# ESTUDIO TEORICO EXPERIMENTAL DE INESTABILIDAD DE VIGAS ASOCIADAS

AGUSTIN ALBERTO CAPRARI

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO -- RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A- OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EN CIÊNCIA (M. Sc. )

Aprovada por:

Presidente

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

MAIO DE 1974

a mi esposa

a mis hijos

## A G R A D E C I M I E N T O S

A la Facultad de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba que por intermedio de los profesores Alfredo Schegg, Alberto J. Scardiglia y Carlos Prato, hicieron posible mi permanencia en COPPE en 1973.

A COPPE y en especial al profesor Fernando Luiz Lobo-B. Carneiro, en haber hecho posible la continuación de mis estudios con el apoyo brindado y la confianza dispensada.

A los profesores Fernando Luiz Lobo B. Carneiro, Sydney M. G. dos Santos, Luiz Bevilaqua por las enseñanzas impartidas y amistad brindada.

Al profesor Luiz Bevilaqua, por la orientación dada al presente trabajo.

Al colega y amigo, profesor Raúl A. Feijoó por el constante apoyo moral brindado durante el desarrollo de mis estudios de postgraduación.

Al personal del Núcleo de Computación Electrónica, la Oficina Mecánica y Laboratorio de Ensayos dependientes del COPPE.

A mi esposa, por la comprensión que mantuvo durante el desarrollo de mis estudios he hizo posible que los mismos llegaran al fin en una etapa de la vida.-

# R E S U M E N

Se estudia en el presente trabajo el problema de la estabilidad elástica de vigas empotradas en un extremo y vinculadas entre sí en el otro, cuando se encuentran sometidas a una carga vertical concentrada en el extremo de una de ellas.-

Es presentado un resúmen del tratamiento general de problemas de la estabilidad elástica, utilizando los conceptos del análisis postcrítico según la línea de Thompson.

Se desarrolla la teoría y aplicación del método dinámico, que con el auxilio de los métodos directos de Rayleigh-Ritz y de Elementos Finitos, hace posible su aplicación a problemas más complicados, tales como los de estructuras sometidas a cargamentos no conservativos, esquemas más complejos o una combinación de ambos.

Se llevaron a cabo experiencias que verifican las teorías expuestas, resaltando la influencia de las imperfecciones y del comportamiento postcrítico.

# R E S U M O

Estuda-se no presente trabalho o problema de estabilidade elástica de hastes engastadas numa extremidade, e vinculadas entre elas no outro, quando se encontram submetidas a un carregamento vertical concentrado no extremo de uma delas.-

É apresentado um resumo do tratamento geral de problemas da estabilidade elástica, utilizando os conceitos da análise poscrítico seguindo a linha de Thompson.

Desenvolve-se a teoría e aplicação do método dinâmico que com o auxilio dos métodos diretos de Rayleigh Ritz e de Elementos Finitos, torna possivel sua aplicação a problemas mais complexos, tais como os de estructuras submetidas a carregamentos não conservativos, esquemas máis complexos o uma combinacão de ambos.

Fizeram-se experiencias que comprovam as teorias expostas, salientando a influencia das imperfeições e o comportamento poscrítico.-

# A B S T R A C T

In the present Thesis it is studied the problem of - the elastic stability of cantilever beams, associated at the free end for the case of a concentrated force acting at the free end of one of thems.-

It is presented a summary of the general treatment of elastic stability problems according to the concepts of the post-critical analysis following Thompson's theory.-

It is developed the theory of the dynamic method. This theory is applied using the Rayleigh Ritz and Finite Element methods, that can be used for more complex problems, such as structures subject to non-conservative loads, more complex schemes or a combination of them.-

The theoretical results were compared with experimental data. It was clear in the experiments the relevance of initial imperfections and the post-critical behavior.-

# I N D I C E

# NOMENCLATURA

| | |
|---|---|
| $x, y, z$ | ejes coordenados sistema indeformado |
| $\xi, \eta, \zeta$ | " " " deformado |
| $O$ | origen de coordenadas |
| $P$ | carga aplicada |
| $u, v, w$ | desplazamientos según ejes |
| $\varphi$ | rotación de torsión |
| $\frac{D}{Dz}$ | derivada respecto de z |
| $k_1, k_2, k_3, k_4$ | rigidez de resortes |
| $K_1, K_2, K_3, K_4$ | " " " adimensional |
| $z_1, z_2, z_3, z_4$ | coordenadas de posición de resortes |
| $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ | " " " " " adimensional |
| $z_p, Z_p$ | " " " para cargas dimen. y adimen. |
| $T$ | energía cinética. |
| $\mathcal{T}$ | trabajo de las fuerzas exteriores |
| $\pi$ | energía potencial total |
| $\mathcal{W}$ | energía de deformación |
| $\mathcal{W}^c$ | trabajo de las fuerzas conservativas |
| $\mathcal{W}^{nc}$ | " " " " no conservativas |
| $L$ | Lagrangiano |
| $\delta$ | variación |
| $t$ | tiempo |
| $\rho, m$ | densidad, masa del material |
| $A$ | area de la sección transversal |
| $I_o, I_x, I_y$ | momentos de inercia |
| $x_o, y_o$ | coordenadas del centro de cizallamiento |

| | |
|---|---|
| $h_1$ | altura respecto del c. de cizall. del punto de aplicación de $P_v$ |
| $I, J$ | funcionales |
| $D$ | rigidez a flexión |
| $C$ | " torsional |
| $C_1$ | " de alabeo |
| $u_z, u_t, u_{zz}$ | derivadas respecto de z, t |
| $\omega$ | frecuencia de vibración |
| $\bar{u}^*, \bar{\varphi}^*$ | soluciones conjugados de $u^*, \varphi^*$ |
| $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ | números arbitrarios |
| $\eta(z), \varrho(z)$ | funciones que representan las variaciones admisibles |
| $f(z)$ | función genérica |
| $s$ | exponente característico |
| $P_c$ | carga crítica |
| $\Lambda, \Lambda^c$ | parámetro de carga |
| $q_i, q_i$ | coordenada generalizada e incremento en ella |
| $D_i$ | energía para el sistema principal |
| $a_i, b_i$ | coeficiente a determinar |
| $\phi_i(z)$ | funciones coordenadas |
| $\tilde{K}, \tilde{M}, \tilde{W}, \tilde{C}$ | matrices |
| $\underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{a}$ | vectores |
| $n, m$ | número de términos en las expansiones (M. de Ritz) |
| $\lambda$ | autovalor |
| $A, B$ | operadores diferenciales |

# C A P I T U L O I

# INTRODUCCION

## 1.1 - GENERALIDADES

La teoría de la estabilidad elástica,básica para el desarrollo del presente trabajo, cuenta con un volúmen muy extenso de literatura que se inicia con Euler viendo ampliado el campo de aplicación y acelerado su desarrollo con la tendencia moderna de construir estructuras con materiales de elevada resistencia, esbeltas, livianas.-

Los problemas abordados son en general no lineales (elásticos o plásticos) aunque para el cálculo de la carga crítica se admite hipótesis de linealidad y de pequeñas deformaciones.

En su primer planteo, Euler redujo el problema de estabilidad de una forma de equilibrio al de hallar el mínimo valor característico de problemas de valor de contorno, suponiendo las hipótesis de pequeñas deformaciones y materiales elásticos lineales. El método es aplicable a problemas no elásticos a través del concepto del módulo reducido, pero no es universal, no es aplicable a cualquier tipo de problemas y merecen señalarse cuatro campos fundamentales en los cuales deben tomarse reservas:

1.- En el de estructuras esbeltas tipo cáscaras donde pequeñas imperfecciones cambian por completo el valor de la carga crítica.-

2.- Ciertas estructuras tales como placas pueden comportarse en servicio más allá de la cargacrítica prevista.-

3.- En el campo de la estabilidad elastoplástica, donde estudios realizados han demostrado la importancia que tiene la carga en el proceso de pérdida de estabilidad, como así también el factor tiempo.-

4.- Para estructuras sometidas a cargamentos no conservativos, definidos como aquellos que no derivan de un potencial, no es aplicable el método de Euler.-

Podemos intentar una clasificación de los métodos más conocidos para tratamiento de problemas de estabilidad elástica

1.- Método de Euler (1),(3) ⁑

2.- Método de Energía (3)

3.- Método dinámico (1),(2),(3)

4.- Métodos de análisis no lineal elástico

a). Con posibilidad de analizar caminos de equilibrio en modelos perfectos (2),(8) ⁑⁑

b). Análisis de modelos con deformaciones iniciales (2),(8),(16)

Mientras 1 y 2 permiten la determinación de la carga critica para estructuras sometidas a cargamentos conservativos, 4-a y 4-b además de ello permiten determinar los caminos de equilibrio pre y postcrítico ,como así también detectar fenómenos de carga lí

---

⁑ (.) indica bibliografía al final de la tesis.

⁑⁑ se aclara en capítulo III el concepto de caminos de equilibrio.

mite [1].-

3 es más general, aplicable a problemas de cargamentos no conservativos, permitiendo determinar tanto la carga crítica como también el tipo de inestabilidad que ocurrirá: dinámica(flutter)o estática[2] , teniendo el inconveniente de restringirse al campo de deformaciones lineales, no poniendo de manifiesto para el caso estático el tipo de fenómeno que ocurrirá (bifurcación simétrica, asimétrica, etc).

Los fundamentos de los mencionados métodos (1 a 4 ) pueden consultarse en la bibliografía, desarrollándose aquí los de los métodos dinámicos y el 4-a, en la línea de Thompson.-

## 1.2 - EL PROBLEMA EN ESTUDIO

Se analiza el comportamiento de vigas en voladizo, aisladas ó vinculados entre ellas, cuando se encuentran sometidas a una carga vertical concentrada.(ver referencias(3),(18)).

Las características fundamentales de las vigas son:

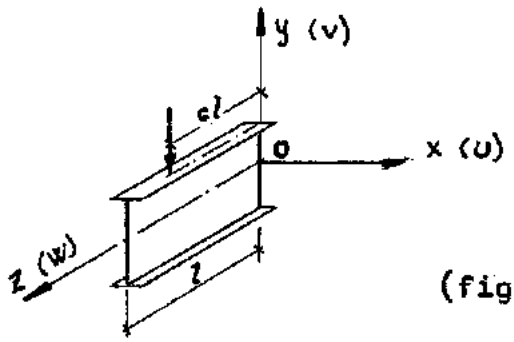
- Pequeña rigidez de la sección transversal respecto del eje y-y que con respecto al eje x-x, siendo ellos ejes principales de inercia, y estando y-y en la posición vertical.
- Se trata de vigas con sección transversal abierta y paredes finas.

---

[1] Se aclaran conceptos en capítulo III

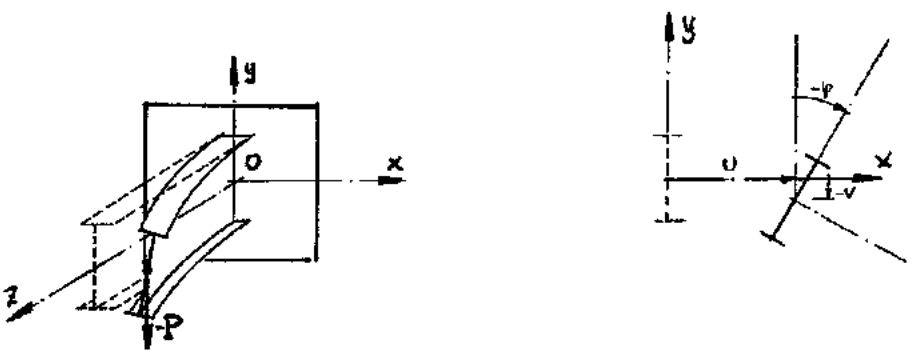
[2] " " " " " II.

- La carga vertical se encuentra a la distancia c.l del extremo empotrado, y en un punto cualquiera sobre la vertical que pasa por el c. de cizallamiento (fig. 1-1)




(fig 1-1)

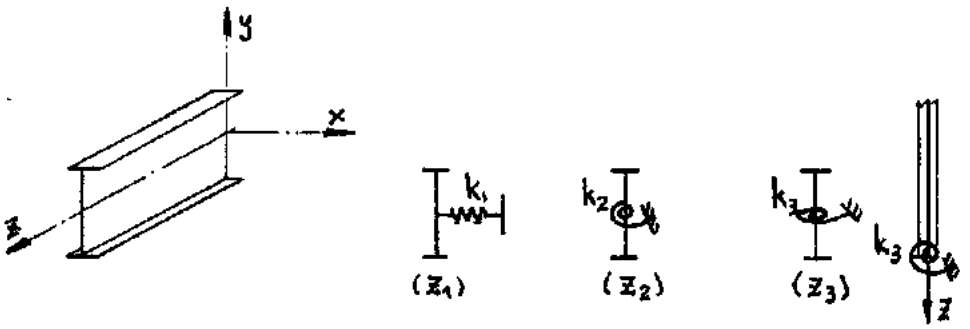
Siendo la estructura real imperfecta, al actuar la carga se producirán deformaciones (fig. 1-2), que para bajos valores de P seran lineales, pero que a valores elevados se volverán no lineales, llegando un momento en que crecerán en forma desproporcionada, poniendo a la estructura fuera de servicio . Para la estructura perfecta, ello ocurre para valores de P mayores que para la imperfecta.




(fig. 1-2)

El efecto de vinculación a otras vigas es equivalente al de considerar resortes que se oponen a los desplazamientos generalizados de traslación u y de rotación $\varphi$ , y a sus derivadas primeras ( $\frac{\partial u}{\partial z}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ ). (fig 1-3)

La posición de los resortes se determina por las coordenadas $z_i = c_i l$ $i = 1,2,3,4$ , y se desprende que se pueden considerar el número de tales restricciones como se desee a lo largo de la viga ; idem para otras cargas proporcionales a P.-




($k_4$ carece de significado en la figura)

(fig 1- 3)

Para resolver el problema en forma sistemática, se comienza por plantear el funcional correspondiente a la viga aislada, con resortes de rigidez $k_1 \ldots k_4$ ,procediendo luego a su minimización, llegando a la conclusión que las ecuaciones diferenciales derivadas resultan acopladas para el caso más general, razón por la cual se decide atacar el problema de minimización por métodos directos, aplicando Ritz y Elementos Finitos.

Se lleva a cabo un estudio del comportamiento postcrítico para conocer mejor el fenómeno que se está analizando, con consideraciones de la influencia de las imperfecciones, concluyendo que para éste caso puede utilizarse la carga crítica como elemento de dimensionado.

Finalmente, un estudio experimental confirma los resultados teóricos en lo que respecta a carga crítica, comportamiento postcrítico e influencia de las imperfecciones.

# C A P I T U L O II

# METODO DINAMICO

## 2.1- INSTITUCION DEL FUNCIONAL

Como ya se mencionó en la introducción, el método dinámico es el único que permite predecir la inestabilidad de sistemas no conservativos, debido a la naturaleza misma de tales problemas, que se trata escencialmente de fenómenos dinámicos.-

El mencionado es equivalente a los métodos estáticos de Euler y Energía, para la determinación de la carga crítica en caso de cargamentos conservativos.-

Bolotín [1] pone de manifiesto las diferencias que surgen para el problema de Beck, al aplicar los métodos dinámicos y de Euler, y la posibilidad de formular uno más general nos conduce al planteo del método dinámico.-

Partiremos del principio variacional de Hamilton[4],[5] para establecer las ecuaciones de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio de la estructura bajo carga P, planteando el funcional que posteriormente se minimizará por el procedimiento tradicional del Cálculo de Variaciones.-

El mencionado puede aplicarse a sistemas holonómicos, no holonómicos y cargamentos de cualquier tipo[4], entendiéndose por sistemas holonómicos aquellos cuyas ecuac. de restricciones dependen sólo de las funciones coordenadas, o de éstas y el tiempo quedando excluídas aquellas ecuac. de restricciones en las derivadas.

El principio de Hamilton aplicado a una partícula expresa que la integral en el tiempo de la variación de la energía ci-

nética más el trabajo total de las fuerzas actuantes en el sistema es nula:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T+\mathcal{T})\,dt = 0 \qquad (2.1)$$

$\mathcal{T}$ = trabajo de las fuerzas actuantes en el sistema

T = energía cinética del sistema.-

$\Pi$ = energía potencial total del sistema.-

$$\Pi = -\mathcal{T}$$

$$\delta\Pi = -\delta V + \delta W^{c} + \delta W^{nc} \qquad (2.2)$$

V = energía de deformación del sistema.-

$W^{c}$ = trabajo total realizado por la parte conservativa de las fuerzas generalizadas actuantes en el sistema durante la deformación:

$\delta W^{nc}$ = trabajo realizado por la parte no conservativa de las fuerzas generalizadas actuantes en el sistema, durante una variación de desplazamientos generalizados.-

Cuando se trata con sistemas conservativos, es decir aquellos en los cuales el trabajo puede derivarse de un potencial, es $\delta W^{nc} = 0$ y (2.2) se transforma en:

$$\delta\Pi = -\delta V + \delta W^{c} \qquad (2.3)$$

Introduciendo (2.3) en (2.1), podemos expresar para sistemas holonómicos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V + W^{c})\,dt = 0 \qquad (2.4)$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} (T - V + W^{c})\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \qquad (2.5)$$

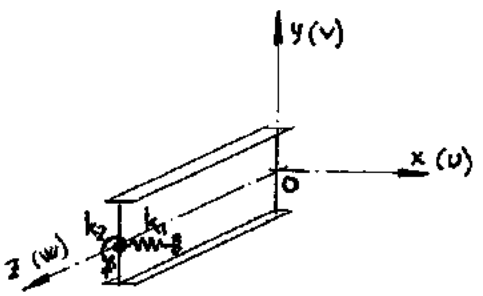
$$L = T - V + W^c \tag{2.6}$$

L es designado como el Lagrangiano y puede considerarse como integrante del funcional del problema tratado

$$I[f_i] = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \qquad i = 1,2,\ldots \tag{2.7}$$

Lo anterior se extiende al caso de varias partículas por sumatoria y a elementos contínuos por medio del análisis modal.-

Para instituir I, se recurre a la consideración del equilibrio a nivel de un elemento diferencial de viga, tomando algúnas hipótesis (fig 2-1)




(fig 2-1)

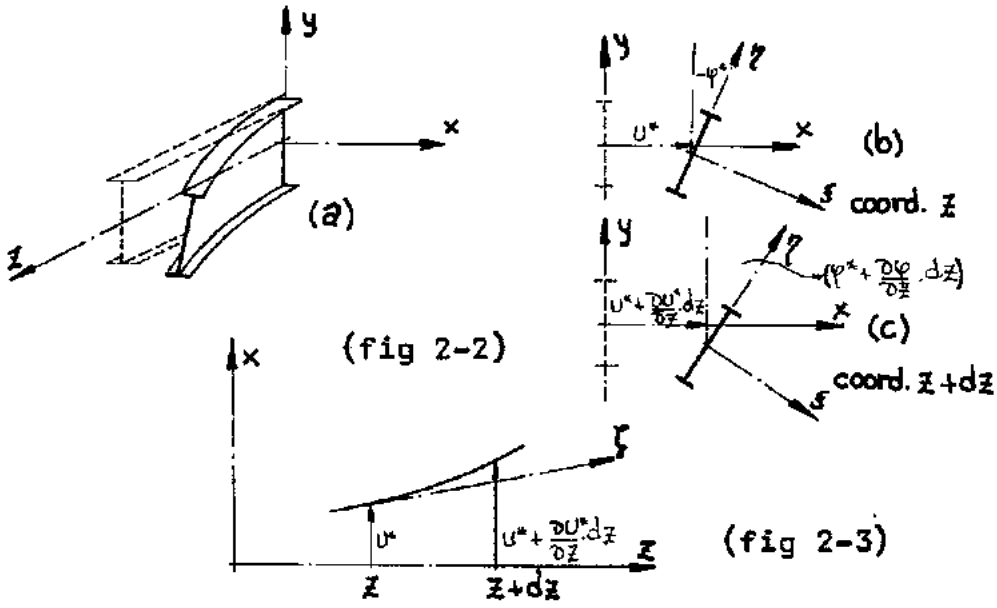
a- La viga no deflecta enel plano y-z, lo cual es válido cuando la rigidez respecto del eje O-x es mucho mayor que con respecto al O-y (3)
El fenómeno de flexión en el plano de mayor rigidez resulta desacoplado del de estabilidad lateral,y por ello no se considera.-

b- No hay deformaciones axiales según O-z

c- Se despreciará la deformación por cortante en el pla-

no x-z

Tomando un elemento situado a una distancia $z$ del origen coordenado, designando por $u^* = u^*(z,t)$ a la deflexión en el plano x-z y por $\varphi^* = \varphi^*(z,t)$ a la rotación según el eje 0 -z ,adoptando para signos de ellas la regla de la mano derecha, se tiene:




(fig 2-2)

(fig 2-3)

Energía cinética.

significado de términos:

$\rho$ = densidad del material.

A = área de la sección transversal.

$I_o$= momento de inercia polar de la sección transversal, respecto del centro de cizallamiento.

$I_o = I_x + I_y + A\,(X_o^2 + Y_o^2)$

$I_x, I_y$=momentos de inercia de las secciones transversales respecto de los ejes principales 0-x y 0-y .

$x_o, y_o$ = distancias del centro de gravedad de la sección transversal repecto del centro de cizallamiento.

$K^2 = I_o/A$ = cuadrado del radio de giro.

$m = \rho . A =$ masa por unidad de longitud.

$$T = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial U^*}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} m K^2 \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\right)^2 + m y_o . \frac{\partial U^*}{\partial t} . \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right\} dz \qquad (2.8)$$

<u>Energía de deformación</u>

E= módulo de elasticidad del material.

G= " " " transversal del material.

J= constante de torsión

Cw= constante de alabeo

D= E Iy = rigidez a flexión (plano x-o-z)

C= G J = " torsional.-

$C_1$=E.Cw = " de alabeo.-

$k_1$ = " del resorte a traslación.- (u)

$k_2$ = " " " " rotación.- ($\varphi$)

$k_3$ = " " " " variación de traslación.-

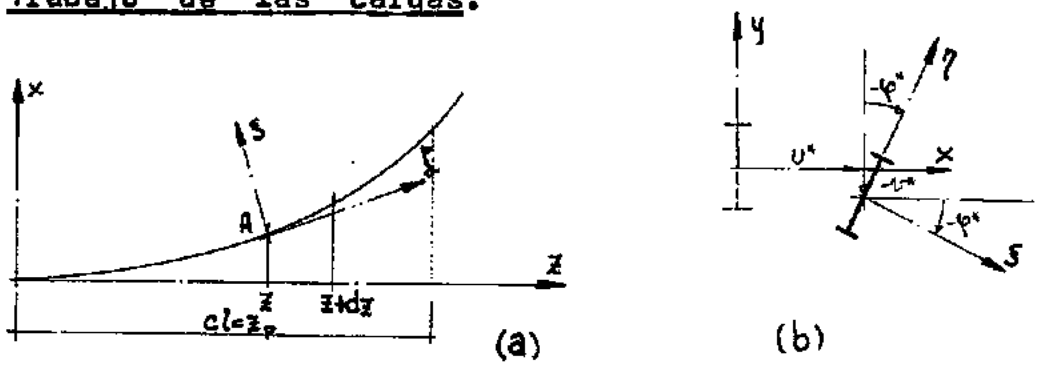
$k_4$ = " " " " " " rotación .-

$Z_i$ = (i=1,4) Coordenadas de las posiciones de los re-- sortes $K_i$

$$V = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} D \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2}\right)^2 + \frac{1}{2} C \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{2} C_1 \frac{\partial^3 \varphi^*}{\partial z^3} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right\} dz + \left[ \frac{1}{2} k_1 U^{*2}\Big|_{z_1} + \frac{1}{2} k_2 \varphi^{*2}\Big|_{z_2} + \frac{1}{2} k_3 \left(\frac{\partial U^*}{\partial z}\right)^2\Big|_{z_3} + \frac{1}{2} k_4 \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial z}\right)\Big|_{z_4} \right] \qquad (2.9)$$

La cantidad entre corchetes se aplica en las coordenadas $Z_1$ a $Z_4$ y no en todos los elementos diferenciales.-

Trabajo de las cargas.




(fig. 2-4)

Considerando el punto A como fijo, el punto de aplicación de la carga describe un desplazamiento infinitésimo al considerar la variación de la pendiente $\frac{\partial u^*}{\partial z}$

$$ds = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^*}{\partial z}\right) \cdot (z_p - z) \cdot dz$$

La componente vertical de ds, ( encontrándose ds en el plano $\xi - \zeta$) será:

$$dv = \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \cdot (z_p - z) \cdot \varphi^* \cdot dz$$

Siendo $h_1$ la distancia vertical entre el punto de aplicación de P y el c. de ciz. de la sección, se tiene:

$$W^c = \int_0^{z_p} P \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \cdot \varphi^* \cdot (z_p - z) dz + \left[ P \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \varphi^{*2}_{|z_p} \right] \qquad (2.10)$$

La cantidad entre corchetes vale en el punto de aplicación de P.-

Integrando (2.8) y (2.9) entre 0 y 1 , y (2.10) entre 0 y $z_p$ , habremos instituído L , y por lo tanto el funcional $I[u^*, \varphi^*]$

designando $u_t = \frac{\partial u^*}{\partial t}$ , $u_{zz} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}$ , etc.

$$I[u^*,\varphi^*] = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[ \frac{1}{2} \int_0^l \Big\{ m u_t^{*2} + m k^2 \varphi_t^{*2} + 2 m y_0 u_t^* \varphi_t^* - D u_{zz}^{*2} - C \varphi_z^{*2} + C_1 \varphi_{zzz}^* \varphi_z^* \Big\} dz + \int_0^{z_p} P(z_p - z) u_{zz}^* \varphi^* dz - \frac{1}{2} \Big\{ k_1 u^{*2}\big|_{z_1} + k_2 \varphi^{*2}\big|_{z_2} + k_3 u_z^{*2}\big|_{z_3} + k_4 \varphi^{*2}\big|_{z_4} \Big\} + \frac{1}{2} P h_1 \varphi^{*2}\big|_{z_p} \Bigg] . dt \tag{2.11}$$

integrando por partes el 6$^{to}$ término del 2$^{do}$ miembro, para llevarlo a una forma más simétrica, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int_0^l C_1 \varphi_{zzz}^* \varphi_z^* dz = \frac{1}{2} C_1 \varphi_{zz}^* \varphi_z^* \Big|_0^l - \frac{1}{2}\int_0^l C_1 \varphi_{zz}^{*2} dz$$

Si el extremo es empotrado, resulta $\varphi_z^* = 0$

Si fuera libre en $\varphi_z^*$ es $\varphi_{zz}^* = 0$ (ver 2.2 en condicio-

nes de contorno)

Reemplazando el resultado en (2.11)

$$I[U^*,\varphi^*]=\int_{t_1}^{t_2}\Bigg[\frac{1}{2}\int_0^{l}\Big\{m\,U_t^{*2}+mK^2\varphi_t^{*2}+2m\,y_0\,U_t^*\,\varphi_t^*-D\,U_{zz}^{*2}-C\varphi_z^{*2}-$$

$$-C_1\,\varphi_{zz}^{*2}\Big\}dz+\int_0^{z_p}P(z_p-z)\,U_{zz}^*\,\varphi^*\,dz+\frac{1}{2}Ph_1\,\varphi^{*2}\Big|_{z_p}-$$

$$-\frac{1}{2}\Big\{k_1\,U^{*2}\Big|_{z_1}+k_2\,\varphi^{*2}\Big|_{z_2}+k_3\,U_z^{*2}\Big|_{z_3}+k_4\,\varphi_z^*\Big|_{z_4}\Big\}\Bigg]dt \tag{2.12}$$

En el estado de equilibrio bajo carga P, admitiendo sacar a a la estructura de esa posición, retirando luego la causa de la pertubación, la estructura entra en un estado de vibración con frecuencia $\omega$

$$U^*,\bar{U}^*=U(z).e^{\pm i\omega t} \tag{2.13}$$

$$\varphi^*,\bar{\varphi}^*=\varphi(z).e^{\pm i\omega t} \tag{2.14}$$

Se ha indicado con barra la solución conjugada de la compleja (supuesta con signo +), correspondiendo vibración armónica para el caso en que $\omega$ sea real.

$U=U(z)$ y $\varphi=\varphi(z)$ definen las deformaciones para un determinado tiempo t.

La frecuencia de vibración decidirá el tipo de movimiento y de equilibrio * :estable, inestable.

---

*Se aclara en sección 2.3

Como una solución compleja le corresponde la conjugada correspondiente, en los productos $u^{*2}$, $\varphi^{*2}$, $u^{*}_{zz}\,\varphi^{*}$, $\varphi^{*2}_{z}$, etc. se deben tomar ambas soluciones:

$$u^{*2}_{t} = u^{*}_{t}.\bar{u}^{*}_{t} = \omega^2\, u^2 e^{i\omega t}.\, e^{-i\omega t} = \omega^2.\, u^2$$

$$\varphi^{*2}_{t} = \varphi^{*}_{t}.\,\bar{\varphi}^{*}_{t} = \omega^2\, \varphi^2.e^{i\omega t}.\, e^{-i\omega t} = \omega^2\, \varphi^2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$u^{*2}_{zz} = u^{*}_{zz}.\,\bar{u}^{*}_{zz} = u^{2}_{zz}.\, e^{i\omega t}.\, e^{-i\omega t} = u^{2}_{zz}$$

$$\vdots$$

Siendo J independiente de t, es

$$I[u^{*},\varphi^{*}] = \int_{t_1}^{t_2} J\, dt = (t_2 - t_1).\, J \qquad (2.12)$$

J sería el funcional que no depende del intervalo de tiempo ( $t_2 - t_1$), y se obtiene de sustituir en (2.12) las expresiones (2.13) y (2.14)

$$J[u,\varphi] = \frac{1}{2}\int_0^{l}\Big\{ m\omega^2 u^2 + m\omega^2 k^2 \varphi^2 + 2 m y_0 \omega^2 u.\varphi -$$

$$- D u^2_{zz} - C\varphi^2_{z} - C_1 \varphi^2_{zz} \Big\}\, dz + \int_0^{z_p} P(z_p - z).u_{zz}.\varphi.\, dz$$

$$+ \frac{1}{2} P.h_1 \varphi^2\Big|_{z_p} - \frac{1}{2}\Big\{ k_1 u^2\Big|_{z_1} + k_2 \varphi^2\Big|_{z_2} + k_3 u^2_{z}\Big|_{z_3} + k_4 \varphi^2_{z}\Big|_{z_4}\Big\}$$

(2.15)

## 2.2 MINIMIZACION DEL FUNCIONAL

### Institución de las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno.

El funcional (2.15) puede ser clasificado como de 2 campos: en $U$ y $\varphi$ . Las funciones admisibles pertenecen a un espacio $C^2$ ( que admiten derivadas segundas contínuas), en el que consideramos vecindad de $2^{do}$ orden a las funciones.

