_1 + \kappa_5 D_2)\operatorname{senh}\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} + (\kappa_4 D_2 - \kappa_5 D_1)\cosh\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}$$

$$\psi_x(x) = \kappa_1' C_1 \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2' C_3 \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a} - \kappa_3' C_5 \operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ (\kappa_4' D_1 + \kappa_5' D_2)\operatorname{senh}\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} + (\kappa_4' D_2 - \kappa_5' D_1)\cosh\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}$$

$$V(x) = \kappa_1'' C_1 \cosh\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2'' C_3 \cosh\frac{\alpha_2 x}{a} + \kappa_3'' C_5 \cos\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ (\kappa_4'' D_1 + \kappa_5'' D_2)\cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} + (\kappa_4'' D_2 - \kappa_5'' D_1)\operatorname{senh}\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}$$

$$\psi_\theta(x) = \kappa_1''' C_1 \cosh\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2''' C_3 \cosh\frac{\alpha_2 x}{a} + \kappa_3''' C_5 \cos\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ (\kappa_4''' D_1 + \kappa_5''' D_2) \cosh\frac{px}{a} \cos\frac{qx}{a} + (\kappa_4''' D_2 - \kappa_5''' D_1) \operatorname{senh}\frac{px}{a} \operatorname{sen}\frac{qx}{a}$$

$$W(x) = C_1 \cosh\frac{\alpha_1 x}{a} + C_3 \cosh\frac{\alpha_2 x}{a} + C_5 \cos\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ D_1 \cosh\frac{px}{a} \cos\frac{qx}{a} + D_2 \operatorname{senh}\frac{px}{a} \operatorname{sen}\frac{qx}{a} \qquad (4.22)$$

b) <u>Modos antisimétricos</u>

Para que aquí desaparezcan las funciones pares y queden sólo impares es necesario que:

$$C_1 = C_3 = C_5 = 0 \; ; \qquad C_7 = -C_9 \; ; \qquad C_8 = C_{10}$$

Si $2C_7 = D_2$ y $2C_8 = D_4$ (Conviene señalar que aquí C_7 y C_8 no son los mismos que aquéllos de los modos simétricos), se tiene:

$$U(x) = \kappa_1 C_2 \cosh\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2 C_4 \cosh\frac{\alpha_2 x}{a} + \kappa_3 C_6 \cos\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ (\kappa_4 D_3 + \kappa_5 D_4) \cosh\frac{px}{a} \cos\frac{qx}{a} + (\kappa_4 D_4 -$$

$$- \kappa_5 D_3) \operatorname{senh}\frac{px}{a} \operatorname{sen}\frac{qx}{a}$$

$$\psi_x(x) = \kappa_1' C_2 \cosh\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2' C_4 \cosh\frac{\alpha_2 x}{a} + \kappa_3' C_6 \cos\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ (\kappa_4' D_3 + \kappa_5' D_4) \cosh\frac{px}{a} \cos\frac{qx}{a} + (\kappa_4' D_4 -$$

$$- \kappa_5' D_3) \operatorname{senh}\frac{px}{a} \operatorname{sen}\frac{qx}{a}$$

$$V(x) = \kappa_1'' C_2 \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2'' C_4 \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a} + \kappa_3'' C_6 \operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ (\kappa_4'' D_3 + \kappa_5'' D_4) \operatorname{senh}\frac{px}{a} \cos\frac{qx}{a} + (\kappa_4'' D_4 -$$

$$- \kappa_5'' D_3) \cosh\frac{px}{a} \operatorname{sen}\frac{qx}{a}$$

$$\psi_\theta(x) = \kappa_1''' C_2 \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a} + \kappa_2''' C_4 \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a} + \kappa_3''' C_6 \operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ (\kappa_4''' D_3 + \kappa_5''' D_4) \operatorname{senh}\frac{px}{a} \cos\frac{qx}{a} + (\kappa_4''' D_4 -$$

$$- \kappa_5''' D_3) \cosh\frac{px}{a} \operatorname{sen}\frac{qx}{a}$$

$$W(x) = C_2 \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a} + C_4 \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a} + C_6 \operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a} +$$

$$+ D_3 \operatorname{senh}\frac{px}{a} \cos\frac{qx}{a} + D_4 \cosh\frac{px}{a} \operatorname{sen}\frac{qx}{a} \qquad (4.23)$$

Finalmente, para obtener las expresiones completas de u, $(a\psi_x)$, v, $(a\psi_\theta)$, w para los modos simétricos y antisimétricos deben multiplicarse aquellas escritas más arriba por sen $n\theta$ ó cos $n\theta$ según los casos y por $e^{i\omega t}$ en todos los casos.

4.3.1. Cáscara perfectamente empotrada en ambos extremos

Como ya se vió anteriormente las ecuaciones que resultan de la aplicación de estas condiciones de borde son:

en los extremos x = -L/2, x = L/2
$$\begin{cases} u(L/2,\theta,t) = 0 \\ \psi_x(L/2,\theta,t) = 0 \\ v(L/2,\theta,t) = 0 \\ \psi_\theta(L/2,\theta,t) = 0 \\ w(L/2,\theta,t) = 0 \end{cases}$$

a) Modos simétricos

$$\left(\kappa_1 \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_1 + \left(\kappa_2 \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_3 - \left(\kappa_3 \operatorname{sen}\frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_5 +$$
$$\left(\kappa_4 \operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} - \kappa_5 \cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_1 +$$
$$\left(\kappa_5 \operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} + \kappa_4 \cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_2 = 0$$

$$\left(k_1' \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_1 + \left(k_2' \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_3 - \left(k_3' \operatorname{sen}\frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_5 +$$

$$+ \left(k_4' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a} \cos\frac{qL}{2a} - k_5' \cosh\frac{pL}{2a} \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_1 +$$

$$+ \left(k_5' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a} \cos\frac{qL}{2a} + k_4' \cosh\frac{pL}{2a} \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_2 = 0$$

$$\left(k_1'' \cosh\frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_1 + \left(k_2'' \cosh\frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_3 - \left(k_3'' \cos\frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_5 +$$

$$+ \left(k_4'' \cosh\frac{pL}{2a} \cos\frac{qL}{2a} - k_5'' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a} \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_1 +$$

$$+ \left(k_5'' \cosh\frac{pL}{2a} \cos\frac{qL}{2a} + k_4'' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a} \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_2 = 0$$

$$\left(k_1''' \cosh\frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_1 + \left(k_2''' \cosh\frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_3 + \left(k_3''' \cos\frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_5 +$$

$$+ \left(k_4''' \cosh\frac{pL}{2a} \cos\frac{qL}{2a} - k_5''' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a} \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_1 +$$

$$+ \left(k_5''' \cosh\frac{pL}{2a} \cos\frac{qL}{2a} + k_4''' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a} \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_2 = 0$$

$$\left(\cosh\frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_1 + \left(\cosh\frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_3 + \left(\cos\frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_5 +$$

$$+ \left(\cosh\frac{pL}{2a} \cos\frac{qL}{2a}\right) D_1 + \left(\operatorname{senh}\frac{pL}{2a} \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_2 = 0 \quad (4.24)$$

El determinante D formado con los coeficientes (aquí factores de C_1, C_3, C_5, D_1, D_2) será, llamando T_{ij} al elemento de la fila i, columna j (i = 1,...,5; j = 1,...,5):

$$D = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \end{vmatrix}$$

Si D = 0, entonces el factor Ω dado a la entrada del determinante (4.8) corresponde exactamente a la frecuencia natural de la cáscara que se está analizando, y la resolución del sistema (4.24) permite determinar las constantes C_1, C_3, C_5, D_1, D_2 correspondientes.

