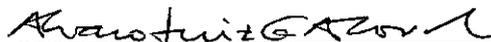


ANÁLISE ADAPTATIVA POR REGENERAÇÃO DA MALHA

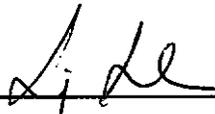
Julio César da Silva Portela

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

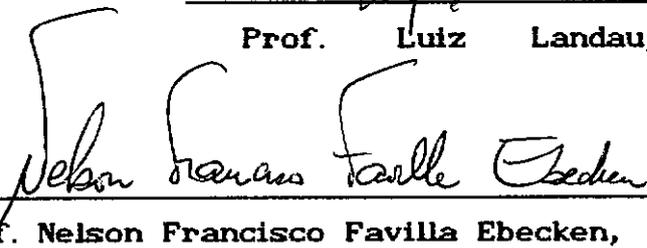
Aprovada por :



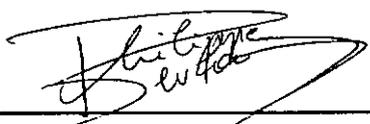
Prof. Álvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.
(Presidente)



Prof. Luiz Landau, D.Sc.



Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.



Prof. Philippe Remy Bernard Devloo, Ph.D.

PORTELA, JÚLIO CÉSAR DA SILVA

Análise Adaptativa por Regeneração da Malha [Rio de Janeiro]
1991.

vii, 84 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil,
1991)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Refinamento Adaptativo
versão h. 3. Estimativa de Erro. 4. Análise Estrutural.

I. COPPE/UFRJ. II. Título (série).

AGRADECIMENTOS

Ao professor Álvaro L. G. A. Coutinho, pela amizade, incentivo e orientação dos trabalhos.

A Luiz Landau, José L. D. Alves e Francisco Moreira pela permanente disponibilidade e valiosas sugestões.

A Fernando L. B. Ribeiro que, principalmente através dos programas SIGMA e COLOR16, prestou inestimável contribuição na fase de análise de resultados.

Aos demais amigos da COPPE (professores, funcionários e estudantes), pelo agradável convívio.

Aos professores do Depto de Estruturas da UFJF, que tornaram possível meu afastamento.

A CAPES, pelo suporte financeiro.

Não poderia deixar de expressar meus especiais agradecimentos a José L. D. Alves e Philippe R. B. Devloo, que fornecendo o embrião do gerador utilizado, tornaram possível seu desenvolvimento.

A minha esposa, Angela, pelo incentivo e apoio incansáveis.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE ADAPTATIVA POR REGENERAÇÃO DA MALHA

Júlio César da Silva Portela

FEVEREIRO, 1991

Orientador: Prof. Álvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Programa : Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo apresentar um esquema adaptativo do Método dos Elementos Finitos para análise de erros *α-posteriori* e refinamento tipo *h* com malhas não estruturadas, na resolução de problemas de elasticidade plana e de flexão de placas.

O gerador de malhas desenvolvido se baseia na técnica dos avanços frontais. Utiliza-se um elemento triangular linear e o estimador de erros se baseia em projeção e suavização de tensões.

Problemas representativos são analisados, sendo o erro estimado confrontado com o erro calculado através de resultado analítico e sendo testada a razão de convergência.

Abstract as Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ADAPTIVE REMESHING FOR
PLANE ELASTICITY AND PLATE BENDING PROBLEMS

Julio César da Silva Portela

FEBRUARY, 1991

Thesis Supervisor: Álvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho
Department : Civil Engineering

This work is concerned with the development of an adaptive remeshing scheme for the h-version of the Finite Element Method, applied to plane elasticity and plate bending problems.

The advancing front technique is employed for mesh generation. A linear triangular finite element is used and *a-posteriori* error estimator is based on projections and smoothing techniques.

Several problems are analysed and results compared with the analytical solutions. Numerical rates of convergence are also investigated.

ÍNDICE

	Pag.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	01
I.1 - Histórico e Motivação	01
I.2 - Objetivos	02
I.3 - Organização do Texto	02
CAPÍTULO II - GERAÇÃO DE MALHAS TRIANGULARES PARA DOMÍNIOS PLANOS ARBITRÁRIOS	08
II.1 - Aspectos Gerais	08
II.2 - Algoritmo de geração de malhas	09
II.2.1 - Geração de nós internos	10
II.2.2 - Triangularização	12
II.2.3 - Redistribuição dos nós internos	15
II.3 - Exemplos	16
II.3.1 - Barragem	16
II.3.2 - Domínio com contornos irregulares	16
CAPÍTULO III - ESTIMATIVAS DE ERRO E ADAPTATIVIDADE	36
III.1 - Análise de Erros	36
III.1.1 - Definição do Problema	36
III.1.2 - Normas de Erro	37
III.1.3 - Estimativa de Erro	38
III.2 - Estratégia de Refinamento tipo h	39
III.2.1 - Convergência	39
III.2.2 - Refinamento	40
CAPÍTULO IV - ANÁLISE DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE PLANA	42
IV.1 - Formulação do Problema	42
IV.2 - Exemplos	43
IV.2.1 - Fratura	43
IV.2.2 - Domínio em L	45
CAPÍTULO V - ANÁLISE DE PROBLEMAS DE FLEXÃO DE PLACAS	57
V.1 - Formulação do Problema	57
V.2 - Exemplos	59

V.2.1 - Placa Circular	59
V.2.2 - Placa Quadrada	61
CAPÍTULO VI - CONCLUSÃO	79
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - HISTÓRICO E MOTIVAÇÃO

No decorrer dos últimos anos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tornou-se uma ferramenta cada vez mais utilizada na solução, por computador, de problemas práticos de engenharia. Uma das questões fundamentais do método, a confiabilidade dos resultados, tem sido, mais recentemente, motivo de pesquisas no sentido de se criarem procedimentos para estimativa de erro e refinamento automático das soluções. Frequentemente usuários do MEF se deparam com o problema de escolha de uma malha que garanta uma boa aproximação para a solução do problema estudado. Em muitos casos, informações a respeito do erro associado a uma discretização são necessários para que se faça bom uso do método.

Importantes trabalhos nesta área tem sido publicados por Zienkiewicz (1983, 1984, 1987a, 1987b, 1988), Kelly (1983), Babuska (1978, 1979, 1986), entre outros, e, em 1984, realizou-se em Lisboa, Portugal, a primeira conferência internacional totalmente dedicada aos temas "Análise de erros e Adaptatividade" (ARFEC 84).

As análises de erros em elementos finitos podem ser "*a-priori*", se feitas antes de se calcular a solução correspondente, ou "*a-posteriori*", se o erro é estimado a partir da solução obtida. Conhecida, em um domínio, a distribuição de erros associada a uma solução, existem três alternativas para o refinamento: refinar a malha através da introdução de elementos menores, o que pode ocorrer de maneira estruturada (subdivisão sucessiva de elemento) ou não (refaz-se a malha com novos tamanhos de elementos); aumentar a ordem dos polinômios usados, introduzindo-se novos modos; redistribuir os nós de modo a obter uma malha "*ótima*", mantendo-se o mesmo número de equações. As Figuras I.1a a I.1e ilustram estas possibilidades, frequentemente denominadas refinamento *h*, *p* e *r*, respectivamente. Mais recentemente, tem sido usadas também versões combinadas, como o

refinamento $h-p$, visando acelerar a convergência do método.

A estimativa de erro a-posteriori, versão h , desenvolvida por Zienkiewicz (1987a) com a respectiva técnica de recriação da malha permitem a avaliação de erros, tanto local quanto globalmente, de maneira simples, para vários elementos usuais. Um processo completa ou parcialmente automático pode ser elaborado com códigos já existentes. A confiabilidade da estimativa do erro pode ser demonstrada tanto numericamente quanto matematicamente (Zienkiewicz (1987a) e Peraire (1988)).

1.2 - OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar a possibilidade de se utilizar, com sucesso, um elemento triangular linear e um estimador de erros que utiliza como projeção a média nodal, ambos de grande simplicidade, para a análise de problemas de elasticidade plana e de flexão de placas, através de um refinamento não estruturado da malha.

1.3 - ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Para atender aos objetivos supra-citados tornou-se necessário o desenvolvimento de um gerador de malhas triangulares, que é descrito, com detalhes, no Capítulo II. No Capítulo III, apresentam-se alguns conceitos básicos referentes à análise e medidas de erros, bem como os principais aspectos do processo adaptativo utilizado. O Capítulo IV é dedicado aos problemas de Elasticidade Plana, e o Capítulo V, aos de Flexão de Placas, ambos apresentando a formulação básica do problema em questão, os exemplos estudados e a análise dos resultados obtidos. Finalmente, o Capítulo VI destaca as principais conclusões alcançadas no decorrer deste trabalho, bem como sugestões para futuras pesquisas que possibilitem o aperfeiçoamento e a continuidade do mesmo.