Suponemos que existen $U^* = U^*(z)$ y $\varphi^* = \varphi^*(z)$ que minimizan el funcional, o sea que son la solución del problema $J \to \min$.

Cualquier otra función admisible dentro de las restricciones establecidas puede ser representada por:

$$U(z) = U^*(z) + \varepsilon_1 \eta(z) \tag{2.16}$$

$$\varphi(z) = \varphi^*(z) + \varepsilon_2 \rho(z) \tag{2.17}$$

donde

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son números arbitrarios.

$\eta, \rho$ son funciones pertenecientes a las $C^2$ y representan las variaciones admisibles.

$\eta$ y $\rho$ deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$|\eta^d| < 1 \quad ; \quad |\rho^d| < 1 \qquad d = 0,1$$

donde $d$ tiene el significado de derivada.-

Derivando (2.16) y (2.17) en lo que sea necesario, y reemplazándolas en el funcional (2.15) se tiene:

$$J[U,\varphi] \Rightarrow I(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$I(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{1}{2}\int_0^l m\omega^2\Big[(U^*+\varepsilon_1\eta)^2+K^2(\varphi^*+\varepsilon_2\rho)^2+2y_0(U^*+\varepsilon_1\eta).(\varphi^*+$$

$$+\varepsilon_2\rho)\Big]dz-\frac{1}{2}\int_0^l\Big[D(U^*_{zz}+\varepsilon_1\eta_{zz})^2+C(\varphi^*_z+\varepsilon_2\rho_z)^2+$$

$$+C_1(\varphi^*_{zz}+\varepsilon_2\rho_{zz})^2\Big]dz+\int_0^{z_p}P(z_p-z)(U^*_{zz}+\varepsilon_1\eta_{zz})(\varphi^*+\varepsilon_2\rho)dz$$

$$-\frac{1}{2}\Big\{k_1(U^*+\varepsilon_1\eta)^2\Big|_{z_1}+k_2(\varphi^*+\varepsilon_2\rho)^2\Big|_{z_2}+k_3(U^*_z+\varepsilon_1\eta_z)^2\Big|_{z_3}+$$

$$+k_4(\varphi^*_z+\varepsilon_2\rho_z)^2\Big|_{z_4}\Big\}+\frac{1}{2}Ph_1(\varphi^*+\varepsilon_2\rho)^2\Big|_{z_p} \tag{2.18}$$

Las condiciones de mínimo serán:

$$\frac{\partial I}{\partial\varepsilon_i}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\Big|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=0 \qquad i=1,2$$

$$\frac{\partial I}{\partial\varepsilon_1}\Big|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=\int_0^l\Big\{m\omega^2U^*\eta+m\omega^2y_0\varphi^*\eta\Big\}dz-\int_0^l DU^*_{zz}\eta_{zz}dz+$$

$$+\int_0^{z_p}P(z_p-z).\varphi^*\eta_{zz}dz-k_1U^*\eta\Big|_{z_1}-k_3U^*_z\eta_z\Big|_{z_3}=0 \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial I}{\partial\varepsilon_2}\Big|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=\int_0^l\Big\{m\omega^2y_0U^*\rho+m\omega^2K^2\varphi^*\rho\Big\}dz-\int_0^l\Big\{C\varphi^*_z\rho_z+$$

$$+C_1\varphi^*_{zz}\rho_{zz}\Big\}dz+\int_0^{z_p}P(z_p-z)U^*_{zz}\rho\,dz+Ph_1\varphi^*\rho\Big|_{z_p}-$$

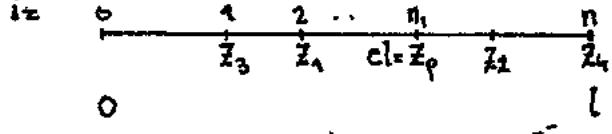
$$-k_2\varphi^*\rho\Big|_{z_2}-k_4\varphi^*_z\rho_z\Big|_{z_4}=0 \tag{2.20}$$

Integrando por partes (2.19) y 2.20) referente a $\eta$ y $\rho$, designando como:

$$U = U^* \qquad \varphi = \varphi^*$$

Como en $cl$ y $z_i$ $(i=1,\ldots 4)$ pueden existir discontinuidades en alguna derivada de las funciones, se debe efectuar la integración entre los límites: 0 y $l$ subdividiendo el mismo en subintervalos que no contengan resortes ni la carga P.-(fig2-5)

$n-1$ = número de subdominios entre 0 y 1




(fig. 2-5)

$$\int_0^l D U_{zz}\,\eta_{zz}\,dz = \sum_{i=0}^{n} D U_{zz}\,\eta_z \Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} - \sum_{i=0}^{n}\int_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} \frac{\partial}{\partial z}(D U_{zz})\,\eta_z\,dz =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} D U_{zz}\,\eta_z \Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial z}(D U_{zz})\,\eta \Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} + \sum_{i=0}^{n}\int_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(D U_{zz})\,\eta\,dz$$

en forma similar: con $n_1-1$ = núm. de int. hasta P

$$\int_0^{cl} P(cl-z)\,\varphi\,\eta_{zz}\,dz = \sum_{i=0}^{n_1} P(cl-z)\,\varphi\,\eta_z \Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n_1} \frac{\partial}{\partial z}\Big[P(cl-z)\,\varphi\Big]\,\eta \Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} + \sum_{i=0}^{n_1}\int_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big[P(cl-z)\,\varphi\Big]\,\eta\,dz$$

$$\int_0^l (C\,\varphi_z\,\rho_z + C_1\,\varphi_{zz}\,\rho_{zz})\,dz = \sum_{i=0}^{n} C_1\,\varphi_{zz}\,\rho_z \Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n}\Big[C\,\varphi_z - \frac{\partial}{\partial z}(C_1\,\varphi_{zz})\Big]\,\rho \Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} + \sum_{i=0}^{n}\int_{z_i^+}^{z_{i+1}^-}\Big[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(C_1\varphi_{zz}) - \frac{\partial}{\partial z}(C\varphi_z)\Big]\rho\,dz$$

Reemplazando en (2.19) y (2.20)

$$\sum_{i=0}^{n_1}\int_{z_i^+}^{z_{i+1}^-}\left\{m\omega^2 u + m\omega^2 y_0\varphi - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[DU_{zz} - P(cl-z)\varphi\right]\right\}\eta\, dz +$$

$$+\sum_{i=n_1}^{n}\int_{z_i^+}^{z_{i+1}^-}\left\{m\omega^2 u + m\omega^2 y_0\varphi - \frac{\partial^2}{\partial z^2}(DU_{zz})\right\}\eta\, dz - k_1 U\eta\Big|_{z_1} -$$

$$- k_3 U_z\eta_z\Big|_{z_3} + \sum_{i=0}^{n_1}\frac{\partial}{\partial z}\left[DU_{zz} - P(cl-z)\varphi\right]\eta\Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} +$$

$$+\sum_{i=n_1}^{n}\frac{\partial}{\partial z}(DU_{zz}).\eta\Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} - \sum_{i=0}^{n_1}\left[D.U_{zz} - P(cl-z)\varphi\right]\eta_z\Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} -$$

$$- \sum_{i=n_1}^{n} D.U_{zz}\,\eta_z\Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} = 0 \qquad (2.21)$$

$$\sum_{i=0}^{n_1}\int_{z_i^+}^{z_{i+1}^-}\left\{m\omega^2 y_0 U + m\omega^2 K^2\varphi - \frac{\partial^2}{\partial z^2}(C_1\varphi_{zz}) + \frac{\partial}{\partial z}(C.\varphi_z) +\right.$$

$$\left. + P(cl-z)U_{zz}\right\}\rho.dz + \sum_{i=n_1}^{n}\int_{z_i^+}^{z_{i+1}^-}\left\{m\omega^2 y_0 U + m\omega^2 K^2\varphi -\right.$$

$$\left. -\frac{\partial^2}{\partial z^2}(C_1\varphi_{zz}) + \frac{\partial}{\partial z}(C\varphi_z)\right\}\rho.dz + Ph_1\varphi.\rho\Big|_{cl} - k_2\varphi.\rho\Big|_{z_2} -$$

$$- k_4\varphi_z\,\rho_z\Big|_{z_4} - \sum_{i=0}^{n} C_1\varphi_{zz}\,\rho_z\Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} - \sum_{i=0}^{n}\left[C\varphi_z -\right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial z}(C_1\varphi_{zz})\right]\rho\Big|_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} = 0 \qquad (2.22)$$

Del lema fundamental del cálculo de variaciones se deduce que para $\eta$, $\rho$ arbitrarios dentro del dominio $[z_i^+ , z_{i+1}^-]$, se

obtienen las ecuaciones de Euler Lagrange y las condiciones de contorno del problema.

Existen dos ecuaciones de Euler-Lagrange en el intervalo $[0, cl]$ y otras para el $[cl, l]$ ; para visualizar mejor las ecuaciones, supondremos el caso en que $cl = l$, con lo que las ecuaciones de Euler Lagrange que resultan son:

$$\omega^2 m (u + y_0 \varphi) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[ D u_{zz} - P(l - z)\varphi \right] = 0 \qquad (2.23)$$

$$\omega^2 m (y_0 u + k^2 \varphi) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}(C_1 \varphi_{zz}) + \frac{\partial}{\partial z}(C \varphi_z) + P(l - z) u_{zz} = 0 \qquad (2.24)$$

En las condiciones de contorno distinguimos dos tipos:

a) condiciones naturales de contorno.

b) " impuestas " "

Las a) deben satisfacerse en forma natural y tal como están planteadas en (2.21) conducen a las condiciones de Erdmann Weierstrass en las coordenadas $z_i$ ( caso general, en que $cl \neq l$).

Por ejemplo, para $z_1 \neq l$, se llega a:

$$-k_1 u + \frac{\partial}{\partial z}\left[ D u_{zz} - P(cl - z)\varphi \right]_{z_1^+}^{z_1^-} = 0$$

$$-k_3 u_z - \left[ D u_{zz} - P(cl - z)\varphi \right]_{z_1^+}^{z_1^-} = 0$$

Las (a) deben satisfacerse en forma natural al aplicar ciertos métodos directos (Ritz, Elementos Finitos) ó deberán tenerse en cuenta ( Galerkin)

Las (b) dependen de los vínculos impuestos y restrin-- gen la libertad de las funciones en los contornos.

Para simplificar e interpretar las condiciones de contorno, supongamos que todos los resortes estén en el extremo libre de la viga, idem la carga.

Las condiciones de contorno serán entonces:

$$-k_1 u\,\eta\Big|_l - k_3 u_z\,\eta_z\Big|_l + \frac{\partial}{\partial z}\left[D u_{zz} - P(l-z)\varphi\right]\eta\Big|_0^l -$$

$$-\left[D u_{zz} - P(l-z).\varphi\right]\eta_z\Big|_0^l = 0 \qquad (2.25)$$

$$P h_1 \varphi\,\rho\Big|_l - k_2 \varphi\,\rho\Big|_l - k_4 \varphi_z\,\rho_z\Big|_l - C_1 \varphi_{zz}\,\rho_z\Big|_0^l -$$

$$-\left[C\varphi_z - \frac{\partial}{\partial z}(C_1\varphi_{zz})\right]\rho\Big|_0^l = 0 \qquad (2.26)$$

Para éste caso:

en coordenada $z = 0$

| Condiciones naturales | impuestas |
|---|---|
| $-D u_{zz} + P l \varphi = 0$ | $\eta_z = 0$ |
| $\frac{\partial}{\partial z}\left[D u_{zz} - P l \varphi\right] = 0$ | $\eta = 0$ |
| $-C_1 \varphi_{zz} = 0$ | $\rho_z = 0$ |
| $-\left[C\varphi_z - \frac{\partial}{\partial z}(C_1\varphi_{zz})\right] = 0$ | $\rho = 0$ |

<u>Coordenada $z = l$</u>

| Condiciones naturales | impuestas |
|---|---|

$$-k_3 u_z - D u_{zz} = 0 \qquad \eta_z = 0$$

$$-k_1 u + \frac{\partial}{\partial z}(D u_{zz}) = 0 \qquad \eta = 0$$

$$-k_4 \varphi_z - C_1 \varphi_{zz} = 0 \qquad \rho_z = 0$$

$$-k_2 \varphi - C \varphi_z + \frac{\partial}{\partial z}(C_1 \varphi_{zz}) + P h_1 \varphi = 0 \qquad \rho = 0$$

La combinación de condiciones naturales con impuestas nos conducen a diferentes problemas.

<u>Viga en voladizo</u>: valen las condiciones impuestas para $z = 0$ y las naturales para $z = l$

<u>Viga doblemente empotrada</u>: valen las condiciones impuestas para $z = 0$ y $z = l$ .-

## 2.3.- CRITERIO DINAMICO DE ESTABILIDAD

El problema variacional que deriva en las ecuaciones de Euler Lagrange (2.23) y (2.24) es un problema generalizado de autovalores [5] que proviene de las funciones (2.13) (2.14), en las cuales $\omega$ representa la frecuencia de vibración de la estructura alrededor de su posición de equilibrio (estado bajo carga), resultando función del cargamento aplicado:

$$\omega = \omega(P) \tag{2.27}$$

El criterio de estabilidad de Liapunov [14] para el caso dinámico expresa:

'El estado de equilibrio de un sistema mecánico discreto se dice ser estable si durante el movimiento desarrollado por una pequeña perturbación inicial, las velocidades y los desplazamientos permanecen lo suficientemente pequeños para todo tiempo positivo.

Si además el movimiento que desarrolla la perturbación es tal que las velocidades y los desplazamientos se aproximan a cero cuando el tiempo se aproxima a infinito, el estado de equilibrio se dice ser asintóticamente estable'.

Transcribimos la (2.13) y (2.14) en forma genérica, con $U(z)$ ó $\varphi(z)$ iguales a $f(z)$

$$f(z,t) = f(z).e^{\pm i\omega t} \tag{2.28}$$

Observamos que para frecuencias $\omega$ reales y positivas, el movimiento será armónico y estable de acuerdo al criterio anterior.-

Adoptemos una de las (2.28):

$$f(z,t) = f(z).e^{i\omega t} \qquad (2.29)$$

llamando a $i\omega = s$ como exponente característico tendremos:

$$f(z,t) = f(z).e^{st} \qquad (2.30)$$

Admitiendo para $s$ una forma compleja más general se tendrá:

$$s = \mathrm{Re}s + i\,\mathrm{Im}s \qquad (2.31)$$

Res = parte real de s.

Ims = " imaginaria de s.

$$f(z,t) = \left[ f(z).e^{\mathrm{Re}s.t} \right].e^{i\,\mathrm{Im}s.t} \qquad (2.32)$$

Laparte real de s decide la estabilidad del movimiento

a) Res $\leq 0$ es movimiento estable.

b) Res $> 0$ " " inestable.

Cuando $P = 0$ en (2.23) y (2.24), se está en el caso de vibraciones naturales , y se conoce que en ése caso la frecuencia de vibración $\omega$ es real $\therefore$ $s = i\omega = \mathrm{Im}s.i$ ; con $\mathrm{Re}s = 0$ ; se está en el caso a, que es estable.

Incrementando P desde cero a valores positivos, las frecuencias de vibración cambian y existen dos alternativas de que se obtengan valores de Res>0 :

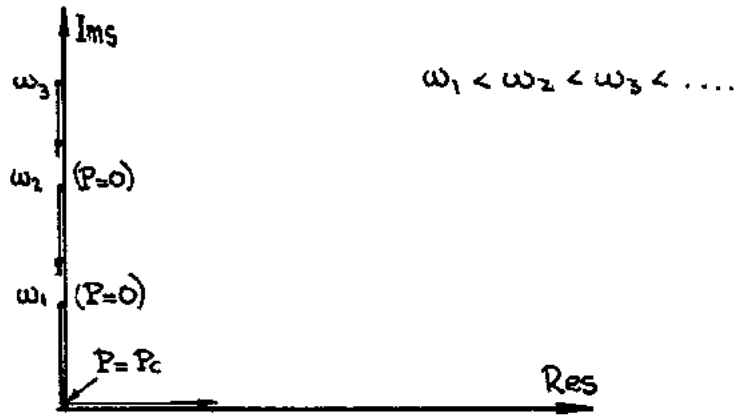
<u>Caso I</u>: cuando Ims decrece y pasa por el valor nulo.-

<u>Caso II</u>:cuando se tienen valores de Res $>0$ sin que Ims pase por cero.

Trazaremos gráficos en el plano complejo de variación de s cuando varía P.-

Caso I

Supongamos que Res $=0$ para ciertos valores de $P>0$ y que la forma de ingresar a la parte derecha del medio plano complejo es pasando por el valor Ims $=0$

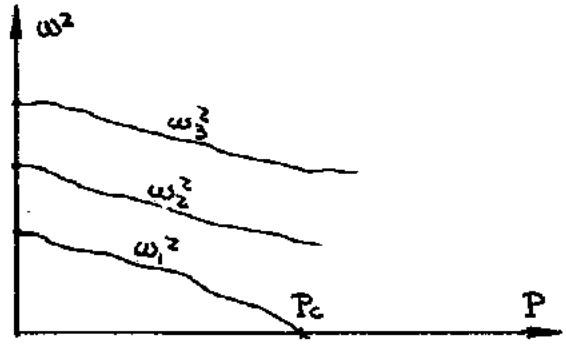



(fig 2-5)

Podemos graficar tambien cómo varían los valores de $\omega^2$-P, pues se tiene para:

$0 \leq P < P_c$ ; es $s=i\omega \therefore$ es $\omega$ real $\therefore \omega^2>0$

$P_c < P$ ; " $s=Res=i(i\omega) \therefore$ es $\omega$ imag. puro $\therefore \omega^2<0$




(fig 2-6)

Este caso que se encontrará al resolver el problema , corresponde ser designado como 'inestabilidad estática', y el resultado de $P_c$ coincidirá con el calculado por los métodos de

Euler o de Energía, pues de (2.24) con $\omega = 0$ corresponderán a tal formulación:

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2}(C_1 \varphi_{zz}) + \frac{\partial}{\partial z}(C\varphi_z) + P(l-z)\, u_{zz} = 0$$

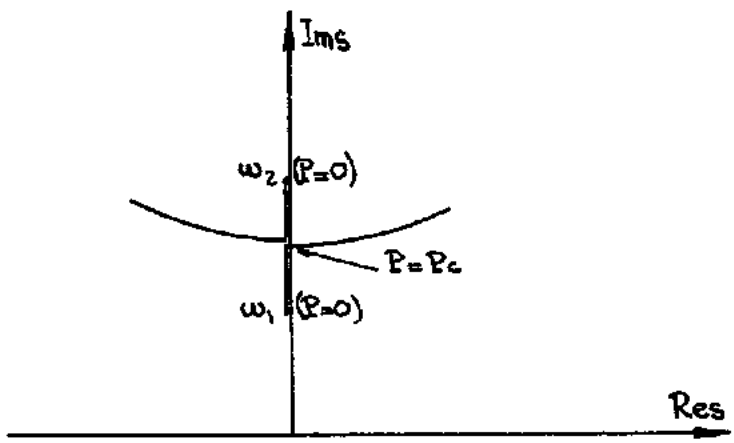
$$\text{con} \quad D u_{zz} - P(l-z)\varphi = 0 \quad \therefore \quad u_{zz} = \frac{P}{D}(l-z).\varphi$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2}(C_1 \varphi_{zz}) + \frac{\partial}{\partial z}(C\varphi) + \frac{P^2}{D}(l-z)^2 \varphi = 0$$

que es la ecuación (6.17) de Timoshenko,[3] para la solución de la viga en voladizo.

<u>Caso II</u>

Supondremos que la forma de ingresar a la parte derecha del medio complejo es pasando por valores de $\mathrm{Im}\, s \neq 0$ , sea $\mathrm{Im}\, s > 0$



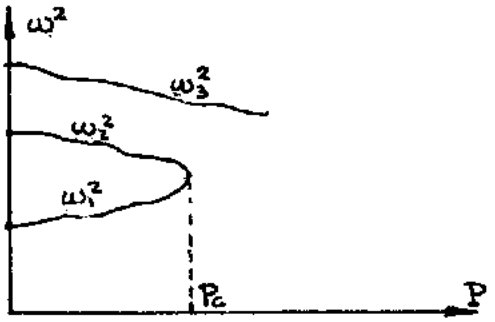

(fig 2-7)

Idem caso 1, estudiaremos cómo varían las $\omega^2 - P$

$0 \leq P < P_c$ ; es $\omega$ real $\quad \therefore \omega^2 > 0$

$P_c < P$ ; es $\omega$ imaginario no puro, con $\omega_1 = \omega_2$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = (\mathrm{Re}\,\omega)^2 - (\mathrm{Im}\,\omega)^2 > 0 \quad (\text{real}).$$




(fig 2-8)

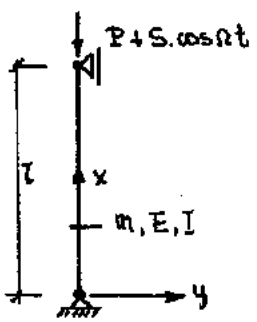
Vemos que para $\omega_1 = \omega_2$ , corresponden iguales valores de $\omega^2$ que dan la condición de inestabilidad (Carga crítica).

Este caso se designa como 'inestabilidad oscilatoria' o 'flutter', en la cual el incremento en la perturbación es del tipo oscilatorio y creciente.-

Como ejemplos de casos de inestabilidad de ambos tipos podemos citar los siguientes:

a) <u>inestabilidad estática</u>:

En (3), pag.158 y 159 trata el caso de la columna biarticulada (fig 2-9) sometida a una carga $P + S\cos\Omega t$ (estática mas - dinámica)




$P$ = carga estática

$S.\cos\Omega t$ = carga dinámica de frecuencia $\Omega$

(fig.2-9)

suponiendo $S = 0$ se llega (pag 159) a la ecuación del cuadrado de la frecuencia de vibración de la columna ( analizada por el método dinámico) en función de P :

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{m l^2}\left(\pi^2 \frac{EI}{l^2} - P\right)$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{m l^2}\left(P_c - P\right) \qquad (2.33)$$

Se observa que para $P < P_c$ es $\omega^2 > 0$

$P = P_c$ " $\omega^2 = 0$

$P > P_c$ " $\omega^2 < 0$

Como (2.33) se deduce suponiendo que la función de desplazamiento $y$ es:

$$y = A\, f(t) \cdot e^{i\omega t} \qquad (2\text{-}34)$$

$s = i\omega$ es imaginario puro, para $P < P_c$ ;

$s = 0$ para $P = P_c$ y $s$ es real para $P > P_c$, pues

$s = i(i\omega) = \omega \quad \therefore \quad \omega \rightarrow i\omega \quad \therefore \quad \omega^2 = -\omega^2$

Para (2.33) se obtienen las curvas para $\omega_1$, correspondientes a las figuras (2-6) y (2-7).-

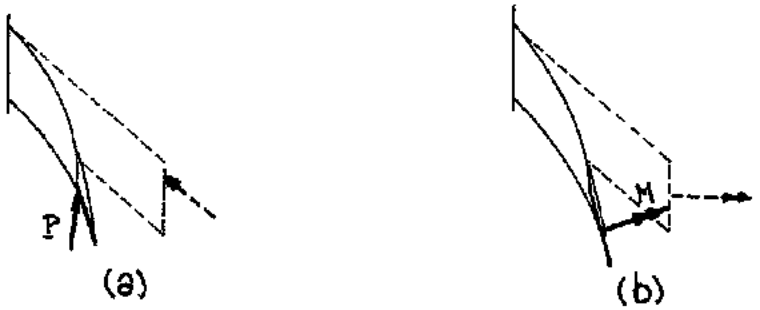
El caso aquí estudiado (Tesis) es otro ejemplo

b) <u>inestabilidad dinámica</u>

Barsoum [9] da los gráficos correspondientes a las figuras (2-7) y (2-8) para el problema de Beck (fig 2-10), que corresponde a la columna empotrada con carga seguidora , estudio realizado utilizando el método de Elementos Finitos; como vemos es el caso de cargamento no conservativo clásico.


(fig 2-10)

Pueden citarse los casos de carga 'seguidora' exéntrica y momento no conservativo en vigas (fig 2-11)




(fig 2-11)

<u>Soluciones conjugadas</u>

Cuando se tiene una solución compleja, la conjugada también satisface: $\bar{s} = Re s - i\, Im s$

$$\bar{f}(z,t) = \left[ f(z)\, e^{Re s.t} \right] e^{-i\, Im s.t}$$

<u>CASO I</u>

$0 \leq P < P_c$ ; es $s = -i\omega$ $\therefore$ es $\omega$ real $\therefore \omega^2 > 0$

$P_c < P$ ; " $s = Re s = i(-i\omega)$ $\therefore \omega$ es imag. puro $\therefore \omega^2 < 0$

Resulta igual al caso ya visto.

<u>CASO II</u>

$0 \leq P < P_c$ ; es $\omega$ real $\therefore \omega^2 > 0$

$P_c < P$ ; es $\omega$ imag. no puro, con $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ $\therefore \bar{\omega}_1^2 = \bar{\omega}_2^2 > 0$

A los fines de computación se está en un caso igual al anterior, correspondiente a la solución compleja de s .-

Podemos concluir afirmando que para sistemas sometidos a cargamentos conservativos, los métodos de Euler y dinámico dan la misma solución para el valor de carga crítica, no siendo nece

sario entonces aplicar el segundo ,estando en el caso de inestabilidad estática.

Para sistemas sometidos a cargamentos no conservativos, para los cuales la pérdida de la estabilidad de equilibrio requiere un estudio especial [*],ambas formas de inestabilidad : la dinámica y la estática son posibles y el planteo dinámico es fundamental.

---

[*] Una ampliación de conceptos para casos de cargamentos no conservativos se da en el apéndice 4.-

# C A P I T U L O III

## COMPORTAMIENTO POSTCRITICO

### 3.1 - GENERALIDADES

En el presente capítulo se hará la presentación de un método de análisis general no lineal de la teoría de la estabilidad elástica, siguiendo la línea de Thompson[8], Chilver[19], Roorda[16],[17], Croll y Walker[2], etc.

El planteamiento vale para sistemas sometidos a cargamentos conservativos y se basa en que es posible formular la expresión de la energía potencial total ($\Pi$) en términos de deformaciones, del tipo:

$$\Pi = \Pi(Q_i, \Lambda) \tag{3.1}$$

$Q_i$ conjunto de coordenadas generalizadas

$\Lambda$ parámetro de cargas.

Aunque la expresión (3.1) es válida para sistemas mecánicos discretos, es posible su aplicación a sistemas continuos haciendo uso del análisis modal aproximado o del método de elementos finitos, en éste último caso aproximando un contínuo a un número determinado de parámetros nodales; idem para sistemas discretos generados en análisis de sistemas contínuos por análisis modal con un conjunto completo de funciones.

Recordando los dos axiomas básicos para un sistema en lo que concierne a su equilibrio estático y su estabilidad, en el sentido de Liapunov [8]

Axioma I

'Un valor estacionario de la energía potencial total con respecto a las coordenadas generalizadas es necesario y suficiente para el equilibrio del sistema'.-

Axioma II

'Un mínimo completo relativo de la energía potencial total con respecto a las coordenadas generalizadas es necesario y suficiente para la estabilidad de un estado de equilibrio de un sitema'.

O sea, debemos buscar de establecer las posiciones de las mínimos de la energía potencial total que debido al axioma I nos conducen al equilibrio del sistema y por el II, la condición de estabilidad.-

Procedemos a derivar (3.1) respecto a cada coordenada generalizada, denotando con un subíndice ( i ) que se trata de derivada.

$$\pi_i(Q_i^E, \Lambda^E) = \frac{\partial \pi}{\partial Q_i}(Q_i^E, \Lambda^E) = 0 \qquad i = 1,2,\dots n \qquad (3.2)$$

E indica estado de equilibrio

Se obtienen así n 'caminos de equilibrio', al variar $\Lambda$ en forma contínua uno por cada coordenada generalizada que se disponga en el espacio bidimensional $\Lambda$-$Q_i$; componiendo todos ellos en el espacio Euclidiano (n + 1) dimensional, obtendremos una línea en tal espacio. ( fig 3-1)

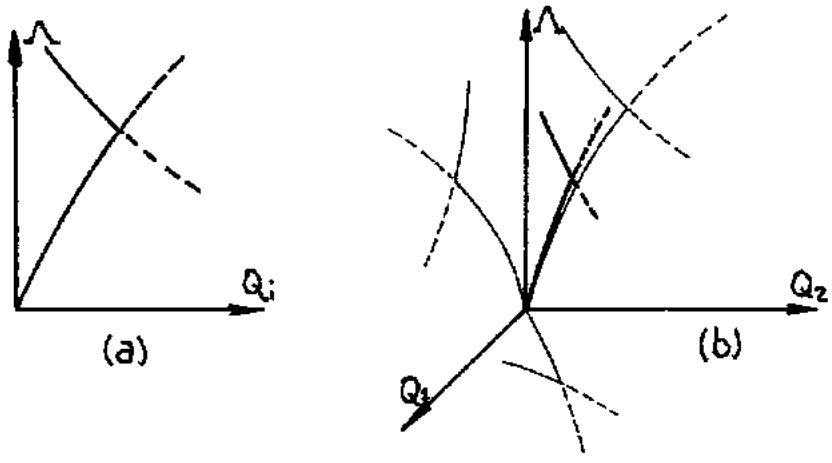
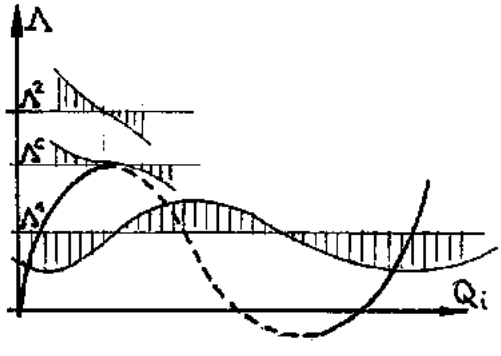



fig (3-1)

Existen cuatro formas principales en que se manifiesta el fenómeno de inestabilidad elástica, pudiendo encuadrar cada una de ellas en dos casos: sistemas perfectos e imperfectos.
( En los gráficos siguientes las líneas llenas representan caminos de equilibrio estables y las líneas quebradas los inestables)

Sistemas perfectos

a) Punto límite o 'snap through': el camino primario inicialmente estable en el orígen va perdiendo estabilidad a medida que aumenta $\Lambda$ hasta un valor definido como parámetro de carga critica ($\Lambda^c$) (fig 3-2)




(fig 3-2)

Es uno de los fenómenos más comunes y aparece en do

mos y arcos rebajados .

