A N A L I S I S D E C A S C A R A S G R U E S A S Y

F I N A S C O N E L E M E N T O S

T R I D I M E N S I O N A L E S

Andrés Ludovico Halbritter

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

....
Presidente

....

....

....

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
FEVEREIRO DE 1974

a mi esposa
a mis padres

A G R A D E C I M I E N T O S

Al Prof. F. Venancio Filho, quién sugirió y orientó este trabajo.

A la COPPE y a su Cuerpo Docente, por los conocimientos recibidos, en la persona de su Director, Prof. Sydney M. G. dos Santos.

Al personal no docente, por su eficacia y trato amable, en la persona de Heloisa.

Al "Mestre" Fernando L. Lobo B. Carneiro, de quién siempre tendré el recuerdo de un hombre íntegro, por su comprensión y ayuda.

AGRADECIMENTOS

Ao professor FERNANDO VENÂNCIO FILHO pela sugestão, orientação e revisão deste trabalho.

Aos colegas ABIMAEL FERNANDO DOURADO LOULA e NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN, pelo estímulo e colaboração técnica dispensados.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido.

Ao Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ e ao Centro de Processamento de Dados da UFJF pela utilização dos computadores.

Aos meus professores na COPPE, na pessoa do professor FERNANDO LUIZ LOBO B. CARNEIRO, por seu incentivo aos estudos pós-graduados.

À WANDA F. ROCHA pela confecção gráfica deste trabalho.

S I N O P S I S

Se presenta la formulación de un elemento finito para resolver cáscaras gruesas y finas.

El elemento en cuestión,es un elemento isoparamétrico tridimensional degenerado cuadrático.

En el cálculo de las cáscaras gruesas, son tenidas en cuenta las deformaciones por corte, y para las finas, se presenta un esquema de integración, llamada "reducida".

Una característica del elemento, es el de convergir con mallas de muy pocos elementos.

También se preparó un programa automático, capaz de resolver cáscaras gruesas y finas, considerando diferentes tipos de cargamentos.

Por último, para testar el programa, se calcularon diversas cáscaras.

S I N O P S E

Apresenta-se a formulação de um elemento finito para resolver cascas espessas e finas.

O elemento em questão, é um elemento isoparametrico tridimensional degenerado quadrático.

No calculo das cascas espessas, são levadas em conta as deformações por cortante, e para as finas, apresenta-se um esquema de integração, chamada "reduzida".

O elemento apresenta a característica de convergir com malhas pouco refinadas.

Tambem elaborou-se um programa automático, capaz de resolver cascas espessas e finas, considerando diferentes tipos de carregamentos.

Por último, para testar o programa, calcularam-se diversas cascas.

A B S T R A C T

In this thesis, the formulation of a finite element to resolve thick and thin shells is presented.

A quadratic degenerate tridimensional isoparametric element is considered.

In the computation of thick shells, shear strains are taken into account while a "reduced" numeric integration scheme is used for thin shells.

One of the characteristics of the element is its convergence for any mesh of few elements.

An automatic program was prepared in order to solve thick and thin shells considering different types of loads.

Several such examples are incluided.

I N D I C E

INTRODUCCION

El objeto de esta tésis, fue presentar un medio práctico para resolver cáscaras espesas o gruesas y delgadas o finas.

El estudio analítico de cáscaras de formas arbitrarias presenta numerosas dificultades y sólo se consiguen resultados aceptables, cuando las mismas cumplen con determinadas condiciones que simplifican su cálculo.

Cuando se introduce la influencia de las deformaciones por corte y las piezas estructurales tienen espesor variable, las dificultades mencionadas son todavía mayores.

Para resolver este tipo de estructuras, se recurrió al conocido método de los elementos finitos.

Para ello, se partió de la idea de Zienkiewicz de usar un elemento tridimensional isoparamétrico para resolver cáscaras espesas (figura 1), con lo que se conseguía realizar un análisis aplicando directamente los conceptos de la elasticidad lineal sin considerar algunas de las hipótesis simplificadoras de la teoría de cáscaras.

Los elementos curvos de tipo isoparamétrico son más adecuados para el análisis de cáscaras que los elementos pla nos, que solamente son aplicables para la resolución de un número limitado de tipos de cáscaras. Ello se debe principalmente a que los primeros aproximan mejor la geometría de la estructura.

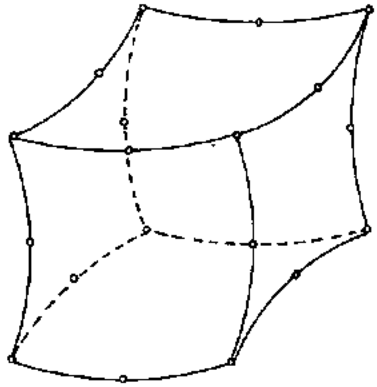


Figura 1

Al aproximar la cáscara con un elemento tridimensional surgen algunos problemas como ser:

1-) si se estudia una cáscara, aproximada por ejemplo,con elementos prismáticos, al ser dos de las dimensiones de los elementos mucho mayores que la dimensión correspondiente a la dirección que coincide con la normal a la estructura, se produce un mal condicionamiento de la matriz de rigidez, con la consiguiente dificultad numérica que ello acarrea.

2-) por otro lado, de esta manera,se está trabajando con un gran número de nudos, lo que trae aparejado un tiempo de computación apreciable.

3-) la solución para cáscaras delgadas utilizando este tipo de elemento no converge para la solución teórica.

El primer problema mencionado fue resuelto despreciando la energía de deformación correspondiente a las tensiones perpendiculares a la superficie media.

La utilización de puntos nodales a lo largo de las arístas normales a la superficie media de la cáscara se torna innecesaria, debido al conocido hecho de que tanto para las cáscaras espesas como para las finas, las normales a la superficie media permanecen rectas después de la deformación.

Por lo tanto,se "degeneró" el elemento de la figura 1 en su correspondiente de la figura 2, eliminándose de esta manera,los puntos nodales intermedios en la dirección del espesor.

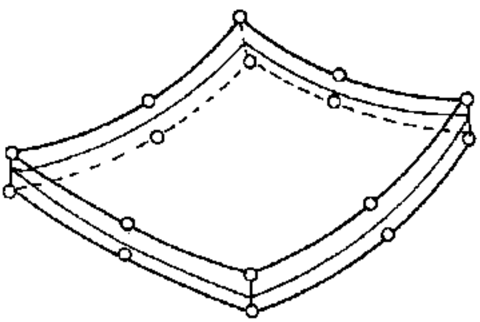


Figura 2

De esta manera,se eliminaron varios grados de libertad del elemento,que tenían muy poca influencia, y la segunda dificultad fue salvada.

Estas dos restricciones impuestas al elemento, forman parte de las hipótesis básicas de la teoría de cáscaras, pero nótese,que en ningún momento se impuso la conocida condición de que las rectas normales a la superficie media antes de la deformación permanecen normales a la misma después de deformada la estructura.

Esta "libertad" permite que la cáscara pueda experimentar deformaciones por corte, lo cual es imprescindible para realizar un análisis aceptable en el caso de cáscaras espesas.

Con todas estas condiciones, se resuelven satisfactoriamente las cáscaras espesas, aunque son insuficientes para lograr convergencia en las cáscaras delgadas.

Esto último, se consiguió con un adecuado esquema de integración numérica.

CAPITULO 1

PRINCIPIOS VARIACIONALES

1.1- INTRODUCCION

En este capítulo, serán introducidos los elementos de elasticidad lineal y mediante el principio de los trabajos virtuales se obtendrán algunos principios variacionales de la elasticidad lineal, que serán utilizados en el desenvolvimiento del método de los elementos finitos.

Todos los índices que aparecen en este capítulo variarán de uno a tres.

1.2- ELASTICIDAD LINEAL

1.2.1- Tensor de deformaciones

Se considerará el campo de la elasticidad infinitesimal, es decir, aquel en que las deformaciones son pequeñas respecto de las dimensiones del cuerpo y el caso de pequeños desplazamientos.

Se considerará la terna de referencia x_i $i=1,3$

Un punto P de un cuerpo elástico estará localizado por sus coordenadas x_i en su posición antes de ser deformado.

La posición que tomará dicho punto después de la deformación será P^* y tendrá coordenadas

$$\bar{x}_i = x_i + u_i \qquad (1)$$

Las $\bar{x}_i$ formarán un nuevo sistema de referencia que corresponderá al cuerpo deformado.

Los $u_i(x_j)$ son los desplazamientos del punto P después de deformado el cuerpo. (Figura 3)

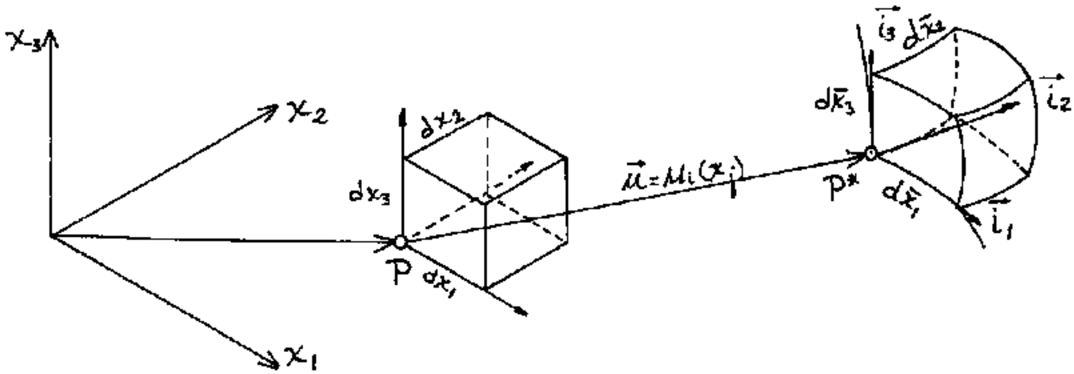


Figura 3

Un elemento de línea dado en el sistema sin deformar, de componentes dx_j como consecuencia de la deformación, se transformará en un elemento de componentes $d\bar{x}_i$ dadas por:

$$d\bar{x}_i = \bar{x}_{i,j}\, dx_j = (\delta_{ij} + u_{i,j})\, dx_j \qquad (2)$$

donde las derivadas $\bar{x}_{i,j}$ forman la matriz jacobiana.

$$[J] = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,1} & \bar{x}_{1,2} & \bar{x}_{1,3} \\ \bar{x}_{2,1} & \bar{x}_{2,2} & \bar{x}_{2,3} \\ \bar{x}_{3,1} & \bar{x}_{3,2} & \bar{x}_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + u_{1,1}) & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & (1 + u_{2,2}) & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & (1 + u_{3,3}) \end{bmatrix}$$

(3)

Esta matriz se puede descomponer en tres matrices: una matriz unidad, una matriz simétrica y una antisimétrica, cuyos elementos serán:

$$J_{ij} = \bar{x}_{i,j} = \delta_{ij} + \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \tfrac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \qquad (4)$$

Donde definiremos:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (5)$$

como tensor de deformaciones, y a:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \qquad \text{como tensor de rotaciones.}$$

1.2.2- TENSIONES

La matriz jacobiana (3) se puede expresar como:

$$\left[J\right] = \left[\vec{i}_1 \quad \vec{i}_2 \quad \vec{i}_3\right] \qquad (6)$$

donde los vectores $\vec{i}_j$ son tangentes a los ejes del sistema deformado, como se ve en la figura 3.

Consideremos nuevamente, el punto antes y después de deformado el cuerpo.

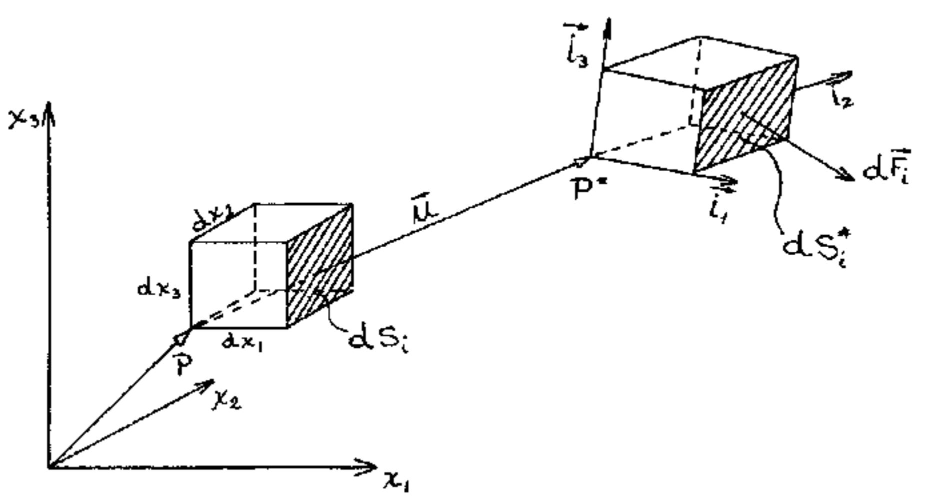


Figura 4

Llamaremos $d\vec{F}_i$ al vector fuerza que actúa en una cara genérica i del elemento diferencial del cuerpo deformado. Figura 4.

Tomaremos tensiones o pseudotensiones (I) que serán defini das respecto del cuerpo sin deformar, es decir se considerará $dS_i = dS_i^*$.

$$\vec{\sigma_i} = \frac{d\vec{F}}{dS} \qquad \text{(sin sumar en i)} \qquad (7)$$

que se pueden expresar por sus componentes como:

$$\vec{\sigma_i} = \sigma_{ij}\vec{i_j} \qquad (8)$$

Considerando que no haya momentos concentrados en el ele mento infinitesimal, y despreciando efectos de segundo orden , las ecuaciones de momentos se reducirán a tres ecuaciones del tipo

$$(\vec{i_i} \times \vec{\sigma_i})\ \vec{i_j}\, dx_j\, \vec{i_k}\, dx_k = \vec{0} \qquad i \neq j \neq k \neq i \qquad (9)$$

$$(\vec{i_i} \times \vec{i_j})\, \sigma_{ij} = \vec{0} \qquad (10)$$

como

$$(\vec{i_i} \times \vec{i_j}) = -\, (\vec{i_j} \times \vec{i_i}) \qquad (11)$$

será

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 0 \qquad (12)$$

que demuestra la simetría del tensor de tensiones.

Considerando el elemento deformado y siendo $\vec{P}$ una fuerza definida por unidad de volumen, tendremos tres ecuaciones de proyección de fuerzas para el elemento en equilibrio, que serán:

$$\vec{\sigma}_{i,i} + \vec{P} = \vec{0} \qquad (13)$$

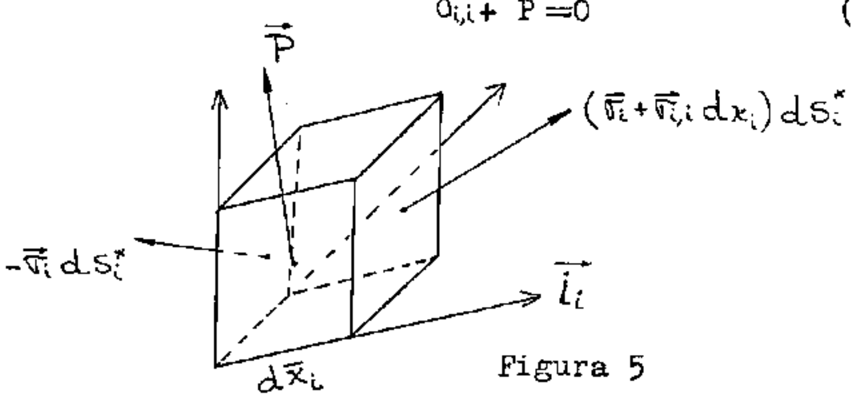


Figura 5

opuestas genéricas.

En la frontera del cuerpo se debe cumplir que

$$\vec{F} = \vec{\sigma_i}\, \nu_i \qquad (14)$$

donde $\vec{F}$ son tensiones que actúan sobre la frontera y ν_i son las componentes del vector unitario normal a la cara i (frontera).

Teniendo en cuenta la (2), la (14) quedará

$$F_k = \sigma_{ij}\left(\delta_{kj} + u_{k,j}\right) \nu_i \qquad (15)$$

que en el caso de elasticidad lineal será

$$F_k = \sigma_{ij}\, \nu_i \qquad (16)$$

1.2.3- Relaciones tensiones-deformaciones

En elasticidad lineal las relaciones tensiones-deformaciones están dadas por

$$\sigma_{ij} = E_{ijk\ell}\, e_{k\ell} \qquad (17)$$

donde E_{ijkl} es un tensor de cuarto orden, simétrico respecto de las siguientes permutaciones de índices (II)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{k\ell}} = E_{ijk\ell} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial e_{k\ell}} = E_{jik\ell} = \frac{\partial \sigma_{k\ell}}{\partial e_{ij}} = E_{k\ell ij} \qquad (18)$$

donde se hizo primero i=j j=i y después i=k j=l k=i l=j

La relación inversa de (17) se puede expresar como

$$e_{k\ell} = C_{k\ell ij}\, \sigma_{ij} \qquad (19)$$

reemplazando (17) en (19) queda

$$e_{k\ell} = C_{k\ell ij}\, E_{ijmn}\, e_{mn} \qquad (20)$$

donde se ve que

$$C_{k\ell ij}\, E_{ijmn} = \delta_{km}\, \delta_{\ell n} \qquad (21)$$

Debido a la simetría de los tensores de tensiones y deforma_ ciones, cada uno de ellos sólo tiene seis componentes independientes.

Esto se aprovecha para escribir la relación (17) en forma matricial

$$\{\sigma\}=[E]\ \{\varepsilon\} \qquad (22)$$

En la literatura técnica las componentes e_{ij} con $i\neq j$ corresponden a las deformaciones por distorciones γ_{ij} y están vinculadas por $\gamma_{ij}=2e_{ij} \quad i\neq j \qquad (23)$

La matriz de elasticidad $[E]$ para el caso tridimensional es

$$[E]=\frac{E\,(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \nu/(1-\nu) & 1 & & \text{Simétrica} & & \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \qquad (24)$$

1.2.4- <u>Energía de deformación</u>

Consideremos un elemento de un cuerpo con un estado arbitrario de desplazamientos.

En el elemento en estudio existe equilibrio entre las tensiones σ_{ij} y la fuerza de volumen $\vec{P}$.

El trabajo que realizarán las tensiones en las caras del elemento cuando se tiene un desplazamiento virtual $\delta\vec{u}$ será

$$\frac{\partial(\vec{\sigma}_i\,\delta\vec{u})}{\partial x_i}\,dV \qquad (25)$$

y el trabajo virtual de la fuerza de volumen será $\vec{P}\,\delta\vec{u}\,dV \quad (26)$

Sumando y calculando la primera variación del trabajo por uni dad de volumen tendremos

$$\delta W = \left[\left(\frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i} + \vec{P}\right)\delta\vec{u} + \vec{\sigma}_i \ \frac{\partial(\delta\vec{u})}{\partial x_i}\right] \tag{27}$$

Considerando que hay equilibrio y teniendo en cuenta la formula (8)

$$\delta W = \sigma_{ij}\left[\vec{i}_j \ \frac{\partial(\delta\vec{u})}{\partial x_i}\right] = \sigma_{ij}\left[\bar{x}_{k,j}\frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_i}\right] \tag{28}$$

Como σ_{ij} es simétrico se puede poner

$$\delta W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left[\bar{x}_{k,j}\ \frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_i} + \bar{x}_{k,i}\frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_j}\right] \tag{29}$$

recordando que $\bar{x}_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j}$

$$\delta W = \frac{1}{2}\ \sigma_{ij}\left[(\delta_{kj} + u_{k,j})\ \frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_i} + (\delta_{ki} + u_{k,i})\frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_j}\right] \tag{30}$$

Despreciando términos de segundo orden y considerando k=j k=i

$$\delta W = \frac{1}{2}\ \sigma_{ij}\left[\frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}\right] \tag{31}$$

$$\delta W = \sigma_{ij}\ \delta e_{ij} \tag{32}$$

Si asociamos el estado virtual δe_{ij} con un incremento de_{ij} de un estado natural, aparecerán tensiones $\sigma_{ij}(e_{ij})$.

En (32) consideramos la integral sobre cualquier camino cerrado

$$\oint dW = \oint \sigma_{ij}(e_{ij})\ de_{ij} \tag{33}$$

si ésta se anula siempre; entonces,estamos en presencia de un material que llamaremos elástico y existe la llamada función de energía de deformación, que será definida como (II)

$$A(e_{ij}) = \int_v A\, dV = \int_0^{e_{ij}} \sigma_{ij}\ de_{ij} \tag{34}$$

pudiendo obtener las siguientes relaciones

$$dA = \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\ de_{ij} = \sigma_{ij}\ de_{ij} \tag{35}$$

y

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \tag{36}$$

1.2.5- ENERGIA POTENCIAL

Tomemos el cuerpo elástico de la Figura 6- bajo un estado de cargas $\vec{P}$ y $\vec{F}$ en equilibrio con las tensiones σ_{ij} .

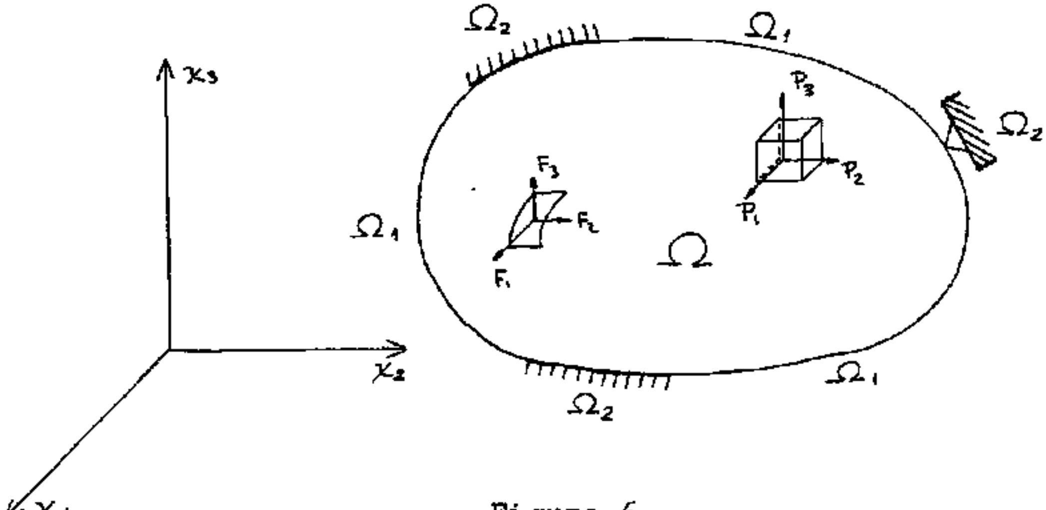


Figura 6

Las condiciones de borde son dadas sobre la frontera Ω .

Ω_1 será la superficie libre de Ω y Ω_2, será una superficie en la cual los desplazamientos estarán prescriptos.

Las fuerzas $\vec{F}$ serán las fuerzas de superficie y las $\vec{P}$, las de volumen

Se dará al cuerpo un desplazamiento virtual δu_k sin violar las condiciones de contorno mencionadas en Ω_2.

Para cualquier estado virtual que cumpla con las condiciones prescriptas de borde, la ecuación del trabajo será:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}[\sigma_{ij}(\delta_{kj}+u_{k,j})]\,\delta u_k\,dV+\int_V P_k\,\delta u_k\,dV+\int_{\Omega_1}[F_k-\sigma_{ij}(\delta_{kj}+u_{k,j})]\nu_i\,\delta u_k=0 \quad (37)$$

Integrando por partes la primera integral obtendremos

$$I=\int_V \frac{\partial[\sigma_{ij}(\delta_{kj}+u_{k,j})]}{\partial x_i}\delta u_k\,dV=-\int_V \sigma_{ij}\,(\delta_{kj}+u_{k,j})\,\frac{\partial(\delta u_k)}{\partial x_i}\,dV+$$

$$+\int_{\Omega_1}\sigma_{ij}\,(\delta_{kj}+u_{k,j})\,\nu_i\,\delta u_k\,d\Omega \qquad (38)$$

Como se ve, la primera integral del segundo miembro, coincide con la expresión de la variación del trabajo, dada por la fórmula (28) y que al ser combinada con (32) nos permite escribir

$$I=-\int_V \sigma_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV+\int_{\Omega_1}\sigma_{ij}\,(\delta_{kj}+u_{k,j})\,\nu_i\,\delta u_k\,d\Omega \qquad (39)$$

Volviendo a la (37), ésta quedará

$$\int_V \sigma_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV=\int_V P_k\,\delta u_k\,dV+\int_{\Omega_1}F_k\,\delta u_k\,d\Omega \qquad (40)$$

esta ecuación, es una identidad que surgió como simple transformación de las condiciones de equilibrio (13) y (14).

Obsérvese que no se impuso ninguna condición respecto al tipo de ley que gobierna las propiedades mecánicas del material.

Considerando la (34), tendremos

$$\delta\Pi = \delta\left[\int_V A\,dV - \int_V P_k u_k\,dV - \int_{\Omega_1} F_k u_k\,d\Omega\right] = 0 \qquad (41)$$

donde Π será la energía potencial.

$$\Pi = \int_V A\,dV - \int_V P_k u_k\,dV - \int_{\Omega_1} F_k u_k\,d\Omega \qquad (42)$$

que será un valor estacionario, ya que como se vió, su primera variación es nula.

La variación segunda de la energía potencial la obtendremos de (41) y, además, considerando la condición de estacionaridad y de que $\delta u_k = 0$ en Ω_1 se tendrá que

$$\delta^2\Pi = \int_V \delta\sigma_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV \qquad (43)$$

Pero recordando, que $\sigma_{ij} = E_{ijk\ell} e_{k\ell}$ será

$$\delta^2\Pi = \int_V E_{ijk\ell}\,\delta e_{k\ell}\,\delta e_{ij}\,dV \qquad (44)$$

que por otra parte (II) es igual a

$$\delta^2\Pi = \delta^2\int_V A\,dV \qquad (45)$$

Haciendo el estudio termodinámico de un elemento de un cuer po elástico deformado se demuestra que la función de energía de deformación siempre existe.

Dicho estudio se puede llevar a cabo de dos maneras: una, considerando que la deformación se produce adiabáticamente y otra suponiendo que se realiza isotérmicamente.

"Las diferencias entre las suposiciones de deformaciones adiabáticas e isotérmicas aparecen, en la formulación matemática , solamente como diferencias entre las constantes elásticas adiabáticas e isotérmicas. Hablando en forma general, se ha probado por experiencia que las diferencias entre esas constantes elásticas son despreciables.

Consecuentemente, se asume que la función de energía de deformación existe en la teoría de la elasticidad, aunque el proceso de deformación pueda estar en elgún lugar entre el adiabático y el isotérmico.

Sabemos de la evidencia experimental, que cuando las deformaciones son suficientemente pequeñas, un elemento del cuerpo elástico es estable. Esto requiere, que la función de energía de deformación debe ser una función positiva definida de las componentes de deformación para pequeñas deformaciones". (III)

Por lo tanto, la función de energía de deformación es positiva y consecuentemente por (41) y (45) la energía potencial deberá ser mínima.

C A P I T U L O 2

EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

2.1- INTRODUCCION

Al igual que el anterior, este capítulo tiene la finalidad de exponer en forma muy breve nociones ya muy conocidas, pero que se incluyen en este trabajo con la finalidad de completarlo.

2.2- Enfoque variacional - Discretización

En el capítulo 1 se vió que un funcional que respondía a la descripción del problema elástico lineal era el de la energía potencial de un sólido deformado.

Minimizando dicho funcional y respetando las condiciones de frontera impuestas, teoricamente, podríamos resolver cualquier problema de la elasticidad tridimensional lineal.

Por tener los medios contínuos infinito número de incógnitas, se subdivide el dominio que forma toda la estructura en subdominios; definiéndose para cada subdominio un campo de deformaciones ligado mediante las leyes del material a un campo de tensiones.

La definición de estos campos, se hará en base a un número finito de parámetros desconocidos que se determinarán respetando en una forma aproximada las condiciones de compatibilidad y de equilibrio.

Cada subdominio recibirá el nombre de elemento finito.

La aproximación referida la lograremos extendiendo la minimización de la energía potencial a todos los elementos. La minimización será aproximada, porque a cada elemento, se le prescribió una función de deformaciones, que, normalmente, no reflejará exactamente el campo de deformaciones real.

"Esto conduce a pensar en la estructura como compuesta de elementos distintos ligados en un número finito de puntos (nodos) por un número finito de condiciones" (IV)

Si los parámetros que se elijen para definir el campo de deformaciones están dados por un campo de desplazamientos para cada elemento, entonces el proceso, se llamará método de los desplazamientos.

Para conseguir un número finito de incógnitas, se supone que se puede expresar el desplazamiento de un punto de un elemento en función de los desplazamientos de los puntos nodales del elemento.

$$u_i = a_{ij}\, q_j \qquad (46)$$

donde u_i = son los desplazamientos en un punto cualquiera

q_j = son los desplazamientos generalizados en los puntos nodales

$$e_{ij} = b_{ijk}\, q_k \qquad (47)$$

Recordando la expresión (40)

$$\int_{V^e} \sigma_{ij}\, \delta e_{ij}\, dV - \int_{V^e} P_k\, \delta u_k\, dV - \int_{\Omega_1^e} F_k\, \delta u_k\, d\Omega = 0 \qquad (48)$$

y considerando que $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\, e_{kl}$ será

$$\int_V E_{ijkl}\, e_{kl}\,\delta e_{ij}\; dV \;-\; \int_V P_k\,\delta u_k\; dV \;-\; \int_{\Omega_1} F_k\,\delta u_k\; d\Omega = 0 \quad (49)$$

Teniendo en cuenta (46) y (47)

$$\int_{V^e} E_{ijk}\; b_{klm}\, q_m\; b_{ijn}\,\delta q_n\; dV \;-\; \int_{V^e} P_k\, a_{kn}\,\delta q_n\; dV \;-\; \int_{\Omega_1^e} F_k\, a_{kn}\,\delta q_n\; d\Omega = 0 \quad (50)$$

donde el subíndice superior indica que las ecuaciones se refie-ren a un elemento "e" dado.