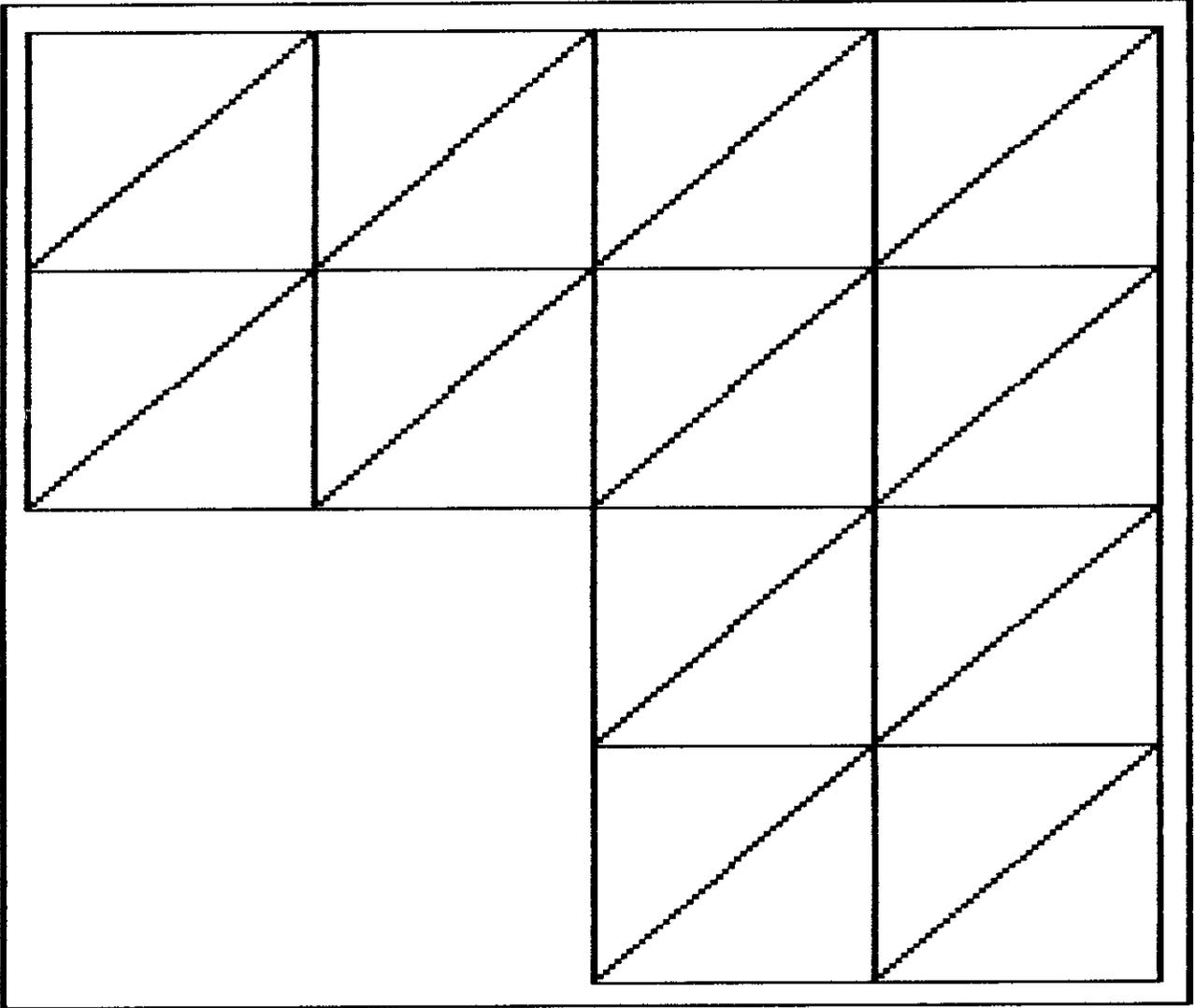


FIG. 1.1A

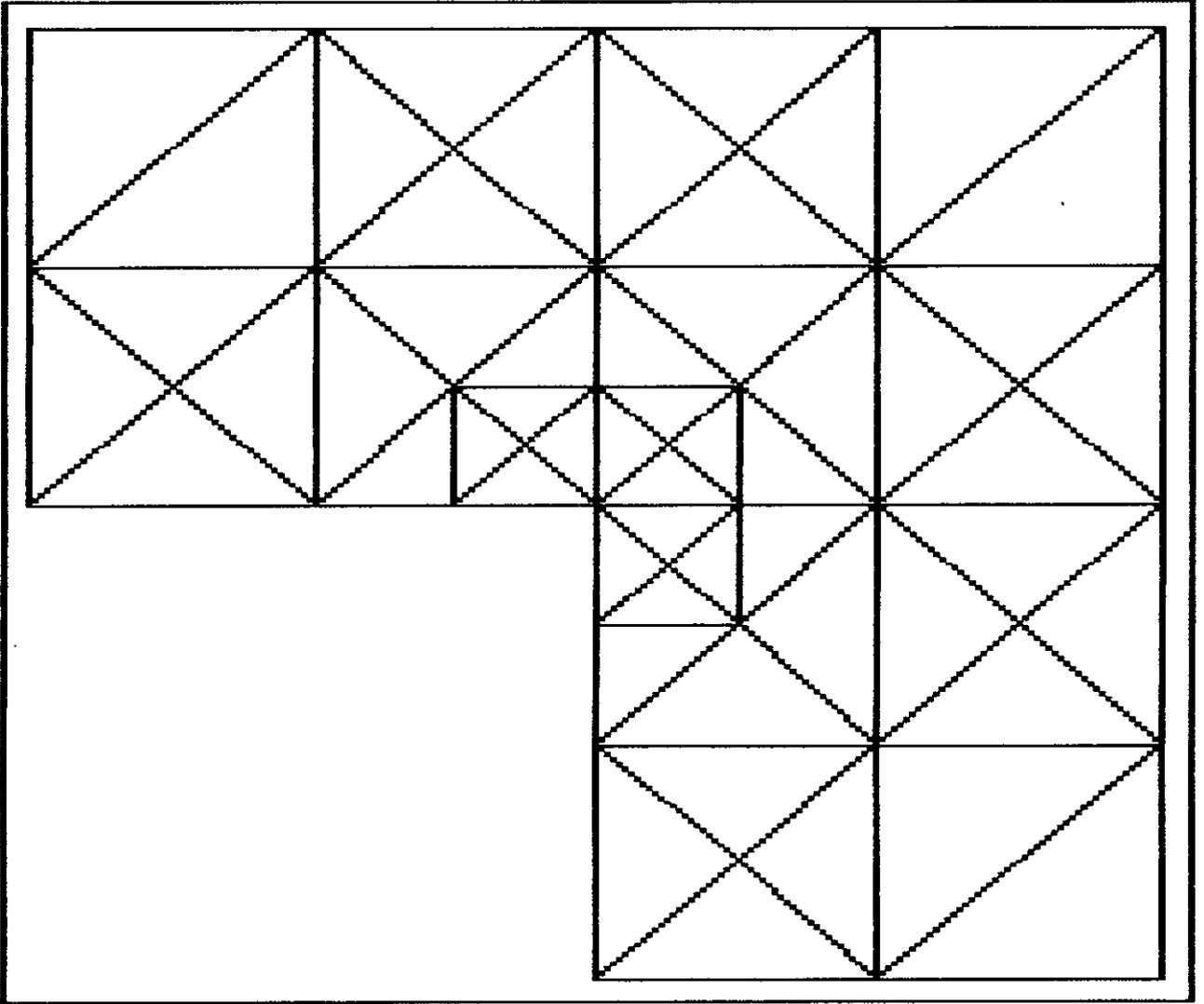


FIG. 1.1B

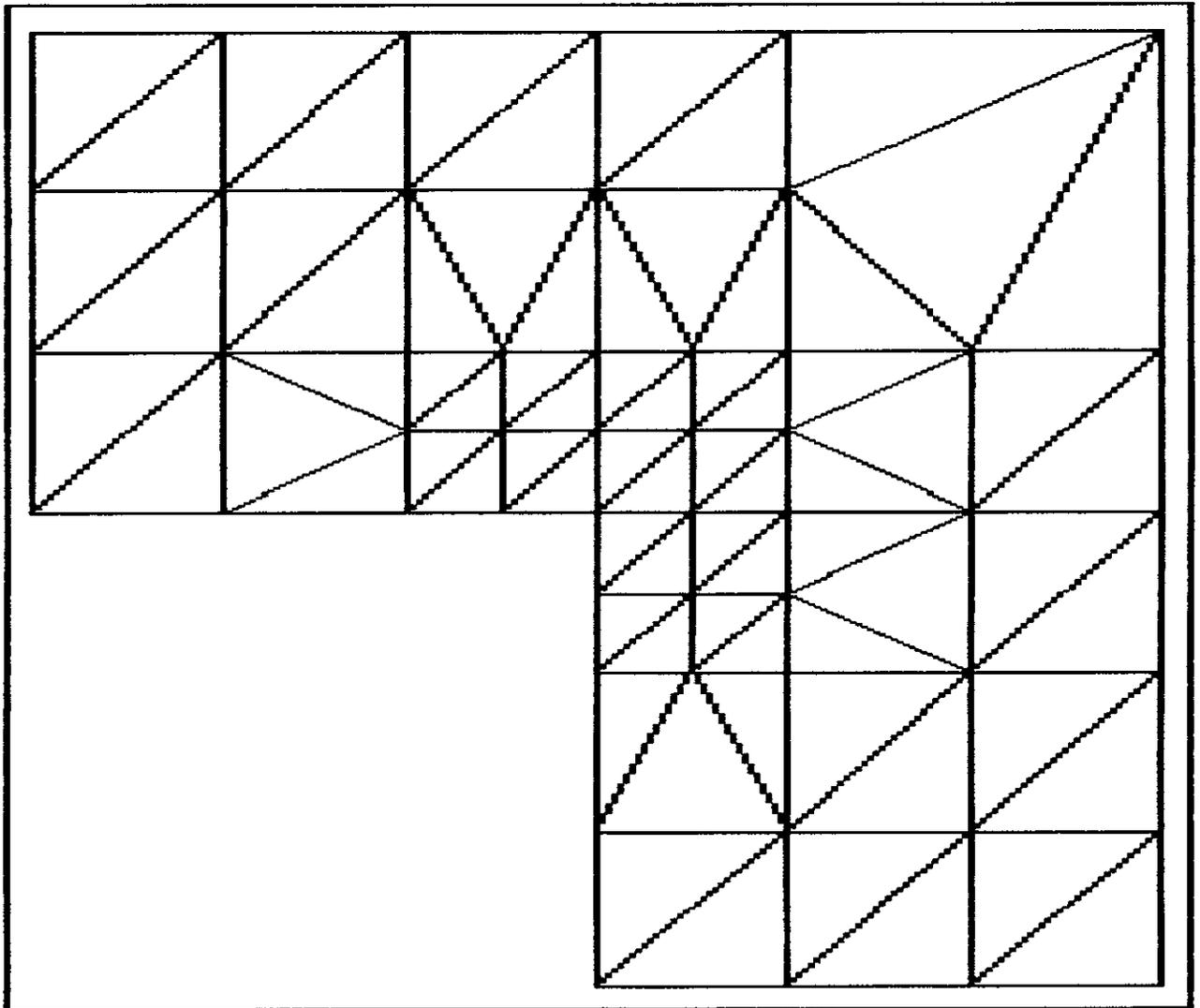


FIG. 1.1c

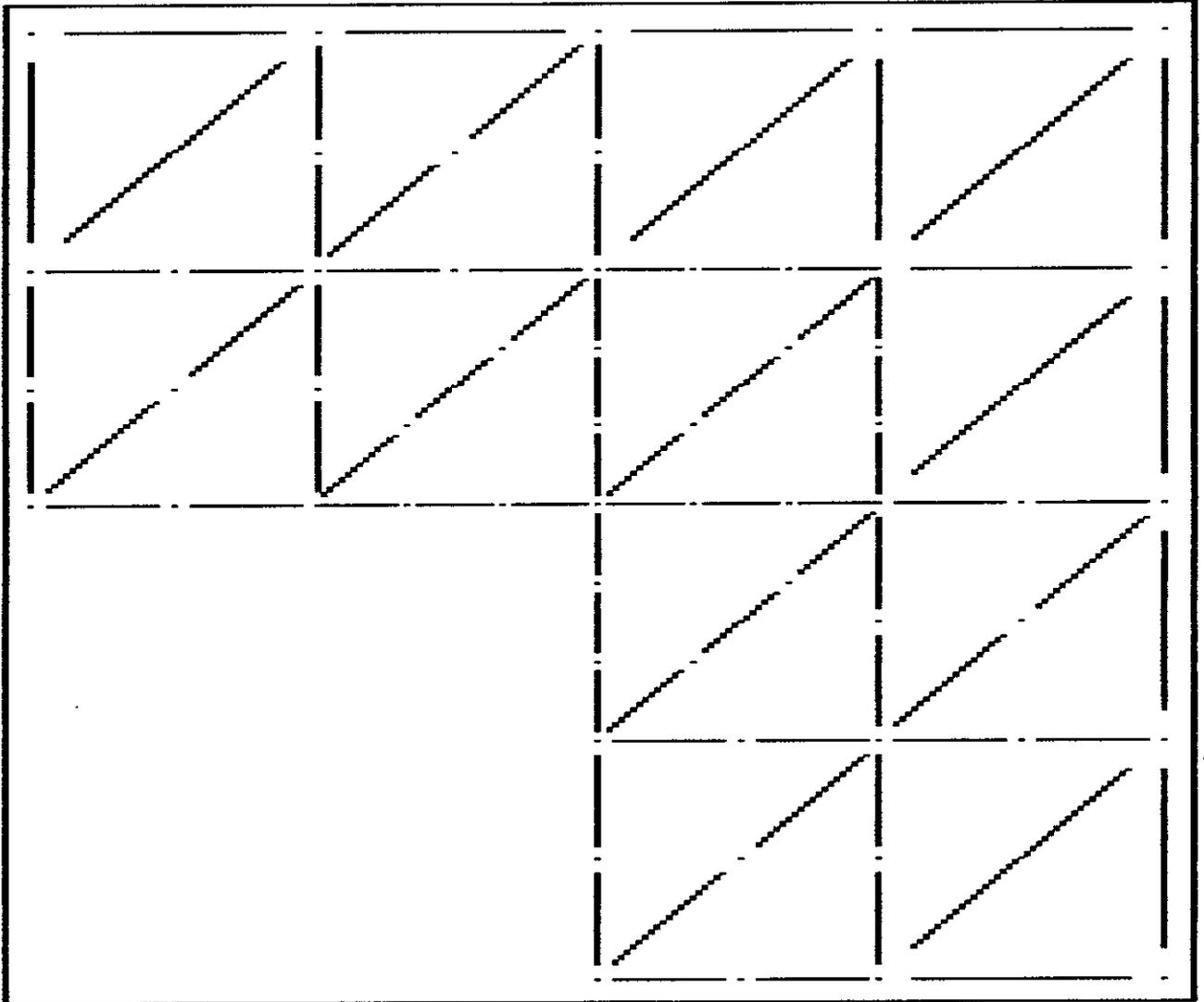


FIG. 1.1b

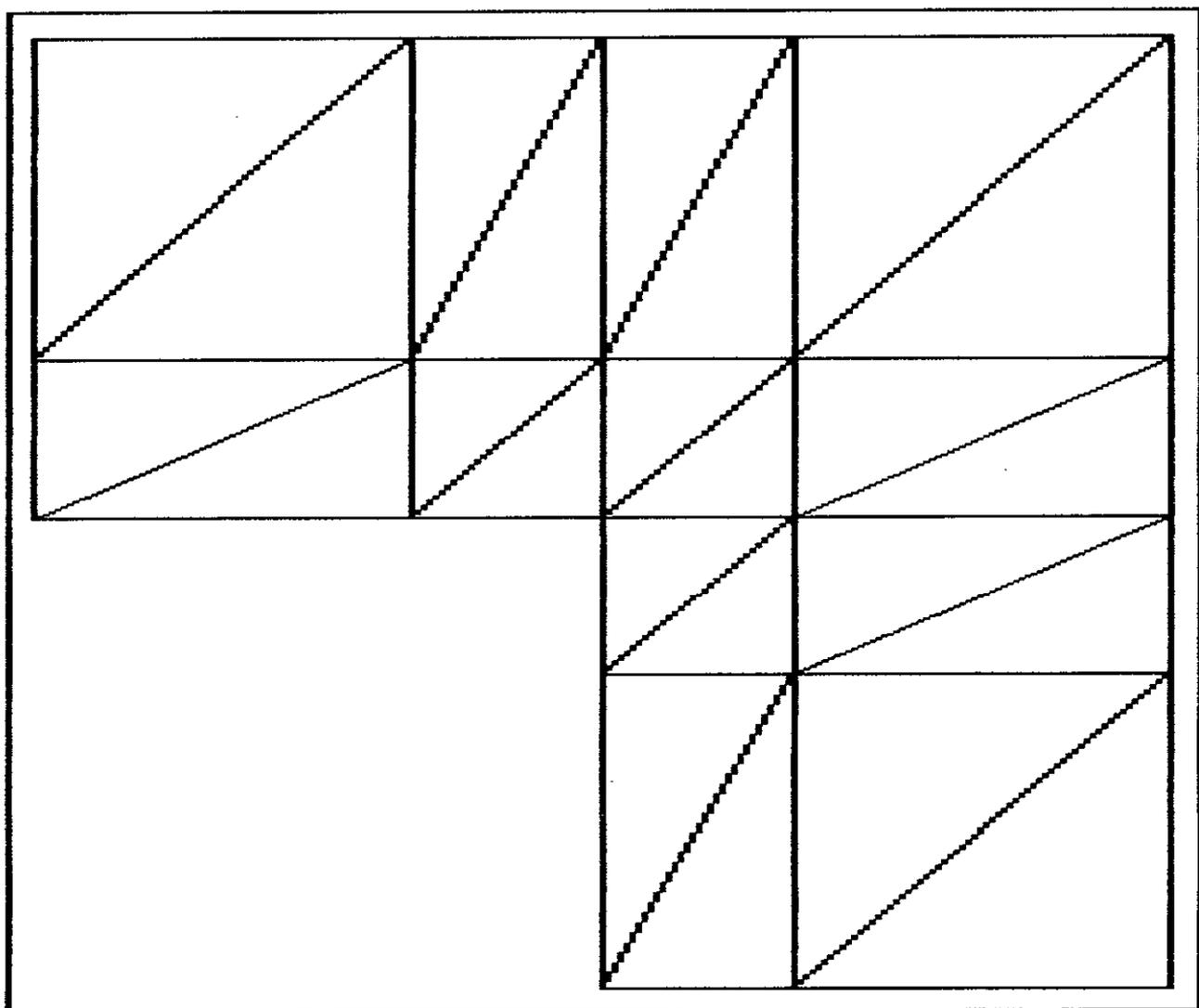


FIG. I.1E

CAPÍTULO II

GERAÇÃO DE MALHAS TRIANGULARES PARA DOMÍNIOS PLANOS ARBITRÁRIOS

II.1- ASPECTOS GERAIS -

Existem atualmente inúmeras técnicas para geração automática de malhas de elementos finitos, podendo-se citar os métodos QUADTREE, Shepard (1984, 1988), Cheng (1988), os métodos de DELAUNAY-VORONOI, Watson (1981), Hermeline (1982), Cavendish (1985), Baker (1987, 1988), Perronnet (1988), George (1988a, 1988b), e técnicas de geração por avanços frontais (ADVANCING-FRONT), Lo (1985), Zienkiewicz (1988), Lohner (1988a, 1988b).

De maneira geral, para gerar uma malha de forma eficiente um esquema de geração deve ser robusto e satisfazer, sempre que possível, às seguintes condições:

(i) O usuário deve ser capaz de controlar a densidade da malha em qualquer parte do domínio analisado.

(ii) Os elementos devem se aproximar, ao máximo, de polígonos regulares, na análise em duas dimensões (triângulos equiláteros ou quadrados, por exemplo, no caso de elementos de 3 ou 4 nós) e de sólidos regulares, na análise em três dimensões (tetraedros regulares ou cubos, por exemplo, no caso de elementos de 4 ou 8 nós).

(iii) O algoritmo deve ser econômico tanto no que diz respeito ao esforço humano quanto ao tempo de computação.

Além disso, para que o domínio fique bem definido, devem ser fornecidos os seguintes dados :

- número de nós do contorno (NNÓS)
- número de lados do contorno (NLADOS)
- número de regiões em que o domínio deve ser subdividido (NREG)
- para cada região :
 - . número do lado inicial (LADOI)
 - . número do lado final (LADOF)
 - . tamanho de elemento da região (SIZEM(IREG))

- para cada nó :
 - . número do nó
 - . coordenadas do nó (XCO(2,INO))
- para cada lado :
 - . número do lado (segmento orientado)
 - . nó inicial e nó final.

II.2- ALGORITMO DE GERAÇÃO DE MALHAS -

O modelo utilizado tem por objetivo triangularizar domínios planos arbitrários. Tanto a etapa de geração de nós internos, quanto a posterior triangularização, se baseiam em algoritmos apresentados por LD (1985) que introduziu a técnica de avanços frontais. Esta técnica permite o tratamento de aberturas internas com facilidade e se a análise requer uma densidade diferenciada da malha, basta dividir o domínio em regiões com diferentes tamanhos de elemento. Estas características tornam esta técnica indicada para um refinamento adaptativo.

Os contornos das regiões são representados por tantos segmentos retos orientados, quantos forem necessários. Cada segmento é fornecido por seus nós extremos, e será subdividido de acordo com o tamanho de elemento da região a que pertencer (se um segmento é comum a duas regiões, a subdivisão se fará segundo o menor dos tamanhos de elemento). Para esta subdivisão o segmento poderá ser considerado um arco de circunferência, se desejado, o que facilita consideravelmente, o tratamento de domínios curvos (estes arcos não devem apresentar tangentes horizontal ou vertical, a não ser nos extremos).

Os segmentos de contorno devem ser orientados de tal maneira que os contornos externos de cada região tenham sempre um caminhamento de sentido anti-horário, e os contornos de aberturas internas, um, de sentido horário. Se um destes segmentos é limite entre duas regiões, ele deverá ser orientado tomando-se por base a região de menor tamanho de elemento. Além disso, os nós do contorno não necessitam ser numerados em qualquer sequência particular.

Após a subdivisão de todos os segmentos de contorno, será

feita a geração dos nós internos à cada região, de acordo com seu contorno e tamanho de elemento. Só então será feita a triangularização e, posteriormente, a redistribuição dos nós internos, de acordo com os nós a que cada um estiver conectado. Estas etapas serão apresentadas de forma detalhada a seguir.

II.2.1- Geração de Nós Internos

A geração de nós internos, extremamente simples e de fácil implementação, é efetuada através do seguinte algoritmo:

