



UFRJ

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aproximação da solução de ondas sísmicas 3D pelo método de diferenças finitas

Vinicius Theobaldo Jorge

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Outubro de 2021

Vinicius Theobaldo Jorge

**Aproximação da solução de ondas sísmicas 3D pelo
método de diferenças finitas**

Dissertação submetida ao IGEO/UFRJ como
parte dos requisitos necessários para a obten-
ção do grau de bacharel em Geologia

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Orientador(es): Fábio André Perosi e Márcio Rentes Borges

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Outubro de 2021

XXXX Jorge, Vinicius Theobaldo
Aproximação da solução de ondas sísmicas 3D pelo método de diferenças finitas /
Vinicius Theobaldo Jorge. – Rio de Janeiro, RJ - Brasil, Outubro de 2021-
38 p. : il. ; 30 cm.

Orientador(es): Fábio André Perosi e Márcio Rentes Borges

1. Sísmica. 2. Diferenças finitas. 2. Inversão de dados. I. Perosi, Fábio André. II.
UFRJ. III. Título

CDD: XXX.XXX

Vinicius Theobaldo Jorge

Aproximação da solução de ondas sísmicas 3D pelo método de diferenças finitas

Dissertação submetida ao IGEO/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de bacharel em Geologia

Aprovada por:

Prof. Dr. Fábio André Perosi
(Presidente)

Prof. Dr. Márcio Rentes Borges

**Prof. Dr. Marco Antônio da Silva
Braga**

Geofísico Me. Claus Naves Eikmeier

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Outubro de 2021

Dedicatória

*Dedico este trabalho, ao meu pai,
Volnei de Barros Jorge,
grande colaborador e incentivador*

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Fábio André Perosi e meu coorientador Márcio Rentes Borges, pelo suporte no meu projeto como um todo, pelas suas correções e incentivos.

Ao LNCC, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, por meio da bolsa de iniciação científica.

A UFRJ, seu corpo docente, direção e administração por todo o apoio ao longo dos meus anos de graduação.

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Ao meu pai, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

*“A maior recompensa do homem para o trabalho do homem
não é o que ele ganha com isso, mas o que ele se torna com isso”
(John Ruskin)*

Resumo

Para a exploração ou exploração de água, petróleo ou até mesmo minérios em geral, se faz o uso de diversas ferramentas e métodos para descoberta, prospecção e exploração. Destaca-se a Geologia e a Geofísica que por meio de diversos estudos são responsáveis por utilizar esses métodos. A inversão de dados sísmicos tem papel preponderante na descoberta de novos reservatórios de petróleo, bem como, na caracterização das rochas e monitoramento destes reservatórios.

A simulação do comportamento das ondas sísmicas na subsuperfície é parte integrante do processo de inversão de dados em uma abordagem estocástica. Neste sentido, o objetivo desse trabalho foi estudar e implementar métodos numéricos para a aproximação da equação da onda em um domínio tridimensional heterogêneo. O código computacional que foi desenvolvido para a migração foi testado em alguns modelos sintéticos com grau de dificuldade variando de baixo a complexo.

Foram obtidos resultados satisfatórios com diversos valores de velocidade tomados como referência, além da qualidade da modelagem utilizada em que foram obtidas imagens que correspondem de fato com a simulação, bem como os dados obtidos pelos sismogramas.

Palavras-chave: Sísmica, diferenças finitas, inversão de dados, reservatórios de petróleo.

Abstract

For the exploration or exploitation of water, oil or even minerals in general, the use of several tools and methods for discovery, prospecting and exploration is used. Geology and Geophysics stand out, which through various studies are responsible for using these methods. The inversion of seismic data plays a major role in the discovery of new oil reservoirs, as well as in the characterization of rocks and monitoring of these reservoirs.

The simulation of the behavior of seismic waves on the subsurface is an integral part of the data inversion process in a stochastic approach. In this sense, the objective of this work was to study and implement numerical methods for approximating the wave equation in a heterogeneous three-dimensional domain. The computational code that was developed for the migration was tested on some synthetic models with a degree of difficulty ranging from low to complex.

Satisfactory results were obtained with several velocity values taken as reference, in addition to the quality of the modeling used, in which images were obtained that actually correspond to the simulation, as well as the data obtained by the seismograms.

Keywords: Seismic, finite differences, data inversion, oil reservoirs.

Lista de figuras

Figura 1 – Transmissão e reflexão do sinal sísmico de acordo com a variação de impedância acústica das camadas sedimentares abaixo do fundo. Adaptado de Neto (2000).	19
Figura 2 – Comparação entre as soluções analítica e numérica (método de segunda ordem no espaço).	26
Figura 3 – Solução aproximada da pressão em diferentes instantes de tempo.	28
Figura 4 – Domínio.	29
Figura 5 – Velocidades de propagação dos domínios utilizados.	30
Figura 6 – Pressões em diferente instantes de tempo para o Problema 1.	30
Figura 7 – Pressões em diferente instantes de tempo para o Problema 2.	31
Figura 8 – Sismogramas.	31
Figura 9 – Pressão em quatro tempos distintos. Os eixos x , y e z indicam o número de pontos da malha.	33
Figura 10 – Transmissão e reflexão da onda sísmica ao atravessar diferentes materiais.	33
Figura 11 – Velocidades das camadas do domínio Ω	34
Figura 12 – Pressão em tempos distintos.	35

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
abnTeX	Absurds Norms for TeX

Lista de símbolos

α	i, j, k
β	Fator de segurança
Δ	Representação de variação
δ	Delta de Kronecker
Γ	Fronteira da camada analisada
μ	Módulo de rigidez
∇	Operador divergente
Ω	Domínio do problema
φ	Termo da fonte
ρ	Massa específica
σ	Tensor de tensões
A_i	Onda incidente
A_r	Onda refletida
A_t	Onda transmitida
c	Velocidade de propagação
E	Módulo de Young
\vec{f}	Forças de corpo
f_c	Frequência de corte
f_r	Frequência da onda
G	Módulo de cisalhamento
I	Tensor identidade
K	Módulo elástico
n	Número do passo de tempo da simulação

\vec{n}	Vetor unitário normal à fronteira
p	Pressão
T	Tempo total de simulação
t	Tempo
\vec{u}	Campo de deslocamentos
ν	Módulo de Poisson
v_p	Velocidade ondas P
v_s	Velocidade ondas S
(\vec{x})	Posição
z	Impedância acústica
π	Número matemático pi
\in	Símbolo matemático pertence
\cup	Símbolo matemático união
\mathbb{R}^3	Símbolo matemático de vetor geométrico no espaço
\mathbb{Z}	Símbolo matemático de um número inteiro
\forall	Símbolo matemático para todo
ε	Fator de segurança usado para controlar a dispersão numérica

Sumário

1	Introdução	14
1.1	Inversão de dados sísmicos	16
1.2	Objetivo	17
2	Fundamentação teórica	18
2.1	Propagação de ondas acústicas	18
2.2	Modelagem do fenômeno	19
2.3	Modelagem matemática	20
2.3.1	Condições iniciais e de contorno	21
2.3.1.1	Fronteiras reflexivas	22
2.3.1.2	Fronteiras não-reflexivas	22
2.3.2	Fonte sísmica	22
3	Método de diferenças finitas	23
3.1	Discretização temporal e espacial	23
3.2	Aproximação numérica	23
4	Experimentos	25
4.1	Experimento 1D	25
4.2	Experimentos 2D	29
4.3	Experimentos 3D	32
4.3.1	Fonte sísmica	32
4.3.2	Camadas Inclínadas	32
5	Conclusão	36
	Referências	37

1 Introdução

Antes do século XVII, a geologia era uma matéria dispersa e dividida. As atividades relacionadas a esse campo de investigação direcionavam-se, quase que exclusivamente, à reconstrução histórica da Terra. O primeiro grande passo rumo à consolidação da geologia como ciência autônoma, fundamentada na razão e nas observações empíricas, se dá em 1780 com a publicação de *Theory of the Earth*, de James Hutton. Por seu esforço em elaborar uma teoria que explicava a regularidade dos processos presentes na terra, Hutton passou a ser chamado “pai da geologia” (ODY et al., 2005).

Segundo Ernesto e Ussami (2002), no século XVIII as investigações da Terra eram feitas sem método, numa forma quase que puramente observacional e baseadas numa filosofia natural, num misto de especulações e explicações divinas. A única parte das Ciências da Terra já organizada era a Mineralogia, ensinada em escolas da França e Alemanha, voltadas à mineração. Foi somente no início do século XIX que o termo Geologia ganhou força, com a fundação da Sociedade Geológica de Londres, em 1807. A partir de então, esta nova ciência tinha a missão de representar o estudo do acessível, isto é, as teorias sobre a formação e evolução da Terra tinham que estar fortemente ancoradas no que as rochas podiam mostrar. O que não podia ser cabalmente demonstrado era considerado meramente especulação e ficava no campo da Cosmogonia. Se essa postura rígida ajudou a desenvolver uma ciência com bases sólidas, também provocou atrasos no conhecimento do interior da Terra e o estabelecimento de teorias sobre sua evolução, devido ao preconceito sobre qualquer ideia que não encontrasse respaldo nas observações de superfície. As primeiras medidas físicas usadas para modelar a estrutura externa da Terra (a crosta) foram aquelas sobre o calor, isto porque já se admitia que era necessário um fornecimento de calor constante para formar e manter as cadeias de montanhas.

