



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS JURÍDICAS E ECONÔMICAS
FACULDADE DE ADMINISTRAÇÃO E CIÊNCIAS CONTÁBEIS**

Guilherme Grin Monteiro de Barros

**DURAÇÃO E CONVEXIDADE COMO MEDIDAS DE SENSIBILIDADE AO
RISCO DE VARIAÇÃO DAS TAXAS DE JUROS: UM ESTUDO DE CASO
APLICADO A TÍTULOS PÚBLICOS FEDERAIS PREFIXADOS**

Rio de Janeiro – RJ

2021

Guilherme Grin Monteiro de Barros

**DURAÇÃO E CONVEXIDADE COMO MEDIDAS DE SENSIBILIDADE AO
RISCO DE VARIAÇÃO DAS TAXAS DE JUROS: UM ESTUDO DE CASO
APLICADO A TÍTULOS PÚBLICOS FEDERAIS PREFIXADOS**

Monografia apresentada como requisito à obtenção do grau de Bacharel em Administração à Faculdade de Administração e Ciências Contábeis da Universidade Federal do Rio de Janeiro (FACC/UFRJ).

Orientador(a): Marco Antônio Cunha de Oliveira.

Rio de Janeiro – RJ

2021

Dedico o presente trabalho à minha família, que me formou o homem que sou, aos meus amigos, que sempre estiveram ao meu lado, e à minha namorada, pelo suporte imensurável ao longo do processo.

RESUMO

O objetivo deste estudo de caso foi verificar a eficácia da duração de Macaulay e da convexidade como medidas de sensibilidade de títulos à variação das taxas de juros. Para isso, foi analisada, em dois cenários simulados, a acurácia das estimativas de variação dos preços unitários de títulos públicos federais prefixados (LTN e NTN-F) pautadas tanto na duração modificada quanto na duração modificada ajustada pela convexidade. Os resultados apontaram melhora significativa das estimativas após a adição do fator de correção do efeito convexidade ao modelo.

Palavras-chave: duração, duração modificada, convexidade, títulos públicos, renda fixa, taxas de juros, LTN, NTN-F.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ANBIMA:	Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais
BCB:	Banco Central do Brasil
CDB:	Certificado de Depósito Bancário
CMN:	Conselho Monetário Nacional
Copom:	Comitê de Política Monetária
CRI:	Certificado de Recebíveis Imobiliários
CRA:	Certificado de Recebíveis do Agronegócio
CVM:	Comissão de Valores Mobiliários
DPF:	Dívida Pública Federal
DPFe:	Dívida Pública Federal externa
DPMFi:	Dívida Pública Mobiliária Federal interna
ETTJ:	Estrutura Temporal das Taxas de Juros
FGV:	Fundação Getúlio Vargas
IBGE:	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IGP-M:	Índice Geral de Preços - Mercado
IPCA:	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
LDO:	Lei de Diretrizes Orçamentárias
LF:	Letra Financeira
LFT:	Letras Financeiras do Tesouro
LOA:	Lei Orçamentária Anual
LTN:	Letras do Tesouro Nacional
NTN:	Notas do Tesouro Nacional
NTN-B:	Notas do Tesouro Nacional Série B
NTN-B/C:	Notas do Tesouro Nacional Série B e Série C
NTN-C:	Notas do Tesouro Nacional Série C
NTN-F:	Notas do Tesouro Nacional Série F
PPA:	Plano Plurianual
PU:	Preço Unitário
Selic:	Sistema Especial de Liquidação e de Custódia

SFN: Sistema Financeiro Nacional
STN: Secretaria do Tesouro Nacional
TN: Tesouro Nacional
VN: Valor Nominal
VNA: Valor Nominal Atualizado

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Composição da DPMFi – março/2021	19
---	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Convexidade - um aperfeiçoamento da Duração	29
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Comparação da Variação do preço da LTN por Duração e Convexidade.	35
Tabela 2: Cálculo da Duração da NTN-F	36
Tabela 3: Cálculo da Convexidade da NTN-F	37
Tabela 4: Cálculo dos Preços Unitários e da Variação Efetiva da NTN-F	38
Tabela 5: Comparação da Variação do PU da NTN-F por Duração e Convexidade.	38

LISTA DE FÓRMULAS

Fórmula 1: Preço Unitário da LTN.....	20
Fórmula 2: Preço Unitário da NTN-F com base em taxas variáveis.....	21
Fórmula 3: Preço Unitário da NTN-F com base na taxa constante equivalente	21
Fórmula 4: Cotação da LFT.....	23
Fórmula 5: Preço Unitário da LFT	23
Fórmula 6: Cotação da NTN-B/C com base em taxas variáveis	25
Fórmula 7: VNA da NTN-B/C	25
Fórmula 8: Preço Unitário da NTN-B/C.....	26
Fórmula 9: Duração de Macaulay	28
Fórmula 10: Duração Modificada	28
Fórmula 11: Convexidade	29
Fórmula 12: Modelo da Duração Modificada ajustado pela Convexidade.....	30
Fórmula 13: Modelo da Duração Modificada.....	301

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
1.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA.....	11
1.2. OBJETIVOS	11
1.2.1. Objetivo Geral	11
1.2.2. Objetivos Específicos	11
1.3. ETAPAS DO TRABALHO.....	12
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1. POLÍTICA MONETÁRIA.....	13
2.1.1. Recolhimentos compulsórios.....	14
2.1.2. Redesconto.	15
2.1.3. Operações de Mercado Aberto (Open Market)	15
2.2. POLÍTICA FISCAL	16
2.3. TÍTULOS PÚBLICOS FEDERAIS	18
2.3.1. Letras do Tesouro Nacional (LTN)	20
2.3.2. Notas do Tesouro Nacional Série F (NTN-F)	20
2.3.3. Letras Financeiras do Tesouro (LFT).....	22
2.3.4. Notas do Tesouro Nacional Série B e C (NTN-B/C).....	24
2.4. DURAÇÃO E CONVEXIDADE	26
3. METODOLOGIA	31
3.1. MODELO DA DURAÇÃO MODIFICADA.....	331
3.2. MODELO DA DURAÇÃO MODIFICADA AJUSTADO PELA CONVEXIDADE	332
4. ESTUDO DE CASO	33
4.1. VARIAÇÃO DE PREÇO DE UMA LTN POR DURAÇÃO E CONVEXIDADE.....	33
4.2. VARIAÇÃO DE PREÇO DE UMA NTN-F POR DURAÇÃO E CONVEXIDADE.	35
5. CONCLUSÃO	39
REFERÊNCIAS	40

1. INTRODUÇÃO

De acordo com Alves e Moreira (1996), a principal função de uma instituição financeira é a intermediação. Por meio da emissão de títulos de renda fixa, recursos são captados com o mercado para, em seguida, serem aplicados em ativos que proporcionem uma taxa de retorno mais atrativa. A diferença entre o custo dos empréstimos captados e a rentabilidade dos empréstimos concedidos pode ser entendida como a remuneração sobre a atividade da instituição, e é conhecida como *spread*.

Entretanto, o descasamento de prazos e indexadores das operações pode gerar oscilações indesejadas nos spreads, implicando em riscos para o negócio. Com isso, a gestão do risco proveniente de possíveis flutuações nas taxas de juros é fundamental para a perpetuação de instituições financeiras no mercado, e é monitorado de perto tanto por tesourarias e quanto por gestoras de recursos (SUEN; KIMURA; NONAKA, 1997).

Inicialmente, por carência de instrumentos de medição adequados, chegou-se a pensar que a solução mais plausível para mitigar o risco de variação das taxas de juros seria casar o prazo das captações com o das aplicações, o que implica em sérias dificuldades operacionais relacionadas à atividade de intermediação (ALVES; MOREIRA, 1996). Para a sorte das instituições financeiras, foram desenvolvidas, anos mais tarde, ferramentas capazes de mensurar com maior acurácia a sensibilidade do preço dos ativos às variações nas taxas de juros, permitindo gerenciá-las de acordo com o apetite de cada instituição.

Além disso, a importância do gerenciamento do risco de variação das taxas de juros não se limita apenas aos investidores institucionais. Usualmente, boa parte da reserva financeira dos indivíduos é constituída por ativos de renda fixa, e, por mais que a rentabilidade desses títulos seja definida no momento da compra, só é garantida caso o investidor carregue-os até o vencimento (e, obviamente, não ocorra um calote da dívida). Caso contrário, será necessário encontrar outro investidor interessado em comprá-los no mercado secundário, incorrendo, assim, em riscos de mercado.

1.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

O problema de pesquisa foi definido como: A duração modificada e a convexidade são instrumentos suficientemente confiáveis para estimar os efeitos causados por flutuações das taxas de juros no preço de títulos prefixados da dívida pública federal brasileira?

1.2. OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho podem ser divididos em: objetivo geral e objetivos específicos.