- 1 - Determinação de Y_{min} e Y_{max} da região, conforme a Fig. II.1.
- 2 - Traçado de linhas horizontais imaginárias entre Y_{min} e Y_{max} , ao longo da região, conforme ilustrado na Fig. II.2 .
- 3 - O espaçamento entre duas destas linhas (SIZES) é função do tamanho do elemento da região (SIZEM), calculado como :

$$NL = (YMAX - YMIN) / SIZEM$$

$$SIZES = (YMAX - YMIN) / NL \quad (II.1)$$

$$NL = NL - 1$$

$$YH1 = YMAX - SIZES$$

onde NL é o número de linhas horizontais e para a primeira linha, tem-se $Y = YH1$.

- 4 - Determinação das interseções de cada linha horizontal com o contorno da região (Fig. II.1) :

Seja $S = (P_i Q_i , i=1, N)$ o conjunto de segmentos de contorno da região e $Y = H$ a equação de determinada linha horizontal.

Seja, também, $X1 = X(P_i)$, $Y1 = Y(P_i)$, $X2 = X(Q_i)$ e $Y2 = Y(Q_i)$

Haverá interseção, se:

$$i) (Y1 - H) (Y2 - H) < 0 \quad \text{ou} \quad (II.2)$$

$$ii) (Y1 - H) (Y2 - H) = 0 \quad \text{e} \\ (H > Y1 \quad \text{ou} \quad H > Y2) \quad (II.3)$$

O ponto de interseção com o segmento $P_i Q_i$, será:

$$X = X1 + (H - Y1) * (X2 - X1) / (Y2 - Y1) \quad (II.4)$$

$$Y = H \quad (II.5)$$

- 5 - Cada linha horizontal intersepta o contorno da região num número par de pontos, que devem ser armazenados do menor

para o maior valor de X .

- 6 - Seja uma linha horizontal particular, com $2n$ interseções. As interseções são consideradas duas a duas, começando com a 1.^a e a 2.^a. O segmento formado por estas duas interseções é subdividido segundo o tamanho do elemento da região:

$$NG = (XFI - XIN) / SIZEM \quad (II.6)$$

$$SIZEX = (XFI - XIN) / NG \quad (II.7)$$

$$DX = SIZEX \quad (II.8)$$

$$NG = NG - 1 \quad (II.9)$$

onde, NG é o número de nós a ser gerado, DX é a coordenada do primeiro nó a gerar, $SIZEX$ é a distância entre os nós a gerar, XIN é a coordenada da interseção inicial, e XFI é a coordenada da interseção final.

Para que cada subdivisão possa dar origem a um nó interno, é necessário, ainda, verificar se o mesmo se encontra: (a) perto demais do contorno, e (b) suficientemente afastado de todos os nós internos criados até então.

As condições (a) e (b) podem ser atendidas com o teste

$$(X - Pi)^2 + (Y - Qi)^2 < C^2 \quad (II.10)$$

onde X e Y são as coordenadas do nó a ser gerado, Pi e Qi são as coordenadas dos nós do contorno e dos nós internos já gerados e C uma constante que depende do tamanho de elemento ($SIZEM$) da região. Normalmente adota-se $C = 0.7 * SIZEM$.

- 7 - Terminada a análise do segmento formado pela 1.^a e 2.^a interseções, passa-se ao segmento formado pelas 3.^a e 4.^a, com procedimento semelhante, e assim por diante, até chegarmos ao último segmento, formado pelas interseções $(2n - 1)$ e $2n$.

No modelo empregado, a geração de nós internos difere do algoritmo acima descrito em três tópicos, descritos a seguir:

- a) Alteração no item 4, quando se pretende determinar se haverá ou não interseção entre a linha horizontal ($Y = H$) e um determinado segmento de contorno ($PiQi$).

Com os testes (i) e (ii), os pontos B e C (Fig. II.2) seriam considerados interseções dos lados AB e CD com a horizontal $Y = H2$, mas os pontos A e D não o seriam, com a horizontal $Y = H4$, o que pode não ser conveniente em muitos casos.

Para evitar o contratempo, basta considerar:

$$(i) (Y1 - H) (Y2 - H) < 0 \quad \text{ou} \quad (II.11)$$

$$(ii) (Y1 - H) (Y2 - H) = 0 \quad \text{e} \\ (H \neq Y1 \text{ ou } H \neq Y2) \quad (II.12)$$

b) Quando se deseja considerar um segmento de contorno como um arco de circunferência, o cálculo do ponto de interseção passa a ser (Fig. II.3):

$$B = -2Xo \\ C = Xo^2 + (H - Yo)^2 - R^2 \\ \Delta = \sqrt{B^2 - 4C} \quad (II.13)$$

$$XL = (-B + \Delta) / 2$$

$$XLL = (-B - \Delta) / 2$$

Se $(X1 \geq XL \text{ e } X2 \leq XL)$ ou

$$(X1 \leq X1 \text{ e } X2 \geq XL) \implies X = XL \quad (II.14)$$

Caso contrário $\implies X = XLL \quad (II.15)$

c) Implementação da opção de geração de malhas triangulares em diagonais cruzadas.

Para se conseguir malhas deste tipo (Fig. II.4), é necessária uma segunda etapa de geração de nós internos.