Assim, a fundamentação geológica era considerada como constituída de alguns princípios pouco exatos (lei de superposição de estratos, por exemplo) que norteavam o uso de princípios matemáticos e a aplicação de leis químicas e físicas aos fenômenos geológicos. além disso, considerava-se que a geologia teria vários problemas que dificultam o conhecimento, tais como: a incompletude dos dados relacionada às lacunas e à pouca resolução do registro estratigráfico; a ausência de controle experimental, possível nas ciências experimentais que têm ampla base laboratorial; e a grande extensão do tempo necessário para que ocorram os processos geológicos, extensão tão ampla que torna a observação direta difícil ou impossível de se realizar Frodeman (2010).

Por volta de 1830 já se tinha uma grande quantidade de observações sobre o aumento de temperatura com o aumento de profundidade nas minas. Mantendo-se essa

razão constante, extrapolava-se que a 80 km de profundidade as rochas estariam todas fundidas, criando um mar de magma que seria a fonte de lavas dos vulcões. Essas falsas conclusões deveram-se à falta de conhecimento sobre as reais propriedades físicas da Terra, o que só veio a ser conhecido muito mais tarde. Entretanto, com isso iniciou-se o estudo do interior do planeta, campo de estudo que por vezes era designado por Geologia Física. Entretanto, esse termo não era apropriado porque a base de conhecimento e os métodos a serem utilizados nessa investigação eram muito diferentes daqueles aplicados pelos geólogos da época. Mais apropriadamente, referia-se então à Física da Terra a essa linha de investigação, e que acabou sendo o núcleo de uma nova ciência, a Geofísica. Com isso a Geofísica se torna imprescindível para a investigação da subsuperfície do planeta Terra e viabilizar estudos econômicos com o objetivo de se obter bens minerais, dentre eles o petróleo (ERNESTO; USSAMI, 2002).

Dentre os métodos geofísicos, a sísmica fornece dados sobre a disposição estrutural das camadas sedimentares abaixo do fundo marinho (NETO, 2000). Através de um registro sísmico é possível avaliar parâmetros como espessura de camadas, mergulho, presença de falhamentos, ocorrências de acumulações rasas de gás biogênico e deslizamentos submarinos.

A grande vantagem desses métodos está na alta taxa de aquisição de dados em um curto período de tempo. Os dados, após serem devidamente processados, fornecem valiosas informações sobre a área investigada, permitindo assim que o número e localização de amostras sejam determinados do modo mais eficiente, reduzindo os custos finais do projeto. Por esta razão, a sísmica de reflexão e sonografia vêm sendo amplamente utilizados na exploração de recursos minerais em águas rasas e profundas.

Neto (2000) introduz o conceito de método sísmico sabendo que o mesmo utiliza o fato de que ondas elásticas (também chamadas de ondas sísmicas) viajam com diferentes velocidades em diferentes tipos de rochas. Através da geração de ondas sísmicas, e observando-se o tempo de chegada destas ondas em diferentes pontos, é possível determinar a distribuição de velocidade e localizar interfaces onde as ondas são refletidas e refratadas.

De acordo com Riel (2000), do ponto de vista da geofísica, o processo de caracterização de reservatórios (e a consequente geração de modelos precisos) utilizava de maneira tradicional os dados de amplitude sísmica. Esse tipo de dado era usado para a detecção dos chamados *bright spots*, com os quais se podia determinar as estruturas dos reservatórios em estudo. A partir do momento em que o processo exploratório começou a investigar horizontes mais complexos, o limite para a utilização do dado sísmico de amplitude para a caracterização de reservatórios foi alcançado. Desse modo, foi necessário desenvolver técnicas para se recuperar de maneira direta parâmetros petrofísicos capazes de caracterizar esses novos alvos exploratórios. Dentre as inúmeras técnicas de modelagem disponíveis, a inversão do dado sísmico para a impedância acústica tem provado ser um excelente veículo capaz de integrar a informação sísmica de forma correta para a geração

de modelos que contribuam efetivamente no processo de caracterização de reservatórios. Além disso, pode-se citar também, a utilização da inversão elástica, que consegue recuperar propriedades elásticas do reservatório além de solucionar problemas onde as características acústicas das rochas sejam as mesmas.

Além de proporcionar a integração de dados, a inversão sísmica é vastamente utilizada devido à facilidade e à precisão das interpretações realizadas com o dado de impedância acústica e/ou elástica. Devido a essas contribuições, esse é um problema que os geofísicos tem se interessado por décadas. A vantagem de se utilizar a inversão sísmica em estudos relacionados com a caracterização de reservatórios, é que ela fornece do dado sísmico uma estimativa quantitativa da distribuição de vários parâmetros físicos capazes de caracterizar a geologia em subsuperfície.

Com isso, a geofísica desempenha papel crucial na descoberta de novos reservatórios de petróleo e, ainda hoje, o principal uso de dados sísmicos é identificar a geometria dos refletores. Isso é possível porque as ondas sísmicas são refletidas nas interfaces entre materiais de diferentes propriedades acústicas (FRAZER et al., 2008). Recentemente, estudos sísmicos têm sido usados para a caracterização das rochas e monitoramento dos reservatórios (sísmica 4D), pela transformação de dados de reflexão em propriedades de rochas. Portanto, a inversão de dados sísmicos é uma ferramenta essencial na determinação das propriedades elásticas do subsolo.

1.1 Inversão de dados sísmicos

O problema de inversão de dados geofísicos pode ser resolvido de forma determinística ou estocástica. Devido ao fato dos dados serem incompletos a inversão é um problema tipicamente mal posto (não possui solução única) e, portanto, na abordagem determinística alguma regularização deve ser imposta na função objetivo introduzindo uma “suavização” não realista na solução. Para quantificar essa ausência de unicidade de solução, métodos estocásticos podem ser utilizados. Por exemplo, a introdução dinâmica dos dados nos modelos pode ser formalizada em termos de métodos Bayesianos e simulações de Monte Carlo via cadeias de Markov (McMC - *Markov chain Monte Carlo methods*, veja Liu (2001) e Robert e Casella (2005)). A inferência Bayesiana é conveniente na quantificação da informação inserida no modelo a partir de diversas fontes. Já os métodos McMC por sua vez, fornecem uma estrutura computacional para o processo de amostragem necessário à inferência Bayesiana.

1.2 Objetivo

No processo de inversão de dados sísmicos, utilizando uma abordagem estocástica (SEN; BISWAS, 2017), é imprescindível o uso de um simulador do comportamento das ondas sísmicas em subsuperfície. Desta forma, o objetivo principal deste trabalho foi o estudo de métodos numéricos para aproximação da equação da onda em um domínio tridimensional heterogêneo, com isso foi desenvolvido um código computacional em FORTRAN 90 para modelagem de propagação de ondas elásticas em meios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Este código gera dados sintéticos que permitirão o refinamento de modelos de reservatórios construídos a partir de dados reais.

2 Fundamentação teórica

2.1 Propagação de ondas acústicas

De acordo Neto (2000), o sensoriamento remoto acústico é o principal meio de investigação do fundo do mar, visto que os métodos de sensoriamento remoto convencionais, óticos e radar, são pouco eficientes devido a alta atenuação das ondas eletromagnéticas pela água do mar. As ondas acústicas são geradas com facilidade e pouco absorvidas pela água do mar permitindo a realização de levantamentos nas regiões mais profundas dos oceanos assim como investigar camadas geológicas até alguns quilômetros abaixo do fundo submarino. A velocidade de propagação de ondas acústicas em um meio qualquer é função de suas constantes elásticas como módulo de Young (E), módulo de Poisson (ν), módulo de rigidez (μ) e módulo de compressão (k). Estas constantes variam de acordo com o material e relacionam a quantidade de deformação sofrida por um material em função da força exercida sobre ele. A velocidades de propagação das ondas P (ondas longitudinais) e S (ondas transversais) são definidas pelas equações abaixo (SCHÖN, 1996):

$$v_P = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (2.1)$$

e

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (2.2)$$

onde (ρ) é a densidade do meio em que a onda se propaga, (K) é o módulo de compressão e (μ) é o módulo de rigidez. Como o módulo de rigidez da água é igual a zero, as ondas do tipo (S) não conseguem se propagar neste meio. Na água do mar, as ondas acústicas se propagam com uma velocidade em torno de 1.500 m/s . A variação da velocidade na água do mar depende basicamente da salinidade não sofrendo muita influência da pressão e da temperatura. A velocidade de propagação nos sedimentos, por sua vez, depende basicamente de duas das constantes relacionadas acima, os módulos de compressão e rigidez. Woods (1991) fala que os fatores que controlam estes parâmetros em sedimentos marinhos são porosidade, pressão de confinamento, grau de saturação e temperatura. Os sedimentos marinhos inconsolidados são materiais com mais de uma fase (sólida = grãos, líquida = fluido intersticial). Em alguns casos pode ocorrer a presença de gás biogênico ou mesmo ar fazendo com que o sedimento seja constituído por três fases. Por isso suas propriedades elásticas medidas são valores resultantes das propriedades elásticas de seus componentes, relativos a suas presenças e volumes.