La (50) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\int_{V^e} E_{ijkl}\, b_{klm}\, q_m\; b_{ijn}\; dV \;-\; \int_{V^e} P_k\, a_{kn}\, dV \;-\; \int_{\Omega_1^e} F_k\; a_{kn}\; d\Omega = 0 \quad (51)$$

Como los desplazamientos q_m son constantes, se puede po-ner que $\quad k^e_{nm}\, q_m = p_n \qquad (52)$

donde k^e_{nm} serán los coeficientes de rigidez de un dado elemento "e".

$$k^e_{nm} = \int_{V^e} E_{ijkl}\, b_{klm}\; b_{ijn}\; dV \qquad (53)$$

y p^e_n serán las fuerzas nodales equivalentes del mismo elemento.

$$p^e_n = \int_{V^e} P_k\, a_{kn}\, dV + \int_{\Omega_1^e} F_k\, a_{kn}\, d\Omega \qquad (54)$$

Extendiendo estas fórmulas a toda la estructura, tendremos:

$$\sum_e \int_{V^e} E_{ijkl}\, b_{kln}\; b_{ijn}\; dV = \sum_e \int_{V^e} P_k\, a_{kn}\, dV + \sum_e \int_{\Omega_1^e} F_k\, a_{kn}\, d\Omega \quad (55)$$

$$\sum_e k^e_{nm}\; q_m = \sum_e p^e_n = K_{nm}\, X_m = Q_n \qquad (56)$$

donde las letras mayúsculas indican que se tratan de magnitudes pertenecientes al dominio de toda la estructura.

Estas últimas relaciones, sólo son válidas exactamente cuando el campo de los desplazamientos es contínuo en todo el dominio. (IV)

Pese a ello, aunque la compatibilidad sea violada en las fronteras de los elementos, la aplicación del principio de estacionaridad de la energía potencial, puede dar una solución próxima de la exacta, como se ha demostrado para algunos casos.

2.3- CONVERGENCIA - CRITERIOS

Se dice, que una solución del método de los elementos finitos converge, cuando las soluciones obtenidas con sucesivos refinamientos de la malla, se aproximan a la solución exacta.

Los campos de desplazamientos deben cumplir con una serie de condiciones para garantir tal convergencia.

Zienkiewicz, en una forma más bien intuitiva, establece tres criterios, que han sido bastante fructíferos (V):

Primer Criterio: Cuando un elemento sufre un movimiento de cuerpo rígido, el campo de desplazamientos elegido debe ser tal que no se produzcan deformaciones en el elemento

Segundo Criterio: El campo de desplazamientos debe ser tal que pueda acompañar un estado de deformación unitaria constante en el elemento.

Tercer Criterio: El campo de desplazamientos debe ser elegido de manera tal, que las deformaciones en la frontera entre dos elementos sea finita.

Este último criterio, implica cierta continuidad entre elementos.

Las discontinuidades de desplazamientos causarán deformaciones infinitas en las interfaces , hecho que se ignora, porque la contribución de energía de los elementos se limita al interior de los elementos.

Sin embargo, cuando se afina la malla, se obtiene convergencia porque la condición de deformación constante (Criterio 2) asegura automáticamente la continuidad de los desplazamientos.

Por ello, es que algunas veces, es posible adoptar campos de desplazamientos discontínuos obteniéndose soluciones convergentes.

Cuando existe compatibilidad completa de los desplazamientos correspondientes a un lado común de dos elementos, se dice, que el tipo de elemento en cuestión es conforme.

E. R. de Arantes e Oliveira (VII)(IV)(VI) estableció también criterios de convergencia por vía matemática, estudiando la convergencia en la energía. Es decir, que tomó como norma a la energía de deformación para comparar soluciones con distintas mallas.

Hay que hacer resaltar, que un mismo problema puede ser resuelto con diferentes tipos de elementos, dando todos ellos diferentes aproximaciones a la solución considerada exacta.

Se puede lograr aproximar a la solución exacta o, aumentando el número de elementos o bien tomando elementos que tengan mayor número de grados de libertad.

Estos últimos, se llaman elementos refinados y la tendencia actual es adoptarlos en lugar de los elementos poco refinados.

El límite en el refinamiento de los elementos, está dado principalmente por motivos de precisión numérica, porque el desenvolvimiento de tales elementos es más laborioso y porque además, después de cierto refinamiento ya no se obtiene economía de tiempo en el procesamiento de los programas automáticos.

2.4- ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS

Con la discretización de la estructura contínua se aproxima la geometría de la misma mediante los lados rectos (planos) de los elementos.

En algunos problemas, para lograr una buena aproximación a la geometría se precisa usar gran cantidad de elementos.

Esto es evitado, utilizando elementos de lados curvos.

Cuando las funciones de interpolación de las coordenadas son las mismas que las utilizadas para los desplazamientos, los elementos se llaman isoparamétricos.

Los elementos isoparamétricos se pueden obtener curvando los lados de un elemento "padre" (parent) como se ve en la Fig.7

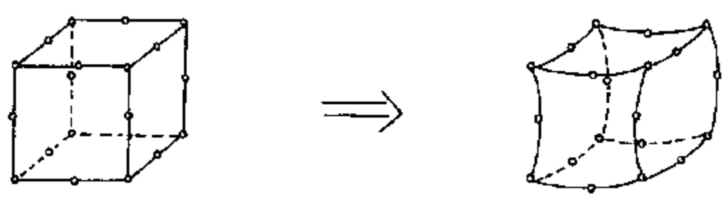


Figura 7

Zienkiewicz demostró que si el elemento "padre" cumple con los criterios de convergencia el elemento isoparamétrico correspondiente también converge.

CAPITULO 3

ELEMENTO FINITO TRIDIMENSIONAL CUADRATICO DEGENERADO

El elemento"padre"considerado, es el elemento tridimensional hexaédrico parabólico, del cual se obtuvo el correspondiente elemento isoparamétrico. Fig. 7

Las variaciones de los índices serán: $i=1,8$ $j=k=1,3$ $l=1,5$

3.1- GEOMETRIA DEL ELEMENTO

El elemento isoparamétrico tridimensional cuadrático, se transformó en un elemento degenerado, disminuyéndose las dimensiones del mismo en la dirección que representa al espesor de la cáscara.

También se eliminaron los nudos intermedios que se encontraban sobre dicha dirección. Después, se reemplazaron los nudos superiores e inferiores por un nudo medio y por un vector espesor, que liga los antiguos puntos superiores e inferiores. Este reemplazo fue posible porque en la dirección del espesor el elemento es de variación lineal.

El proceso de transformación se ve claramente en la fig.8

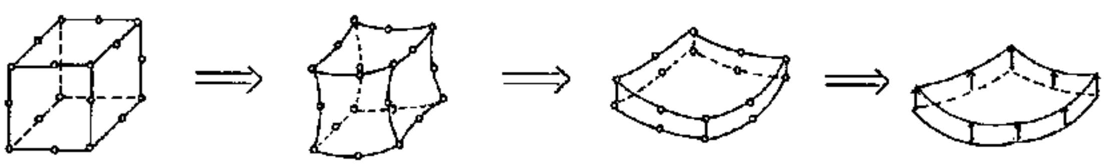


Figura 8

El espesor del elemento en un nudo i estará dado por

$$\vec{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} V_{31i} \\ V_{32i} \\ V_{33i} \end{Bmatrix} = V_{3ji} \qquad (57)$$

o definido por las coordenadas de los puntos superior e inferior, como se ve en la figura 9.

$$\vec{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{Bmatrix}_{sup.} - \begin{Bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{Bmatrix}_{inf.} \qquad (58)$$

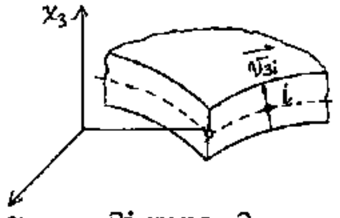


Figura 9

Se definirán las coordenadas locales curvilíneas ξ_j del elemento. ξ_1 y ξ_2 en la superficie media del mismo y ξ_3 en la dirección del espesor. Las ξ_j varían entre -1 y 1, entre cada cara.

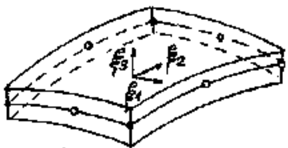


Figura 10

Las coordenadas x_j de un punto del elemento se pueden obtener en función de las coordenadas de los puntos nodales por intermedio de las coordenadas curvilíneas ξ_k .

$$x_j = a_i x_{ji} + \tfrac{1}{2}\xi_3 a_i V_{3ji} \qquad (59)$$

donde a_i son las funciones de interpolación "serendipity" cuadráticas.

De acuerdo a la numeración de los nudos del elemento adoptada (fig.10) las funciones a (V) serán:

para los puntos ubicados en los vértices $i=1,2,3,4$

$$a_i = \tfrac{1}{4}(1+\xi_1\xi_{1i})(1+\xi_2\xi_{2i})(\xi_1\xi_{1i}+\xi_2\xi_{2i}-1) \qquad (60)$$

para los puntos medios de los lados

$$\text{Si } \xi_{1i}=0 \qquad a_i=\tfrac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1+\xi_2\xi_{2i}) \qquad i=6,7 \tag{61}$$

$$\text{Si } \xi_{2i}=0 \qquad a_i=\tfrac{1}{2}(1+\xi_1\xi_{1i})(1-\xi_2^2) \qquad i=5,8 \tag{62}$$

Reemplazando en los índices i las coordenadas de los puntos nodales tendremos

$$a_1=\tfrac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(\xi_1+\xi_2-1) \tag{63}$$

$$a_2=\tfrac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(-\xi_1+\xi_2-1) \tag{64}$$

$$a_3=\tfrac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(\xi_1-\xi_2-1) \tag{65}$$

$$a_4=\tfrac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(-\xi_1-\xi_2-1) \tag{66}$$

$$a_5=\tfrac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1+\xi_2) \tag{67}$$

$$a_6=\tfrac{1}{2}(1+\xi_1)(1-\xi_2^2) \tag{68}$$

$$a_7=\tfrac{1}{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2^2) \tag{69}$$

$$a_8=\tfrac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1-\xi_2) \tag{70}$$

3.2- DEFINICION DE LOS DESPLAZAMIENTOS

El elemento tridimensional no-degenerado precisa de seis grados de libertad para poder definir el campo de desplazamientos.

En la Introducción, se mencionó que se despreciaba la energía de deformación normal a la superficie media, por lo que el campo de desplazamientos para el elemento degenerado se puede definir empleando sólo cinco grados de libertad por nudo.

Se tomarán tres desplazamientos y dos rotaciones del vector nodal que representa el espesor v_{3ji} sobre dos direcciones normales a él.

Esas direcciones estarán dadas por los versores $\overline{v}_{2i}$ y $\overline{v}_{1i}$, las rotaciones en torno a ellos serán q_{4i} y q_{5i}.

El campo de desplazamientos, por lo tanto se puede expresar por (VIII):

$$u_j = a_i \begin{Bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ q_{3i} \end{Bmatrix} + \sum_i \frac{1}{2}\ t_i \beta \left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix} \qquad (71)$$

donde t es el espesor del elemento en el punto i ,y con q_{ki} se designan los desplazamientos nodales. La matriz $\left[\phi_i\right]$ está definida por:

$$\left[\phi_i\right]_{3\times 2} = \left[\overline{v}_{1j} \qquad \overline{v}_{2j}\right] \qquad (72)$$

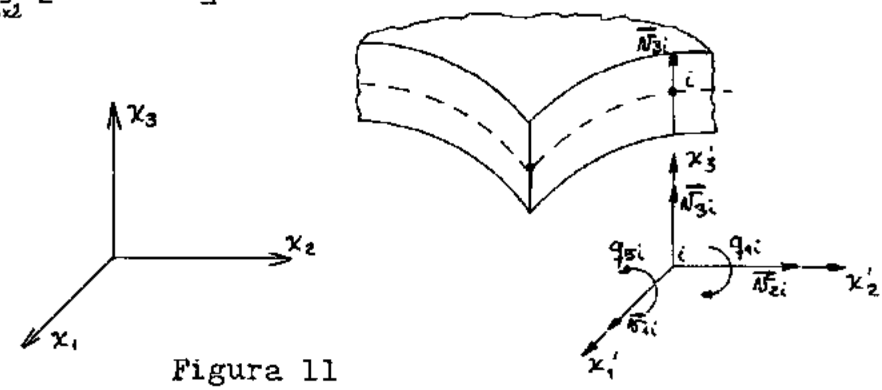


Figura 11

Como el número de direcciones $\overline{v}_{2i}$ y $\overline{v}_{1i}$ son infinitas, se definirán las que se han elegido en este trabajo.

Para ello consideraremos a:

$\vec{v}_{3i}$ que es el vector que representa el espesor en el punto i.
$\vec{v}_{2i}$ que es vector normal al plano formado por $\vec{v}_{3i}$ y el eje x_1 .
$\vec{v}_{1i}$ que es el vector normal a los otros dos.

Matematicamente, los podremos definir, mediante las siguientes expresiones:

$$\vec{V}_{2i} = \vec{V}_{3i} \times \vec{i} \qquad (73) \qquad \text{donde} \qquad \vec{i} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{V}_{2i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{33i} \\ -V_{32i} \end{Bmatrix} \qquad (74)$$

$$\vec{V}_{1i} = \vec{V}_{2i} \times \vec{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} V_{33i}^2 + V_{32i}^2 \\ -V_{32i}\ V_{31i} \\ -V_{33i}\ V_{31i} \end{Bmatrix} \qquad (75)$$

$$\overline{V}_{1i} = \frac{\vec{V}_{1i}}{|\vec{V}_{1i}|} \qquad \overline{V}_{2i} = \frac{\vec{V}_{2i}}{|\vec{V}_{2i}|} \qquad (76)$$

Como para definir la geometría del elemento se necesitan más parámetros (seis), que, para la definición del campo de desplazamientos(cinco), el elemento pertenece al tipo de los llamados super-paramétricos.

3.3- DEFINICION DE DEFORMACIONES Y TENSIONES

En las direcciones de los versores definidos en 3.2- (Figura 11), se tomará una terna ortogonal de ejes x'_j .

Se definirán las deformaciones específicas en relación a ese sistema local.

Se recordará, que se ha despreciado la energía de deformación en la dirección correspondiente a las tensiones normales a la superficie media de la cáscara. Por lo tanto, será, $\sigma_{x'_3}=0$.

$$\left\{\varepsilon'\right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u'_1}{\partial x'_1} \\ \dfrac{\partial u'_2}{\partial x'_2} \\ \dfrac{\partial u'_1}{\partial x'_2} + \dfrac{\partial u'_2}{\partial x'_1} \\ \dfrac{\partial u'_3}{\partial x'_1} + \dfrac{\partial u'_1}{\partial x'_3} \\ \dfrac{\partial u'_3}{\partial x'_2} + \dfrac{\partial u'_2}{\partial x'_3} \end{Bmatrix} \tag{77}$$

La matriz de elasticidad puede plantearse para materiales anisotrópicos, o bien en función de ξ_3, con lo que se pueden re solver casos de estructuras de tipo " sandwich".

En el caso de un material isotrópico, será:

$$\left[E\right] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \tag{78}$$

Nótese la diferencia con la matriz presentada en el Capítulo 1.

Siguiendo a Reissner, y con el objeto de mejorar la aproximación obtenida debido a los desplazamientos por corte, se introdujo el factor $k = 1,2$.

De acuerdo al desarrollo de este elemento, la aproximación en las tensiones de corte, conduce a una distribución constante de las mismas através del espesor, cuando en realidad debería ser de tipo parabólica.

3.4- MATRIZ DE RIGIDEZ

3.4.1- Algunas de las transformaciones necesarias para la obtención de la matriz de rigidez

Las derivadas de los desplazamientos en coordenadas locales x'_j están relacionadas con las derivadas de los desplazamientos en el sistema global mediante

$$\left[\frac{\partial(u'_j)}{\partial(x'_k)}\right] = \left[\Theta\right]^T \left[\frac{\partial(u_j)}{\partial(x_k)}\right] \left[\Theta\right] \qquad (79)$$

donde

$$\left[\frac{\partial(u'_j)}{\partial(x'_k)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial u'_3}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} & \frac{\partial u'_3}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial u'_1}{\partial x'_3} & \frac{\partial u'_2}{\partial x'_3} & \frac{\partial u'_3}{\partial x'_3} \end{bmatrix} \quad y \quad \left[\frac{\partial(u_j)}{\partial(x_k)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \qquad (80)$$

y

$$\left[\Theta\right] = \left[\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3\right] \qquad (81)$$

En la fórmula (81) no se agregó el subíndice i porque en este caso no se trata de valores nodales, sino de funciones de ξ_j.

Las $\bar{v}_j$ se definirán del mismo modo que (73),(74) y (75)

$$\vec{v}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \end{Bmatrix} \qquad (82)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \quad \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \end{Bmatrix} \qquad (83)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\right) \\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right) \end{Bmatrix} \qquad (84)$$

$$\bar{v}_j = \frac{\vec{V}_j}{|\vec{V}_j|} \qquad (85)$$

Las derivadas de los desplazamientos en el sistema global respecto de las coordenadas x_j y las mismas, respecto a las coordenadas curvilíneas ξ_k están ligadas mediante la matriz jacobiana $[J]$.

$$[u_{j,k}] = [J]^{-1}\left[\frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}\right] \qquad (86)$$

donde $[u_{j,k}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$ y $\left[\frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}$ (87)

la matriz jacobiana es $[J]$ (88)

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}$$

y su inversa será

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \frac{1}{\|J\|} \qquad (89)$$

Se puede definir una matriz $[A]$ (IX) tal que

$$[A]_{3\times 3} = [\theta]^{T}[J]^{-1} \qquad (90)$$

Aplicando la condición de ortogonalidad entre los vectores que forman las matrices $[\theta]$ y $[J]^{-1}$ se tiene que

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \qquad (91)$$

Teniendo en cuenta (79) y (86)

$$\left[\frac{\partial(u'_j)}{\partial(x'_k)}\right]=\left[\theta\right]^T\left[J\right]^{-1}\left[\frac{\partial(u_j)}{\partial(\xi_k)}\right]\left[\theta\right] \qquad (92)$$

que con (91) quedará

$$\left[\frac{\partial(u'_j)}{\partial(x'_k)}\right]=\left[A\right]\left[\frac{\partial(u_j)}{\partial(\xi_k)}\right]\left[\theta\right] \qquad (93)$$

3.4.1.1- Derivadas que intervienen en las transformaciones

$$\frac{\partial a_1}{\partial \xi_1}=(1+\xi_2)(\tfrac{1}{2}\xi_1+\tfrac{1}{4}\xi_2) \qquad (94)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial \xi_2}=(1+\xi_1)(\tfrac{1}{4}\xi_1+\tfrac{1}{2}\xi_2) \qquad (95)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \xi_1}=(1+\xi_2)(\tfrac{1}{2}\xi_1-\tfrac{1}{4}\xi_2) \qquad (96)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \xi_2}=(1-\xi_1)(\tfrac{1}{2}\xi_2-\tfrac{1}{4}\xi_1) \qquad (97)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial \xi_1}=(1-\xi_2)(\tfrac{1}{2}\xi_1-\tfrac{1}{4}\xi_2) \qquad (98)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial \xi_2}=(1+\xi_1)(\tfrac{1}{2}\xi_2-\tfrac{1}{4}\xi_1) \qquad (99)$$

$$\frac{\partial a_4}{\partial \xi_1}=(1-\xi_2)(\tfrac{1}{2}\xi_1\ \ \tfrac{1}{4}\xi_2) \qquad (100)$$

$$\frac{\partial a_4}{\partial \xi_2}=(1-\xi_1)(\tfrac{1}{4}\xi_1\ \ \tfrac{1}{2}\xi_2) \qquad (101)$$

$$\frac{\partial a_5}{\partial \xi_1}=-(1\ \ \xi_2)\xi_1 \qquad (102)$$

$$\frac{\partial a_5}{\partial \xi_2}=\tfrac{1}{2}(1-\xi_1^2) \qquad (103)$$

$$\frac{\partial a_6}{\partial \xi_1}=\tfrac{1}{2}(1-\xi_2^2) \qquad (104)$$

$$\frac{\partial a_6}{\partial \xi_2}=-(1\ \ \xi_1)\xi_2 \qquad (105)$$

$$\frac{\partial a_7}{\partial \xi_1}=\tfrac{1}{2}(\xi_2^2-1) \qquad (106)$$

$$\frac{\partial a_7}{\partial \xi_2}=(\xi_1-1)\xi_2 \qquad (107)$$

$$\frac{\partial a_8}{\partial \xi_1}=(\xi_2-1)\xi_1 \qquad (108)$$

$$\frac{\partial a_8}{\partial \xi_2}=\tfrac{1}{2}(\xi_1^2-1) \qquad (109)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial \xi_3}=0 \qquad (110)$$

3.4.2- <u>Deformaciones específicas</u>

La expresión (77) de las deformaciones específicas se puede escribir de la siguiente manera:

$$\{\varepsilon'\}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x'_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x'_2} & \frac{\partial}{\partial x'_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x'_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x'_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x'_3} & \frac{\partial}{\partial x'_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{Bmatrix} \qquad (111)$$

y por (93)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial u'_3}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} & \frac{\partial u'_3}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial u'_1}{\partial x'_3} & \frac{\partial u'_2}{\partial x'_3} & \frac{\partial u'_3}{\partial x'_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{bmatrix} \qquad (112)$$

Desarrollando la (112) obtendremos

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1}=\left(A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)\theta_{11}+\left(A_{11}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)\theta_{21}+\left(A_{11}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right)\theta_{31} \quad (113)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x'_1}=\left(A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)\theta_{12}+\left(A_{11}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)\theta_{22}+\left(A_{11}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right)\theta_{32} \quad (114)$$

$$\frac{\partial u'_3}{\partial x'_1}=\left(A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)\theta_{13}+\left(A_{11}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)\theta_{23}+\left(A_{11}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}-A_{12}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right)\theta_{33} \quad (115)$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_2}=\left(A_{21}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}+A_{22}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)\theta_{11}+\left(A_{21}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}+A_{22}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)\theta_{21}+\left(A_{21}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}+A_{22}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right)\theta_{31} \quad (116)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x'_2}=\left(A_{21}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}+A_{22}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)\theta_{12}+\left(A_{21}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}+A_{22}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)\theta_{22}+\left(A_{21}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}+A_{22}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right)\theta_{32} \quad (117)$$

$$\frac{\partial u'_3}{\partial x'_2}=\left(A_{21}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}+A_{22}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right)\theta_{13}+\left(A_{21}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}+A_{22}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)\theta_{23}+\left(A_{21}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}+A_{22}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right)\theta_{33} \quad (118)$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_3} = A_{33}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\theta_{11} + A_{33}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\theta_{21} + A_{33}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\theta_{31} \qquad (119)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x'_3} = A_{33}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\theta_{12} + A_{33}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\theta_{22} + A_{33}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\theta_{32} \qquad (120)$$

$$\frac{\partial u'_3}{\partial x'_3} = A_{33}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\theta_{13} + A_{33}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\theta_{23} + A_{33}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\theta_{33} \qquad (121)$$

Operando, se obtienen los términos de la (111)

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} = A_{11}\theta_{11}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + A_{12}\theta_{11}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + A_{11}\theta_{21}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + A_{12}\theta_{21}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + A_{11}\theta_{31}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + A_{12}\theta_{31}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \qquad (122)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} = A_{21}\theta_{12}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + A_{22}\theta_{12}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + A_{21}\theta_{22}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + A_{22}\theta_{22}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + A_{21}\theta_{32}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + A_{22}\theta_{32}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \qquad (123)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} = {} & (A_{21}\theta_{11} + A_{11}\theta_{12})\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + (A_{22}\theta_{11} + A_{12}\theta_{12})\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \\ & + (A_{21}\theta_{21} + A_{11}\theta_{22})\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + (A_{22}\theta_{21} + A_{12}\theta_{22})\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \\ & + (A_{21}\theta_{31} + A_{11}\theta_{32})\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + (A_{22}\theta_{31} + A_{12}\theta_{32})\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \qquad (124)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'_1}{\partial x'_3} + \frac{\partial u'_3}{\partial x'_1} = {} & A_{11}\theta_{13}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + A_{12}\theta_{13}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + A_{33}\theta_{11}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \\ & + A_{11}\theta_{23}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + A_{12}\theta_{23}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + A_{33}\theta_{21}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \\ & + A_{11}\theta_{33}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + A_{12}\theta_{33}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} + A_{33}\theta_{31}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \qquad (125)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} = A_{11}\,\theta_{11}\left(\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}\,q_{1i}+\sum_i \frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}\,t_i\,\xi_3\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix}\right)+$$
$$+A_{12}\,\theta_{11}\left(\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\,q_{1i}+\sum_i \frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\,\xi_3\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix}\right)+$$
$$+A_{11}\,\theta_{21}\left(\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}\,q_{2i}+\sum_i \frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}\,\xi_3\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix}\right)+$$
$$+A_{12}\,\theta_{21}\left(\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\,q_{2i}+\sum_i \frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\,\xi_3\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix}\right)+$$
$$+A_{11}\,\theta_{31}\left(\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}\,q_{3i}+\sum_i \frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}\,\xi_3\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix}\right)+$$
$$+A_{12}\,\theta_{31}\left(\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\,q_{3i}+\sum_i \frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\,\xi_3\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix}\right) \qquad (130)$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} = \theta_{11}\left(A_{11}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\right)q_{1i}+$$
$$+\theta_{21}\left(A_{11}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\right)q_{2i}+$$
$$+\theta_{31}\left(A_{11}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\right)q_{3i}+$$
$$+\sum \frac{1}{2}\left(A_{11}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}+A_{12}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\right)\left(\theta_{11}+\theta_{21}+\theta_{31}\right)\xi_3\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix} \qquad (131)$$

y llamando

$$\mathrm{B}_{1i}= A_{11}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1} + A_{12}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2} \qquad (132)$$

Considerando (131) y (132) se obtiene

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} = \theta_{11}\,\mathrm{B}_{1i}\,q_{1i} + \theta_{21}\,\mathrm{B}_{1i}\,q_{2i} + \theta_{31}\,\mathrm{B}_{1i}\,q_{3i} +$$
$$+\left(\theta_{11}+\theta_{21}+\theta_{31}\right)\sum_i \frac{1}{2}\,\mathrm{B}_{1i}\,\xi_3\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix} \qquad (133)$$

que se puede escribir como

$$\frac{\partial u_2'}{\partial x_3'}+\frac{\partial u_3'}{\partial x_2'} = A_{21}\,\theta_{13}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}+A_{22}\,\theta_{13}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}+A_{33}\,\theta_{12}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}+$$
$$+A_{21}\,\theta_{23}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}+A_{22}\,\theta_{23}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}+A_{33}\,\theta_{22}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}+$$
$$+A_{21}\,\theta_{33}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}+A_{22}\,\theta_{33}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}+A_{33}\,\theta_{32}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \qquad (126)$$

Derivando la (71) tendremos

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}\\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1}\end{Bmatrix}=\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}\begin{Bmatrix}q_{1i}\\ q_{2i}\\ q_{3i}\end{Bmatrix}+\sum_i \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}\,\xi_3\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix} \qquad (127)$$

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\end{Bmatrix}=\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\begin{Bmatrix}q_{1i}\\ q_{2i}\\ q_{3i}\end{Bmatrix}+\sum_i \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_i}{\partial \xi_2}\,\xi_3\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix} \qquad (128)$$

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}\end{Bmatrix}=\sum_i \frac{1}{2}a_i\,t_i\left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix}q_{4i}\\ q_{5i}\end{Bmatrix} \qquad (129)$$

Estos valores se reemplazarán en (122),(123),(124),(125) y (126)

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} = \theta_{11}\left(B_{1i}\, q_{1i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{1i}\, \xi_3\, t_i \,\left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) + $$
$$+ \theta_{21}\left(B_{1i}\, q_{2i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{1i}\, \xi_3\, t_i \,\left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) +$$
$$+ \theta_{31}\left(B_{1i}\, q_{3i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{1i}\, \xi_3\, t_i \left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) \qquad (134)$$

Similarmente la (123) quedará

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} = \theta_{12}\left(B_{2i}\, q_{1i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{2i}\, \xi_3\, t_i \,\left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) +$$
$$+ \theta_{22}\left(B_{2i}\, q_{2i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{2i}\, \xi_3\, t_i \,\left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) +$$
$$+ \theta_{32}\left(B_{2i}\, q_{3i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{2i}\, \xi_3\, t_i \,\left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) \qquad (135)$$

Donde

$$B_{2i} = A_{21} \frac{\partial a_i}{\partial \xi_1} + A_{22} \frac{\partial a_i}{\partial \xi_2} \qquad (136)$$

y la (124) poderá expresarse como

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} = \theta_{11}\left(B_{2i}\, q_{1i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{2i}\, \xi_3\, t_i \left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) +$$
$$+ \theta_{12}\left(B_{1i}\, q_{1i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{1i}\, \xi_3\, t_i \left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) +$$
$$+ \theta_{21}\left(B_{2i}\, q_{2i} + \sum_i{}' \tfrac{1}{2} B_{2i}\, \xi_3\, t_i \left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) +$$
$$+ \theta_{22}\left(B_{1i}\, q_{2i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{1i}\, \xi_3\, t_i \left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) +$$
$$+ \theta_{31}\left(B_{2i}\, q_{3i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{2i}\, \xi_3\, t_i \left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) +$$
$$+ \theta_{32}\left(B_{1i}\, q_{3i} + \sum_i \tfrac{1}{2} B_{1i}\, \xi_3\, t_i \left[\phi_i\right] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) \qquad (137)$$

De la misma manera se procede con (125) y (126)

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_3}+\frac{\partial u'_3}{\partial x'_1} = \theta_{13}\left(B_{1i}\, q_{1i}+\sum_i \frac{1}{2} B_{1i}\, \xi_3 t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{11}\left(\sum_i \frac{1}{2} C_{1i}\, t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{23}\left(B_{1i}\, q_{2i}+\sum_i \frac{1}{2} B_{1i}\, \xi_3 t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{21}\left(\sum_i \frac{1}{2} C_{1i}\, t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{33}\left(B_{1i}\, q_{3i}+\sum_i \frac{1}{2} B_{1i}\, \xi_3 t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{31}\left(\sum_i \frac{1}{2} C_{1i}\, t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) \qquad (138)$$

Siendo

$$C_{1i}= A_{33}\, a_i \qquad (140)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x'_3}+\frac{\partial u'_3}{\partial x'_2} = \theta_{13}\left(B_{2i}\, q_{1i}+\sum_i \frac{1}{2} B_{2i}\, \xi_3 t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{12}\left(\sum_i \frac{1}{2} C_{1i}\, t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{23}\left(B_{2i}\, q_{2i}+\sum_i \frac{1}{2} B_{2i}\, \xi_3 t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{22}\left(\sum_i \frac{1}{2} C_{1i}\, t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{33}\left(B_{2i}\, q_{3i}+\sum_i \frac{1}{2} B_{2i}\, \xi_3 t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right)+$$
$$+\theta_{32}\left(\sum_i \frac{1}{2} C_{1i}\, t_i \left[\phi_i\right]\begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix}\right) \qquad (139)$$

Con las (134),(135),(137),(138) y (139) se puede obtener la expresion (111) de las deformaciones específicas en las dire cciones locales en función de los desplazamientos nodales.

$$\{\varepsilon'\}_{5\times1} = [B_i][\theta]^T \begin{Bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ q_{3i} \end{Bmatrix} + \sum_i \frac{1}{2} t_i \left[\xi_3 [B_i] + [C_i] \right] [\theta]^T [\phi_i] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix} \quad (141)$$

Siendo

$$[B_i] = \begin{bmatrix} B_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2i} & 0 \\ B_{2i} & B_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & B_{1i} \\ 0 & 0 & B_{2i} \end{bmatrix} \quad (142)$$

y

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & C_{1i} & 0 \end{bmatrix} \quad (143)$$

Expresando la (141) en forma matricial se tendrá

$$
\{\varepsilon'\}_{5\times1} = \left[[B_1]_{5\times3} \cdots\cdots [B_8] \;\vdots_{5\times24}\; \frac{1}{2}t_1\left[\zeta_3[B_1]+[C_1]\right]_{5\times3} \cdots\cdots \frac{1}{2}t_8\left[\zeta_3[B_8]\;[C_8]\right]\right]_{5\times48}
\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & [\Theta]^T_{3\times3} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}_{48\times48}
\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & [0]_{24\times16} \\ & & 1 & & \\ \hline & & & [\phi_1]_{3\times2} & \\ & [0]_{24\times24} & & & \ddots \\ & & & & [\phi_8] \end{array}\right]_{48\times40}
\begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \\ q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \\ \vdots \\ q_{1i} \\ q_{2i} \\ q_{3i} \\ \vdots \\ q_{18} \\ q_{28} \\ q_{38} \\ q_{41} \\ q_{51} \\ \vdots \\ q_{4i} \\ q_{5i} \\ \vdots \\ q_{48} \\ q_{58} \end{Bmatrix}_{40\times1}
\qquad (144)
$$

3.4.4- MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO

Volviendo al capítulo II, podemos utilizar las fórmulas (47) y (53). Expresando esta última en forma matricial, obtendremos la matriz de rigidez k del elemento.