1.2.1. Objetivo Geral

O presente estudo tem como objetivo geral testar a eficácia de dois dos mais importantes instrumentos de medição de risco de ativos de renda fixa disponíveis na atualidade: a duração e a convexidade. Para isso, foi conduzido um estudo de caso, onde, por meio de simulações da variação das taxas de desconto de títulos públicos federais prefixados, buscou-se analisar o poder preditivo da duração modificada e da convexidade em relação à variação efetiva do preço unitário dos títulos.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Apresentar as políticas monetária e fiscal e suas respectivas relações com os títulos da dívida pública brasileira.
- Introduzir brevemente os principais títulos públicos federais do Brasil.
- Explicar os conceitos e aplicações da duração, duração modificada e convexidade.
- Calcular a duração e a convexidade de títulos prefixados com e sem cupom (LTN e NTN-F) emitidos pelo Tesouro Nacional
- Simular a variação das taxas de desconto desses títulos e verificar se as estimativas obtidas por meio dos modelos de duração modificada simples e ajustada pelo efeito da convexidade estão em linha com as variações efetivas do preço unitário.

1.3. ETAPAS DO TRABALHO

Com o intuito de alcançar os objetivos supracitados da forma mais clara possível, o trabalho foi dividido em cinco capítulos, sendo o primeiro a presente introdução.

O segundo capítulo apresentará a revisão bibliográfica, onde serão abordados conceitos fundamentais para a devida compreensão do tema proposto, como: (i) a dinâmica dos tipos de política econômica que mais afetam o mercado de renda fixa soberano (monetária e fiscal); (ii) as características dos principais títulos da dívida pública federal; e (iii) a duração e a convexidade, dois dos conceitos mais importantes para a gestão do risco de variação das taxas de juros e temas centrais do estudo de caso.

Em seguida, o capítulo três tem como objetivo elucidar o leitor quanto aos métodos adotados. Inicialmente será efetuada a caracterização do trabalho, seguido da descrição dos procedimentos de coleta e tratamento dos dados.

No quarto capítulo serão relatados os resultados obtidos no estudo de caso por meio das simulações de cenários para as taxas dos títulos públicos federais e da aplicação dos conceitos de duração e convexidade.

Por fim, o quinto e último capítulo visa consolidar as principais conclusões vislumbradas por meio da análise dos resultados obtidos ao longo do estudo de caso.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta revisão bibliográfica visa apresentar a dinâmica das políticas econômicas monetária e fiscal, a importância dos títulos da dívida pública federal, os principais tipos de títulos ofertados pelo Tesouro Nacional e os conceitos de duração e convexidade como medidas do risco de variação das taxas de juros.

2.1. POLÍTICA MONETÁRIA

Políticas econômicas podem ser interpretadas como ações governamentais que visam atingir objetivos sociais e macroeconômicos específicos, como: uma distribuição de riqueza mais igualitária, o pleno emprego, o controle inflacionário e o crescimento econômico (ASSAF NETO, 2018).

A política monetária diz respeito ao conjunto de ações, geralmente executadas por um Banco Central, com o intuito controlar a quantidade de moeda em circulação em uma economia por meio da liquidez do sistema bancário.

No caso do Brasil, as diretrizes gerais das políticas monetária, creditícia e cambial são definidas pelo Conselho Monetário Nacional (CMN), órgão deliberativo máximo do Sistema Financeiro Nacional (SFN), com base no sistema de metas de inflação. Em termos práticos, além de regular as condições de funcionamento e fiscalização das instituições financeiras, o CMN define a meta de inflação a ser perseguida pelo Banco Central do Brasil (BCB) por meio das políticas monetária e cambial.

O BCB, por sua vez, é a autoridade monetária executora que atua diretamente na economia com o objetivo de cumprir as diretrizes estabelecidas pelo CMN, assegurando a solidez do sistema financeiro e a estabilidade do poder de compra da moeda. Dentre suas principais funções, podemos citar: (i) o monopólio da emissão de moeda; (ii) ser o banco do governo; (iii) ser o banco dos bancos; (iv) supervisionar as instituições financeiras; (v) executar a política monetária; e (vi) executar a política cambial (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2016).

A tradução das metas de inflação em alvos para política monetária é responsabilidade do Comitê de Política Monetária (Copom), um órgão vinculado ao BCB composto pelo Presidente do Banco Central e mais oito de seus diretores.

Instituído em 1996 para trazer mais transparência para política monetária, o Copom tem como principal objetivo definir e divulgar a cada 45 dias a meta para taxa básica de juros da economia (ASSAF NETO, 2018).

A taxa básica de juros, conhecida no Brasil como taxa Selic ou *Selic over*, impacta diretamente as demais taxas de juros da economia e é obtida por meio da taxa média praticada por instituições financeiras nas operações de financiamento de um dia lastreadas em títulos públicos federais, custodiadas e liquidadas no Sistema Especial de Liquidação e Custódia (Selic) (BERGER, 2015). Como a demanda e a taxa cobrada por tais operações têm ligação direta com o nível de reservas bancárias (ou liquidez) do sistema, o BCB intervém no mercado monetário por meio de seus instrumentos, de forma a controlar a liquidez e direcionar a *Selic over* para a *Selic Meta* (definida pelo Copom), com a esperança de que tal patamar seja apropriado para manter a inflação dentro da meta estabelecida pelo CMN.

A depender dos efeitos visados no agregado monetário e na economia como um todo, a política monetária, assim como as outras políticas econômicas, pode ser classificada como expansionista (que busca estimular da atividade econômica por meio do aumento da liquidez), contracionista (busca o arrefecimento da atividade por meio da redução da liquidez) ou neutra. De acordo com Berger (2015) a política monetária é implementada pelo BCB por meio de três principais instrumentos: os recolhimentos compulsórios, as operações de redescontos e as operações de mercado aberto.

2.1.1. Recolhimentos compulsórios

Os recolhimentos compulsórios são representados por percentuais dos diversos tipos de captação dos bancos comerciais, múltiplos com carteira comercial e caixas econômicas junto ao público que devem ser deixados sob forma de reserva no BCB. Como abordado por Assaf Neto (2018), sua eficácia como instrumento da política monetária se dá em função do controle da solvência do sistema bancário e do efeito multiplicador que os empréstimos exercem sobre a quantidade de moeda em circulação.

Sendo assim, a adoção de uma política monetária expansionista por meio dos recolhimentos compulsórios consiste na redução do percentual mínimo obrigatório de

depósitos alocados como reserva no Banco Central, resultando no aumento da liquidez do sistema bancário e, dessa forma, estimulando a oferta de crédito, a redução dos juros e o aumento da atividade econômica. O inverso, no caso de uma política monetária contracionista, é verdadeiro.

2.1.2. Redesconto

Uma instituição financeira que visa equilibrar suas necessidades de caixa frente a um aumento ou redução repentina da demanda dos depositantes, pode pegar empréstimos com o mercado ou diretamente com o Banco Central. Estes últimos são conhecidos como empréstimos de assistência à liquidez, e são remunerados por uma taxa de juros utilizada como instrumento de política monetária, a taxa de redesconto.

Ao estabelecer taxas de redesconto acima ou abaixo das taxas de mercado o BCB consegue atuar sobre o nível de liquidez monetária, as taxas de juros praticadas no sistema bancário e a oferta de crédito na economia. No entanto, por mais que tal instrumento seja frequentemente utilizado para aumentar a oferta de crédito de longo prazo para setores estratégicos da economia, no Brasil essa política vem sendo mais adotada como um auxílio financeiro aos bancos com problemas de caixa (ASSAF NETO, 2018).

2.1.3. Operações de Mercado Aberto (Open Market)

Tratam-se de operações de compra e venda de títulos da dívida pública por parte do BCB, com o intuito de controlar a liquidez do sistema bancário. Apresentadas por Berger (2015) como o instrumento mais ágil de política monetária, permitem a regulação contínua da oferta monetária e do custo primário do dinheiro (taxa de curtíssimo prazo praticada no mercado interbancário).

As operações no mercado aberto podem ser divididas em dois grupos distintos: operações compromissadas e definitivas. Nas operações compromissadas o BCB negocia títulos com instituições financeiras credenciadas (*dealers*) com o compromisso de recomprá-los em uma data futura a uma determinada taxa, sendo a operação mais comum a de um dia (*overnight*). Já nas definitivas, além de não haver

o compromisso de recompra, os leilões contam com a participação de todas as instituições financeiras interessadas.

A despeito das divergências entre os tipos de operações, sua função como instrumento da política monetária é semelhante. No momento em que o BCB vende títulos públicos ao mercado ocorre uma redução das reservas bancárias. Analogamente, quando efetua a compra de títulos públicos ocorre o inverso. Por meio dessa dinâmica é possível atuar precisamente sobre a oferta e a demanda de operações compromissadas lastreadas em títulos públicos federais, de forma a convergir a média das taxas praticadas nas operações interbancárias de *overnight* para a meta definida pelo Copom (Selic Meta).