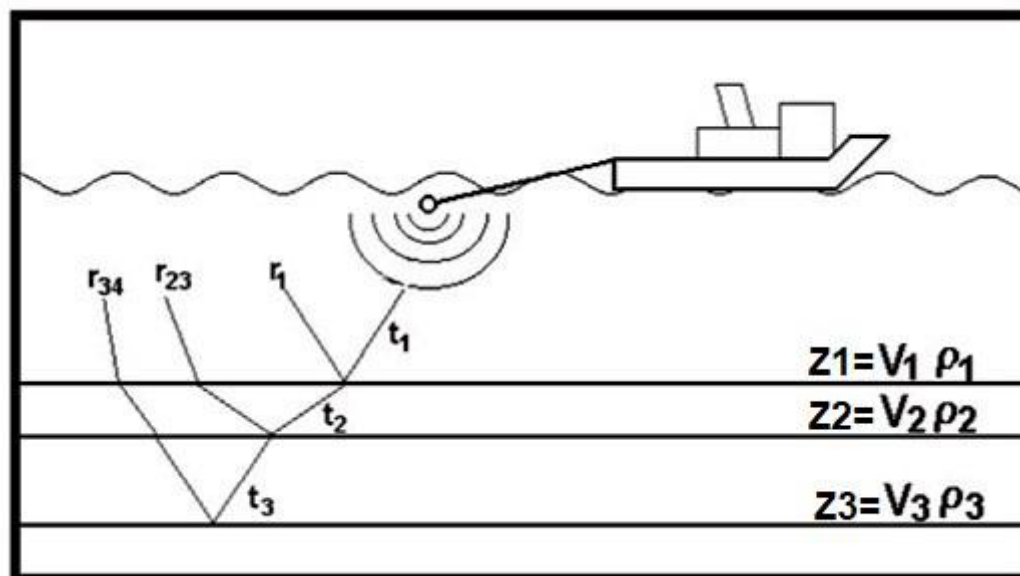


Figura 1 – Transmissão e reflexão do sinal sísmico de acordo com a variação de impedância acústica das camadas sedimentares abaixo do fundo. Adaptado de Neto (2000).

Sancevero, Remacre e Portugal (2006) afirmam que a impedância acústica (z) é definida como o produto entre a velocidade compressional (v_p) e a densidade da rocha (ρ). Isso significa que a impedância acústica é uma propriedade de camada e não uma propriedade de interface como a amplitude do dado sísmico. Essa distinção faz com que a impedância acústica seja uma poderosa ferramenta a ser utilizada no processo de caracterização. A Figura 1 representa um exemplo da transmissão e reflexão do sinal sísmico de acordo com a variação de impedância acústica. A interpretação do dado sísmico com o objetivo de encontrar ou investigar armadilhas estratigráficas que podem potencialmente formar reservatórios é uma tarefa delicada e que requer uma análise cuidadosa do dado em estudo. A contribuição da inversão sísmica é agregar mais informações, o que pode dar mais segurança e confiabilidade nas decisões. O dado sísmico representa uma propriedade de interface onde os eventos de reflexão são observados devido às mudanças relativas na impedância acústica de camadas de rochas adjacentes. As mudanças observadas na amplitude, contudo, não podem identificar se a variação está relacionada com a litologia acima ou abaixo da interface causadora da reflexão. Com isso a inversão sísmica é extremamente importante além de ser muito utilizada e juntamente com os dados de impedância acústica a interpretação sísmica se torna mais precisa.

2.2 Modelagem do fenômeno

A partir do momento que a busca por hidrocarbonetos se tornou cada vez mais complexa, foram desenvolvidas técnicas para melhorar e aprimorar esses estudos. Segundo Sancevero, Remacre e Portugal (2006), dentre as inúmeras técnicas de modelagem dis-

poníveis, a inversão do dado sísmico para a impedância acústica tem provado ser um excelente veículo capaz de integrar a informação sísmica de forma correta para a geração de modelos que contribuam efetivamente no processo de caracterização de reservatórios. Além disso, pode-se citar também, a utilização da inversão elástica, que consegue recuperar propriedades elásticas do reservatório além de solucionar problemas onde as características acústicas das rochas sejam as mesmas. Além de proporcionar a integração de dados, a inversão sísmica é vastamente utilizada devido à facilidade e à precisão das interpretações realizadas com o dado de impedância acústica e/ou elástica. Devido a essas contribuições, esse é um problema que os geofísicos tem se interessado por décadas. A vantagem de se utilizar a inversão sísmica em estudos relacionados com a caracterização de reservatórios, é que ela fornece ao dado sísmico uma estimativa quantitativa da distribuição de vários parâmetros físicos capazes de caracterizar a geologia em subsuperfície.

Rego (2014) descreve que a modelagem sísmica é essencialmente uma simulação do campo de ondas sísmicas, onde são determinadas as amplitudes sísmicas e o tempo de percurso. No processo de modelagem ocorre a extrapolação do campo de onda podendo ser descrito em tempo ou em profundidade, e registro da seção sísmica em superfície, ($z = 0$). A modelagem tem inúmeros objetivos, dentre os principais, a geração de dados sintéticos para testar algoritmos e a compreensão de fenômenos estruturais ou estratigráficos de interesse em exploração. Na modelagem sísmica procura-se sintetizar o registro de uma seção (ou um volume sísmico) na superfície, a partir de um modelo geológico definido por uma matriz (ou um volume), de constantes elásticas, em função da profundidade e das coordenadas horizontais.

2.3 Modelagem matemática

O modelo físico considerado é um meio elástico heterogêneo (domínio $\Omega \in \mathbb{R}^3$) pelo qual o som é propagado através de pequenas vibrações elásticas. O modelo matemático para descrever as deformações em um meio elástico é baseado na segunda lei de Newton:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{f}, \quad (2.3)$$

e na lei constitutiva linear (Lei de Hooke) que relaciona o tensor de tensões ($\boldsymbol{\sigma}$) e o campo de deslocamentos (\vec{u}):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} \nabla \cdot \vec{u} \, I + \mathbf{G} \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{u} \, I \right], \quad (2.4)$$

onde, I é o tensor identidade, ρ é massa específica do meio, \vec{f} representa as forças de corpo, \mathbf{K} é o módulo elástico e \mathbf{G} o módulo de cisalhamento.

Assumindo que o segundo termo à direita da Lei de Hooke, Eq. (2.4), representando as deformações que dão origem as tensões de cisalhamento, e as forças de corpo podem ser

negligenciados, temos, a partir das Eq. (2.3) e Eq. (2.4):

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} = \nabla (\mathbf{K} \nabla \cdot \vec{u}). \quad (2.5)$$

Em seguida, introduzindo a pressão como:

$$p = -\mathbf{K} \nabla \cdot \vec{u} \quad (2.6)$$

e dividindo Eq. (2.5) por ρ , temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.7)$$

Agora, tomando a divergência desta última equação, usando o resultado dado pela Eq. (2.6) e adicionando um termo de fonte (φ), temos a equação linear da onda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\vec{x}, t) = \mathbf{K} \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho(\vec{x})} \nabla p(\vec{x}, t) \right] + \varphi(\vec{x}, t). \quad (2.8)$$

Finalmente, assumindo que o gradiente da massa específica (ρ) pode ser negligenciado, temos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\vec{x}, t) = c^2(\vec{x}) \nabla^2 p(\vec{x}, t) + \varphi(\vec{x}, t), \quad (2.9)$$

onde, $c(\vec{x}) = \sqrt{\mathbf{K}(\vec{x})/\rho(\vec{x})}$ é a velocidade de propagação, \mathbf{K} é o módulo elástico e φ o termo de fonte.

2.3.1 Condições iniciais e de contorno

Para que a equação Eq. (2.9) possa ser aproximada, condições iniciais e de contorno devem ser fornecidas. Desde que a equação diferencial envolve derivadas de segunda ordem devemos estabelecer as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} p(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} p(\vec{x}, 0) &= p_{(t,0)}, & \vec{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (2.10)$$

Na Eq. (2.10) $f(\vec{x})$ é o estado inicial da pressão e $p_{(t,0)}$ estabelece o campo de velocidade inicial. Na maioria das nossas aplicações, $f(\vec{x}) = 0$ e $p_{(t,0)} = 0$, que estabelece que o domínio está em repouso antes da detonação da fonte sísmica.

Considere o domínio Ω com fronteira $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. Condições de contorno de Dirichlet, que prescrevem o valor da variável primária, são impostas sobre Γ_D e condições de contorno de Neumann, que prescrevem o valor da derivada de variável com relação à direção normal, são impostas sobre Γ_N :

$$\begin{aligned}
p(\vec{x}) &= p_D, & \vec{x} \in \Gamma_D \\
\frac{\partial}{\partial \vec{x}} p(\vec{x}) \cdot \vec{n} &= p_N, & \vec{x} \in \Gamma_N
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

onde \vec{n} é o vetor unitário normal à fronteira.

2.3.1.1 Fronteiras reflexivas

Se considerarmos $p_D = 0$ na Eq. (2.11) a onda é refletida ao atingir a fronteira Γ_D , porém esta muda de modo (sinal). Por outro lado, se a onda atinge uma fronteira Γ_N com $p_N = 0$, esta é refletida como um espelho, preservando o modo.