b) Modos antisimétricos

$$\left(\kappa_1 \cosh\frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_2 + \left(\kappa_2 \cosh\frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_4 + \left(\kappa_3 \cos\frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_6 +$$

$$+ \left(\kappa_4 \cosh\frac{pL}{2a} \cos\frac{qL}{2a} - \kappa_5 \operatorname{senh}\frac{pL}{2a} \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_3 +$$

$$+ \left(\kappa_5 \cosh\frac{pL}{2a} \cos\frac{qL}{2a} + \kappa_4 \operatorname{senh}\frac{pL}{2a} \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_4 = 0$$

$$\left(\kappa_1' \cosh \frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_2 + \left(\kappa_2' \cosh \frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_4 + \left(\kappa_3' \cos \frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_6 +$$

$$+ \left(\kappa_4' \cosh \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} - \kappa_5' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a}\right) D_3 +$$

$$+ \left(\kappa_5' \cosh \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} + \kappa_4' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a}\right) D_4 = 0$$

$$\left(\kappa_1'' \operatorname{senh} \frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_2 + \left(\kappa_2'' \operatorname{senh} \frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_4 + \left(\kappa_3'' \operatorname{sen} \frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_6 +$$

$$+ \left(\kappa_4'' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} - \kappa_5'' \cosh \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a}\right) D_3 +$$

$$+ \left(\kappa_5'' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} + \kappa_4'' \cosh \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a}\right) D_4 = 0$$

$$\left(\kappa_1''' \operatorname{senh} \frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_2 + \left(\kappa_2''' \operatorname{senh} \frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_4 + \left(\kappa_3''' \operatorname{sen} \frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_6 +$$

$$+ \left(\kappa_4''' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} - \kappa_5''' \cosh \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a}\right) D_3 +$$

$$+ \left(\kappa_5''' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} + \kappa_4''' \cosh \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a}\right) D_4 = 0$$

$$\left(\operatorname{senh} \frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_2 + \left(\operatorname{senh} \frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_4 + \left(\operatorname{sen} \frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_6 +$$

$$\left(\operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a}\right) D_3 + \left(\cosh \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a}\right) D_4 = 0 \qquad (4.25)$$

En este caso, de la misma forma que para los modos simétricos, debe ser $D = 0$, y las constantes C_2, C_4, C_6, D_3 D_4 se obtienen resolviendo el sistema de las cinco ecuaciones homogéneas.

4.3.2. Cáscara simplemente apoyada en ambos extremos

En este caso las ecuaciones son un poco más complicadas que las anteriores, esto deriva de la existencia de dos condiciones de borde naturales ($N_x = 0$; $M_x = 0$) entre las cinco ecuaciones, a diferencia del caso de extremos empotrados donde las cinco condiciones eran geométricas.

en los extremos $x = -L/2$, $x = L/2$

$$\begin{cases} N_x(L/2, \theta, t) = 0 \\ M_x(L/2, \theta, t) = 0 \\ v(L/2, \theta, t) = 0 \\ \psi_x(L/2, \theta, t) = 0 \\ w(L/2, \theta, t) = 0 \end{cases}$$

Se tiene, de la sección 3.5. (Capítulo III):

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w\right) + \beta\,\frac{\partial(a\psi_x)}{\partial x}\right]$$

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a}\,\frac{\partial(a\psi_x)}{\partial x} + \frac{\nu}{a^2}\,\frac{\partial(a\psi_\theta)}{\partial \theta}\right]$$

La primera y la segunda condición de borde equiva len (para $x = \pm L/2$), respectivamente, a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w\right) + \beta\,\frac{\partial}{\partial x}(a\psi_x) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(a\psi_x) + \frac{\nu}{a}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(a\psi_\theta) = 0$$

a) Modos simétricos (Apéndice E)

$$\left[(\kappa_1\alpha_1 + \kappa_1'\beta\alpha_1 + \kappa_1''\nu n - \nu)\cosh\frac{\alpha_1 L}{2a}\right]C_1 + \left[(\kappa_2\alpha_2 + \right.$$

$$\left. + \kappa_2'\beta\alpha_2 + \kappa_2''\nu n - \nu)\cosh\frac{\alpha_2 L}{2a}\right]C_3 + \left[(-\kappa_3\eta_3 - \kappa_3'\beta\eta_3 + \right.$$

$$\left. + \kappa_3'''\nu n - \nu)\cos\frac{\eta_3 L}{2a}\right]C_5 + \left[(\kappa_4 p - \kappa_5 q + \kappa_4'\beta p + \kappa_5'\beta q + \right.$$

$$+ \kappa_4''\nu n - \nu)\cosh\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} + (-\kappa_4 q - \kappa_5 p - \kappa_4'\beta q -$$

$$\left. - \kappa_5'\beta p - \kappa_5''\nu n)\,\mathrm{senh}\frac{pL}{2a}\,\mathrm{sen}\frac{qL}{2a}\right]D_1 + \left[(\kappa_5 p + \kappa_4 q + \right.$$

$$+ \kappa_5'\beta p + \kappa_4'\beta q + \kappa_5''\nu n)\cosh\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} + (-\kappa_5 q + \kappa_4 p -$$

$$\left. - \kappa_5'\beta q + \kappa_4'\beta p + \kappa_4''\nu n - \nu)\,\mathrm{senh}\frac{pL}{2a}\,\mathrm{sen}\frac{qL}{2a}\right]D_2 = 0$$

$$\left[(\kappa_1\alpha_1 + \kappa_1'\alpha_1 + \kappa_1'''\nu n)\cosh\frac{\alpha_1 L}{2a}\right]C_1 + \left[(\kappa_2\alpha_2 + \kappa_2'\alpha_2 + \right.$$

$$+ \kappa_2''' \nu n) \cosh \frac{\alpha_2 L}{2a} \Big] C_3 + \Big[(-\kappa_3 \eta_3 - \kappa_3' \eta_3 + \kappa_3''' \nu n) \cdot$$

$$\cdot \cos \frac{\eta_3 L}{2a} \Big] C_5 + \Big[(\kappa_4 p - \kappa_5 q + \kappa_4' p - \kappa_5' q + \kappa_4''' \nu n) \cdot$$

$$\cdot \cosh \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} + (-\kappa_4 q - \kappa_5 p - \kappa_4' q - \kappa_5' p - \kappa_5''' \nu n) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a} \Big] D_1 + \Big[(\kappa_5 p + \kappa_4 q + \kappa_5' p + \kappa_4' q +$$

$$+ \kappa_5''' \nu n) \cosh \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} + (-\kappa_5 q + \kappa_4 p - \kappa_5' q +$$

$$+ \kappa_4' p + \kappa_4''' \nu n) \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a} \Big] \cdot D_2 = 0$$

$$\left(\kappa_1'' \cosh \frac{\alpha_1 L}{2a} \right) C_1 + \left(\kappa_2'' \cosh \frac{\alpha_2 L}{2a} \right) C_3 + \left(\kappa_3'' \cos \frac{\eta_3 L}{2a} \right) C_5 +$$

$$+ \left(\kappa_4'' \cosh \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} - \kappa_5'' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a} \right) D_1 +$$

$$+ \left(\kappa_5'' \cosh \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} + \kappa_4'' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a} \right) D_2 = 0$$

$$\left(\kappa_1''' \cosh \frac{\alpha_1 L}{2a} \right) C_1 + \left(\kappa_2''' \cosh \frac{\alpha_2 L}{2a} \right) C_3 + \left(\kappa_3''' \cos \frac{\eta_3 L}{2a} \right) C_5 +$$

$$+ \left(\kappa_4''' \cosh \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} - \kappa_5''' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a} \right) D_1 +$$

$$+ \left(\kappa_5''' \cosh \frac{pL}{2a} \cos \frac{qL}{2a} + \kappa_4''' \operatorname{senh} \frac{pL}{2a} \operatorname{sen} \frac{qL}{2a} \right) D_2 = 0$$

$$\left(\cosh\frac{\alpha_1 L}{2a}\right)C_1+\left(\cosh\frac{\alpha_2 L}{2a}\right)C_3+\left(\cos\frac{\eta_3 L}{2a}\right)C_5+$$
$$+\left(\cosh\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a}\right)D_1+\left(\operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right)D_2=0 \quad (4.26)$$

b) Modos antisimétricos (Apéndice E)

$$\left[\left(\kappa_1\alpha_1+\kappa_1'\beta\alpha_1+\kappa_1''\nu n-\nu\right)\operatorname{senh}\frac{\alpha_1 L}{2a}\right]C_2+\left[\left(\kappa_2\alpha_2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\kappa_2'\beta\alpha_2+\kappa_2''\nu n-\nu\right)\operatorname{senh}\frac{\alpha_2 L}{2a}\right]C_4+\left[\left(-\kappa_3\eta_3-\kappa_3'\beta\eta_3+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\kappa_3''\nu n-\nu\right)\operatorname{sen}\frac{\eta_3 L}{2a}\right]C_6+\left[\left(\kappa_4 p-\kappa_5 q+\kappa_4'\beta p-\kappa_5'\beta q+\right.\right.$$
$$\left.+\kappa_4''\nu n-\nu\right)\operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a}+\left(-\kappa_4 q-\kappa_5 p-\kappa_4'\beta q-\right.$$
$$\left.\left.-\kappa_5'\beta p-\kappa_5''\nu n\right)\cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right]D_3+\left[\left(\kappa_5 p-\kappa_4 q+\right.\right.$$
$$\left.+\kappa_5'\beta p+\kappa_4'\beta q+\kappa_5''\nu n\right)\operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a}+\left(-\kappa_5 q+\right.$$
$$\left.\left.+\kappa_4 p-\kappa_5'\beta q+\kappa_4'\beta p+\kappa_4''\nu n-\nu\right)\cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right]D_4=0$$