Se muestra en figura 3-2 como varía (relativamente) la energía potencial total $\pi[Q_i,\Lambda]$ con respecto a la coordenada $Q_i$ , mostrando los valores de mínimo en las ramas estables del camino de equilibrio y de máximo en las inestables, correspondiendo un punto de inflexión para el valor correspondiente a $\Lambda^c$.

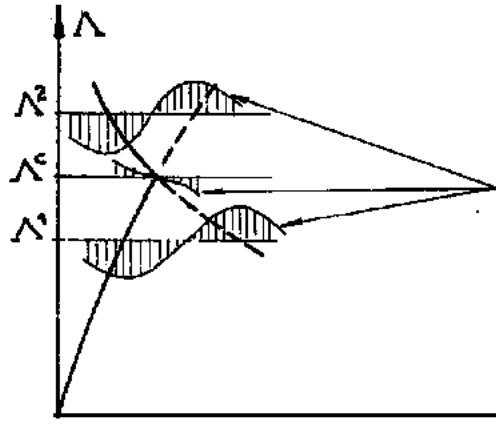
Debe tenerse la precaución de no perder de vista el resto de las coordenadas pues es posible obtener un $\Lambda^c$ menor utilizando otra coordenada ( $Q_j$). En el espacio tridimensional, el punto límite puede observarse como una cúspide.

b) Punto de bifurcación asimétrica: en éste fenómeno existe intersección de dos caminos de equilibrio:el que comienza desde el origen de coordenadas (camino primario) y el que lo intersecta (camino secundario ó de post buckling) El punto de intersección define el parámetro de carga crítica $\Lambda^c$ y en él, las pendientes de ambos caminos de equilibrio son diferentes de cero.-

Se muestra en la fig. 3-3 la variación de la energía potencial total respecto de la coordenada $Q_i$.-

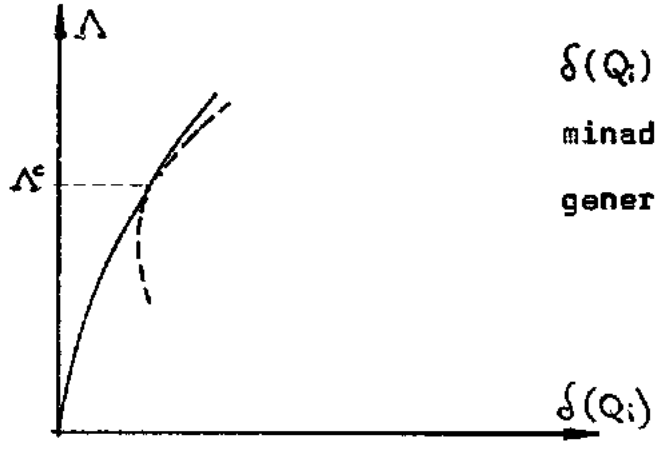
Idem al caso a cuando se consideran varias coordenadas generalizadas, la fig. 3-3 puede observarse en otra forma, (fig 3-4), en que las dos caminos se cruzan con una tangencia común.

$\delta = \delta(Q_i)$ depende de donde se sitúa el observador. Este caso es poco frecuente, se da en estructuras que presenten simetría rotacional




curvas de variación de la Energía Potencial total.

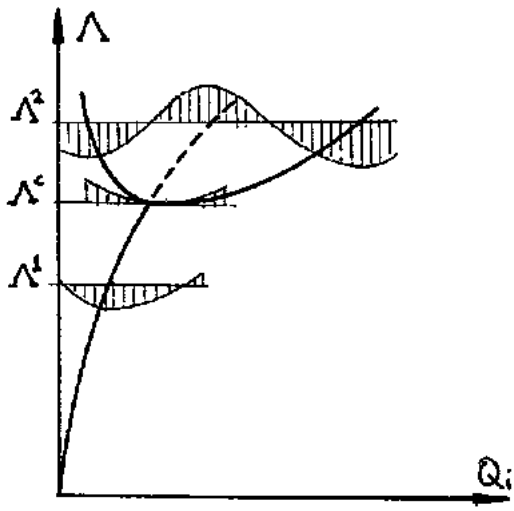
(fig 3-3)




$\delta(Q_i)$ es una determinada coordenada generalizada.

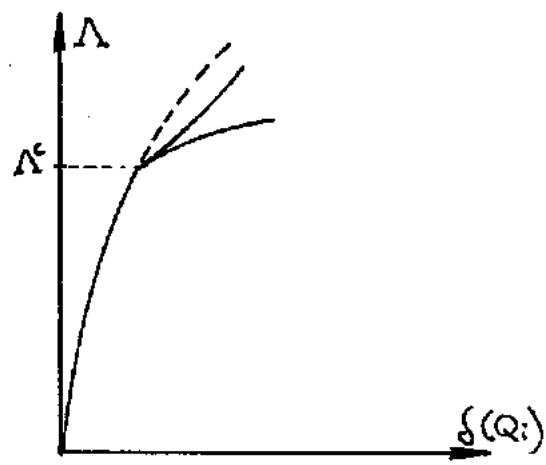
(fig 3-4)

c) Punto de bifurcación simétrica estable: difiere del caso (b) en que la pendiente del camino secundario es nula en el punto de intersección , mientras que la del camino primario es diferente de cero. Además ambas ramas del camino secundario son estables como se nota en fig 3-5




(fig. 3-5)

Puede observarse en fig 3-6 cómo vería el presente caso un observador situado en una posición especial

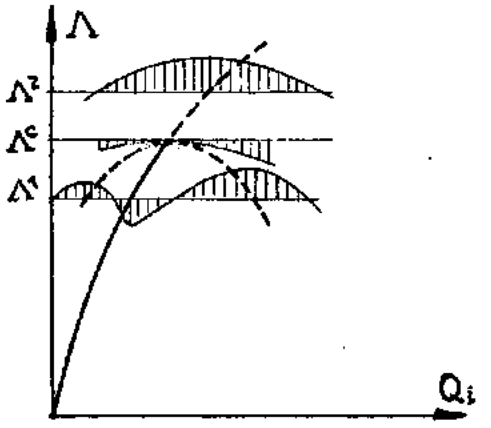



(fig.3-6)

Este fenómeno es más común, (estructuras perfectas) poniéndose de manifiesto en columnas bajo cargas -- centradas , el caso en estudio ( inestabilidad lateral de vigas), estructuras de pórticos simétricos, placas con cargas en su plano, pandeo torsional,etc

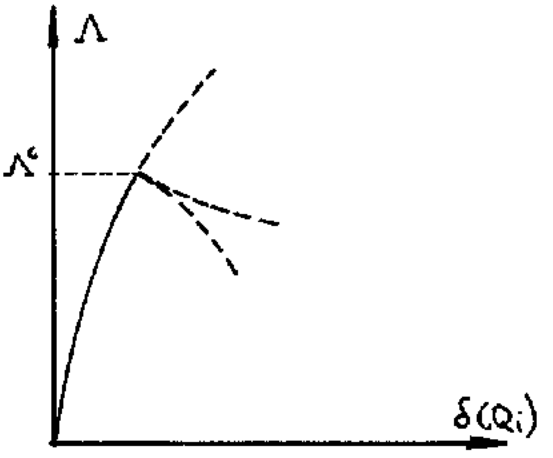
d) Punto de bifurcación simétrica inestable: es un fe-

nómeno que difiere de (c) en que las ramas del ca-- mino secundario son inestables (fig 3-7)




(fig. 3-7)

En fig 3-8 se observa la curva en forma de cúspide- desde una posición especial del observador.




(fig. 3-8)

Se produce éste fenómeno principalmente en céscaras cilíndricas bajo carga axial, bajo torsión, presión externa, domos rebajados bajo presión externa, etc.

El caso a se produce en estructuras de los tipos (b) y (d) cuando presentan imperfecciones.

Sistemas imperfectos

Los gráficos mostrados en las figuras 2 a 8 no se obtienen para sistemas reales debido a la influencia de imperfecciones que siempre están presentes (defectos de geometría, imperfección en centrado de cargas, defectos del material etc).

Designando como $\varepsilon$ a un parámetro de imperfección, (3.1) se transforma en:

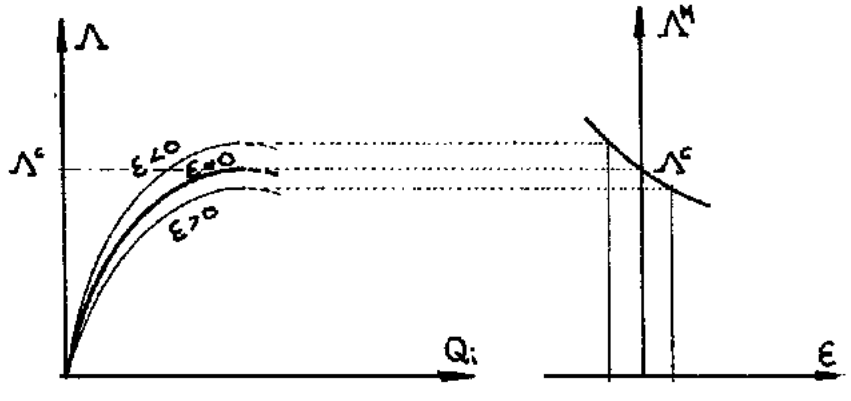
$$\Pi = \Pi(Q_i, \Lambda, \varepsilon) \qquad (3.3)$$

que corresponde a (3.1) para $\varepsilon = 0$

El parámetro $\varepsilon$ da origen a una familia de curvas que corresponden una a cada valor de la imperfección.

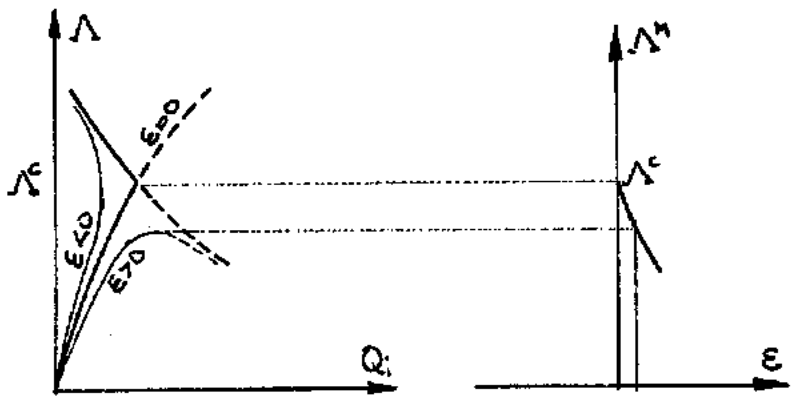
A continuación se trazan los gráficos correspondientes a (a) a (d) junto con las curvas de $\varepsilon \neq 0$

a)



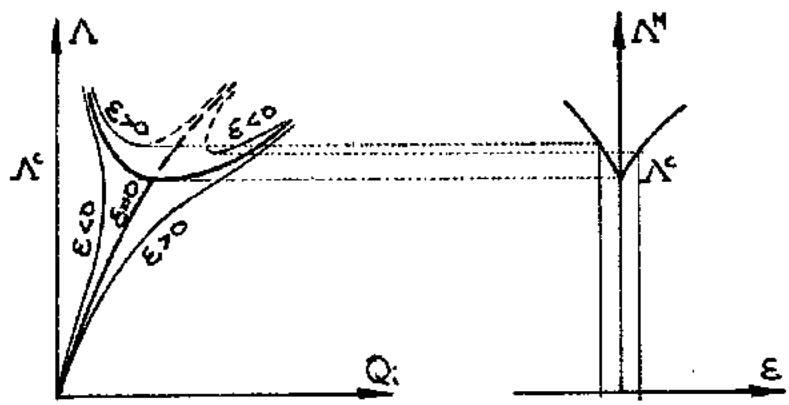

(fig.3-9)

b)



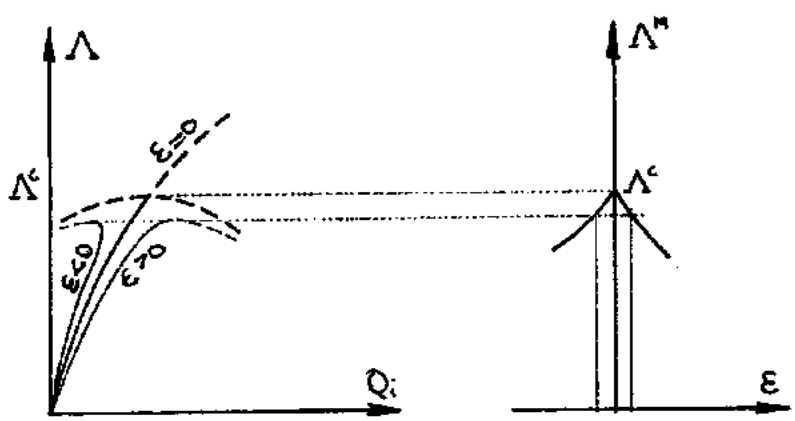

(fig 3-10)

c)




(fig 3-11)

d)




(fig 3-12)

Se ve que el efecto de las imperfecciones es relativamente poco importante en el caso (a), tiene un efecto mayor para (c) pero para grandes deformaciones de éste caso se alcanza la curva teórica; es de efecto negativo para los casos (b) y (d)

El trazado de los gráficos $\Lambda^{M} - \varepsilon$ de las figuras (3-9) a (3-12) se efectúa a partir de valores conocidos de la imperfección, en contra la carga de salto que para los casos a,b,d, serán máximas y para el caso c será mínima, utilizandose la carga de salto del camino complementario, concepto que se aclara en capítulo V

## 3.2- ESTABILIDAD DE EQUILIBRIO

### Sistemas perfectos

A partir de (3-1), considerando un incremento desde el estado de equilibrio: $Q_i = Q_i^E + q_i$ ; $\Pi = \Pi^E + \pi$

$$\Pi^E = \Pi\left[Q_i^E, \Lambda^E\right] \tag{3.4}$$

Desarrollando (3-4) en série de Taylor respecto de las coordenadas generalizadas

con $\Pi_i^E q_i = 0$ de (3.2)

$$\pi = \frac{1}{2!}\Pi_{ij}^E q_i q_j + \frac{1}{3!}\Pi_{ijk}^E q_i q_j q_k + \dots \tag{3.5}$$

Se utiliza la convención de sumatoria cuando se encuentran índices seguidos.

La estabilidad de un estado de equilibrio dependerá de la forma cuadrática siguiente:

$$\pi^{(2)} = \frac{1}{2!}\Pi_{ij}^E q_i q_j \tag{3.6}$$

Es posible analizar la estabilidad del equilibrio en éste sistema, o en otro que sería el sistema principal, en el que $\pi^{(2)}$ aparece como una forma diagonal que se lleva a cabo mediante alguna transformación de ortogonalización no singular[5]. Veremos el 2do caso

$$q_i = \alpha_{ij} w_j \qquad \text{con} \qquad |\alpha_{ij}| \neq 0 \tag{3.7}$$

la inversa $\quad w_i = \beta_{ij} q_j \qquad |\beta_{ij}| \neq 0$

Introduciendo (3.7) en (3.6) se tendrá

$$\pi^{(2)} = \frac{1}{2!} C_i w_i^2 \tag{3.8}$$

$C_i$ son constantes.

Podemos definir una nueva función de energía:

$$D(w_i, \Lambda) \equiv \Pi(Q_i^E + \alpha_{ij} w_j, \Lambda) \tag{3.9}$$

$$D(w_i, \Lambda) = D^E + d \tag{3.10}$$

$$D^E \equiv D(0, \Lambda^E) = \Pi(Q_i^E, \Lambda^E) \tag{3.11}$$

$$d = \frac{1}{2!} D_{ii}^E w_i^2 + \frac{1}{3!} D_{ijk}^E w_i w_j w_k + \dots \tag{3.12}$$

De (3.6) y (3.12)

$$C_i = D_{ii}^E = D_{ii}(0, \Lambda^E)$$

$$|\alpha_{ij}|^2 |\Pi_{ij}^E| = |D_{ij}^E| = C_1 . C_2 \dots . C_n \tag{3.13}$$

Las coordenadas $w_i$ y los coeficientes $C_i$ juegan un importante rol en la teoría de la estabilidad y se designan como 'coordenadas principales' y ' coeficientes de estabilidad',estando ligados éstos a la estabilidad del sistema:

Si el menor coeficiente de estabilidad es positivo, todos los demás lo serán y el sistema es estable con respecto a -- las coordenadas principales, y $\Pi^{(2)}$ es positivo definido.

Si el menor coeficiente de estabilidad es negativo, el estado de equilibrio es inestable con respecto a las coordenadas principales, y $\Pi^{(2)}$ admite valores negativos.

El número de coeficientes de estabilidad negativos define el 'grado de inestabilidad' del sistema.-

Si el menor coeficiente de estabilidad es nulo, el estado de equilibrio es crítico y la forma cuadrática $\Pi^{(2)}$ es positiva- semidefinida ,se tiene que el determinante $\Pi_{ij}$ ó $D_{ij}$ son

nulos en tal estado (3.13)

Entonces $C_1=0 \quad C_s>0 \quad s\neq 1$ (para todo $s\neq 1$)

$$w_s=\beta_{sj}\, q_j=0$$

Para sistemas de 2 grados de libertad es posible definir la estabilidad del sistema basándose en los signos de los términos de la diagonal principal y de los menores principales[2]

Tales condiciones serán:

a) sistema estable

$$\Pi_{11}>0 \quad ; \Pi_{22}>0$$
$$\Pi_{11}.\Pi_{22}-\Pi_{12}^2 \quad >0 \qquad (3.12')$$

b) sistema inestable

cuando alguna de las (a) son violadas

c) sistema con equilibrio crítico

$$\Pi_{11}>0 \quad ; \Pi_{22}>0$$
$$\Pi_{11}.\Pi_{22}-\Pi_{12}^2 \quad =0 \qquad (3.13')$$

Podemos comenzar el análisis empleando las coordenadas básicas $Q_i$ , determinándose $\Lambda^c$ con la condición de determinante nulo, y partiendo de éste punto analizar la variación de $\Pi$ en los diversos caminos coordenados (casos de bifurcación de caminos de equilibrio)

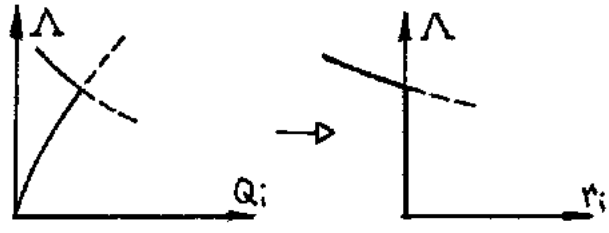
Desarrollaremos $Q_i$ y $\Lambda$ en función de un parámetro conveniente, que representa el progreso a lo largo del camino, haciendo así conveniente el empleo del método de perturbación[2], (10)

$$Q_i = Q_i(\varepsilon) \tag{3.14}$$

$$\Lambda = \Lambda(\varepsilon) \tag{3.15}$$

$\varepsilon$ = parámetro

Si el camino primario es no trivial,* es posible efectuar una transformación de mapeamiento para llevarlo al camino trivial.




(fig 3-13)

$$Q_i = Q_i(\varepsilon) + r_i(\varepsilon) \tag{3.16}$$

$$\Pi(Q_i, \Lambda) = \Pi(Q_i + r_i, \Lambda) = V(r_i, \Lambda) \tag{3.17}$$

Luego será posible desarrollar $V(r_i, \Lambda)$ en la misma forma que (3.5) para analizar el camino secundario

Podemos expandir (3.14) y (3.15) en série de Taylor;

$$Q_i(\varepsilon) = Q_{i,0} + Q_{i,1}.\varepsilon + \frac{1}{2!} Q_{i,2}\,\varepsilon^2 + \dots \tag{3.18}$$

$$\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_{,0} + \Lambda_{,1}.\varepsilon + \frac{1}{2!} \Lambda_{,2}\,\varepsilon^2 + \dots \tag{3.19}$$

el significado de los términos es el siguiente:

$$Q_{i,s} = \left.\frac{\partial^s Q_i}{\partial \varepsilon^s}\right|_{\varepsilon=0} \tag{3.20}$$

$$\Lambda_{,s} = \left.\frac{\partial^s \Lambda}{\partial \varepsilon^s}\right|_{\varepsilon=0} \tag{3.21}$$

---

* Caso trivial es aquel que se satisface con la solución $Q_i = 0$ $i = 1,2,\dots n$

De (3.1), introduciendo (3.18) y (3.19) y aplicando la condición (3.2) se tiene:

$$\Pi = \Pi\left[Q_i(\varepsilon), \Lambda(\varepsilon)\right] \tag{3.22}$$

$$E'_i(Q_i, \Lambda) = \frac{\partial \Pi}{\partial Q_i}\left[Q_i(\varepsilon), \Lambda(\varepsilon)\right] = 0 \tag{3.23}$$

La (3.23) define los caminos de equilibrio, uno para cada coordenada generalizada, y válida para todo $\varepsilon$.-

Debemos cumplir además las siguientes condiciones

$$\left.\frac{dE'_i}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{3.24}$$

$$\left.\frac{d^2E'_i}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{3.24'}$$

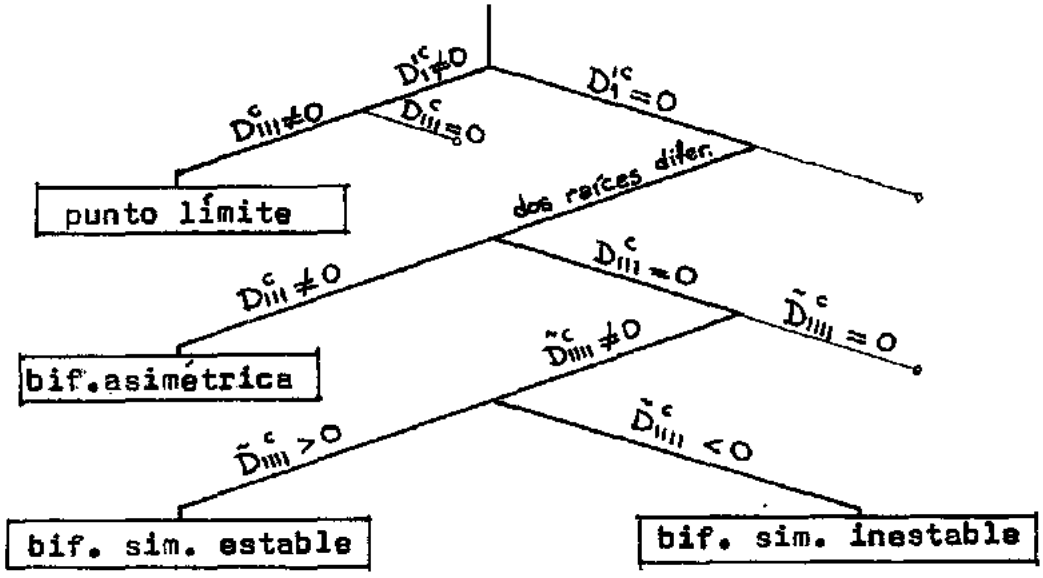
$$\vdots$$

Se llega así a un sistema de $n$ ecuaciones con ( $n+1$) incógnitas, siendo necesario un valor a $\varepsilon$ , reduciendose las incógnitas a $n$ . Cada sistema (3.24),(3.24'),... es lineal y puede llegarse a la solución por pasos sucesivos de resolución de tales ecuaciones.-

Para camino de equilibrio primario no trivial se lleva a cabo la transformación de mapeamiento (3.17) y se trata a $V$ en igual forma que a $\Pi$.[2]

Es posible continuar investigando en la línea trazada, para el sistema perfecto los casos de punto límite y birfucación cuando se adopte para $\varepsilon$ el parámetro de cargas (designado como - sistema especial) o un parámetro cualquiera de deformación (designado como sistema general)

Pueden clasificarse los puntos críticos discretos, a partir del sistema con coordenadas principales;[8] cuando se efectúa el análisis utilizando coordenadas principales:




Sistemas imperfectos

Es posible llevar a cabo un análisis sobre sistemas imperfectos, derivando como una perturbación del sistema perfecto, planteando:

$$\Pi = \Pi\,(Q_i, \Lambda, \varepsilon)$$

$\varepsilon$ = parámetro de imperfección.

Con un análisis similar que para sistemas perfectos, puede desarrollarse ésta teoría y llegar a la determinación de los gráficos de las fig 3-9 a 3-12, poniendo de manifiesto el comportamiento postcrítico y la influencia de las imperfecciones.-

## 3.3.- APLICACION AL CASO EN ESTUDIO

Se analiza el sistema perfecto, con coordenados no principales.

Se plantea la energía potencial total (2.15) con $\omega = 0$ y considerando los términos no lineales

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{ E I_y \gamma_z^2 + C\varphi_z^2 + C_1 \varphi_{zz}^2 - 2P(l-z)\, u_{zz}\, \mathrm{sen}\varphi \right\} dz$$
$$+ \frac{1}{2} K_1 u^2_{|z_1} + \frac{1}{2} K_2 \varphi^2_{|z_2} + \frac{1}{2} k_3 u_z^2{}_{|z_3} + \frac{1}{2} k_4 \varphi_z^2{}_{|z_4}$$
$$- \frac{1}{2} P \varphi^2_{|l} \qquad (3.25)$$

Las expresiones comunes no lineales para $\gamma_z$ y $\mathrm{sen}\varphi$ son

$$\gamma_z \cong u_{zz}\left[ 1 + \frac{1}{2} u_z^2 \right] \qquad (3.26)$$

$$\mathrm{sen}\,\varphi \cong \varphi - \varphi^3/6 \qquad (3.27)$$

Pudiendo adoptarse $\mathrm{sen}\varphi = \varphi$ puesto que para un valor de $\varphi = 8^o$ , $\varphi^3/6 < 0.4\%\ \varphi$

A efectos de simplificar algo la presentación supondremos que $k_3 = k_4 = 0$ y $z_1 = z_2 = l$

Trabajaremos en coordenadas adimensionales, designados con mayúsculas:

$$U = u/l \qquad Z = z/l \qquad \bar{C} = C/E I_y$$
$$\bar{C}_1 = C_1/E I_y l^2 \qquad K_1 = k_1 l^3/E I_y$$
$$K_2 = k_2 l/EI \qquad \bar{P} = P l^2/EI \qquad \Pi = \Pi l/E I_y$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{ U_{zz}^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} U_z^2 \right]^2 + \bar{C}\varphi_z^2 + \bar{C}_1 \varphi_{zz}^2 - \bar{P}(1-Z) U_{zz} \varphi \right\} dZ$$
$$+ \frac{1}{2} K_1 U_L^2 + \frac{1}{2} K_2 \varphi_L^2 \qquad (3.29)$$

Se propone para $U$ y $\varphi$ las siguientes funciones (aproximadas a la deformada real )

$$U = Q_1 Z^3 \tag{3.30}$$

$$\varphi = Q_2 Z^2 \tag{3.31}$$

En este análisis utilizaremos la anterior aproximación con el objeto de obtener el comportamiento postcrítico incipiente pero para un estudio más profundo se deberán adoptar funciones de más grados de libertad.

$$\frac{dU}{dZ} = 3Q_1 Z^2 \quad ; \quad \frac{d^2U}{dZ^2} = 6Q_1 Z \tag{3.32}$$

$$\frac{d\varphi}{dZ} = 2Q_2 Z \quad ; \quad \frac{d^2\varphi}{dZ^2} = 2Q_2 \tag{3.33}$$

Reemplazando (3.30) y (3.31),... en (2.29) y no teniendo en cuenta los términos superiores al 4$^{\underline{to}}$ orden en $Q_i$ (i=1,2) se tendra la siguiente expansión:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{ 36 Q_1^2 Z^2 (1 + 9 Q_1^2 Z^4) + 4\bar{C} Q_2^2 Z^2 + 4\bar{C}_1 Q_2^2 - \right.$$
$$\left. - 6\bar{P}(1-Z) Q_1 Q_2 Z^2 \right\} dZ + \frac{1}{2} K_1 Q_1^2 + \frac{1}{2} K_2 Q_2^2 \tag{3.34}$$

integrando

$$\Pi = \frac{1}{2}(12 + K_1) Q_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\bar{C} + 4\bar{C}_1 + K_2\right) Q_2^2 - \frac{3}{10}\bar{P} Q_1 Q_2 +$$
$$+ \frac{162}{7} Q_1^4 \tag{3.35}$$

de (3.5) se puede establecer la correlación de coeficientes, notando que $\Pi_i = 0$ y $\Pi_{ijk} = 0$

$$\Pi_{11} = 12 + K_1 \quad ; \quad \Pi_{12} = -\frac{3}{10}\bar{P} \quad ; \quad \Pi_{22} = \frac{4}{3}\bar{C} + 4\bar{C}_1 + K_2$$
$$\Pi_{1111} = \frac{162}{7} \cdot \frac{24}{4!} = \frac{3888}{7} \tag{3.36}$$

de acuerdo a las características de los términos[8] (3.36) se observa que estamos en un caso de bifurcación ( $\Pi_i=0$) simétrica ( $\Pi_{ijk}=0$) estable ( $\Pi_{ijkl} > 0$ ).-

Observando (3.35) vemos que se admite la solución trivial ( $Q_1=Q_2=0$),no siendo necesario mapear.