2.3.1.2 Fronteiras não-reflexivas

A simulação numérica está restrita a um domínio Ω limitado e, portanto, a criação de fronteiras não reflexivas é um artifício numérico utilizado para tentar simular o semi-espaço e impedir que as reflexões se formassem nas fronteiras retornem ao domínio prejudicando os experimentos (REYNOLDS, 1978). Desta forma utilizamos

$$\nabla p \cdot \vec{n} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_{NR}, \tag{2.12}$$

sendo Γ_{NR} o segmento não reflexivo da fronteira Γ .

2.3.2 Fonte sísmica

Para obter as informações a respeito da subsuperfície através da sísmica de reflexão, normalmente, são detonadas fontes artificiais na superfície (ou nas proximidades) de forma que as reflexões oriundas do meio possam ser registradas.

Neste trabalho, o modelo matemático utilizado para a fonte sísmica foi obtido a partir da segunda derivada da função Gaussiana, conforme descrito em (CUNHA, 1997) e é dado por:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \left[1 - 2\pi (\pi f_c t_d)^2 \right] e^{-\pi (\pi f_c t_d)^2}, \tag{2.13}$$

onde $f_c = f_r/3\sqrt{\pi}$ é a frequência de corte, $t_d = t - 2\sqrt{\pi}/f_r$ e f_r a frequência da onda.

Nos próximos capítulos, apresentamos o método de diferenças finitas que foi implementado e testado um código computacional, escrito em FORTRAN 90, para aproximar a solução da equação (2.9), em um domínio tridimensional, utilizando o método de diferenças finitas.

3 Método de diferenças finitas

Neste capítulo, é apresentado o Método de Diferenças Finitas (MDF) utilizado para aproximar a solução da Eq. (2.9).

No MDF o domínio do problema, contínuo, é substituído por uma série de pontos discretos, ou nós, nos quais são calculadas as incógnitas do problema. Essa substituição do contínuo pelo discreto denomina-se discretização. Uma vez efetuada a discretização do domínio do problema, discretiza-se a equação diferencial, substituindo-se as derivadas por fórmulas discretas de diferenças.

3.1 Discretização temporal e espacial

O domínio temporal $[0, T]$ é discretizado por um número Nt finito de pontos igualmente espaçados: $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^{Nt-1} < t^{Nt} = T$, com $\Delta t = t^n - t^{n-1}$. Considerando um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^3$, de forma similar, discretizamos as componentes espaciais, onde $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y = y_j - y_{j-1}$ e $\Delta z = z_k - z_{k-1}$. Definindo $P_{i,j,k}^n$ como uma aproximação para $p(x_i, y_j, z_k, t^n)$, onde os índices i, j, k se referem aos pontos da malha nas direções x, y, z , respectivamente, enquanto índice n representa o número do passo de tempo da simulação. Como exemplo, apresentamos as aproximações de segunda e quarta ordem para a derivada temporal:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\vec{x}_{i,j,k}, t^n) = \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j,k}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.1)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\vec{x}_{i,j,k}, t^n) = \frac{-P_{i,j,k}^{n+2} + 16P_{i,j,k}^{n+1} - 30P_{i,j,k}^n + 16P_{i,j,k}^{n-1} - P_{i,j,k}^{n-2}}{12\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^4). \quad (3.2)$$

3.2 Aproximação numérica

Para aproximar a solução da Eq. (2.9) foi utilizado o método de diferenças finitas centradas de segunda e quarta ordens no espaço (ambos de segunda ordem no tempo):

- Método de segunda ordem no espaço:

$$\begin{aligned} P_{i,j,k}^{n+1} = & C \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[P_{i+1,j,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i-1,j,k}^n \right] + \\ & C \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \left[P_{i,j+1,k}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j-1,k}^n \right] + \\ & C \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 \left[P_{i,j,k+1}^n - 2P_{i,j,k}^n + P_{i,j,k-1}^n \right] + \\ & 2P_{i,j,k}^n - P_{i,j,k}^{n-1} - \Delta t^2 \delta(i, i_\varphi) \delta(j, j_\varphi) \delta(k, k_\varphi) \varphi^n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

- Método de quarta ordem no espaço:

$$\begin{aligned}
P_{i,j,k}^{n+1} &= \frac{C}{12} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[-P_{i+2,j,k}^n + 16P_{i+1,j,k}^n - 30P_{i,j,k}^n + 16P_{i-1,j,k}^n - P_{i-2,j,k}^n \right] + \\
&\frac{C}{12} \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \left[-P_{i,j+2,k}^n + 16P_{i,j+1,k}^n - 30P_{i,j,k}^n + 16P_{i,j-1,k}^n - P_{i,j-2,k}^n \right] + \\
&\frac{C}{12} \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 \left[-P_{i,j,k+2}^n + 16P_{i,j,k+1}^n - 30P_{i,j,k}^n + 16P_{i,j,k-1}^n - P_{i,j,k-2}^n \right] + \\
&2P_{i,j,k}^n - P_{i,j,k}^{n-1} - \Delta t^2 \delta(i, i_\varphi) \delta(j, j_\varphi) \delta(k, k_\varphi) \varphi^n.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Aqui $C = c_{i,j,k}^2 = \left(\frac{K(x_i, y_j, z_k)}{\rho(x_i, y_j, z_k)} \right)^2$. Os pontos $i_\varphi, j_\varphi, k_\varphi$ indicam a posição da fonte nos nós da malha, portanto, $\delta(\alpha, \alpha_\varphi) = 1$ caso $\alpha = \alpha_\varphi$ e $\delta(\alpha, \alpha_\varphi) = 0$, caso contrário, onde $\alpha = i, j, k$.

Visando controlar a dispersão numérica a seguinte restrição foi aplicada à discretização espacial:

$$h \leq \frac{c_{\min}}{\varepsilon f_c}, \tag{3.5}$$

onde $h = \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$, f_c é a frequência de corte e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (neste trabalho usamos $\varepsilon = 5$) (LINGE; LANGTANGEN, 2017).

Para garantir a estabilidade dos métodos obtidos nas Eq. (3.3) e (3.4) devemos garantir que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\Delta t \leq \frac{\beta}{\bar{c}} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1/2}, \tag{3.6}$$

onde $\bar{c} = \sqrt{\max_{\vec{x} \in \Omega} c^2(\vec{x})}$ e $\beta \in (0, 1]$ (LINGE; LANGTANGEN, 2017).

As Eq. (3.3) e (3.4) foram implementadas em um código computacional, escrito em linguagem FORTRAN 90.

4 Experimentos Numéricos

Neste capítulo, apresentamos uma série de experimentos para mostrar a efetividade do simulador construído a partir da Eq. (2.9) discretizada via os métodos Eq. (3.3) e (3.4).

4.1 Experimento 1D

Iniciamos esta seção analisando as soluções aproximadas para um problema unidimensional comparando os resultados obtidos com previsões teóricas.

Para verificar o código computacional implementado, primeiramente, consideramos um caso no qual temos uma solução analítica. Considere um material elástico, com velocidade de propagação c , no domínio unidimensional $[L_0, L_1]$. Com base na Eq. (2.9), o seguinte problema adimensional foi utilizado para os testes:

$$p_{tt} = c^2 p_{xx}, \quad (4.1)$$

em conjunto com as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= f(x), & x \in [L_0, L_1] \\ p_x(x, 0) &= 0, & x \in [L_0, L_1] \\ p(L_1, t) &= 0, & t \in (0, T] \\ p(L_2, 0) &= 0, & t \in (0, T] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Especificamente, $f(x) = \exp[-(x + 5)^2]$ e $[L_0, L_1] = [-10, 10]$.

Considerando o problema dado por Eq. (4.1) e (4.2) em um domínio homogêneo com velocidade $c = 1$ e um tempo total $t = 10$, a condição inicial, dada por $f(x)$, será transladada da posição $x = -5$ para a posição $x = 5$ sem sofrer qualquer alteração em seu formato. Portanto, temos uma solução analítica do problema que será usada para validar o código computacional. Para obtenção da solução numérica utilizamos uma aproximação de segunda ordem espacial e temporal. O domínio foi discretizado em uma malha de 201 nós. A Figura 2 apresenta as soluções analítica e numérica, na qual podemos verificar excelente acordo entre as duas soluções.

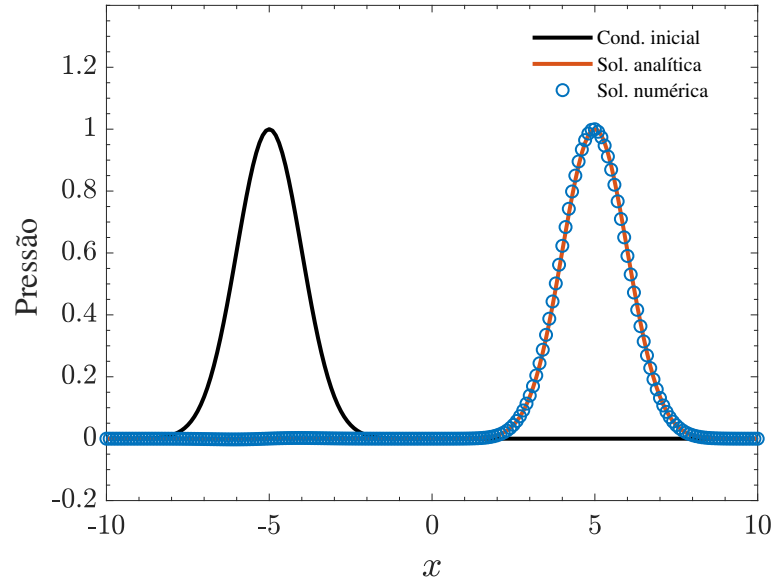


Figura 2 – Comparação entre as soluções analítica e numérica (método de segunda ordem no espaço).