$$\left[\left(\kappa_1\alpha_1+\kappa_1'\alpha_1+\kappa_1'''\nu n\right)\operatorname{senh}\frac{\alpha_1 L}{2a}\right]C_2+\left[\left(\kappa_2\alpha_2+\kappa_2'\alpha_2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\kappa_2'''\nu n\right)\operatorname{senh}\frac{\alpha_2 L}{2a}\right]C_4+\left[\left(-\kappa_3\eta_3-\kappa_3'\eta_3+\kappa_3'''\nu n\right)\operatorname{sen}\frac{\eta_3 L}{2a}\right]C_6+$$

$$+\left[\left(\kappa_4 p - \kappa_5 q + \kappa_4' p - \kappa_5' q + \kappa_4''' \nu n\right) \operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} + \right.$$

$$\left. + \left(-\kappa_4 q - \kappa_5 p - \kappa_4' q - \kappa_5' p - \kappa_5''' \nu n\right)\cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right] D_3 +$$

$$+\left[\left(\kappa_5 p + \kappa_4 q + \kappa_5' p + \kappa_4' q + \kappa_5''' \nu n\right)\operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} + \right.$$

$$+\left(-\kappa_5 q + \kappa_4 p - \kappa_5' q + \kappa_4' p + \kappa_4''' \nu n\right)\cosh\frac{pL}{2a} \cdot$$

$$\left. \cdot \operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right] D_4 = 0$$

$$\left(\kappa_1'' \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_2 + \left(\kappa_2'' \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_4 + \left(\kappa_3'' \operatorname{sen}\frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_6 +$$

$$+\left(\kappa_4'' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} - \kappa_5'' \cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_3 +$$

$$+\left(\kappa_5'' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} + \kappa_4'' \cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_4 = 0$$

$$\left(\kappa_1''' \operatorname{senh}\frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_2 + \left(\kappa_2''' \operatorname{senh}\frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_4 + \left(\kappa_3''' \operatorname{sen}\frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_6 +$$

$$+\left(\kappa_4''' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} - \kappa_5''' \cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_3 +$$

$$+\left(\kappa_5''' \operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a} + \kappa_4''' \cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right) D_4 = 0$$

$$\left(\operatorname{senh}\frac{\alpha_1 L}{2a}\right) C_2 + \left(\operatorname{senh}\frac{\alpha_2 L}{2a}\right) C_4 + \left(\operatorname{sen}\frac{\eta_3 L}{2a}\right) C_6 +$$

$$\left(\operatorname{senh}\frac{pL}{2a}\cos\frac{qL}{2a}\right)D_3+\left(\cosh\frac{pL}{2a}\operatorname{sen}\frac{qL}{2a}\right)D_4=0 \tag{4.27}$$

C A P I T U L O V

CONCLUSIONES

Si se comparan las soluciones analíticas obtenidas en el presente trabajo con aquéllas obtenidas por otros autores se pueden hacer interesantes observaciones.

Con relación a los trabajos que dejan de lado el efecto de las deformaciones por esfuerzos cortantes y la inercia de rotación se observa que las soluciones a investigar son cinco en lugar de tres. Esto se debe a la presencia de dos variables a más, ψ_x y ψ_θ, que no pueden ser representadas por las derivadas primeras de w con relación a x y a θ, como se hace en los trabajos mencionados.

Por otro lado son cinco las ecuaciones diferenciales del movimiento disponibles para determinar las soluciones y las cinco frecuencias naturales.

Este es un hecho que era de esperarse. Ciertamente, a un aumento de los efectos a considerar corresponde un aumento del número y complicación de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno.

Como el determinante (4.8) y la ecuación que de el deriva son de quinto grado en ω^2, existen cinco frecuencias naturales que corresponden a características físicas y geométricas dadas de la cáscara, a un n preestablecido, y que satisfacen a las condiciones de borde.

Con relación a las raices de la ecuación (4.10), ellas presentan dos raices a más que en los análisis más simles: son diez en lugar de ocho. Las raices suplementarias son reales, con el mismo valor absoluto, signos opuestos, y con un orden de magnitud apreciablemente mayor en relación a las restantes.

APENDICE A

DETERMINACION DE LOS ESFUERZOS Y MOMENTOS ACTUANTES EN FUNCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS Y ROTACIONES

En las integraciones indicadas por las (3.10),(3.11) se hará la siguiente simplificación. En el desarrollo en serie de la función trascendente,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right)$$

que aparecerá en el proceso de integración bajo la forma:

$$\ln \frac{1+h/2a}{1-h/2a} = \frac{h}{a}\left(1 + \frac{h^2}{12a^2} + \frac{h^4}{80a^4} + \cdots\right)$$

sólo se considerará hasta el término $h^2/12a^2$ despreciando $h^4/80a^4$ y los siguientes*, de tal manera que será:

---

*En efecto, $h^4/80a^4$ carece de significación numérica delante de la unidad. Para el caso de una cáscara con $h/a = 0.10$ caso límite de la validez de la teoría de las cáscaras delga

$$\ln \frac{1+h/2a}{1-h/2a} = \frac{h}{a}\left(1 + \frac{h^2}{12a^2}\right)$$

Antes de comenzar con las integraciones propiamente dichas conviene observar que:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} 1.\,dz = h \qquad\qquad \int_{-h/2}^{+h/2} z.\,dz = 0$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z^2\,dz = \frac{h^3}{12} \qquad\qquad \int_{-h/2}^{+h/2} z^3\,dz = 0$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} (a-z)\,dz = ah$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z(a-z)\,dz = -\frac{h^3}{12}$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z^2(a-z)\,dz = \frac{ah^3}{12}$$

---

das (a los efectos prácticos h/a será simpre menor), se tiene:

$h^2/12a^2 = 0.000833$; $\qquad$ $h^4/80a^4 = 0.00000125$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z(a-z)^2\, dz = -2a\frac{h^3}{12}$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} (a-z)^3\, dz = a^3 h + 3a\frac{h^3}{12}$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{1}{a-z}\, dz = \frac{h}{a} + \frac{h^3}{12a^3}$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{z}{a-z}\, dz = \frac{h^3}{12\, a^2}$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{z^2}{a-z}\, dz = \frac{h^3}{12a}$$

La integración de las tensiones a lo largo del espesor h da:

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \frac{a-z}{a}\, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta)\frac{a-z}{a}\, dz =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{+h/2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{1}{a-z}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{w}{a-z}\right)\right]\frac{a-z}{a}\, dz = \frac{E}{1-\nu^2}\left[h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{h^3}{12}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\nu}{a} h\frac{\partial v}{\partial \theta} -\right.$$

$$- \nu \frac{h}{a} w \Big] = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w\right) + \frac{h^2}{12a^2}\, a \,\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right]$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta \, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x)\, dz =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{+h/2}\left[\left(\frac{1}{a-z}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{w}{a-z}\right) + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - z\,\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right)\right] dz = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial \theta}\left(\frac{h}{a} + \frac{h^3}{12a^3}\right) - a\,\frac{h^3}{12a^3}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{h}{a} + \frac{h^3}{12a^3}\right) w + \nu h \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{w}{a}\right)\right]$$

$$N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{x\theta}\,\frac{a-z}{a}\, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} G\gamma_{x\theta}\,\frac{a-z}{a}\, dz =$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)}\int_{-h/2}^{+h/2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - z\,\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{a-z}\,\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\right)\frac{a-z}{a}\, dz ,$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)}\left[h\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{h^3}{12}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{a}h\frac{\partial u}{\partial \theta}\right] = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial v}{\partial x} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12a^2}a\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x}\right]$$

$$N_{\theta x} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta x}\, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} G\,\gamma_{\theta x}\, dz = \frac{E}{2(1+\nu)}\int_{-h/2}^{+h/2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{a-z}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\right) dz = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[h\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{h}{a} + \frac{h^3}{12a^3}\right)\frac{\partial u}{\partial \theta} -\right.$$