Las condiciones (3.12') serán:

a) $\Pi_{11} = (12+K_1) > 0$

b) $\Pi_{22} = (\frac{4}{3}\bar{C} + 4\bar{C}_1 + K_2) > 0$

c) $\Pi_{11}.\Pi_{22} - \Pi_{12}^2 = (12+K_1).(\frac{4}{3}\bar{C}+4\bar{C}_1+K_2) - \frac{9}{100}\bar{P}^2$

de c , para $\bar{P} > \bar{P}_c$ será inestable

" " " $\bar{P} < \bar{P}_c$ " estable

<u>Carga crítica</u>

$$\bar{P}_c = \frac{10}{3}\sqrt{(12+K_1).(\frac{4}{3}\bar{C}+4\bar{C}_1+K_2)} \qquad (3.37)$$

El análisis de los términos de $\bar{P}_c$ nos indica que ella crece cuando se tiene resorte de flexión, de torsión, cuando hay rigidez de alabeo

de $\bar{P}= Pl^2/EI_y$ se observa que a menor longitud y mayor rigidez $\bar{P}_c$ aumenta

Formularemos ahora las ecuaciones (3.22) a (3.24)

$$\Pi = \frac{1}{2}\Pi_{ij}Q_iQ_j + \frac{1}{4!}\Pi_{ijkl}Q_iQ_jQ_kQ_l \qquad (3.38)$$

$$E'_i = \Pi_i = \Pi_{ij}Q_j + \frac{1}{3!}\Pi_{ijkl}Q_j.Q_k.Q_l \qquad (3.39)$$

$$E'_1 = \Pi_{11} Q_1 + \Pi_{12} Q_2 + \frac{1}{3!} \Pi_{111} Q_1^3 = 0 \qquad (3.40)$$

$$E'_2 = \Pi_{12} Q_1 + \Pi_{22} Q_2 = 0 \qquad (3.40')$$

<u>primer secuencia</u>.

$$\frac{dE'_1}{d\varepsilon}_{\varepsilon=0} = \Pi_{11} Q_{1,1} + \Pi_{12} Q_{2,1} = 0 \qquad (3.41)$$

$$\frac{dE'_2}{d\varepsilon}_{\varepsilon=0} = \Pi_{12} Q_{1,1} + \Pi_{22} Q_{2,1} = 0 \qquad (3.41')$$

<u>segunda secuencia</u>.

$$\frac{d^2E'_1}{d\varepsilon^2}_{\varepsilon=0} = \Pi_{11} Q_{1,2} + \Pi_{12} Q_{2,2} + \Pi'_{12} P_{1,1} Q_{2,1} = 0 \qquad (3.42)$$

$$\frac{d^2E'_2}{d\varepsilon^2}_{\varepsilon=0} = \Pi_{12} Q_{1,2} + \Pi_{22} Q_{2,2} + \Pi'_{12} P_{1,1} Q_{1,1} = 0 \qquad (3.42')$$

<u>tercera secuencia</u>.

$$\frac{d^3E'_1}{d\varepsilon^3}_{\varepsilon=0} = \Pi_{11} Q_{1,3} + \Pi_{12} Q_{2,3} + \Pi'_{12} P_{1,2} Q_{2,1} + \Pi'_{12} P_{1,1} Q_{2,2} + \Pi_{111} Q_{1,1} = 0 \qquad (3.43)$$

$$\frac{d^3E'_2}{d\varepsilon^3}_{\varepsilon=0} = \Pi_{12} Q_{1,3} + \Pi_{22} Q_{2,3} + \Pi'_{12} P_{1,2} Q_{1,1} + P_{1,1} Q_{1,2} = 0 \qquad (3.43')$$

Las tres secuencias anteriores nos servirán y son suficientes para los fines esperados.

Como estamos frente a un problema de bifurcación simétrica (estable), adoptaremos como parámetro de perturbación alguno de los $Q_i$ , y nunca p (2)

Adoptando : $\varepsilon = Q_1$

resulta : $Q_{1,1} = 1 \qquad Q_{1,s} = 0 \qquad s > 1$

De (3.41) para el camino distinto del trivial se tiene:

$$12 + K_1 - \frac{3}{10} P_{1,0} Q_{2,1} = 0$$

$$-\frac{3}{10}P_{10}+\left(\frac{4}{3}C+4C_1+K_2\right)Q_{2,1}=0$$

con $P_{10}$ = Pc de (3.37) resulta

$$Q_{2,1}=\sqrt{\frac{12+K_1}{\frac{4}{3}C+4C_1+K_2}} \tag{3.44}$$

de (3.42) resulta: con $Q_{1,2}$ = 0 y $Q_{2,1}$ de (3.44)

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{10}P_{10} & -\frac{3}{10}Q_{2,1} \\ \frac{4}{3}C+4C_1+K_2 & -\frac{3}{10} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{2,2} \\ P_{1,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

de donde $Q_{2,2}=P_{1,1}=0$ (3.45)

de (3.43) resulta:

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{10}P_{10} & -\frac{3}{10}Q_{2,1} \\ \frac{4}{3}C+4C_1+K_2 & -\frac{3}{10} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{2,3} \\ P_{1,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3888}{7} \\ 0 \end{vmatrix}$$

resolviendo el sistema resulta:

$$Q_{2,3}=277\cdot\frac{1}{\sqrt{(12+K_1)\left(\frac{4}{3}C+4C_1+K_2\right)}} \tag{3.46}$$

$$P_{1,2}=923{,}3\sqrt{\frac{\left(\frac{4}{3}C+4C_1+K_2\right)}{(12+K_1)}}=P_c\cdot 277\,\frac{1}{(12+K_1)} \tag{3.47}$$

De (3.18) y (3.19), con (3.44) a (3.47) se obtiene

$$Q_1=U$$

$$Q_2=\varphi\cong Q_{2,1}\,\varepsilon+\frac{1}{3!}Q_{2,3}\,\varepsilon^3$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{12+K_1}{\frac{4}{3}C+4C_1+K_2}}\left[U + \frac{46{,}3}{(12+K_1)}U^3\right]$$

$$\bar{P} \cong P_{10} + \frac{1}{2!}P_{12}$$

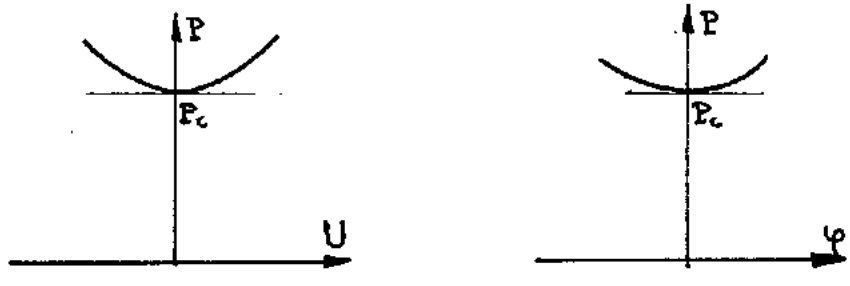
$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_c} = 1 + \frac{138{,}8}{(12+K_1)}U^2$$

$$U = \sqrt{\frac{(12+K_1)}{138{,}8}\left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}_c} - 1\right)} \qquad (3.48)$$

$$\varphi = (12+K_1)\sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}_c} - 1\right)}{138{,}8\left(\frac{4}{3}C+4C_1+K_2\right)}}\left[1 + 0{,}333\left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}_c} - 1\right)\right]$$

(3.49)

Las (3.48) y (3.49) son válidas para valores de $P/Pc > 1$. Es posible trazar gráficos relativos en coordenadas P - U y P - $\varphi$, dando curvas de la forma de la figura 3-14




(fig. 3-14)

# C A P I T U L O  IV

# DETERMINACION DE LA CARGA CRITICA TEORICA

## 4.1.- GENERALIDADES

Se determinará la carga crítica por minimización funcional (2.15) aplicando dos métodos directos del cálculo de variaciones: Rayleigh - Ritz y Elementos Finitos.-

Método de Rayleigh - Ritz: con él pueden obtenerse soluciones aproximadas de problemas expresados en forma variacional adoptando para la función solución del problema, la seria propuesta por los autores:

$$f(z) = \phi_0(z) + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(z) \qquad (4.1)$$

donde:

$\phi_0(z)$ = función que satisface las condiciones de contorno -- del problema.

$a_i$ = coeficiente a determinar.-

$\phi_i(z)$ = funciones coordenadas que sastifacen las siguientes- condiciones

a) Pertenecen al subespacio de dimensión n.-

b) Para cualquier n, deben ser linealmente independientes.-

c) La secuencia $\{\phi_n\}$ debe ser completa.-

Para el problema planteado suponemos que $\phi_0(z)=0$ y los

$\phi_i$ satisfacen las condiciones de contorno del problema.

Para resolver el problema de existencia y convergencia de la respuesta, puede tratarse el tema considerándolo como el problema de autovalores de un operador lineal en el espacio de Hilbert.[20] Se darán aquí sólo algunas definiciones básicas ,en lo que respecta al referido espacio:

Un conjunto $S$ de elementos $u, v, \ldots$ es llamado espacio Hilbert si se cumplen las siguientes propiedades:

propiedad 1

El conjunto $S$ de elementos $u, v, w, \ldots$ es llamado espacio lineal, si se cumplen las siguientes propiedades

Con $u, v, w, \ldots \in S$ ( $\in$ es pertenece)

Con $a, b, c, \ldots \in R$ ( $R$ espacio de números reales)

1) $u, v \in S \; ; (u+v) \in S$

2) la adición es conmutativa $u + v = v + u$

3) " " " asociativa $u + (v+w) = (u+v) + w$

4) existe el elemento nulo $0 \in S$ de modo que

$u + 0 = u$

$0 . u = 0$

5) $u + (-1).v = u - v$

6) El producto de elementos $a.u$ está definido en $S$: $a.u \in S$

7) la multiplicación escalar es distributiva

$a.(u+v) = au + av$

$(a+b).u = au + bu$

8) la multiplicación escalar es asociativa:

9) Existe el elemento identidad , $1 \in R$ tal que

$$1.u = u$$

<u>propiedad 2</u>

Para los elementos $u, v, w \in S$ existe un número real llamado producto escalar, designado por $(u, v)$, si pasa a real es:

1) $(a.u, v) = a(u,v)$

2) $(u+v, w) = (u,w) + (v,w)$

3) $(u,v) = (v,u)$

4) $(u,u) > 0$ si $u \neq 0$

$(u,u) = \|u\|^2$ es el cuadrado de la 'norma' de u.

La norma de u cumple las siguientes propiedades:

1) $\|u\| > 0$ con exepción de $u = 0$

2) $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = 0$

3) $\|a.u\| = |a|.\|u\|$

4) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ llamada desigualdad del triangulo.

<u>propiedad 3</u>

Si S es de dimensión infinita, existe un conjunto de n elementos linealmente independientes $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ tal que

$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = 0$ si y sólo si

$a_1 = a_2 = \ldots\ldots\ldots a_n = 0$

<u>propiedad 4</u>

S es completo , de modo que cada secuencia Cauchy en S converge a un elemento de S :

$u_1, u_2, \ldots u_n \in S$

$u_1, u_2, \ldots u_n = \{u_n\}$

$\lim_{n,m \to \infty} \|u_m - u_n\| = 0$

entonces existe en S un elemento u tal que

$\lim_{n \to \infty} \|u - u_n\| = 0$

propiedad 5

S es separable, lo que significa decir que existe una secuencia de elementos en S de modo que cualquiera sea ella es densa en S, o sea que si existe la secuencia $\{u_n\}$ tal que para algún $v \in S$ y un $\varepsilon > 0$, tendremos que $\|u_n - v\| < \varepsilon$ para alguno de los $u_n$ en la secuencia $\{u_n\}$

Para problemas de autóvalores, es común calcularlos para las secuencias correspondientes a 1,2,...n términos de las expansiones (4.1) y llevar a cabo una comparación de los mismos para las diversas secuencias:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= a_1^{(1)} \phi_1 \\ f^{(2)} &= a_1^{(2)} \phi_1 + a_2^{(2)} \phi_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)} &= a_1^{(n)} \phi_1 + a_2^{(n)} \phi_2 + \ldots + a_n^{(n)} \phi_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

dando en general la convergencia siguiente:

Llamando con $\lambda$ a los autovalores, se tiene:

| número de términos de la secuencia → | 1 | 2 | | n | problema original |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^{er}$ autovalor | $\lambda_1^{(1)} \geqslant$ | $\lambda_1^{(2)} \geqslant$ | $\cdots \geqslant$ | $\lambda_1^{(n)} \geqslant$ | $\searrow \lambda_1$ |
| $2^{do}$ " | | $\lambda_2^{(2)} \geqslant$ | $\cdots \geqslant$ | $\lambda_2^{(n)} \geqslant$ | $\searrow \lambda_2$ |
| $n^{mo}$ " | | | $\cdots$ | $\lambda_n^{(n)} \geqslant$ | $\searrow \lambda_n$ |

La convergencia del método depende en gran medida de la elección de las funciones coordenadas, porque ocurre que puede -- tenderse hacia una solución que difiere de la correcta, (pudiendo ésta hallarse próxima) por deficiencia en la elección de las funciones

( ver figuras 6-1 y 6-2 )

Se plantean los métodos de Ritz y E. Finitos en común, ya que el último puede tratarse como una subclase del primero , siendo válido todo lo anterior, restringiendo el número de términos en las expansiones de acuerdo al número de parámetros nodales que se adopten. En éste caso, el número de autovalores obtenido - dependerá del número de elementos y la convergencia no puede tratarse en la misma forma esquematizada arriba para el método de -- Ritz.

## 4.2- PLANTEO COMUN

Bajo un planteamiento común a los métodos de R.Ritz y E. Finitos ,formularemos el problema, utilizando la nomenclatura vectorial y funciones adimensionales : $U = u/l_1$ , $Z = z/l_1$ donde $l_1$ es el largo del dominio (dimensional)

Sea entonces el dominio de definición del problema el intervalo [0-1]

Adoptaremos para U y $\varphi$ las siguientes expresiones:

$$U(Z) = \underset{\sim}{a}_N^T \underset{\sim}{\chi}_N(Z) \tag{4.3}$$

$$\varphi(Z) = \underset{\sim}{b}_N^T \underset{\sim}{\phi}_N(Z) \tag{4.4}$$

Podemos derivar(4.3) y (4.4) las veces que sea necesario, teniendo en cuenta que $\underset{\sim}{a}_N$ y $\underset{\sim}{b}_N$ son parámetros. La N indica 'nodal'. (Extremo de subdominios)

$$U'(Z) = \underset{\sim}{a}_N^T \underset{\sim}{\chi}'_N(Z) \tag{4.3'}$$

$$U''(Z) = \underset{\sim}{a}_N^T \underset{\sim}{\chi}''_N(Z) \tag{4.3''}$$

$$\varphi'(Z) = \underset{\sim}{b}_N^T . \underset{\sim}{\phi}'_N(Z) \tag{4.4'}$$

$$\varphi''(Z) = \underset{\sim}{b}_N^T . \underset{\sim}{\phi}''_N(Z) \tag{4.4''}$$

Reemplazando (4.3,3',3") y (4.4,4',4") en el funcional (2.15), se transforma el problema variacional en otro del cálculo diferencial , que consiste en hallar la combinación lineal de las funciones dados que lleven el problema a ser estacionario:

$$I(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \frac{1}{2}\omega^2\int_0^1\Big\{ m l_1^3 \underset{\sim}{a}_N^T \underset{\sim}{\chi}_N \underset{\sim}{\chi}_N^T \underset{\sim}{a}_N + m k^2 l_1 \underset{\sim}{b}_N^T \underset{\sim}{\phi}_N \underset{\sim}{\phi}_N^T \underset{\sim}{b}_N +$$

$$+ 2 m y_0 l_1^2 \underset{\sim}{a}_N \underset{\sim}{\chi}_N \underset{\sim}{\phi}_N \underset{\sim}{b}_N\Big\} dZ - \frac{1}{2}\int_0^1\Big\{\frac{EI_y}{l_1} \underset{\sim}{a}_N^T \underset{\sim}{\chi}_N'' \underset{\sim}{\chi}_N''^T \underset{\sim}{a}_N +$$

$$+ \underset{\sim}{b}_N\Big[\frac{C}{l_1} \underset{\sim}{\phi}_N' \underset{\sim}{\phi}_N'^T + \frac{C_1}{l_1^3} \underset{\sim}{\phi}_N'' \underset{\sim}{\phi}_N''^T\Big]\underset{\sim}{b}_N\Big\} dZ + P l_1 \int_0^{Z_p}(Z_p - Z).$$

$$.\underset{\sim}{a}_N \underset{\sim}{\chi}_N'' \underset{\sim}{\phi}_N^T \underset{\sim}{b}_N . dZ - \frac{1}{2}\underset{\sim}{a}_N^T\Big[k_1 l_1^2 \underset{\sim}{\chi}_N \underset{\sim}{\chi}_N^T\Big|_{Z_1} + k_3 \underset{\sim}{\chi}_N' \underset{\sim}{\chi}_N'^T\Big|_{Z_3}\Big]\underset{\sim}{a}_N$$

$$- \frac{1}{2} \underset{\sim}{b}_N^T\Big[k_2 \underset{\sim}{\phi}_N \underset{\sim}{\phi}_N^T\Big|_{Z_2} + \frac{k_4}{l_1^2} \underset{\sim}{\phi}_N' \underset{\sim}{\phi}_N'^T\Big|_{Z_4} - P \underset{\sim}{\phi}_N \underset{\sim}{\phi}_N^T\Big|_{Z_p}\Big]\underset{\sim}{b}_N \qquad (4.5)$$

Derivando (4.5) respecto de $\underset{\sim}{a}_N$ y de $\underset{\sim}{b}_N$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial I(\underset{\sim}{a}_N,\underset{\sim}{b}_N)}{\partial \underset{\sim}{a}_N} = \omega^2\int_0^1 m l_1^3 \underset{\sim}{\chi}_N \underset{\sim}{\chi}_N^T dZ\, \underset{\sim}{a}_N + \omega^2\int_0^1 m y_0 l_1^2 \underset{\sim}{\chi} . \underset{\sim}{\phi}^T dZ . \underset{\sim}{b}_N -$$

$$-\Big\{\int_0^1 \frac{EI_y}{l_1} \underset{\sim}{\chi}_N'' . \underset{\sim}{\chi}_N''^T dZ + k_1 l_1^2 \underset{\sim}{\chi}_N \underset{\sim}{\chi}_N^T\Big|_{Z_1} + k_3 \underset{\sim}{\chi}_N' \underset{\sim}{\chi}_N'^T\Big|_{Z_3}\Big\} \underset{\sim}{a}_N$$

$$+ P l_1 \int_0^{Z_p}(Z_p - Z)\, \underset{\sim}{\chi}_N'' . \underset{\sim}{\phi}_N^T . dZ . \underset{\sim}{b}_N = 0 \qquad (4.6)$$

$$\frac{\partial I(\underset{\sim}{a}_N,\underset{\sim}{b}_N)}{\partial \underset{\sim}{b}_N} = \omega^2\int_0^1 m y_0 l_1^2 \underset{\sim}{\phi}_N \underset{\sim}{\chi}^T . dZ\, \underset{\sim}{a}_N + \omega^2\int_0^1 m k^2 l_1^2 \underset{\sim}{\phi}_N \underset{\sim}{\phi}_N^T dZ . \underset{\sim}{b}_N -$$

$$+ P l_1 \int_0^{Z_p}(Z_p - Z)\, \underset{\sim}{\phi}_N \underset{\sim}{\chi}_N''^T . dZ . \underset{\sim}{a}_N - \Big\{\int_0^1\Big( \frac{C}{l_1} \underset{\sim}{\phi}_N' \underset{\sim}{\phi}_N'^T + \frac{C_1}{l_1^3} \underset{\sim}{\phi}_N'' \underset{\sim}{\phi}_N'' dZ$$

$$+ k_2 \underset{\sim}{\phi}_N \underset{\sim}{\phi}_N^T\Big|_{Z_2} + \frac{k_4}{l_1^2} \underset{\sim}{\phi}_N' \underset{\sim}{\phi}_N'^T\Big|_{Z_4} - P \underset{\sim}{\phi}_N \underset{\sim}{\phi}_N^T\Big|_{Z_p}\Big\} \underset{\sim}{b}_N = 0 \qquad (4.7)$$

Reduciremos (4.6) y (4.7) a la forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{\sim}{a}_n \\ \underset{\sim}{b}_n \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} \\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{\sim}{a}_n \\ \underset{\sim}{b}_n \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

ó

$$\tilde{K} . \underset{\sim}{c} = \omega^2 . \tilde{m} . \underset{\sim}{c} \tag{4.9}$$

con

$$\underset{\sim}{c}^T = \{ \underset{\sim}{a}_n^T \quad \underset{\sim}{b}_n^T \}$$

Que es la ecuación del sistema generalizado de autovalores ya anunciada en capitulo 1

## 4.3- METODO DE RITZ

El dominio de definición es el largo total de la viga y en éste caso $N=1$ y $l_1 = l$

A partir de las ecuaciones anteriores podemos deducir los términos genéricos de las matrices $k_{ij}$ y $m_{ij}$, adoptando para $\underset{\sim}{\chi}$ y $\underset{\sim}{\phi}$ la expansión polinómica que satisface la condición de contorno de empotramiento en el origen.

$$\underset{\sim}{\chi}^T = \left\{ Z^2 \;\; Z^3 \ldots \;\; Z^n \right\} \tag{4.10}$$

$$\underset{\sim}{\phi}^T = \left\{ Z^2 \;\; Z^3 \ldots \;\; Z^m \right\} \tag{4.11}$$

Podemos tomar $n \neq m$ para aproximar mejor a la solución.-

Los términos genéricos serán.

$$k_{ij}^{11} = \int_0^1 \frac{E I_y}{l} \chi_i'' \chi_j'' \, dZ + k_1 l^2 \chi_i \chi_j \Big|_{Z_1} + k_3 \chi_i' \chi_j' \Big|_{Z_3} \; ; \; i,j=1,2,\ldots n \tag{4.12}$$

$$k_{ji}^{21} = k_{ij}^{12} = -P \int_0^{Z_p} l (Z_p - Z) \chi_i'' \phi_j \, dZ \; ; \; i=1,2,\ldots n \; ; \; j=1,2,\ldots m \tag{4.13}$$

$$k_{ij}^{22} = \int_0^1 \left( \frac{C}{l} \phi_i' \phi_j' + \frac{C_1}{l^3} \phi_i'' \phi_j'' \right) dZ + k_2 \phi_i \phi_j \Big|_{Z_2} +$$

$$+ k_4 \phi_i' \phi_j' \Big|_{Z_4} - P \phi_i \phi_j \Big|_{Z_p} \qquad i,j=1,2,\ldots m \tag{4.14}$$

$$m_{ij}^{11} = \int_0^1 m l^3 \chi_i \chi_j \, dZ \qquad i,j=1,2,\ldots n \tag{4.15}$$

$$m_{ji}^{21} = m_{ij}^{12} = \int_0^1 m y_0 l^2 \chi_i \phi_j \, dZ \; ; \; i=1,2,\ldots n \; ; \; j=1,2,\ldots m \tag{4.16}$$

$$m_{ij}^{22} = \int_0^1 m\, k^2\, l\, \phi_i\, \phi_j\, d\xi \quad ; \qquad i,j = 1,2,\dots m \qquad (4.17)$$

Para condiciones de contorno diferentes de las plantea das, sería necesario adoptar expansiones del tipo (4.10) y (4.11) de modo que satisfagan las nuevas condiciones, o bien formular - el método en una forma más general, ya sea relajando las condi-- ciones de contorno[11] o formulando el problema de modo de poder- imponer tales condiciones[12].

En caso de discontinuidad en el interior del dominio ( diferentes materiales, diferentes expesores, etc) se impone la - formulación del funcional relajado en las condiciones de contor- no, de modo se satisfagan las condiciones de Wiertrass - Erdmann (11)

## 4.4- METODO DE ELEMENTOS FINITOS

El dominio de definición en la formulación común es el largo del elemento, $l_j = l_1$ y en este caso $N = 2$

Hipótesis de partida [7]:

a) Se divide el dominio de definición (total) en subdominios.

b) Se supone que los extremos de los elementos pueden interconectarse, tomando los desplazamientos generalizados en los extremos como incognitas del problema, en el grado que sea necesario en el funcional.

c) Se admite que el desplazamiento generalizado en el interior de un elemento puede definirse unívocamente función de las incógnitas nodales.

Para este problema, interesa asegurar la continuidad en las funciones y en sus derivadas primeras (un grado menor de la que aparece en el funcional) con el objeto de poder interconectar elementos.-

Entonces las expansiones (4.10) y (4.11) están limitadas, y las incógnitas pasan a ser ahora las siguientes:

$$\underset{\sim}{a}_N^T = \{ U_N \;\; U'_N \} \tag{4.18}$$

$$\underset{\sim}{b}_N^T = \{ \varphi_N \;\; \varphi'_N \} \tag{4.19}$$

entonces:

$$U(Z) = \underset{\sim}{U}_N^{sT} \cdot \underset{\sim}{\chi}_N^s = \{ U_1 \;\; U'_1 \;\; U_2 \;\; U'_2 \} \begin{bmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_1^1 \\ \chi_2^0 \\ \chi_2^1 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$\varphi(Z) = \underset{\sim}{\varphi}_N^{sT} \cdot \underset{\sim}{\phi}_N^{s} = \left\{ \varphi_1 \;\; \varphi_1' \;\; \varphi_2 \;\; \varphi_2' \right\} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_1^1 \\ \phi_2^0 \\ \phi_2^1 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Las funciones $\underset{\sim}{\chi}_N^s$ y $\underset{\sim}{\phi}_N^r$ se designan funciones de interpolación , y pueden ser determinadas a partir de (4.20) y (4.21) admitiendo un polinomio de $3^{er}$ grado para las funciones U y $\varphi$, que adquieren los valores nodales para Z = 0 ó 1 .

Llevando a cabo tal proceso se llega a los polinomios de Hermite de $3^{er}$ grado para U y $\varphi$.

$$\underset{\sim}{\chi}_N = \underset{\sim}{\phi}_N = \underset{\sim}{N}_N = \begin{bmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_1^1 \\ \chi_2^0 \\ \chi_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_1^1 \\ \phi_2^0 \\ \phi_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^0 \\ N_1^1 \\ N_2^0 \\ N_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3Z^2+2Z^3 \\ Z-2Z^2+Z^3 \\ 3Z^2-2Z^3 \\ -Z^2+Z^3 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

De las (4.6) y (4.7) observamos que son necesarios formar los productos $\underset{\sim}{N}_N^s \cdot \underset{\sim}{N}_N^{rT}$ , donde s, r indican derivada.

Genéricamente se pueden formar las matrices $\tilde{K}ij$ y $\tilde{M}ij$ con el siguiente producto: (i,j=1,2)

$$\underset{\sim}{N}^s \cdot \underset{\sim}{N}^{rT} = \begin{bmatrix} N_1^{0s} N_1^{0r} & N_1^{0s} N_1^{1r} & N_1^{0s} N_2^{0r} & N_1^{0s} N_2^{1r} \\ N_1^{1s} N_1^{0r} & N_1^{1s} N_1^{1r} & N_1^{1s} N_2^{0r} & N_1^{1s} N_2^{1r} \\ N_2^{0s} N_1^{0r} & N_2^{0s} N_1^{1r} & N_2^{0s} N_2^{0} & N_2^{0s} N_2^{1r} \\ N_2^{1s} N_1^{0r} & N_2^{1s} N_1^{1r} & N_2^{1s} N_2^{0} & N_2^{1s} N_2^{1r} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Obtenidas las $\tilde{K}$ y $\tilde{M}$, se procede al reordenamiento de términos de acuerdo a la disposición de las incógnitas por nudos, con el objeto de llevar a cabo el ensamble de elementos.

Por último es necesario imponer condiciones de contorno al problema, anulando términos en filas y columnas de las matrices, $\tilde{K}$ y $\tilde{M}$ colocando luego el valor 1 en la diagonal principal de la matriz $\tilde{K}$, en las filas y columnas que correspondan a las imposiciones.-

# C A P I T U L O V

# ESTUDIO EXPERIMENTAL

## 5.1- RESEÑA

Como se expuso en cap. III, de acuerdo al tipo de fenómeno que se tenga para el problema particular, (fig.3-9 a 3-12) la influencia de las imperfecciones impide obtener la curva de los caminos de equilibrio de la extructura perfecta y por lo -- tanto, la carga crítica.-

Existen dos alternativas para la obtención de la misma por vía experimental:

a).Mediante el trazado de los gráficos mostrados en - fig.(3-9) a (3-12)

b).Mediante el gráfico de Southwell[2],[3]

El (a) permite además obtener el comportamiento post-crítico real de la pieza, para las imperfecciones de la misma.

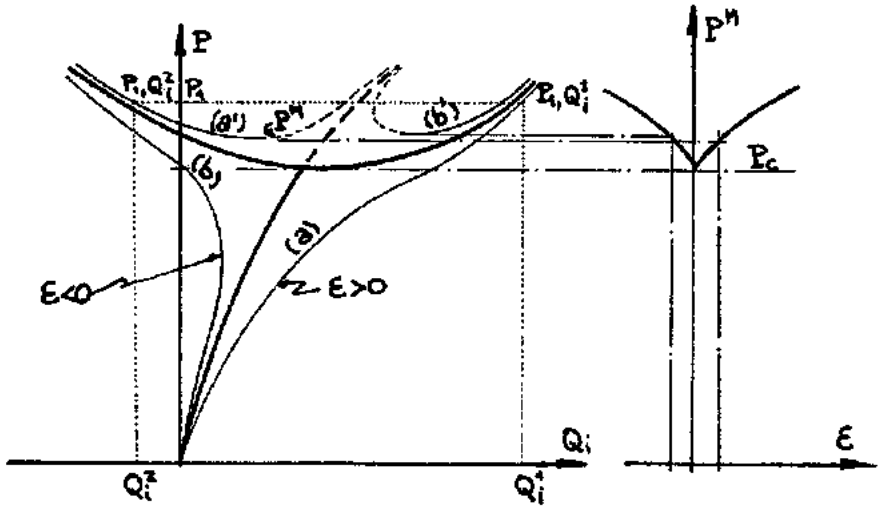
Para el caso en estudio de acuerdo a la fig. (3-11) , es necesario utilizar el concepto de camino complementario del - camino de equilibrio, que sería el de equilibrio estable para - ciertos valores de carga y deformaciones que la estructura sigue en el caso que el experimentador fuerce la estructura a pasar a tal estado.-

## 5.2- METODOS UTILIZADOS

### a. Camino complementario

Supongamos tener una estructura imperfecta,con parámetro de imperfección definido por $\varepsilon$ , que puede provenir de imperfecciones geométricas, defectos de material, error en el centrado de cargas, etc.

La estructura al ser cargada recorre el camino (a)(fig 5-1) del caso en estudio (caso $\varepsilon>0$)




(fig 5-1)

Si a un cierto estado ($P_1$ , $Q_i^1$) se fuerza a la estructura a pasar tal estado curva (a) al estado ($P_1$ , $Q_i^2$) curva (a') que es estable a ese nivel de cargas, cuando se produce la descarga se recorre la curva a' (camino complementario) que es estable hasta un determinado nivel de carga ($P^M$) correspondiente a la imperfección actual.

Si se descarga aún más, la estructura salta de la curva (a') a la (a) que es estable, recorriendo ésta por el mismo camino que al cargar.-

Tomando varias imperfecciones y determinando para cada una de ellas el $P^M$ correspondiente, se puede trazae el gráfico - $P^M - \varepsilon$ (fig5-1) cuyo vértice agudo define la carga crítica.[*]

El comportamiento postcrítico se pone de manifiesto de acuerdo a la familia de curvas genéricas (a) y (b) obtenidas para diversos valores de $\varepsilon$.

La influencia de las imperfecciones produce efectos similares (curvas del mismo tipo) cuando ellas actúan individualmente [2] siendo válido entonces observar el comportamiento postcrítico para las imperfecciones combinadas.

Un parámetro $\varepsilon$ de imperfección conveniente puede ser - la exentricidad en la carga.-

b. Gráfico de Southwell.