Quando uma onda sísmica (com amplitude A_i) se depara com uma barreira, ou incide numa interface entre dois meios diferentes, podem ocorrer dois fenômenos: reflexão e transmissão. A amplitude do sinal refletido é função de uma complexa interação entre diversos fatores. No entanto, uma simplificação desta relação é definida para ângulos de incidência normal à superfície refletora. Supondo uma onda propagando-se do meio 1 em direção ao meio 2, as relações entre a amplitude da onda incidente A_i e as amplitudes das ondas transmitida (A_t) e refletida (A_r), quando a onda incidente atinge a interface entre os dois meios, são dadas por:

$$\frac{A_r}{A_i} = R \quad \text{e} \quad \frac{A_t}{A_i} = T,$$

onde R e T são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente, determinados por:

$$R = \frac{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} \quad \text{e} \quad T = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}, \quad (4.3)$$

onde v_1 e ρ_1 são a velocidade de propagação e a massa específica do meio 1, respectivamente. Da mesma forma v_2 e ρ_2 são a velocidade de propagação e a massa específica do meio 2. Portanto, o coeficiente de reflexão depende do contraste de impedância acústica (ρv) entre dois meios físicos.

Consideramos, a seguir, um experimento para analisar se as relações dadas na Eq. (4.3) são corretamente reproduzidas nas soluções aproximadas.

A solução da Eq. (4.1), associada com condições dadas na Eq. (4.2), foi aproximada utilizando o método de diferenças finitas centradas com aproximações de segunda ordem no tempo e segunda e quarta ordens no espaço.

Para visualizar a reflexão e transmissão das ondas, utilizamos dois valores de velocidade de propagação:

$$c(x) = \begin{cases} c_1 = 1, & L_0 \leq x \leq 0, \\ c_2 = 1/4, & 0 < x \leq L_1. \end{cases} \quad (4.4)$$

O domínio foi discretizado em uma malha de 501 nós e, para garantir estabilidade do método, consideramos $\Delta t = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\max\{c\}}$.

As relações dadas na Eq. (4.3) foram usadas para prever o comportamento das ondas e são representadas na Figura 3, na qual podemos ver que as soluções aproximadas das ondas comportaram-se segundo as previsões teóricas, ou seja, as ondas refletida e transmitida alcançaram as amplitudes previstas e representadas no gráfico pelas linhas pontilhadas.

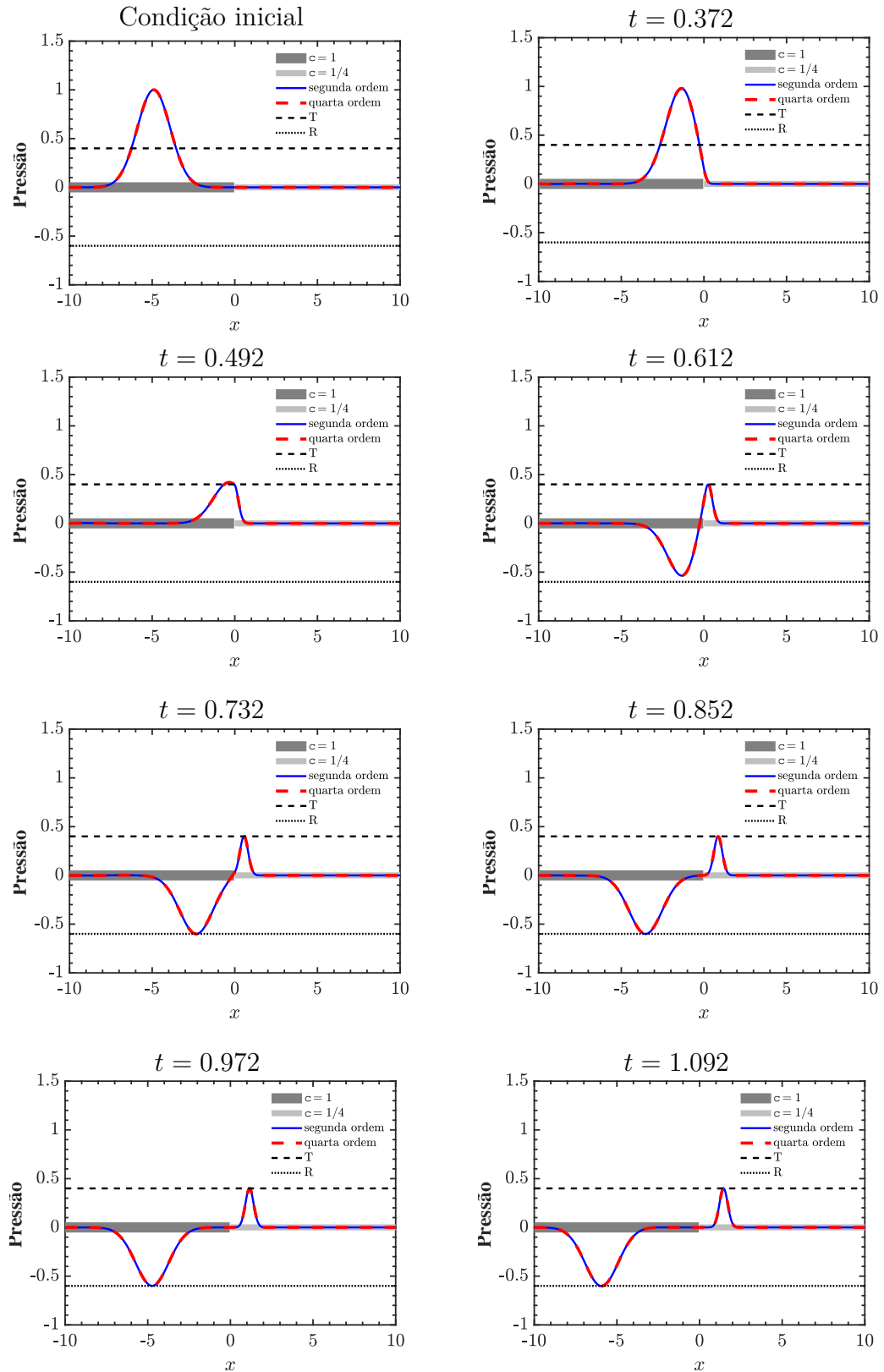


Figura 3 – Solução aproximada da pressão em diferentes instantes de tempo.

4.2 Experimentos 2D

Nesta seção, apresentamos dois experimentos bidimensionais para mostrar a implementação dos “geofones” ao código que tem por objetivo registrar a passagem das ondas em pontos específicos do domínio. Tais registros (sismogramas) são usados no processo de inversão de dados.

Os cenários de simulação são idênticos para os dois problemas considerados, a menos dos campos de velocidades que são mostrados na Figura 5. Consideramos um domínio bidimensional de $1.000\text{ m} \times 1.000\text{ m}$, discretizado em uma malha de 500×500 pontos, no qual uma fonte sísmica foi posicionada na região central da superfície $(x, y) = (500\text{ m}, 1.000\text{ m})$ e 50 geofones instalados na superfície, conforme mostrado na Figura 4.

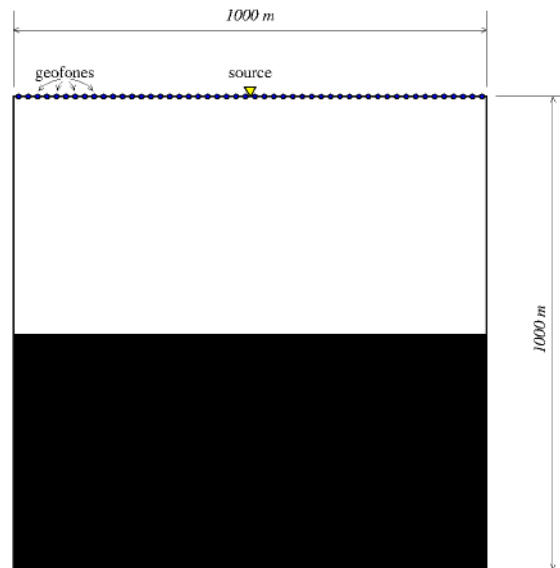


Figura 4 – Domínio.

Matematicamente, a fonte é descrita pela Eq. (2.13) com frequência de $f_r = 60\text{ Hz}$. Nas fronteiras do domínio foram consideradas condições de contorno absorventes.

As Figuras 6 e 7 mostram a propagação da onda sísmica para os Problemas 1 e 2, respectivamente. É possível observar os fenômenos de transmissão e reflexão toda vez que a onda atinge uma camada material com velocidade de propagação diferente.

As pressões registradas nos geofones ao longo do tempo de simulação (sismogramas) são apresentadas na Figura 8. Podemos ver a maior complexidade dos registros do sismograma do Problema 2 causada pelo seu campo de velocidades.