Nesta segunda etapa, o número de linhas horizontais deverá ser acrescido de uma unidade e o posicionamento da primeira será alterado. Assim,

$$NL = NL + 1 \quad (II.16)$$

$$YH1 = YMA - SIZES/2. \quad (II.17)$$

Além disto, ao se subdividir um segmento formado por duas interseções consecutivas, teremos as seguintes alterações:

$$NG = NG + 1 \quad (II.18)$$

$$DX = SIZEX/2. \quad (II.19)$$

II.2.2- Triangularização -

A interconexão dos nós, para formar elementos triangulares segue o seguinte algoritmo:

- 1 - Seja Γ a frente de geração, e Λ o conjunto de todos os nós internos conforme a Fig. II.5 .
- 2 - Tendo em vista o caminhamento anti-horário do contorno externo e o caminhamento horário das aberturas internas, o domínio a ser triangularizado está sempre situado à esquerda dos segmentos retos orientados de Γ .
- 3 - É importante destacar que ao iniciar a triangularização a frente de geração Γ coincide com o conjunto de segmentos do contorno do domínio; enquanto este contorno permanece inalterado, Γ avança continuamente, sendo atualizada toda vez que um elemento é formado, conforme as Fig. II.5 e II.6.
- 4 - O processo de triangularização é iniciado pela seleção do primeiro segmento orientado de Γ (lado AB, por exemplo). O objetivo é determinar um ponto $C \in \Gamma \cup \Lambda$ que forme o melhor triângulo ABC, com caminhamento anti-horário.
- 5 - Se ΔABC (= área do triângulo ABC = $-\frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AC}$) é positiva, o caminhamento é anti-horário, e a experiência mostra que, na maioria dos casos, o valor mínimo da norma $| AC^2 + CB^2 |$ é suficiente para selecionar o ponto C. O valor mínimo desta norma equivale ao mínimo da distância do ponto C ao ponto médio do lado AB. O lugar geométrico dos pontos que satisfazem à condição supracitada é uma circunferência de centro no ponto médio do segmento AB.
- 6 - A seleção do nó C, pelo critério acima, é bastante simples, mas pode não ser suficiente para garantir a melhor triangularização de regiões que apresentem um contorno muito irregular. Nestes casos, pode haver dois ou mais nós que apresentem área positiva e valor mínimo de $| AC^2 + CB^2 |$.
- 7 - A escolha entre dois destes nós (C1 e C2 por exemplo) se faz como se segue (Ver Fig. II.7a) :

Para C1:
$$\alpha_1 = \frac{\Delta ABC_1}{AB^2 + BC_1^2 + C_1A^2} \quad (II.20)$$

$$\beta_1 = \frac{\Delta C_1 BC_2}{C_1 B^2 + BC_2^2 + C_1 C_2^2} \quad (\text{II.21})$$

$$\delta_1 = \frac{\Delta AC_1 C_2}{AC_1^2 + C_1 C_2^2 + C_2 A^2} \quad (\text{II.22})$$

$$\lambda_1 = \max (\beta_1, \delta_1) \quad (\text{II.23})$$

Para C_2 :

$$\alpha_2 = \frac{\Delta ABC_2}{AB^2 + BC_2^2 + C_2 A^2} \quad (\text{II.24})$$

$$\beta_2 = \frac{\Delta C_2 BC_1}{C_2 B^2 + BC_1^2 + C_1 C_2^2} = -\beta_1 \quad (\text{II.25})$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta AC_2 C_1}{AC_2^2 + C_2 C_1^2 + C_1 A^2} = -\delta_1 \quad (\text{II.26})$$

$$\lambda_2 = \max (\beta_2, \delta_2) \quad (\text{II.27})$$

O nó C_1 será selecionado se $\alpha_1 \cdot \lambda_1 > \alpha_2 \cdot \lambda_2$ e vice-versa.

O parâmetro α é um bom critério para avaliar a *qualidade* do triângulo ABC. Quanto maior o valor de α , melhor a forma do triângulo. As figuras II.7b a II.7e mostram os valores de α para alguns triângulos típicos. Pode-se mostrar que α não excede 0.1443, que é o valor correspondente ao triângulo equilátero. Da mesma forma, β_1 e δ_1 representam, respectivamente, a *qualidade* dos triângulos $C_1 BC_2$ e $AC_1 C_2$. Logo, λ_1 representa a melhor possibilidade de formar um triângulo através de $C_1 B$ ou AC_1 com C_2 , no caso de seleção do nó C_1 . Se o nó C_2 estiver no interior do triângulo ABC_1 , tanto β_1 quanto δ_1 serão negativos e conseqüentemente o produto $\alpha_1 \cdot \lambda_1$ também será negativo, o que provocará, automaticamente, a seleção de C_2 .

No modelo utilizado, procuramos evitar a formação de triângulos muito distorcidos, que podem aparecer, principalmente, nas fronteiras de duas regiões com tamanhos de elemento muito diferenciados, tentando rejeitar ângulos internos acima de 110° .

Sejam $a = \max (AB, BC, CA)$, $c = \min (AB, BC, CA)$,
 $b = AB + BC + CA - a - c$, e $\theta = \arccos [(b^2 + c^2 - a^2) / 2bc]$.

Assim, para utilizarmos os cálculos apresentados no item 7, selecionamos C1 como sendo o nó que apresenta o menor valor de $[AC^2 + CB^2]$ e ângulo interno abaixo de 110° ; e C2, o menor valor de $[AC^2 + CB^2]$ e ângulo interno acima de 110° .

II.2.3- Redistribuição dos Nós Internos -

Após a triangularização, apesar dos cuidados acima descritos, podem surgir regiões em que a distribuição interna dos nós e a variação de tamanho dos elementos não apresentem a suavidade desejada. Esta situação pode ser corrigida com facilidade e eficiência pelo ajuste localizado das coordenadas de determinados nós.

A malha pode ser considerada como a solução inicial de um processo iterativo para uma aproximação pré-definida. No esquema Laplaciano, resolvido por um processo iterativo tipo Jacobi, cada nó é deslocado para o centro do polígono formado pelos nós a que estiver conectado. (Carey-Oden (1984)).

O processo, que usualmente se estabiliza após poucos ciclos de regularização (até 4), apresenta o seguinte algoritmo para cada ciclo:

1- Inicialização de variáveis:

São zeradas as coordenadas auxiliares e o contador de nós adjacentes de cada nó.

2- Para cada elemento :

- As coordenadas auxiliares de cada nó do elemento serão o somatório das coordenadas dos outros nós do elemento.

- O contador de nós adjacentes de cada nó do elemento será acrescido do número de nós do elemento menos 1.

3- As coordenadas auxiliares de cada nó serão divididas pelo contador de nós adjacentes do mesmo.

4- Os nós internos terão suas coordenadas substituídas por suas coordenadas auxiliares.

II.3 - EXEMPLOS

II.3.1 Barragem

As Figuras II.8a a II.8f mostram as etapas de geração de uma malha para a seção transversal de uma barragem. O contorno da seção transversal com um vazado semi-circular, é apresentado na Figura II.8a; a Figura II.8b apresenta a subdivisão do contorno em três regiões com densidades diferentes; na Figura II.8c podem ser vistos os nós internos gerados, antes de sua redistribuição, perfazendo um total de 218 nós; a Figura II.8d apresenta a malha, com um total de 372 elementos, ainda sem a redistribuição dos nós internos; a figura II.8e mostra os nós internos após a redistribuição com 3 ciclos de "smoothing" e finalmente, a Figura II.8f apresenta a malha final.

II.3.2 - Domínio com Contornos Irregulares

As Figuras II.9a a II.9f mostram as etapas de geração de uma malha para um domínio com contorno irregular (reentrâncias) que apresentaria problemas se o item 4 da geração de nós internos não tivesse sofrido alteração. O contorno externo e sua subdivisão em duas regiões com diferentes tamanhos de elemento, são apresentados na Figura II.9a. Os nós internos sem suavização e sem diagonais cruzadas podem ser vistos na Figura II.9b, num total de 204 nós. A Figura II.9c mostra a triangularização sem suavização e sem diagonais cruzadas, com um total de 328 elementos; a Figura II.9d, os nós internos, sem diagonais cruzadas, após 3 ciclos de suavização e a Figura II.9e a triangularização correspondente. Finalmente a Figura II.9f apresenta a triangularização sem suavização, com diagonais cruzadas, perfazendo um total de 364 nós e 648 elementos.

Fig. II.1

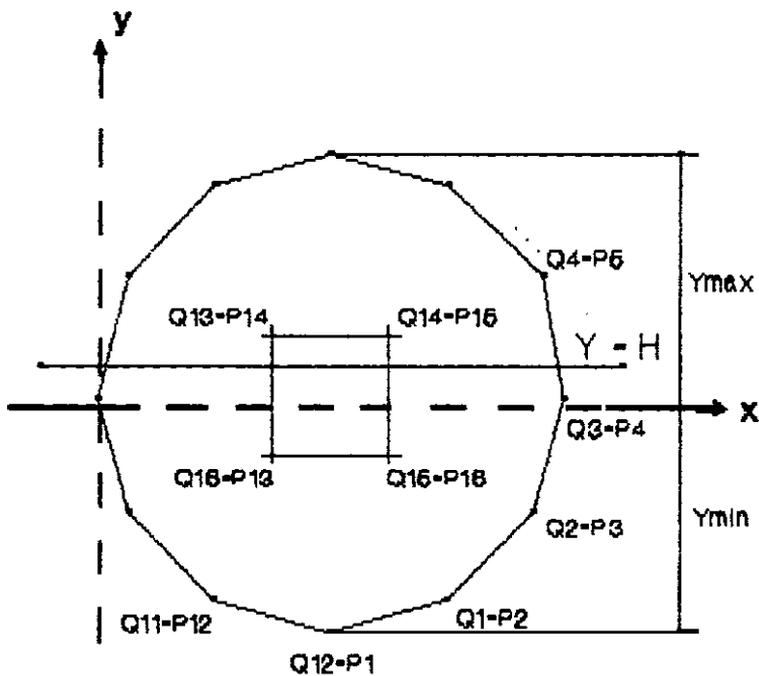


Fig. II.2

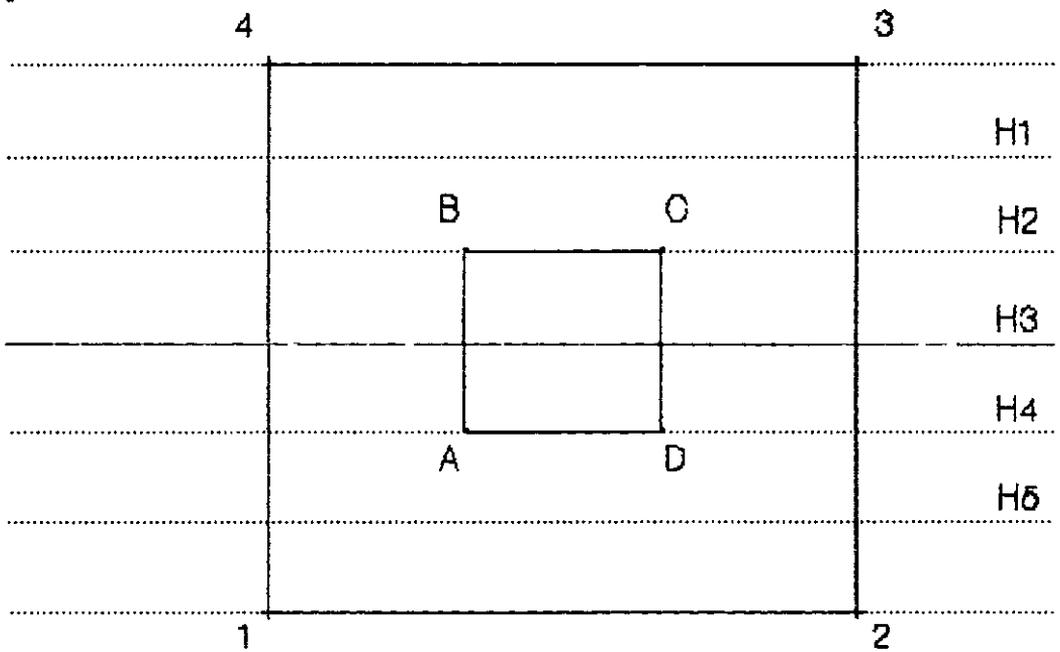
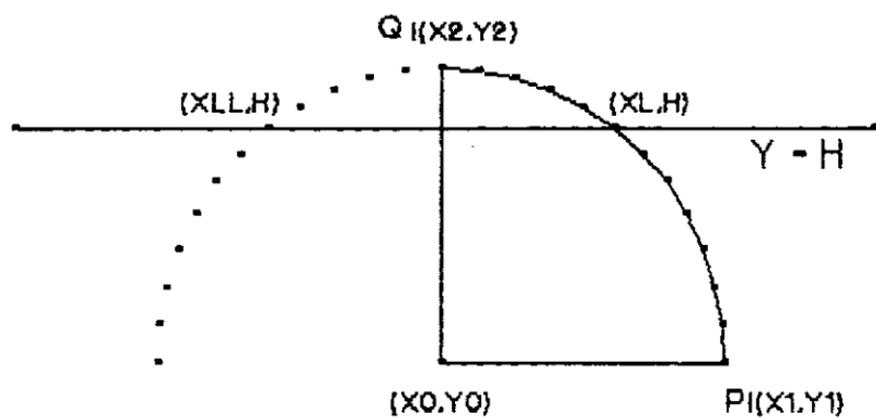