$$\left. - \frac{h^3}{12a^2}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\right] = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta}\psi_x\right)\right]$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \frac{a-z}{a} z\, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta)\frac{a-z}{a} z\, dz =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{+h/2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{1}{a-z}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{w}{a-z}\right)\right]\frac{a-z}{a} z\, dz =$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\nu}{a}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_z \, z \, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x\right) z \, dz = \frac{E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{+h/2}\left[\left(\frac{1}{a-z}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{w}{a-z}\right) + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right)\right] z \, dz =$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{a^2} w\right)$$

$$M_{x\theta} = -\int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{x\theta} \frac{a-z}{a} z \, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} G \gamma_{x\theta} \frac{a-z}{a} z \, dz =$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)}\int_{-h/2}^{+h/2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{a-z}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\right)\frac{a-z}{a} z \, dz =$$

$$= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\right)$$

$$M_{\theta x} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta x} \, z \, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} G \gamma_{\theta x} \, z \, dz = \frac{E}{2(1+\nu)}\int_{-h/2}^{+h/2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a-z}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{z}{a-z}\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\right) z \, dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x}\right)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \frac{a-z}{a}\, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} G\,\gamma_{xz} \frac{a-z}{a}\, dz =$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{+h/2} \left(-\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \frac{a-z}{a}\, dz = \frac{E}{2(1+\nu)} k' \Big[-h\psi_x +$$

$$+ h \frac{\partial w}{\partial x}\Big] = k' \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(-\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$Q_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta z}\, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} G\,\gamma_{\theta z}\, dz = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{1}{a-z} \frac{\partial w}{\partial \theta} -\right.$$

$$\left. - \psi_\theta + \frac{v}{a-z} - \frac{z}{a-z} \psi_\theta\right) dz = k'' \frac{Eh}{2(1+\nu)} \Big[\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta +$$

$$+ \frac{1}{a} v + \frac{h^2}{12 a^2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi_\theta + \frac{1}{a} v\right)\Big]$$

A P E N D I C E B

DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES k' y k"

Los factores k' y k", llamados factores de corte, son coeficientes adimensionales. Para el caso de las vigas el factor k depende únicamente de la forma de la sección transversal.

Para la determinación de los citados factores se tratará aquí de extrapolar las hipótesis y consideraciones que normalmente se hacen para las vigas, al elemento infinitesimal de cáscara en las direcciones circunferencial y axial.

Dirección circunferencial

La sección transversal del elemento se muestra en la Fig. B.1. La expresión que da el factor k en las vigas es[15]:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{A\ i^4} \int_{z'}^{z''} \frac{S_i^2}{b_i}\, dz$$

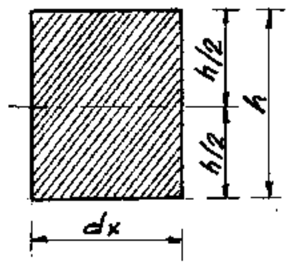


Fig. B.1

Donde:

- A   area de la seción transversal
- i   radio de giro de la sección
- S_i momento estático de la parte de la sección para la cual $|z| > |z_i|$
- b_i ancho de la sección para z_i

En el presente caso se tiene:

$$A = dx \cdot h \; ; \qquad i^2 = \frac{I}{A} = \frac{dx \cdot h^3}{12\, dx \cdot h} = \frac{h^2}{12}$$

$$S_i = \frac{dx}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \; ; \qquad b_i = dx$$

$$\frac{1}{k''} = \frac{1}{dx \cdot h \cdot \frac{h^4}{144}} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{dx^2}{4} \frac{(h^2/4 - z^2)^2}{dx}\, dz = \frac{6}{5}$$

$$k'' = \frac{5}{6} \cong 0.833$$

Dirección axial

La sección transversal se muestra en la figura B.2; de allí se obtiene que:

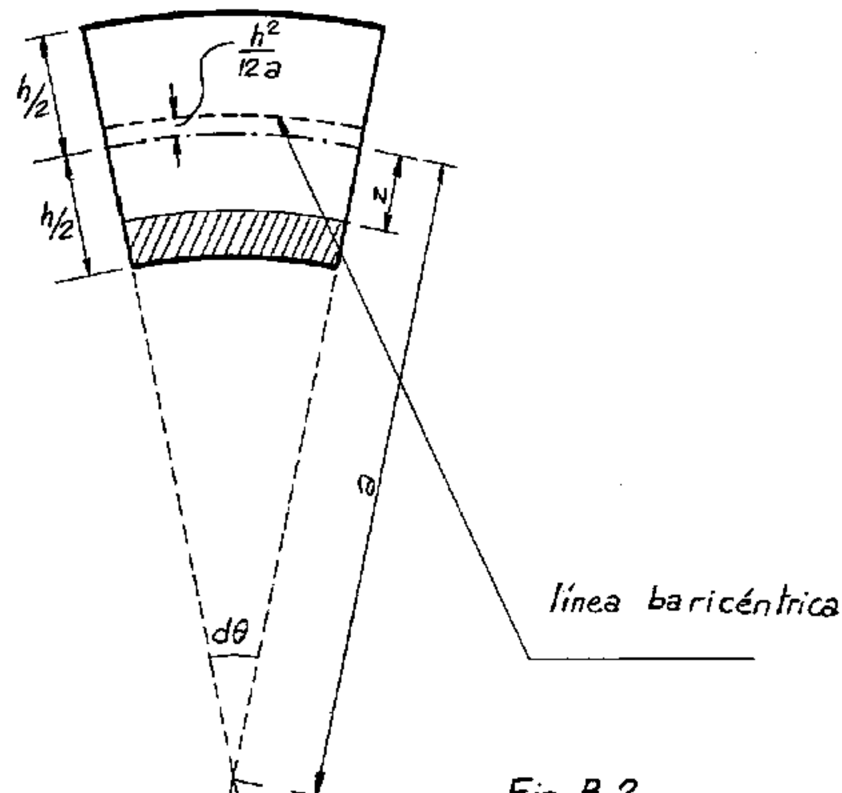


Fig. B.2

$$A = a\, d\theta . h$$

$$I = \int_{-h/2}^{+h/2} (a-z)\left(z + \frac{h^2}{12a}\right)^2 d\theta\, dz = \left(\frac{a h^3}{12} - \frac{h^5}{144 a}\right) d\theta$$

$$i^2 = \frac{I}{A} = \frac{\left(\frac{a h^3}{12} - \frac{h^3}{144 a}\right) d\theta}{a\, d\theta\ h} = \frac{h^2}{12} - \frac{h^4}{144 a^2} = \frac{h^2}{12}(1-\beta)$$

$$S_i = \int_{z}^{h/2} (a-z)\left(z + \frac{h^2}{12a}\right) d\theta \, dz = \frac{d\theta}{24}\left[8z^3 - 12(1-\beta)az^2 - \right.$$

$$\left. -2h^2 z + 3(1-\beta)ah^2\right]$$

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{A\ i^4}\int_{z'}^{z''} \frac{S_i^2}{b_i}\, dz = \frac{(12)^2}{4a\, d\theta .\, h\, h^4 (1-\beta)^2}\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{(d\theta)^2}{(24)^2}\left\{ 64 z^6 - \right.$$

$$-192(1-\beta)az^5 + \left[144(1-\beta)^2 a^2 - 32h^2\right] z^4 + 96(1-\beta)ah^2 z^3 +$$

$$+\left[4h^4 - 72(1-\beta)^2 a^2 h^2\right] z^2 - 12(1-\beta)ah^4 z + 9(1-\beta)^2 .$$

$$\left. .\, a^2 h^4 \right\} \frac{dz}{(a-z)\, d\theta}$$

Si es:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{z^3}{(a-z)}\, dz = 0 \; ; \qquad \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{z^4}{a-z}\, dz = 0$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{z^5}{a-z}\, dz = -\frac{h^5}{80} \; ; \qquad \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{z^6}{a-z}\, dz = -\frac{h^5}{80} a$$

entonces:

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{(1-\beta)^2}\left[\frac{368 - 592\beta}{320}\right]$$

$$k' = \frac{(1-\beta)^2}{1.15 - 1.85\beta} = \sim \frac{1 - 2\beta}{1.15 - 1.85\beta}$$

La fórmula obtenida da aproximadamente para β cualquiera:

$$k' = \sim 0.87$$

MIRSKY y HERRMANN[5] usando un procedimiento diferente ("thikness-shear motions") determinaron k' y k" para el caso de cáscaras cilíndricas circulares. La expresión aproximada es la siguiente:

$$k' = k'' \cong \frac{\pi^2}{12} = \sim 0.823$$

Por estar este último valor numérico aproximadamente de acuerdo con k" por nosotros determinado, es precisamente el valor del factor de corte adoptado en el presente trabajo.