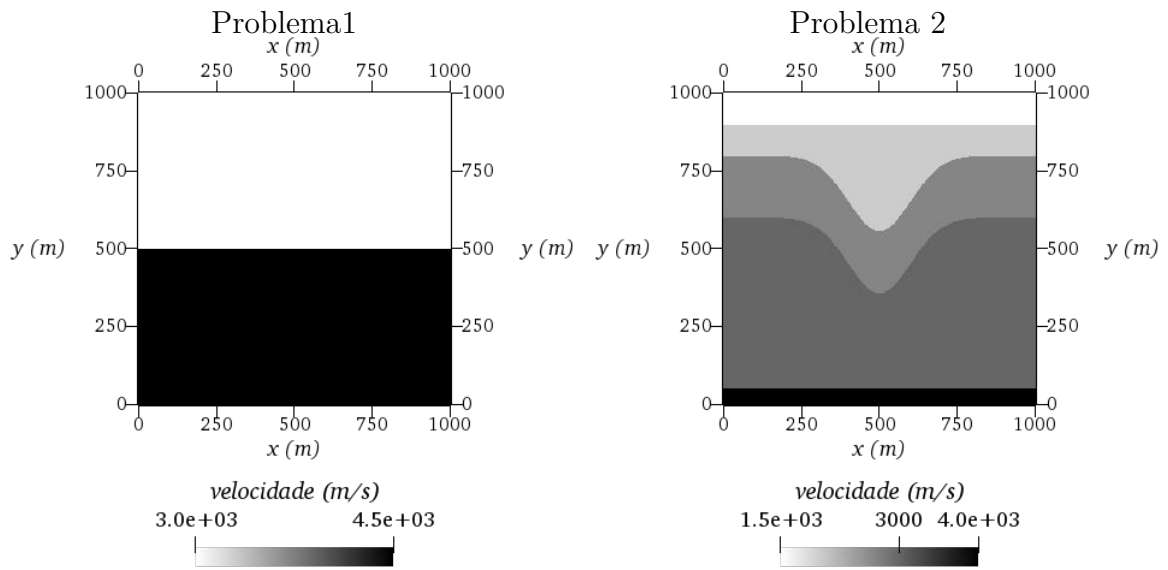


Figura 5 – Velocidades de propagação dos domínios utilizados.

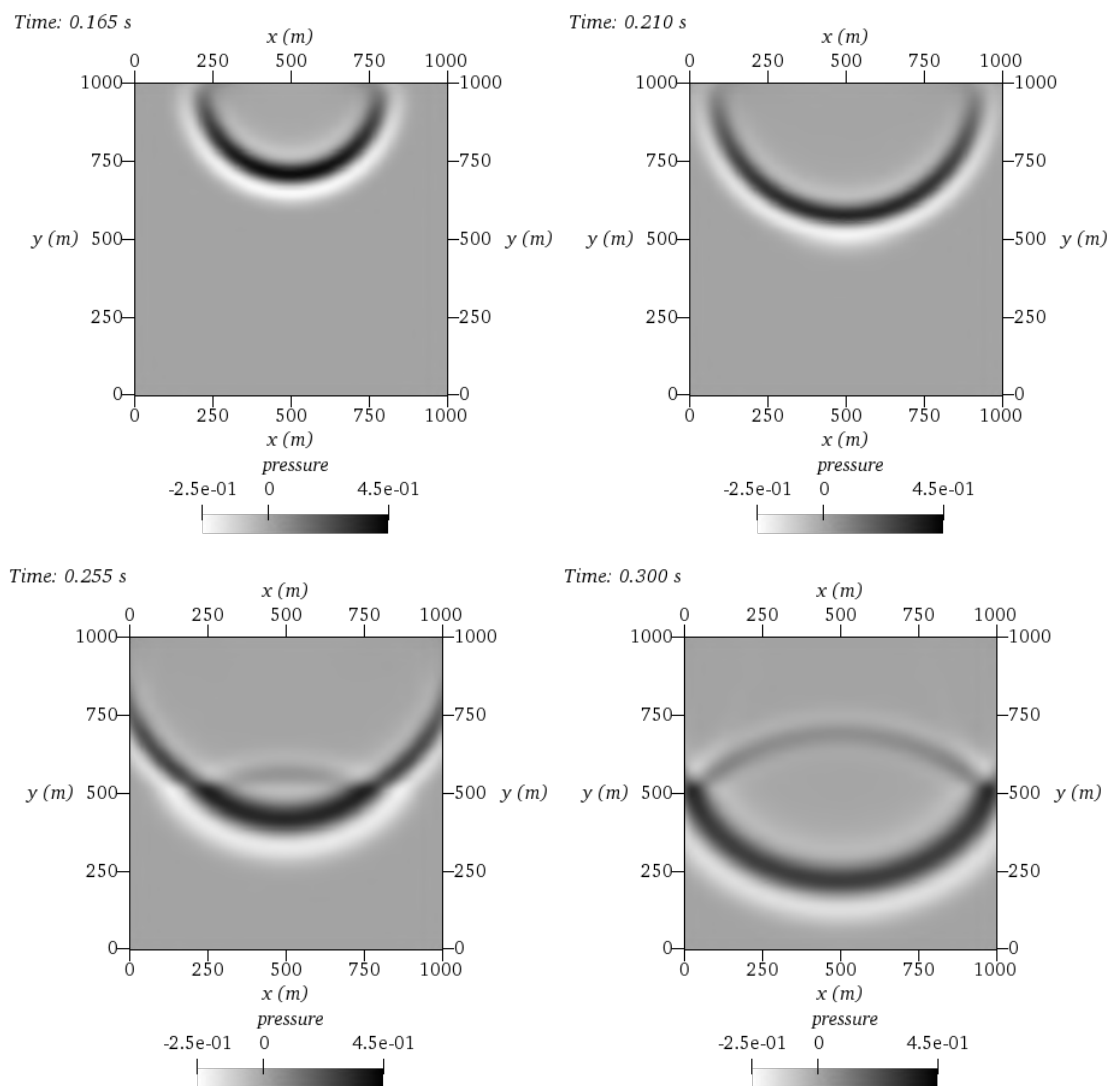


Figura 6 – Pressões em diferente instantes de tempo para o Problema 1.

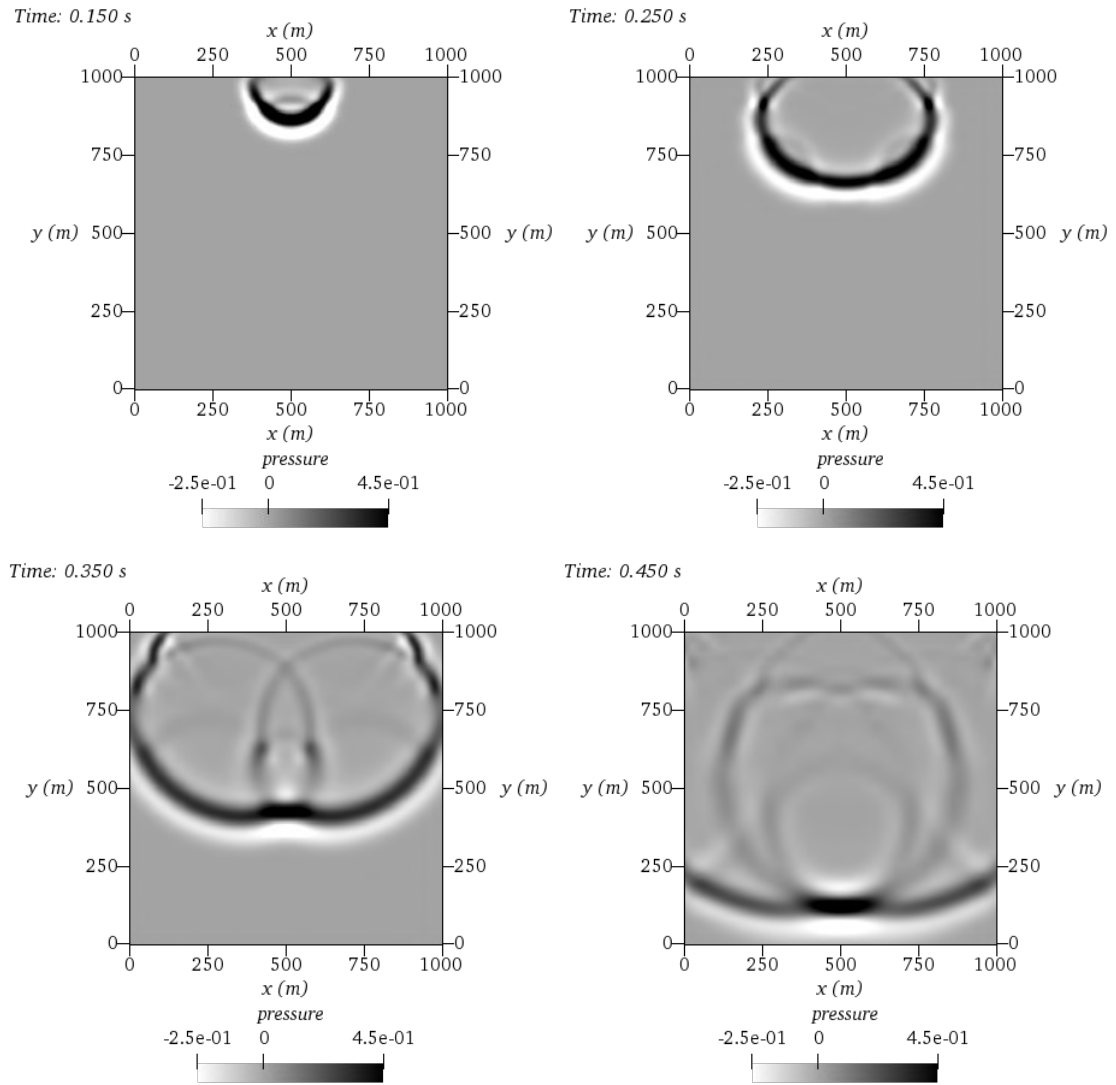


Figura 7 – Pressões em diferente instantes de tempo para o Problema 2.