Assaf Neto (2018), afirma, ainda, que além de permitir o controle do volume diário da oferta de moeda na economia e a manipulação das taxas de juros de curto prazo, as operações no mercado aberto, ao criarem liquidez ao mercado de títulos públicos brasileiros, acabam facilitando a captação de recursos por parte do governo federal.

Vale destacar que, no Brasil, a Lei Complementar nº 101, de 4 de maio de 2000 (Brasil, 2000), ou da Lei de Responsabilidade Fiscal, determinou que a partir de maio de 2002 o BCB não poderia mais emitir títulos da dívida pública federal, obrigando-o a executar operações no mercado aberto por meio de uma carteira de títulos emitida e cedida pela Secretaria do Tesouro Nacional (STN). Além disso, o artigo 7º da Lei de Responsabilidade Fiscal determina que o resultado financeiro apurado pelo BCB (lucros ou prejuízos) deve ser repassado para o Tesouro Nacional (TN).

2.2. POLÍTICA FISCAL

É a política econômica que busca por meio da gestão das receitas e despesas do setor público exercer influência sobre a atividade econômica, dado que alterações nas alíquotas tributárias e nos gastos governamentais afetam o nível de consumo e investimento dos agentes econômicos e, conseqüentemente, a demanda agregada da economia (ASSAF NETO, 2018).

Dessa forma, a política fiscal pode ser encarada como o viés e a execução do planejamento fiscal, que, por sua vez, é o meio pelo qual o Poder Executivo (com a

sanção do Legislativo) estabelece seus objetivos e estratégias para o mandato, identifica os riscos fiscais e define as melhores práticas a serem adotadas durante a execução das políticas públicas. O planejamento é oficializado e comunicado por meio das três Leis Orçamentárias: (i) o Plano Plurianual (PPA), que consiste no planejamento tático dos objetivos e metas a serem alcançados pela administração pública federal no horizonte de quatro anos a partir do ano seguinte a sua elaboração; (ii) a Lei de Diretrizes Orçamentárias (LDO), que tem a função principal de priorizar os objetivos abordados no PPA a serem cumpridos no exercício seguinte; e (iii) a Lei Orçamentária Anual (LOA), que estima e autoriza, com base nas diretrizes da LDO, a quantidade de recursos autorizados a serem desembolsados pela União no exercício seguinte (SECRETARIA DO TESOURO NACIONAL, 2020).

No entanto, como esse tipo de política impacta diretamente o orçamento público, sua aplicação precisa ser ponderada. Como um saldo de caixa não pode ser negativo, os déficits orçamentários são cobertos por meio da emissão de títulos da dívida pública federal por parte da STN, incorrendo em um *trade-off* para os formuladores de políticas públicas entre o estímulo econômico desejado e a alavancagem do país.

No Brasil, esse *trade-off* tornou-se um dilema. Se por um lado existe a necessidade crescente de serviços públicos, por outro não se verifica um superávit primário (na base anual) desde 2014. A Secretaria do Tesouro Nacional (2020) afirma que a solução é a priorização da eficiência e da sustentabilidade das políticas públicas. Ou seja, fazer mais com menos por meio de gastos públicos de qualidade.

A STN é o órgão vinculado ao Ministério da Economia responsável pela administração do TN, o caixa da União. Suas atribuições englobam a gestão da dívida pública federal, a fiscalização das contas públicas e a busca pelo superávit primário, de forma a monitorar os resultados e mensurar os impactos das políticas públicas em relação ao equilíbrio fiscal (ASSAF NETO, 2018).

O resultado primário do setor público, ao excluir o impacto do custo da dívida no orçamento (resultado dos déficits acumulados no passado), mede o esforço corrente da política fiscal. O mesmo é divulgado mensalmente pelo TN, e pode ser calculado por meio da diferença entre as receitas (exceto aplicações financeiras) e despesas (exceto juros da dívida). O resultado nominal, por outro lado, representa o resultado total do setor público, sem exclusões.

Assaf Neto (2018, p.32) explica a dívida pública como uma dívida contraída pelo governo com o mercado, com o intuito de “antecipar receitas de impostos para financiar gastos maiores”, “financiar investimentos sociais e em infraestrutura”, “acumular divisas estrangeiras” e “executar política econômica controlando o nível de liquidez do sistema”. Essa dívida, como qualquer outra, implica no aumento de disponibilidades no presente em troca da redução de disponibilidades no futuro, sendo a magnitude dessa troca diretamente proporcional ao volume captado e à taxa de juros demandada pelo credor. Com base nisso, Triches e Bertussi (2017) afirmam que a dinâmica da dívida atinge a insustentabilidade no momento em que ela cresce mais rápido do que o volume de recursos auferidos para o pagamento do seu serviço (juros e amortização) ou quando ela atinge um patamar tão elevado que é necessário realizar uma reestruturação.

2.3. TÍTULOS PÚBLICOS FEDERAIS

Os títulos públicos federais são ativos financeiros de renda fixa utilizados no Brasil tanto pela STN para captar recursos com os agentes econômicos (visando cobrir déficits orçamentários e/ou antecipar receitas) quanto pelo BCB na aplicação da política monetária. Basicamente, são obrigações escritas de dívidas entre o governo federal (devedor) e os investidores (credores), que possuem características específicas, como: fluxos de pagamentos, taxa de remuneração, data de vencimento, entre outras (SANTOS; SILVA, 2015).

Ativos financeiros podem ser negociados em dois mercados distintos: o mercado primário e o secundário. O mercado primário é onde ocorre a emissão original do ativo, ou seja, a transação ocorre entre o emissor e o investidor. Já o mercado secundário, diz respeito às transações que ocorrem entre os investidores para determinar quem será o beneficiário dos desembolsos efetuados pelo emissor.

De acordo com Assaf Neto (2018, p.88), a emissão de títulos públicos federais pode ser realizada de três formas distintas no Brasil: “oferta pública com realização de leilões”, “oferta pública sem a realização de leilões (venda direta pelo Tesouro)” e “emissões destinadas a atender a necessidades específicas previstas em lei”.

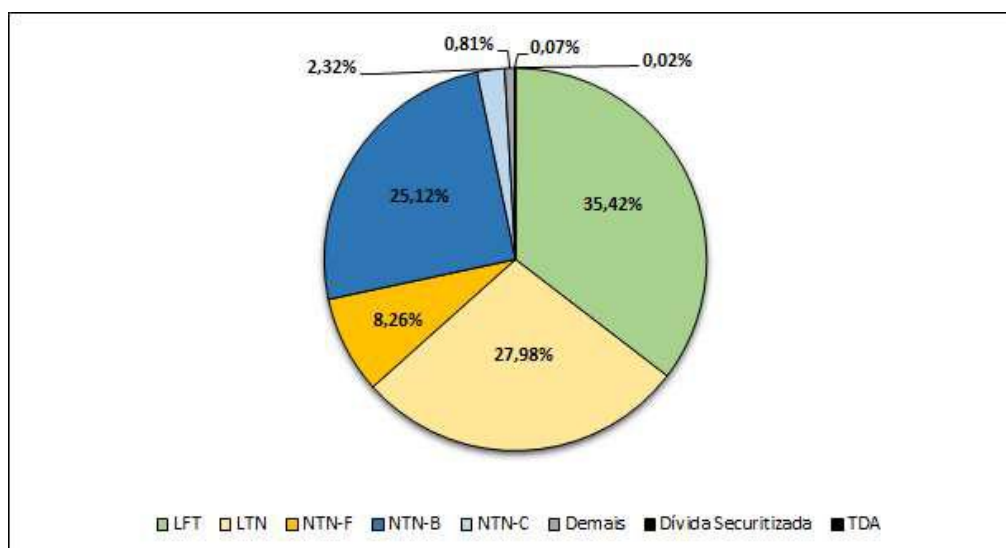
Os leilões que ocorrem no mercado primário são conhecidos como leilões formais, e contam com a participação de todas as instituições financeiras interessadas

que estejam registradas no Sistema de Oferta Pública Formal Eletrônica (*OfPub*). Já os leilões informais são utilizados para a execução da política monetária por meio de operações no mercado aberto. Nesse tipo de leilão somente é autorizada a participação dos *dealers*, que são responsáveis por intermediar e comunicar aos agentes econômicos sobre as intenções de compra e venda de títulos públicos por parte do BCB. Tanto o *ofDealers* quanto o *OfPub* estão interligados à Selic e são geridos pelo BCB (ASSAF NETO, 2018).

A Dívida Pública Federal (DPF) é formada pelo conjunto de títulos emitidos pelo governo federal que não atingiram o vencimento nem foram resgatados antecipadamente, englobando tanto a Dívida Pública Mobiliária Federal interna (DPMFi) quanto a Dívida Pública Federal externa (DPFe). Com base no Relatório Mensal da Dívida Pública Federal (2021) referente a março, os títulos emitidos em moeda nacional no mercado interno (DPMFi) possuem maior relevância para a DPF, representando, à época, 95,13% do estoque total de R\$ 5,24 trilhões.