En el vector de los desplazamientos nodales generalizados que aparece en la expresión de las deformaciones específicas (144), se ve que en el mismo, aparecen primero los desplazamientos de todos los nudos del elemento y sólo después las rotaciones.

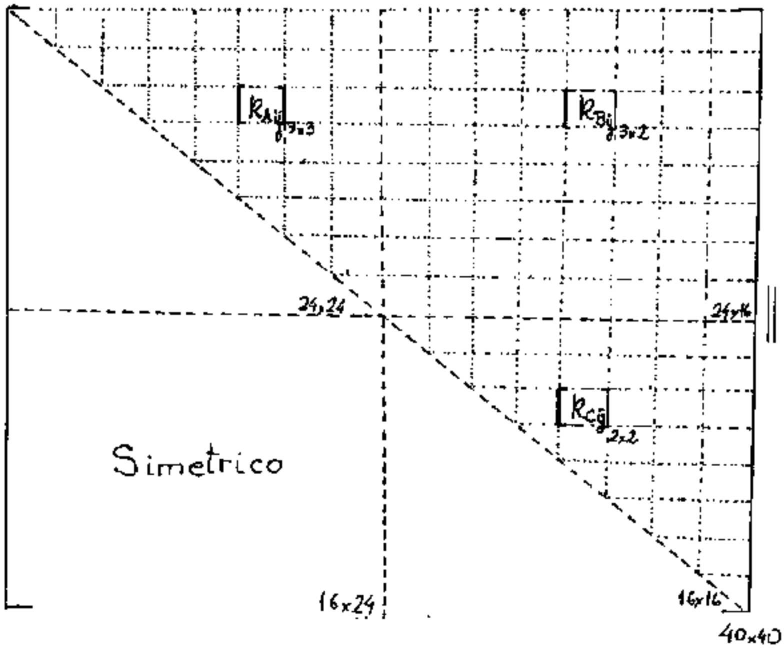
Por consiguiente, para disminuir el ancho de la banda de la matriz de rigidez de la estructura, habrá que reordenar las matrices de rigidez de los elementos de manera tal, que en el vector de los desplazamientos generalizados nodales, aparezcan agrupados los tres desplazamientos y las dos rotaciones de cada nudo del elemento considerado.

En la fórmula (145) se presentará la matriz de rigidez del elemento sin dicho reordenamiento, ya que de esta manera, la expresión queda más compacta y cómoda para su posterior programación.

$$
\left[k^{e}\right]_{40\times 40}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}
\begin{bmatrix} \underset{24\times 24}{1} & [0] \\ [0] & \underset{\substack{2\times 3\\ 16\times 24}}{\left[\phi_i\right]^{T}} \end{bmatrix}_{40\times 48}
\begin{bmatrix} \left[\theta\right]_{3\times 3} \end{bmatrix}_{48\times 48}
\begin{bmatrix} \underset{24\times 5}{\left[B_i\right]^{T}_{3\times 5}} \\ \underset{24\times 5}{\frac{1}{2}t_i\left[\xi_3\left[B_i\right]+\left[C_i\right]\right]_{3\times 5}} \end{bmatrix}_{48\times 5}
\left[E'\right]_{5\times 5}
\begin{bmatrix} \left[B_i\right]_{5\times 3} & \frac{1}{2}t_i\left[\xi_3\left[B_i\right]+\left[C_i\right]\right]_{5\times 3} \end{bmatrix}_{5\times 48}
\begin{bmatrix} \left[\theta\right]^{T}_{3\times 3} \end{bmatrix}_{48\times 48}
\begin{bmatrix} \underset{24\times 24}{1} & [0] \\ [0] & \underset{\substack{3\times 2\\ 24\times 16}}{\left[\phi_i\right]} \end{bmatrix}_{48\times 40}
\left\|J\right\| d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \qquad (145)
$$

La matriz de rigidez (145) también se podrá poner como

$$\left[k^e\right]_{40\times40} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}$$



$$\|J\| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \qquad (146)$$

donde

$$\left[k_{Aij}\right]_{3\times3} = \left[\theta\right]\left[B_i\right]^T\left[E\right]\left[B_j\right]\left[\theta\right]^T \qquad (147)$$

$$\left[k_{Bij}\right]_{3\times2} = \frac{1}{2}\, t_j \left[\theta\right]\left[B_i\right]^T\left[E\right]\left[\xi_3\left[B_j\right]+\left[C_j\right]\right]\left[\theta\right]^T\left[\phi_j\right] \qquad (148)$$

$$\left[k_{Cij}\right]_{2\times2} = \frac{1}{4}\, t_i\, t_j \left[\phi_i\right]^T\left[\theta\right]\left[\xi_3\left[B_i\right]+\left[C_i\right]\right]^T\left[E\right]\left[\xi_3\left[B_j\right]+\left[C_j\right]\right]\left[\theta\right]^T\left[\phi_j\right] \qquad (149)$$

Por lo tanto, para obtener la matriz de rigidez de un elemento habrá que resolver las siguientes integrales,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\theta][B_i]^T[E][B_j][\theta]^T \|J\| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \tag{150}$$

donde

$$[B_i]^T[E][B_j]=\begin{bmatrix} B_{1i}E_{11}B_{1j}+B_{2i}E_{33}B_{2j} & B_{1i}E_{12}B_{2j}+B_{2i}E_{33}B_{1j} & 0 \\ B_{2i}E_{21}B_{1j}+B_{1i}E_{33}B_{2j} & B_{2i}E_{22}B_{2j}+B_{1i}E_{33}B_{1j} & 0 \\ 0 & 0 & B_{1i}E_{44}B_{1j}+B_{2i}E_{55}B_{2j} \end{bmatrix} \tag{151}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}[\theta][B_i]^T[E]\, t_j \;\; \xi_3[B_j][\theta]^T[\phi_j] \|J\| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \tag{152}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}[\theta][B_i]^T[E] \; t_j[C_j][\theta]^T[\phi_j] \|J\| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \tag{153}$$

donde

$$[B_i]^T[E][C_j]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{1i}E_{44}C_{1j} & B_{2i}E_{55}C_{1j} & 0 \end{bmatrix} \tag{154}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}[\phi_i]^T[\theta] \; t_i \; \xi_3^2[B_i]^T[E] \, t_j [B_j][\theta]^T[\phi_j]\|J\| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \tag{155}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}[\phi_i]^T[\theta] \; t_i \;\; \xi_3 [B_i]^T[E] \, t_j \left[C_j\right][\theta]^T[\phi_j] \|J\| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \tag{156}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4} [\phi_i]^T [\theta] \; t_i \; [C_i]^T [E] \; t_j \; \xi_3 [B_j] [\theta]^T [\phi_j] \, \| J \| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \qquad (157)$$

donde

$$[C_i]^T [E] [B_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{1i} E_{44} B_{1j} \\ 0 & 0 & C_{1i} E_{55} B_{2j} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (158)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4} [\phi_i]^T [\theta] \, t_i \, [C_i]^T [E] \, t_j [C_j] [\theta]^T [\phi_j] \, \| J \| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \qquad (159)$$

donde

$$[C_i]^T [E] [C_j] = \begin{bmatrix} C_{1i} E_{44} C_{1j} & 0 & 0 \\ 0 & C_{1i} E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (160)$$

C A P I T U L O 4

FUERZAS NODALES EQUIVALENTES

4.1- INTRODUCCION

En la fórmula (54) se mostraron las expresiones de las fuerzas nodales equivalentes para cargas de supreficie distri buidas y para cargas de volumen.

En este capítulo, se explicitarán las fórmulas para el elemento estudiado y también se considerarán otros tipos de cargas.

Las expresiones de las fuerzas nodales equivalentes, se obtuvieron mediante la aplicación del principio de los traba jos virtuales.

Los índices i y j utilizados en este capítulo, variarán de 1 a 8.

4.2- P E S O P R O P I O

Para peso propio, se pueden explicitar las fuerzas equi valentes en los nudos de los elementos.

$$\{Q\}_{40\times 1} = \int_V [N]^T \{\rho\} \, dV \qquad (161)$$

donde $$[N]_{3\times 40} = \left[\begin{array}{ccc|c|} a_1 & 0 & 0 & \\ 0 & a_1 & 0 & \frac{1}{2} t_1 \xi_3 a_1 \; \phi_1 \\ 0 & 0 & a_1 & \end{array} \qquad \right]_{3\times 40} \qquad (162)$$

se obtuvo de escribir en forma matricial la relación (71)

$$\{u\}_{3\times 1} = [N]_{3\times 40} \{q\}_{40\times 1} \qquad (163)$$

y
$$\{\rho\} = \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} \qquad (164)$$

donde ρ_1, ρ_2 y ρ_3 son las componentes del versor aceleración de la gravedad en el sistema global elegido, multiplicado por el peso específico del material que compone la estructura.

Recordando que

$$dV = \|J\| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \qquad (165)$$

la (161) quedará, considerando solamente un nudo

$$\{Q_i\}_{3\times 1} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & a_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} \|J\| \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \qquad (166)$$

donde sólo aparecen fuerzas nodales en las tres direcciones de los ejes de referencia, porque no hay solicitaciones que provoquen fuerzas nodales en las direcciones de q_{4i} y q_{5i} .

4.3- VARIACION DE TEMPERATURA

Con el Principio de los Trabajos Virtuales se obtiene que

$$\{Q\}=-\int_V [\beta][E]\{\varepsilon'_T\}\,dV \qquad (167)$$

donde $[\beta]$ se obtiene al expresar en forma matricial la (144)

$$\{\varepsilon'\}=[\beta]\{q\} \qquad (168)$$

y $\{\varepsilon'_T\}$ son las deformaciones específicas producidas por la variación de la temperatura.

$$\{\varepsilon'_T\}=\alpha\, T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (169)$$

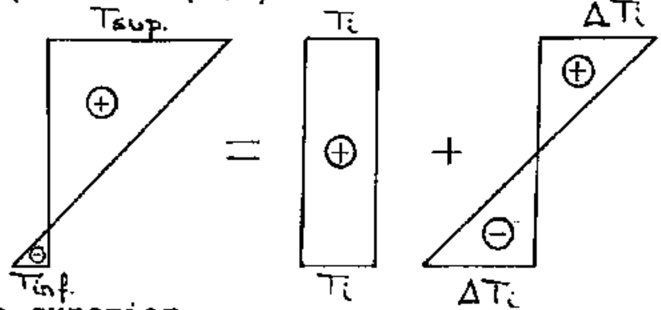
Se adoptó para la temperatura T, una variación cuadrática sobre la superficie de los elementos y una variación line al através del espesor.

O sea que, según la (169) las deformaciones específicas pueden variar cuadráticamente, cuando para la formulación adoptada tendría que ser lineal.

Prácticamente, la diferencia de aproximación en el orden de las deformaciones específicas conduce a resultados aceptables y permite, en este caso, abarcar distribuciones de temperaturas de mucho interés, como es el caso de cuando varía linealmente en el espesor de la estructura.

Entonces se definirá:

$$T = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = a_i\, T_i + \xi_3\, a_i\, \Delta T_i \qquad (170)$$



con $\quad T_i = \dfrac{T_{sup} + T_{inf}}{2} \qquad (171)$

$$\Delta T_i = \frac{T_{sup} - T_{inf}}{2} \qquad (172)$$

donde

T_{sup} = temperatura en la cara superior

T_{inf} = temperatura en la cara inferior

Desenvolviendo la (167)

$$[E]\ \{\varepsilon_T'\} = \frac{\alpha\ T\ E}{(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} 1+\nu \\ \nu+1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\alpha\ T\ E}{(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (173)$$

$$\underset{40\times 5}{[\beta]^T} = \underset{40\times 48}{\begin{bmatrix} 1 & [0] \\ [0] & [\phi_i] \end{bmatrix}} \underset{48\times 48}{\begin{bmatrix} [\theta] \end{bmatrix}} \underset{48\times 5}{\begin{bmatrix} [B_i]^T \\ \frac{1}{2} t_i \left[\xi_3 [B_i] \ \ [C_i] \right]^T \end{bmatrix}} \qquad (174)$$

Teniendo en cuenta la expresión (173); de las fórmulas

$$[B_i] = \begin{bmatrix} B_{1i} & 0 & B_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2i} & B_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{1i} & B_{2i} \end{bmatrix} \qquad (175)$$

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & C_{1i} & 0 \end{bmatrix} \qquad (176)$$

sólo intervendrá una parte de la matriz (175):

$$[B_i'] = \begin{bmatrix} B_{1i} & 0 \\ 0 & B_{2i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (177)$$

Por lo que se tendrá:

$$\{Q\}_{40x1} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \left\{ \begin{array}{c} [\theta]^T [B_i'] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \hdashline \frac{1}{2} t_i \xi_3 [\phi_i]^T [\theta] [B_i'] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{array} \right\} \|J\| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3 \qquad (178)$$

Operando y expresando la (178) para un nudo genérico i:

$$\{Q_i\}_{5x1} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \left\{ \begin{array}{l} \theta_{11} B_{1i} - \theta_{12} B_{2i} \\ \theta_{21} B_{1i} - \theta_{22} B_{2i} \\ \theta_{31} B_{1i} - \theta_{32} B_{2i} \\ \frac{1}{2} t_i \xi_3 \left(B_{1i}(\phi_{11}\theta_{11} + \phi_{21}\theta_{21} + \phi_{31}\theta_{31}) + B_{2i}(\phi_{11}\theta_{12} + \phi_{21}\theta_{22} + \phi_{31}\theta_{32}) \right) \\ \frac{1}{2} t_i \xi_3 \left(B_{1i}(\phi_{12}\theta_{11} + \phi_{22}\theta_{21} + \phi_{32}\theta_{31}) + B_{2i}(\phi_{12}\theta_{12} + \phi_{21}\theta_{22} + \phi_{32}\theta_{32}) \right) \end{array} \right\} \|J\| d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3$$

(179)

4.4- CARGA DISTRIBUIDA SOBRE LA SUPERFICIE DE LOS ELEMENTOS

Las cargas podrán variar cuadráticamente y la expresión de las fuerzas nodales equivalentes será:

$$\{Q\}_{24\times1} = \int_{\Omega} [N']^{T}_{24\times3} \{f_s\}_{3\times1} \, d\Omega \qquad (180)$$

donde $[N']^T$ es la parte de $[N]^T$ que queda después de eliminar las columnas y las filas correspondientes a las rotaciones, ya que en dichas direcciones generalizadas no hay cargas actuando. De allí proviene también que la dimensión del vector de las fuerzas nodales se haya indicado por 24x1.

$\{f_s\}$ es la función que expresa la distribución de las fuerzas de superficie en función de los valores nodales de las mismas.

$$\{f_s\} = a_i \begin{Bmatrix} f_{s1i} \\ f_{s2i} \\ f_{s3i} \end{Bmatrix} \qquad (181)$$

$$\{f_s\} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_i & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_i & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & a_i & \cdots \end{bmatrix}_{3\times24} \begin{Bmatrix} f_{s11} \\ f_{s21} \\ f_{s31} \\ \vdots \\ f_{s1i} \\ f_{s2i} \\ f_{s3i} \\ \vdots \end{Bmatrix}_{24\times1} \qquad (182)$$

$$\{f_s\}=[N'] \begin{Bmatrix} f_{s1i} \\ f_{s2i} \\ f_{s3i} \end{Bmatrix} \tag{183}$$

Recordando que

$$d\Omega=\begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{Vmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 \tag{184}$$

tendremos

$$\underset{24x1}{\{Q\}}=\int_\Omega [N']^T [N'] \{f_s\}\ d\Omega \tag{185}$$

y para un punto nodal

$$\underset{3x1}{\{Q_i\}}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} a_i\, a_j \begin{Bmatrix} f_{s1i} \\ f_{s2i} \\ f_{s3i} \end{Bmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 \tag{186}$$

4.5- <u>CARGAS DISTRIBUIDAS SOBRE LOS LADOS DE LOS ELEMENTOS</u>

Como ya se vió la expresión de las fuerzas nodales es

$$\underset{40x1}{\{Q\}}=\int_\ell [N'']^T \{f_\ell\}\ d\ell \tag{187}$$

Como la matriz $[N]$ (163) es de 3x40, ya que sólo contempla las tres direcciones de los ejes globales, es insuficiente en este caso puesto que el vector $\{f_\ell\}$ de fuerzas distribuídas sobre los lados de los elementos es de 5x1. Esto se debe a que también tiene en cuenta los momentos distribuídos, que estarán en correspondencia con las rotaciones que no figuran en $[N]$.

Por ello, es que se definirá una nueva matriz de interpolación $[N'']$.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \left[N'' \right] \begin{Bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ q_{3i} \\ q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix} \qquad (188)$$

donde u_4 y u_5 son rotaciones.

Desenvolviendo

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc:c} a_1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & a_1 & 0 & \multicolumn{2}{c:}{\frac{t_1}{2} \xi_3 [\phi_1]} & \\ 0 & 0 & a_1 & & & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & a_1 & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & \end{array} \right]_{5\times 40} \begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \\ q_{41} \\ q_{51} \\ \vdots \\ q_{1i} \\ q_{2i} \\ q_{3i} \\ q_{4i} \\ q_{5i} \\ \vdots \end{Bmatrix}_{40\times 1} \qquad (189)$$

Las fuerzas distribuídas serán

$$\{f_l\} = a_i \begin{Bmatrix} f_{l1i} \\ f_{l2i} \\ f_{l3i} \\ f_{l4i} \\ f_{l5i} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc:c} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \end{array} \right]_{5\times 40}}_{[N''']} \begin{Bmatrix} f_{l11} \\ f_{l21} \\ f_{l31} \\ f_{l41} \\ f_{l51} \\ \vdots \\ f_{l1i} \\ f_{l2i} \\ f_{l3i} \\ f_{l4i} \\ f_{l5i} \\ \vdots \end{Bmatrix}_{40\times 1} \qquad (190)$$

o sea que la (187) quedará

$$\{Q\}_{40\times 1} = \int_{\ell} [N'']^{T}_{40\times 5} [N''']_{5\times 40} \begin{Bmatrix} \vdots \\ f_{\ell_{1i}} \\ f_{\ell_{2i}} \\ f_{\ell_{3i}} \\ f_{\ell_{4i}} \\ f_{\ell_{5i}} \\ \vdots \end{Bmatrix}_{40\times 1} d\ell \qquad (191)$$

Como las cargas se consideran aplicadas en la superficie media de la estructura podemos poner que $[N'']=[N''']$ para este caso.

Por lo tanto, para un punto nodal será:

$$\{Q_i\}_{5\times 1} = \int_{\ell} a_i\, a_k \begin{Bmatrix} f_{\ell_{1k}} \\ f_{\ell_{2k}} \\ f_{\ell_{3k}} \\ f_{\ell_{4k}} \\ f_{\ell_{5k}} \end{Bmatrix} d\ell \qquad (192)$$

donde las k se refieren a los nudos que están sobre el lado del elemento que contiene al punto i y por supuesto a la carga.

Recordando que

$$(d\ell)^2 = g_{11}(d\xi_1)^2 + g_{22}(d\xi_2)^2 + g_{33}(d\xi_3)^2 \qquad (193)$$

tenemos que $d\xi_3 = 0$ por estar en la superficie media y ser el valor de $\xi_3 = \text{cte.}$.

Como las cargas están sobre los lados de los elementos, se pue den presentar dos casos.

1er Caso $\xi_2 = \pm 1$ $d\xi_2 = 0$

$$d\ell = \sqrt{g_{11}}\; d\xi_1 \tag{194}$$

con $$g_{11} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\right)^2 \tag{195}$$

2^{o} Caso $\xi_1 = \pm 1$ $d\xi_1 = 0$

$$d\ell = \sqrt{g_{22}}\; d\xi_2 \tag{196}$$

con $$g_{22} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}\right)^2 \tag{197}$$

CAPITULO 5

CALCULO DE LAS TENSIONES

5.1- TENSIONES REFERIDAS AL SISTEMA LOCAL

El cálculo de las tensiones en el sistema local (x'_1, x'_2, x'_3) es inmediato,porque se conoce la expresión de las deformaciones específicas $\{\varepsilon'\}$ en ese sistema.

$$\{\varepsilon'\} = [B_i]\,[\theta]^T \begin{Bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ q_{3i} \end{Bmatrix} + \sum_i \tfrac{1}{2}\, t_i \Big[\xi_3 [B_i] + [C_i] \Big] [\theta]^T [\phi_i] \begin{Bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{Bmatrix} \qquad (198)$$

Las tensiones estarán dadas por

$$\{\sigma'\} = [E]\,\{\varepsilon'\} \qquad (199)$$

Desarrollando la (198) e introduciendola en (199) tendremos.

$$
\{\sigma'\}_{5\times1}=[E']_{5\times5}
\left\{
\begin{array}{l}
B_{1i}\left(\theta_{11}q_{1i}+\theta_{21}q_{2i}+\theta_{31}q_{3i}\right)+\sum_i \frac{1}{2}t_i\,\xi_3\,B_{1i}\left[\theta_{11}\left(\phi_{11i}q_{4i}+\phi_{12}q_{5i}\right)+\theta_{21}\left(\phi_{21i}q_{4i}+\phi_{22i}q_{5i}\right)+\theta_{31}\left(\phi_{31i}q_{4i}+\phi_{32i}q_{5i}\right)\right]\\[2ex]
B_{2i}\left(\theta_{12}q_{1i}+\theta_{22}q_{2i}+\theta_{32}q_{3i}\right)+\sum_i \frac{1}{2}t_i\,\xi_3\,B_{2i}\left[\theta_{12}\left(\phi_{11i}q_{4i}+\phi_{12}q_{5i}\right)+\theta_{22}\left(\phi_{21i}q_{4i}+\phi_{22i}q_{5i}\right)+\theta_{32}\left(\phi_{31i}q_{4i}+\phi_{32i}q_{5i}\right)\right]\\[2ex]
\left(B_{1i}\theta_{12}+B_{2i}\theta_{11}\right)q_{1i}+\left(B_{1i}\theta_{22}+B_{2i}\theta_{21}\right)q_{2i}+\left(B_{1i}\theta_{32}+B_{2i}\theta_{31}\right)q_{3i}+\sum \frac{1}{2}t_i\,\xi_3\left[\left(B_{1i}\theta_{12}+B_{2i}\theta_{11}\right)\times\right.\\
\qquad\left.\times\left(\phi_{11i}q_{4i}+\phi_{12}q_{5i}\right)+\left(B_{1i}\theta_{22}+B_{2i}\theta_{21}\right)\left(\phi_{21i}q_{4i}+\phi_{22i}q_{5i}\right)+\left(B_{1i}\theta_{32}+B_{2i}\theta_{31}\right)\left(\phi_{31i}q_{4i}+\phi_{32i}q_{5i}\right)\right]\\[2ex]
B_{1i}\left(\theta_{13}q_{1i}+\theta_{23}q_{2i}+\theta_{33}q_{3i}\right)+\sum_i \frac{1}{2}t_i\left[\left(\xi_3B_{1i}\theta_{13}+C_{1i}\theta_{11}\right)\left(\phi_{11i}q_{4i}+\phi_{12i}q_{5i}\right)+\left(\xi_3B_{1i}\theta_{23}+C_{1i}\theta_{21}\right)\times\right.\\
\qquad\left.\times\left(\phi_{21i}q_{4i}+\phi_{22i}q_{5i}\right)+\left(\xi_3B_{1i}\theta_{33}+C_{1i}\theta_{31}\right)\left(\phi_{31i}q_{4i}+\phi_{32i}q_{5i}\right)\right]\\[2ex]
B_{2i}\left(\theta_{13}q_{1i}+\theta_{23}q_{2i}+\theta_{33}q_{3i}\right)+\sum_i \frac{1}{2}t_i\left[\left(\xi_3B_{2i}\theta_{13}+C_{1i}\theta_{12}\right)\left(\phi_{11i}q_{4i}+\phi_{12i}q_{5i}\right)+\left(\xi_3B_{2i}\theta_{23}+C_{1i}\theta_{22}\right)\times\right.\\
\qquad\left.\times\left(\phi_{21i}q_{4i}+\phi_{22i}q_{5i}\right)+\left(\xi_3B_{2i}\theta_{33}+C_{1i}\theta_{32}\right)\left(\phi_{31i}q_{4i}+\phi_{32i}q_{5i}\right)\right]
\end{array}
\right\}_{5\times1}
\tag{200}
$$

Como se ve no aparece la tensión en la dirección normal a la cáscara, porque se ignoró la energía de deformación en esa dirección.

La expresión de la matriz de elasticidad $\left[E\right]$ ya se dió anteriormente en la (78).

5.2- TENSIONES REFERIDAS AL SISTEMA GLOBAL

si se desean calcular las tensiones referidas al sistema global, se debe realizar la siguiente transformación:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{x_1x_2} & \tau_{x_1x_3} \\ \tau_{x_2x_1} & \sigma_{x_2} & \tau_{x_2x_3} \\ \tau_{x_3x_1} & \tau_{x_3x_2} & \sigma_{x_3} \end{bmatrix} = \left[\theta\right] \begin{bmatrix} \sigma_{x'_1} & \tau_{x'_1x'_2} & \tau_{x'_1x'_3} \\ \tau_{x'_2x'_1} & \sigma_{x'_2} & \tau_{x'_2x'_3} \\ \tau_{x'_3x'_1} & \tau_{x'_3x'_2} & \sigma_{x'_3} \end{bmatrix} \left[\theta\right]^T \qquad (201)$$

$\sigma_{x'_3} = 0$

En la superficie de la estructura $\tau_{x'_1x'_3}$ y $\tau_{x'_2x'_3}$ serán nulas.

Los valores de las mismas, que aparecen en la fórmula (201), son el promedio de dichas tensiones através del espesor.

La distribución de estas tensiones, será parabólica y sus valores máximos serán los expresados en la (201) multiplicados por 1,5 .

5.3- TENSIONES PRINCIPALES

Si se desean calcular las tensiones principales,se puede diagonalizar el tensor de tensiones (201), por ejemplo utilizando una subrutina para el cálculo de autovalores.

Los tres autovalores,nos darán las tensiones principales y el autovector correspondiente a cada uno de ellos, nos dará los cosenos directores de la dirección de la tensión principal referentes al sistema global.

CAPITULO 6

INTEGRACION NUMERICA

6.1- INTRODUCCION

Como es habitual en la aplicación de los elementos de tipo isoparamétrico, las integrales de la matriz de rigidez y las de las expresiones de las fuerzas nodales equivalentes, se resuelven en forma numérica.

En este caso se integró numéricamente utilizando el método de Gauss.

También, se presenta la llamada integración numérica reducida, que es de fundamental importancia en esta formulación, pues es ella, la que permite la convergencia a la solución considerada exacta en el caso de cáscaras delgadas.

Este capítulo, se basa principalmente en los artículos de las referencias (IX) y (XII).

6.2- INTEGRACION NUMERICA

Las integrales presentadas en los capítulos 3 y 4 se resolvieron numéricamente con un método propuesto por Gauss en el año 1814.

Gauss, propuso expresar el valor de la integral por una sumatoria del tipo:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi = \sum_{j=1}^{n} H_j\, f(a_j) \qquad (202)$$

donde n es el número de puntos de integración elegidos en la dirección ξ y a_j son las abscisas de dichos puntos.

H_j son coeficientes, que dependen del número de puntos de integración adoptados.

Los valores de a_j y H_j ya están calculados y tabelados (V), (XI) para diferentes valores de n.

La justificación teórica del método, se puede ver en la obra de Kopal (XI).

La fórmula (202) es exacta, siempre que $f(\xi)$ sea un polinomio de grado igual o menor que 2n-1.