A P E N D I C E   C

DETERMINANTE Y ECUACION ALGEBRAICA PARA LA DETERMINACION DE LOS α_r

El determinante (4.8) puede ser expresado por (C.1) aislando los términos que contienen α en sus elementos, y poniendo $\nu = 0.3$, $k' = k'' = 0.82$, donde:

$$S_1 = -0.35(1+\beta)n^2 + \Omega^2$$

$$S_2 = 0.35\beta n^2$$

$$S_3 = 0.35\beta n^2 - 0.287 + \beta\Omega^2$$

$$S_4 = (1+\beta)(n^2 + 0.287) - \Omega^2$$

$$S_5 = -\beta n^2 - 0.287(1+\beta)$$

$$S_6 = -1.287(1+\beta)n$$

$$
\begin{vmatrix}
\alpha^2+S_1 & \beta\alpha^2+S_2 & S_{10}\alpha & 0 & -0.3\alpha \\
\beta\alpha^2+S_2 & \beta\alpha^2+S_3 & 0 & S_{11}\alpha & 0.287\alpha \\
S_{10}\alpha & 0 & -0.35\alpha^2+S_4 & -0.35\beta\alpha^2+S_5 & S_6 \\
0 & S_{11}\alpha & -0.35\beta\alpha^2+S_5 & -0.35\beta\alpha^2+S_7 & S_8 \\
-0.3\alpha & 0.287\alpha & S_6 & S_8 & -0.287\alpha^2+S_9
\end{vmatrix}
\qquad (C.1)
$$

$$S_7 = \beta n^2 + 0.287(1+\beta) - \beta\Omega^2$$

$$S_8 = (1.2870\beta + 0.287)n$$

$$S_9 = (1+\beta)(0.287n^2 + 1) - \Omega^2$$

$$S_{10} = 0.65\,n$$

$$S_{11} = 0.65\,\beta n$$

$$P_1 = \beta S_4 - 0.35(\beta S_1 + S_3)$$

$$P_2 = S_4(\beta S_1 + S_3) - 0.35\,S_1 S_3$$

$$Q_1 = -0.35\beta S_7 - 0.35\beta P_1$$

$$Q_2 = P_1 S_7 - 0.35\beta P_2$$

$$Q_3 = P_2 S_7 - 0.35\,\beta S_1 S_3 S_4$$

$$P_3 = 0.35\,S_9 - 0.287\,S_4$$

$$P_4 = \beta(0.2009\,S_5 + 0.1225\,\beta S_9)$$

$$P_5 = -0.287\,S_5^2 - 0.70\,\beta S_5 S_9$$

$$P_6 = R_1 = \beta(\beta S_9 - 0.574\,S_2)$$

$$P_7 = R_2 = 2\beta S_2 S_9 - 0.287 S_2^2$$

$$R_3 = R_{10} = 0.35(S_7 + \beta S_4)$$

$$R_4 = 0.35\beta S_9 + 0.287 S_7$$

$$R_5 = \beta S_5 - 0.35\beta S_2$$

$$R_6 = 0.287 S_5 + 0.35\beta S_9$$

$$R_7 = \beta S_4 - 0.35 S_2$$

$$R_8 = \beta(S_5 - 0.35 S_3)$$

$$R_9 = \beta S_1 + S_3$$

Ahora se pueden escribir los coeficientes a_k (k=0, 1,2,...,5) de las ecuaciones (4.10) y (4.12) con las expresio nes anteriores, expandiendo el determinante (C.1) y ordenando los términos por potencias decrecientes de α:

$$a_0 = -0.0351575\beta^2 + 0.07032\beta^3 - 0.3516\beta^4$$

$$a_1 = -0.287 Q_1 - 0.10045 S_{11}^2 - \beta(P_4 + 0.0100902) -$$
$$-0.1225\beta P_6(1-\beta) - 0.0220293\beta^2 + \beta^2(0.1225 S_9 +$$
$$+0.0351575 S_3 - 0.287 R_3 - 0.10045 S_{10}^2 - 0.2009 S_{10} S_{11}) +$$

$$+0.0321195\,\beta^3 + \beta^3(0.2009\,S_5 + 0.0351575\,S_1)$$

$$a_2 = Q_1 S_9 - 0.287\,Q_2 + 0.35\,\beta S_8^2(1-\beta) + 0.35\,\beta^2(1-\beta)S_6^2 +$$
$$+ S_{11}^2(P_3 - 0.0315) + S_{10}^2(\beta(R_4 - 0.10045\,S_3 - 0.0288195) -$$
$$- 0.287\,S_{11}^2) + S_1(\beta(0.0100902(\beta-1) - P_4) -$$
$$- 0.10045\,S_{11}^2) - \beta P_5 - S_3(0.011025\,\beta(1-\beta) + P_4 -$$
$$- 0.0351575\,\beta^2 S_1) - 0.1225\,P_7\,\beta(1-\beta) - \beta S_5(0.70\,P_6 +$$
$$+ 0.287\,\beta S_5 + 0.18354\,\beta + 0.0576583) + 0.287\,\beta^2 S_4 S_7 +$$
$$+ R_3(R_1 + 0.2622\,\beta + 0.082369) + \beta S_6 S_{11}(0.21\,\beta +$$
$$+ 0.2009) - \beta S_{10} S_{11}(0.2009\,S_2 - 2R_6 - 0.06027) -$$
$$- 0.70\,\beta^2 S_6 S_8(1-\beta) - S_8 S_{11}(0.21\,\beta + 0.2009) -$$
$$- 0.4109\,\beta^2 S_8 S_{10} + 0.4109\,\beta^2 S_6 S_{10} - 0.0210945\,\beta S_2(1-\beta)$$

$$a_3 = S_9(Q_2 - \beta S_5^2) - 0.287\,Q_3 + S_8^2(-P_1 + \beta(\beta S_4 - 0.70\,S_2 +$$
$$+ S_{10}^2)) - \beta S_6^2 S_7(1-\beta) + \beta S_1 S_6(0.35\,\beta S_6 + 0.2009\,S_{11}) +$$
$$+ 0.35\,\beta S_6^2(S_3 - 2\beta S_2) + S_{11}^2(0.09\,S_4 + P_3 S_1 + S_6(S_6 +$$
$$+ 0.6\,S_{10}) + S_9(S_{10}^2 - S_4)) - P_5(\beta S_1 + S_3) - P_4 S_1 S_3 +$$
$$+ 0.1225\,\beta S_2^2 S_9(\beta-1) - \beta S_5(0.70\,P_7 + 0.063\,S_3 +$$

$$+0.0576583S_1+0.12054S_2\Big)+\big(P_6+0.2622\beta+$$
$$+0.082369\big)\cdot\big(S_5^2-S_4S_7\big)+R_3\big(R_2+0.09S_3\big)+R_4S_3S_{10}^2-$$
$$-S_7S_{10}^2\big(\beta S_9-0.082369\big)+0.082369R_3S_1-S_6S_{11}\big(0.6R_5+$$
$$+0.574S_5\big)-S_5S_{10}S_{11}\big(2\beta S_9+0.1722\big)+2S_2S_{10}\big(R_6S_{11}+$$
$$+0.10045\beta(S_6-S_8)\big)+2\beta S_6S_8\big(S_{10}S_{11}+\beta(0.70S_2-S_5)+$$
$$+S_5-0.35R_9\big)+S_8S_{11}\big(0.6R_7+0.574\big(S_4-0.35S_1-$$
$$-S_{10}^2\big)\big)+\beta S_{10}\big(0.574S_5S_8+0.21S_3S_6\big)-1.1740\beta S_6S_7S_{10}+$$
$$+0.1722R_{10}S_2+0.6R_8S_8S_{10}$$