Un método para determinar la carga crítica de una estructura que tiene imperfecciones fué sugerido por Southwell.

Suponiendo que $\varepsilon$ englobe todas las imperfecciones, y - estando en el rango de deformaciones lineales, se puede observar que se cumple la ecuación aproximada[2] $\delta = \varepsilon/(1-p)$ (5.1)

Donde $\delta$ es un parámetro de deformación de la estructura perfecta; y $p = P/P_c$

Designando por $\delta^*$ al parámetro de deformación que se mide a partir del estado descargado imperfecto:

---

[*] esta curva puede determinarse teoricamente, ver referencias (2), (8)

$$\delta = \delta^* + \varepsilon$$

$$\delta^* + \varepsilon = \varepsilon/(1-p) \therefore \delta^* = \varepsilon . p/(1-p)$$

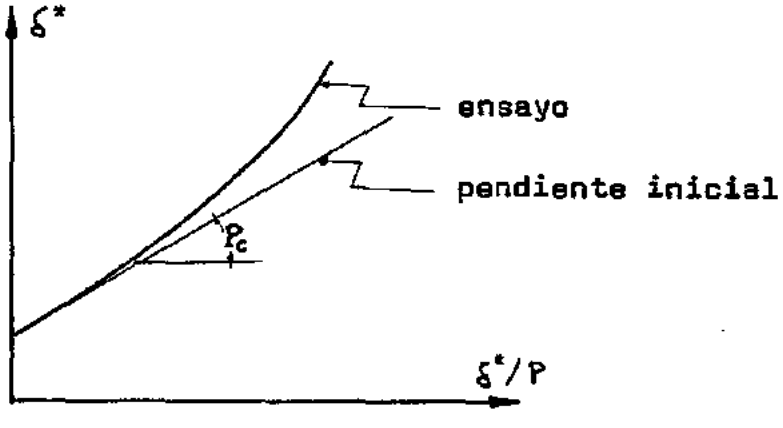
$$(1-p)\delta^* = \varepsilon . p$$

$$\delta^* = p . \delta^* + \varepsilon . p$$

$$\delta^* = p . \delta^* - \varepsilon \quad ; \quad \text{con} \quad p = P/P_c$$

$$\delta^* = P_c \left(\frac{\delta^*}{P}\right) - \varepsilon \qquad (5.2)$$

La (5.2) resulta ser la ecuación de una recta de pendiente igual a $P_c$, y que puede obtenerse a partir de los resultados de los ensayos, con el $\delta^*$ medido para el correspondiente P , resultando la recta de pendiente inicial en el gráfico no lineal $\delta^*$- $\delta^*/P$ .- El valor de la ordenada donde ella corta al eje 0- $\delta^*$ (fig. 5-2) será el valor de la imperfecciónm equivalente combinada $\varepsilon$ .-




(fig.5-2)

Para la estructura estudiada, debido a su poca deformabilidad al inicio del ensayo e impresición en los dispositivos de lectura para tales deformaciones, se hace difícil obtener valores exactos de $\delta^*$ al comienzo del mismo (zona lineal) - por lo que el presente método no es aplicable, dando valores en general mayores que los de $P_c$, siendo mas aplicable en ensayos en que la pieza es más deformable.-

## 5.3- ENSAYOS

Se llevaron a cabo ensayos sobre vigas de acero de sección rectangular, dispuestas en forma aislada o vinculadas entre ellas tal como se indica a continuación en 'casos ensayados', obteniéndose resultados de deflección del eje de la viga y de rotación para la sección extrema, En todos los casos se aplicó una carga concentrada en el extremo de una de las vigas.-

Material usado: acero

Características: módulo de elasticidad $E = 2,1 \; 10^5 \; tn/dm^2$

" " Poisson $\nu = 0,3$

densidad $\rho = 0,795 \; 10^{-4} \frac{tn.seg^2}{dm^4}$

Dimensiones de las vigas.

| Viga Nº | longitud l (dm) | altura h (dm) | espesor t (dm) | $I_y$ ($dm^4.10^{-6}$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,42 | 0,810 | 0,0157 | 0,2760 |
| 2 | 5,42 | 0,810 | 0,0155 | 0,2559 |
| 3 | 5,42 | 0,795 | 0,0157 | 0,2709 |
| 4 | 5,25 | 1,250 | 0,0152 | 0,3658 |

Denominaciones:

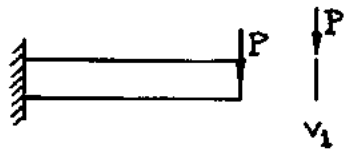
$h_1$ : desplazamiento en vertical del punto de aplicación de P respecto al centro de cizallamiento.-

$z_p$ : posición de P

$z_i$ : posición de los resortes $k_i$

Casos ensayados

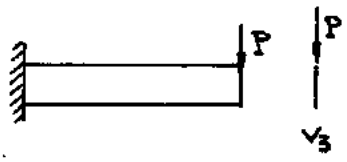
Ensayo Nº 1: Viga aislada, con carga casi centrada




$h_1$= 0,07dm

$z_p$= 5,50 "

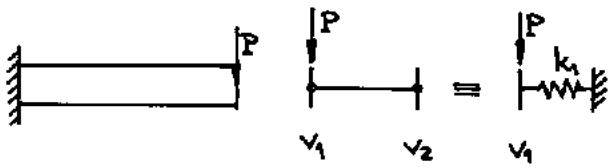
Ensayo Nº 2: Viga aislada, con carga desplazada hacia arriba del centro de cizallamiento.-




$h_1$= 0,37dm

$z_p$= 5,48 "

Ensayo Nº 3: Dos vigas vinculadas al centro con elemento total-- mente articulado, efecto único de $k_1$ carga casi centrada.-



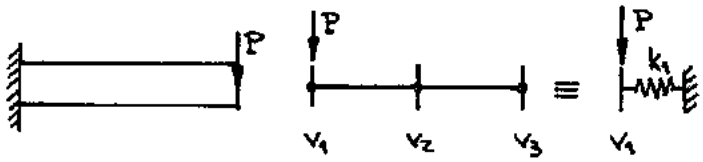

$h_1$= 0,07dm

$z_p$= 5,52 "

$z_1$= 5,46 "

$k_1$= 0,969 $10^{-3}\frac{tn}{dm}$

Ensayo Nº 4: idem ensayo Nº 3, con tres vigas vinculadas.-




$h_1$= 0,07dm

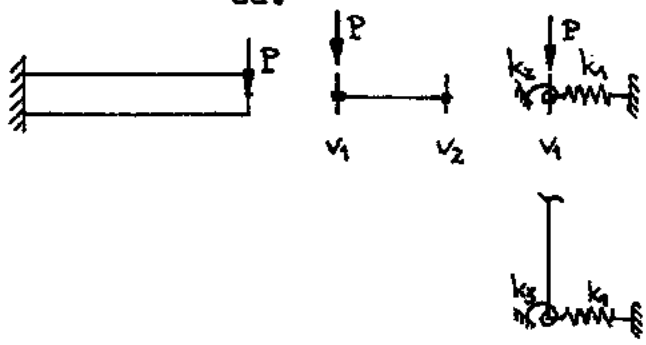
$z_p$= 5,52 "

$z_1$= 5,46 "

$k_1$= 2,039 $10^{-3}\frac{tn}{dm}$

Ensayo Nº 5: Dos vigas vinculadas al centro con elemento de empotramiento elástico total en un extremo y articulado

en el otro, efectos de $k_1$,$k_2$ y $k_3$, carga casi centrada.-




$h_1$= 0,07dm

$z_p$= 5,52 "

$z_1$=$z_2$= 5,46 "

$k_1$= 0,969 $10^{-3}$ $\frac{tn}{dm}$

$k_2$=$k_3$= 0,0617 tn.dm

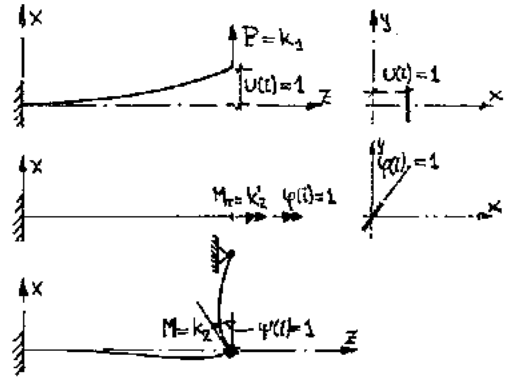
<u>Ensayo Nº6:</u> Idem ensayo Nº1 realizado sobre viga Nº4,que inicialmente tenía imperfecciones notables en la geometría.

Las fórmulas utilizadas para el cálculo de las $k_i$ son las siguientes(24)

$k_1$= $3EI_y$ /$l^3$

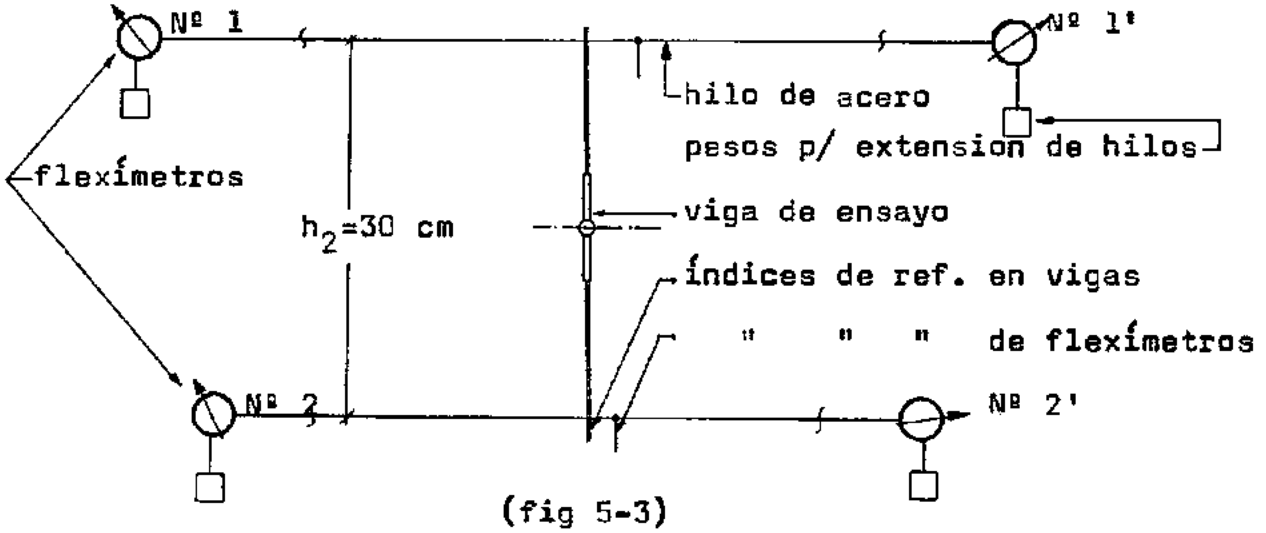
$k_2'$= GJ /l

$k_2$= $k_3$= $3EI_y$ /l



Descripción de los aparatos:

Con los materiales y casos previstos en hoja anterior se llevaron a cabo los ensayos de inestabilidad, empotrando las vigas en un cuadro de perfiles especialmente diseñado (fotografía Nº 1 ). En el mismo, se amarraron brazos de fijación de flexímetros con los que se tomaron lecturas de desplazamientos horizontales. Se utilizaron flexímetros de polea, de presición de 0,1mm la que se vió aumentada en las lecturas por la extensión de las referencias de las vigas (fig 5-3), (fotografías).

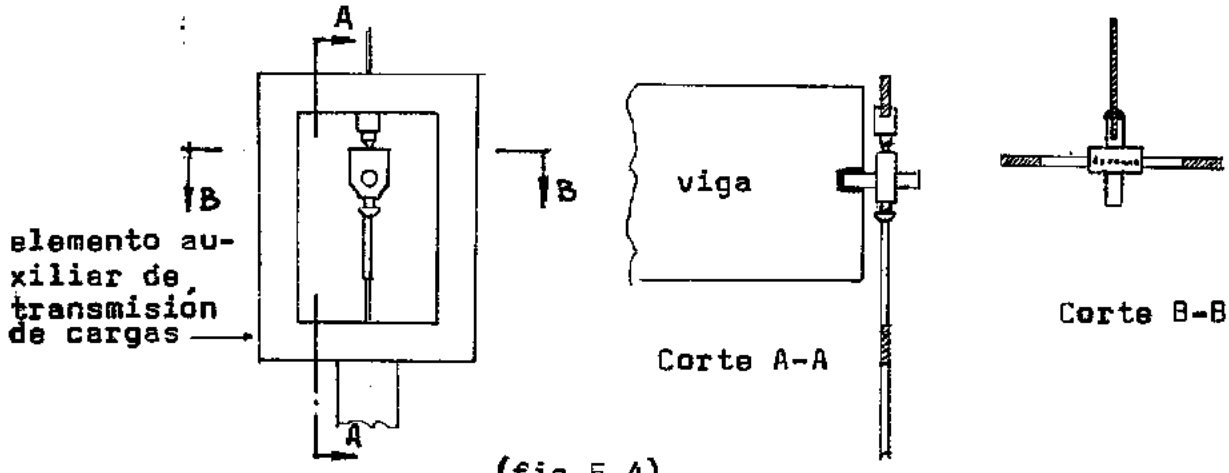



(fig 5-3)

Se independizó el dispositivo de lectura al de ensayo (vigas). Para lograr mejor presición en la medida de los desplazamientos, se utilizó un catetómetro (óptico) para ajustar los índices de referencia (flexímetros) con los índices de referencia de las vigas, asegurando por lo menos la presición mencionada.

Para las cargas se utilizaron pesos conocidos, logrando que las mismas fuesen concentradas, mediante un dispositivo cónico que asienta en una pieza que disponía de puntos (o marcas)-- que permite además variar la exentricidad en la aplicación de las

mismas (fig 5-4)




(fig 5-4)

En las fotografías se muestran los dispositivos, disposición de las mismas y figuras que adoptan las vigas al ser ensayadas (ensyos Nº2y5)

<u>Descripción del ensayo</u>: se aplican pesos conocidos y se miden deformaciones horizontales en flexímetros Nº 1 y Nº2(fig 5-3), pudiendo en base a las diferencias de lecturas respecto de la inicial, conocer los desplazamientos ($L^i$) de los índices de las vigas (encima y debajo). Para el extremo de la viga entonces se calcula

$$u(1) = [L^{(1)} + L^{(2)}]/2$$

$$\varphi(1) = \text{arc.tg}\ (L^{(1)} - L^{(2)})/h_2$$

para los diversos ensayos se trazaron únicamente los gráficos de u(1) pues es indicativo del fenómeno de inestabilidad.-

$h_2$= distancia (vertical) entre índices.

Fotografía Nº1. muestra el cuadro de perfiles que sirve de sostén a vigas y brazos de fijación de flexímetros, con la disposición de éstos (dos de ellos se utilizarosn para tomar medidas, mientras los otros dos sólo complementan con el objeto de lograr un desplazamiento correcto de los índices de flexímetros).

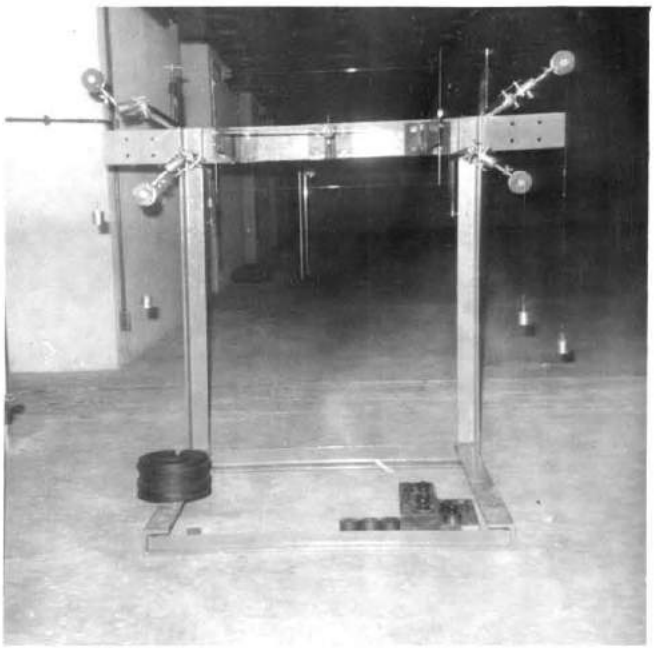
Se observan los pesos utilizados en el ensayo.-

Fotografía Nº2. muestra el elemento auxiliar de trasmisión de carga(a través del cono de asiento) y la figura de deformación del ensayo Nº2. Atrás, el catetómetro óptico utilizado.-

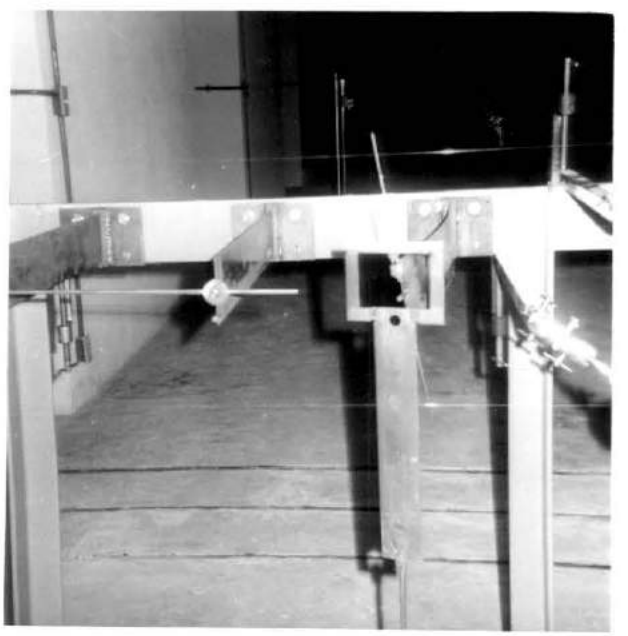
Fotografía Nº3. otra vista del ensayo Nº2, mostrando el frente de flexímetros, y el plato de cargas.

Fotografía Nº4. muestra los índices de referencias de flexímetros y la figura de deformación del ensayo Nº5

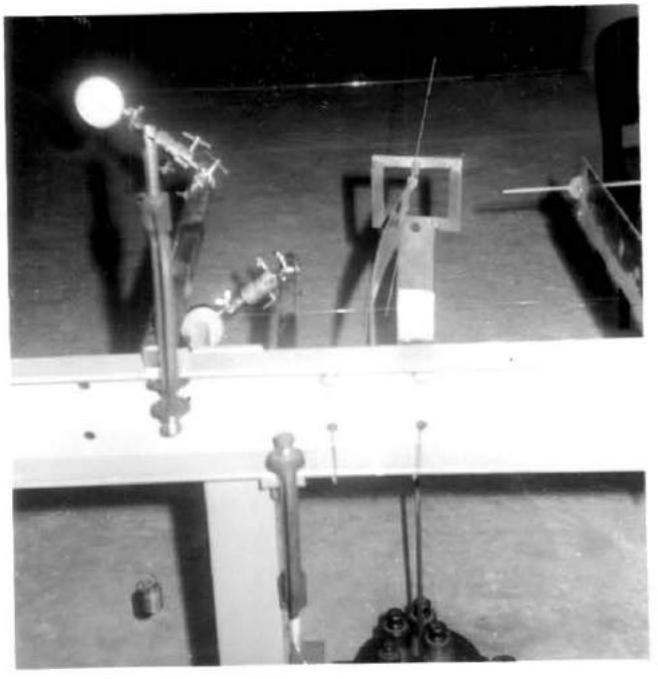
Fotografía Nº5. se vé en ella la figura de deformación del ensayo Nº4, flexímetros, catetómetro, pesos.-



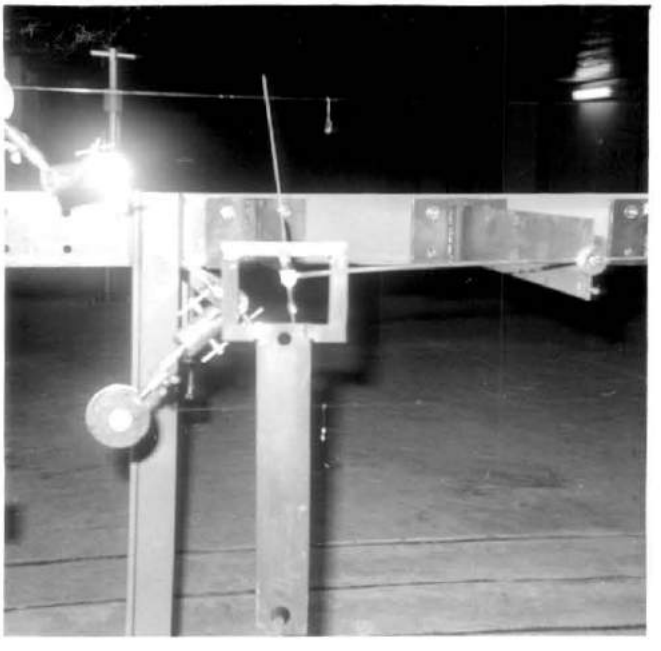
fotografía Nº 1



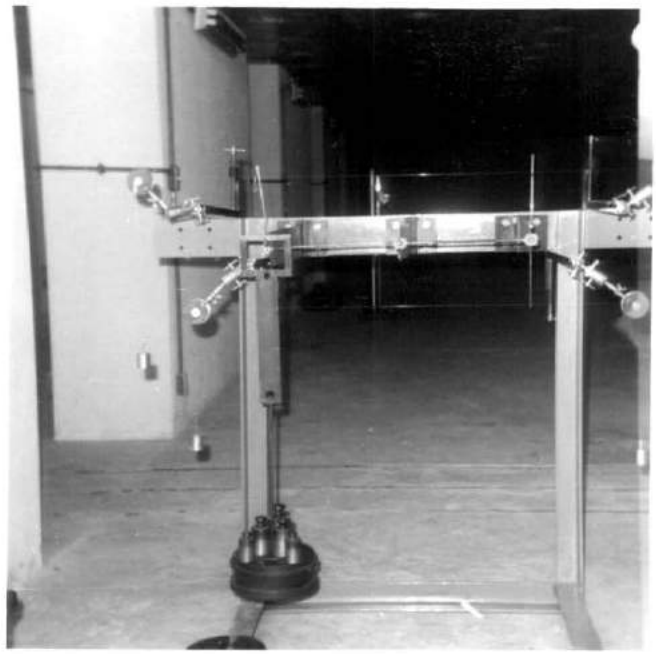
fotografía Nº 2



fotografía Nº 3



fotografía Nº 4



fotografía Nº 5

# C A P I T U L O VI

# ANALISIS DE RESULTADOS

## 6.1.- COMPARACION DE RESULTADOS

Se utilizan los métodos de Ritz y de E. Finitos al caso de una viga de. solución teórica conocida, analizando con ámbos métodos la convergencia con respecto al valor teórico exacto.

En figura 6-1 se dan resultados de la aplicación del primero al caso de la viga en voladizo[3], graficando: Carga crítica y error versus número total de términos en las expansiones (n+m). Se trazaron las curvas de variación de $P_c$ para n>m , n=m y n<m y también cuando se mantiene constante el número de términos en las expansiones para u (n) y se varía el para $\varphi$ (m), notando que es necesario expandir $\varphi$ con un número de términos mayor que para u, siendo que pára éste último es suficiente utilizar n=4 ó 5, con las que para (n+m)> 15 se tiene se tiene un error menor que el 1,5%, siempre por valores superiores al exacto.-

El mismo caso fué analizado utilizando el método de E. Finitos, mostrándose resultados en figura 6-3 en el gráfico : carga crítica-número de elementos. Se limitó el número de elementos a 15, notando que para tal límite se difiere del valor exacto en un 1,57%

Se puede decir que los resultados fueron exelentes para ambos métodos, aunque se esperaba convergencia con menor número de divisiones para el método de E. Finitos.

En figura 6-2 se dan resultados de la aplicación del

Método de Ritz para el caso de la viga en voladizo y restricción lateral, dada por un resorte equivalente a una unión articulada- a otra viga de iguales características, con resultados similares a las de figura 6-1.-

En figuras 6-4 a 6-9 se muestran los resultados experimentales obtenidos de los 6 casos básicos propuestos(5.3) y que se comparan con la teoría aquí desarrollada. En ellos se trazaron las curvas de carga- deformación del extremo (a) y menor - carga de salto-exentricidad (b), contentándonos con los gráficos respecto de sólo uno de los parámetros de deformación: u(l),siendo que para el otro:$\varphi(l)$ son completamente similares, sobre todo que el valor de $P_c$ se obtiene independientemente del parámetro - de deformación utilizado.-

En las figuras se observa el comportamiento postcrítico para cada caso, notando que la situación más desfavorable - se obtiene al desplazar verticalmente la carga respecto al cen-- tro de cizallamiento (fig 6-5), siguiendo el de la viga aislada- (fig 6-4); las vinculaciones a otras vigas producen mejoría en - el comportamiento postcrítico, mayor cuanto mayores sean los valores de la rigidez de los resortes, además que el valor de la-- carga crítica aumenta.-

La figura 6-9 muestra el caso de la viga aislada - que contaba con deformaciones notables, también con resultados - exelentes.

La asimetría que se observa en fig 6-8 se debe a que aún siendo el esquema inicial (descargado) simétrico, al cargar -

la viga el punto de aplicación de la carga baja, y siendo que e-xiste una restricción en le torsión de la viga, induce a una rotación de la misma en el extremo tanto mayor cuanto mayores carga - (mayor descenso de la carga) que actúa siempre en el mismo sentido, aún de producirse deformaciones transversales grandes (fig 6-10), con $|\varphi_o^+|<|\varphi_o^-|$, donde $\varphi_o^\pm$ significa el ángulo de rotación del - extremo, inducido para cargas correspondientes a +e ó -e

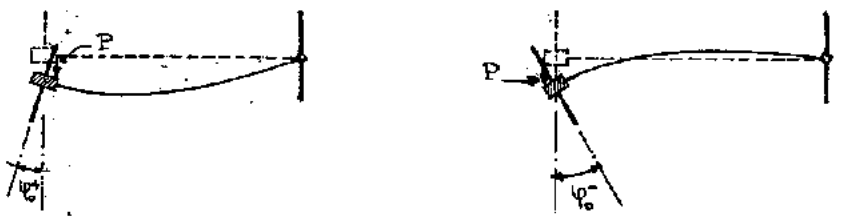



fig 6-10

A pesar de la asimetría, los resultados obtenidos ( teórico y experimental) son coincidentes

Se da a continuación una tabla de comparación de resultados de los métodos de Ritz y experimental, en cuanto que para E. Finitos se dá sólo para el 1$^{er}$ caso ensayado. Se refirió el error al valor obtenido en los ensayos.

siendo: $P_c^T$ = carga crítica teórica según método.

$P_c^E$ = " " según ensayo.