Os títulos que compõem a DPMFi podem ser divididos em três principais grupos: (i) Letras do Tesouro Nacional (LTN); (ii) Letras Financeiras do Tesouro (LFT); e (iii) Notas do Tesouro Nacional (NTN). Segundo Berger (2015), enquanto as LTN e LFT são emitidas preferencialmente para financiamentos de curto e médio prazo, as NTN tendem a possuir uma maturidade maior e serem emitidas para financiamentos de médio e longo prazo.

Gráfico 1: Composição da DPMFi – março/2021



Fonte: Secretaria do Tesouro Nacional. Relatório Mensal da Dívida Pública Federal, março de 2021;
Elaboração: Autor

Como evidenciado no gráfico acima, em março de 2021 esses três grupos de títulos eram responsáveis por mais de 99% da DPMFi. Em função de sua importância para o tema, serão apresentadas em seguida suas principais características e metodologias de cálculo.

2.3.1. Letras do Tesouro Nacional (LTN)

A Letra do Tesouro Nacional é um título prefixado que não possui cupons (fluxos de caixa intermediários), sendo conhecido no mercado como *bullet*. A remuneração da LTN, portanto, acontece por meio de um pagamento único na data de vencimento no valor de R\$ 1000 (valor de face), enquanto o preço unitário (PU) a ser pago pelo título será determinado com base no valor presente deste fluxo de R\$ 1000 descontado pela taxa apregoada. (BERGER, 2015).

Abaixo segue a metodologia de cálculo do preço unitário (PU) de uma LTN (BERGER, 2015).

$$PU_{(LTN)} = \frac{1\ 000}{\left(1 + \frac{\text{taxa}}{100}\right)^{\frac{du}{252}}} \quad (1)$$

Onde,

PU = preço unitário;

taxa = taxa de juros anualizada;

du = número de dias úteis entre a data de liquidação da operação (inclusive) e a data de vencimento do ativo (exclusive).

2.3.2. Notas do Tesouro Nacional Série F (NTN-F)

A NTN-F é um título prefixado com cupom, ou seja, conta com o pagamento de fluxos intermediários de juros até o vencimento. Por se tratarem de Notas do Tesouro Nacional, as NTN-F possuem um prazo de duração mais longo no mercado primário

se comparadas às LTN, a alternativa de títulos prefixados oferecida pelo Tesouro Nacional.

Os cupons das NTN-F são pagos semestralmente a uma taxa de 10% ao ano, que incide sobre o valor de face de R\$ 1.000, resultando em um fluxo de R\$ 48,80885. O PU desse título, por sua vez, é obtido por meio da soma do valor presente de todos os fluxos de caixa descontados a determinada taxa de juros, porém, pode ser calculado de duas formas distintas (BERGER, 2015):

$$PU_{(NTN-F)} = \sum_{i=1}^T \frac{\text{cupom}}{\left(1 + \frac{\text{taxa}_i}{100}\right)^{\frac{d_{i,t}}{252}}} + \frac{1000}{\left(1 + \frac{\text{taxa}_T}{100}\right)^{\frac{d_{u,T}}{252}}} \quad (2)$$

Onde,

PU = preço unitário;

cupom = fluxos intermediários de juros semestrais equivalentes a 10% ao ano do valor de face;

taxa t = taxa de juros referente ao prazo do cupom obtida por meio da estrutura a termo de taxa de juros (ETTJ) de contratos de juros futuros negociados na B3;

du t = número de dias úteis entre a data de liquidação da operação (inclusive) e a data de pagamento do fluxo equivalente (exclusive).

De acordo com Berger (2015), a metodologia acima (taxa variável) é utilizada quando se considera uma taxa de juros diferente para cada prazo de pagamento de cupom.

$$PU_{(NTN-F)} = \sum_{i=1}^T \frac{\text{cupom}}{\left(1 + \frac{\text{taxa}_i}{100}\right)^{\frac{d_{i,t}}{252}}} + \frac{1000}{\left(1 + \frac{\text{taxa}_T}{100}\right)^{\frac{d_{u,T}}{252}}} \quad (3)$$

Onde,

PU = preço unitário;

cupom = fluxos intermediários de juros semestrais equivalentes a 10% ao ano do valor de face;

taxa = taxa de juros constante que iguala o valor presente dos juros e principal ao preço de mercado do título;

du t = número de dias úteis entre a data de liquidação da operação (inclusive) e a data de pagamento do fluxo equivalente (exclusive).

Já a metodologia acima (taxa constante) considera uma mesma taxa de juros para todos os fluxos, obtida por meio da equivalência em relação ao PU apurado na metodologia de taxa variável (BERGER, 2015).

2.3.3. Letras Financeiras do Tesouro (LFT)

Título pós-fixado e *bullet*, ou seja, assim como as LTN, paga juros e principal no vencimento por meio de um único fluxo. A remuneração desse ativo tem como base a taxa média das operações de financiamento de um dia lastreadas em títulos públicos apurada na Selic (taxa Selic ou Selic over).

Por se tratar de um título pós-fixado, seu valor de face não tem como ser determinado de antemão, sendo necessária a indexação de seu preço a um fator, que, no caso das LFT, corresponde a um valor base que é atualizado diariamente pela taxa Selic. Esse valor base, também conhecido como Valor Nominal (VN), foi estabelecido em R\$ 1000 em 01/07/2000, e tem sido atualizado desde então, dando origem ao Valor Nominal Atualizado (VNA). Assim, o Valor Nominal Atualizado (VNA) de determinada data é nada mais nada menos do que o Valor Nominal (R\$ 1000) multiplicado pela taxa Selic acumulada de 01/07/2000 até a data em questão (BERGER, 2015).

Como são títulos pós-fixados, o que é negociado é uma taxa que diz respeito ao ágio ou deságio a ser praticado sobre o VNA. Esse ágio ou deságio é traduzido por meio da cotação do título, que é o valor presente do fluxo final (e único) da LFT descontado pela taxa anualizada de ágio/deságio praticada ou simplesmente o valor do percentual que multiplicará o VNA para se chegar ao PU do título. Caso a LFT seja negociada pelo VNA do dia, dizemos que o título foi negociado ao par e sua cotação será 100.

Os procedimentos para calcular o preço unitário de uma LFT estão ilustrados abaixo (BERGER, 2015):

$$\text{Cotação} = \frac{100}{\left(1 + \frac{\text{taxa}}{100}\right)^{\frac{\text{du}}{252}}} \quad (4)$$

Onde,

Cotação = valor que representa o desconto do fluxo (ágio ou deságio a ser praticado);

taxa = taxa de juros anualizada;

du = número de dias úteis entre a data de liquidação da operação (inclusive) e a data de vencimento do ativo (exclusive).

Após definida a cotação, o PU é calculado da seguinte forma:

$$\text{PU}_{(\text{LFT})} = \frac{\text{Cotação}}{100} * \text{VNA} \quad (5)$$

Onde,

PU = preço unitário;

VNA = valor nominal atualizado.

Berger (2015) afirma que, em função de seu baixo risco de mercado, as LFT são muito utilizadas por fundos de investimento na composição de suas carteiras, assim como pelas tesourarias dos bancos que as utilizam frequentemente como lastro de operações compromissadas no mercado aberto.

2.3.4. Notas do Tesouro Nacional Série B e C (NTN-B/C)

As NTN-B e NTN-C são títulos pós-fixados com cupons semestrais indexados à inflação, onde a rentabilidade é referente à taxa anual de juros negociada mais a variação do índice de inflação relacionado. São bastante utilizados por fundações e fundos de previdência por permitirem a formação de uma estrutura de *hedge* com seus passivos. No entanto, em função da oferta de maturidades longas, da remuneração a taxas de juros reais e da memória inflacionária do brasileiro, esses títulos são demandados por uma grande variedade de agentes do mercado.

Enquanto a remuneração da NTN-B é atrelada ao Índice de Preços ao Consumidor Amplo 15 (IPCA-15) apurado e divulgado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a NTN-C é remunerada pelo Índice Geral de Preços - Mercado (IGP-M) da Fundação Getúlio Vargas (FGV). Como apresentado por Berger (2015), em função da adoção do IPCA como índice oficial do sistema de metas de inflação utilizado para o controle da política econômica, o mercado tem dado preferência às NTN-B em relação às NTN-C, que já não são mais emitidas pelo Tesouro Nacional (mas ainda são negociadas no mercado secundário, mesmo que com pouca liquidez).

Apesar da diferença entre os índices, a metodologia de cálculo das NTN-B e NTN-C é a mesma. O cupom de ambas as séries é equivalente ao pagamento de 6% ao ano sobre o VNA, que é o valor nominal de R\$ 1.000 atualizado desde 15/07/2000 pelo índice de inflação correspondente. Ademais, é importante destacar que tanto o IPCA quanto o IGP-M são conhecidos *ex post* e divulgados em datas específicas, sendo assim, caso a liquidação da operação não ocorra na data de divulgação do índice, será necessário utilizar uma projeção do mercado para atualizar o VNA proporcionalmente ao número de dias entre a última divulgação e a data da projeção.