La fórmula (202) se puede extender a otros espacios.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} H_i\, H_j\, f(\xi_{1j}, \xi_{2i}) \qquad (203)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_3} H_i\, H_j\, H_k\, f(\xi_{1i}, \xi_{2j}, \xi_{3k}) \quad (204)$$

En estas últimas dos fórmulas, se pueden tomar diferentes cantidades n_1, n_2, n_3 de puntos de integración para cada dirección.

6.3- INTEGRACION NUMERICA REDUCIDA

Se ha demostrado, que la cantidad de puntos de integración necesarios para integrar la matriz de rigidez, debe ser como mínimo igual a la cantidad de puntos necesarios para integrar exactamente el volumen de un elemento.

Para el elemento en cuestión Zienkiewicz recomendó primeramente el siguiente esquema de integración.

Para la dirección ξ_1 .... $n = 3$
Para la dirección ξ_2 .... $n = 3$
Para la dirección ξ_3 .... $n = 2$

Este esquema de integración, sólo resultó adecuado cuando se trataba de cáscaras gruesas, en el caso de las cáscaras delgadas, este esquema de integración, no conducía a la convergencia hacia la solución considerada exacta.

Para salvar este inconveniente, se empleó un sistema de integración reducida.

6.3.1- JUSTIFICACION DE LA REDUCCION DEL ORDEN DE INTEGRACION

Al aplicar el método de los desplazamientos con la técnica de los elementos finitos, se vió que se reducía, para los fines de cálculo, un sistema infinitamente hiperestático a otro, con un número finito de grados de libertad.

Este paso, conduce a una idealización de la estructura, que resulta más rigida que la original.

Dependiendo del tipo de problema, esta rigidez excesiva se acentúa, como en el caso de las cáscaras delgadas, por ejemplo, y es necesario tenerla en cuenta.

La integración reducida empleada permitirá corregirla.

Para ejemplificar, tomemos un elemento que permita una variación lineal de los desplazamientos. (Figura 12-a)

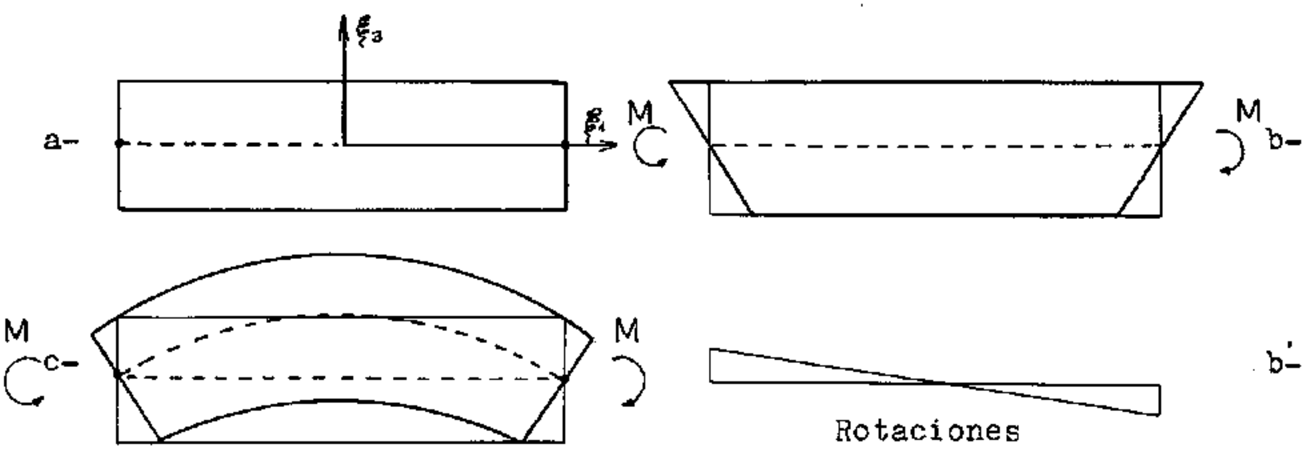


Figura 12

Si se aplica a dicho elemento un estado de flexión pura, éste se deformará como muestra la Figura 12-b porque se impuso variación lineal de desplazamientos.

La deformación real, sería la que se ve en la Figura 12-c.

La diferencia entre las deformaciones de las Figuras 12-b y c, se debe a la introducción de una rigidez excesiva al esfuerzo cortante.

Nótese que se trata de un estado de flexión pura, por lo que no debiera haber deformación por corte. (las rotaciones de las secciones con respecto al eje del elemento se muestran en la figura 12-b')

Sin embargo, si la energía de deformación por corte se integra, tomando solamente un punto de integración en la dirección ξ_1, vemos que se elimina la rigidez excesiva al corte y el elemento actúa como si se deformase de acuerdo a la figura 12-c.

Si ahora se toma un elemento de variación cuadrática (figura 13-a) y se lo somete a un estado de flexión pura (figura 13-b), vemos que aparentemente puede representar la deformación real del elemento ya que el nudo central puede desplazarse verticalmente.

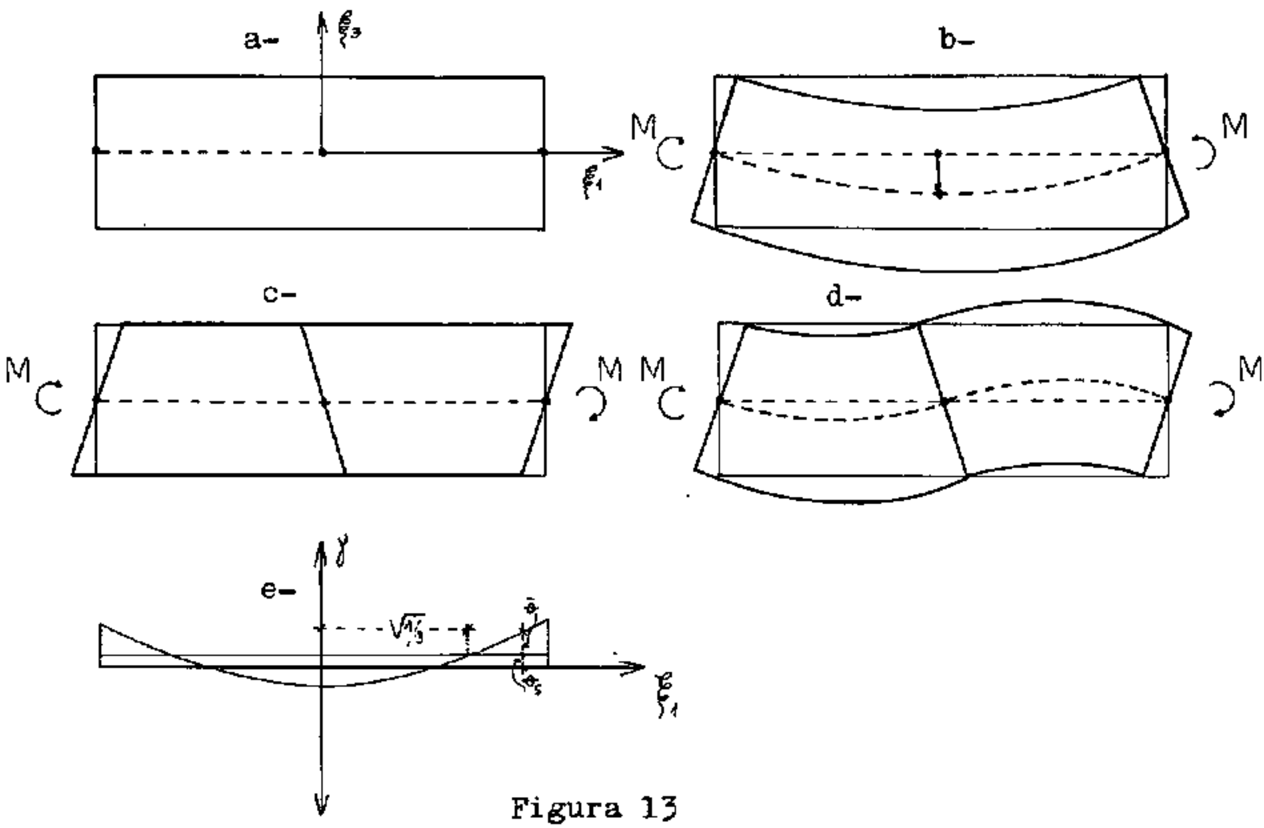


Figura 13

Sin embargo, este elemento no podrá reproducir la deformación producida por un estado de flexión, con momentos variando linealmente a lo largo de su longitud. Por comodidad se tomarán los momentos extremos iguales.

En este caso, aparece nuevamente una deformación por corte indebida, por el hecho, de que el elemento cuadrático es incapaz de aproximar debidamente una elástica de tipo cúbica.

Como la variación de momentos es lineal, el esfuerzo de corte o la rotación de la sección respecto al eje del elemento, es constante; sin embargo, para la deformación de la figura 13-c, las rotaciones de las secciones siguen una ley cuadrática.

En la figura 13-e se representan las rotaciones de las secciones. En dicha figura θ_s es la rotación correcta y $\bar{\theta}$ es la rotación excedente.

Se trata de buscar la manera de eliminar la influencia de $\bar{\theta}$.

Para ello, consideremos la figura 14 en la que se indica el diagrama de momentos para el estado de flexión que se está estudiando.

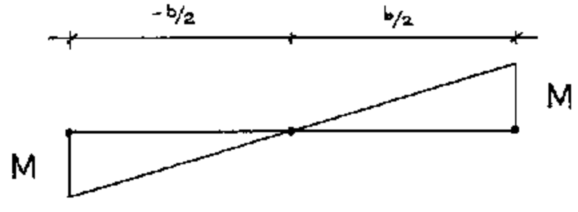


Figura 14

La ecuación diferencial para dicho elemento, sin considerar la influencia del esfuerzo cortante, será

$$\frac{d^2 u_3}{d x_1^2} = \frac{\mathcal{M}}{EI} \qquad (205)$$

en donde se hizo $\xi_1 = 2 \frac{x_1}{b}$ (206)

La ecuación de los momentos será $\mathcal{M} = \frac{2}{b} M x_1$ (207) donde M representa los dos momentos extremos.

Reemplazando (207) en (205)

$$\frac{d^2 u_3}{d x_1^2} = \frac{2}{b} \frac{M}{EI} x_1 \qquad (208)$$

Integrando y hallando los valores de las constantes de integración

$$\frac{d u_3}{d x_1} = \frac{1}{b} \frac{M}{E\ I} x_1^2 + C_1 \qquad (209)$$

$$u_3 = \frac{1}{3} \frac{M}{bEI} x_1^3 + C_1 \ x_1 + C_2 \qquad (210)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde

Si $x_1 = 0$ será $u_3 = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$

Si $x_1 = \frac{b}{2}$ será $u_3 = 0$

Por lo tanto $0 = \frac{M}{3\ bEI} \frac{b^3}{8} + C_1 \frac{b}{2}$ (211)

$$C_1 = - \frac{M\ b}{12\ EI} \qquad (212)$$

Reemplazando las constantes calculadas en (209) se tiene la ecuación de las rotaciones:

$$\frac{du_3}{dx_1} = \frac{M}{bEI} x_1^2 - \frac{M\ b}{12\ EI} \qquad (213)$$

Por lo tanto, se pueden hallar las coordenadas de los puntos en los cuales las rotaciones son nulas. Para ello se anula la (213).

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \pm \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

y recordando la (206)

$$\xi_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad (214)$$

En el formuleo presentado no se tuvo en cuenta las deformaciones por corte. Si llamamos θ a la rotación total, de manera que $\theta = \theta_s + \bar{\theta}$, vemos que si elegimos como puntos de integración a aquellos que tengan abscisas $\xi_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ entonces eliminaremos la parte $\bar{\theta}$ de θ , quedando solamente la parte θ_s que nos dará las deformaciones por corte .

Si la cáscara es gruesa , entonces θ_s tendrá suma importancia, y en el caso de cáscaras finas su influencia será despreciable.

6.4- ELEMENTOS CURVOS

Pawsey (XII) estudió el efecto de la disminución de la rigidez a flexión debido a la curvatura del elemento.

Demostró, que para eliminar el error introducido por la curvatura del elemento en el cálculo de la energía de deformación en la dirección de las deformaciones normales, justamente se deben escoger para la integración numérica los puntos .

6.5- CONCLUSIONES

Después de 5.3.1- y 5.4- se puede considerar como muy conveniente el esquema de integración de 2x2 en la superficie de los elementos, con lo que aparte de eliminar las dificultades producidas por la excesiva rigidez de los elementos, se consigue una disminución de suma importancia en el tiempo de procesamiento de un programa automático que emplee este elemento.

Por lo que el esquema final de integración adoptado es el siguiente:

Para la dirección ξ_1 .... $n = 2$
Para la dirección ξ_2 .... $n = 2$
Para la dirección ξ_3 .... $n = 2$

que coincide con el adoptado por Zienkiewicz en (IX).

Pawsey (XII) utiliza un esquema de integración más sofisticado, integrando con una cantidad diferente de puntos para distintos términos de la energía de deformación

Energía	Puntos en la superficie (ξ_1, ξ_2)
$\varepsilon'_{x'_1x'_1} E_{11} \varepsilon'_{x'_1x'_1}$	2x3
$\varepsilon'_{x'_2x'_2} E_{22} \varepsilon'_{x'_2x'_2}$	3x2
$\varepsilon'_{x'_1x'_1} E_{12} \varepsilon'_{x'_2x'_2}$	2x2
$\varepsilon'_{x'_1x'_2} E_{33} \varepsilon'_{x'_1x'_2}$	2x2
$\varepsilon'_{x'_2x'_3} E_{44} \varepsilon'_{x'_2x'_3}$	3x2
$\varepsilon'_{x'_3x'_1} E_{55} \varepsilon'_{x'_3x'_1}$	2x3

El equema adoptado en este trabajo, permite la convergencia tanto en el caso de las cáscaras gruesas, como en el caso de las cáscaras delgadas, tal como se mostrará posteriormente con diversos ejemplos.

CAPITULO 7

PROGRAMA AUTOMATICO

7.1- INTRODUCCION

Aplicando las formulas deducidas en los capítulos anteriores, se implementó el elemento cuadrático isoparamétrico tridimensional degenerado,en un programa automático capaz de resolver cáscaras finas y gruesas.

El programa se preparó para el sistema IBM /360 modelo 40 .

El tipo de estructuras que se pueden calcular con este programa son:

- vigas
  - eje recto
    - sección constante
    - sección variable
  - eje curvo
    - sección constante
    - sección variable

- vigas pared
  - espesor constante
  - espesor variable

- placas
  - espesor constante
  - espesor variable

- cáscaras
  - finas
    - espesor constante
    - espesor variable
  - gruesas
    - espesor constante
    - espesor variable

Las causas que originan esfuerzos en las estructuras mencionadas y que pueden ser calculadas con el programa propuesto son:

cargas concentradas (fuerzas y momentos)

cargas (fuerzas) distribuídas sobre la superficie media con variación cuadrática.

cargas (fuerzas y momentos) distribuídas sobre una línea perteneciente a la superficie media. Pueden ser de variación cuadrática.

variación parabólica de temperatura sobre la superficie.

variación lineal de temperatura en las normales a la superficie media.

desplazamientos prescriptos.

apoyos elásticos.

Los resultados que el programa proporciona son:

Tensiones en las fases superior e inferior de la cáscara,sobre la normal a la superficie media en los puntos nodales, referidas al sistema local.

Tensiones en los mismos puntos que en el caso anterior, referidas al sistema global.

Tensiones tangenciales máximas.

Tensiones principales.

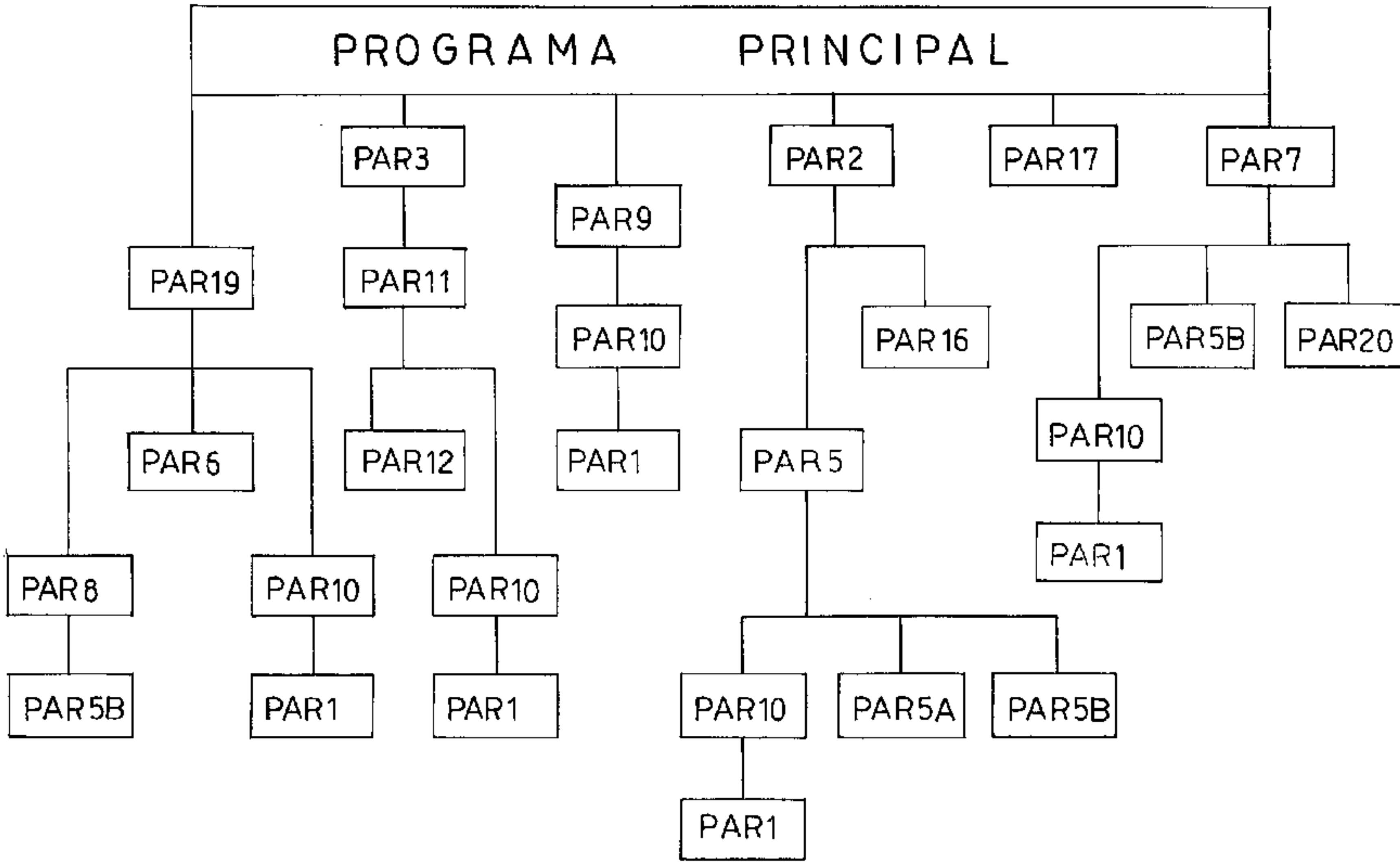
Cosenos directores de las direcciones de las tensiones principales respecto al sistema de referencia global.

7.2- ESQUEMA GENERAL DEL PROGRAMA

En el Apéndice C, se presenta un listado del programa principal y de las subrutinas correspondientes.

En la página siguiente se muestra el interrelacionamiento entre las diversas subrutinas y el programa principal en forma esquemática.

Ese mismo esquema es el que se utilizó para aplicar la la técnica de OVERLAY al programa.


PROGRAMA PRINCIPAL
PAR3
PAR9
PAR2
PAR17
PAR7
PAR19
PAR11
PAR10
PAR16
PAR5B
PAR20
PAR6
PAR12
PAR1
PAR5
PAR10
PAR1
PAR8
PAR10
PAR10
PAR5B
PAR1
PAR1
PAR10
PAR5A
PAR5B
PAR1

7.3- PROGRAMA PRINCIPAL Y SUBRUTINAS

7.3.1- PROGRAMA PRINCIPAL

En el programa principal se define y especifíca la estructura a calcular y las propiedades mecánicas del material que la compone.

Se debe indicar, cuál es la red de elementos con la que se hará la aproximación.

Se leen las cargas concentradas con las que eventualmente estará cargada la estructura.

Se calcula el semiancho que tendrá la banda de la matriz de rigidez de la estructura y se controla automáticamente que no exceda al máximo admitido, que para este programa, es de 90.

Muchos datos, los de las cargas por ejemplo, son leídos en las mismas subrutinas que van a calcular las respectivas fuerzas nodales equivalentes.

La razón de esto, es que en el programa se empleó la tecnica de OVERLAY.

Esta consiste, en subdividir el programa en ramas de manera que sólo hay en la memoria primaria del computador una sola rama por vez.

El área reservada en la memoria primaria será la de la rama mayor, que en nuestro caso es la dada por la rama compuesta por:

PROGRAMA PRINCIPAL
PAR2
PAR5
PAR10
PAR1

Leyendo algunos datos en las subrutinas que no estén sobre la rama mayor, no es preciso dimensionar esas variables en el programa principal, con la consiguiente disminución de la dimensión de la rama mayor, ya que el programa principal forma siempre parte de ella.

7.3.2- SUBRUTINA PAR19

Lee las tres componentes del peso específico del material del que está compuesta la estructura (ver 4.2-)

En caso de existir variaciones de temperatura, las lee.

Si es necesario llama a las subrutinas que sirven para calcular las fuerzas nodales equivalentes. En ese caso llamará a las subrutinas PAR10, PAR6 y PAR8.

Resuelve numéricamente las integrales de las expresiones de las fuerzas nodales equivalentes.

7.3.3- SUBRUTINA PAR10

Esta subrutina calcula:

la matriz $[\theta]$, el jacobiano $\|J\|$, los valores de B_{1i}, B_{2i}, C_{i} y las derivadas de las coordenadas globales de la estructura respecto de las coordenadas curvilíneas ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Esta subrutina llama a la PAR1.

7.3.4- SUBRUTINA PAR1

Esta subrutina calcula las derivadas de las funciones de interpolación Serendipity respecto de las coordenadas curvilíneas ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Tanto esta subrutina como la anterior, son llamadas varias veces en diferentes partes del programa.

7.3.5- SUBRUTINA PAR6

Con esta subrutina, se obtienen las fuerzas nodales equivalentes, debidas al peso propio de la estructura.

7.3.6- SUBRUTINA PAR8

En caso de existir variaciones de temperatura, calcula las fuerzas nodales equivalentes.

La temperatura, podrá variar cuadráticamente sobre la superficie media de la cáscara y linealmente sobre la normal a la misma.

Esta subrutina necesita llamar a la PAR5B.

7.3.7- SUBRUTINA PAR5B

Con esta subrutina se calcula matriz $\left[\phi_i\right]$, que es llamada en diversas partes del programa.

7.3.8- SUBRUTINA PAR3

En caso de existir cargas distribuídas sobre los lados de los elementos, se leen dichas cargas y el lado del elemento sobre el que actúan.

Las cargas pueden ser fuerzas o momentos distribuídos.

Llama a la subrutina PAR11.

7.3.9- SUBRUTINA PAR11

Calcula las fuerzas nodales equivalentes correspondientes a cargas distribuídas sobre los lados de los elementos.

Para dicho cálculo precisa de las subrutinas PAR12 y PAR10.

7.3.10- SUBRUTINA PAR12

Esta subrutina sirve para indicar cuales son los nudos de un lado de un elemento dado.

Complementa a la PAR11 en el cálculo de fuerzas y momentos distribuídos sobre lados de los elementos.

7.3.11- SUBRUTINA PAR9

Con ella se calculan las fuerzas nodales equivalentes correspondientes a cargas distribuídas sobre la superficie media de la cáscara.

La variación de las fuerzas distribuídas puede ser cuadrática.

Es complementada por la subrutina PAR10.

7.3.12- SUBRUTINA PAR2

Esta subrutina es una adaptación de la subrutina FORMB de la referencia (XIII).

Ella monta la matriz de rigidez de la estructura en bloques a partir de las matrices de rigidez de los elementos.

También es con esta subrutina que se introducen las condiciones de contorno.

Llama a las subrutinas PAR5 y PAR16.

Para mayores detalles ver (XIII).

7.3.13- SUBRUTINA PAR5

Esta subrutina calcula la matriz de rigidez de los elementos.

Se han programado dos subrutinas con este nombre: una para cáscaras gruesas y otra para finas.

La teoría correspondiente al segundo caso está desarro llada en el Apéndice A.

Precisa,para poder calcular las matrices de rigidez,de las subrutinas PAR5A,PAR5B y PAR10.

7.3.14- SUBRUTINA PAR5A

Esta subrutina realiza unos cálculos intermedios para la obtención de la matriz de rigidez.

Se agruparon estos cálculos en una subrutina porque se repiten dos veces en la PAR5. (tanto para las cáscaras gruesas como para las delgadas.)

7.3.15- SUBRUTINAS PAR16 Y PAR17

Corresponden a las subrutinas DEBLO y REBLO de la referencia (XIII).

La primera triangulariza cada partición de la matriz de rigidez de la estructura y la segunda,resuelve el sistema de ecuaciones, después de la triangularización hecha por PAR16.

Para resolver el sistema de ecuaciones,se empleó el método de Cholesky.

7.3.16- SUBRUTINA PAR7

Calcula las tensiones en ambas caras de la cáscara, en coincidencia con los puntos nodales.

Las tensiones se calculan primeramente referidas al sistema local de ejes de referencia y, después de una transformación, se obtienen referidas al sistema global.

Posteriormente, son calculadas las tensiones principales y los cosenos directores de las mismas respecto a los ejes globales.

Para realizar todo ello precisa de las subrutinas PAR10, PAR5B y PAR20.

7.3.17- SUBRUTINA PAR20

Esta subrutina, corresponde a la subrutina EIGEN de la biblioteca de subrutinas científicas de IBM.

Calcula autovalores y autovectores empleando el método de Jacobi.

Los autovalores nos permiten obtener las tensiones principales y los autovectores, los cosenos directores correspondientes.

7.4- UTILIZACION DEL PROGRAMA

7.4.1- DATOS DE ENTRADA

En el cuadro presentado en la página siguiente, cuando en las filas aparece una "x", significa que esos cartones no son obligatorios. Sólo se colocarán cuando existe la solicitación correspondiente.

ORDEN	Nº DE TARJETAS		VARIABLES	FORMATOS	
1	1		NN,NE,NNDP,NC,E,U1,ALFA, NECT,ICDS,ICDL	4I5,F10.2, F10.4,3I5	
2	1		IZA	I5	
3	NN		I,X(I),Y(I),T(I)	I5,3F10.4	x
4	NN		I,X(I),Y(I),Z(I),VX(I), VY(I),VZ(I)	I5,6F10.4	x
5	NE		I,INC(I,1),INC(I,2), INC(I,3),INC(I,4), INC(I,5),INC(I,6), INC(I,7),INC(I,8)	9I5	
6	NNDP		NNCD(I),ND(I),DES(I,1), DES(I,2),DES(I,3), DES(I,4),DES(I,5)	2I10,5F10.6	
7	NC		J,P(1),P(2),P(3),P(4), P(5)	I5,5F10.2	x
8	1		RO(1),RO(2),RO(3)	3F10.5	
9	NECT	1	KKK(K)	I5	x
10	veces	8	TS(J,LJ),TIN(J,LJ)	2F10.4	x
11	ICDL	1	ICL1,ICL2,ICL3,ICL4	4I10	x
12		1	JK	I10	x
13	veces	3	FXL(K),FYL(K),FZL(K), XM1(K),XM2(K)	5F10.6	x
14	ICDS	1	LI	I5	x
15	veces	8	FX(J,LI),FY(J,LI), FZ(J,LI)	3F10.4	x

7.4.2- EXPLICACIONES Y COMENTARIOS

1....) La primera tarjeta lee los valores de:

NN	número de nudos	NN máx. = 100 nudos
NE	número de elementos	NE máx. = 25 elementos
NNDP	número de nudos con desplazamientos prescriptos	
NC	número de nudos con cargas concentradas	
E	módulo de elasticidad	
Ul	coeficiente de Poisson	
ALFA	coeficiente de dilatación térmica	
NECT	número de elementos que tienen variaciones de temperatura	
ICDS	número de elementos que tienen cargas distribuídas sobre la superficie	
ICDL	número de elementos con carga distribuída sobre alguno de sus lados	

Si el lado sobre el cual está la carga, es común a dos elementos, se debe elegir para el cómputo de ICDL, a solamente uno de los dos elementos.

Si existen varios elementos con cargas sobre los lados, se deben elegir los elementos de manera que ICDL sea mínimo, porque de esa manera, el programa es más rápido.

2....) IZA
- =1: los valores de Z(I),VX(I),VY(I),VZ(I), serán calculados automáticamente.
- =0: los valores de Z(I),VX(I),VY(I),VZ(I), no serán calculados automáticamente

3....) Si IZA=1 los valores de Z(I),VX(I),VY(I),VZ(I) se calcularán automáticamente.

Se leerán los valores de:

I número del punto nodal

X(I) coordenada del punto nodal I en la dirección x_1

Y(I) coordenada del punto nodal I en la dirección x_2

T(I) espesor de la cáscara en el punto nodal I

En este caso, se programa para cada ejemplo el cálculo de Z(I),VX(I),VY(I),VZ(I).

Z(I) se obtiene de la ecuación de la superficie media de la cáscara en función de X(I) e Y(I).

DZX, DZY } Son las derivadas de Z(I) respecto de X(I) e Y(I)

VX(I), VY(I), VZ(I) } Se calculan en cada caso para cada punto nodal I en función de DZX, DZY y T(I)

Estos seis últimos cartones, se deben programar para cada ejemplo, reemplazarlos por los cartones Z(I),DZX,DZY,VX(I),VY(I) y VZ(I) que ya están en el programa principal y evitar de esta manera el cálculo manual de Z(I),VX(I),VY(I),VZ(I) y la posterior perforación de esas tarjetas.

Se recomienda seguir este camino porque es más rápido, más preciso y simple, salvo en casos especiales.