Método de Ritz

| Ensayo Nº | n | m | $P_c^T$ | $P_c^E$ | Error(%) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 16 | 9,04 | 9,00 | 0,44 |
| " | 5 | 15 | " | " | " |
| 2 | 4 | 16 | 8,42 | 8,30 | 1,45 |
| " | 5 | 15 | 8,48 | " | 2,17 |
| 3 | 4 | 16 | 11,00 | 11,00 | 0,00 |
| " | 5 | 15 | 11,05 | " | 0,45 |
| 4 | 4 | 16 | 11,94 | 11,83 | 0,93 |
| " | 5 | 15 | 11,91 | " | 0,68 |
| 5 | 5 | 10 | 19,87 | 20,00 | 0,65 |
| " | 5 | 15 | 19,86 | " | 0,70 |
| 6 | 4 | 16 | 14,46 | 14,20 | 1,84 |
| " | 5 | 15 | 14,45 | " | 1,76 |

Método de Elementos Finitos

| Ensayo Nº | Nº de elemen. | $P_c^T$ | $P_c^E$ | Error(%) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 9,13 | 9,00 | 1,44 |
| " | 15 | 9,07 | " | 0,78 |

## 6.2.- CONCLUSIONES

A partir de la tabla dada en 6.1, se observa la coincidencia de resultados teóricos y experimentales, con lo que se deduce que la teoría es aplicable, y pueden así estudiarse con los métodos propuestos casos más complicados de vinculación de vigas en voladizo ó de otras formas de restricciones (Apéndice 4). Bastará simular los efectos de vinculación por resortes a flexión torsión y desplazamiento. También se aplica a casos en que más de una viga está cargada y cargamentos proporcionales en la misma viga.-

A pesar que el método dinámico aquí utilizado no es el ideal a aplicar al problema propuesto (para el caso conservativo es $w=0$ para la condición de $P_c$, pudiendo entonces resolver el problema de autovalores y autovectores con respecto de P, ecuación (4.5) con $w^2=0$, siendo el menor autovalor el $P_c$), se desarrolló el mismo con miras a la aplicación a casos no conservativos, bastando modificar las matrices $\tilde{K}$,$\tilde{M}$ y la corrección de $\tilde{K}$ debido a efectos de P.-

Figura 6-1

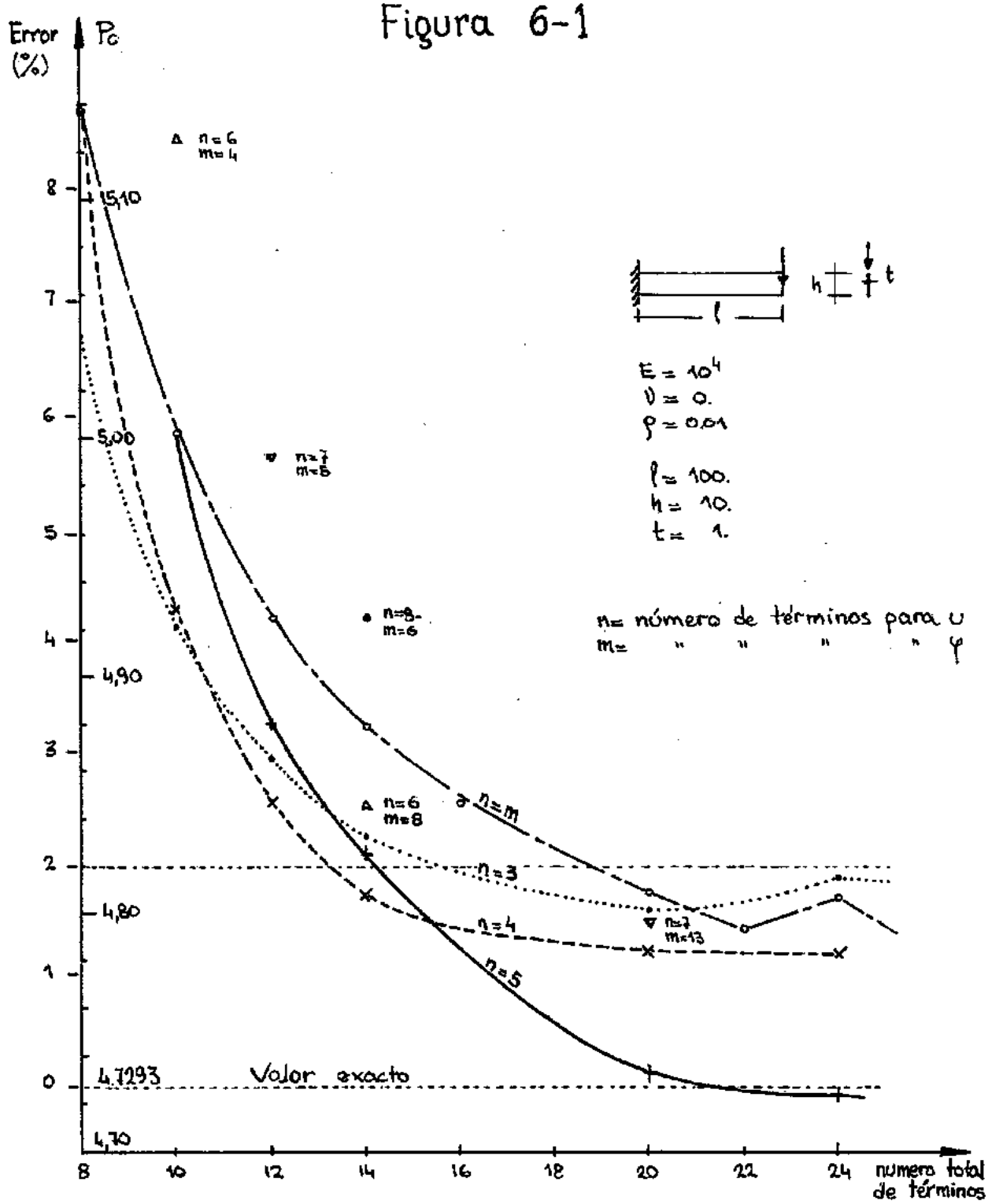
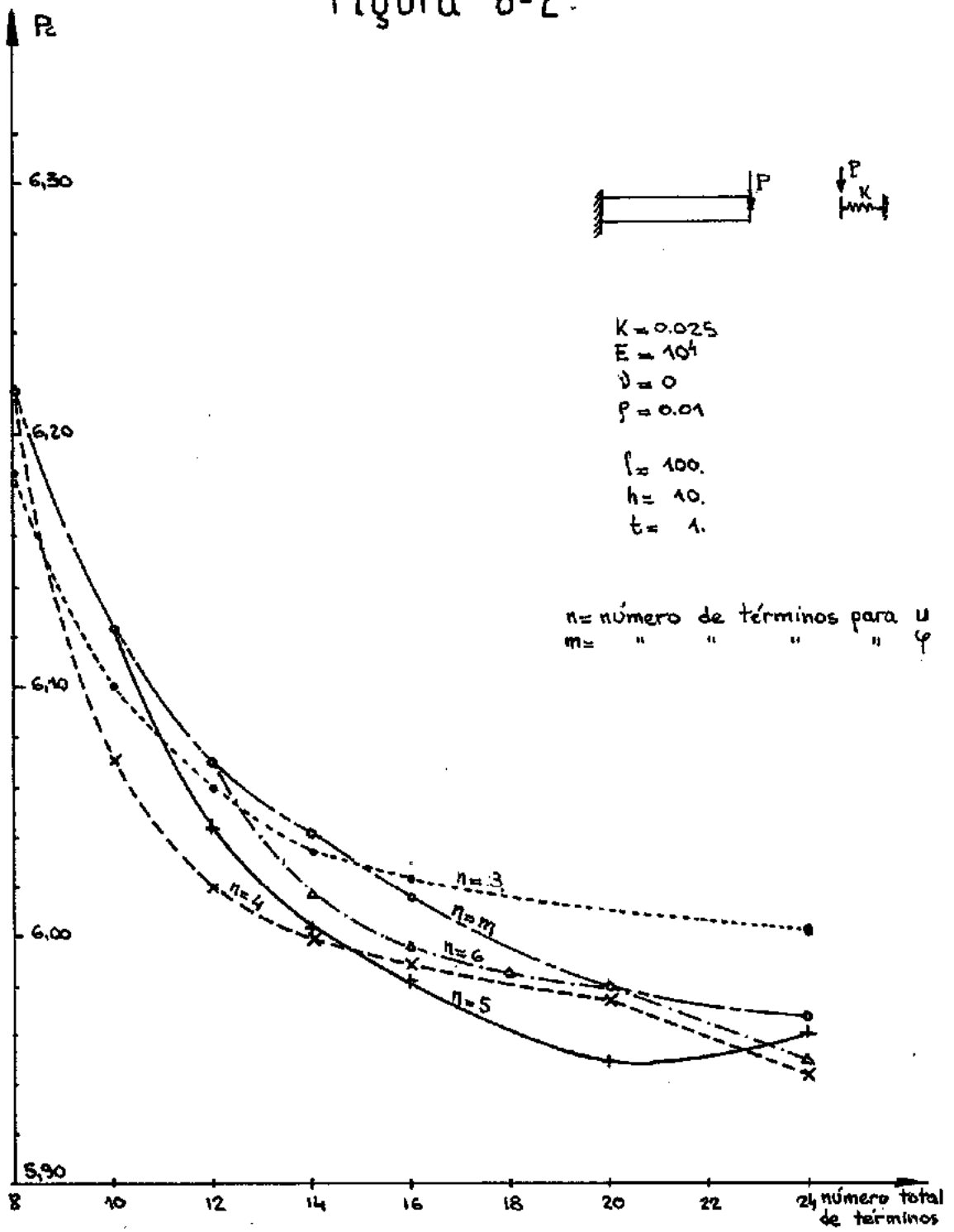

Error (%)
Pc
8
7
6
5
4
3
2
1
0
15,10
5,00
4,90
4,80
4,7293
4,70
Valor exacto
n=6
m=4
n=7
m=6
n=8
m=6
n=6
m=8
n=m
n=3
n=4
n=5
n=7
m=13
E = 10^4
ν = 0.
ρ = 0.01
l = 100.
h = 10.
t = 1.
n= número de términos para u
m= " " " " φ
8
10
12
14
16
18
20
22
24
numero total de términos

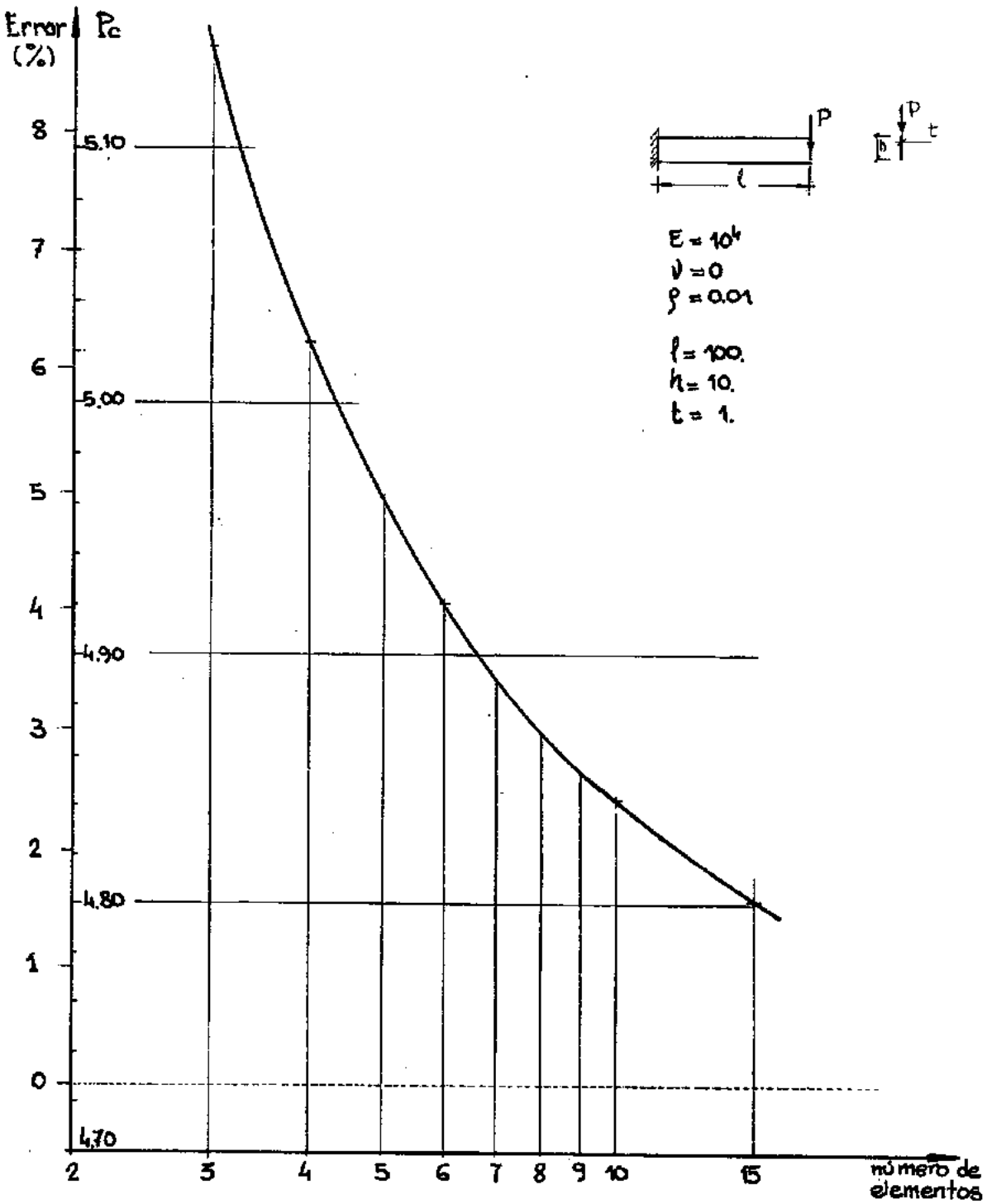
Figura 6-2.


Pc
6,30
6,20
6,10
6,00
5,90
8
10
12
14
16
18
20
22
24
número total de términos
P
P
K
K = 0.025
E = 10⁴
ν = 0
ρ = 0.01
l = 100.
h = 10.
t = 1.
n = número de términos para u
m = " " " " φ
n = 3
n = m
n = 6
n = 5
n = 4

# METODO DE ELEMENTOS FINITOS

## CURVA: CARGA CRITICA - Nº DE ELEMENTOS

Figura 6-3



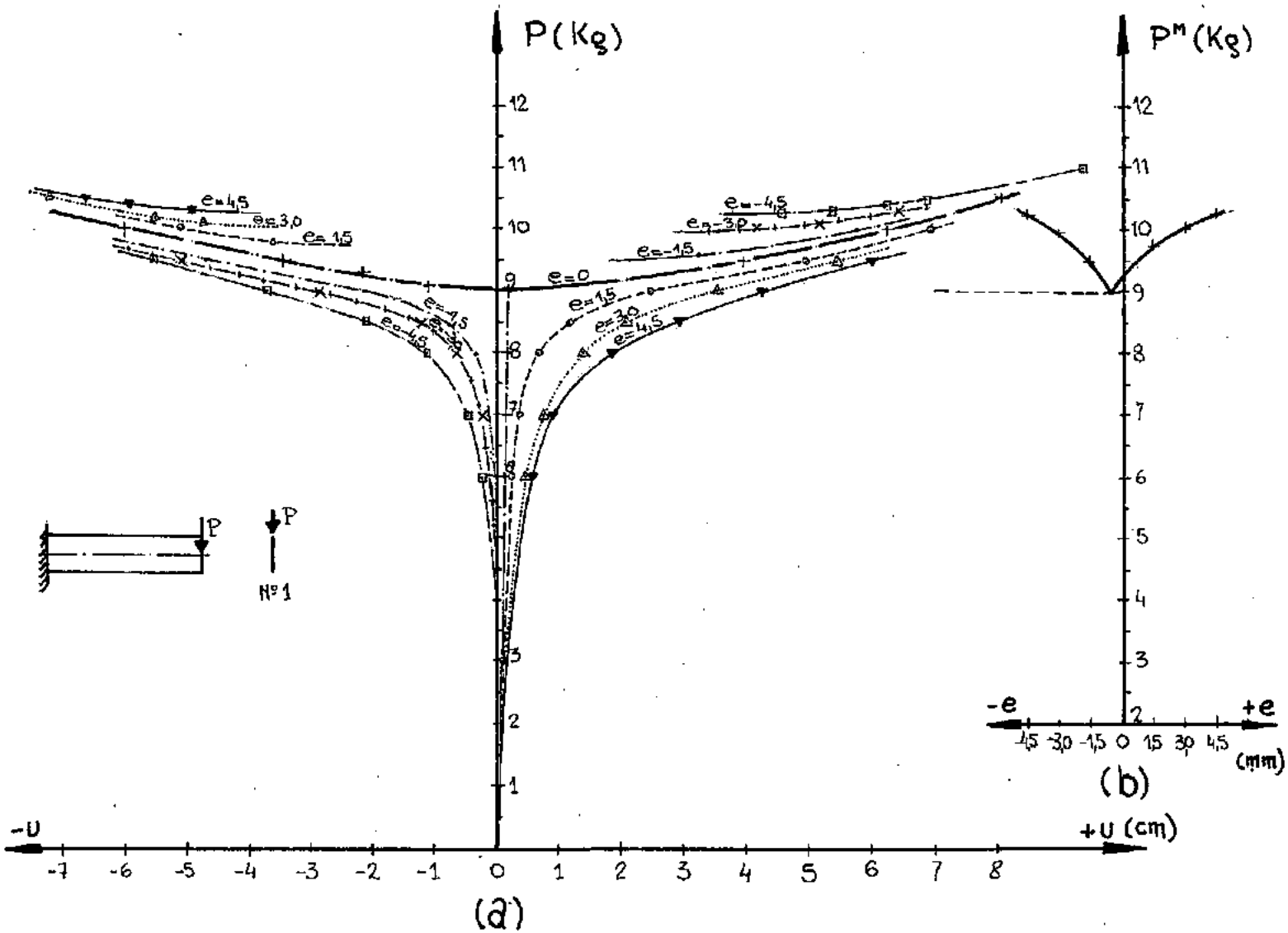



Figura 6-4

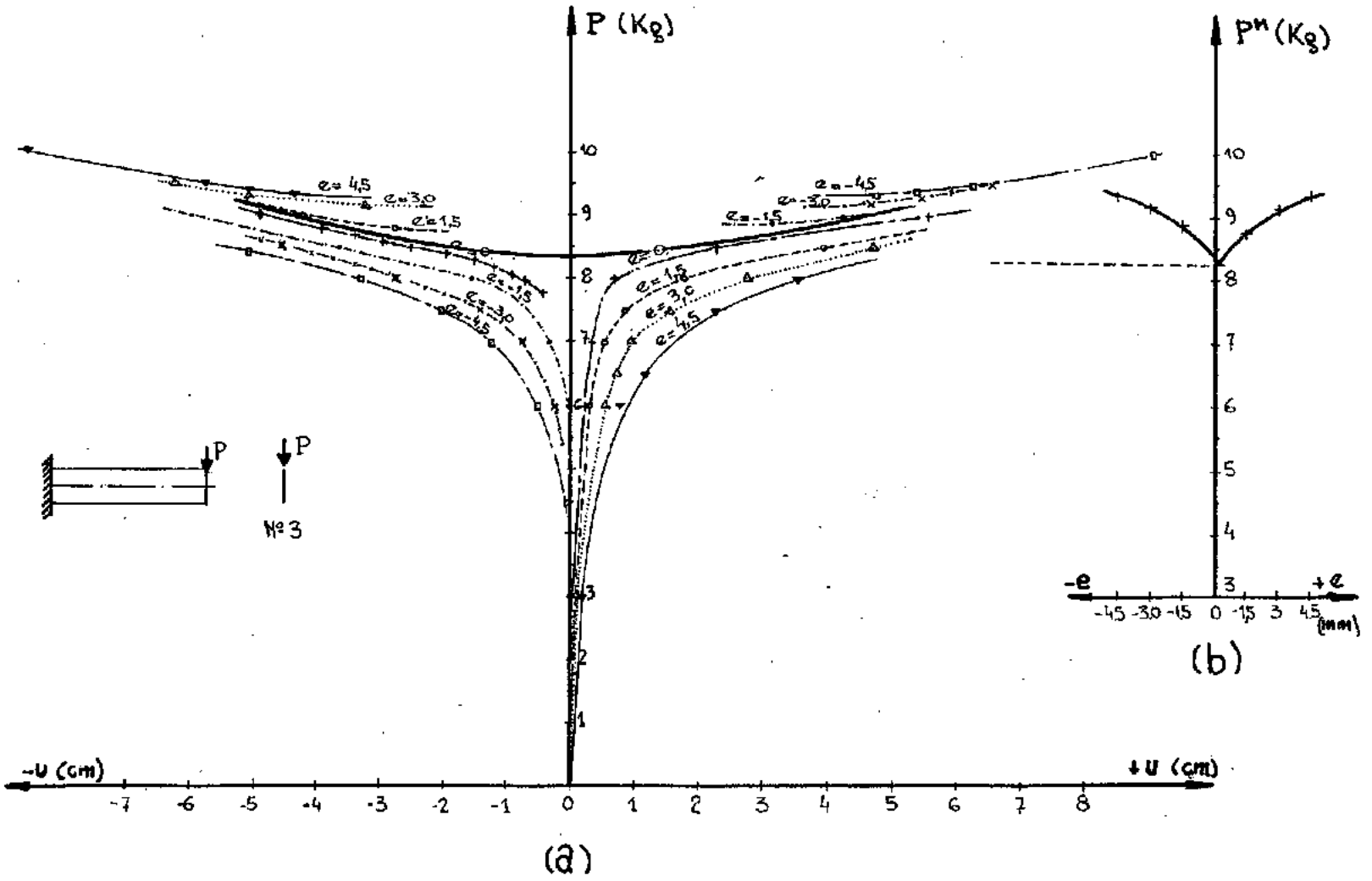



Figura 6-5

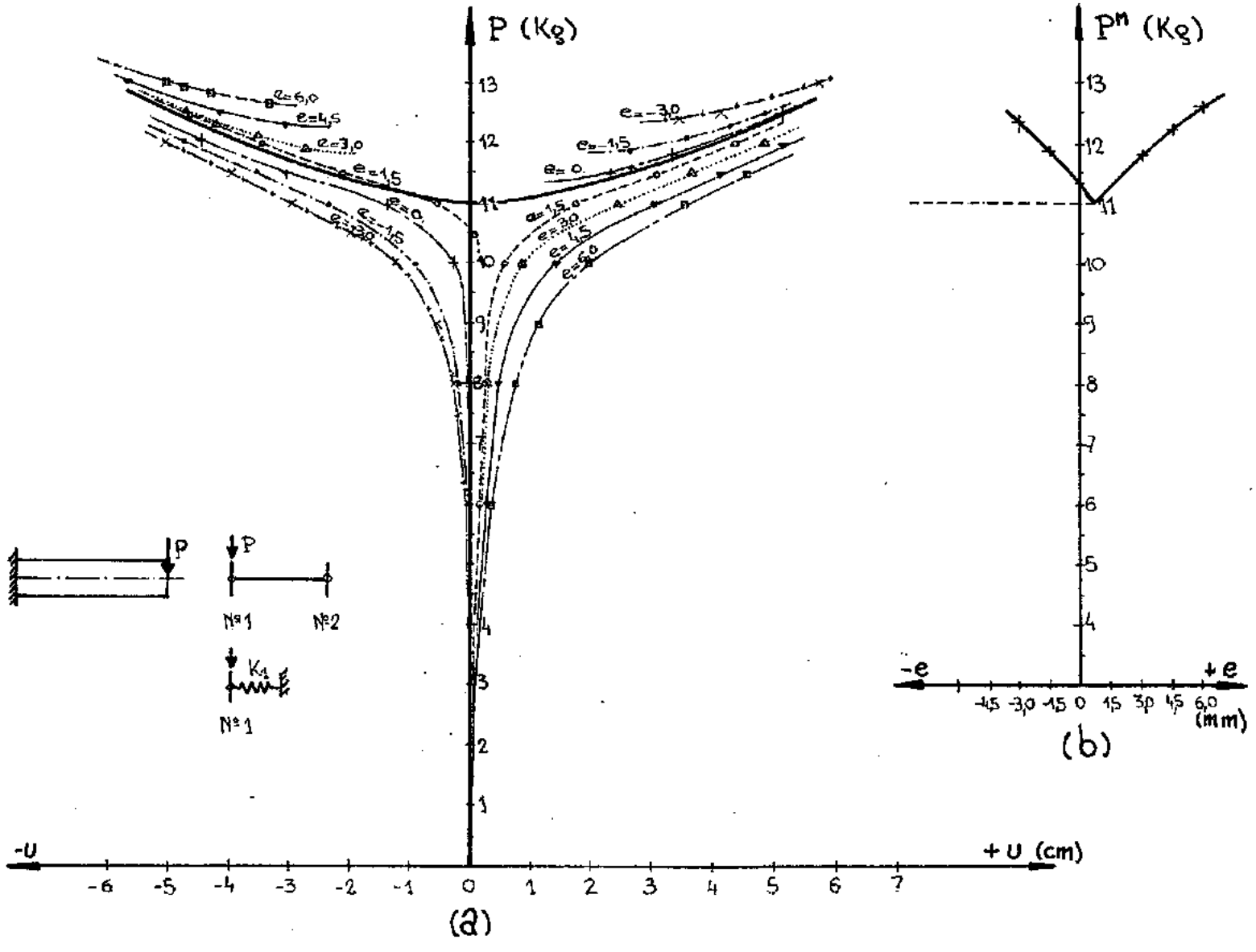

P (Kg)
e=6,0
e=4,5
e=3,0
e=1,5
e=0
e=-1,5
e=-3,0
e=-3,0
e=-1,5
e=0
e=1,5
e=3,0
e=4,5
e=6,0
P
P
Nº1
Nº2
K1
Nº1
-U
+U (cm)
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
(a)
Pm (Kg)
-e
+e
-4,5 -3,0 -1,5 0 1,5 3,0 4,5 6,0
(mm)
(b)

Figura 6-6

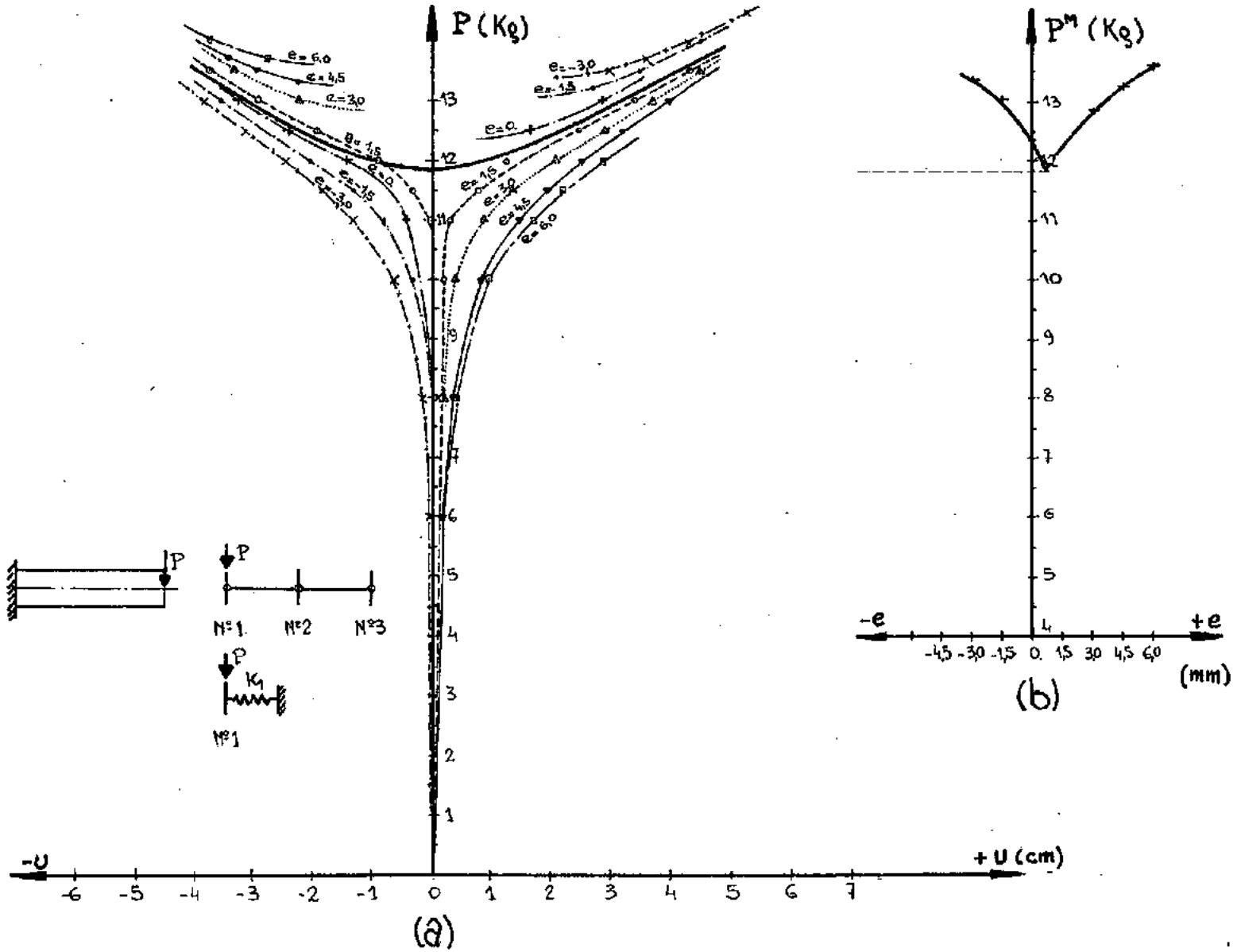

P (Kg)
e=6,0
e=4,5
e=3,0
e=1,5
e=0
e=-1,5
e=-3,0
e=-4,5
e=-6,0
P
Nº1
Nº2
Nº3
K1
-U
+U (cm)
(a)
Pᴹ (Kg)
-e
+e
(mm)
(b)

Figura 6-7

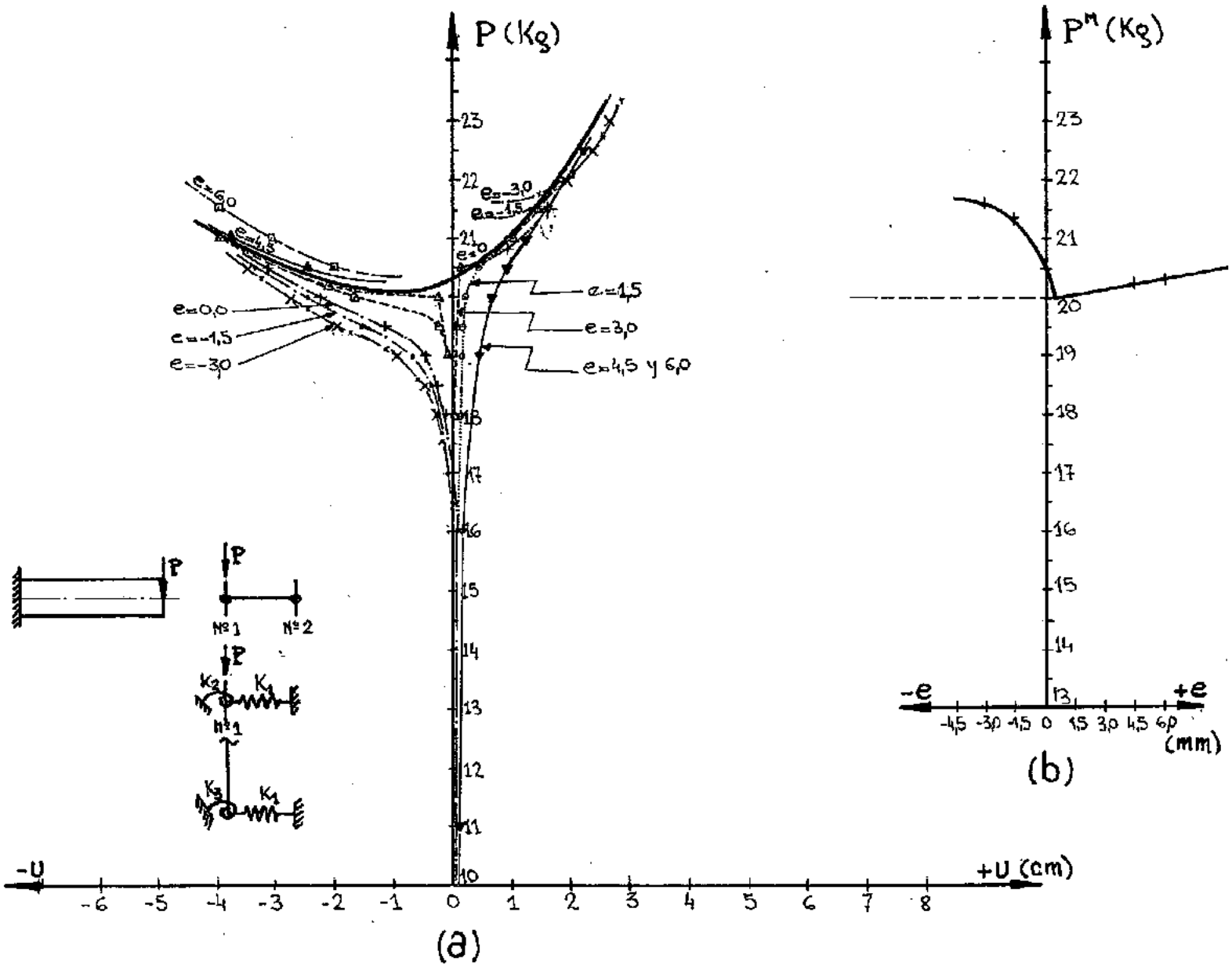

P (Kg)
P^M (Kg)
e=6,0
e=4,5
e=0,0
e=-1,5
e=-3,0
e=-3,0
e=-1,5
e=0
e=1,5
e=3,0
e=4,5 y 6,0
P
Nº1
Nº2
K2
K1
-U
+U (cm)
-e
+e
(mm)
(a)
(b)