Por se tratar de um título pós-fixado, assim como as LFT, seu PU é calculado com base em uma cotação que incide sobre o VNA e representa o ágio ou deságio da operação.

Abaixo está ilustrado o procedimento para calcular o preço unitário desses títulos por meio da metodologia da taxa variável, porém, assim como apresentado na NTN-F, também pode ser calculado por meio da utilização da taxa constante equivalente (BERGER, 2015):

$$\text{Cotação}_{(NTN-B/C)} = \sum_{i=1}^T \frac{\text{cupom}}{\left(1 + \frac{\text{taxa}_i}{100}\right)^{\frac{du}{252}}} + \frac{100}{\left(1 + \frac{\text{taxa}_1}{100}\right)^{\frac{du}{252}}} \quad (6)$$

Onde,

Cotação = valor que representa o desconto dos fluxos (ágio ou deságio a ser praticado);

cupom = taxa que ao incidir sobre o VNA dá origem aos fluxos de caixa intermediários de juros semestrais (6% ao ano);

taxa t = taxa de juros referente ao prazo do cupom obtida por meio da estrutura a termo de taxa de juros (ETTJ) de contratos de juros futuros negociados na B3;

du t = número de dias úteis entre a data de liquidação da operação (inclusive) e a data de pagamento do fluxo equivalente (exclusive).

Após o cálculo da cotação, calcula-se o VNA (BERGER, 2015):

$$\text{VNA} = 1.000 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\text{Índice Mensal}_n}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{\text{Proj. Índice Mês}}{100}\right)^{\frac{du_{\text{dia}}}{\text{diemês}}} \quad (7)$$

Onde,

VNA = valor nominal atualizado;

Índice Mensal n = inflação do índice correspondente apurada no último mês disponível;

Proj. Índice Mês = inflação do índice correspondente projetada para o próximo mês;

du dia = número de dias úteis entre a última divulgação do índice correspondente e a data de cálculo;

du mês = número de dias úteis entre a última e a próxima divulgação do índice correspondente.

Por último, para chegar ao preço unitário basta multiplicar a cotação em porcentagem pelo VNA (BERGER, 2015):

$$PU_{(NTN-B/C)} = \frac{\text{Cotação}}{100} * VNA \quad (8)$$

Onde,

PU = preço unitário;

Cotação = valor que representa o desconto dos fluxos (ágio ou deságio a ser praticado);

VNA = valor nominal atualizado.

2.4. DURAÇÃO E CONVEXIDADE

No mercado financeiro, o conceito de risco pode ser entendido como a probabilidade de incorrer em prejuízos financeiros e econômicos decorrentes da exposição a determinado ativo (ASSAF NETO, 2018). Esses prejuízos podem ser causados por uma série de eventos distintos, dando origem às diferentes classificações de riscos, como: de variação das taxas de juros, de mercado, de crédito, operacional, de câmbio, soberano, de liquidez, legal, entre outros. Assaf Neto (2018) aponta os riscos associados à variação da taxa de juros e aos preços de mercado como, usualmente, os mais relevantes, sendo tal afirmativa especialmente verdadeira no caso do mercado brasileiro de títulos públicos federais.

Para entender o risco de variação das taxas de juros é necessário lembrar que o conceito básico da precificação de ativos está na soma do valor presente dos fluxos de caixa descontados a taxas de juros que o mercado tem oferecido para ativos de risco e prazo similar (ALVES; MOREIRA, 1996). Sendo assim, a taxa de juros possui uma correlação negativa com o preço, pois quanto maior a taxa de desconto e o período menor o valor presente dos fluxos de caixa. Esse risco, portanto, é bastante monitorado por instituições financeiras, que buscam evitar descasamentos entre os

prazos (ou a sensibilidade à taxa de juros) de suas captações e aplicações, de forma que flutuações nas taxas de juros não afetem significativamente seus resultados.

O risco de mercado, por estar intimamente relacionado à variação de preço dos ativos no mercado, é mais abrangente, englobando o risco de variação da taxa de juros, de câmbio, dos índices de inflação, dos indicadores da bolsa de valores, do preço das *commodities*, dos derivativos e outros indicadores que possam afetar diretamente sua cotação (ASSAF NETO, 2018). No entanto, no contexto dos títulos de renda fixa prefixados o risco de mercado (ou risco de preço) pode ser lido como o efeito que a variação das taxas de juros exerce sobre o valor dos ativos e passivos da instituição.

Durante muito tempo as instituições financeiras tentaram mitigar o risco da variação das taxas de juros por meio do casamento das captações com as aplicações. Essa abordagem dificulta sua atuação, uma vez que nem sempre o perfil das captações coincide com o dos empréstimos e investimentos realizados, obrigando-as a limitar suas operações ou incorrer em riscos indesejados. Em 1938, Frederick Macaulay criou uma ferramenta conhecida como *duration* (em português, duração) que permitiu, anos depois, o gerenciamento adequado desse risco (ALVES; MOREIRA, 1996).

Apesar do conhecimento acerca do fato de que quanto maior o prazo de um título maior a sensibilidade do seu preço em relação às taxas de juros, o mercado carecia de uma medida para essa relação, uma vez que os fluxos intermediários de juros e amortização afetam essa sensibilidade e a infinita possibilidade de estruturas não permitia uma padronização. Macaulay solucionou esse problema ao criar uma medida de comprimento de tempo que leva em conta o peso do valor presente de cada fluxo, ou seja, é o prazo médio ponderado dos fluxos de caixa de um título de renda fixa.

Portanto, quando um título não possui fluxos de pagamento intermediários (bullet) sua duração será igual à sua maturidade. Por outro lado, quando um título paga cupons significa necessariamente que sua duração será menor do que sua maturidade, e a magnitude dessa diferença dependerá da relevância do valor presente desses cupons em relação ao preço do título.

A fórmula da duração é a seguinte (VARGA, 1993):

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{F_t \cdot t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+i)^t}} \quad (9)$$

Onde,

D = duração do título (ou carteira de títulos);

F_t = fluxo de pagamento na data t;

t = prazo a decorrer até a data do fluxo em questão;

i = taxa de juros constante que iguala o valor presente dos juros e principal ao preço de mercado do título.

Vale ressaltar que a duração pode ser calculada e apresentada em diferentes periodicidades (dias, meses, semestres, anos, etc), sendo necessário ajustar o prazo a decorrer (t) e a taxa de juros constante equivalente (i) utilizada na equação para tal.

Apesar da duração indicar a sensibilidade do preço de um título em relação à taxa de juros, trata-se de uma medida de tempo. Para obter a relação entre a variação percentual é necessário realizar algumas modificações na fórmula da duração. Essa duração modificada, obtida por meio da diferenciação da função preço em relação à função taxa de juros, pode ser calculada (com menor rigor técnico) por meio da seguinte fórmula (VARGA, 1993):

$$MD = \frac{D}{(1+i)} \quad (10)$$

Onde,

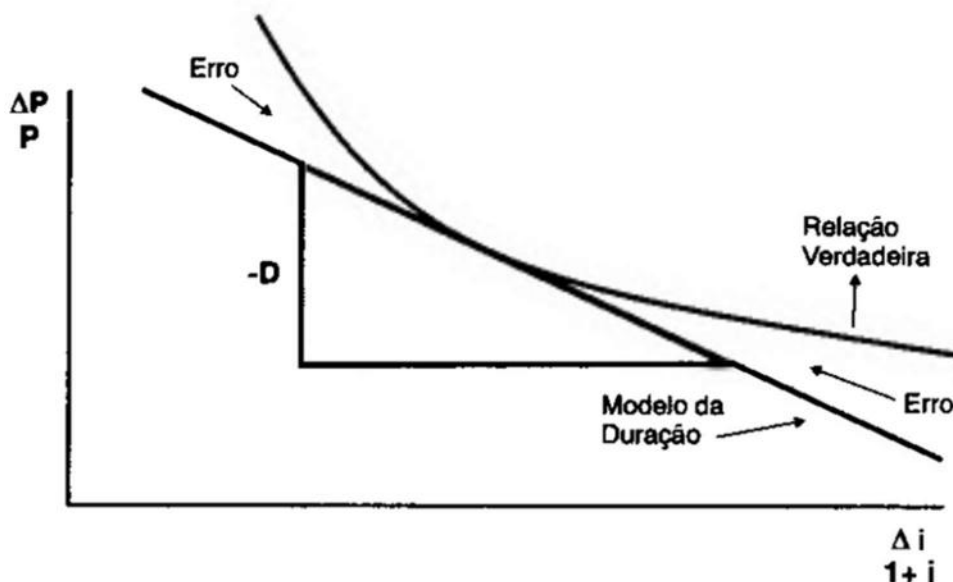
MD = duração modificada;

D = duração;

Outra propriedade de extrema importância é a de que a taxa de juros afeta diretamente a duração do título, pois quanto maior a taxa de juros menor o peso do

valor presente dos fluxos mais distantes em relação ao preço do título. Sendo assim, diferente do que o modelo da duração modificada propõe, a curva do preço do título em relação à taxa de juros não é linear, mas convexa (ALVES; MOREIRA, 1996):

Figura 1: Convexidade - um aperfeiçoamento da Duração



Fonte: Alves e Moreira, 1996, pg. 58

Alves e Moreira (1996) destacam a importância da adição da convexidade à fórmula da duração modificada como fator de correção para uma melhor estimativa da relação entre preço do título e taxa de juros, na medida em que a perda do valor do título com o aumento da taxa de juros estará sendo superestimada e o ganho, no caso da queda, subestimado. Dessa forma, uma alta convexidade é desejada pelo investidor independente do cenário, e pode ser calculada por meio da seguinte fórmula (VARGA, 1993):

$$C(i) = \frac{1}{(1+i)^2} \sum_{t=1}^n w_t \times (t^2 + t) \quad (11)$$

Onde,

$C(i)$ = convexidade;

i = taxa de desconto que iguala o valor presente dos juros e principal ao preço de mercado do título;

w_t = fator de ponderação do valor presente do fluxo em relação ao valor do ativo ou da carteira;

t = prazo a decorrer até a data do fluxo em questão.