Fig. II.3



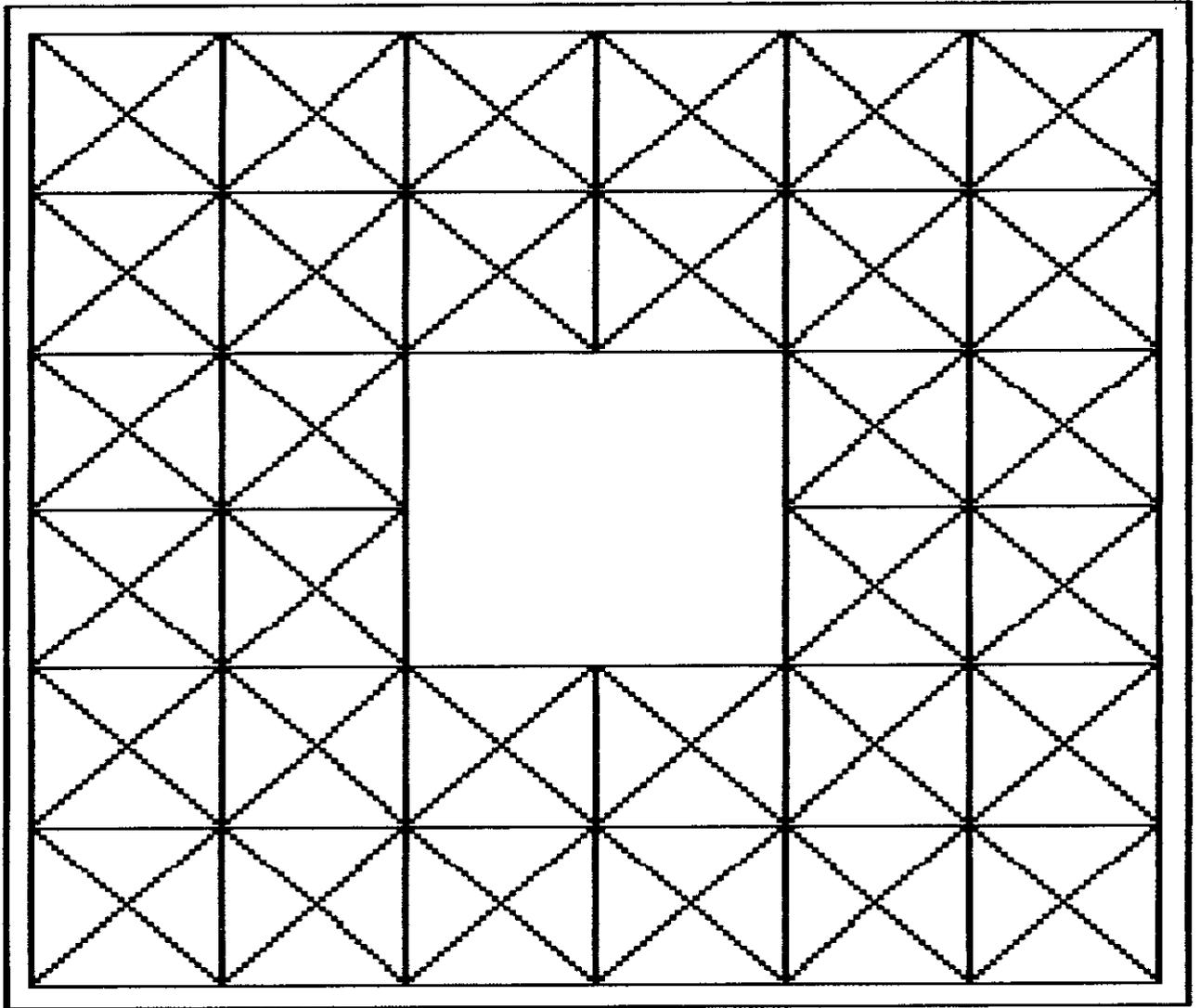


FIG. II.4

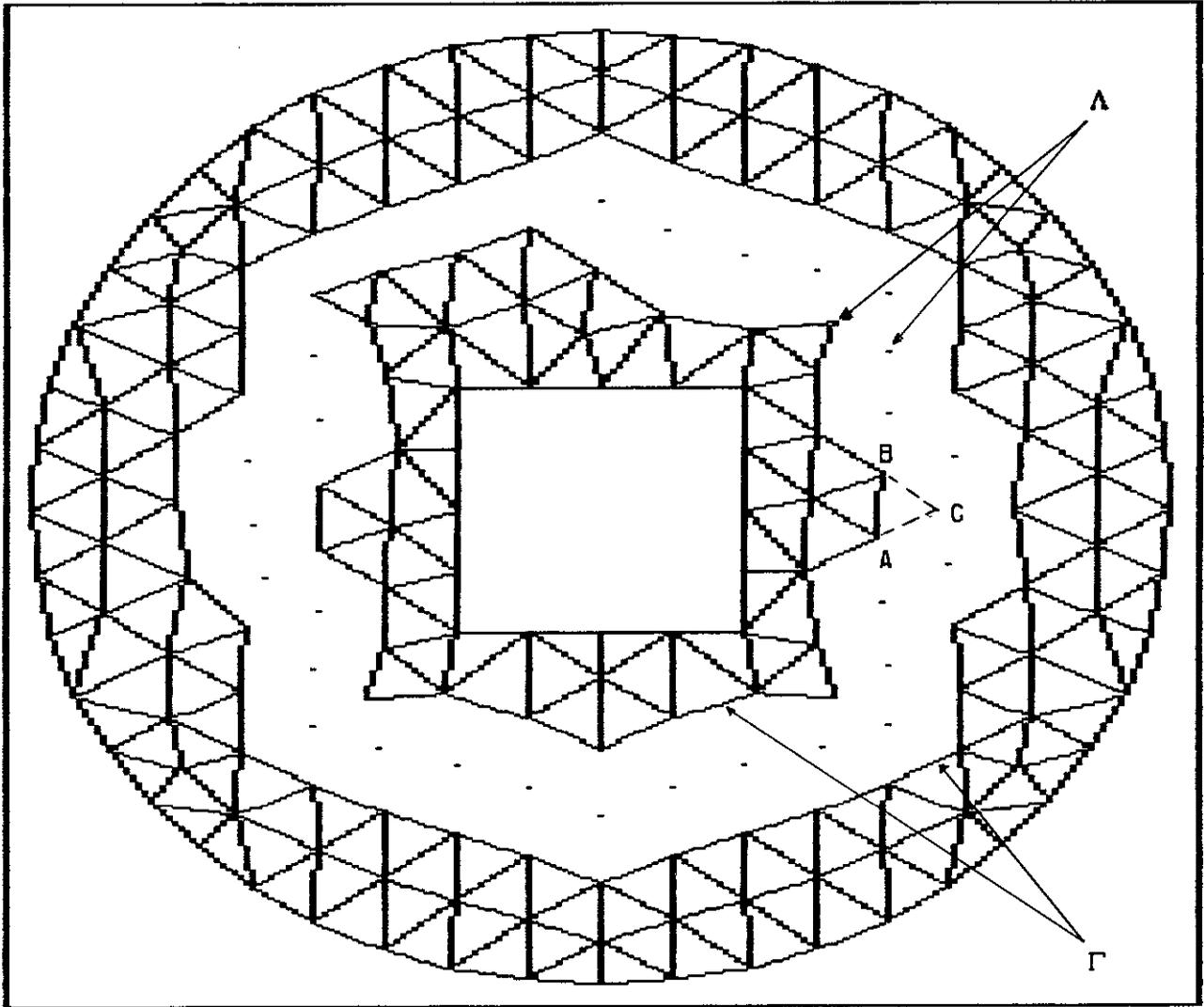


FIG. II.5

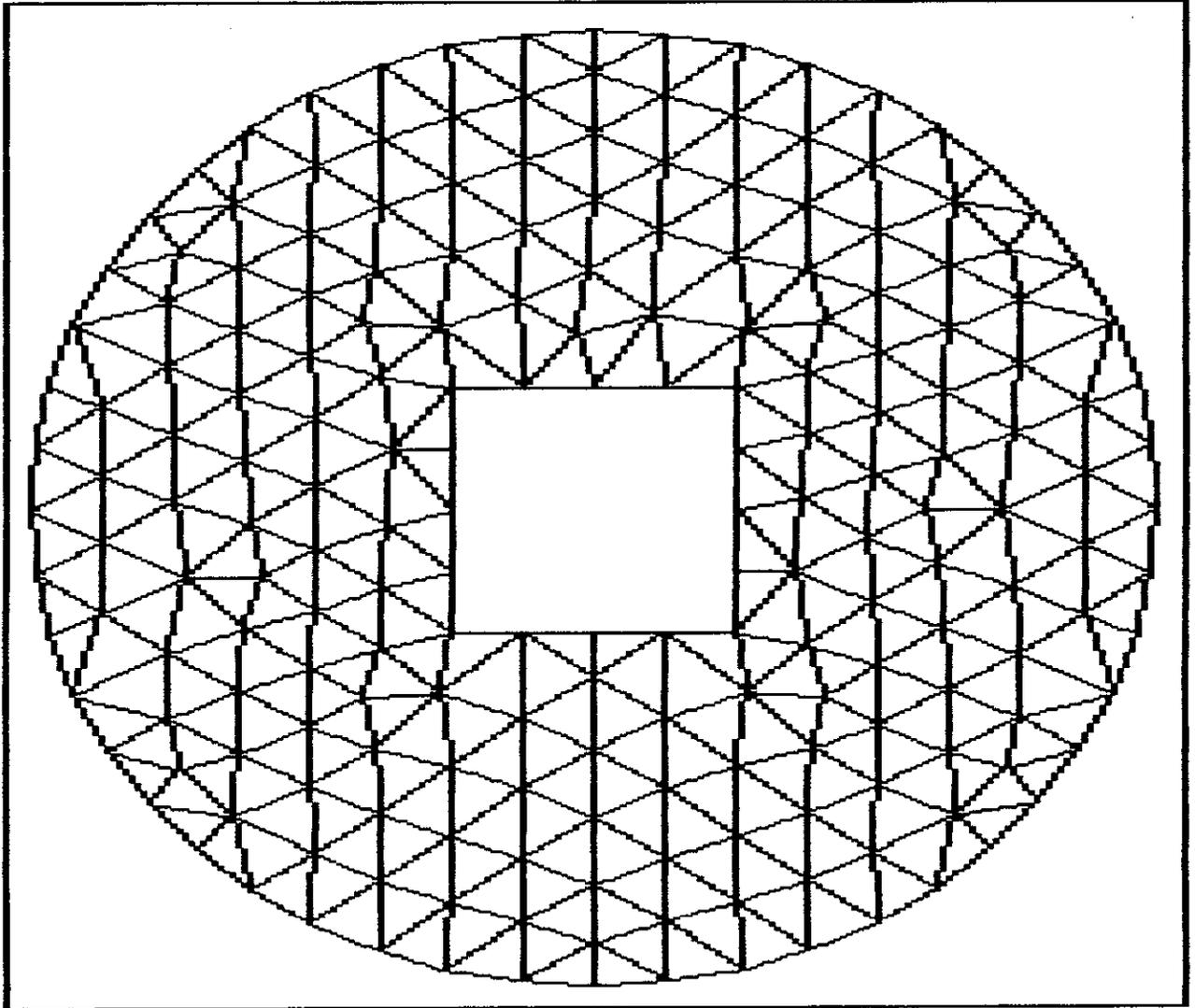
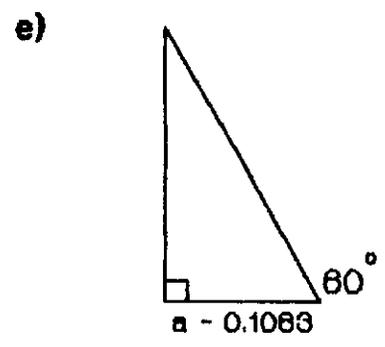
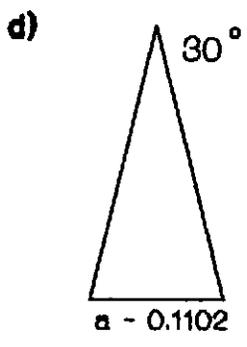
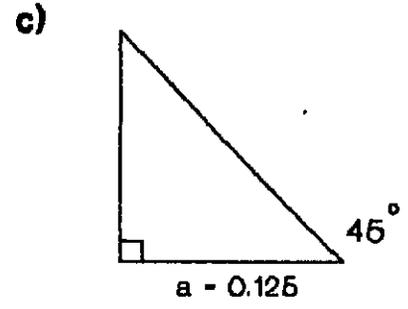
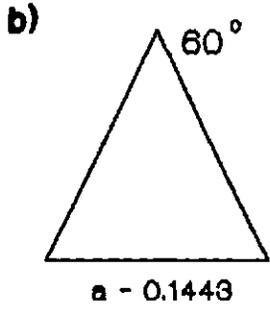
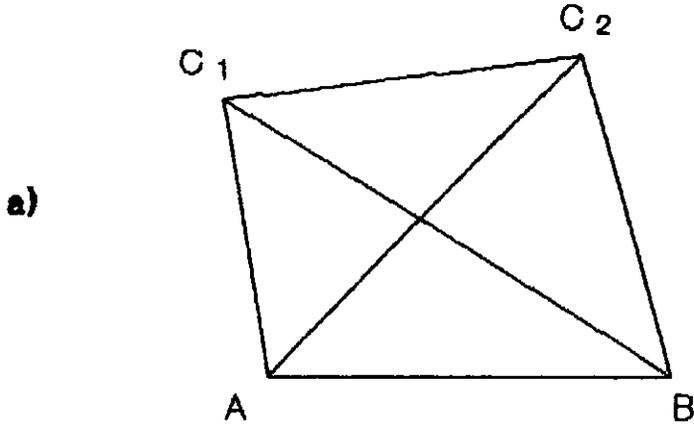