Figura 6-8

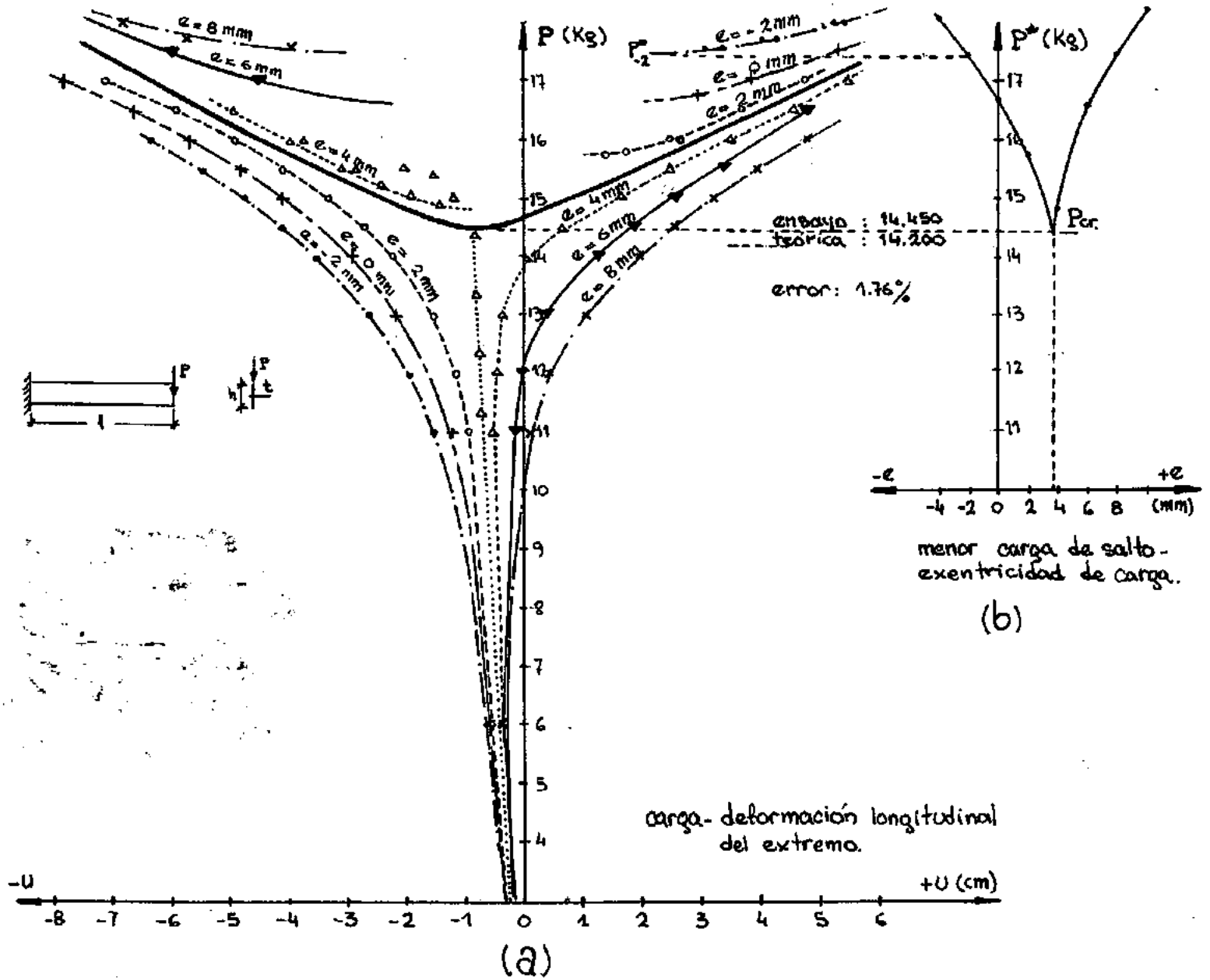

P (Kg)
e = 8 mm
e = 6 mm
e = 4 mm
e = 2 mm
e = 0 mm
e = -2 mm
e = -2 mm
e = 0 mm
e = 2 mm
e = 4 mm
e = 6 mm
e = 8 mm
ensayo : 14.450
teórica : 14.200
error: 1.76%
carga- deformación longitudinal del extremo.
-U
+U (cm)
(a)
P* (Kg)
Pcr.
-e
+e
(mm)
menor carga de salto - exentricidad de carga.
(b)

Figura 6-9

# A P E N D I C E I

## PROPIEDADES DEL PROBLEMA DE AUTOVALORES:-

Al problema generalizado de autovalores[5],[13], derivado en la ecuación (4.9), puede asociarse al de operadores lineales en un espacio de Hilbert (H); designando con A y B a tales operadores y por u un elemento en tal espacio; $u \in H$.

$$\tilde{K}_{\underset{\sim}{e}} - \omega^2 \tilde{M}_{\underset{\sim}{c}} = 0 \qquad Au - \lambda Bu = 0 \tag{1}$$

Suponemos que los operadores A,B son autoadjuntos y B positivo definido,[20] y el dominio de definición de B es un subdominio abierto del de A. Además $A - \lambda B$ es autoadjunto para todo $\lambda$ real.

Propiedad 1: Los autovalores de la ecuación (1) son positivos.

Si $\lambda$ y u son un autovalor y su correspondiente autovector de (1), con A,B positivos definidos tomando el producto escalar de (1) con u se tiene:

$$(Au,u) - \lambda(Bu,u) = 0$$

$$\lambda = \frac{(Au,u)}{(Bu,u)} > 0 \tag{2}$$

por definición de producto escalar.

Propiedad 2: Los autovectores correspondientes a diferentes autovalores de (1) son ortogonales en $H_A$ y $H_B$. Con $H_A$ y $H_B$ designamos el espacio Hilbert en la energía y proviene de considerar lo si -

guiente:

Sea el operador $B$ definido en el subespacio S, que es denso en un espacio de Hilbert completo H, y sea B positivo - definido en S, esto es, existe una constante $\gamma > 0$ tal que :

$$(Bu,u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2 \quad ; \quad u \in S \tag{3}$$

Definiendo un nuevo producto escalar en S:

$$(Bu,v) = (u,v)_B \qquad u,v \in S \tag{4}$$

Con ésta definición, S pasa a ser un nuevo espacio - Hilbert, denotado por $H_B$, y cuya norma ( $\| u \|$ ) será:

$$\| u \|^2 = (Bu,u) \qquad u \in S$$

Sean entonces $\lambda_1, \lambda_2$ dos autovalores y $u_1$, $u_2$ sus correspondientes autovectores de (1)

$$A\, u_1 = \lambda_1 B u_1 \qquad y \qquad A u_2 = \lambda_2 B u_2$$

tomando el producto escalar siguiente:

$$(Au_1, u_2) = \lambda_1 (Bu_1, u_2)$$

$$(Au_2, u_1) = \lambda_2 (Bu_2, u_1)$$

restando miembro a miembro,y por ser los operadores autoadjuntos se tiene

$$(Au_1, u_2) = (Au_2, u_1) \quad y \quad (Bu_1, u_2) = (Bu_2, u_1)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,(Bu_1, u_2) = 0 \tag{5}$$

por ser $\lambda_1 \neq \lambda_2$ es:

$$(Bu_1, u_2) = (Au_1, u_2) = 0 \tag{6}$$

<u>Propiedad 3:</u> Suponiendo que A y B son operadores autoadjuntos, y que B es positivo definido, cualquier conjunto de funciones u no - nulas que son mutuamente ortogonales a traves de B es un conjunto linealmente independiente.-

<u>Propiedad 4:</u> Los autovalores de(1) son reales.

Supongamos que u sea un valor complejo y $\bar{u}$ su conjugado correspondiente.

$$Au_1 = \lambda_1 Bu_1 \qquad (7)$$

Supongamos que $\lambda_1$ fuese un valor complejo; basándo-- nos en la propiedad de que el conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados

$$A.\bar{u}_1 = \bar{\lambda}_1 B.\bar{u}_1 \qquad (8)$$

formando el producto escalar en (7) con $\bar{u}_1$ y (8) con $u_1$

$$(Au_1, \bar{u}_1) = \lambda_1 (Bu_1, \bar{u}_1)$$
$$(A\bar{u}_1, u_1) = \bar{\lambda}_1 (B\bar{u}_1, u_1)$$

restando m.a m. y debido al caracter autoadjunto de A y B :

$$(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)(Bu_1, \bar{u}_1) = 0 \qquad (9)$$

mas $(Bu_1, \bar{u}_1)$ no es nula por ser B positivo definido $\therefore$ $\lambda_1 - \bar{\lambda}_1 = 0$

$$\lambda_1 = a + bi \qquad \bar{\lambda}_1 = a - bi$$

$\lambda_1 - \bar{\lambda}_1 = 2bi$ , que es nulo para b=0

Se concluye afirmando que los autovalores del problema serán reales.-

<u>Propiedad 5</u>: A un autovalor de multiplicidad S, corresponden s autovectores linealmente independientes.

Pasando a notación matricial, tenemos que:

Si los vectores $\underset{\sim}{c}$ cumplen la propiedad de ser ortonormales a traves de la matriz $\tilde{m}$ ; $\underset{\sim}{c} \rightarrow \underset{\sim}{e}$

$$\underset{\sim}{e}_i \, \tilde{m} \underset{\sim}{e}_j = \delta_{ij} \qquad (10)$$

$\delta_{ij}$ es el delta de Kroneker, $\delta_{ij}=1 \quad i=j$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =0 \quad i\neq j$

La matriz asociada a los vectores ortonormales se designa como matriz modal asociada a (1)

$$\tilde{Q} = \left[ \underset{\sim}{e}_1 \quad \underset{\sim}{e}_2 \quad \cdots \quad \underset{\sim}{e}_n \right] \qquad (11)$$

$$\tilde{Q}^T \, \tilde{m} \, \tilde{Q} = \tilde{I} \qquad (12)$$

El problema (1) puede plantearse considerando todos los autovalores y autovectores:

$$\tilde{K} . \tilde{C} = \tilde{m} . \tilde{C} . \tilde{\omega} \qquad \tilde{\omega} = \left[ \omega_i^2 \right] \qquad (13)$$

$\tilde{C}$ es la matriz modal

Planteando el problema asociado:

$$\tilde{m} \, \tilde{Z} = \tilde{Z} . \tilde{\gamma} \qquad (14)$$

$$\tilde{\gamma} = \left[ \gamma_i \right]$$

$\tilde{Z}$ es la matriz ortonormal

$\tilde{\gamma}$ es una matriz diagonal de autovalores asociada a (14)

$$\tilde{Z}.\tilde{Z}^T = \tilde{Z}^T\,\tilde{Z} = \tilde{I}$$

$$\tilde{Z}^T = \tilde{Z}^{-1}$$

de (14)

$$\tilde{m} = \tilde{Z}.\tilde{\gamma}.\tilde{Z}^T$$

propiedad: si $\tilde{\gamma}$ es una matriz diagonal, y $\tilde{Z}$ es ortonormal se verifica que $\tilde{m}^{\alpha} = \tilde{Z}.\tilde{\gamma}^{\alpha}.\tilde{Z}^T$

en particular:

$$\tilde{m}^{\frac{1}{2}} = \tilde{Z}.\tilde{\gamma}^{\frac{1}{2}}.\tilde{Z}^T \qquad (15)$$

$$\tilde{m}^{-\frac{1}{2}} = \tilde{Z}.\tilde{\gamma}^{-\frac{1}{2}}.\tilde{Z}^T \qquad (16)$$

$$\tilde{m}^{-\frac{1}{2}}.\tilde{m}^{\frac{1}{2}} = \tilde{Z}.\tilde{\gamma}^{-\frac{1}{2}}.\tilde{Z}^T.\tilde{Z}.\tilde{\gamma}^{\frac{1}{2}}.\tilde{Z}^T = \tilde{I}$$

De (13)

$$\tilde{K}.\tilde{m}^{-\frac{1}{2}}.\tilde{m}^{\frac{1}{2}}.\tilde{C} = \tilde{m}^{\frac{1}{2}}.\tilde{m}^{\frac{1}{2}}.\tilde{C}.\tilde{w}$$

premultiplicando por $\tilde{m}^{-\frac{1}{2}} = (\tilde{m}^{-\frac{1}{2}})^T$

$$(\tilde{m}^{-\frac{1}{2}}.\tilde{K}.\tilde{m}^{-\frac{1}{2}})\,(\tilde{m}^{\frac{1}{2}}.\tilde{C}) = (\tilde{m}^{-\frac{1}{2}}.\tilde{m}^{\frac{1}{2}})\,(\tilde{m}^{\frac{1}{2}}.\tilde{C}).\tilde{w}$$

se transformó el problema (13) en otro del tipo (14)

$$\tilde{\tilde{K}} = \tilde{m}^{-\frac{1}{2}}.\tilde{K}.\tilde{m}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\tilde{C}} = \tilde{m}^{\frac{1}{2}}.\tilde{C}$$

con $\tilde{m}$ de (15), (16)

$$\tilde{\tilde{K}}\,\tilde{\tilde{C}} = \tilde{\tilde{C}}\tilde{w}$$

Se resuelve en $\tilde{\tilde{C}}$ y $\tilde{w}$, resultando $\tilde{\tilde{C}}$ ser una matriz ortonormal

Luego

$$\tilde{C} = \tilde{m}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\tilde{C}}$$

# A P E N D I C E 2

## CONDENSACION DE PROBLEMAS DE AUTOVALORES

El problema generalizado de autovalores a que se llega con la formulación del presente trabajo u otros similares-- puede ser demasiado grande, pudiendo considerar mediante el recurso del análisis modal [23] uno menor, en el que se consideren los p menores autovalores y sus correspondientes autovectores.-

Para el problema de la Estabilidad Elástica, basta considerar los dos menores autovalores para casos de inestabilidad-dinámica, o sólo uno para el caso de inestabilidad estática.-

La condensación del problema puede llevarse a cabo mediante la técnica de iteración en subespacios, para grandes problemas [21],[22] y puede resumirse con los siguientes pasos integrantes de un esquema iterativo que puede ser interpretado como-una combinación del cociente de Rayleigh con el método de Ritz

La ecuación de partida es:

$$\tilde{K}\,\underset{\sim}{c} = \omega^2\,\tilde{M}\,\underset{\sim}{c} \qquad (1)$$

donde las matrices $\tilde{K}$, $\tilde{M}$ son de orden $n \times n$ simétricas, a coeficientes reales, $\tilde{M}$ positiva definida.

Tomando la matriz modal $\tilde{C}$ y la de autovalores $\tilde{W} = [\omega_i^2]$

$$\tilde{K}.\tilde{C} = \tilde{M}\,\tilde{C}\,\tilde{W} \qquad (2)$$

Se quiere reducir el problema de resolver $n$ autovalores y sus autovectores a otro en el que es necesario resolver $p$ ; $p < n$, en un esquema de iteración simultánea.

En una iteración genérica $j$ a $j+1$ , se tendrá que resolver una ecuación del tipo:

$$\tilde{K}\,\tilde{\bar{\varphi}}_{j+1} = \tilde{M}\,\tilde{\bar{\varphi}}_{j} \tag{3}$$

con $\tilde{\bar{\varphi}}_{j+1}$ es posible encontrar las proyecciones de $\tilde{K}$ y $\tilde{M}$ en el espacio $E_p$.

$$\tilde{K}_{j+1} = \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1}^{T}\ \tilde{K}\ \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1} \tag{4}$$

$$\tilde{M}_{j+1} = \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1}^{T}\ \tilde{M}\ \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1} \tag{5}$$

Se recae en el sistema de autovalores.

$$\tilde{K}_{j+1}\,\tilde{\beta}_{j+1} = \tilde{M}_{j+1}\,\tilde{\beta}_{j+1}\,\tilde{\alpha}_{j+1} \tag{6}$$

luego, los autovectores de (2) pueden hallarse por la fórmula:

$$\tilde{\varphi}_{j+1} = \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1}\,\tilde{\beta}_{j+1} \tag{7}$$

cuando $j \to \infty$ , se tiene que

$$\tilde{\alpha}_{j+1} \to \tilde{W}$$

$$\tilde{\varphi}_{j+1} \to \tilde{C}$$

Para las $r$ iteraciones se debe proceder en la siguiente forma:

formar $$\tilde{R} = \tilde{M}\,\tilde{\varphi}_{j} \tag{8}$$

resolver $$\tilde{K}\,\tilde{\bar{\varphi}}_{j+1} = \tilde{R} \tag{9}$$

calcular $$\tilde{K}_{j+1} = \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1}^{T}\ \tilde{K}\ \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1} = \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1}^{T}\cdot\tilde{R} \tag{10}$$

calcular $$\tilde{M}_{j+1} = \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1}^{T}\ \tilde{M}\ \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1} \tag{11}$$

resolver $$\tilde{K}_{j+1}\,\tilde{\beta}_{j+1} = \tilde{M}_{j+1}\,\tilde{\beta}_{j+1}\cdot\tilde{\alpha}_{j+1} \tag{12}$$

calcular $$\tilde{\varphi}_{j+1} = \tilde{\bar{\varphi}}_{j+1}\cdot\tilde{\beta}_{j+1} \tag{13}$$

orden de las matrices

| | | |
|---|---|---|
| $\tilde{K}$ , $\tilde{M}$ | orden | $n \times n$ |
| $\tilde{\bar{\varphi}}_{j+1}$ , $\tilde{\varphi}_j$ , $\tilde{R}$ | " | $n \times p$ |
| $\tilde{\beta}_{j+1}$ , $\tilde{\alpha}_{j+1}$ , $\tilde{K}_{j+1}$ , $\tilde{M}_{j+1}$ | " | $p \times p$ |

Para lograr una convergencia más rápida, para el 1er paso ( $j = 1$) se aconseja que $\tilde{R}$ sea construído por:

a) la primer columna contendrá los elementos de la diagonal de $\tilde{M}$ .-

b) las demas columnas deberán ser vectores unitarios, con todas sus componentes nulas exepto colocar un + 1 en las mayores relaciones de $m_{ii} / k_{ii}$

# APENDICE 3

## PROGRAMA PARA EL CALCULO DE LA CARGA CRITICA

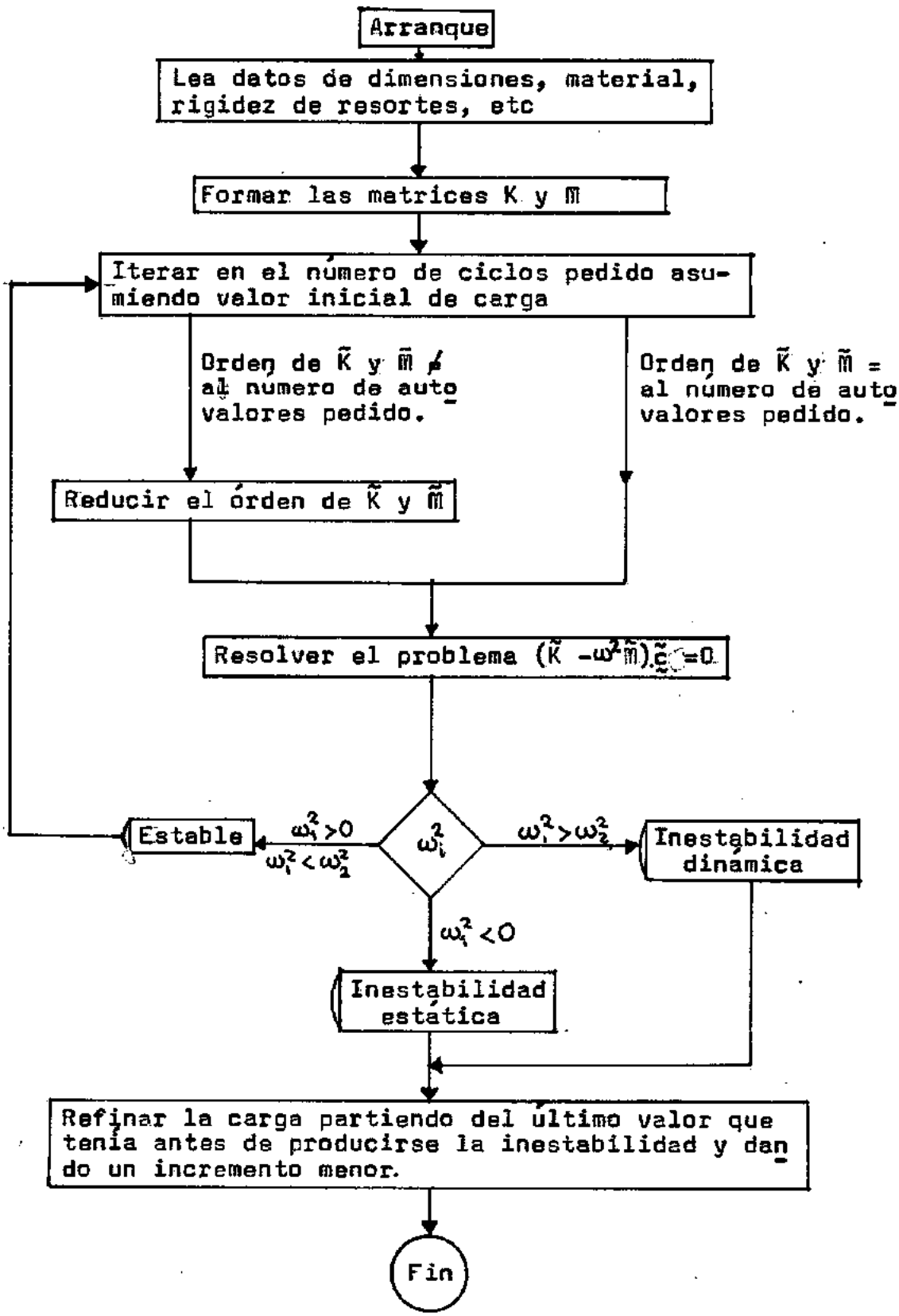
Se desarrolló un programa que calcula el cuadrado de frecuencias de vibración ($\omega^2$) para un determinado nivel de cargas del problema (4.9)

El esquema es válido para los métodos de Ritz y de Elementos Finitos, siendo que las subrutinas DATOC (Lee datos) ,CAMAT (forma matrices $\tilde{K}$ y $\tilde{M}$) y parte de ITEN ( itera en el número de ciclos de carga pedidos ) en lo que respecta a la modificación de $\tilde{K}$, son diferentes para ambos métodos.

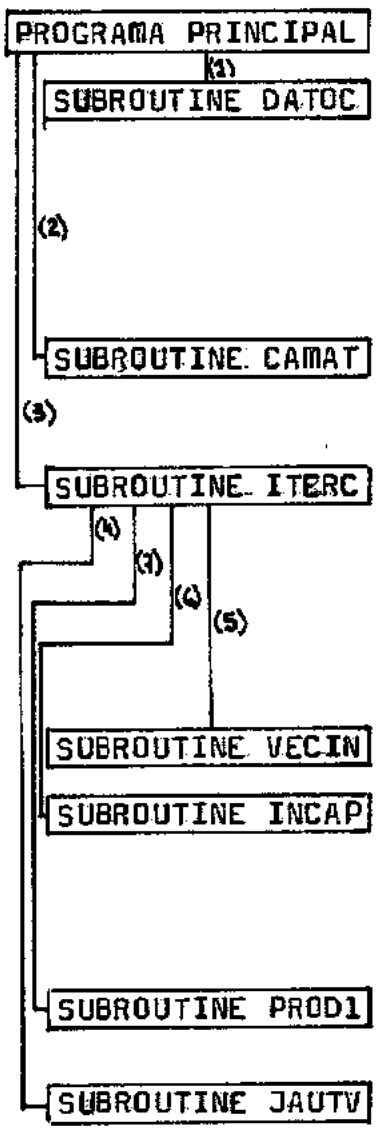
Tal como está preparado, el programa permite la obtención de hasta 12 valores de $\omega^2$ por cálculo sin condensar, pudiéndose emplear el mismo para problemas mayores(hasta un límite de órden de las matrices de 30 x 30) utilizando la técnica de condensación (Apéndice 2), siendo suficiente calcular únicamente el menor autovalor para el caso de inestabilidad estática.Para éste caso,se busca determinar la carga (P) que produce que la menor frecuencia de vibración sea nula ($\omega = 0$).

Para casos de inestabilidad dinámica, habrá que calcular al menos los dos menores autovalores ($\omega_1^2$ y $\omega_2^2$)

Diagrama de flujo



## Diagrama de blocos




Lee número de problemas.

Lee título del problema, sección rectangular ó no, datos de dimensiones, propiedad del material, rigidez de resortes y sus posiciones, carga inicial y posición, numero de terminos en las expanciones, número de ciclos de iteración numero de autovalores pedido e incremento de cargas.-

Dependiendo si no se trata de sección rectangular , lee datos de C, $C_1$, I , masa. Forma las matrices $\tilde{K}$ y $\tilde{m}$, la primera para P=1.

Es la que comanda las iteraciones en el número de ciclos pedido, corrigiendo $\tilde{K}$ en cada iteración, analizando el menor o los dos menores autovalores según el caso. Cuando se pida un número de autovalores menor que el orden de las matrices, se utilizan las siguientes subrutinas:

Construye la matriz ortogonal inicial $\tilde{R}$

Invierte la matriz $\tilde{K}$, que no se modificará durante las iteraciones para una determinada carga, utilizando el método de GAUSS JORDAN con selección del mayor elemento de la diagonal principal.

Ejecuta los productos necesarios para reducir $\tilde{K}$ y $\tilde{m}$ al subespacio pedido.

Resuelve el problema $\tilde{K}\underline{c} = \omega^2 \tilde{m}\underline{c}$ del problema original o del reducido, utilizando el metodo de rotaciones simultaneas de JACOBI.

## Manual de entrada al programa

PROGRAMA PRINCIPAL

```
      READ(5,3)NCASO
3     FORMAT(I5)
```

NCASO = número de problemas

SUBROUTINE DATOC

```
      READ(5,25)TITUL
25    FORMAT(12A4)
      READ(5,1)ACHE,TE,ELE
1     FORMAT(2F10.2,F10.1)
      READ(5,3)EL,DENSI,POIS
3     FORMAT(F10.1,2F10.4)
      READ(5,8)CRIG,CALA,YO
8     FORMAT(8F10.4)
      READ(5,8)RIGL,COFK1,RIGM,COFK2,RIGL1,COF11,RIGM1,COF21
      READ(5,100)P1,H1,COEF
100   FORMAT(3F10.3)
      READ(5,12)N,M
12    FORMAT(2I5)
      READ(5,6)NP,ITERP,DELP
6     FORMAT(2I5,F10.2)
```

SUBROUTINE CAMAT

Si no se tiene sección rectangular se debe leer:

```
      READ(5,43)CMASA,CINER,CPOLA,CRIG
43    FORMAT(4F15.7)
```

El significado de las variables en las subrutinas anteriores es el siguiente:

TITUL= título del problema

ACHE = altura de la sección transversal

TE= espesor de la sección transversal

ELE= longitud de la viga

EL= módulo de elasticidad del material.

DENSI= densidad del material

POIS= coeficiente de Poisson.

CRIG= coeficiente que indica si es sección rectangular (CRIG=0) o nó (CRIG=1)

CALA= rigidez de alabeo.-

YO= diferencia entre los centros de gravedad y de cizallamiento.-

RIGL= rigidez de resorte a traslación

RIGM= " " " " rotación

RIGL1= " " "" " variación de traslación.-

RIGM1= " " " " " " rotación.-

COFK1,COFK2,COF11,COF21= coeficientes de posición de RIGL a RIGM1 (iguales a 1. para posición en 1)

P1= carga inicial

H1= distancia en la vertical entre el centro de - cizallamiento y el punto de aplicación de la carga.

COEF= coeficiente de posición de la carga (COEF=1.es posición en $l$)

N,M= número de terminos en las expansiones de u y $\varphi$ respectivamente.-

NP= número de autovalores pedido

ITERP= " " iteraciones en las cargas.-

DELP= incremento en la carga.-

CMASA= masa por unidad de longitud.

CINER= momento de inercia respecto al eje y-y.

CPOLA= momento de inercia polar.