Matematicamente, enquanto a duração é a taxa de variação instantânea do preço em relação à taxa de juros (primeira derivada), a convexidade é a segunda derivada (ALVES; MOREIRA, 1996).

Para estimar a variação do preço de um título em relação à taxa de juros de forma mais rigorosa, ou seja, levando em conta os efeitos da convexidade, a seguinte fórmula deve ser utilizada (VARGA, 1993):

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{D}{(1+i)} \times \Delta i + \frac{1}{2} C (\Delta i)^2 \quad (12)$$

Onde,

V = variação percentual do preço do ativo;

D = duração;

i = taxa de desconto que iguala o valor presente dos juros e principal ao preço de mercado do título;

Δi = variação na taxa de desconto;

C = convexidade.

3. METODOLOGIA

O presente trabalho é um estudo de caso aplicado a títulos prefixados da dívida pública federal brasileira, onde se pretende verificar a eficácia da duração de Macaulay e da convexidade como medidas de sensibilidade à variação das taxas de juros por meio da análise da acurácia dos modelos preditivos relacionados.

Para isso, foram selecionados dois títulos prefixados na página de divulgação das taxas de referência para o mercado secundário de títulos públicos relativo ao dia 12 de maio de 2021 do site oficial da ANBIMA (2021), sendo o primeiro do tipo que conta com o pagamento de fluxos intermediários até o vencimento (NTN-F) e o outro *bullet* (LTN). A maturidade de ambos foi levada em conta durante o processo seletivo, com base na premissa de que a disparidade facilitaria a compreensão dos conceitos apresentados e a interpretação dos resultados obtidos.

Após a seleção, foram simulados dois cenários distintos. Enquanto no primeiro foram adicionados 100 pontos base às taxas de desconto constantes consideradas justas pelo processo de apuração da ANBIMA (taxas indicativas), no segundo foi simulada uma redução na mesma proporção.

Buscou-se, então, analisar as estimativas das variações dos preços unitários obtidas por meio da aplicação dos modelos da duração modificada e da duração modificada ajustada pelo fator de correção da convexidade, comparando-as entre si e com a variação efetiva.

3.1. MODELO DA DURAÇÃO MODIFICADA

A duração modificada é uma variação da fórmula da duração de Macaulay, solução apresentada em 1938 por Frederick Macaulay frente à inadequação da maturidade como medida de tempo contida em um título. A duração modificada é calculada por meio da diferenciação implícita da função preço em relação à taxa de juros, e pode ser simplificada pela divisão da duração de Macaulay por “1+taxa de desconto constante equivalente”, como apresentado na fórmula (10) (VARGA, 1993). Sendo assim, o modelo da duração modificada pode ser representado por meio da seguinte função:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{D}{(1+i)} \times \Delta i \quad (13)$$

Onde,

$\frac{\Delta V}{V}$ = variação percentual do preço unitário;

$\frac{D}{(1+i)}$ = duração modificada;

Δi = variação na taxa de desconto;

3.2. MODELO DA DURAÇÃO MODIFICADA AJUSTADO PELA CONVEXIDADE

A necessidade do ajuste pela convexidade surgiu da suposição da duração de Macaulay de que a relação entre a taxa e o preço do título é linear. No entanto, como variações na taxa afetam a duração, a curva que representa a relação entre a taxa e o preço do título tem um formato convexo (ALVES; MOREIRA, 1996).

Essa convexidade pode ser medida por meio da fórmula (11), e seu valor dependerá da maturidade, da estrutura e da taxa de desconto dos fluxos do título.

De acordo com Varga (1993), quanto maior a convexidade de um título melhor, dado que benefícios comparativos podem ser observados tanto no cenário de aumento quanto de redução das taxas de juros. Porém, como apresentado anteriormente na fórmula (12), para aplicá-la como um fator de correção do modelo de duração modificada (e não como uma simples medida de atratividade do título) é preciso efetuar alguns ajustes à medida de convexidade obtida pela fórmula (11):

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{D}{(1+i)} \times \Delta i + \frac{1}{2} C (\Delta i)^2 \quad (14)$$

Onde,

V = variação percentual do preço do ativo;

D = duração;

i = taxa de desconto que iguala o valor presente dos fluxos ao preço de mercado do título;

Δi = variação na taxa de desconto;

C = convexidade.

4. ESTUDO DE CASO

Este capítulo foi dedicado à aplicação dos conceitos de duração e convexidade apresentados no capítulo 2, de forma a verificar seus respectivos poderes preditivos no que tange a variação dos preços unitários dos títulos em relação às flutuações nas taxas de juros.

Para isso, foram selecionados títulos públicos federais prefixados emitidos pelo Tesouro Nacional e negociados no mercado secundário, com cupom e sem cupom (NTN-F e LTN), e realizadas simulações por meio da alteração de 100 pontos base (1%) em suas taxas de desconto. Dessa forma, além de analisar os desvios das estimativas em relação a variação efetiva do PU com títulos prefixados de características e maturidades distintas, foi possível comparar as previsões de preço baseadas somente na duração com as que contavam com a adição do fator de correção relativo à convexidade da curva.

4.1. VARIAÇÃO DE PREÇO DE UMA LTN POR DURAÇÃO E CONVEXIDADE

A LTN selecionada para o presente estudo de caso foi emitida em 08/01/2021 com vencimento para 01/07/2024. No dia 12/05/2021 o título estava marcado a mercado a uma taxa de 8,3537% (taxa indicativa da ANBIMA), que corresponde ao preço unitário de R\$ 778,36.

Por se tratar de um papel *bullet*, a duração do título é igual à sua maturidade, que, nesta data, era de 787 dias úteis ou, aproximadamente, 3,12 anos. Sua duração modificada pôde ser facilmente obtida por meio fórmula (10), onde a duração é dividida por “1+taxa”, resultando, nesse caso, em 2,88:

$$2,882 = \frac{3,12}{(1+8,3537\%)}$$

Em seguida, para estimar a variação do preço do ativo, bastou multiplicar a duração modificada pela variação da taxa de desconto e inverter o sinal (em função da correlação negativa entre preço e taxa):

$$\text{(Variação de +1\%): } 2,882 \times -1 \times 1\% = - 2,882\%$$

$$\text{(Variação de -1\%): } 2,882 \times -1 \times -1\% = 2,882\%$$

Como descrito na literatura, pôde-se observar a linearidade entre a variação da taxa e do preço pressuposta pelo modelo da duração. Sendo assim, para considerar tal relação como não linear (ou convexa), precisou-se calcular a convexidade do título de acordo com a fórmula (11) para, em seguida, adicionar o fator de correção recomendado por Alves e Moreira (1996) por meio da aplicação da fórmula (12).

$$\text{Convexidade} = \frac{1}{(1+8,3537\%)^2} \times 100\% \times (3,12^2 + 3,12) = 10,97$$

$$\text{(Variação de +1\%): } 2,882 \times -1 \times 1\% + \left(\frac{10,97 \times 1\%^2}{2}\right) = - 2,827\%$$

$$\text{(Variação de -1\%): } 2,882 \times -1 \times -1\% + \left(\frac{10,97 \times -1\%^2}{2}\right) = 2,937\%$$

Como esperado, a adição do efeito da convexidade por meio do fator de correção melhorou as expectativas em ambos os cenários, reduzindo as perdas no caso de uma abertura da taxa e impulsionando os ganhos no caso contrário.