No se leerán estos cartones si IZA = 0

En caso de que el vector espesor sea paralelo al eje x_1, se debe recurrir a la modificación del sistema de referencia local tal como se muestra en el Apéndice B. El programa verifica automáticamente esta condición y también cambia automáticamente el sistema de referencia local.

4....) Se leerán las coordenadas de los NN puntos nodales solamente en el caso en que IZA = 0

I número del punto nodal

X(I), Y(I), Z(I) coordenadas del punto nodal I de la superficie media de la cáscara referidas al sistema global.

VX(I), VY(I), VZ(I) componentes del vector espesor en el punto nodal I en las tres direcciones de los ejes globales

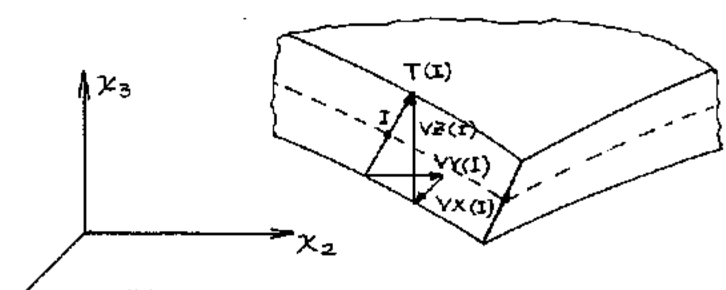


Figura 15

5....)

I número del elemento

INC(I,K) con K=1,2,3,4,5,6,7,8 es un arreglo para indicar el orden de numeración de cada elemento, o sea lo que se llama incidencia del elemento.

La numeración es la que se indica en la figura 16.

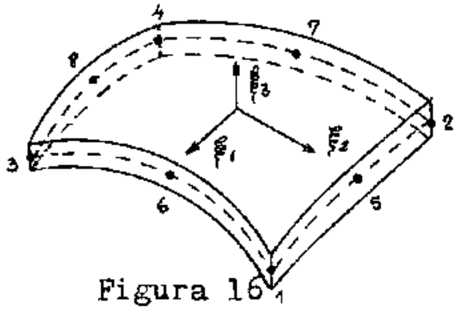


Figura 16

6....)

NNCD(I) número del punto nodal restringido

ND(I) especifica el tipo de apoyo o restricción. Es un número de cinco cifras formado por la combinación de los números 1 y 0.

El primer dígito se refiere a la restricción en la dirección x_1.
El segundo dígito se refiere a la restricción en la dirección x_2.
El tercer dígito se refiere a la restricción en la dirección x_3.
El cuarto dígito se refiere a la restricción de la rotación q_{4i}.
El quinto dígito se refiere a la restricción de la rotación q_{5i}.

Si la dirección es restringida el dígito correspondiente será el 1, en caso contrario será el 0.

$$\left.\begin{array}{l} DES(I,1) \\ DES(I,2) \\ DES(I,3) \\ DES(I,4) \\ DES(I,5) \end{array}\right\}$$ Son los valores de los desplazamientos prescriptos en las direcciones mencionadas anteriormente.

7....)

J número del nudo que tiene cargas concentradas

P(1)
P(2)
P(3)
P(4)
P(5)

Son las cargas concentradas en el nudo J según las 5 direcciones generalizadas .

8.....)

RO(1)
RO(2)
RO(3)

Son las componentes del vector"peso propio" en las direcciones x_1, x_2, x_3. Ver 4.2-

9....)

KKK(K) número del elemento en el cual hay variación de temperatura.

10...)

TS(J,LJ) temperatura en la cara superior del elemento KKK(K) LJ en correspondencia con el nudo J

TIN(J,LJ) Idem para la cara inferior. Ver 4.3-

11...)

Los valores ICL1, ICL2, ICL3 e ICL4 se refieren a si están o no cargados los lados del elemento.

En la figura 17 se indica la correspondencia de ICL1 , ICL2, ICL3 e ICL4 con los lados del elemento.

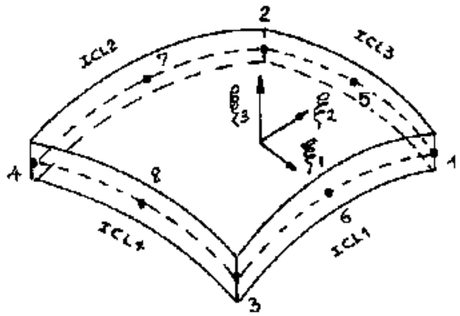


Figura 17

Si el lado correspondiente está cargado, el índice toma el valor 1 y en caso contrario será 0.

Si en la figura anterior, por ejemplo, está cargado el lado 4-7-2 tendremos:

$$\begin{aligned} ICL1 &= 0 \\ ICL2 &= 1 \\ ICL3 &= 0 \\ ICL4 &= 0 \end{aligned}$$

12...)

JK número del elemento que tiene el o los lados cargados. Si el lado cargado es común a dos elementos, se debe elegir a uno cualquiera de los dos elementos como contenedor de la carga. Es conveniente elegir, en el caso de varios elementos cargados, a los elementos contenedores de manera tal que sean los mínimos posibles; ya que de esta manera el procesamiento automático será más rápido.

13...)

FXL(K)
FYL(K)
FZL(K)
XM1(K)
XM2(K)

Son los valores de las cargas (fuerzas y momentos) distribuídas en el nudo K de la numeración interna del elemento.

Se debe respetar la numeración interna del elemento, por ejemplo, si hay fuerzas distribuídas sobre el lado 25-26-27 del elemento 14 (Figura 18) en la dirección global x_2; tendremos :

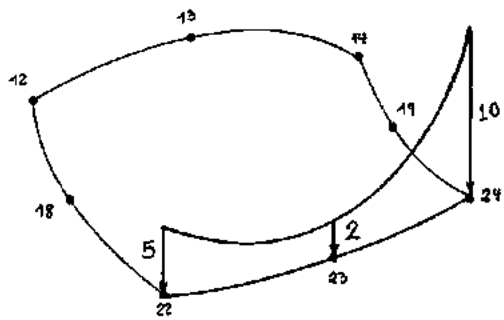


Figura 18

FXL(1) = 0	FYL(1) = 10	FZL(1) = 0	XM1(1) = 0	XM2(1) = 0
FXL(2) = 0	FYL(2) = 5	FZL(2) = 0	XM1(2) = 0	XM2(2) = 0
FXL(3) = 0	FYL(3) = 2	FZL(3) = 0	XM1(3) = 0	XM2(3) = 0

14...)

LI número del elemento que tiene carga distribuída sobre su superficie media.

15...)

FX(J,LI) FY(J,LI) FZ(J,LI)	Valores de las componentes de la carga distribuída en las direcciones de los ejes globales x_1, x_2, x_3 . Se refieren a las cargas en los nudos J (de la numeración externa) del elemento LI.

C A P I T U L O 8

APLICACION DEL PROGRAMA - EJEMPLOS

8.1- EJEMPLO 1

Como primer ejemplo, se calculó el cilindro de la Figura 19, cargado con dos fuerzas iguales y contrarias. Por lo tanto, esta estructura está en autoequilibrio.

Considerando que el problema es simétrico, se tomó, para efectos del cálculo, solamente una octava parte del cilindro.

Se compararon los resultados, utilizando el programa del Apéndice C, con mallas de 1,4 y 9 elementos. Figura 19.

Estas soluciones fueron comparadas,a su vez,con la obtenida por Timoshenko (XIV).

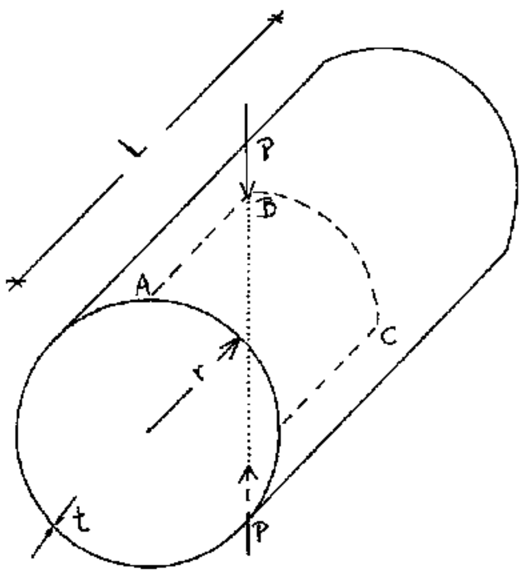
En la figura 20 se muestran los desplazamientos obtenidos bajo la carga P, para las diferentes redes de elementos finitos.

Nótese, que con solamente un elemento ya se obtiene una aproximación considerable.

También, se graficaron los desplazamientos verticales sobre el arco BC. Esto último se hizo para la solución obtenida con la red de 9 elementos.

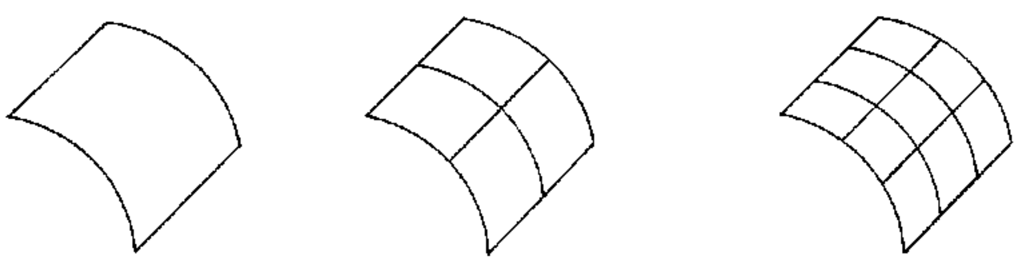
Es interesante resaltar, que debido a la forma en que se obtuvo este elemento, las soluciones aproximadas, pueden ser en algunos casos más rigidas que la solución teórica, y en otros casos menos rígidas.

Hay que tener en cuenta, también, que normalmente las soluciones consideradas "exactas", dificilmente tengan en cuenta las deformaciones por corte.



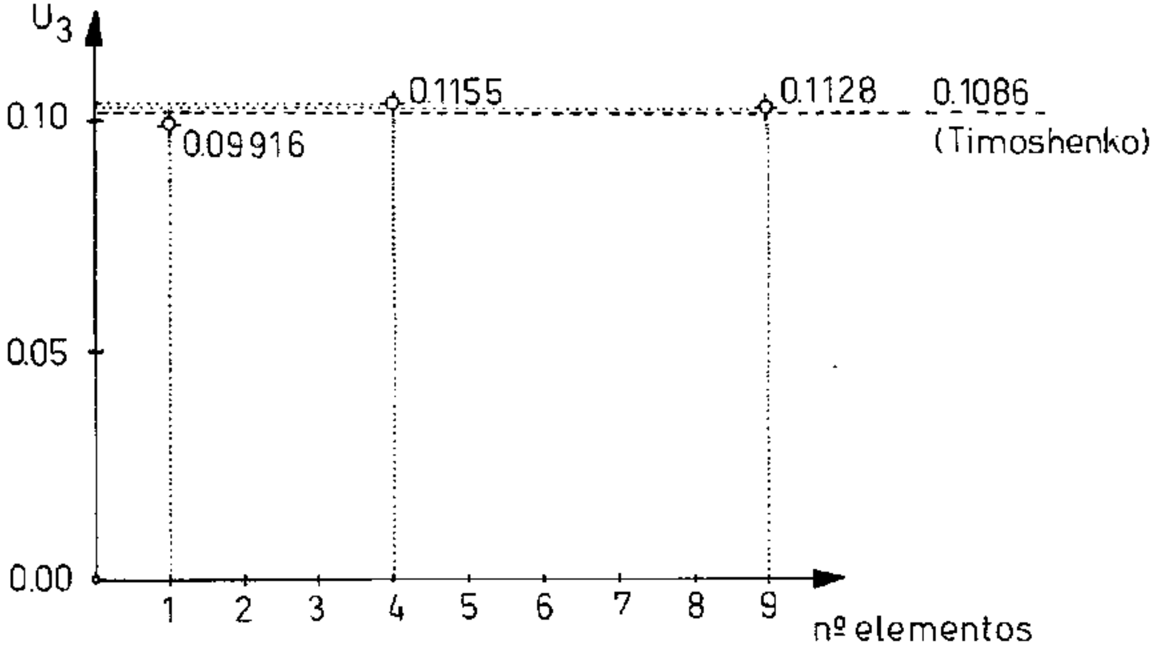
$P = 100$
$r = 4.953$
$L = 10.35$
$E = 10500000.$
$t = 0.094$
$\nu = 0.3125$

Mallas de Elementos



1 x 1   2 x 2   3 x 3

Figura 19


U_3
0.10
0.05
0.00
0.09916
0.1155
0.1128
0.1086
(Timoshenko)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
nº elementos

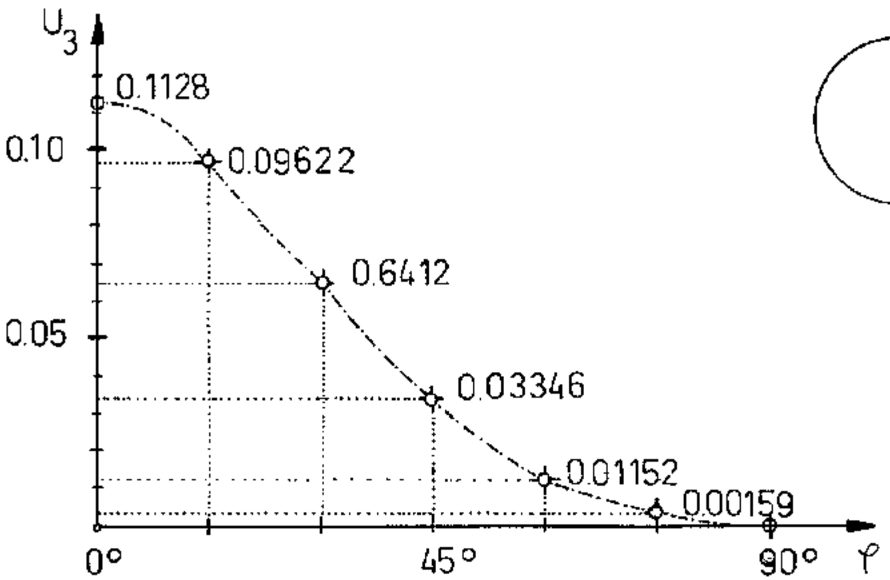

U_3
0.1128
0.10
0.09622
0.6412
0.05
0.03346
0.01152
0.00159
0°
45°
90°
φ

Figura 20

8.2- EJEMPLO 2

Se presentará aquí, una placa circular empotrada, cargada centralmente con una fuerza concentrada P.

Las características de la placa se indican en la Figura 21, como así también las diferentes redes de elementos con que fue calculada la placa.

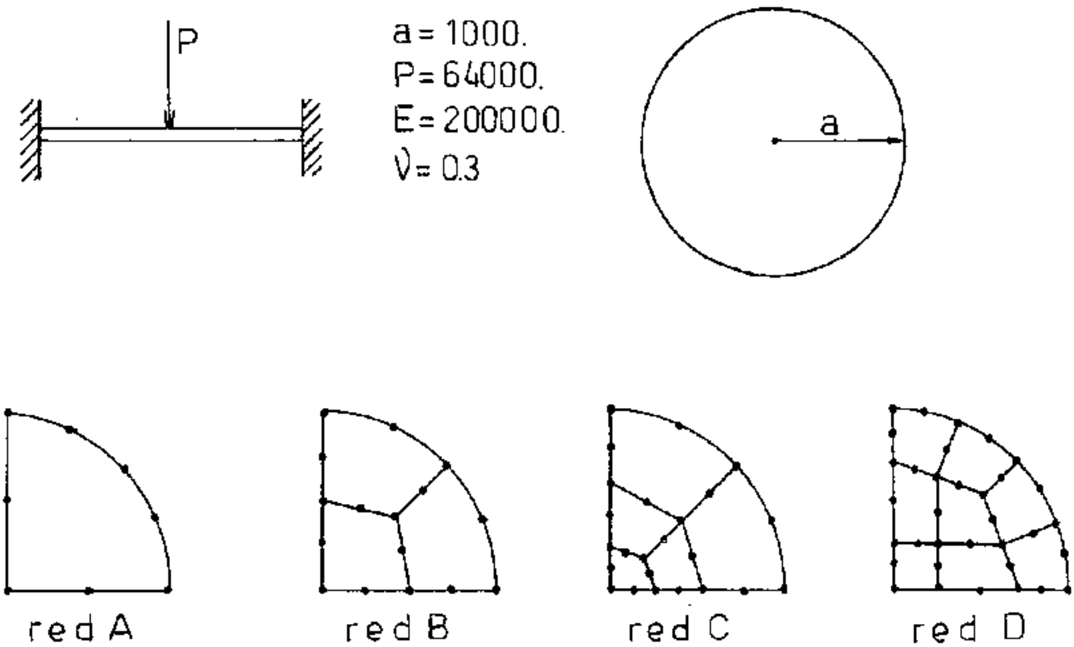


Figura 21

Se puede observar la convergencia con estas redes, para una placa de espesor t = 20 . Figura 22.

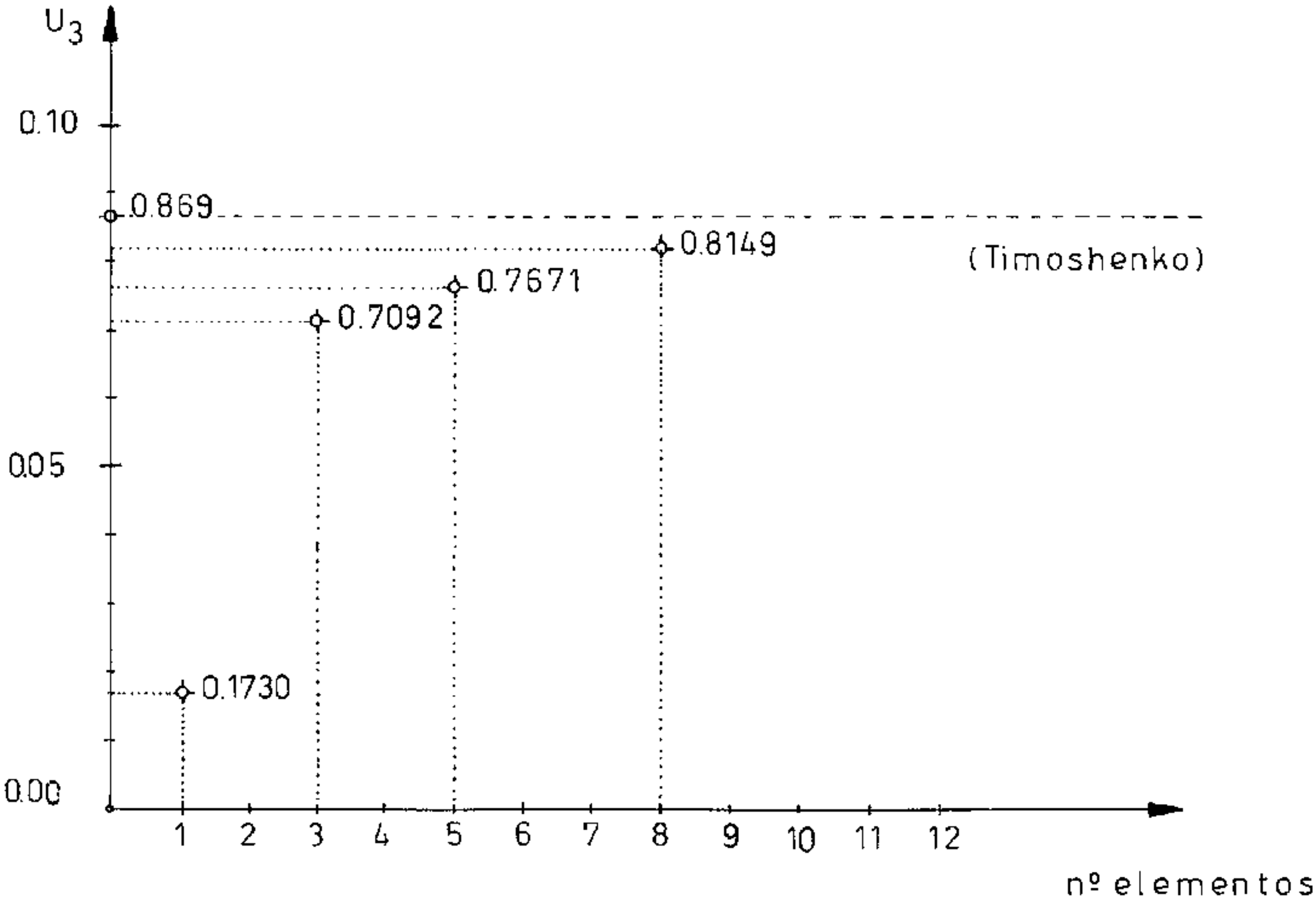

U3
0.10
0.05
0.00
0.869
0.8149
(Timoshenko)
0.7671
0.7092
0.1730
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
nº elementos

Figura 22

Con este mismo ejemplo, se testó la subrutina PAR5, con las simplificaciones introducidas en el Apéndice A, para el caso de cáscaras finas. Los resultados, no están expuestos numéricamente, porque coincidieron exactamente con los obtenidos con la subrutina que da la matriz de rigidez sin simplificar.

Para verificar el comportamiento del programa, cuando se está ante cáscaras gruesas, se calculó esta misma placa, considerándola sucesivamente con diferentes espesores.

Se compararon los resultados con los de las referencias (IX) y (XV). Allí están presentados los resultados de las teorías de Reissner y Krieger, para placas circulares gruesas.

Los resultados se muestran en la Figura 23, donde se representan los desplazamientos verticales de las placas de distinto espesor, referidas al desplazamiento de las mismas placas consideradas como finas.

La malla usada para el cálculo de estas placas, fue la de la red D, mostrada en la figura 21.

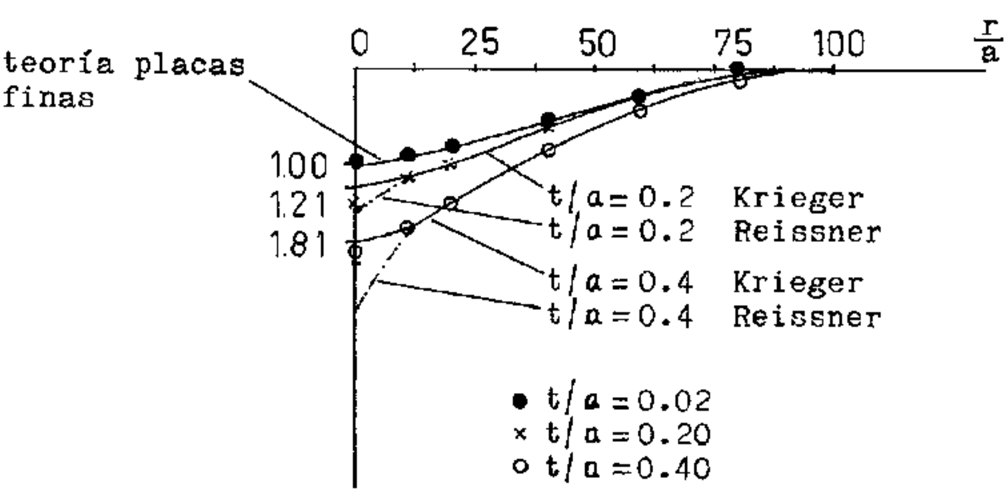


Figura 23

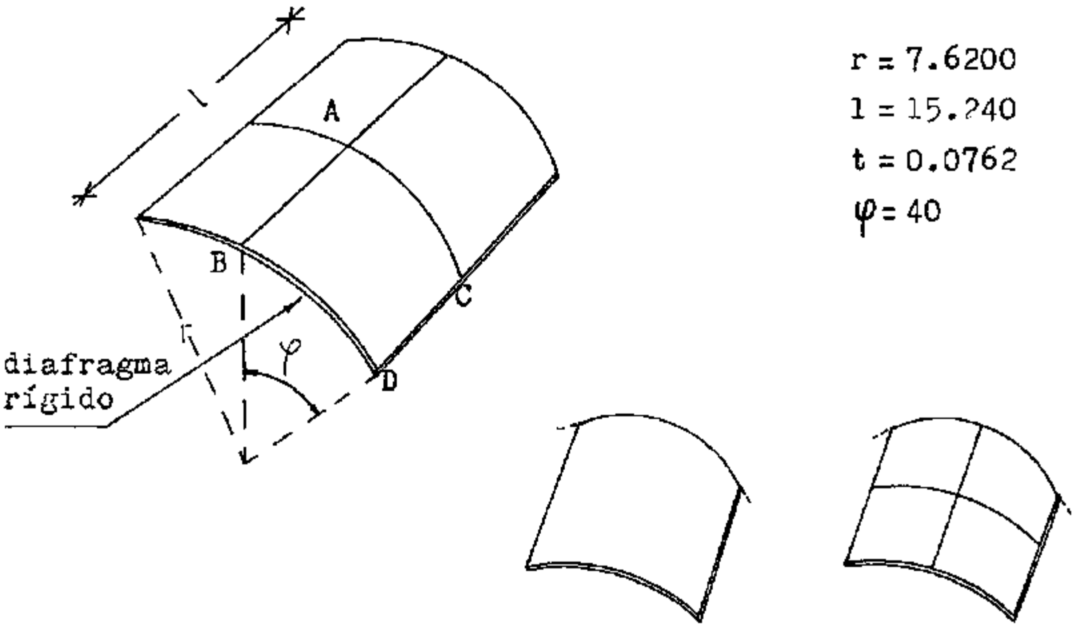
Como se ve, la aproximación es buena. Lógicamente para las tensiones la aproximación será menor, porque las tensiones sólo pueden ser lineales con este elemento, mientras que en el caso real, no lo son.

8.3- EJEMPLO 3

Este es un ejemplo clásico, que la mayoría de los autores han utilizado para estudiar la convergencia de elementos de cáscaras. La solución teórica fue dada por Scordelis (XVI).

Se trata de una cáscara cilíndrica, bajo la acción del peso propio. Figura 24.

En la misma figura se muestran las redes empleadas para estudiar la convergencia y comparar con la solución de Scordelis.



1 x 1 2 x 2

Figura 24

Por simetría, sólo se tomó una cuarta parte de la cáscara cilíndrica.

En la Figura 25, se muestran los desplazamientos verticales en la sección media AC, y en el diafragma BD se graficaron los desplazamientos axiales.

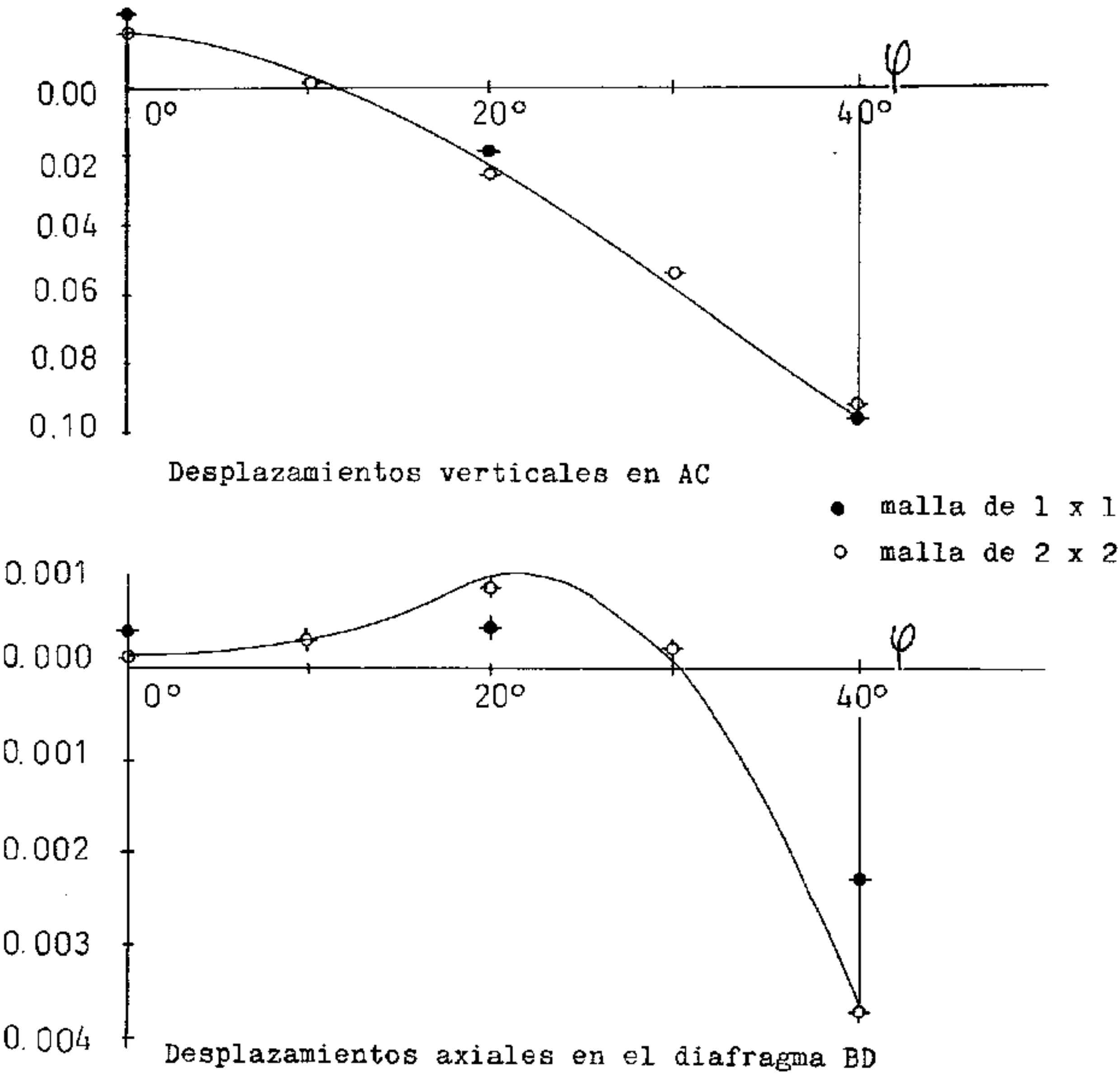


Figura 25

8.4- EJEMPLO 4

Se estudió el paraboloide elíptico de la figura 26-a, presentado en la referencia (XVII).