$$a_4=S_9\big(Q_3+R_3S_2^2\big)-S_1S_4S_7\big(0.287S_3+0.082369\big)+$$
$$+S_8^2\big(-P_2+S_2\big(2\beta S_4-0.35S_2\big)+S_3S_{10}^2\big)-\big(\beta S_1+$$
$$+S_3\big)\cdot\big(S_6^2S_7+S_5^2S_9\big)+S_1S_6\big(S_6\big(0.35\beta S_3+S_{11}^2\big)-$$
$$-0.574S_1S_5\big)+S_1S_4S_{11}\big(0.574S_8-S_9S_{11}\big)+S_5^2\big(0.09S_3+$$
$$+0.082369S_1\big)+0.6S_3S_5S_8S_{10}-S_1S_3\big(P_5+0.70\beta S_6S_8\big)-$$
$$-S_2S_5\big(S_9\big(0.70\beta S_2+2S_{10}S_{11}\big)+S_6\big(0.6S_{11}+4\beta S_8\big)-$$
$$-0.574S_8S_{10}-0.1722S_5\big)+S_5\big(S_5P_7+2R_9S_6S_8-$$
$$-S_4S_7\big(R_2+0.09S_3+0.1722S_2\big)+S_2S_6\big(\beta\big(S_6\big(2S_7-$$
$$-0.35S_2\big)-0.70\beta S_2S_8-0.574S_7S_{10}\big)-S_3S_7S_{10}\big(S_{10}S_9+$$

$$+ 0.6 S_6) + S_2 S_8 S_{11} (2 S_6 S_{10} + 0.6 S_4)$$

$$a_5 = S_1 S_3 \left(S_4 (S_7 S_9 - S_8^2) + S_6 (2 S_5 S_8 - S_7 S_6) - S_5^2 S_9 \right) +$$

$$+ S_2^2 \left(S_9 (S_5^2 - S_4 S_7) + S_6^2 S_7 + S_4 S_8^2 - 2 S_5 S_6 S_8 \right)$$

A P E N D I C E   D

SOBRE LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA

La ecuación que resulta de expandir el determinante (4.8) e igualarlo a cero es:

$$a_0\,\alpha^{10} + a_1\,\alpha^8 + a_2\,\alpha^6 + a_3\,\alpha^4 + a_4\,\alpha^2 + a_5 = 0 \qquad (D.1)$$

Se trata de una ecuación algebraica de quinto grado en α^2, con todos los coeficientes a_k reales (Apéndice C). Sustituyendo α^2 por α^* resulta:

$$P_5(\alpha^*) \equiv a_0\alpha^{*5} + a_1\,\alpha^{*4} + a_2\,\alpha^{*3} + a_3\,\alpha^{*2} + a_4\alpha^* + a_5 = 0 \qquad (D.2)$$

La evaluación numérica de los coeficientes a_k (siendo k = 0,1,2,...,5) para diferentes conjuntos de valores h/a, n y Ω (siendo los valores para cada conjunto congruentes entre ellos) da invariablemente:

$$a_0 > 0; \qquad a_1 < 0\,; \qquad a_2 > 0;$$

$$a_3 < 0 ; \qquad a_4 > 0 ; \qquad a_5 > 0 ; \qquad (D.3)$$

Con la condición de que siempre se cumplan las relaciones (D.3), sobre las raices del polinomio se pueden hacer las siguientes observaciones, válidas para polinomios con coeficientes reales (DURAND[14] p.156):

1. Dado que las raices complejas de un polinomio real se presentan siempre de a pares conjugados se tiene la siguiente regla:

   "Si el grado del polinomio es impar admite siempre una raíz real".

   como en $P_5(\alpha^*)$ el grado es igual a cinco, luego admite por lo menos una raíz real.

2. Regla de los signos de Descartes

   "El número de raices reales positivas no puede exceder al número de cambios de signo que se observan siguiendo la sucesión de coeficientes del polinomio, análogamente, el número de raices reales negativas no puede exceder al número de cambios de signos en los coeficientes cuando se sustituye x por -x ".

Para $P_5(\alpha^*)$

raices reales positivas (+,-,+,-,+,+) 4 cambios signo

raices reales negativas (-,-,-,-,-,+) 1 cambio signo

Se tiene por lo tanto

número máximo de raices reales positivas: 4

número máximo de raices reales negativas: 1

3. Regla de Du Gua

"Si el cuadrado de un coeficiente intermediario es inferior o igual al producto de los coeficientes vecinos, existen raices imaginarias".

Para aplicar esta regla veamos uno de los conjuntos de valores de a_k (evaluado con las expresiones del Apéndice C):

Para $\beta = 0.333 \times 10^{-6}$; $n = 4$; $\Omega = 0.894 \times 10^{-2}$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0.100 \times 10^{1} \\
a_1 &= -0.246 \times 10^{7} \\
a_2 &= 0.164 \times 10^{9} \\
a_3 &= -0.672 \times 10^{13} \\
a_4 &= 0.681 \times 10^{16} \\
a_5 &= 0.213 \times 10^{11}
\end{aligned}
$$

resulta: $a_1 . a_3 \cong 0.165 \times 10^{20}$

$$a_2^2 \cong 0.027 \times 10^{18}$$

como $a_1 . a_3 > a_2^2$ luego, existen raices imaginarias

Se observa que las raices imaginarias sólo pueden presentarse como pares de complejas conjugadas.

4. <u>Estudio gráfico</u>

Por ser $a_o > 0$ factor de α^{*5} en el polinomio, se tiene para $\alpha^* = +\infty$, y para $\alpha^* = -\infty$:

$$P_5(+\infty) = +\infty \; ; \qquad P_5(-\infty) = -\infty$$

Si a éllo se agrega que $a_5 > 0$ se tiene, graficando groseramente el polinomio; Fig. D.1 :

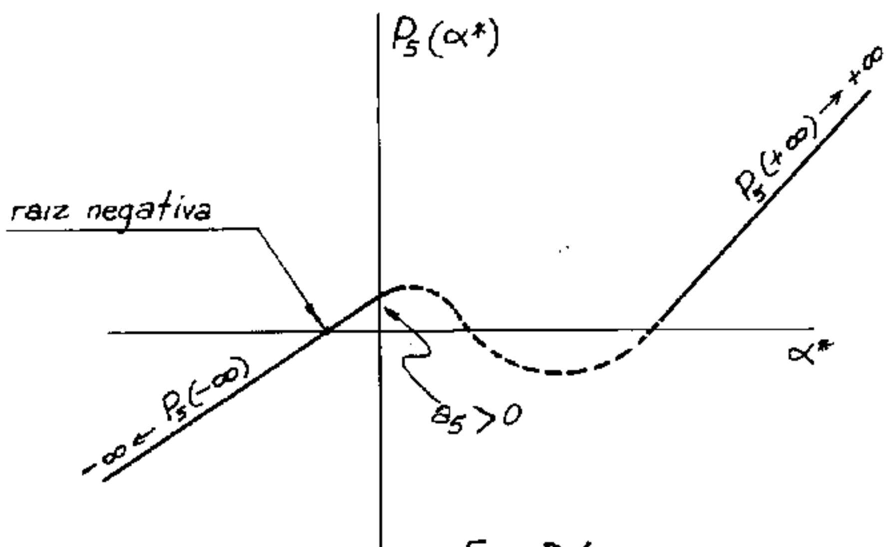


Fig. D.1

Se concluye que <u>existe una raiz real negativa</u>.

Del análisis de las observaciones 1, 2, 3, 4 se concluye que las dos únicas combinaciones posibles de raices son:

a) 1 raiz real negativa $\begin{cases} \text{2 raices reales positivas} \\ \text{2 raices complejas conjug.} \end{cases}$

b) 1 raiz real negativa $\begin{cases} \text{ninguna raiz real positiva} \\ \text{4 raices complejas conjugadas} \end{cases}$

Entre ellas la posibilidad a) es la correcta, por ser congruente con las raices encontradas para cáscaras en las que no se tomó en consideración las deformaciones por cortante y la inercia de rotación (efectos secundários), como así también por haber resultado invariablemente en el conjunto a) de raices una serie de casos analizados numéricamente para diferentes valores de β y n.