No entanto, para realizar qualquer tipo de inferência sobre a eficácia dos modelos, era preciso verificar a variação efetiva do preço da LTN frente às simulações. Para isso, a fórmula (1) foi utilizada para calcular os preços unitários efetivos em cada cenário, que, em seguida, foram comparados com o PU original:

$$756,35 = \frac{1000}{(1+9,3537\%)^{3,12}} \quad \left[\frac{756,35}{778,36} - 1 \right] \times 100 = - 2,828\%$$

$$801,23 = \frac{1000}{(1+7,3537\%)^{3,12}} \quad \left[\frac{801,23}{778,36} - 1 \right] \times 100 = 2,938\%$$

Foi constatado que, no caso de um título prefixado *bullet*, a adição do fator de correção ao modelo da duração modificada possibilitou uma estimativa muito mais precisa da variação percentual do PU.

Tabela 1: Comparação da Variação do preço da LTN por Duração e Convexidade

Δi	Taxa de Desconto Constante (YTM)	Preço Unitário	Δ PU Efetiva (%)	Δ PU Duração Modificada (%)	Δ PU Duração Mod. e Convx. (%)
-1%	7,3537%	R\$ 801,23	2,938%	2,882%	2,937%
-	8,3537%	R\$ 778,36	-	-	-
+1%	9,3537%	R\$ 756,35	-2,828%	-2,882%	-2,827%

Fonte: Autor

4.2. VARIAÇÃO DE PREÇO DE UMA NTN-F POR DURAÇÃO E CONVEXIDADE

Por mais que os resultados obtidos com a LTN indicassem um alto grau de eficiência para a aplicação do modelo de duração modificada ajustado como estimativa da variação de preço em relação a taxa de juros, não era possível afirmar que o mesmo valeria para títulos de longa duração com fluxos de pagamento intermediários.

Visando sanar tal indagação, optamos por utilizar uma NTN-F emitida em 10/01/2020 com vencimento para 01/01/2031. No dia 12/05 o papel estava marcado a 9,4424% ao ano, resultando em um PU de 1070,24. Por contar com o pagamento de cupons de juros semestrais (pagos todo dia 1º de janeiro e de julho), sua duração era inferior à sua maturidade, e precisou ser calculada.

Com base na metodologia descrita na fórmula (9), todos os fluxos foram descontados a valor presente pela taxa indicativa, ponderados em relação ao PU, multiplicados pelo número de dias úteis anualizados remanescentes até seus respectivos pagamentos e somados, vide tabela abaixo:

Tabela 2: Cálculo da Duração da NTN-F

Duração:	6,29
----------	------

Data Fluxo	Fluxo de Caixa	d.u.	d.u. anualizado	Fluxo a VP	VP Ponderado	d.u. anualizado Ponderado
01/07/2021	R\$ 48.80885	35	0,14	R\$ 48,20	4,5%	0,01
01/01/2022	R\$ 48.80885	162	0,64	R\$ 46,06	4,3%	0,03
01/07/2022	R\$ 48.80885	287	1,14	R\$ 44,04	4,1%	0,05
01/01/2023	R\$ 48.80885	413	1,64	R\$ 42,10	3,9%	0,06
01/07/2023	R\$ 48.80885	537	2,13	R\$ 40,27	3,8%	0,08
01/01/2024	R\$ 48.80885	662	2,63	R\$ 38,51	3,6%	0,09
01/07/2024	R\$ 48.80885	787	3,12	R\$ 36,82	3,4%	0,11
01/01/2025	R\$ 48.80885	916	3,63	R\$ 35,16	3,3%	0,12
01/07/2025	R\$ 48.80885	1039	4,12	R\$ 33,65	3,1%	0,13
01/01/2026	R\$ 48.80885	1169	4,64	R\$ 32,12	3,0%	0,14
01/07/2026	R\$ 48.80885	1292	5,13	R\$ 30,73	2,9%	0,15
01/01/2027	R\$ 48.80885	1419	5,63	R\$ 29,37	2,7%	0,15
01/07/2027	R\$ 48.80885	1543	6,12	R\$ 28,09	2,6%	0,16
01/01/2028	R\$ 48.80885	1670	6,63	R\$ 26,84	2,5%	0,17
01/07/2028	R\$ 48.80885	1794	7,12	R\$ 25,68	2,4%	0,17
01/01/2029	R\$ 48.80885	1919	7,62	R\$ 24,55	2,3%	0,17
01/07/2029	R\$ 48.80885	2043	8,11	R\$ 23,49	2,2%	0,18
01/01/2030	R\$ 48.80885	2169	8,61	R\$ 22,45	2,1%	0,18
01/07/2030	R\$ 48.80885	2293	9,10	R\$ 21,48	2,0%	0,18
01/01/2031	R\$ 1.048.80885	2422	9,61	R\$ 440,64	41,2%	3,96

Fonte: Autor

Uma vez calculada a duração, o procedimento para a obtenção da duração modificada foi o mesmo utilizado para a LTN, ou seja, dividir a duração pela taxa:

$$5,745 = \frac{6,29}{(1+9,4424\%)}$$

Com isso, já se sabia que o modelo da duração modificada indicaria uma taxa de variação do PU de 5,745% para cada 1% de flutuação na taxa.

(Variação de +1%): $5,745 \times -1 \times 1\% = - 5,745\%$

(Variação de -1%): $5,745 \times -1 \times -1\% = 5,745\%$

O cálculo da convexidade da NTN-F foi um pouco mais complexo, assim como a duração, em função da necessidade de ponderação dos fluxos de caixa. Porém, as metodologias de cálculo para a obtenção da convexidade e da variação do preço com base no modelo de duração ajustado pela convexidade foram exatamente as mesmas, ou seja, foram aplicadas as fórmulas (11) e (12), respectivamente:

Tabela 3: Cálculo da Convexidade da NTN-F

Convexidade:	48,24
--------------	-------

Data Fluxo	Fluxo de Caixa	d.u.	d.u. anualizado	Fluxo a VP	VP Ponderado (w_t)	$w_t \times (t^2 + t)$
01/07/2021	R\$ 48.80885	35	0,14	R\$ 48,20	4,5%	0,01
01/01/2022	R\$ 48.80885	162	0,64	R\$ 46,06	4,3%	0,05
01/07/2022	R\$ 48.80885	287	1,14	R\$ 44,04	4,1%	0,10
01/01/2023	R\$ 48.80885	413	1,64	R\$ 42,10	3,9%	0,17
01/07/2023	R\$ 48.80885	537	2,13	R\$ 40,27	3,8%	0,25
01/01/2024	R\$ 48.80885	662	2,63	R\$ 38,51	3,6%	0,34
01/07/2024	R\$ 48.80885	787	3,12	R\$ 36,82	3,4%	0,44
01/01/2025	R\$ 48.80885	916	3,63	R\$ 35,16	3,3%	0,55
01/07/2025	R\$ 48.80885	1039	4,12	R\$ 33,65	3,1%	0,66
01/01/2026	R\$ 48.80885	1169	4,64	R\$ 32,12	3,0%	0,78
01/07/2026	R\$ 48.80885	1292	5,13	R\$ 30,73	2,9%	0,90
01/01/2027	R\$ 48.80885	1419	5,63	R\$ 29,37	2,7%	1,02
01/07/2027	R\$ 48.80885	1543	6,12	R\$ 28,09	2,6%	1,14
01/01/2028	R\$ 48.80885	1670	6,63	R\$ 26,84	2,5%	1,27
01/07/2028	R\$ 48.80885	1794	7,12	R\$ 25,68	2,4%	1,39
01/01/2029	R\$ 48.80885	1919	7,62	R\$ 24,55	2,3%	1,51
01/07/2029	R\$ 48.80885	2043	8,11	R\$ 23,49	2,2%	1,62
01/01/2030	R\$ 48.80885	2169	8,61	R\$ 22,45	2,1%	1,73
01/07/2030	R\$ 48.80885	2293	9,10	R\$ 21,48	2,0%	1,84
01/01/2031	R\$ 1.048.80885	2422	9,61	R\$ 440,64	41,2%	41,99

Fonte: Autor

$$\text{(Variação de +1\%): } 5,745 \times -1 \times 1\% + \left(\frac{48,24 \times 1\%^2}{2} \right) = - 5,504\%$$

$$\text{(Variação de -1\%): } 5,745 \times -1 \times -1\% + \left(\frac{48,24 \times -1\%^2}{2} \right) = 5,987\%$$

Novamente os benefícios da convexidade puderam ser observados, mas dessa vez, em maior proporção. Essa diferença na convexidade da LTN para a NTN-F ocorre unicamente em função da maior duração do título, dado que a estrutura sem cupom é a que possibilita a maior convexidade. Além disso, a taxa desta NTN-F também é maior do que a da LTN selecionada, o que deveria impactar negativamente a convexidade da NTN-F nesta comparação.