La ecuación de la superficie media es:

$$x_3 = \frac{1}{2a} \left(\frac{a^2}{2} - x_1^2 - x_2^2 \right) \qquad (215)$$

$$\text{para} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \quad x_3 = \tfrac{1}{4}a = 2f \qquad f = \frac{a}{8}$$

$$\text{para} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a}{2\ 2} \\ x_2 = \dfrac{a}{2\ 2} \end{array}\right\} \quad x_3 = \frac{a}{8} = f$$

El paraboloide elíptico, está empotrado en los puntos A, B, C y D, que son los vértices de un cuadrado.

El cuadrado que representa la base de la estructura, tiene sus lados $a = 3000$.

Y, el valor de f es $f = 375$ (Figura 26-c).

Se consideraron diversos tipos de cargas:

a-) Se supuso una carga, que podría ser debida a la acción del viento. (Figura 26-b)

El cálculo se hizo, utilizando dos tipos de mallas de elementos diferentes, una de 3 elementos y otra de 8. (Fig.26-e-f)

Se graficaron los desplazamientos verticales a lo largo de la línea AC.(Figuras 26-a y 27-a)

En la figura 27-b, se muestran los desplazamientos verticales a lo largo de BC.

b-) La misma estructura,se cargó ahora, con una carga distribuída, como la indicada en la figura 26-c.

La red de elementos utilizada fue la de la figura 26-g, donde se consideró la simetría de la estructura.

Los desplazamientos verticales (figuras 28-a-b-c), fueron representados en las secciones EF,GH,AB. (figura 26-d)

c-) Utilizando la misma malla de elementos que en el caso anterior, en la figura 29 se graficaron, para las mismas secciones, los desplazamientos verticales producidos por una carga concentrada P, en el centro de la estructura. (figura 26-d)

8.5- CONCLUSIONES

Durante mucho tiempo, se tentaron diversas formulaciones para resolver cáscaras, pero, ninguna de ellas consiguió tener tanta generalidad como la aquí presentada.

Zienkiewicz, exagerando un poco, se refirió a este elemento, llamándolo de"universal" (IX).

Además de su capacidad de resolver cáscaras gruesas y finas, lo que llama mucho la atención,es la convergencia obte nida con mallas poco refinadas.

Pero, lo más notable, es la convergencia alcanzada disminuyendo el número de puntos para integrar numéricamente la matriz de rigidez.

El esquema de integración numérica reducida permitió, no solamente la convergencia en el caso de las cáscaras finas, sino una considerable disminución en el tiempo de procesamiento del programa automático.

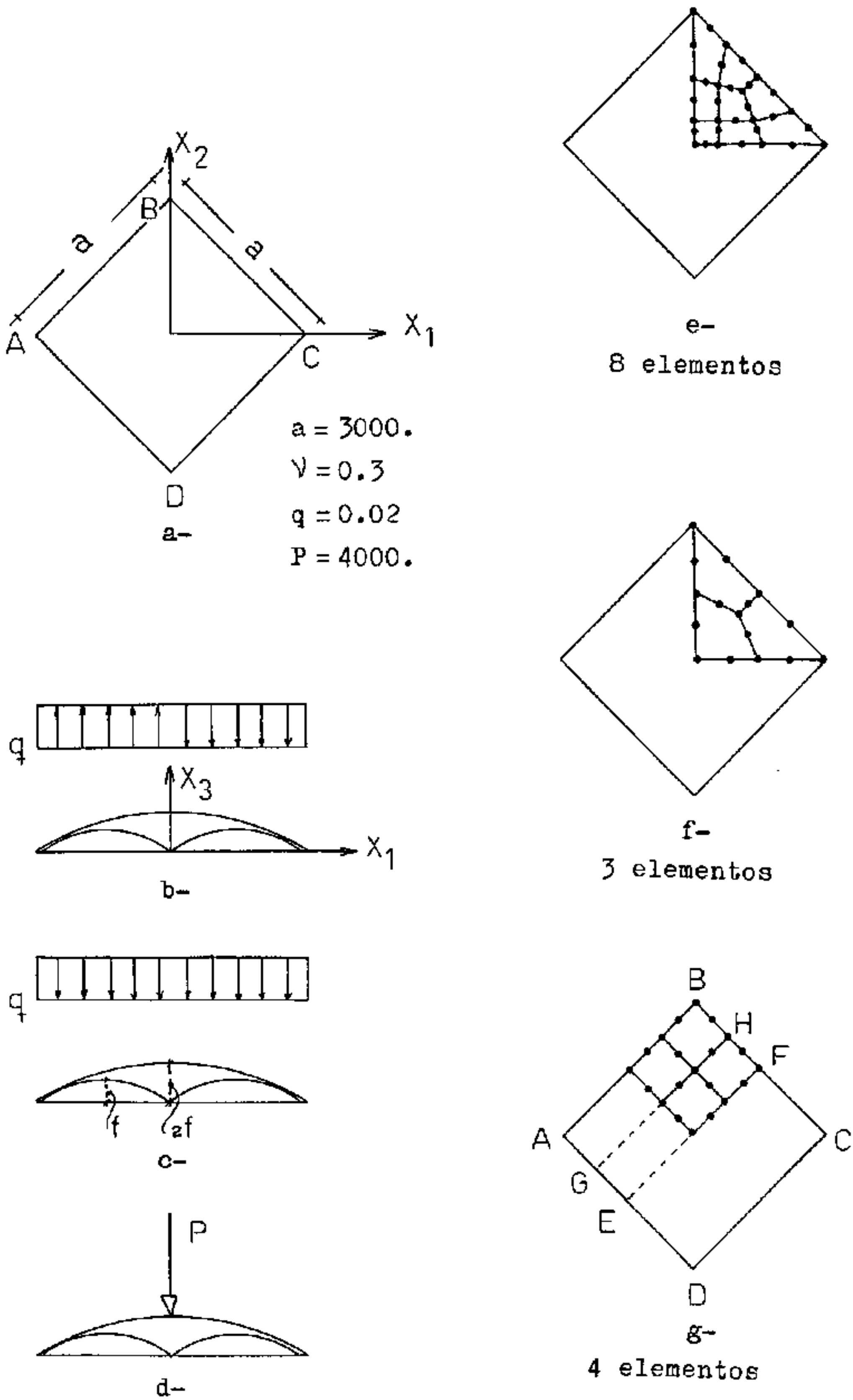
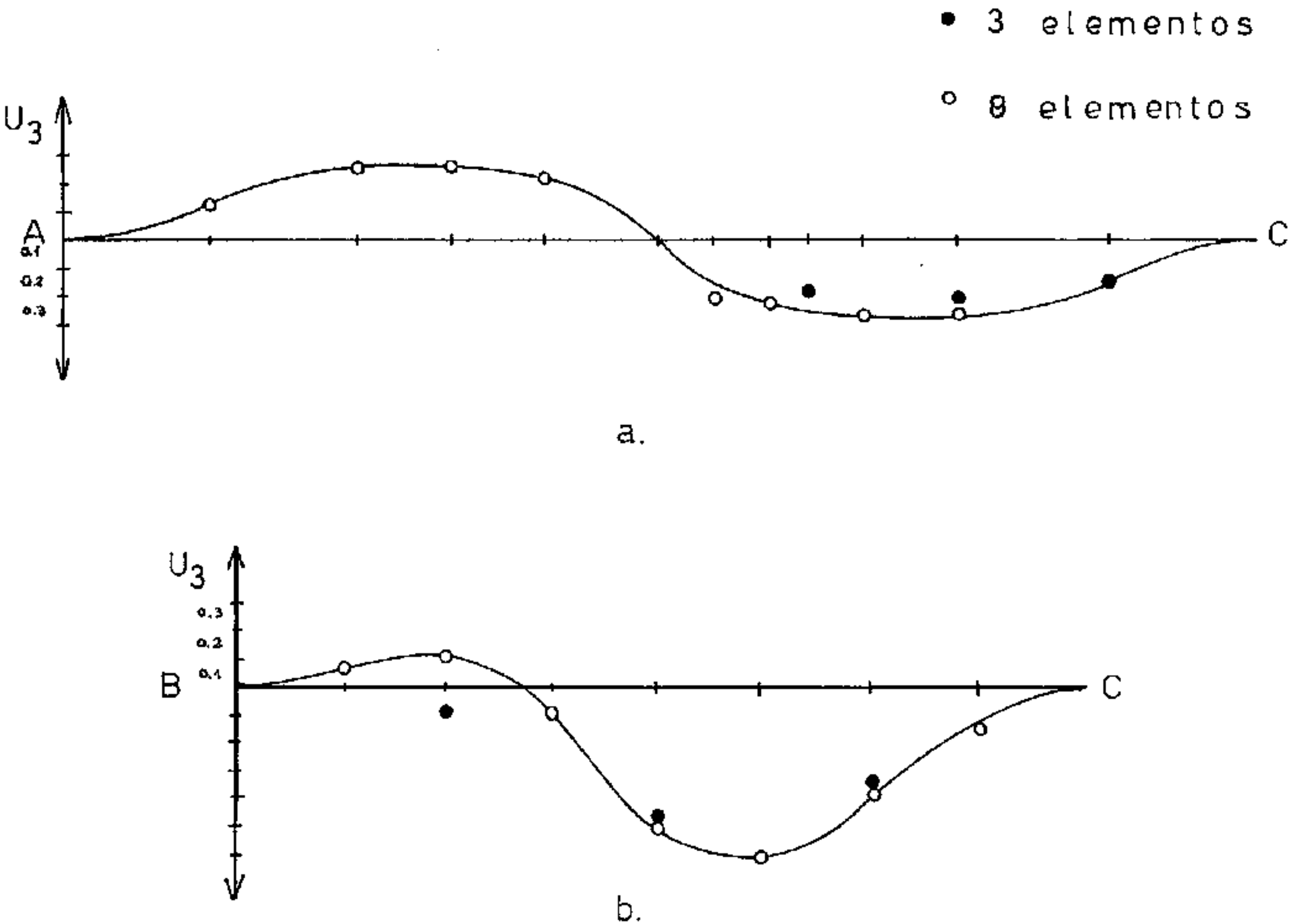

X2
B
a
a
A
C
X1
a = 3000.
ν = 0.3
q = 0.02
P = 4000.
D
a-
e-
8 elementos
f-
3 elementos
q
X3
X1
b-
q
f
2f
c-
P
d-
B
H
F
A
C
G
E
D
g-
4 elementos

Figura 26



Figuras 27a-27b

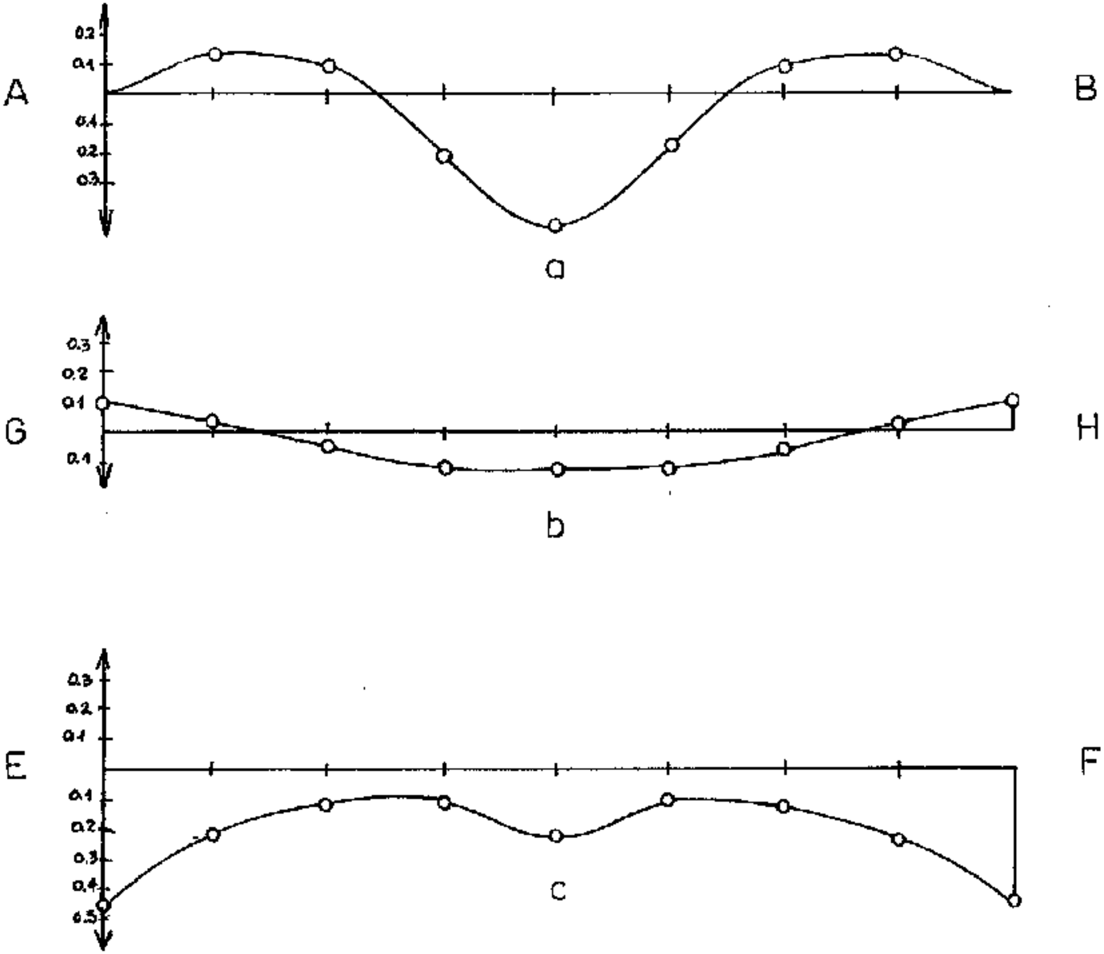


Figura 28

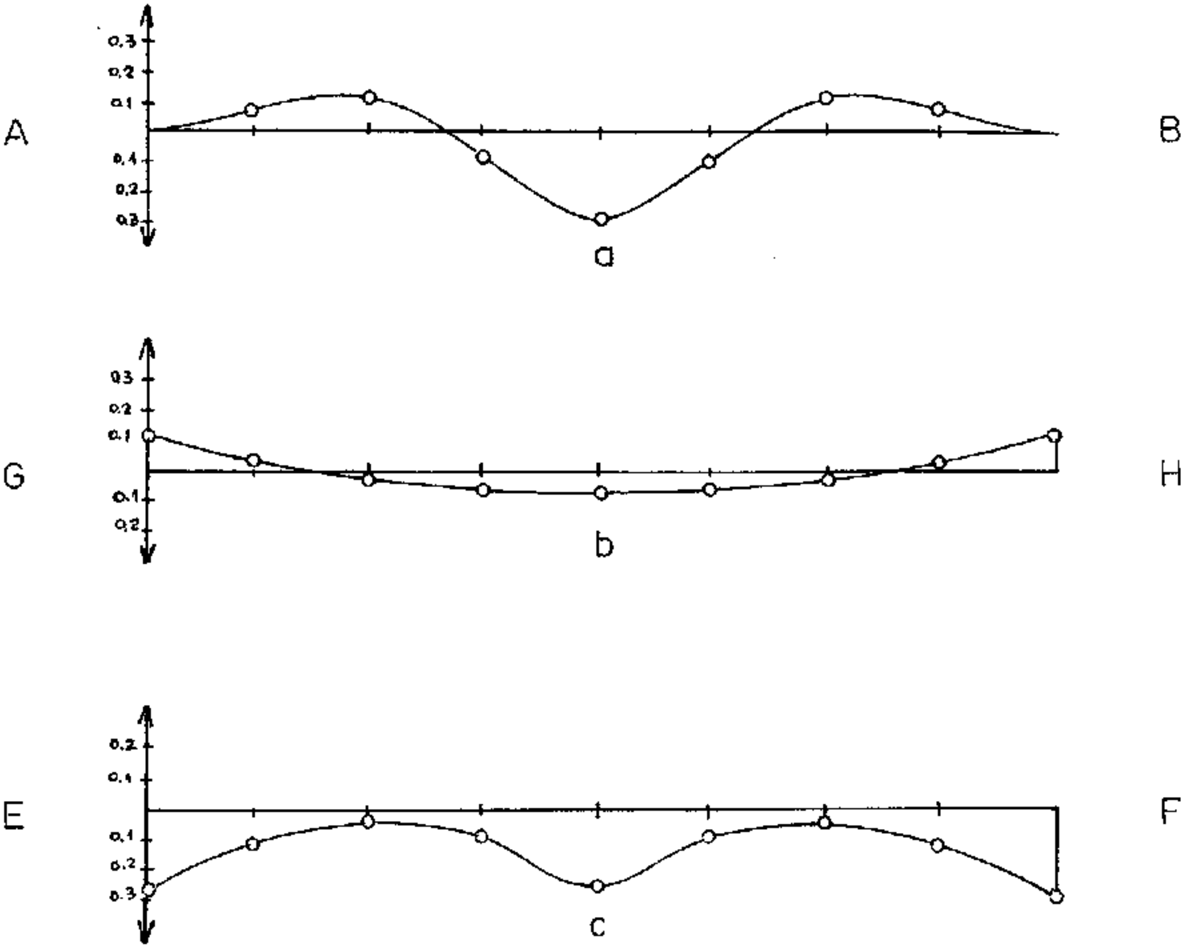


Figura 29

A P E N D I C E A

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA CASCARAS DELGADAS

Con la matriz de rigidez presentada en el capítulo 3 y empleando el esquema de integración reducida del capítulo 6 se pueden calcular con éxito cáscaras gruesas y finas.

Sin embargo, para estas últimas es posible hacer todavía otra simplificación que redundará en una gran economía en el tiempo de computación.

Si para estudiar una cáscara fina se trabaja con la superficie media de la misma, ignorándose la influencia del espesor; la (59) se transformará en

$$x_j = a_i \; x_{ji} \qquad \text{(A1)}$$

variando $j=1,2,3$ e $i=1,2,3,4,5,6,7,8$

puesto que en este caso es $\xi_3 = 0$

Con la hipótesis adoptada en este Apéndice tanto la matriz $[\theta]$ (81) como el jacobiano (88) serán independientes de ξ_3.

Por lo tanto, es posible integrar explícitamente las integrales que componen la matriz de rigidez de un elemento en la dirección normal a la superficie media.

Integrando las (150), (152), (153), (155), (156), (157) y (159), éstas se reducirán a:

$$2 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\theta][B_i]^T[E][B_j][\theta]^T \|J\| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \qquad (A2)$$

$$t_k \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\theta][B_i]^T[E][C_k][\theta]^T[\phi_k]\|J\| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \qquad (A3)$$

$$t_i \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\phi_i]^T[\theta][C_i]^T[E]\,[B_k][\theta]^T\|J\| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \qquad (A4)$$

$$\frac{t_i\,t_k}{6} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\phi_i]^T[\theta][B_i]^T[E]\,[B_k][\theta]^T[\phi_k]\,\|J\| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \qquad (A5)$$

$$\frac{t_i\,t_k}{2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\phi_i]^T[\theta][C_i]^T[E]\,[C_k][\theta]^T[\phi_k]\,\|J\| \; d\xi_1 \, d\xi_2 \qquad (A6)$$

donde los índices i y k variarán entre 1 y 8.

Las restantes integrales son nulas, puesto que:

$$\int_{-1}^{1} \xi_3 \, d\xi_3 = 0 \qquad (A7)$$

Con esta aproximación, se obtiene una sensible disminución en el tiempo de computación, sin que se note diferencia numérica en los resultados encontrados para cáscaras finas.

Para cáscaras gruesas, no es válida la simplificación introducida en este Apéndice.

A P E N D I C E B

MODIFICACION DEL SISTEMA DE REFERENCIA LOCAL

En 3.2- se definieron los ejes de referencia locales como productos vectoriales entre los vectores componentes del espesor y el versor del eje de referencia global x_1'.

Con la fórmula (73) $\vec{V}_{2i} = \vec{V}_{3i} \times \vec{i}$ se definió el eje x_2' (ver figura 11)

Esta definición, no es válida en el caso en que $\vec{V}_{3i}$ es paralelo al eje x_1. En este caso se definirá

$$\vec{V}_{2i} = \vec{V}_{3i} \times \vec{j} \qquad \text{(B1)}$$

donde $\vec{j}$ es el versor de la dirección de x_2.

O sea se reemplaza el eje x_1 por el x_2 y las fórmulas que se aplicarán son

$$\vec{V}_{2i} = \vec{V}_{3i} \times \vec{j} = \begin{Bmatrix} V_{31i} \\ V_{32i} \\ V_{33i} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -V_{33i} \\ 0 \\ V_{31i} \end{Bmatrix} \qquad \text{(B2)}$$

$$\vec{V}_{1i} = \vec{V}_{2i} \times \vec{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} -V_{33i} \\ 0 \\ V_{31i} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} V_{31i} \\ V_{32i} \\ V_{33i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -V_{31i}\ V_{32i} \\ V_{31i}^2 + V_{33i}^2 \\ -V_{33i}\ V_{32i} \end{Bmatrix} \qquad \text{(B3)}$$

Lo mismo ocurre con la definición de $[\theta]$. En este caso los vectores que componen a la matriz $[\theta]$ serán

$$\vec{v}_3 = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \end{Bmatrix} \qquad (B\,4)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{j} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ 0 \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \end{Bmatrix} \qquad (B5)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{Bmatrix} -\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\right)\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\right) \\ \left(\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\right) \end{Bmatrix} \qquad (B6)$$

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{v}_k}{|\vec{v}_k|} \qquad (B7)$$