APENDICE E

DERIVACION DE LAS EXPRESIONES DE N_x Y M_x

a) Modos simétricos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a}\left\{\left(k_1\alpha_1 \cosh\frac{\alpha_1 x}{a}\right)C_1 + \left(k_2\alpha_2 \cosh\frac{\alpha_2 x}{a}\right)C_3 - \left(k_3\eta_3 \cos\frac{\eta_3 x}{a}\right)C_5 + \right.$$

$$+\left[(k_4 p - k_5 q)\cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} + (-k_4 q - k_5 p)\operatorname{senh}\frac{px}{a}\,.\right.$$

$$\left.. \operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right]D_1 + \left[(k_5 p + k_4 q)\cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} + (-k_5 q + \right.$$

$$\left.\left. + k_4 p)\operatorname{senh}\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right]D_2\right\}\cos n\theta\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \left\{\left(k_1'' \cosh\frac{\alpha_1 x}{a}\right)C_1 + \left(k_2'' \cosh\frac{\alpha_2 x}{a}\right)C_3 + \left(k_3'' \cos\frac{\eta_3 x}{a}\right)C_5 + \right.$$

$$+\left(k_4'' \cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} - k_5''\operatorname{senh}\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right)D_1 +$$

$$+\left(\kappa_5'' \cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a}+\kappa_4''\,\mathrm{senh}\frac{px}{a}\,\mathrm{sen}\frac{qx}{a}\right).$$

$$.D_2\Big\}\, n\cos n\theta\,.\,e^{i\omega t}$$

$$w=\left\{\left(\cosh\frac{\alpha_1 x}{a}\right)C_1+\left(\cosh\frac{\alpha_2 x}{a}\right)C_3+\left(\cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a}\right)D_1+\right.$$

$$\left.+\left(\mathrm{senh}\frac{px}{a}\,\mathrm{sen}\frac{qx}{a}\right)D_2\right\}\cos n\theta\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(a\,\psi_x)=\frac{1}{a}\left\{\left(\kappa_1'\alpha_1\cosh\frac{\alpha_1 x}{a}\right)C_1+\left(\kappa_2'\alpha_2\cosh\frac{\alpha_2 x}{a}\right)C_3-\right.$$

$$-\left(\kappa_3'\eta_3\cos\frac{\eta_3 x}{a}\right)C_5+\left[(\kappa_4' p-\kappa_5' q)\cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a}+\right.$$

$$\left.+(-\kappa_4' q-\kappa_5' p)\,\mathrm{senh}\frac{px}{a}\,\mathrm{sen}\frac{qx}{a}\right]D_1+\left[(\kappa_5' p+\right.$$

$$+\kappa_4' q)\cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a}+(-\kappa_5' q+\kappa_4' p)\,\mathrm{senh}\frac{px}{a}\,.$$

$$\left.\left..\,\mathrm{sen}\frac{qx}{a}\right]D_2\right\}\cos n\theta\; e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(a\,\psi_\theta)=\left\{\left(\kappa_1'''\cosh\frac{\alpha_1 x}{a}\right)C_1+\left(\kappa_2'''\cosh\frac{\alpha_2 x}{a}\right)C_3+\right.$$

$$+\left(\kappa_3'''\cos\frac{\eta_3 x}{a}\right)C_5+\left(\kappa_4'''\cosh\frac{px}{a}.\cos\frac{qx}{a}-\right.$$

$$\left.-\kappa_5'''\,\mathrm{senh}\frac{px}{a}\,\mathrm{sen}\frac{qx}{a}\right)D_1+\left(\kappa_5'''\cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a}+\right.$$

$$+\kappa_4''' \operatorname{senh}\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\Big)D_2\Big\}\, n\cos n\theta\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\nu}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-w\right)+\beta\frac{\partial}{\partial x}(a\psi_x)=$$

$$=\frac{1}{a}\Big\{\Big[\left(\kappa_1\alpha_1-\kappa_1'\beta\alpha_1+\kappa_1''\nu n-\nu\right)\cosh\frac{\alpha_1 x}{a}\Big]C_1+\Big[\big(\kappa_2\alpha_2+$$

$$+\kappa_2'\beta\alpha_2+\kappa_2''\nu n-\nu\big)\cosh\frac{\alpha_2 x}{a}\Big]C_3+\Big[\big(-\kappa_3\eta_3-\kappa_3'\beta\eta_3+$$

$$+\kappa_3'''\nu n-\nu\big)\cos\frac{\eta_3 x}{a}\Big]C_5+\Big[\big(\kappa_4 p-\kappa_5 q+\kappa_4'\beta p-$$

$$-\kappa_5'\beta q+\kappa_4''\nu n-\nu\big)\cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a}+\big(-\kappa_4 q-\kappa_5 p-$$

$$-\kappa_4'\beta q-\kappa_5'\beta p-\kappa_5''\nu n\big)\operatorname{senh}\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\Big]D_1+$$

$$+\Big[\big(\kappa_5 p+\kappa_4 q+\kappa_5'\beta p+\kappa_4'\beta q+\kappa_5''\nu n\big)\cosh\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a}+$$

$$+\big(-\kappa_5 q+\kappa_4 p-\kappa_5'\beta q+\kappa_4'\beta p+\kappa_4''\nu n-\nu\big)\operatorname{senh}\frac{px}{a}\,.$$

$$.\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\Big]D_2\Big\}\cos n\theta\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(a\psi_x)+\frac{\nu}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}(a\psi_\theta)=$$

$$=\frac{1}{a}\Big\{\Big[\left(\kappa_1\alpha_1+\kappa_1'\alpha_1+\kappa_1'''\nu n\right)\cosh\frac{\alpha_1 x}{a}\Big]C_1+\Big[\big(\kappa_2\alpha_2+\kappa_2'\alpha_2+$$

$$+ \kappa_2''' \nu n)\cosh\frac{\alpha_2 x}{a}\Big] C_3 + \Big[(-\kappa_3 \eta_3 - \kappa_3' \eta_3 + \kappa_3''' \nu n).$$

$$.\cos\frac{\eta_3 x}{a}\Big] C_5 + \Big[(\kappa_4 p - \kappa_5 q + \kappa_4' p - \kappa_5' q + \kappa_4''' \nu n)\cosh\frac{px}{a}.$$

$$.\cos\frac{qx}{a} + (-\kappa_4 q - \kappa_5 p - \kappa_4' q - \kappa_5' p - \kappa_5''' \nu n)\,\mathrm{senh}\frac{px}{a}\,.$$

$$.\,\mathrm{sen}\frac{qx}{a}\Big] D_1 + \Big[(\kappa_5 p + \kappa_4 q + \kappa_5' p + \kappa_4' q + \kappa_5''' \nu n)\,.$$

$$.\cosh\frac{px}{a}\,.\cos\frac{qx}{a} + (-\kappa_5 q + \kappa_4 p - \kappa_5' q + \kappa_4' p + \kappa_4''' \nu n).$$

$$.\,\mathrm{senh}\frac{px}{a}\ \mathrm{sen}\frac{qx}{a}\Big] D_2 \Big\}\cos n\theta . e^{i\omega t}$$

b) Modos antisimétricos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a}\Big\{\Big(\kappa_1 \alpha_1\,\mathrm{senh}\frac{\alpha_1 x}{a}\Big) C_2 + \Big(\kappa_2 \alpha_2\,\mathrm{senh}\frac{\alpha_2 x}{a}\Big) C_4 -$$

$$-\Big(\kappa_3 \eta_3\,\mathrm{sen}\frac{\eta_3 x}{a}\Big) C_6 + \Big[(\kappa_4 p - \kappa_5 q)\,\mathrm{senh}\frac{px}{a}\ \cos\frac{qx}{a} +$$

$$+ (-\kappa_4 q - \kappa_5 p)\cosh\frac{px}{a}\ \mathrm{sen}\frac{qx}{a}\Big] D_3 + \Big[(\kappa_5 p + \kappa_4 q)\,.$$

$$.\,\mathrm{senh}\frac{px}{a}\ \cos\frac{qx}{a} + (-\kappa_5 q + \kappa_4 p)\cosh\frac{px}{a}\,\mathrm{sen}\frac{qx}{a}\Big].$$

$$.\,D_4\Big\}\cos n\theta\ e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \left\{ \left(\kappa_1'' \operatorname{senh} \frac{\alpha_1 x}{a} \right) C_2 + \left(\kappa_2'' \operatorname{senh} \frac{\alpha_2 x}{a} \right) C_4 - \left(\kappa_3 \eta_3 \operatorname{sen} \frac{\eta_3 x}{a} \right) C_6 + \right.$$

$$+ \left(\kappa_4'' \operatorname{senh} \frac{px}{a} \cos \frac{qx}{a} - \kappa_5'' \cosh \frac{px}{a} \operatorname{sen} \frac{qx}{a} \right) D_3 +$$

$$+ \left(\kappa_5'' \operatorname{senh} \frac{px}{a} \cos \frac{qx}{a} + \kappa_4'' \cosh \frac{px}{a} \operatorname{sen} \frac{qx}{a} \right) .$$