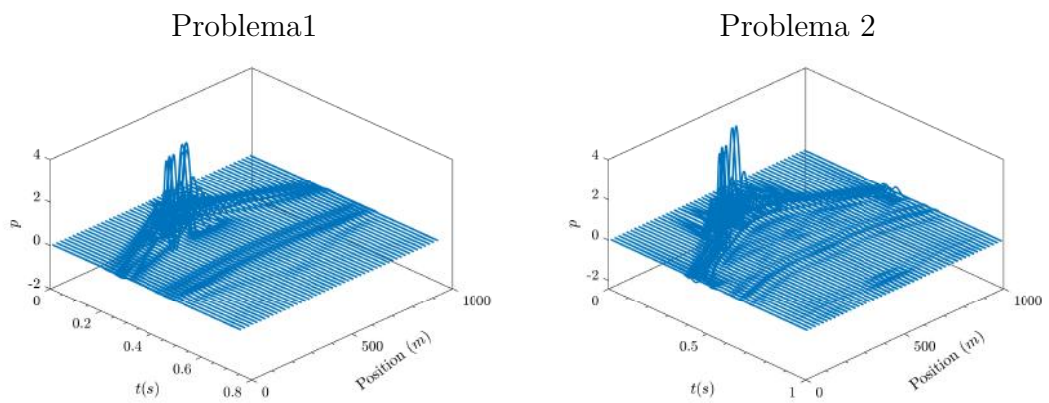


Figura 8 – Sismogramas.

4.3 Experimentos 3D

4.3.1 Fonte sísmica

Neste experimento consideramos um domínio de $3.000 \times 3.000 \times 3.000 \text{ m}^3$ (discretizado em uma malha computacional de $301 \times 301 \times 301$ pontos) no qual uma fonte sísmica artificial foi colocada no centro deste. O material apresenta duas camadas com propriedades distintas na direção z . De baixo para cima, nos primeiros 1.000 m a velocidade de propagação da onda é de 2.200 m/s , nos 2.000 m restantes a velocidade de propagação é de 2.800 m/s (Figura 10).

O modelo matemático utilizado para a fonte sísmica foi aquele apresentado em Eq. (2.13), o qual reproduzimos aqui:

$$\varphi(t) = \left[1 - 2\pi(\pi f_c t_d)^2\right] e^{-\pi(\pi f_c t_d)}, \quad (4.5)$$

onde $t_d = t - \frac{2\sqrt{\pi}}{f_c}$ é o tempo defasado, necessário para deslocar a função para a direita, garantindo que $\varphi(t) = 0 \quad \forall t < 0$, e f_c é a frequência central da fonte, dada por:

$$f_c = \frac{f_c}{3\sqrt{\pi}}. \quad (4.6)$$

A Figura 9 mostra a propagação da onda sísmica em quatro tempos distintos. Podemos observar que a onda, ao atingir a camada com propriedade diferente, parte dela é refletida e parte é transmitida com velocidade diferente (Figura 9). Uma visualização mais detalhada desse resultado é dada na Figura 10.

4.3.2 Camadas Inclinadas

Neste experimento numérico, consideramos um domínio $\Omega = [1.000 \text{ m} \times 1.280 \text{ m} \times 1.000 \text{ m}]$, discretizado em uma malha de $251 \times 321 \times 251$ pontos. O domínio Ω apresenta quatro camadas de materiais com diferentes velocidades (Figura 11).

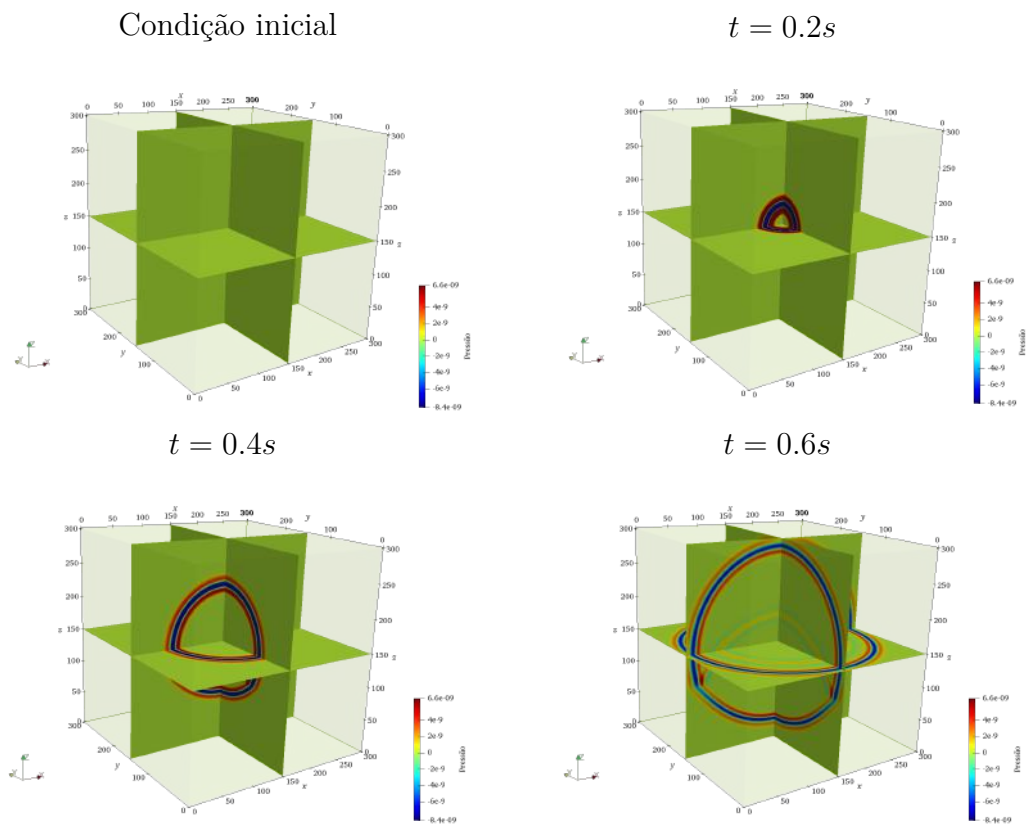


Figura 9 – Pressão em quatro tempos distintos. Os eixos x , y e z indicam o número de pontos da malha.

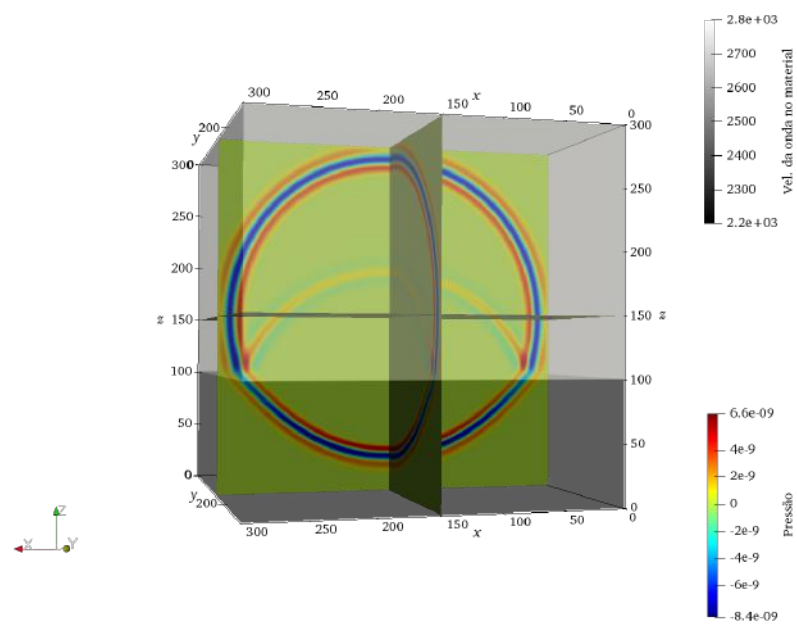


Figura 10 – Transmissão e reflexão da onda sísmica ao atravessar diferentes materiais.