$i = 1,2,3,4,5,6,7,8$

$k = 1,2,3$

APENDICE C

PROGRAMA AUTOMATICO

En este Apéndice se presentan los listados del Programa Principal y de las Subrutinas que componen el programa automático, en lenguaje Fortran.

```
// FOR
C
C
C      PROGRAMA PRINCIPAL
C
C
       REAL *8 C,RE,XJ,XI,ET
       DIMENSION Q(500),X(100),Y(100),Z(100),VX(100),VY(100),VZ(100),
      *INC(25,8),NNCC(50),RE(8100),DES(50,5),
      *P(5),RC(3),FXL(3),FYL(3),IAX(90)
       DIMENSION FZL(3),XM1(3),XM2(3),KKK(25) ,ND(50),T(100)
       COMMON K2
       DEFINE FILE 1(90,1000,U,K2)
       IR=5
       IW=6
       DO 11111 JV=1,5
       WRITE(IW,11)
 11    FORMAT( '1',15X,'ANALISIS DE CASCARAS ' //)
       WRITE(IW,12)
 12    FORMAT(// '                    ANDRES L. HALBRITTER     COPPE - UFRJ')
       WRITE(IW,14)
 14    FORMAT(//3X,'NN',3X,'NE',3X,'NNDP',2X,'NC',4X,'E',10X,'NU',6X,
      *'ALFA',4X,'NECT',1X,'ICDS',1X,'ICDL'/)
       READ(IR,20)  NN,NE,NNDP,NC,E,U1,ALFA,NECT,ICDS,ICDL
       WRITE(IW,20) NN,NE,NNDP,NC,E,U1,ALFA,NECT,ICDS,ICDL
 20    FORMAT(4I5,F10.2,2F10.4,4I5)
       WRITE(IW,25)
 25    FORMAT(//2X,'NUDO',4X,'X',9X,'Y',8X,'Z',9X,'VX',9X,'VY',8X,'VZ'/)
       READ(IR,87) IZA
 87    FORMAT(I5)
       IF(IZA) 89,89,99
 89    CONTINUE
       READ(IR,10) (I,X(I),Y(I),T(I),I=1,NN)
 10    FORMAT(I5,3F10.5)
       DO 100 I=1,NN
       Z(I)=(4500000.-X(I)**2-Y(I)**2)/6000.
       DZX=X(I)/3000.
       DZY=Y(I)/3000.
```

```
      VX(I)=SQRT(T(I)**2/(1.+(TAN(ATAN(DZX)-1.57029))**2+(TAN(ATAN(
     *DZX)-1.57029)/TAN(ATAN(DZY)-1.57029))**2))
      VY(I)=SQRT(T(I)**2/(1.+(TAN(ATAN(DZY)-1.57029))**2+(TAN(ATAN(
     *DZY)-1.57029)/TAN(ATAN(DZX)-1.57029))**2))
      VZ(I)=ABS(VX(I)*TAN(ATAN(DZX)-1.57029))
100   CONTINUE
      GO TO 15
89    CONTINUE
      READ(IR,26)(I,X(I),Y(I),Z(I),VX(I),VY(I),VZ(I),I=1,NN)
15    CONTINUE
      WRITE(IW,26)    (I,X(I),Y(I),Z(I),VX(I),VY(I),VZ(I),I=1,NN)
26    FORMAT(I5,6F10.4)
      WRITE(IW,30)
30    FORMAT(//15X,'NUDOS DE LOS ELEMENTOS'/)
      DO 36 K=1,NE
      READ(IR,35) I,(INC(I,J),J=1,8)
      WRITE(IW,35) I,(INC(I,J),J=1,8)
35    FORMAT(9I5)
36    CONTINUE
      WRITE(IW,19)
19    FORMAT(//22X,'CONDICIONES DE CONTORNO'//)
      WRITE(IW,18)
18    FORMAT(6X,'NNCO(I)',2X,'ND(I)',2X,'DES(I,1)',2X,'DES(I,2)',
     *2X,'DES(I,3)',2X,'DES(I,4)',2X,'DES(I,5)'/)
      READ(IR,3)(NNCO(I),ND(I),DES(I,1),DES(I,2),DES(I,3),DES(I,4),
     *DES(I,5),I=1,NNDP)
      WRITE(IW,3)(NNCO(I),ND(I),DES(I,1),DES(I,2),DES(I,3),DES(I,4),
     *DES(I,5),I=1,NNCP)
3     FORMAT(2I10,5F10.6)
      N1=5*NN
      DO 59 I=1,N1
59    Q(I)=0.
50    FORMAT(//15X,'CARGAS APLICADAS EN LOS NUDOS'//)
      IF(NC) 7,7,8
7     WRITE(IW,9)
9     FORMAT(//10X,' NO HAY CARGAS APLIC. EN LOS NUDOS'//)
      GO TO 60
8     WRITE(IW,50)
      WRITE(IW,51)
```

```
51    FCRMAT(3X,'NUCC',5X,'PX',8X,'PY',8X,'PZ',8X,'MA',8X,'MB'/)
      DO 6C I=1,NC
      READ(IR,58)   J,(P(K),K=1,5)
      WRITE(IW,58)  J,(P(K),K=1,5)
58    FORMAT(I5,5F10.2)
      CC 57 II=1,5
      JJ=5*J-(5-II)
57    Q(JJ)=P(II)
6C    CONTINUE
      IBAM=C
      DO 173 LL=1,NE
      CC 61 I=1,8
      DO 81 J=I,8
      JBAN=IBAM
      IBAN=5*(IABS(INC(LL,I)-INC(LL,J))+1)
       IF(JBAN-IBAN) 80,8C,81
80    IBAM=IBAN
81    CONTINUE
61    CONTINUE
173   CCNTINUE
      WRITE(IW,70) IBAM
70    FORMAT(//5X,'ANCHO SEMIBANDA =',I5)
      IF(IBAM-9C) 63,63,64
64    WRITE(IW,65)
65    FORMAT(//5X,'ANALISIS SUSPENDIDC - ANCHO BANDA EXCEDIDO')
      GC TC 11111
63    CONTINUE
      XJ=C.577350269189626
      CALL PAR19 (NE,IBAM,XJ,Q,INC,VX,VY,VZ,ALFA,E,U1,X,Y,Z,NECT,NN)
      IF(ICOL) 371,368,371
371   CALL PAR3(ICOL,XJ,Q,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ)
368   CONTINUE
      H=E/(1.-U1**2)
      D11=H
      D12=H*U1
      D21=D12
      D22=H
      D33=H*(1.-U1)/2.
```

```
      D44=D33/1.2
      D55=D44
      IF(ICDS) 511,511,500
 500  CALL PARS(NE,INC,Q,XJ,X,Y,Z,VX,VY,VZ,ICDS)
 511  CONTINUE
      CALL PAR2 (N1,IBAM,RE,VX,VY,VZ,D11,D12,D21,D22,D33,D44,D55,
     *INC,XJ,Q,CES,NNCD,NNDP,ND,X,Y,Z,NE,IAX,IC,LB)
      CALL PAR17 (IC,IBAM,LB,N1,RE,Q,IAX)
      WRITE(IW,160)
 160  FORMAT(///5X,'                               DESPLAZAMIENTOS'//)
      WRITE(IW,161)
 161  FORMAT(2X,'NUDO',3X,'DES X',9X,'DES Y',10X,'DES Z',10X,'GIRO X',
     *10X,'GIRO Y'/)
      DO 163 I=1,NN
      WRITE(IW,162) I,Q(5*I-4),Q(5*I-3),Q(5*I-2),Q(5*I-1),Q(5*I)
 162  FORMAT(I5,5E15.6)
 163  CONTINUE
      CALL      PAR7(NE,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,Q,
     *D11,D12,D21,D22,D33,D44,D55)
11111 CONTINUE
      CALL EXIT
      DEBUG SUBCHK
      END
```

```
// FCR
      SUBROCTINE PAR1(AX,AE,A,ET,XI)
      REAL *8 AX,AE,A,ET,XI
      DIMENSION AX(8),AE(8),A(8)
      IW=6
      A(1)=(1.+XI)*(1.+ET)*(XI+ET-1.)/4.
      A(3)=(1.+XI)*(1.-ET)*(XI-ET-1.)/4.
      A(2)=(1.-XI)*(1.+ET)*(-XI+ET-1.)/4.
      A(4)=(1.-XI)*(1.-ET)*(-XI-ET-1.)/4.
      A(6)=(1.+XI)*(1.-ET**2)/2.
      A(5)=(1.-XI**2)*(1.+ET)/2.
      A(8)=(1.-XI**2)*(1.-ET)/2.
      A(7)=(1.-XI)*(1.-ET**2)/2.
      AX(1)=(1.+ET)*(XI/2.+ET/4.)
      AX(3)=(1.-ET)*(XI/2.-ET/4.)
      AX(2)=(1.+ET)*(XI/2.-ET/4.)
      AX(4)=(1.-ET)*(XI/2.+ET/4.)
      AX(6)=(1.-ET**2)/2.
      AX(5)=-XI*(1.+ET)
      AX(8)=XI*(ET-1.)
      AX(7)=(ET**2-1.)/2.
      AE(1)=(1.+XI)*(ET/2.+XI/4.)
      AE(3)=(1.+XI)*(ET/2.-XI/4.)
      AE(2)=(1.-XI)*(ET/2.-XI/4.)
      AE(4)=(1.-XI)*(ET/2.+XI/4.)
      AE(6)=-ET*(1.+XI)
      AE(5)=(1.-XI**2)/2.
      AE(8)=(XI**2-1.)/2.
      AE(7)=ET*(XI-1.)
      RETURN
      END
```

```
// FOR
      SUBROUTINE PAR2 (N1,IBAM,RE,VX,VY,VZ,D11,D12,D21,D22,D33,
     *D44,D55,INC,XJ,Q,DES,NNCD,NNDP,ND,X,Y,Z,NE,IAX,IC,LB)
      REAL *8 RE,XJ,Q,S
      DIMENSION RE(8100),S(40,40),VX(100),VY(100),VZ(100),INC(25,8),
     *Q(500),DES(50,5),NNCD(50),ND(50),X(100),Y(100),Z(100),IAX(90)
      COMMON K2
      IW=6
      IAX(1)=1
      NNC=8
      NGL=5
      LB=8100/IBAM/NGL*NGL
      NC=0
      IC=1
      IF(N1-LB) 200,201,201
201   IIA=LB*IBAM
      GO TO 202
200    IIA=N1*IBAM
202    DO 103 NL=1,IIA
103   RE(NL)=0.
204   DO 210 N=1,NE
      DO 207 J1=1,NNC
      NL=(INC(N,J1)-1)*NGL-(IC-1)*LB
      IF(NL) 207,208,208
208   IF(NL-LB) 209,207,207
207   CONTINUE
      GO TO 210
209   DO 140 I=1,40
      DO 140 J=1,40
140    S(I,J)=0.
      CALL PAR5 (D11,D12,D21,D22,D33,D44,D55,S,VX,VY,VZ,INC,XJ,X,Y,Z,N)
      DO 210 J1=1,NNC
      NL=(INC(N,J1)-1)*NGL-(IC-1)*LB
      IF(NL) 210,212,212
212   IF(NL-LB) 213,210,210
213   DO 210 J=1,NGL
      NL=NL+1
      I=(J1-1)*NGL+J
      DO 210 K1=1,NNC
```

```
      NC=(INC(N,K1)-1)*NGL-(IC-1)*LB
      DO 21C K=1,NGL
      NCC=NC+K+1-NL
      L=(K1-1)*NGL+K
      IF(NCC) 210,210,214
214   IAA=(NL-1)*IBAM+NCO
      RE(IAA)=RE(IAA)+S(I,L)
210   CONTINUE
      DO 22C N=1,NNCP
      NX=10**(NGL-1)
      I=NNCC(N)
      NL=(I-1)*NGL-(IC-1)*LB
      IF(NL) 22C,222,222
222   IF(NL-(LB+IBAM-1)) 223,22C,22C
223   NTCA=ND(N)
      DO 22C M=1,NGL
      NL=NL+1
      IAA=(NL-1)*IBAM+1
      IDA=NTCA/NX
      IF(IDA) 224,224,225
225   JJ=NL+(IC-1)*LB
C     VERIFICAR TECNICA ADOPTADA
      IF(ABS(DES(N,M))-0.000001) 221,221,332
332   IF(IC-1) 221,221,334
334   IF(NL-IBAM) 286,221,221
C     TECNICA DC NUMERC GRANDE
286   Q(JJ)=1C.E+18*DES(N,M)
      RE(IAA)=1C.E+2C
      GO TO 269
221   IF(NL-LB) 226,226,227
227   NDIF=NL-LB+1
      IF(NDIF-IBAM) 228,228,269
226   NDIF=2
      RE(IAA)=1.
      Q(JJ)=DES(N,M)
228   DC 229 J=NDIF,IBAM
      IF(NL-LB) 230,230,231
230   JJ=NL+(IC-1)*LB+J-1
```

```
      IF(JJ-N1) 301,301,231
301   IAA=(NL-1)*IBAM+J
      Q(JJ)=Q(JJ)-RE(IAA)*DES(N,M)
      RE(IAA)=0.
231   NR=NL+1-J
      IF(NR) 229,229,232
232   JJ=NR+(IC-1)*LB
      IAA=(NR-1)*IBAM+J
      Q(JJ)=Q(JJ)-RE(IAA)*DES(N,M)
      RE(IAA)=0.
229   CONTINUE
269   NTCA=NTCA-NX*IDA
      GO TO 251
224   IF(NL-LB) 305,305,251
305   RE(IAA)=RE(IAA)+DES(N,M)
251   NX=NX/10
220   CONTINUE
      LLI=N1-IC*LB
      IF(LLI) 234,234,235
234   LLI=N1-(IC-1)*LB
      NO=1
      GO TO 236
235   LLI=LB
236   CALL PAR16 (NO,IC,IBAM,LLI,LB,RE,IAX)
      IF(NO) 237,237,238
237   IC=IC+1
      GO TO 204
238   CONTINUE
      RETURN
      DEBUG SUBCHK
      END
```

```
// FOR
      SUBROUTINE PAR3(ICOL,XJ,Q,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ)
      REAL *8 Q,XJ,XI,ET,G
      DIMENSION Q(500),INC(25,8),X(100),Y(100),Z(100),VX(100),
     *VY(100),VZ(100),FXL(3),FYL(3),FZL(3),XM1(3),XM2(3)
      IR=5
      IW=6
      WRITE(IW,34)
34    FORMAT(//5X,'CARGAS DISTRIB. SOBRE LADOS DE LOS ELEMENTOS'/)
      G=0.
36    FORMAT(//5X,'ICL1=',I2,5X,'ICL2=',I2,5X,'ICL3=',I2,5X,'ICL4=',
     *I2)
37    FORMAT(//5X,'ELEMENTO NUMERO',I3)
      DO 342 I3=1,ICOL
35    FORMAT(10I5)
      READ(IR,35) ICL1,ICL2,ICL3,ICL4
------READ(IR,35) JK------------------------------------------------
      WRITE(IW,37) JK
      WRITE(IW,36) ICL1,ICL2,ICL3,ICL4
      READ(IR,721) (FXL(K),FYL(K),FZL(K),XM1(K),XM2(K),K=1,3)
      WRITE(IW,250)
250   FORMAT(//10X,'CARGAMENTO'/)
      WRITE(IW,721)(FXL(K),FYL(K),FZL(K),XM1(K),XM2(K),K=1,3)
721   FORMAT(5F10.6)
      IF(ICL1) 1,2,1
1     DO 561I=1,2
      K=I-1
      XI=XJ*(1.-2.*K)
      ET=1.
      NT=1
      CALL PAR11 (XJ,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,JK,FXL,FYL,FZL,XM1,XM2,
     *ICL1,ICL2,ICL3,ICL4,Q,NT,XI,ET,G)
561   CONTINUE
2     IF(ICL2) 31,424,31
31    DO55 I=1,2
      K=I-1
      ET=-1.
      XI=XJ*(1.-2.*K)
```

```
      NT=1
      CALL PAR11 (XJ,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,JK,FXL,FYL,FZL,XM1,XM2,
     *ICL1,ICL2,ICL3,ICL4,Q,NT,XI,ET,G)
55    CONTINUE
424   IF(ICL3) 6,17,6
6     DO98 I=1,2
      K=I-1
      XI=1.
      ET=XJ*(1.-2.*K)
      NT=-1
      CALL PAR11 (XJ,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,JK,FXL,FYL,FZL,XM1,XM2,
     *ICL1,ICL2,ICL3,ICL4,Q,NT,XI,ET,G)
98    CONTINUE
17     IF(ICL4) 191,91,191
191   DO 11 I=1,2
      K=I-1
      XI=-1.
      ET=XJ*(1.-2.*K)
      NT=-1
      CALL PAR11 (XJ,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,JK,FXL,FYL,FZL,XM1,XM2,
     *ICL1,ICL2,ICL3,ICL4,Q,NT,XI,ET,G)
11    CONTINUE
91    CONTINUE
342   CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
// FOR
      SUBROLTINE PAR5 (D11,D12,C21,D22,D33,D44,D55,S,VX,VY,VZ,INC,XJ,
     *X,Y,Z,LL)
      REAL *8 BDB,B1,B2,TBDB,TI,S,C1,TF,FT,FTBB,F,FFBB,CDB,AM,XJ,
     *ET,G,DJ,C1,C2,XI,A(8),AE(8),AX(8),XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG
      DIMENSION BDB(3,3),B1(8),B2(8),TBDB(3,3),TI(3,3),S(40,40),C1(8),
     *VX(100),VY(100),VZ(100),X(100),Y(100),Z(100),TF(3,2),FT(2,3),
     *FTBB(2,3),INC(25,8),F(3,2),FFBB(3,3),CDB(2,3),AM(2,40)
C
C     MATRIZ DE RIGIDEZ PARA CASCARAS GRUESAS
C
      IW=6
      DO 145 ML=1,2
      K=ML-1
      XI=XJ*(1.-2.*K)
      DO 145 KK=1,2
      K=KK-1
      ET=XJ*(1.-2.*K)
      DO 145 LR=1,2
      K=LR-1
       G=XJ*(1.-2.*K)
      CALL PAR10(XI,ET,G,LL,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,AX,AE,A,TI,DJ,B1,B2,C1,
     *XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG)
      DO 118 I=1,8
      DO 118 J=I,8
      CALL PAR5A(B1,C11,D12,D21,D22,D33,D44,D55,B2,TI,TBDB,I,J)
      DO 118 K=1,3
      N=3*(I-1)+K
      DO 118 L=1,3
      NN=3*(J-1)+L
      DO 118 M=1,3
      S(N,NN)=S(N,NN)+(TBDB(K,M)*TI(M,L))/DJ
118   CONTINUE
      DO 125 I=1,8
      DO 125 J=1,8
      DO 120 K=1,3
      DO 120 L=1,3
120   BDB(K,L)=0.
```

```
      BDB(3,1)=B1(I)*D44*C1(J)
      BDB(3,2)=B2(I)*D55*C1(J)
      DO 110 K=1,3
      DO 110 L=1,3
110   TBDB(K,L)=0.
      DO 111 K=1,3
      DO 111 L=1,3
      DO 111 M=1,3
111   TBDB(K,L)=TBDB(K,L)+TI(M,K)*BDB(M,L)
      DO 121 M=1,3
      DO 121 N=1,3
121   BDB(M,N)=0.
      CALL PAR5A(B1,D11,D12,D21,D22,D33,D44,D55,B2,TI,FFBB,I,J)
      DO 122 K=1,3
      DO 122 L=1,3
      DO 122 M=1,3
122   BDB(K,L)=BDB(K,L)+(TBDB(K,M)+FFBB(K,M)*G)*TI(M,L)
      JJ=INC(LL,J)
      CALL PAR5B(J,JJ,VX,VY,VZ,F)
      V=SQRT(VX(JJ)**2+VY(JJ)**2+VZ(JJ)**2)
      DO 125 K=1,3
      N=3*(I-1)+K
      DO 125 L=1,2
      NN=24+2*(J-1)+L
      DO 125 M=1,3
      S(N,NN)=S(N,NN)+BDB(K,M)*F(M,L)*V/(2.*DJ)
125   CONTINUE
      DO 138 I=1,8
      JJ=INC(LL,I)
      CALL PAR5B(I,JJ,VX,VY,VZ,F)
      V=SQRT(VX(JJ)**2+VY(JJ)**2+VZ(JJ)**2)
      DO 1263 K=1,2
      DO 1263 L=1,3
1263  FT(K,L)=0.
      DO 128 K=1,2
      DO 128 L=1,3
      DO 128 M=1,3
128   FT(K,L)=FT(K,L)+F(M,K)*TI(L,M)*V/2.
      DO 138 J=I,8
```

```
      JJ=INC(LL,J)
      CALL PARSB(J,JJ,VX,VY,VZ,F)
      V=SQRT(VX(JJ)**2+VY(JJ)**2+VZ(JJ)**2)
      DO 129 K=1,3
      DO 129 L=1,2
129   TF(K,L)=0.
      DO 131 K=1,3
      DO 131 L=1,2
      DO 131 M=1,3
131   TF(K,L)=TF(K,L)+TI(K,M)*F(M,L)*V/2.
      BDB(1,1)=B1(I)*D11*B1(J)+B2(I)*D33*B2(J)
      BDB(1,2)=B1(I)*D12*B2(J)+B2(I)*D33*B1(J)
      BDB(1,3)=0.
      BDB(2,1)=B2(I)*D21*B1(J)+B1(I)*D33*B2(J)
      BDB(2,2)=B2(I)*D22*B2(J)+B1(I)*D33*B1(J)
      BDB(2,3)=0.
      BDB(3,1)=0.
      BDB(3,2)=0.
      BDB(3,3)=B1(I)*D44*B1(J)+B2(I)*D55*B2(J)
      DO 132 K=1,2
      DO 132 L=1,3
132   TBDB(K,L)=0.
      DO 134 K=1,2
      DO 134 L=1,3
      DO 134 M=1,3
134   TBDB(K,L)=TBDB(K,L)+FT(K,M)*BDB(M,L)*G**2
      O1=C1(I)*D44*C1(J)
      O2=C1(I)*D55*C1(J)
      DO 136 K=1,2
      DO 136 L=1,3
136   FTBB(K,L)=0.
      FTBB(1,1)=FT(1,1)*O1
      FTBB(1,2)=FT(1,2)*O2
      FTBB(2,1)=FT(2,1)*O1
      FTBB(2,2)=FT(2,2)*O2
      DO 436 K=1,3
      DO 436 L=1,3
436   BDB(K,L)=0.
```

```
      BDB(3,1)=B1(I)*D44*C1(J)*G
      BDB(3,2)=B2(I)*D55*C1(J)*G
      FFBB(1,1)=FT(1,3)*BDB(3,1)
      FFBB(1,2)=FT(1,3)*BDB(3,2)
      FFBB(2,1)=FT(2,3)*BDB(3,1)
      FFBB(2,2)=FT(2,3)*BDB(3,2)
      FFBB(1,3)=0.
      FFBB(2,3)=0.
      DO 437 K=1,3
      DO 437 L=1,3
437   BDB(K,L)=0.
      BDB(1,3)=C1(I)*D44*B1(J)*G
      BDB(2,3)=C1(I)*D55*B2(J)*G
      DO 438 K=1,2
      DO 438 L=1,3
438   CDB(K,L)=0.
      CDB(1,3)=FT(1,1)*BDB(1,3)+FT(1,2)*BDB(2,3)
      CDB(2,3)=FT(2,1)*BDB(1,3)+FT(2,2)*BDB(2,3)
      DO 138 K=1,2
      N=24+2*(I-1)+K
      DO 138 L=1,2
      NN=24+2*(J-1)+L
      DO 138 M=1,3
      S(N,NN)=S(N,NN)+(TBDB(K,M)+FTBB(K,M)+FFBB(K,M)+CDB(K,M))*TF(M,L)/
     *DJ
138   CONTINUE
145   CONTINUE
      DO 1 I=1,40
      DO 1 J=1,40
1     S(J,I)=S(I,J)
      DO 5 K=1,7
      DO 3 I=1,2
      L=5*K-2+I
      DO 3 J=1,40
3     AM(I,J)=S(L,J)
      DO 5 I=1,2
      L=5*K-2+I
      L1=22+2*K+I
      DO 5 J=1,40
```

```
5       S(L,J)=S(L1,J)
        L=22-3*K
        DC 7 I=1,L
        L1=25+2*K-I
        N=L1-2
        CC 7 J=1,40
7       S(L1,J)=S(N,J)
        DC 9 I=1,2
        L=5*K+I
        CO 9 J=1,40
9       S(L,J)=AM(I,J)
         CO 20 K=1,7
        DC 13 I=1,2
        L=5*K-2+I
        CC 13 J=1,40
13      AM(I,J)=S(J,L)
        DC 15 I=1,2
        L=5*K-2+I
        L1=22+2*K+I
        DO 15 J=1,40
15      S(J,L)=S(J,L1)
        L=22-3*K
        CC 17 I=1,L
        L1=25+2*K-I
        N=L1-2
        CC 17 J=1,40
17      S(J,L1)=S(J,N)
        CC 20 I=1,2
        L=5*K+I
        DO 20 J=1,40
20      S(J,L)=AM(I,J)
        RETURN
        END
```

```
// FCR
       SUBRCUTINE PAR5 (C11,D12,D21,D22,D33,D44,D55,S,VX,VY,VZ,INC,XJ,
      *X,Y,Z,LL)
       REAL *8 BCB,B1,B2,TBDB,TI,S,C1,TF,FT,FTBB,F,FFBB,CDB,AM,XJ,
      *ET,G,CJ,O1,O2,XI,A(8),AE(8),AX(8),XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG
       CIMENSION BCB(3,3),B1(8),B2(8),TBDB(3,3),TI(3,3),S(40,40),C1(8),
      *VX(1CC),VY(100),VZ(100),X(100),Y(100),Z(100),TF(3,2),FT(2,3),
      *FTBB(2,3),INC(25,8),F(3,2),FFBB(3,3),CDB(2,3),AM(2,40)
C
C      MATRIZ CE RIGIDEZ PARA CASCARAS FINAS
C
       IW=6
       G=C.
       CC 145 ML=1,2
       K=ML-1
       XI=XJ*(1.-2.*K)
       DO 145 KK=1,2
       K=KK-1
       ET=XJ*(1.-2.*K)
       CALL PAR1C(XI,ET,G,LL,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,AX,AE,A,TI,DJ,B1,B2,C1,
      *XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG)
       CC 118 I=1,8
       DO 118 J=I,8
       CALL PAR5A(B1,D11,D12,D21,D22,D33,D44,D55,B2,TI,TBDB,I,J)
       CC 118 K=1,3
       N=3*(I-1)+K
       CC 118 L=1,3
       NN=3*(J-1)+L
       DO 118 M=1,3
       S(N,NN)=S(N,NN)+2.*(TBDB(K,M)*TI(M,L))/DJ
 118   CONTINUE
       CC 125 I=1,8
       CC 125 J=1,8
       DO 12C K=1,3
       DC 12C L=1,3
 120   BCB(K,L)=0.
       BDB(3,1)=B1(I)*D44*C1(J)
       BDB(3,2)=B2(I)*D55*C1(J)
       DO1110 K=1,3
```

```
      DO 1110 L=1,3
1110  TBDB(K,L)=0.
      DO 111 K=1,3
      DO 111 L=1,3
      DO 111 M=1,3
111   TBDB(K,L)=TBDB(K,L)+TI(M,K)*BDB(M,L)
      DO 121 M=1,3
      DO 121 N=1,3
121   BDB(M,N)=0.
      DO 122 K=1,3
      DO 122 L=1,3
      DO 122 M=1,3
122   BDB(K,L)=BDB(K,L)+(TBDB(K,M))*TI(M,L)
      JJ=INC(LL,J)
      CALL PAR5B(J,JJ,VX,VY,VZ,F)
      V=SQRT(VX(JJ)**2+VY(JJ)**2+VZ(JJ)**2)
      DO 125 K=1,3
      N=3*(I-1)+K
      DO 125 L=1,2
      NN=24+2*(J-1)+L
      DO 125 M=1,3
      S(N,NN)=S(N,NN)+BDB(K,M)*F(M,L)*V/DJ
125   CONTINUE
      DO 138 I=1,8
      JJ=INC(LL,I)
      CALL PAR5B(I,JJ,VX,VY,VZ,F)
      V=SQRT(VX(JJ)**2+VY(JJ)**2+VZ(JJ)**2)
      DO 1263 K=1,2
      DO 1263 L=1,3
1263  FT(K,L)=0.
      DO 128 K=1,2
      DO 128 L=1,3
      DO 128 M=1,3
128   FT(K,L)=FT(K,L)+F(M,K)*TI(L,M)*V
      DO 138 J=I,8
      JJ=INC(LL,J)
      CALL PAR5B(J,JJ,VX,VY,VZ,F)
      V=SQRT(VX(JJ)**2+VY(JJ)**2+VZ(JJ)**2)
```

```
      CC 129 K=1,3
      DO 129 L=1,2
129   TF(K,L)=0.
      CC 131 K=1,3
      DO 131 L=1,2
      DC 131 M=1,3
131   TF(K,L)=TF(K,L)+TI(K,M)*F(M,L)*V
      BDB(1,1)=B1(I)*D11*B1(J)+B2(I)*D33*B2(J)
      BDB(1,2)=B1(I)*D12*B2(J)+B2(I)*D33*B1(J)
      BDB(1,3)=C.
      BDB(2,1)=B2(I)*D21*B1(J)+B1(I)*D33*B2(J)
      BDB(2,2)=B2(I)*C22*B2(J)+B1(I)*D33*B1(J)
      BDB(2,3)=C.
      BDB(3,1)=0.
      BDB(3,2)=0.
      BDB(3,3)=B1(I)*D44*B1(J)+B2(I)*D55*B2(J)
      DC 132 K=1,2
      DO 132 L=1,3
132   TBDB(K,L)=0.
      DC 134 K=1,2
      CO 134 L=1,3
      DO 134 M=1,3
134   TBDB(K,L)=TBCB(K,L)+FT(K,M)*BDB(M,L)/6.
      O1=C1(I)*D44*C1(J)
      O2=C1(I)*D55*C1(J)
      CC 136 K=1,2
      DO 136 L=1,3
136   FTBB(K,L)=0.
      FTBB(1,1)=FT(1,1)*O1/2.
      FTBB(1,2)=FT(1,2)*O2/2.
      FTBB(2,1)=FT(2,1)*O1/2.
      FTBB(2,2)=FT(2,2)*O2/2.
      DC 138 K=1,2
      N=24+2*(I-1)+K
      DC 138 L=1,2
      NN=24+2*(J-1)+L
      DC 138 M=1,3
      S(N,NN)=S(N,NN)+(TBDB(K,M)+FTBB(K,M))*TF(M,L)/DJ
138   CONTINUE
```

```
145   CONTINUE
      DO 1 I=1,40
      DO 1 J=1,40
1     S(J,I)=S(I,J)
      DO 9 K=1,7
      DO 3 I=1,2
      L=5*K-2+I
      DO 3 J=1,40
3     AM(I,J)=S(L,J)
      DO 5 I=1,2
      L=5*K-2+I
      L1=22+2*K+I
      DO 5 J=1,40
5     S(L,J)=S(L1,J)
      L=22-3*K
      DO 7 I=1,L
      L1=25+2*K-I
      N=L1-2
      DO 7 J=1,40
7     S(L1,J)=S(N,J)
      DO 9 I=1,2
      L=5*K+I
      DO 9 J=1,40
9     S(L,J)=AM(I,J)
       DO 20 K=1,7
      DO 13 I=1,2
      L=5*K-2+I
      DO 13 J=1,40
13    AM(I,J)=S(J,L)
      DO 15 I=1,2
      L=5*K-2+I
      L1=22+2*K+I
      DO 15 J=1,40
15    S(J,L)=S(J,L1)
      L=22-3*K
      DO 17 I=1,L
      L1=25+2*K-I
      N=L1-2
```

```
      DC 17 J=1,40
17    S(J,L1)=S(J,N)
      DO 20 I=1,2
      L=5*K+I
      CC 20 J=1,40
2C    S(J,L)=AM(I,J)
      RETURN
      END
```

```
// FOR
      SUBROUTINE PAR5A(B1,D11,D12,D21,D22,D33,D44,D55,B2,TI,TBDB,I,J)
      REAL *8 B1,B2,TI,TBDB,BDB
      DIMENSION B1(8),B2(8),TI(3,3),TBDB(3,3),BDB(3,3)
      BDB(1,1)=B1(I)*D11*B1(J)+B2(I)*D33*B2(J)
      BDB(1,2)=B1(I)*D12*B2(J)+B2(I)*D33*B1(J)
      BDB(1,3)=0.
      BDB(2,1)=B2(I)*D21*B1(J)+B1(I)*D33*B2(J)
      BDB(2,2)=B2(I)*D22*B2(J)+B1(I)*D33*B1(J)
      BDB(2,3)=0.
      BDB(3,1)=0.
      BDB(3,2)=0.
      BDB(3,3)=B1(I)*D44*B1(J)+B2(I)*D55*B2(J)
      DO 116 K=1,3
      DO 116 L=1,3
116   TBDB(K,L)=0.
      DO 117 K=1,3
      DO 117 L=1,3
      DO 117 M=1,3
117   TBDB(K,L)=TBDB(K,L)+TI(M,K)*BDB(M,L)
      RETURN
      DEBUG SUBCHK
      END
```

```
// FCR
      SLBRGLTINE FAR5B(I,JJ,VX,VY,VZ,F)
      REAL *8 V2,V1,F
      CIMENSION F(3,2),VX(100),VY(100),VZ(100)
      V2=SCRT(VZ(JJ)**2+VY(JJ)**2)
      IF(V2-C.CCC1) 1,1,2
1     V2=SQRT(VZ(JJ)**2+VX(JJ)**2)
      V1=SQRT((VX(JJ)**2+VZ(JJ)**2)**2+(VX(JJ)*VY(JJ))**2+(VZ(J
     *J)*VY(JJ))**2)
      F(1,1)=-VX(JJ)*VY(JJ)/V1
      F(2,1)=(VX(JJ)**2+VZ(JJ)**2)/V1
      F(3,1)=-VZ(JJ)*VY(JJ)/V1
      F(1,2)=-VZ(JJ)/V2
      F(2,2)=0.
      F(3,2)=VX(JJ)/V2
      GC TC 3
2     V1=SCRT((VY(JJ)**2+VZ(JJ)**2)**2+(VX(JJ)*VY(JJ))**2+(VX(JJ)*
     *VZ(JJ))**2)
      F(1,2)=C.
      F(1,1)=(VY(JJ)**2+VZ(JJ)**2)/V1
      F(2,2)=VZ(JJ)/V2
      F(2,1)=-(VX(JJ)*VY(JJ))/V1
      F(3,2)=-VY(JJ)/V2
      F(3,1)=-(VX(JJ)*VZ(JJ))/V1
3     RETURN
      CEBLG SLBCHK
      END
```

```
// FCR
      SUBRCUTINE PAR6 (A,LL,RO,Q,DJ,INC)
      REAL *8 A,Q,CJ
      DIMENSICN A(8),Q(50C),INC(25,8),RO(3)
      IW=6
      CC 100 I=1,8
      J=INC(LL,I)
      J1=5*J-4
      J2=5*J-3
      J3=5*J-2
      Q(J1)=Q(J1)+A(I)*RO(1)*DJ
      Q(J2)=Q(J2)+A(I)*RO(2)*CJ
      Q(J3)=C(J3)+A(I)*RO(3)*CJ
100   CCNTINUE
      RETLRN
      DEBUG SUBCHK
      END
```

```
// FCR
      SUBRCUTINE PAR7(NE,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,Q,
     *D11,C12,D21,D22,D33,D44,D55)
      REAL *8 Q,AX,AE,A,TI,B1,B2,C1,F,XI,ET,G,V,R1,R2,R3,R4,R5,P1,P2,
     *P3,C1,Q2,G3,Z1,Z2 ,TENS,AM,XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG,DJ,S1,TEN13,
     *TEN23
      CIMENSION AX(8),AE(8),A(8),X(100),Y(100),Z(100),VX(100),VY(100),
     *VZ(1CC),INC(25,8),TI(3,3),B1(8),B2(8),C1(8),F(3,2),
     *TENS(3,3),Q(5CC),AM(3,3)
      IW=6
      DC 1CC JK=1,NE
      CC 100 K=1,8
      JJ=INC(JK,K)
      GC TC(1,2,3,4,5,6,7,8),K
1     XI=1.
      ET=1.
      GC TC 12
2     XI=-1.
      ET=1.
      GC TC 12
3     XI=1.
      ET=-1.
      GC TC 12
4     XI=-1.
      ET=-1.
      GC TC 12
5     XI=C.
      ET=1.
      GC TO 12
6     XI=1.
      ET=C.
      GC TC 12
7     XI=-1.
      ET=C.
      GO TC 12
8     XI=C.
      ET=-1.
12    DO 1CC L=1,2
      G=1.-2.*(L-1.)
```

```
      CALL PAR10 (XI,ET,G,JK,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,AX,AE,A,TI,DJ,B1,B2,C1,
     *XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG)
      DC 27 N=1,3
      DC 27 NN=1,3
      AM(N,NN)=C.
 27   TENS(N,NN)=0.
      R1=C.
      R2=0.
      R3=C.
      R4=C.
      R5=0.
      DO 5CC I=1,8
      J=INC(JK,I)
      CALL PAR5B(I,J,VX,VY,VZ,F)
      V=(SQRT(VX(J)**2+VY(J)**2+VZ(J)**2))/2.
      J1=5*J-4
      J2=5*J-3
      J3=5*J-2
      J4=5*J-1
      J5=5*J
      P1=V*G*(F(1,1)*Q(J4)+F(1,2)*Q(J5))
      Q1=P1+Q(J1)
      P2=V*G*(F(2,1)*Q(J4)+F(2,2)*Q(J5))
      Q2=P2+Q(J2)
      P3=V*G*(F(3,1)*Q(J4)+F(3,2)*Q(J5))
      Q3=P3+Q(J3)
      Z1=TI(1,1)*Q1+TI(1,2)*Q2+TI(1,3)*Q3
      Z2=TI(2,1)*Q1+TI(2,2)*Q2+TI(2,3)*Q3
      R1=R1+(B1(I)*Z1)/DJ
      R2=R2+(B2(I)*Z2)/DJ
      R3=R3+(B1(I)*Z2+B2(I)*Z1)/DJ
      S1=TI(3,1)*Q1+TI(3,2)*Q2+TI(3,3)*Q3
      R4=R4+(B1(I)*S1+C1(I)*(TI(1,1)*P1+TI(1,2)*P2+TI(1,3)*P3)/G)/DJ
      R5=R5+(B2(I)*S1+C1(I)*(TI(2,1)*P1+TI(2,2)*P2+TI(2,3)*P3)/G)/DJ
 500  CONTINUE
      TENS(1,1)=D11*R1+D12*R2
      TENS(1,2)=D33*R3
      TEN13=1.5*D44*R4
```

```
      TENS(2,2)=D21*R1+D22*R2
      TEN23=1.5*D55*R5
      DO 30 N=1,3
      DO 30 NN=1,3
 30   TENS(NN,N)=TENS(N,NN)
      WRITE(IW,34)
 34   FORMAT(5X,'TENSIONES EN SISTEMA LOCAL '/)
      WRITE(IW,33)
 33   FORMAT(5X,'ELEMENTO',3X,'NUDO',5X,'FASE',5X,'TENSOR DE TENSIONES')
      DO 36 N=1,3
      WRITE(IW,35) JK,JJ,G,(TENS(N,NN),NN=1,3)
 35   FORMAT(2I10,7E15.6)
 36   CONTINUE
      WRITE(IW,37) TEN13,TEN23
 37   FORMAT(/5X,'TENSIONES TANGENCIALES MAXIMAS  TAU XZ =',E15.6,
     *5X,'TAU YZ =',E15.6)
      DO 40 N=1,3
      DO 40 NN=1,3
      DO 40 NM=1,3
 40   AM(N,NN)=AM(N,NN)+TENS(N,NM)*TI(NM,NN)
      DO 41 N=1,3
      DO 41 NN=1,3
 41   TENS(N,NN)=0.
      DO 42 N=1,3
      DO 42 NN=1,3
      DO 42 NM=1,3
 42   TENS(N,NN)=TENS(N,NN)+TI(NM,N)*AM(NM,NN)
      WRITE(IW,505)
 505  FORMAT(//,5X,'TENSIONES EN SISTEMA GLOBAL'/)
      WRITE(IW,33)
      DO 504 N=1,3
      WRITE(IW,35) JK,JJ,G,(TENS(N,NN),NN=1,3)
 504  CONTINUE
      A(1)=TENS(1,1)
      A(2)=TENS(1,2)
      A(3)=TENS(2,2)
      A(4)=TENS(1,3)
      A(5)=TENS(2,3)
      A(6)=TENS(3,3)
```

```
      CALL PAR20(A)
 100  CONTINUE
      RETURN
      DEBUG SUBCHK
      END
```

```
// FOR
      SUBRCUTINE PAR8(LL,ALFA,E,U1,TS,A,G,TIN,INC,TI,B1,B2,VX,VY,VZ,Q)
      REAL *8 A,G,TI,B1,B2,F,CJ,AEU,Q,V
      DIMENSION TS(100,25),A(8),TIN(100,25),INC(25,8),TI(3,3),B1(8),
     *B2(8),Q(500),VX(100),VY(100),VZ(100),F(3,2)
      IW=6
      AEU=ALFA*E/(1.-U1)
      TE=0.
      DC 10 I=1,8
      JJ=INC(LL,I)
      TEM=(TS(JJ,LL)+TIN(JJ,LL))/2.
      DT=(TS(JJ,LL)-TIN(JJ,LL))/2.
 10   TE=TE+A(I)*TEM+A(I)*G*DT
      TE=TE*AEU
      DC 20 I=1,8
      JJ=INC(LL,I)
      J=5*INC(LL,I)-4
      J1=J+1
      J2=J+2
      Q(J)=Q(J)-(TI(1,1)*B1(I)+TI(2,1)*B2(I))*TE
      Q(J1)=-(TI(1,2)*B1(I)+TI(2,2)*B2(I))*TE+Q(J1)
      Q(J2)=-(TI(1,3)*B1(I)+TI(2,3)*B2(I))*TE+Q(J2)
      J3=J+3
      J4=J+4
      CALL PAR58(I,JJ,VX,VY,VZ,F)
      V=(SQRT(VX(JJ)**2+VY(JJ)**2+VZ(JJ)**2))/2.
      Q(J3)=-(F(2,1)*(TI(1,2)*B1(I)+TI(2,2)*B2(I))+F(3,1)*(TI(1,3)
     **B1(I)+TI(2,3)*B2(I))+F(1,1)*(TI(1,1)*B1(I)+TI(2,1)*B2(I)))
     **V*G*TE+Q(J3)
 20   Q(J4)=-(F(1,2)*(TI(2,1)*B2(I)+TI(1,1)*B1(I))+F(2,2)*(TI(1,2)*B1(I)
     *+TI(2,2)*B2(I))+F(3,2)*(TI(1,3)*B1(I)+TI(2,3)*B2(I)))*V*G*TE+
     *Q(J4)
      RETLRN
      DEBUG SUBCHK
      END
```

```
// FCR
      SUBROUTINE PAR9(NE,INC,Q,XJ,X,Y,Z,VX,VY,VZ,ICDS)
      REAL *8 A,F,G,AE,AX,TI,B1,B2,C1,XJ,XI,ET,G,DJ,XX,XE,XG,YX,YE,YG,
     *ZX,ZE,ZG,B
      DIMENSION FX(100,25),FY(100,25),FZ(100,25),A(8),INC(25,8),F(3),
     *Q(500),X(100),Y(100),Z(100),VX(100),VY(100),VZ(100),AE(8),AX(8),
     *TI(3,3),B1(8),B2(8),C1(8)
      IR=5
      IW=6
      WRITE(IW,8)
8     FORMAT(//5X,'CARGAS DISTRIB. SOBRE LA SUPERFICIE'//)
35    FORMAT(5I5)
      DO 488 K=1,ICDS
      READ(IR,35) LI
      DO 488 JJ=1,8
      J=INC(LI,JJ)
      READ(IR,480) FX(J,LI),FY(J,LI),FZ(J,LI)
480   FORMAT(3F10.4)
      WRITE(IW,487) J,LI,FX(J,LI),J,LI,FY(J,LI),J,LI,FZ(J,LI)
487   FORMAT(5X,'FX(',I2,',',I2,')',F10.3,'FY(',I2,',',I2,')',F10.3,
     *'FZ(',I2,',',I2,')',F10.3/)
488   CONTINUE
      G=0.
      DO 145 LL=1,NE
      DO 145 L=1,2
      K=L-1
      XI=XJ*(1.-K*2.)
      DO 145 N=1,2
      K=N-1
      ET=XJ*(1.-K*2.)
      CALL PAR10 (XI,ET,G,LL,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,AX,AE,A,TI,DJ,B1,B2,C1,
     *XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG)
      DO 5 J=1,3
5     F(J)=0.
      DO 10 I=1,8
      JJ=INC(LL,I)
      F(1)=F(1)+A(I)*FX(JJ,LL)
      F(2)=F(2)+A(I)*FY(JJ,LL)
```

```
10    F(3)=F(3)+A(I)*FZ(JJ,LL)
      B=XX*YE-YX*XE
      DC 2C I=1,8
      JJ=INC(LL,I)
      DC 2C K=1,3
      J=5*JJ-(5-K)
2C    G(J)=C(J)+A(I)*F(K)*B
145   CONTINUE
      RETURN
      CEBUG SLBCHK
      END
```

```
// FOR
      SUBROUTINE PAR1C(XI,ET,G,LL,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,AX,AE,A,TI,
     *DJ,B1,B2,C1,XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG)
      REAL *8 XI,ET,G,AX,AE,A,TI,DJ,B1,B2,C1,XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,
     *ZG,T1,T2,T3,B11,B21,B31,B12,B22,B32,A11,A12,A21,A22,A33
      DIMENSION INC(25,8),X(100),Y(100),Z(100),VX(100),VY(100),VZ(100),
     *AX(8),AE(8),A(8),TI(3,3),B1(8),B2(8),C1(8)
      IW=6
      CALL PAR1(AX,AE,A,ET,XI)
      XX=0.
      XE=0.
      XG=0.
      YX=0.
      YE=0.
      YG=0.
      ZX=0.
      ZE=0.
      ZG=0.
      DO 100 I=1,8
      J=INC(LL,I)
      XX=XX+AX(I)*X(J)+AX(I)*G*VX(J)/2.
      XE=XE+AE(I)*X(J)+AE(I)*G*VX(J)/2.
      XG=XG+A(I)*VX(J)/2.
      YX=YX+AX(I)*Y(J)+AX(I)*G*VY(J)/2.
      YE=YE+AE(I)*Y(J)+AE(I)*G*VY(J)/2.
      YG=YG+A(I)*VY(J)/2.
      ZX=ZX+AX(I)*Z(J)+AX(I)*G*VZ(J)/2.
      ZE=ZE+AE(I)*Z(J)+AE(I)*G*VZ(J)/2.
      ZG=ZG+A(I)*VZ(J)/2.
100   CONTINUE
      TI(2,1)=0.
      TI(2,2)=-(XE*YX-XX*YE)
      TI(2,3)=XX*ZE-XE*ZX
      TI(1,1)=(XE*ZX)**2-2.*XE*ZX*XX*ZE+(XX*ZE)**2+(XX*YE)**2-2.*XX*YE
     **XE*YX+(XE*YX)**2
      TI(1,2)=-YX*ZE*XE*ZX+(YX*XX)*(ZE**2)+(YE*XE)*(ZX**2)-YE*ZX*XX*ZE
      TI(1,3)=-YX*ZE*XX*YE+(YX**2)*(ZE*XE)+(YE**2)*(ZX*XX)-YE*ZX*XE*YX
      TI(3,1)=YX*ZE-YE*ZX
```

```
      TI(3,2)=XE*ZX-XX*ZE
      TI(3,3)=XX*YE-XE*YX
      T1=DSQRT(TI(1,2)**2+TI(1,3)**2+TI(1,1)**2)
      IF(T1-0.0001) 1,1,2
1     TI(1,1)=(YE*ZX-YX*ZE)*(XE*ZX-XX*ZE)
      TI(1,2)=(YX*ZE-YE*ZX)**2+(YX*XE-XX*YE)**2
      TI(1,3)=(XE*YX-XX*YE)*(XE*ZX-XX*ZE)
      TI(2,1)=XE*YX-XX*YE
      TI(2,2)=0.
      TI(2,3)=YX*ZE-YE*ZX
      T1=DSQRT(TI(1,2)**2+TI(1,3)**2+TI(1,1)**2)
2     T2=DSQRT(TI(2,1)**2+TI(2,2)**2+TI(2,3)**2)
      T3=DSQRT(TI(3,1)**2+TI(3,2)**2+TI(3,3)**2)
      TI(1,2)=TI(1,2)/T1
      TI(1,3)=TI(1,3)/T1
      TI(1,1)=TI(1,1)/T1
      TI(2,2)=TI(2,2)/T2
      TI(2,3)=TI(2,3)/T2
      TI(3,1)=TI(3,1)/T3
      TI(3,2)=TI(3,2)/T3
      TI(3,3)=TI(3,3)/T3
      B11=YE*ZG-ZE*YG
      B21=XG*ZE-XE*ZG
      B31=XE*YG-XG*YE
      B12=ZX*YG-ZG*YX
      B22=XX*ZG-XG*ZX
      B32=XG*YX-XX*YG
      A11=TI(1,1)*B11+TI(1,3)*B31+TI(1,2)*B21
      A12=TI(1,1)*B12+TI(1,3)*B32+TI(1,2)*B22
      A21=TI(2,2)*B21+TI(2,3)*B31
      A22=TI(2,2)*B22+TI(2,3)*B32
      A33=(TI(3,1)**2+TI(3,2)**2+TI(3,3)**2)*T3
      CJ=XX*(YE*ZG-ZE*YG)+XE*(YG*ZX-YX*ZG)+XG*(YX*ZE-ZX*YE)
      DO 110 I=1,8
      B1(I)=A11*AX(I)+A12*AE(I)
      B2(I)=A21*AX(I)+A22*AE(I)
      C1(I)=A33*A(I)
110   CONTINUE
      RETURN
```

```
      END
// FOR
      SUBROUTINE PAR11(XJ,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,JK,FXL,FYL,FZL,XM1,XM2,
     *ICL1,ICL2,ICL3,ICL4,Q,NT,XI,ET,G)
      REAL *8 XJ,C,XI,ET,G,A,AE,AX,B1,B2,C1,TI,XX,XE,XG,YX,YE,YG,
     *ZX,ZE,ZG,DJ,B
      DIMENSION INC(25,8),X(100),Y(100),Z(100),VX(100),VY(100),
     *VZ(100),FXL(3),FYL(3),FZL(3),XM1(3),XM2(3),Q(500),A(8)
     *,AE(8),AX(8),B1(8),B2(8),C1(8),TI(3,3)
      IW=6
      CALL PAR10(XI,ET,G,JK,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,AX,AE,A,TI,DJ,B1,B2,C1,
     *XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG)
      DO 100 KK=1,3
      CALL PAR12(ICL1,ICL2,ICL3,ICL4,K,KK)
      JJ=INC(JK,K)
      J1=5*JJ-4
      J2=5*JJ-3
      J3=5*JJ-2
      J4=5*JJ-1
      J5=5*JJ
      DO 100 IT=1,3
      CALL PAR12(ICL1,ICL2,ICL3,ICL4,J,IT)
      IM=INC(JK,J)
      IF(NT) 8,8,7
7     B=DSQRT(XX**2+YX**2+ZX**2)
      GO TO 20
8     B=DSQRT(XE**2+YE**2+ZE**2)
20    CONTINUE
      Q(J1)=Q(J1)+A(K)*A(J)*(FXL(IT))
      Q(J2)=Q(J2)+A(K)*A(J)*(FYL(IT))
      Q(J3)=Q(J3)+A(K)*A(J)*(FZL(IT))
      Q(J4)=Q(J4)+A(K)*A(J)*XM1(IT)
      Q(J5)=Q(J5)+A(K)*A(J)*XM2(IT)
100   CONTINUE
      RETURN
      DEBUG SUBCHK
      END
```

```
// FCR
      SUBRCUTINE PAR12 (ICL1,ICL2,ICL3,ICL4,K,I)
      IF(ICL1) 7,7,6
6     GO TC(12,13,14),I
12    K=1
      GC TC 40
13    K=2
      GO TO 4C
14    K=5
      GO TG 40
7     IF(ICL2) 9,9,8
8     GC TC (15,16,17),I
15    K=3
      GO TC 40
16    K=4
      GO TC 40
17    K=8
      GC TC 40
9     IF(ICL3) 18,18,19
19    GC TC (20,21,22),I
2C    K=1
      GO TC 4C
21    K=3
      GO TO 4C
22    K=6
      GC TC 4C
18    GO TO (23,24,25),I
23    K=2
      GC TC 40
24    K=4
      GC TC 40
25    K=7
4C    CONTINUE
      RETURN
      CEBLG SLBCHK
      ENC
```

```
// FCR
      SUBRCUTINE PAR16(NO,IC,LF,LLI,LL,RE,IAX)
      REAL *8 RE,SOMA
      CONMCN K2
      DIMENSION RE(8100),IAX(90)
      IW=6
      DO 21 I=1,LLI
      IA=(I-1)*LF+1
      DO 21 J=1,LF
      IE=IA-1+J
      IQ=LF-J
      IF(I-1-IQ)5,6,6
    5 IQ=I-1
    6 SOMA=0.
      IF(IQ-1)12,8,8
    8 DO 11 K=1,IQ
      IB=(I-K-1)*LF+K+1
      JA=J+K+(I-K-1)*LF
   11 SOMA=SOMA+RE(IB)*RE(JA)
   12 IF(J-1)20,13,20
   13 SOMA=RE(IA)-SOMA
      IF(SOMA)15,15,18
   15 WRITE(IW,16)I,J,SOMA,IC,LF,LL,LLI
   16 FORMAT(//,5X,'SUBRCTINA NAO ADEQUADA PARA A RESOLUCAO DO SISTEMA
     * PARE    I=',I3,'   J=',I3,'    SOMA=',E15.6,/,5X,'   IC=',I3,'
     *LF=',I3,'   LL=',I3,'   LLI=',I3)
      CALL EXIT
   18 RE(IA)=DSQRT(SOMA)
      GO TO 21
   20 RE(IE)=(RE(IE)-SOMA)/RE(IA)
   21 CONTINUE
      K2=IAX(IC)
      WRITE(1'K2) (RE(I),I=1,IE)
      IF(NC-IC)23,44,23
C === FORMACAO DO RESIDUO PARA O BLOCO SEGUINTE.
23    IF(NC-1)46,44,46
   46 DO 36 I=1,LLI
      DO 36 J=1,LF
```

```
      IE=(I-1)*LF+J
      IF(I-LF+1)28,28,38
   28 IF(J-LF+I)29,29,38
   29 IQ=LLI+J+I-LF
      SOMA=0.
      DO 34 K=IQ,LLI
      IA=LLI+I-K+1+(K-1)*LF
      JA=LLI+J+I-K+(K-1)*LF
   34 SOMA=SOMA+RE(IA)*RE(JA)
      RE(IE)=-SOMA
      GO TO 36
   38 RE(IE)=0.
   36 CONTINUE
44    IAX(IC+1)=K2
      RETURN
      DEBUG SUBCHK
      END
```

```
// FCR
      SUBRCUTINE PAR17(ICS,LF,LL,NEQ,RE,V,IAX)
      REAL *8 RE,V,SCMA
      COMMON K2
      DIMENSICN RE(8100),V(500),IAX(90)
      DC 34 IC=1,ICS
      IF(IC-ICS)8,5,5
    5 LLI=NEC-(IC-1)*LL
      GC TC 9
    8 LLI=LL
9     K2=IAX(IC)
      IA=LLI*LF
      READ(1'K2)(RE(I),I=1,IA)
   11 DC 23 I=1,LLI
      IA=(I-1)*LF+1
      J=I-LF+1
      IF(I+1-LF)14,14,15
   14 J=1
   15 SOMA=C.
      I1=I-1
      IF(J-I1)18,18,22
   18 DC 21 K=J,I1
      KA=I-K+1+(K-1)*LF
      KB=K+(IC-1)*LL
   21 SOMA=SOMA+RE(KA)*V(KB)
   22 I2=I+(IC-1)*LL
   23 V(I2)=(V(I2)-SOMA)/RE(IA)
      LS=LF-1
      CO 33 I=1,LS
      I2=IC*LL+I
      K1=LL+I-LF+1
      DC 33 K=K1,LL
      KA=LL+I-K+1+(K-1)*LF
      KB=K+(IC-1)*LL
      IF(I2-NEQ)33,33,34
   33 V(I2)=V(I2)-RE(KA)*V(KB)
   34 CONTINUE
      DC 6C I2=1,ICS
```

```
      IC=ICS-I2+1
      IF(ICS-IC)38,38,41
   38 LLI=NEQ-(IC-1)*LL
   39 IF(IC-ICS)41,44,41
   41 LLI=LL
      K2=IAX(IC)
      IA=LLI*LF
      READ(1'K2)(RE(I),I=1,IA)
      IF(I2-ICS)74,44,74
74    K2=IAX(IC-1)
      FIND(1'K2)
   44 DO 59 IA=1,LLI
      I=LLI-IA+1
      I3=(I-1)*LF+1
      J=I+LF-1
      KAA=I+(IC-1)*LL
      SOMA=V(KAA)
      I1=I+1
      IF(I1-J)55,55,59
   55 DO 58 K=I1,J
      KB=K+(IC-1)*LL
      IF(KB-NEQ)68,68,59
   68 KA=K-I+1+(I-1)*LF
   58 SOMA=SOMA-RE(KA)*V(KB)
   59 V(KAA)=SOMA/RE(I3)
   60 CONTINUE
      RETURN
      DEBUG SUBCHK
      END
```

```
// FCR
      SUBRCUTINE PAR19 (NE,IBAM,XJ,Q,INC,VX,VY,VZ,
     *ALFA,E,U1,X,Y,Z,NECT,NN)
      REAL *8 XJ,Q,A,TI,B1,B2,F,XI,ET,G,DJ,XX,XE,YX,YE,AX,AE,C1,XG,YG,ZX
     *,ZE,ZG
      CIMENSION RO(3),Q(500),INC(25,8),VX(100),VY(100),VZ(100),
     *X(100),Y(1CO),Z(100),TS(1CO,25),AX(8),AE(8),
     *TIN(1CO,25),A(8),TI(3,3),B1(8),B2(8),KKK(25),C1(8)
      IR=5
      IW=6
35    FCRMAT(5I5)
480   FCRMAT(2F10.4)
      READ(IR,481) RO(1),RO(2),RO(3)
481   FCRMAT(3F1C.5)
      DO 88 I=1,3
      IF(RC(I)) 484,88,484
88    CONTINUE
      GO TC 482
484   WRITE(IW,483) RO(1),RO(2),RO(3)
483   FORMAT(//5X,'PESO ESPECIFICO =',3F10.5)
482   CONTINUE
      IF(ALFA) 333,334,333
333   DO 173 J=1,NE
      KKK(J)=C
      DC 173 I=1,NN
      TS(I,J)=0.
173   TIN(I,J)=0.
      WRITE(IW,174)
174   FORMAT(//5X,'TEMPERATURA EN LAS CARAS DE LA CASCARA'/)
      DO 336 K=1,NECT
      READ(IR,35) KKK(K)
      LJ=KKK(K)
      DC 336 JJ=1,8
      J=INC(LJ,JJ)
      READ(IR,480) TS(J,LJ),TIN(J,LJ)
      WRITE(IW,337) J,LJ,TS(J,LJ),J,LJ,TIN(J,LJ)
337   FORMAT(5X,'TS(',I3,',',I2,')=',F10.3,5X,'TIN(',I3,',',I2,')=',
     *F10.3)
```

```
336   CONTINUE
      GO TO 73
334   CONTINUE
      DO 33 I=1,3
      IF(RO(I)) 34,32,34
32    CONTINUE
33    CONTINUE
      GO TO 74
73    CONTINUE
34    DO 150 LL=1,NE
      DO 145 ML=1,2
      K=ML-1
      XI=XJ*(1.-2.*K)
      DO 145 KK=1,2
      K=KK-1
      ET=XJ*(1.-2.*K)
      DO 145 L=1,2
      K=L-1
       G=XJ*(1.-2.*K)
      CALL PAR10(XI,ET,G,LL,INC,X,Y,Z,VX,VY,VZ,AX,AE,A,TI,DJ,B1,B2,C1,
     *XX,XE,XG,YX,YE,YG,ZX,ZE,ZG)
      DO 101 I=1,3
      IF(RO(I)) 485,486,485
485   CALL PAR6(A,LL,RO,Q,DJ,INC)
      GO TO 102
486   CONTINUE
101   CONTINUE
102   CONTINUE
504   IF(ALFA)502,505,502
502   DO 506 I=1,NE
      IF(LL-KKK(I)) 506,509,506
509   CALL PAR8(LL,ALFA,E,U1,TS,A,G,TIN,INC,TI,B1,B2,VX,VY,VZ,Q)
      GO TO 145
506   CONTINUE
505   CONTINUE
145   CONTINUE
673   FORMAT(8E15.4)
150   CONTINUE
74    RETURN
```

```
DEBUG SUBCHK
END
```

```
// FCR
      SUBRCUTINE PAR20(A)
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      DIMENSICN A(8),R(9)
        IR=5
      IW=6
      N=3
      IQ=-N
      DO 20 J=1,N
      IQ=IQ+N
      DC 2C I=1,N
      IJ=IQ+I
      R(IJ)=0.
      IF(I-J) 20,15,20
15    R(IJ)=1.
   20 CCNTINUE
      ANORM=0.0
      DO 35 I=1,N
      DC 35 J=1,N
      IF(I-J) 30,35,30
30    IA=I+(J*J-J)/2
      ANCRM=ANORM+A(IA)*A(IA)
   35 CCNTINUE
      IF(ANCRM) 165,165,4C
   40 ANORM=1.414*DSQRT(ANORM)
      ANRMX=ANCRM*1.0E-6/DFLCAT(N)
      IND=C
      THR=ANORM
   45 THR=THR/DFLCAT(N)
   5C L=1
   55 M=L+1
   60 MQ=(M*M-M)/2
      LQ=(L*L-L)/2
      LM=L+MQ
62    IF(DABS(A(LM))-THR) 130,65,65
   65 IND=1
      LL=L+LQ
      MM=M+MQ
      X=0.5*(A(LL)-A(MM))
```

```
68     Y=-A(LM)/DSQRT(A(LM)*A(LM)+X*X)
       IF(X) 70,75,75
   70  Y=-Y
75     DSINX=Y/DSQRT(2.*(1.+(DSQRT(1.-Y*Y))))
       DSINX2=DSINX*DSINX
   78  DCOSX= DSQRT(1.0-DSINX2)
       DCOSX2=DCOSX*DCOSX
       DSINCS =DSINX*DCOSX
       ILQ=N*(L-1)
       IMQ=N*(M-1)
       DO 125 I=1,N
       IQ=(I*I-I)/2
       IF(I-L) 80,115,80
   85  IM=I+MQ
       GO TO 95
   95  IF(I-L) 100,105,105
   80  IF(I-M) 85,115,90
   90  IM=M+IQ
  100  IL=I+LQ
       GO TO 110
  105  IL=L+IQ
110    X=A(IL)*DCOSX-A(IM)*DSINX
       A(IM)=A(IL)*DSINX+A(IM)*DCOSX
       A(IL)=X
115    ILR=ILQ+I
       IMR=IMQ+I
       X=R(ILR)*DCOSX-R(IMR)*DSINX
       R(IMR)=R(ILR)*DSINX+R(IMR)*DCOSX
       R(ILR)=X
125    CONTINUE
       X=2.0*A(LM)*DSINCS
       Y=A(LL)*DCOSX2+A(MM)*DSINX2-X
       X=A(LL)*DSINX2+A(MM)*DCOSX2+X
       A(LM)=(A(LL)-A(MM))*DSINCS+A(LM)*(DCOSX2-DSINX2)
       A(LL)=Y
       A(MM)=X
  130  IF(M-N) 135,140,135
  135  M=M+1
```

```
      GO TC 6C
  140 IF(L-(N-1)) 145,150,145
  145 L=L+1
      GO TC 55
  150 IF(IND-1) 160,155,160
  155 IND=C
      GC TC 50
  160 IF(THR-ANRMX) 165,165,45
  165 IQ=-N
      DO 185 I=1,N
      IQ=IQ+N
      LL=I+(I*I-I)/2
      JQ=N*(I-2)
      DO 185 J=I,N
      JQ=JQ+N
      MM=J+(J*J-J)/2
      IF(A(LL)-A(MM)) 170,185,185
  170 X=A(LL)
      A(LL)=A(MM)
      A(MM)=X
      DO 180 K=1,N
      ILR=IQ+K
      IMR=JQ+K
      X=R(ILR)
      R(ILR)=R(IMR)
  180 R(IMR)=X
  185 CONTINUE
      WRITE(IW,190) A(1),R(1),R(2),R(3)
  190 FORMAT(5X,'TENSION PRINCIPAL 1 =',F10.3,5X,'COSENOS DIRECTORES',
     *3F10.6)
      WRITE(IW,191) A(3),R(4),R(5),R(6)
  191 FORMAT(5X,'TENSION PRINCIPAL 2 =',F10.3,5X,'COSENOS DIRECTORES',
     *3F10.6)
      WRITE(IW,192) A(6),R(7),R(8),R(9)
  192 FORMAT(5X,'TENSION PRINCIPAL 3 =',F10.3,5X,'COSENOS DIRECTORES',
     *3F10.6)
      RETURN
      DEBUG SUBCHK
      END
```