Por fim, foram calculados de acordo com a fórmula (3) os preços unitários para os cenários simulados, assim como suas variações percentuais em relação ao PU do dia 12/05:

Tabela 4: Cálculo dos Preços Unitários e da Variação Efetiva da NTN-F

PU: R\$ 1.011,24		Δ i : +1%	PU: R\$ 1.134,39		Δ i : -1%
Taxa de Desconto	10,4424%		Taxa de Desconto	8,4424%	

Data Fluxo	Fluxo de Caixa	d.u.	Fluxo a VP	Data Fluxo	Fluxo de Caixa	d.u.	Fluxo a VP
01/07/2021	R\$ 48,80885	35	R\$ 48,14016	01/07/2021	R\$ 48,80885	35	R\$ 48,26250
01/01/2022	R\$ 48,80885	162	R\$ 45,78976	01/01/2022	R\$ 48,80885	162	R\$ 46,33088
01/07/2022	R\$ 48,80885	287	R\$ 43,58847	01/07/2022	R\$ 48,80885	287	R\$ 44,50519
01/01/2023	R\$ 48,80885	413	R\$ 41,47666	01/01/2023	R\$ 48,80885	413	R\$ 42,73770
01/07/2023	R\$ 48,80885	537	R\$ 39,49828	01/07/2023	R\$ 48,80885	537	R\$ 41,06681
01/01/2024	R\$ 48,80885	662	R\$ 37,59944	01/01/2024	R\$ 48,80885	662	R\$ 39,44855
01/07/2024	R\$ 48,80885	787	R\$ 35,79189	01/07/2024	R\$ 48,80885	787	R\$ 37,89406
01/01/2025	R\$ 48,80885	916	R\$ 34,01757	01/01/2025	R\$ 48,80885	916	R\$ 36,35403
01/07/2025	R\$ 48,80885	1039	R\$ 32,40775	01/07/2025	R\$ 48,80885	1039	R\$ 34,94395
01/01/2026	R\$ 48,80885	1169	R\$ 30,78905	01/01/2026	R\$ 48,80885	1169	R\$ 33,51304
01/07/2026	R\$ 48,80885	1292	R\$ 29,33201	01/07/2026	R\$ 48,80885	1292	R\$ 32,21315
01/01/2027	R\$ 48,80885	1419	R\$ 27,89991	01/01/2027	R\$ 48,80885	1419	R\$ 30,92388
01/07/2027	R\$ 48,80885	1543	R\$ 26,56912	01/07/2027	R\$ 48,80885	1543	R\$ 29,71487
01/01/2028	R\$ 48,80885	1670	R\$ 25,27191	01/01/2028	R\$ 48,80885	1670	R\$ 28,52559
01/07/2028	R\$ 48,80885	1794	R\$ 24,06648	01/07/2028	R\$ 48,80885	1794	R\$ 27,41034
01/01/2029	R\$ 48,80885	1919	R\$ 22,90951	01/01/2029	R\$ 48,80885	1919	R\$ 26,33022
01/07/2029	R\$ 48,80885	2043	R\$ 21,81676	01/07/2029	R\$ 48,80885	2043	R\$ 25,30080
01/01/2030	R\$ 48,80885	2169	R\$ 20,75976	01/01/2030	R\$ 48,80885	2169	R\$ 24,29600
01/07/2030	R\$ 48,80885	2293	R\$ 19,76955	01/07/2030	R\$ 48,80885	2293	R\$ 23,34611
01/01/2031	R\$ 1.048,80885	2422	R\$ 403,75046	01/01/2031	R\$ 1.048,80885	2422	R\$ 481,27542

Fonte: Autor

$$\left[\frac{1011,24}{1070,24} - 1 \right] \times 100 = -5,512\%$$

$$\left[\frac{1134,39}{1070,24} - 1 \right] \times 100 = 5,995\%$$

Como no caso da LTN, o modelo de duração modificada que considera a convexidade do título mostrou-se uma ferramenta confiável de previsão e gestão do risco de taxa de juros. No entanto, em ambos os modelos aplicados à NTN-F foi observado um aumento da dispersão em relação ao PU efetivo.

Tabela 5: Comparação da Variação do PU da NTN-F por Duração e Convexidade

Δ i	Taxa de Desconto Constante (YTM)	Preço Unitário	Δ PUEfetiva (%)	Δ PU Duração Modificada (%)	Δ PU Duração Mod. e Convx. (%)
-1%	8,4424%	R\$ 1.134,39	5,995%	5,745%	5,987%
-	9,4424%	R\$ 1.070,24	-	-	-
+1%	10,4424%	R\$ 1.011,24	-5,512%	-5,745%	-5,504%

Fonte: Autor

5. CONCLUSÃO

O presente estudo teve como objetivo verificar a eficácia da duração e da convexidade como ferramentas de gestão do risco de variação das taxas de juros, em meio à necessidade natural de monitoramento do mesmo por parte das instituições financeiras e investidores. No entanto, a importância da capacidade de mensurar e mitigar esse risco adequadamente transcende o motivo inicial de sua formulação.

O sistema financeiro e a economia estão interligados. Os instrumentos de renda fixa são amplamente utilizados pelos agentes econômicos para financiar suas empreitadas e manter o funcionamento de seus empreendimentos. A redução da percepção de risco por parte dos agentes superavitários acaba por reduzir o custo desse financiamento e estimular o crescimento econômico.

No entanto, por mais que os diversos títulos privados de renda fixa (como CDB, LF, CRI, CRA, debêntures) sejam extremamente importantes para o funcionamento de uma economia, uma atenção especial precisa ser dada aos títulos públicos federais, uma vez que são utilizados diretamente para a execução das políticas monetária e fiscal no país.

Com base nisso, o estudo de caso foi conduzido com os dois tipos de títulos públicos federais prefixados emitidos pelo Tesouro Nacional (LTN e NTN-F), visando captar possíveis diferenças nos resultados em função da disparidade de duração e estrutura de fluxo de caixa.

Em ambos os casos foram observadas melhorias significativas nas estimativas de variação do preço unitário apontadas pelo modelo de duração modificada simples ao adicionar o fator de correção do efeito convexidade.

Porém, mesmo levando em conta suas limitações, a duração e a convexidade provaram-se ferramentas de utilidade inquestionável (principalmente quando manuseadas em conjunto), podendo ser aplicadas tanto para parametrizar a sensibilidade de diferentes títulos de renda fixa como para auxiliar no cálculo das operações.

REFERÊNCIAS

ALVES, J. H.; MOREIRA, J. C. Risco das taxas de juros: Inovações na gestão de ativos e passivos de instituições financeiras. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 36, n. 3, p.54-60, Setembro, 1996.

ANBIMA - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIRO E DE CAPITAIS. **Site oficial da Anbima**, 2021. Sessão Taxas de Títulos Públicos. Disponível em:

<<https://www.anbima.com.br/pt-br/informar/taxas-de-titulos-publicos.htm>>

Acesso em: 13 maio 2021

ASSAF NETO, A. **Mercado Financeiro**. 14. Ed. São Paulo: Atlas, 2018.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Funções do Banco Central do Brasil**: Série de Perguntas mais Frequentes (PMF). Brasília, Outubro, 2016. Disponível em:

<https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/Documents/publicacoes/serie_pmf/FAQ%2011-Fun%C3%A7%C3%B5es%20do%20Banco%20Central.pdf>

> Acesso em: 29 abril 2021

BERGER, P. L. **Mercado de Renda Fixa no Brasil**: Ênfase em Título Públicos. 1.ed.rev. Rio de Janeiro: Interciência, 2015.

BRASIL. **Lei Complementar nº 101, de 4 de maio de 2000**. Estabelece normas de finanças públicas voltadas para a responsabilidade na gestão fiscal e dá outras providências. Brasília, 2000. Disponível em:

<https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/lcp/lcp101.htm> Acesso em: 01 maio 2021

SANTOS, J. C. S.; SILVA, M. E. **Derivativos e renda fixa**: teoria e aplicações ao mercado brasileiro. São Paulo: Atlas, 2015.

SECRETARIA DO TESOUREIRO NACIONAL. **Portal do governo federal brasileiro**, 2020. Sessão Sobre - Planejamento Fiscal. Disponível em:

<<https://www.gov.br/tesourownacional/pt-br/estatisticas-fiscais-e-planejamento/planejamento-fiscal/sobre>> Acesso em: 04 maio 2021

SECRETARIA DO TESOUREIRO NACIONAL. **Relatório Mensal da Dívida Pública Federal**: Março/2021. Brasília, 2021. Disponível em:

<https://sisweb.tesouro.gov.br/apex/f?p=2501:9::::9:P9_ID_PUBLICACAO:38828> Acesso em: 02 maio 2021

SUEN, A.S.; KIMURA, H.; NONAKA, P.K. A utilização do modelo da *duration* na administração do risco de taxas de juros em carteiras de renda fixa em

banco brasileiros. **Caderno de Pesquisa em Administração**, v. 2, n. 5, 2º Semestre, 1997.

TRICHES, D.; BERTUSSI, L. A. S. Multicointegração e Sustentabilidade da Política Fiscal no Brasil com Regime de Quebras Estruturais (1997-2015). **Revista Brasileira de Economia**, Rio de Janeiro, v. 71, n. 3, p. 379-394, Setembro, 2017.

VARGA, G. Duração, convexidade e imunização. **Resenha BM&F**, São Paulo, Setembro, 1993.