$$\left. . D_4 \right\} n \cos n\theta \, e^{i\omega t}$$

$$w = \left\{ \left(\operatorname{senh} \frac{\alpha_1 x}{a} \right) C_2 + \left(\operatorname{senh} \frac{\alpha_2 x}{a} \right) C_4 + \left(\operatorname{sen} \frac{\eta_3 x}{a} \right) C_6 + \right.$$

$$\left. + \left(\operatorname{senh} \frac{px}{a} \cos \frac{qx}{a} \right) D_3 + \left(\cosh \frac{px}{a} \operatorname{sen} \frac{qx}{a} \right) D_4 \right\} \cos n\theta \, e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (a \psi_x) = \frac{1}{a} \left\{ \left(\kappa_1' \alpha_1 \operatorname{senh} \frac{\alpha_1 x}{a} \right) C_2 + \left(\kappa_2' \alpha_2 \operatorname{senh} \frac{\alpha_2 x}{a} \right) C_4 - \right.$$

$$- \left(\kappa_3' \eta_3 \operatorname{sen} \frac{\eta_3 x}{a} \right) C_6 + \left[\left(\kappa_4' p - \kappa_5' q \right) \operatorname{senh} \frac{px}{a} \cos \frac{qx}{a} + \right.$$

$$\left. + \left(-\kappa_4' q - \kappa_5' p \right) \cosh \frac{px}{a} \operatorname{sen} \frac{qx}{a} \right] D_3 + \left[\left(\kappa_5' p + \right. \right.$$

$$\left. + \kappa_4' q \right) \operatorname{senh} \frac{px}{a} \cos \frac{qx}{a} + \left(-\kappa_5' q + \kappa_4' p \right) \cosh \frac{px}{a} .$$

$$\left. \left. . \operatorname{sen} \frac{qx}{a} \right] D_4 \right\} \cos n\theta . e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (a \psi_\theta) = \left\{ \left(\kappa_1''' \operatorname{senh} \frac{\alpha_1 x}{a} \right) C_2 + \left(\kappa_2''' \operatorname{senh} \frac{\alpha_2 x}{a} \right) C_4 + \left(\kappa_3''' \operatorname{sen} \frac{\eta_3 x}{a} \right) C_6 + \right.$$

$$+\left(\kappa_4''' \operatorname{senh}\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} - \kappa_5''' \cosh\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right)D_3 + \left(\kappa_5''' \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \operatorname{senh}\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} + \kappa_4''' \cosh\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\right)D_4\Big\} n\cos n\theta\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w\right) + \beta\frac{\partial}{\partial x}(a\psi_x) =$$

$$= \frac{1}{a}\Big\{\Big[\left(\kappa_1\alpha_1 + \kappa_1'\beta\alpha_1 + \kappa_1''\nu n - \nu\right)\operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a}\Big]C_2 + \Big[\left(\kappa_2\alpha_2 + \right.$$

$$\left. + \kappa_2'\beta\alpha_2 + \kappa_2''\nu n - \nu\right)\cdot\operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a}\Big]C_4 + \Big[\left(-\kappa_3\eta_3 - \kappa_3'\beta\eta_3 + \right.$$

$$\left. + \kappa_3''\nu n - \nu\right)\operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a}\Big]C_6 + \Big[\left(\kappa_4 p - \kappa_5 q + \kappa_4'\beta p - \kappa_5'\beta q + \right.$$

$$\left. + \kappa_4''\nu n - \nu\right)\operatorname{senh}\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} + \left(-\kappa_4 q - \kappa_5 p - \kappa_4'\beta q - \right.$$

$$\left. - \kappa_5'\beta p - \kappa_5''\nu n\right)\cosh\frac{px}{a}\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\Big]D_3 + \Big[\left(\kappa_5 p - \kappa_4 q + \right.$$

$$\left. + \kappa_5'\beta p + \kappa_4\beta q + \kappa_5''\nu n\right)\operatorname{senh}\frac{px}{a}\cos\frac{qx}{a} + \left(-\kappa_5 q + \right.$$

$$\left. + \kappa_4 p - \kappa_5'\beta q + \kappa_4'\beta p + \kappa_4''\nu n - \nu\right)\cosh\frac{px}{a}\cdot$$

$$\cdot\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\Big]D_4\Big\}\cos n\theta\cdot e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(a\psi_x) + \frac{\nu}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}(a\psi_\theta) =$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\left[\left(k_1\alpha_1 + k_1'\alpha_1 + k_1'''\nu n\right)\operatorname{senh}\frac{\alpha_1 x}{a}\right]C_2 + \left[\left(k_2\alpha_2 + k_2'\alpha_2 + \right.\right.\right.$$

$$\left. + k_2'''\nu n\right)\operatorname{senh}\frac{\alpha_2 x}{a}\Big]C_4 + \Big[\left(-k_3\eta_3 - k_3'\eta_3 + k_3'''\nu n\right).$$

$$.\operatorname{sen}\frac{\eta_3 x}{a}\Big]C_6 + \Big[\left(k_4 p - k_5 q + k_4' p - k_5' q + k_4'''\nu n\right)\operatorname{senh}\frac{px}{a}.$$

$$.\cos\frac{qx}{a} + \left(-k_4 q - k_5 p - k_4' q - k_5' p - k_5'''\nu n\right)\cosh\frac{px}{a}.$$

$$.\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\Big]D_3 + \Big[\left(k_5 p + k_4 q + k_5' p + k_4' q + k_5'''\nu n\right)\operatorname{senh}\frac{px}{a}.$$

$$.\cos\frac{qx}{a} + \left(-k_5 q + k_4 p - k_5' q + k_4' p + k_4'''\nu n\right)\cosh\frac{px}{a}.$$

$$.\operatorname{sen}\frac{qx}{a}\Big]D_4\Big\}\cos n\theta\,.\,e^{i\omega t}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. FLUGGE, W. - Stresses in Shells, Berlin, Springer-Verlag 1966, p.208-234.

2. TIMOSHENKO, S.P. - Theory of Plates and Shells, New York, Mc Graw-Hill, 1940, sección 88.

3. WARBURTON, G.B. - "Vibration of Thin Cylyndrical Shells", The Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 7, No.4, Dic.1965, p.399-407.

4. FORSBERG, K. - "Influence of Boundary Conditions on the Modal Characteristics of Thin Cylindrical Shells", The AIAA Journal, Vol.2, No.12, 1964, p.2150-2157.

5. MIRSKY, I. y HERRMANN, G. - "Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells", The Journal of the Accoustical Society of America, Vol.29, No.10, Oct.1957, p.1116-1123.

6. PENZES, L.E. - "Shell Dynamics with Special Applications to Control Problems", Dynamic Stability of Space Vehicles, Vol.XV, NASA, 1960.

7. YI-YUAN YU - "Free Vibrations of Thin Cylindrical Shells Having Finite Lengths with Freely Supported and Clamped Edges", Journal of Applied Mechanics, Vol.22, Dic. 1955, p.574-552.

8. ARNOLD, R.N. y WARBURTON, G.B. - "The Flexural Vibrations of Thin Cylinders", Proc.Inst. Mech.Engrs., London, No.167, 1953, p.62-80.

9. HERRMANN, G. y MIRSKY, I. - "Three Dimensional and Shell Theory Analysis of Axially Symmetric Motions of Cylinders" Journal of Applied Mechanics, Dic.1956, p.563-568.

10. LIN, T.C. y MORGAN, G.N. - "Study of Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells as Affected by Rotatory Inertia and Transverse Shear", Journal of Applied Mechanics, Jun.1956, p.255-261.

11. KRAUS, H. - Thin Elastic Shells, New York, Wiley, 1967 p.289-314.

12. ARNOLD, R.N. y WARBURTON, G.B. - "Flexural vibrations of the walls of thin cylindrical shells having freely supported ends", Proc.Roy.Soc., London, 1949, A197, p.238-256.

13. PEI CHI CHOU - "Analysis of Axisimmetrical Motions of Cylindrical Shells by the Method of Characteristics", AIAA Journal, Vol.6, No.8, Ago.1968, p.1492-1497.

14. DURAND, E. - _Solutions numériques des équations algébriques_, Tome I, Paris 1960, Masson, p.156-182.

15. BELLUZZI, O. - _Scienza delle Costruzioni_, Vol.I, Bologna, 1966, Zanichelli, p.246.