A P E N D I C E D

N O M E N C L A T U R A

En este Apéndice se indicarán algunas convenciones y nomenclatura, utilizadas en este trabajo. Ello se hará de una forma general puesto que, en cada capítulo se aclara el significado de los símbolos empleados.

Algunas convenciones adoptadas fueron:

a-) Se utilizó notación tensorial parcialmente. Cuando en un mismo término aparecen dos subíndices iguales, se está indicando una sumatoria. Si el número de subíndices es superior a dos, entonces se empleó el signo de sumatoria.

Se podría haber eliminado el símbolo $\sum$, cambiando algunos subíndices y agregando el "delta" de Kroneker.

b-) δ_{ij} "delta" de Kroneker

c-) Los símbolos que se listan a continuación, significan:

$\vec{P}$, $\{v_2\}$	vectores
$\bar{v}_2$	vector unitario
$\lvert\vec{v}_2\rvert$	valor absoluto de $\vec{v}_2$
$\lVert J \rVert$	determinante de J
$[\theta]$	matriz
$[\theta]^T$	matriz transpuesta

$[\theta]^{-1}$ matriz inversa

d-)

α coeficiente de dilatación térmica

En cada capítulo, se indicó la variación de los subíndices.

En algunos casos, se utilizaron los mismos símbolos o letras con significados diferentes. En esos casos, se aclaró perfectamente el significado de la letra o símbolo.

A P E N D I C E E

B I B L I O G R A F I A

I NOVOZHILOV, V. V.:"Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity" , Graylock Press, Rochester, N.Y., 1953.

II BOSSHARD,W.: "An Introduction of Finite Element Method" Universidade de Sao Paulo. Escola de Engenharia de Sao Carlos.

III WASHIZU,K. : "Variational Methods in Elasticity and Plasticity"

IV ARANTES e OLIVEIRA, E. R. de : "Introdução á teoria das estruturas de comportamento linear"

V ZIENKIEWICZ,O.C. : "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw - Hill, London, 1971

VI ARANTES e OLIVEIRA, E. R. de :NATO Advanced Study Institute on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, LNEC, Lisboa,1971.

VII ARANTES e OLIVEIRA, E. R. de :"Theoretical Foundations of the Finite Element Method", Int. J. Solids and Structures, 1968, Vol. 4.,pág. 929-952.

VIII ZIENKIEWICZ,O.C., AHMAD, S.: "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", Int. J. for Num. M. in Eng., Vol. 2,1970.

IX ZIENKIEWICZ,O.C., TAYLOR,R.L.,TOO,J.M.:" Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells", Int. J. for Num. M. in Eng., Vol.3,1971.

X HAWKINS,G.A. : "Multilinear Analysis for Students in Engineering and Science", J.Wiley and Sons, New York,1963.

XI KOPAL,Z. :"Numerical Analysis", Chapman & Hall,1961.

XII PAWSEY,S.F. y CLOUGH,R.W. :"Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements", Int. J. for Num. M. in Eng., Vol. 3,1971.

XIII SORIANO,H.L.: "Formulação dos métodos de Gauss e de Cholesky para a análise matricial de estruturas",COPPE-UFRJ, 1972.

XIV CURSO MECÂNICA DAS ESTRUTURAS II, COPPE-UFRJ,1972.

XV TIMOSHENKO,S. y WOINOWSKY-KRIEGER,S.:"Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 1959.

XVI SCORDELIS,A.C. y LO,K.S.: "Computer Analysis of Cylindrical Shells",J.Am.Concr.Inst.61,539-561,1969.

XVII BELES,A.A. y MIRCEA SOARE:"Les paraboloides elliptique dans les constructions", Dunod Ed., Paris,1967