FIG. II.6

Fig. II.7



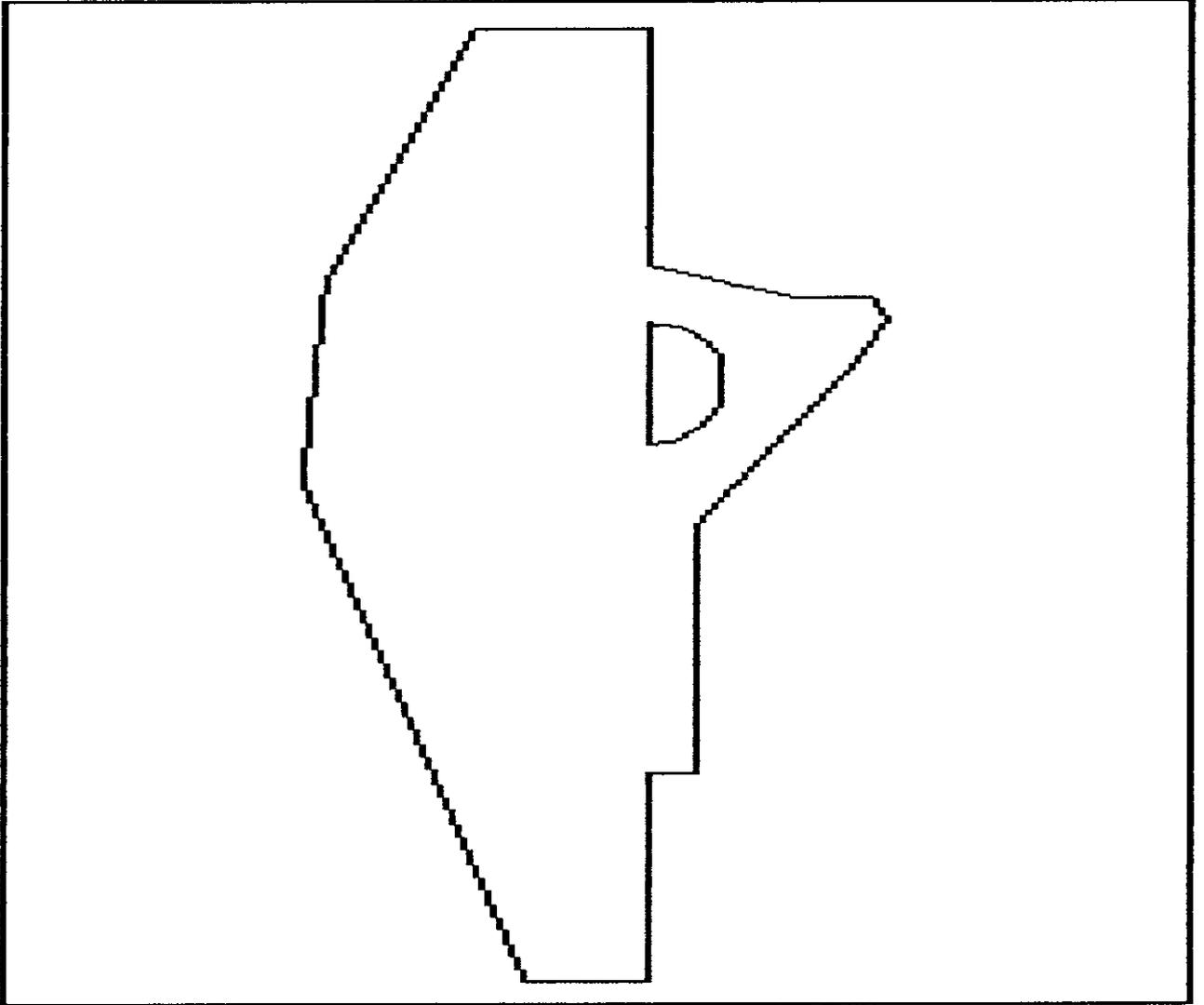


FIG. II.8A

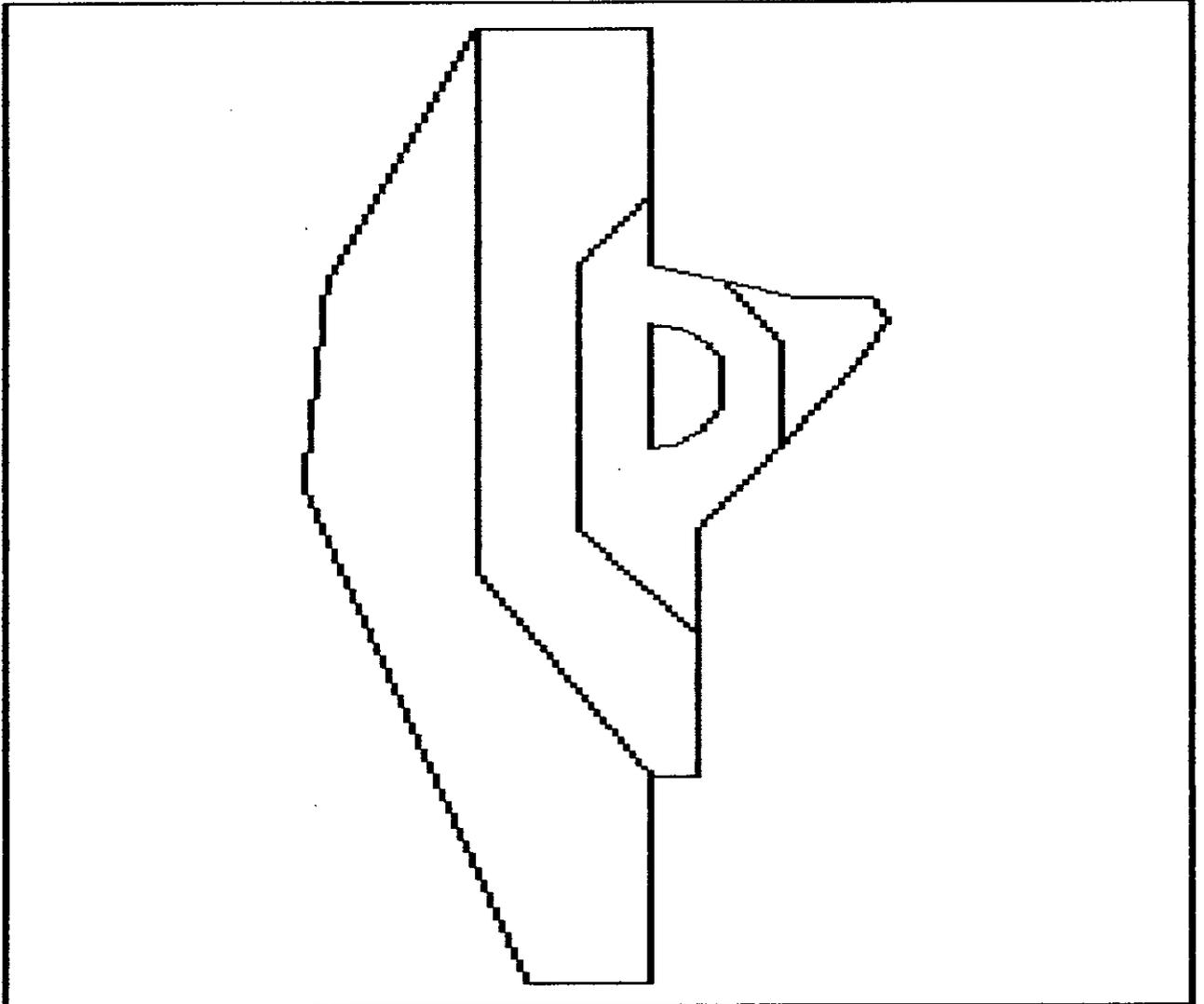


FIG. II.8B

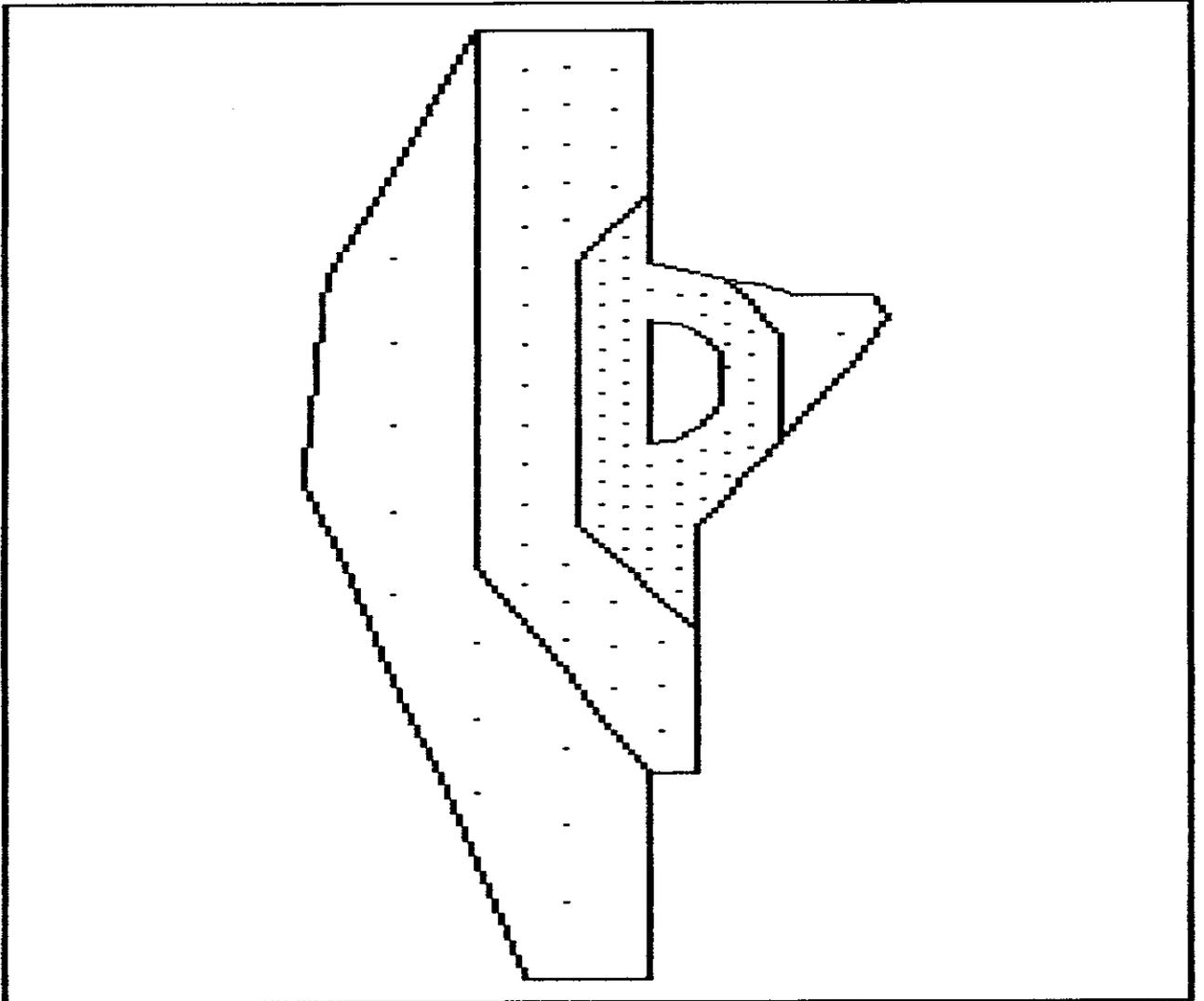


FIG. II.8c