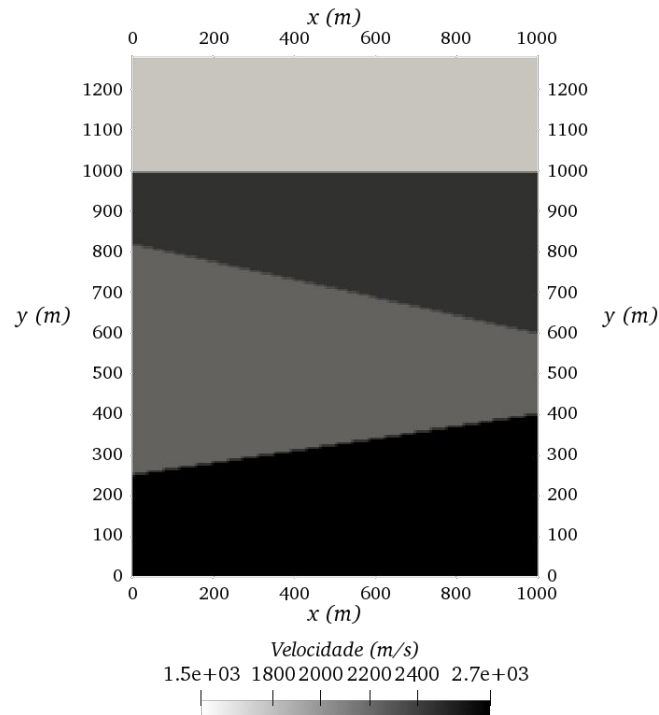


Figura 11 – Velocidades das camadas do domínio Ω .

Uma fonte sísmica, descrita em Eq. (2.13) com frequência $f_r=50 \text{ Hz}$, foi localizada na posição $(x, y, z)=(500 \text{ m}, 1.280 \text{ m}, 500 \text{ m})$. Nas fronteiras do domínio foram consideradas condições de contorno absorventes (Eq. (2.12)).

A Figura 4.3.2 mostra a propagação da onda sísmica em vários instantes de tempo obtida utilizando o método descrito na Eq. (3.3). Podemos observar que a onda, ao atingir uma camada com propriedade diferente, parte dela é refletida e parte é transmitida com velocidade diferente, conforme esperado.

Condição inicial

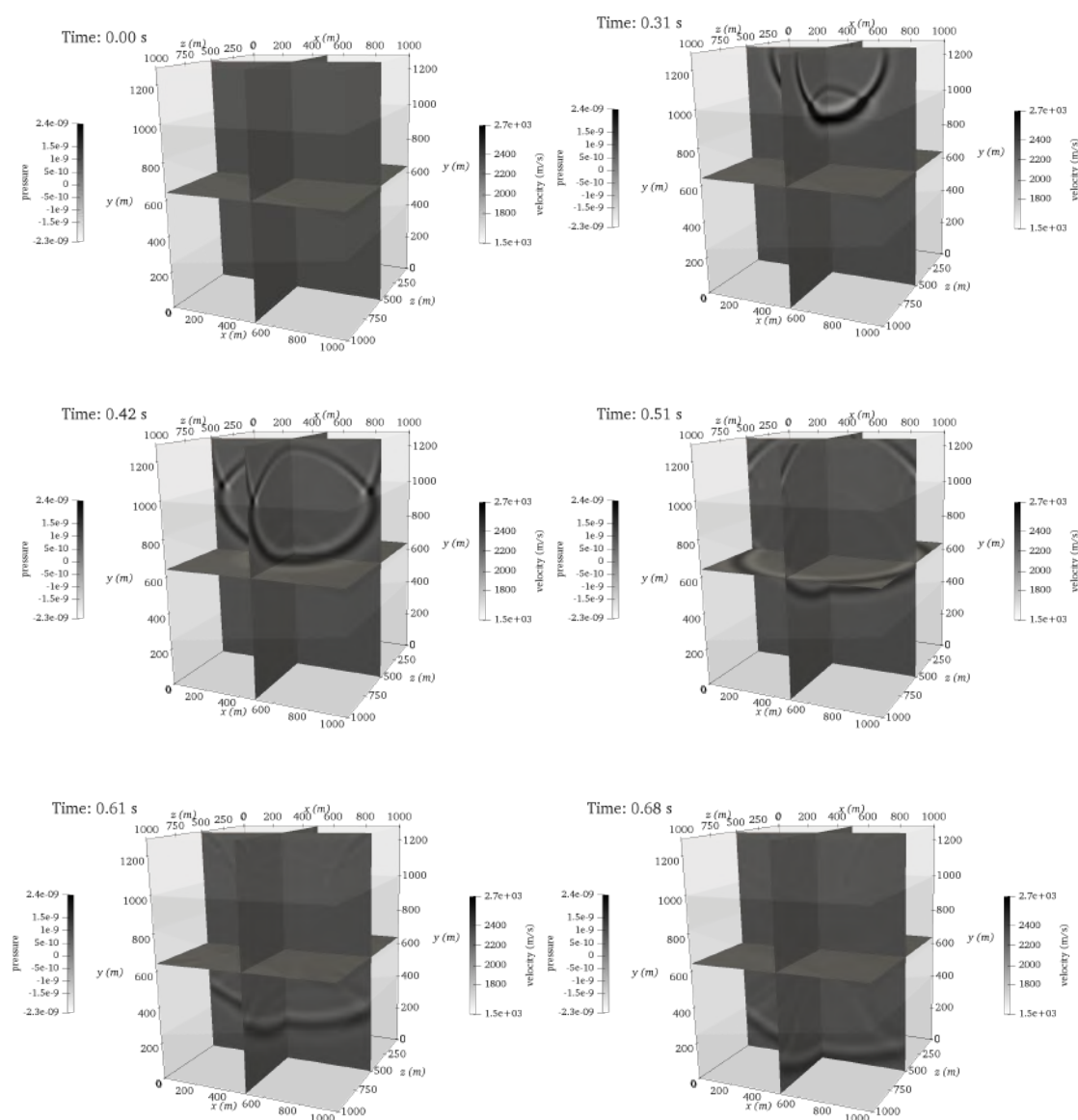


Figura 12 – Pressão em tempos distintos.

5 Conclusão

O método de diferenças finitas (de segunda e quarta ordens) proporcionou uma boa aproximação da solução da Eq. (2.9), capturando o comportamento físico esperado para os problemas estudados. Portanto, temos um simulador que está qualificado para ser usado no processo de inversão de dados sísmicos reais.

Como sugestões para trabalhos futuros tem-se:

- A otimização do código computacional com a paralelização do mesmo;
- Adaptação e aplicação do estudo para Migração reversa no tempo;
- Aplicação à dados reais.

Referências

- CUNHA, P. E. M. *Estratégias Eficientes para Migração Reversa no Tempo Pré-empilhamento 3-D em Profundidade pelo Método das Diferenças Finitas*. Tese (Doutorado) — P.P.P.G., Universidade Federal da Bahia, 1997. Citado na página 22.
- ERNESTO, M.; USSAMI, N. Introdução à geofísica. *Departamento de Geofísica IAG/USP*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- FRAZER, B. et al. Seismic inversion: Reading between the lines. *Oilfield Rev*, v. 20, n. 1, p. 42–63, 2008. Citado na página 16.
- FRODEMAN, R. O raciocínio geológico: a geologia como uma ciência interpretativa e histórica. *Terræ Didactica*, v. 6, n. 2, p. 85–99, 2010. Citado na página 14.
- LINGE, S.; LANGTANGEN, H. P. Wave equations. In: _____. *Finite Difference Computing with PDEs: A Modern Software Approach*. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 93–205. ISBN 978-3-319-55456-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-55456-3_2>. Citado na página 24.
- LIU, J. S. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. [S.l.]: Springer, 2001. ISBN 0387952306. Citado na página 16.
- NETO, A. A. Uso da sísmica de reflexão de alta resolução e da sonografia na exploração mineral submarina. *Revista Brasileira de Geofísica, SciELO Brasil*, v. 18, n. 3, p. 241–256, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 9, 15, 18 e 19.
- ODY, L. C. et al. Teoria e história na geologia. Florianópolis, SC, 2005. Citado na página 14.
- REGO, E. C. G. Modelagem e migração sísmica usando método de expansão rápida rem através dos polinômios de hermite e laguerre. *Trabalho de Graduação. Universidade Federal da Bahia*, 2014. Citado na página 20.
- REYNOLDS, A. C. Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems. *GEOPHYSICS*, v. 43, p. 1099–1110, 1978. Citado na página 22.
- RIEL, P. V. The past, present, and future of quantitative reservoir characterization. *The leading edge*, Society of Exploration Geophysicists, v. 19, n. 8, p. 878–881, 2000. Citado na página 15.
- ROBERT, C. P.; CASELLA, G. *Monte Carlo Statistical Methods (Springer Texts in Statistics)*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2005. Citado na página 16.
- SANCEVERO, S. S.; REMACRE, A. Z.; PORTUGAL, R. d. S. O papel da inversão para a impedância acústica no processo de caracterização sísmica de reservatórios. *Revista Brasileira de Geofísica, SciELO Brasil*, v. 24, n. 4, p. 495–512, 2006. Citado na página 19.

SCHÖN, J. H. *Handbook of Geophysical Exploration: Fundamentals and Principles of Petrophysics. Seismic Exploration. Physical Properties of Rocks*. [S.l.]: Pergamon, 1996. Citado na página 18.

SEN, M. K.; BISWAS, R. Transdimensional seismic inversion using the reversible jump hamiltonian monte carlo algorithm. *Geophysics*, v. 82, n. 3, p. 119–134, 2017. Citado na página 17.

WOODS, R. Soil properties for shear wave propagation. In: *Shear Waves in Marine Sediments*. [S.l.]: Springer, 1991. p. 29–39. Citado na página 18.