CRIG = rígidez a torsión

```
//     EXEC FORTGCLG
//FORT.SYSIN DD *
      IMPLICIT REAL *8(A-H,C-Z)
      COMMON COEF,COFK1,COFK2,COF11,COF21,RIGL1,RIGM1,YC
      COMMON ACHE,TE,ELE,EL,DENSI,POIS,CRIG,CALA,RIGL,RIGM,P1,H1,DELP,P
      COMMON RMASP(24,24),RITP(24,24),PHI(24,4),PROD(24,4)
      COMMON RIT(24,25),RMAS(24,24),EIGV(12),D(12),X(12,12)
      COMMON LR,LW,INDR,INDM,N ,M ,NP,NAUT,ITERP
      DEFINE FILE 1(24,48,U,INDR),2(24,48,U,INDM)
      LR=5
      LW=6
      READ (LR,3)NCASC
      WRITE(LW,3)NCASC
3     FORMAT(I5)
       DO 8 INI=1,NCASC
      CALL DATCC
      P=1.
      CALL CAMAT
      CALL ITERC
8     CONTINUE
      CALL EXIT
      END
```

```
      SUBROUTINE DATOC
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      COMMON COEF,COFK1,COFK2,COF11,COF21,RIGL1,RIGM1,YO
      COMMON ACHE,TE,ELE,EL,DENSI,POIS,CRIG,CALA,RIGL,RIGM,P1,H1,DELP,P
      COMMON RMASP(24,24),RITP(24,24),PHI(24,4),PROD(24,4)
      COMMON RIT(24,25),RMAS(24,24),EIGV(12),D(12),X(12,12)
      COMMON LR,LW,INDR,INDM,N ,M ,NP,NAUT,ITERP


          LEER TITULO

      READ(LR,25)TITUL
      FORMAT(12A4)
      WRITE(LW,26)TITUL
      FORMAT(1H1,12A4)
      READ (LR,1)ACHE,TE,ELE
      FORMAT(2F10.2,F10.1)
      WRITE(LW,2)ACHE,TE ,ELE
      FORMAT(//5X,'ALTURA =',F8.3,10X,'ESPESOR =',F8.4,10X,'LONGITUD ='
     1,F7.3/)
      READ (LR,3)EL,DENSI,POIS
      FORMAT(F10.1,2F10.4)
      WRITE(LW,4)EL,DENSI,POIS
      FORMAT(//5X,'MOD. DE ELAST. =',F10.1, 6X,'DENSIDAD =',F15.10,6X,'
     1MOD. DE POISSON =',F10.4/)

          SI ES SECCION RECTANGULAR PONER CRIG = C = 0.  --

      READ(LR,8) CRIG,CALA,YO
      WRITE(LW,16)CRIG,CALA,YO
      FORMAT(5X,'IND. SECCION RECT. O O 1. =',F10.4,10X,'RIGIDEZ DE ALAB
     1EO =',F10.4//5X,'DIST. ENTRE EL CG Y EL CENTRO DE CIZALLAMIENTO ='
     2,F10.3/)
      READ(LR, 8)RIGL,COFK1,RIGM,COFK2,RIGL1,COF11,RIGM1,COF21
      WRITE(LW,9)RIGL,COFK1,RIGM,COFK2,RIGL1,COF11,RIGM1,COF21
```

```
8      FORMAT(8F10.4)
9      FORMAT(//5X,'K1',F15.8,5X,'POS. COF. K1 =',F15.3,5X,'K2 =',F15.8,5
      2X,'POS, COF. K2 =',F15.3//5X,'K11 =',F12.3,5X,'POS. COF. K11 =',
      3F14.3,5X,'K21 =',F14.8,5X,'POS COF. K21 =',F15.3/)
       READ(LR,100) P1,H1,COEF
100     FORMAT(3F10.3)
       WRITE(LW,10 )P1,H1,COEF
10      FORMAT(//5X,'CARGA INICIAL =',F10.6,10X,'DIST, AL BARICENTRO ='
      1,F10.4,10X,'COEF. POSICION PARA CARGA =',F10.4/)
       READ(LR,12)N,M
12      FORMAT(2I5)
       WRITE(LW,13)N,M
13     FORMAT(//5X,'N. DE TERM, PARA DESPL. =',I3,10X,'N. DE TERM. PARA
      1ROTACICN =',I3/)
       READ (LR,6)NP,ITERP,DELP
6      FORMAT(2I5,F10.2)
       WRITE(LW,5)NP,ITERP,DELP
 5     FORMAT(5X,'NUM. DE AUTOVALORES REQUERIDO =',I5//5X,'NUM. DE PASOS
      1DE CARGAS =',I11//5X,'INCREMENTO EN LAS CARGAS =',F8.6//)
       RETURN
       END
```

```
      SUBROUTINE CAMAT
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      COMMON COEF,COFK1,COFK2,COF11,COF21,RIGL1,RIGM1,YO
      COMMON ACHE,TE,ELE,EL,DENSI,POIS,CRIG,CALA,RIGL,RIGM,P1,H1,DELP,P
      COMMON RMASP(24,24),RITP(24,24),PHI(24,4),PROD(24,4)
      COMMON RIT(24,25),RMAS(24,24),EIGV(12),D(12),X(12,12)
      COMMON LR,LW,INDR,INDM,N ,M ,NP,NAUT,ITERP
      NM=N+M

C       SI ES SECCION RECTANGULAR CALCULE C,M,I,IO

C       SI NO ES SECCION RECTANGULAR LEA C,M,I,IO

      IF (DABS(CRIG))40,40,41
40    CRIG=EL*ACHE*TE**3/(6.*(1.+POIS))
      CMASA=DENSI*ACHE*TE
      CINER=ACHE*TE**3/12.
      CPOLA=ACHE**2/12.
      GO TO 42
41    READ(LR,43)CMASA,CINER,CPOLA,CRIG
43    FORMAT(4F15.7)
42    WRITE(LW,169)CMASA,CINER,CPOLA,CRIG
169    FORMAT(//' MASA=',E21.4,2X,' M. INER.=',E15.4//' MOM. POLAR=',
     1E15.4,7X,'C =',E17.4/)
      DO 1 I=1,NM
      DO 1 J=1,NM
      RIT(I,J)=0.
    1 RMAS(I,J)=0.
      DO 10 I=1,N

C         MATRIZ RITZ Y MASA REFERIDAS AL DESPLAZAMIENTO

C        MATRIZ DE MASAS REF. AL DESPLAZAMIENTO

      DO 11 J=I,N
```

```
      RIT(I,J)=EL*CINER/ELE*I*(I+1)*J*(J+1)/(I+J-1)+RIGL*ELE**2*COFK1**(
     1I+J+2)+RIGL1*(I+1)*(J+1)*COF11**(I+J)
11    RMAS(I,J)=CMASA*ELE**3/(I+J+3)
C
C        MATRIZ RITZ Y MASAS REF. AL DESPL. Y ROTACION
C
C
      DO 10 J=1,M
      JN=J+N
      RMAS(I,JN)=CMASA*ELE**2*YO/(I+J+3)
10    RIT(I,JN)=P*ELE*I*(I+1)/((I+J+1)*(I+J+2))*COEF**(I+J+2)

C        MATRIZ RITZ Y MASAS REFERIDAS A LA ROTACION

      DO 20 I=1,M
      IM=I+N
      DO 20 J=I,M
      JM=J+N
      RIT(IM,JM)=CRIG/ELE*(I+1)*(J+1)/(I+J+1)+CALA/(ELE**3)*I*(I+1)*J*
     1(J+1)/(I+J-1)-P*H1*COEF**(I+J+2)+RIGM*COFK2**(I+J+2)
     2+RIGM1/(ELE**2)*(I+1)*(J+1)*COF21**(I+J)
20    RMAS(IM,JM)=CPOLA*ELE/(I+J+3)*CMASA
      DO 30 I=1,NM
      DO 30 J=1,NM
      RIT(J,I)=RIT(I,J)
   30 RMAS(J,I)=RMAS(I,J)
      INDM=1
      INDR=1
      DO 115 I=1,NM
      WRITE(1'INDR)(RIT(I,J),J=1,NM)
115    WRITE(2'INDM)(RMAS(I,J),J=1,NM)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE VECIN
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      DIMENSION LL(24)
      COMMON COEF,COFK1,COFK2,COF11,COF21,RIGL1,RIGM1,YO
      COMMON ACHE,TE,ELE,EL,DENSI,POIS,CRIG,CALA,RIGL,RIGM,P1,H1,DELP,P
      COMMON RMASP(24,24),RITP(24,24),PHI(24,4),PROD(24,4)
      COMMON RIT(24,25),RMAS(24,24),EIGV(12),D(12),X(12,12)
      COMMON LR,LW,INDR,INDM,N ,M ,NP,NAUT,ITERP
      NM=N+M
      DO 35 I=1,NM
      LL(I)=0
      DO 35 J=1,NP
35    PHI(I,J)=0.
      DO 11 I=1,NM
11    PROD(I,4)=RMAS(I,I)/RIT(I,I)
      DO 10 I=1,NM
10    PHI(I,1)=RMAS(I,I)
      IF(NP-1)40,40,41
 41   DO 15 NC=2,NP
      DO 2 I=1,NM
      IF(LL(I))2,3,2
3     K=I
      GO TO 5
2     CONTINUE
5     KL=K
8     KL=KL+1
      IF(NM-KL)14,23,23
23    IF(LL(KL))8,16,8
16    IF(DABS(D(K))-DABS(D(KL)))19,8,8
19    K=KL
      GO TO 8
14    PHI(K,NC)=1.
      LL(K)=1
15    CONTINUE
40    RETURN
```

```
      END
      SUBRCUTINE INCAP(NT)
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      DIMENSION L(24),F(24,25)
      COMMON COEF,COFK1,COFK2,COF11,COF21,RIGL1,RIGM1,YO
      COMMON ACHE,TE,ELE,EL,DENSI,POIS,CRIG,CALA,RIGL,RIGM,P1,H1,DELP,P
      COMMON RMASP(24,24),RITP(24,24),PHI(24,4),PROD(24,4)
      COMMON RIT(24,25),RMAS(24,24),EIGV(12),D(12),X(12,12)
      COMMON LR,LW,INDR,INDM,N ,M ,NP,NAUT,ITERP
      EQUIVALENCE(F(1,1),RIT(1,1))
      NP1=NT+1
      DO 10 I=1,NT
   10 L(I)=C
      DO 15C NCICL=1,NT
      DO 2 I=1,NT
      IF (L(I))2,3,2
    3 K=I
      GO TO 5
    2 CONTINUE
    5 KL=K
    8 KL=KL+1
      IF(NT-KL)14,23,23
   23 IF(L(KL))8,16,8
16    IF(DABS(F(K,K))-DABS(F(KL,KL)))19,8,8
   19 K=KL
      GO TO 8
   14 L(K)=1
      DO 15 IK=1,NT
   15 F(IK,NP1)=0.
      F(K,NP1)=1.
      DO 21 JL=1,NP1
      IF(JL-K)20,21,20
   20 F(K,JL)=F(K,JL)/F(K,K)
   21 CONTINUE
      DO 25 IK=1,NT
```

```
      IF(K-IK)30,25,30
   30 DO 25 JL=1,NP1
      IF(K-JL)35,25,35
   35 F(IK,JL)=F(IK,JL)-F(IK,K)*F(K,JL)
   25 CONTINUE
      DO 40 II=1,NT
   40 F(II,K)=F(II,NP1)
  150 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE JAUTV
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(24,24),B(24,24)
      COMMON COEF,COFK1,COFK2,COF11,COF21,RIGL1,RIGM1,YO
      COMMON ACHE,TE,ELE,EL,DENSI,POIS,CRIG,CALA,RIGL,RIGM,P1,H1,DELP,P
      COMMON RMASP(24,24),RITP(24,24),PHI(24,4),PROD(24,4)
      COMMON RIT(24,25),RMAS(24,24),EIGV(12),D(12),X(12,12)
      COMMON LR,LW,INDR,INDM,NZ,MZ,NP,NAUT,ITERP
      EQUIVALENCE(A(1,1),RITP(1,1)),(B(1,1),RMASP(1,1))
      NAUV=NAUT
      N=NAUV
       NSMAX=15
      ERROR=0.CCO1
       DO 10 I=1,NAUV
      D(I)=A(I,I)/B(I,I)
10     EIGV(I)=D(I)
      IF(N-1) 4,5,4
5      CONTINUE
      WRITE(LW,750)EIGV(1)
750   FORMAT(//5X,'AUTOVALOR UNICO=',F15.6/)
      RETURN
4      DO 3C I=1,N
       DO 20 J=1,N
20      X(I,J)=0.
30      X(I,I)=1.
      NSWEP=0
      NR=N-1
C
C        INICIO DE LAS ITERACIONES
C
       WRITE(LW,1005)
1005  FORMAT(//10X,'ITERACION EN JACAU NO.',10X,'LOS AUTOVALORES EN ESTA
     1ITERACION SON')
40     NSWEP=NSWEP+1
       WRITE(LW,1000) NSWEP
```

```
1000   FORMAT(/I21)
      EPS=(0.05**NSWEP)**2
      DO 50 J=1,NR
      JJ=J+1
      DO 50 K=JJ,N
      TT=A(J,K)*A(J,K)
      TB=A(J,J)*A(K,K)
      ETOLA=DABS(TT/TB)
      TT=B(J,K)*B(J,K)
      TB=B(J,J)*B(K,K)
      ETOLB=TT/TB
      IF(ETCLA-EPS) 6,7,7
6      IF(ETOLB-EPS) 50,7,7
7      AKK=A(K,K)*B(J,K)-B(K,K)*A(J,K)
      AJJ=A(J,J)*B(J,K)-B(J,J)*A(J,K)
      AB=A(J,J)*B(K,K)-A(K,K)*B(J,J)
      CHECK=(AB*AB+4.0*AKK*AJJ)/4.0
      IF(CHECK) 60,70,70
60     WRITE(LW,1004) CHECK
1004   FORMAT(//10X,'EN JAUTV SE SACARA RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO
     1NEGATIVO',E20.7)
      STOP
70    SQCH=DSQRT(CHECK)
      D1=AB/2.+SQCH
      D2=AB/2.-SQCH
      DEN=D1
      IF(DABS(D2)-DABS(D1))8,8,9
9       DEN=D2
8       IF(DEN) 90,80,90
80     CA=0.
      CG=-A(J,K)/A(K,K)
       GO TO 100
90     CA=AKK/DEN
      CG=-AJJ/DEN
C
C      ROTACIONES GENERALIZADAS
```

```
C
100     IF(N-2) 95,180,95
95     JP1=J+1
       JM1=J-1
      KP1=K+1
      KM1=K-1
       IF(JM1-1) 120,110,110
110    DO 105 I=1,JM1
      AJ=A(I,J)
      BJ=B(I,J)
      AK=A(I,K)
      BK=B(I,K)
       A(I,J)=AJ+CG*AK
      B(I,J)=BJ+CG*BK
      A(I,K)=AK+CA*AJ
105     B(I,K)=BK+CA*BJ
120     IF(KP1-N) 130,130,140
130    DO 125 I=KP1,N
      AJ=A(J,I)
      BJ=B(J,I)
      AK=A(K,I)
      BK=B(K,I)
      A(J,I)=AJ+CG*AK
      B(J,I)=BJ+CG*BK
      A(K,I)=AK+CA*AJ
125    B(K,I)=BK+CA*BJ
140     IF(JP1-KM1) 150,150,180
150    DO 160 I=JP1,KM1
      AJ=A(J,I)
      BJ=B(J,I)
      AK=A(I,K)
        BK=B(I,K)
      A(J,I)=AJ+CG*AK
      B(J,I)=BJ+CG*BK
      A(I,K)=AK+CA*AJ
160    B(I,K)=BK+CA*BJ
```

```
180    AK=A(K,K)
      BK=B(K,K)
       A(K,K)=AK+2.*CA*A(J,K)+CA*CA*A(J,J)
      B(K,K)=BK+2.*CA*B(J,K)+CA*CA*B(J,J)
      A(J,J)=A(J,J)+2.*CG*A(J,K)+CG*CG*AK
      B(J,J)=B(J,J)+2.*CG*B(J,K)+CG*CG*BK
      A(J,K)=0.
      B(J,K)=0.
C
C     AUTOVECTORES
C
      DO 190 I=1,N
      XJ=X(I,J)
      XK=X(I,K)
      X(I,J)=XJ+CG*XK
190    X(I,K)=XK+CA*XJ
50     CONTINUE
      DO 220 I=1,N
220     EIGV(I)=A(I,I)/B(I,I)
      WRITE(L6,1002) (EIGV(I),I=1,N)
1002   FORMAT(/40X,6E13.6)
C
C      ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA
C
      DO 240 I=1,N
      TOL=DABS(ERROR*D(I))
      DIF=DABS(EIGV(I)-D(I))
      IF(DIF-TOL) 240,240,300
240    CONTINUE
C
C      ESTUDIO DE LOS ELEMENTOS FUERA DE LA DIAGONAL
C
      EPS=ERROR**2
      DO 260 J=1,NR
      JJ=J+1
      DO 260 K=JJ,N
```

```
      TT=A(J,K)*A(J,K)
      TB=A(J,J)*A(K,K)
      EPSA=DABS(TT/TB)
      TT=B(J,K)*B(J,K)
      TB=B(J,J)*B(K,K)
      EPSB=TT/TB
      IF(EPSA-EPS) 11,300,300
11    IF(EPSB-EPS) 260,300,300
260    CONTINUE
      DO 310 I=1,N
      DO 310 J=I,N
      B(J,I)=B(I,J)
310    A(J,I)=A(I,J)
      GO TO 21
300    DO 320 I=1,N
320    D(I)=EIGV(I)
      IF(NSWEP-NSMAX) 40,13,13
13     DO 330 I=1,N
      DO 330 J=I,N
      B(J,I)=B(I,J)
330    A(J,I)=A(I,J)
21      CONTINUE
      WRITE(LW,499)
 499   FORMAT(//10X,'AUTOVECTORES'//)
      DO 501 J=1,NAUV
501    WRITE(LW,500)(X(I,J),I=1,NAUV)
500    FORMAT(/8E15.7)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE PROD1(LL)
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      COMMON CCEF,COFK1,COFK2,COF11,COF21,RIGL1,RIGM1,YO
      COMMON ACHE,TE,ELE,EL,DENSI,POIS,CRIG,CALA,RIGL,RIGM,P1,H1,DELP,P
      COMMON RMASP(24,24),RITP(24,24),PHI(24,4),PROD(24,4)
      COMMON RIT(24,25),RMAS(24,24),EIGV(12),D(12),X(12,12)
      COMMON LR,LW,INDR,INDM,N ,M ,NP,NALT,ITERP
      NM=N+M
      IF(LL-1)5,5,6
5     DO 8 I=1,NM
      DO 8 J=1,NP
8     PROD(I,J)=PHI(I,J)
      GO TO 9
6     DO 12 I=1,NM
      DO 12 J=1,NP
      AUX=0.
      DO 11 K=1,NM
11    AUX=AUX+RMAS(I,K)*PHI(K,J)
12    PROD(I,J)=AUX
9     DO 22 I=1,NM
      DO 22 J=1,NP
      AUX=0.
      DO 21 K=1,NM
21    AUX=AUX+RIT(I,K)*PROD(K,J)
22    PHI(I,J)=AUX
      DO 32 I=1,NP
      DO 32 J=1,NP
      AUX=0.
      DO 31 K=1,NM
31    AUX=AUX+PHI(K,I)*PROD(K,J)
32    RITP(I,J)=AUX
      INDM=1
      DO 100 I=1,NM
100   READ(2'INDM)(RMAS(I,J),J=1,NM)
      DO 42 I=1,NM
```

```
      DO 42 J=1,NP
      AUX=0.
      DO 41 K=1,NM
41    AUX=AUX+RMAS(I,K)*PHI(K,J)
42    PROD(I,J)=AUX
      DO 52 I=1,NP
      DO 52 J=1,NP
      AUX=0.
      DO 51 K=1,NM
51    AUX=AUX+PHI(K,I)*PROD(K,J)
52    RMASP(I,J)=AUX
      RETURN
      END
```

```
      SUBRCUTINE ITERC
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      DIMENSION CCMP(24),L(24),IND(24)
      COMMCN COEF,COFK1,COFK2,COF11,COF21,RIGL1,RIGM1,YO
      COMMON ACHE,TE,ELE,EL,DENSI,POIS,CRIG,CALA,RIGL,RIGM,P1,H1,DELP,P
      COMMON RMASP(24,24),RITP(24,24),PHI(24,4),PROD(24,4)
      COMMCN RIT(24,25),RMAS(24,24),EIGV(12),D(12),X(12,12)
      COMMON LR,LW,INDR,INDM,N ,M ,NP,NAUT,ITERP
      IND(1)=1
      ERRCR=0.001
      INDCO=0
      NM=N+M
      N11=N+1
      AUX=P1
      DO 10 LI=1,ITERP
      P=AUX
      INDR=1
      INDM=1
      DO 3C I=1,NM
      READ(2'INDM)(RMAS(I,J),J=1,NM)
30    READ(1'INDR)(RIT(I,J),J=1,NM)
      DO 35 I=1,N
      DO 35 J=1,M
      JN=J+N
35     RIT(I,JN)=RIT(I,JN)*P
      DO 37 I=1,M
      IN=I+N
      DO 37 J=1,M
      JN=J+N
37    RIT(IN,JN)=RIT(IN,JN)+(H1-P*H1)*COEF**(I+J+2)
      DO 39 I=1,NM
      DO 39 J=1,NM
39    RIT(J,I)=RIT(I,J)
      WRITE(LW,366)LI,P
366    FORMAT(///// 'ITERACION N. =',I5,10X,'CARGA CORRESP. =',F10.7//)
```

```
      IF(NM-NP)5,5,6
5     NAUT=NM
      DO 1 I=1,NAUT
      DO 1 J=1,NAUT
      RMASP(I,J)=RMAS(I,J)
1     RITP(I,J)=RIT(I,J)
      CALL JAUTV
      GO TO 100
6     NAUT=NP
      NITER=10
      CALL VECIN
      INDX=0
      CALL INCAP(NM)
      DO 61 LL =1,NITER
      INDM=1
      DO 31 I=1,NM
31     READ(2'INDM)(RMAS(I,J),J=1,NM)
C
C     REDUCCION DE RIT Y RMAS
C
      CALL PROD1(LL)
      CALL JAUTV
      IF(NAUT-1)233,233,234
233   X(1,1)=1.
234   IF(LL-1)86,86,70
70    INDX=0
      DO 75 K=1,NP
      IF(DABS(EIGV(K))-DABS(COMP(K))-ERROR)80,80,75
80    INDX=INDX+1
75    CONTINUE
86    CONTINUE
      DO 68 I=1,NP
68    COMP(I)=EIGV(I)
       IF(NP-INDX)85,85,63
63    DO 3122 I=1,NM
      DO 3122 J=1,NP
```

```
      CUX=C.
      DO 3121 K=1,NP
3121   CUX=CUX+PHI(I,K)*X(K,J)
3122  PROD(I,J)=CUX
      DO 28 I=1,NM
      DO 28 J=1,NP
28    PHI(I,J)=PROD(I,J)
61    CONTINUE
85    LFIN=LL
      WRITE(LW,1233)
1233  FORMAT(//10X,'AUTOVECTORES DE MATRIZ REDUCIDA'/)
      DO 1234 J=1,NP
1234  WRITE(LW,1068)(PHI(I,J),I=1,NM)
1068  FORMAT(/8E15.7)
      WRITE(LW,90)LFIN
90    FORMAT(//10X,'CONVERGENCIA EN LA CONDENS, A LA ITERAC. N. =',I4/)
100   DO 165 I=1,NAUT
165   L(I)=0
      DO 150 ICI=1,NAUT
      DO 152 I=1,NAUT
      IF(L(I))152,153,152
153    K=I
       GO TO 155
152    CONTINUE
155    KL=K
158    KL=KL+1
      IF(NAUT-KL)164,163,163
163    IF(L(KL))158,166,158
166    IF(EIGV(K)-EIGV(KL))158,158,169
169    K=KL
      GO TO 158
164    L(K)=1
150    IND(ICI)=K
      WRITE(LW,185)(IND(I),I=1,NAUT)
185    FORMAT(//'  LUGARES DE LOS AUTOV.=',10I5//)
      KKK=IND(1)
```

```
      IF(EIGV(KKK))15,15,18
   18  IF (INDCO)16,16,191
191    IF(INDCO-IND(1   ))15,16,15
16    AUX=AUX+DELP
      GO TO 195
15    AUX=P-DELP+DELP/5.
      DELP=DELP/5.
      GO TO 10
195    INDCO=IND(1)
 10   CONTINUE
      RETURN
      END
/*
//GO.FT01F001 DD DSN=&&AGUSTIN,DISP=(NEW,DELETE),UNIT=SYSDA,
//  SPACE=(192,(24,1),RLSE)
//GO.FT02F001 DD DSN=&&AGUSTI ,DISP=(NEW,DELETE),UNIT=SYSDA,
//  SPACE=(192,(24,1),RLSE)
//GO.SYSIN DD *
```

## A P E N D I C E 4

## EXTENSION A PROBLEMAS MAS GENERALES

Se planteó el método dinámico y se resolvió el problema en estudio en forma numérica, utilizando los métodos directos - de R. Ritz y de E. Finitos, siendo que pueden imponerse condiciones de contorno diferentes de las ya utilizadas, tales como para-- resolver problemas de inestabilidad de vigas con vinculaciones a otras en cualquier punto interno y cargas en cualquier posición para los casos siguientes:

a) vigas completamente restringidas en ambos extremos

b) " " " " un extremo y parcialmente restringidas en el otro.

c) vigas idem casos: en estudio, a y b con restricciones entre 0 y 1.-

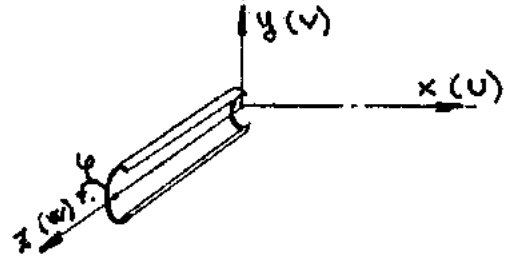
tal como se planteó el problema, el método de E.Finitos también puede utilizarse para:

d) vigas con los extremos parcialmente restringidos

e) idem d, con restricciones internas.

Para los casos (a) a (c) en el M.de Ritz habría que incrementar el número de resortes y de cargas(proporcionales a P)hasta que sea necesario. Con el mencionaddo, las condiciones de restricción total de desplazamientos generalizados son efectuadas con resortes de rigidez suficientemente grande, mientras que ello no ocurre con E. Finitos, siendo conveniente dividir en elementos sin-resortes internos

Para generalizar el problema es necesario admitir más grados de libertad, suponiendo que se producirán, por ejemplo 4desplazamientos generalizados (fig 1): u, v, w, $\varphi$




(fig 1)

En el método de E. Finitos se asignan significado a las incógnitas nodales y éstas pueden adoptarse en un número mayor que 4; se formulan las siguientes incógnitas por nudo:

a) $u_N$ ; $v_N$ ; $w_N$ ; $\varphi_N$ ; $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_N$ ; $\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_N$ ; $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_N$ ( 7 incógnitas)

en éste caso, pueden relacionarse las incógnitas por - medio de los polinomios de Hermite de $3^{er}$ grado, igual que en el presente trabajo (4.18) a (4.22)

para $u_N$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_N$ ; $v_N$, $\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_N$ ; $\varphi_N$, $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_N$

para $w_N$ se utiliza: $w = (1-\zeta)w_1 + \zeta w_2$

b) además de las incógnitas nodales del caso (a) se tienen las siguientes:

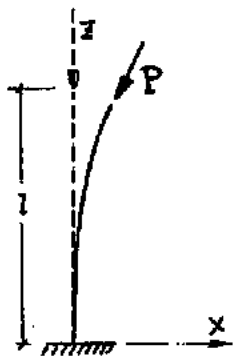
$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_N$ ; $\left.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_N$ ; $\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right|_N$ ( 10 incógnitas)

para los cuales sería necesario el empleo de los polinomios de Hermite de $5^{to}$ grado, cuyas expresiones pueden consultarse en Barsoum (9), y tratado en forma completamente similar al ya planteado.-

A partir de (2.3) es posible considerar el trabajo de las cargas aplicadas a la estructura, incluyendo la parte no conservativa de ellas. Aquí el sistema pierde la propiedad de ser auto-adjunto, notándose ello en la no simetría de la matriz proveniente de la parte no conservativa de las cargas aplicadas.

Para éste tipo de problemas, debe plantearse tal matriz para cada caso particular y observar que tipo de restricciones adicionales es necesario imponer sobre el sistema.

Por ejemplo, para el problema de Beck, en el caso que el desplazamiento generalizado es u: (fig 2)




(fig. 2)

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l m\,\omega^2 u^2\,dz$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y\, u_{zz}^2\,dz$$

$$W^c = \frac{1}{2}\int_0^l P\,u_z^2\,dz$$

$$\delta W^{nc} = -P\,u_z(l)\,\delta u(l) \qquad (1)$$

se puede transformar en:

$$\delta W^{nc} = \delta\left[-P\,u_z(l)\,u(l)\right] \quad ; \quad \delta u_z(l) = 0$$

o sea, se debe imponer condición de contorno en $u_z$ (1)

Con el método de E. Finitos puede efectuarse ensamble entre elementos, siempre que se tenga compatibilidad de deformaciones a nivel de nudos, rotando los elementos respecto a un sis--

tema global de referencia y con ello pueden analizarse casos de estructuras con vinculación más compleja y casos de cargamentos no conservativos utilizando el método dinámico (único posible para el último caso) utilizándo el criterio dinámico de estabilidad (Capítulo II).-

Por último debe llamarse la atención que para casos de cargamentos no conservativos con análisis linealizado no deben resolverse sin tener en cuenta el monto del amortiguamiento estructural, siempre presente en las estructuras reales y que causa un efecto 'desestabilizante', siendo la carga crítica calculada sin llevar en cuenta tal efecto, un límite superior de la real[14]; otra forma de obtener la carga crítica real sería efectuando un análisis no lineal, siendo que para casos de estructuras sometidas a cargamentos conservativos, pueden ser estudiadas como aquí se hizo (análisis linealizado y sin llevar en cuenta el amortiguamiento)

# B I B L I O G R A F I A


1.- V. V. Bolotin:"Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability", The Mc Millam Company, N. Y. 1963.

2.- J. G. A. Croll - A. C. Walker:"Elements of Structural Stability", The Mc Millan Press Ltd, 1973.

3.- Timoshenko & Gere:"Theory of Elastic Stability", Mc Graw Hill Kogakusha, 1961.

4.- L. Mairovitch:"Analitical Methods in Vibrations", The Mc Millan Company, London, 1967.

5.- Francis B. Hildebrand:"Methods of Applied Mathematics", Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1965.

6.- V. V. Novozilov:"Foundations of the Non Linear Theory of Elasticity", Graylock Press, 1953.

7.- O. C. Zienkiewics:"The Finite Element Method in Engineering - Science", Mc Graw Hill - London, 1971.

8.- John M. T. Thompson:"A General Theory for the Equilibrium and Stability of a Discrete Conservative System",ZAMP, - Vol. 20, 1969.

9.- Roshdy S. Barsoum:"Finite Element Method Applied to the Problem of Stability of a non-conservative System", Int. Journal for Numerical Methods - Vol. 3, 1971.

10.- Thompson - Walker: "The non Linear Perturbation Analysis of - Discrete Conservative Systems", Int. Journal of Solids and Structures, Perg. Press - Vol 4, 1968.

11.- Feijóo, Raúl A.: "Funcionales relajados en Campos Discontínuos de Funciones Admisibles", Seminario requisito p/ D.Sc. COPPE, Mayo de 1974

12.- Feijóo, Raúl A.: "Formulación General del Método de Ritz. Método de Elementos Finitos como un Caso Particular" , Seminario requisito p/ D.Sc. COPPE, Mayo de 1974.

13.- Mikhin, S. G.: "The Problem of the Mínimum of a Quadratic - Functional", Holden Day, Series in Math. Physics, - 1965.

14.- S Nemat Nasser - John Roorda: "On the Energy Concepts in the Theory of Elastic Stability", Acta Mechanica IV/3 , 1967.

15.- A. J. Hartmann: "Inelastic Flexural-Torsional Buckling", Journal of the Eng. Mech. Div. August 1971 - EM4.

16.- John Roorda: "Stability of Structures with small Imperfections" , Journal of the Eng. Mech. Div., February 1965 - EM1.

17.- John Roorda: "The Buckling Behavior of Imperfect Structural Systems", J. Mech. Phys. Solids - 1965 - Vol. 13.

18.- Sydney M. G. dos Santos: "Flambage Latéral des Poutres avec Liaison Simple",Mémoires, Ass. Int. des Ponts et Charpentes, Zurich, 1957

19.- S. J. Britvec - A. H. Chilver: "Elastic Buckling of Rigidly - Jointed Braced Frames", Journal of the Eng. Mech. Div. Div ASCE 89 Nº EM6.-

20.- S. H. Gould: "Variational Methods for Eigenvalue Problems", Univ. of Toronto Press, 1966.

21.- Luis F. Rojas - Raúl A. Feijóo: "Solucion de Problemas de autovalor en grandes Estructuras", Comite Tecnico Nº 6

A ser publicado por COPPE.

22.- Bathe Klaus-Jurgen: "Solution Methods for Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering", Structural Engineering Laboratory, Univ. of California, 1971.

23.- J. S. Przemieniecki: "Theory of Matrix Structural Analysis" , Mc Graw Hill - 1968.

24.- R. K. Livesley: "Métodos Matriciales para Cálculo de Estructuras", Editorial Blume, 1970