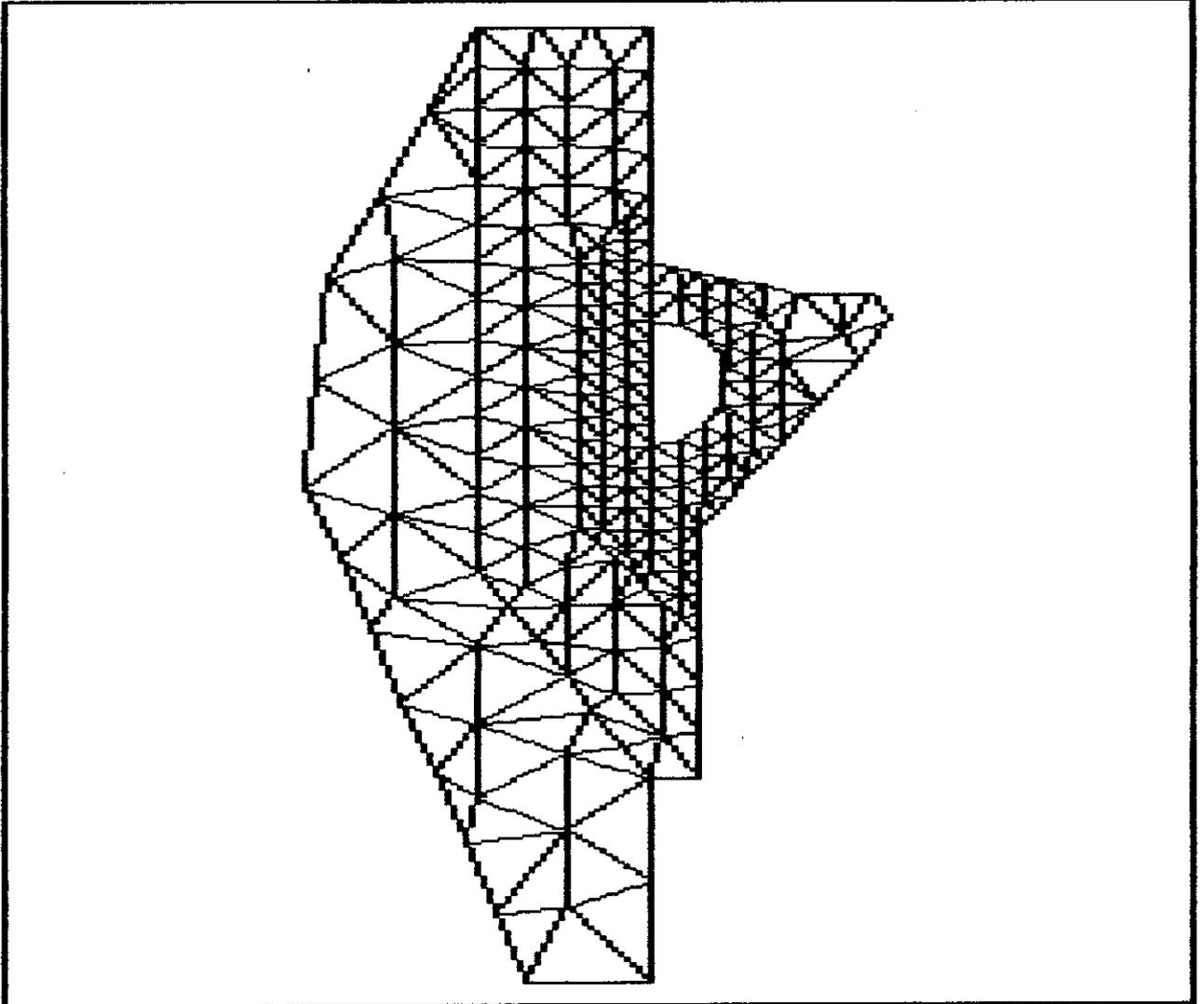


FIG. II.8D

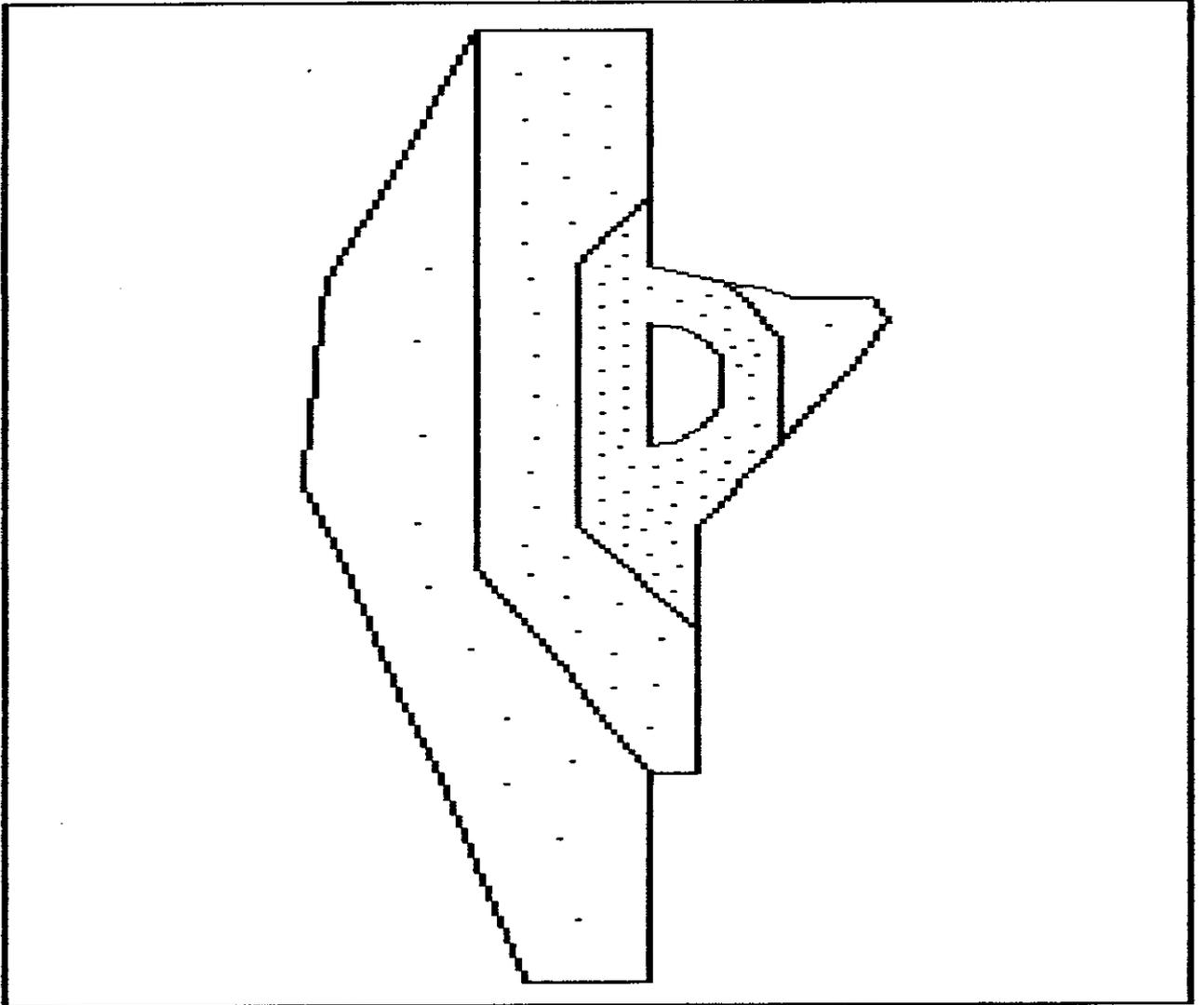


FIG. II.8E

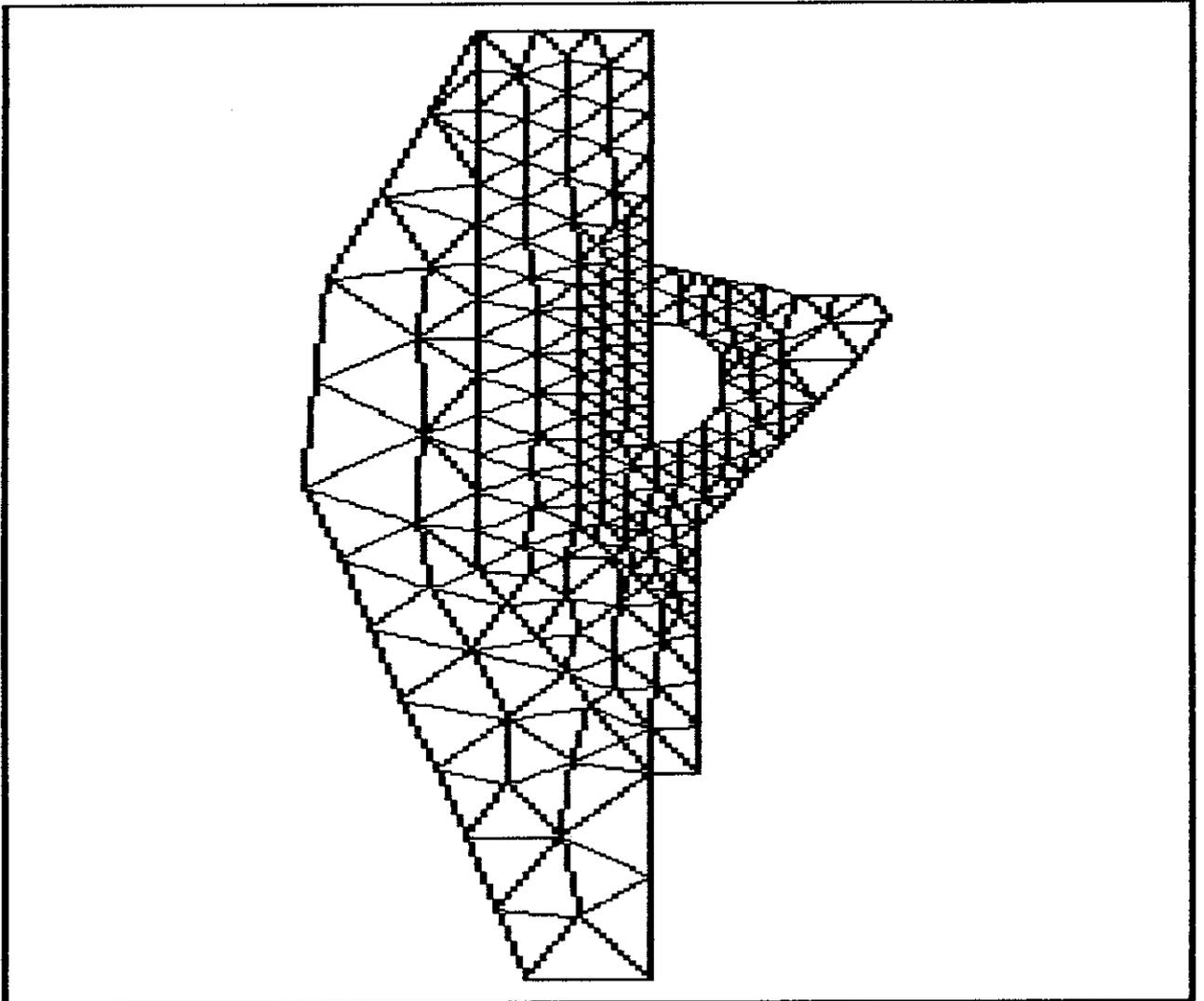


FIG. II.8F

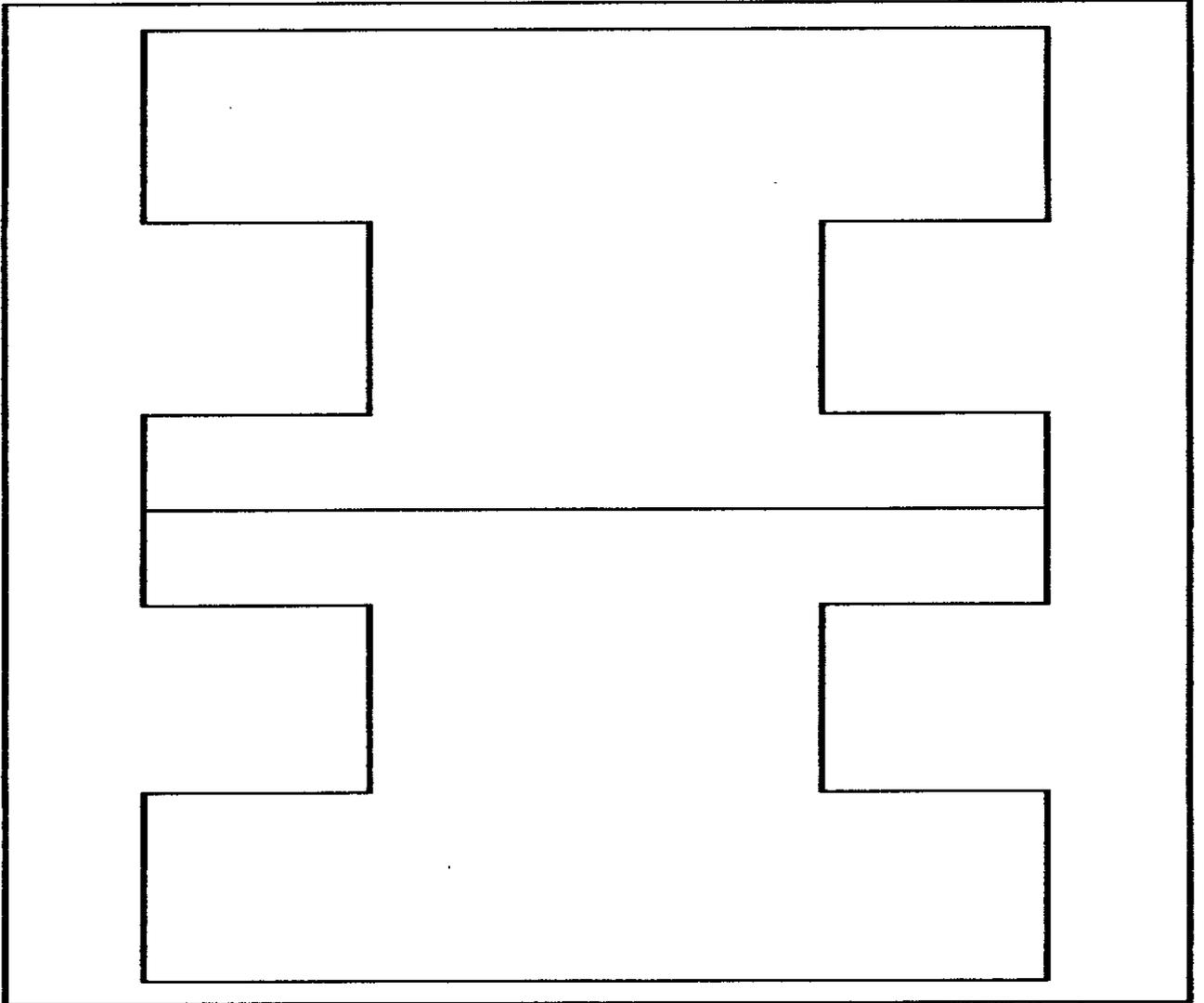


FIG. II.9A

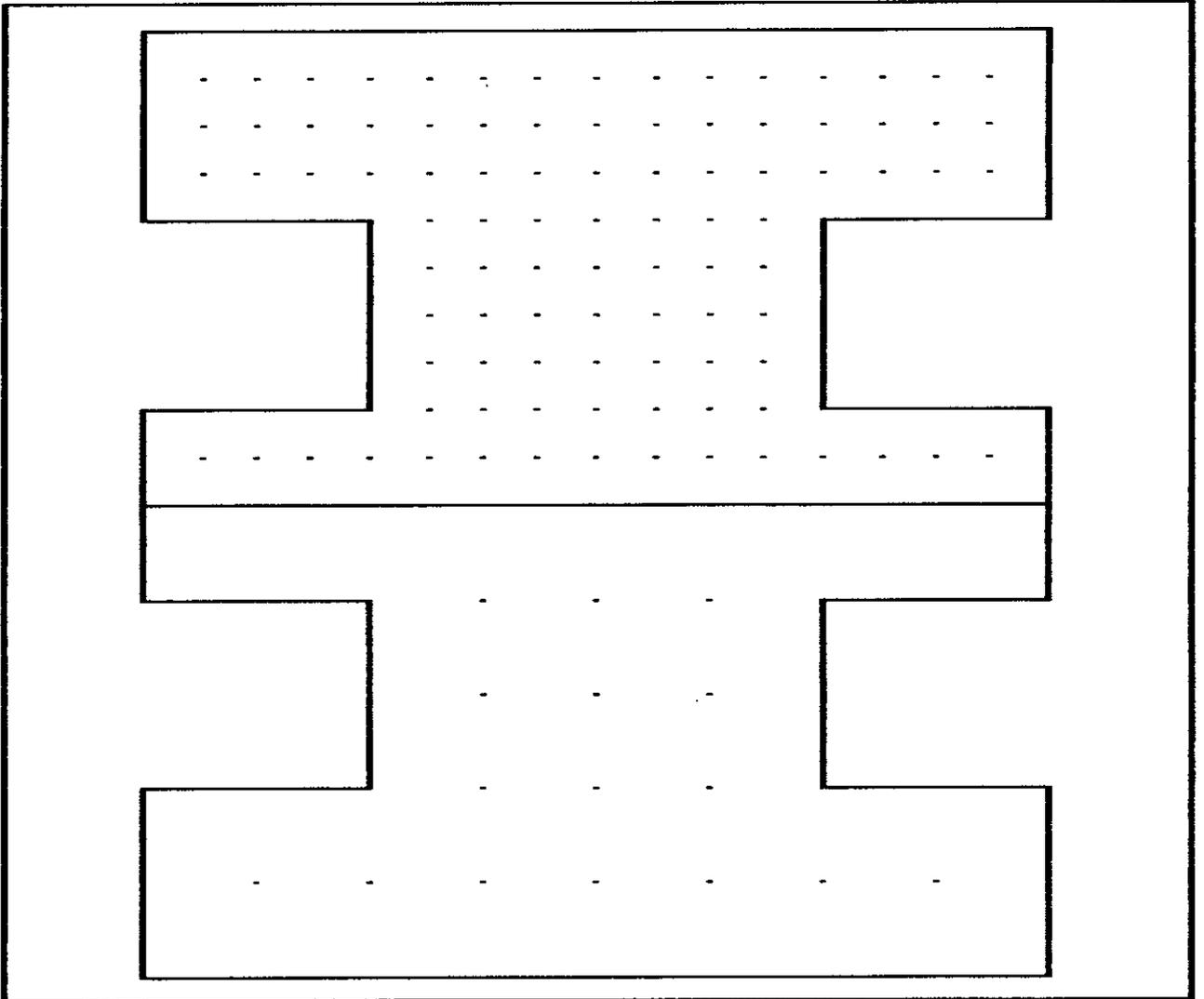


FIG. II.9B

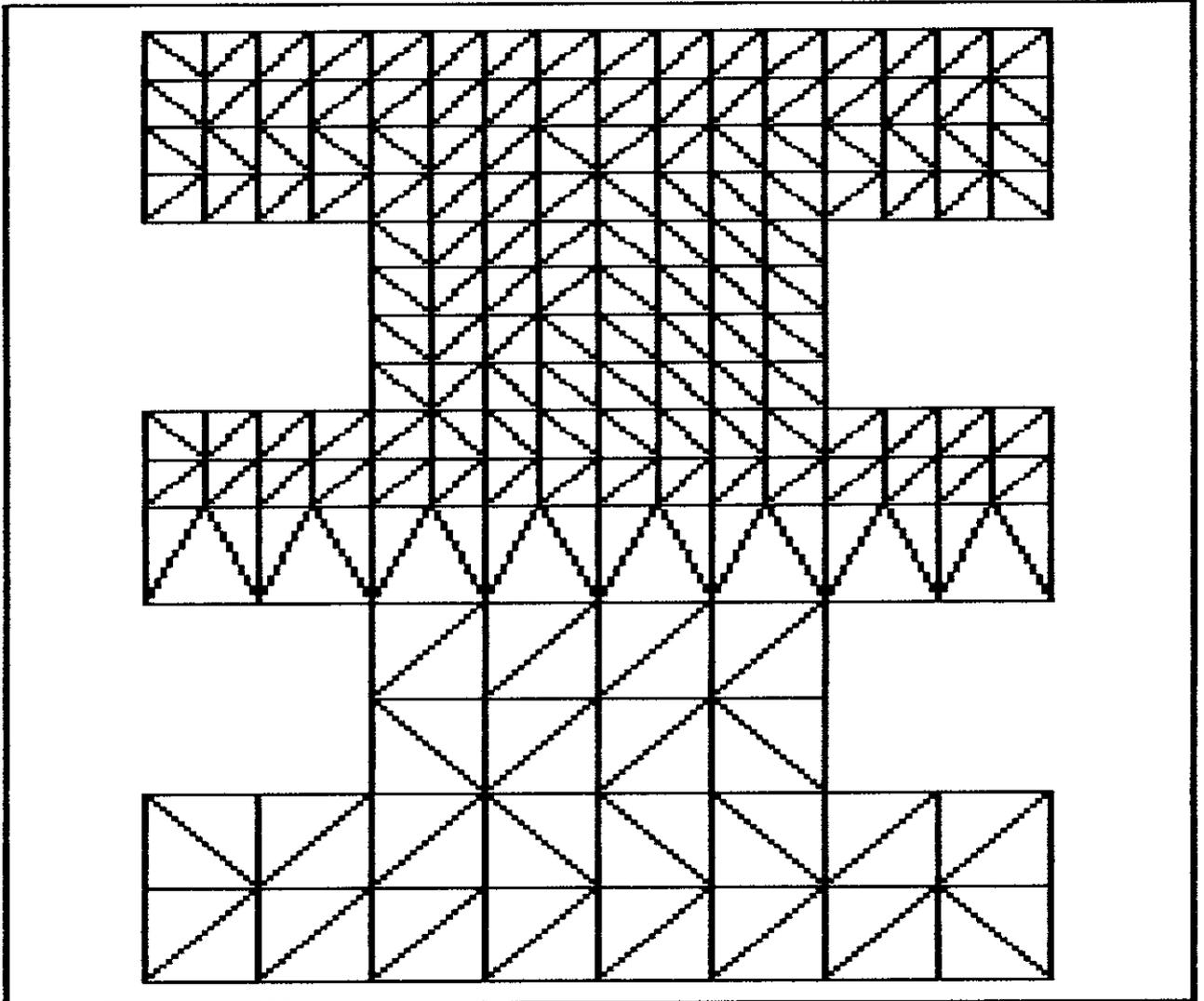


FIG. II.9c

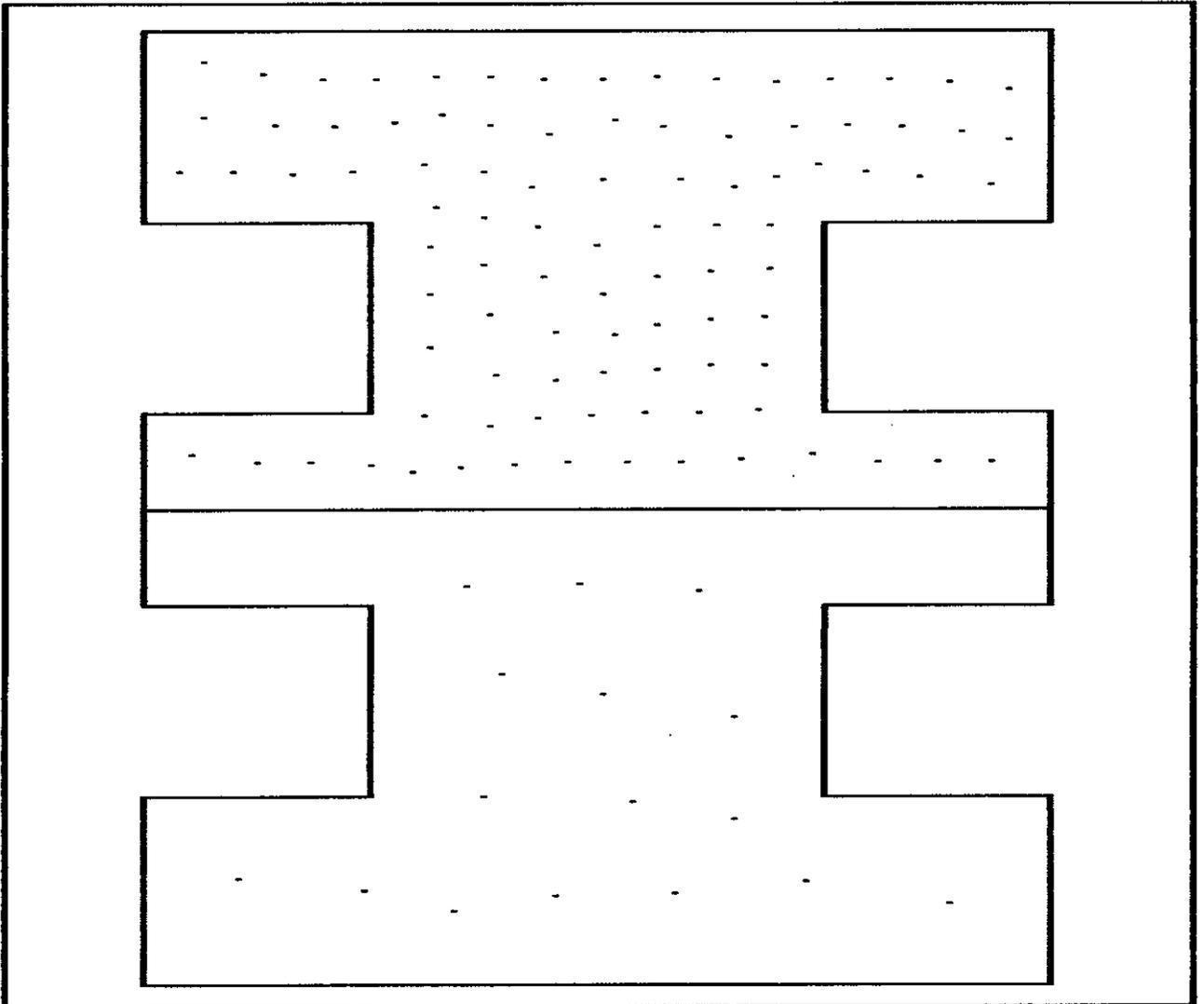


FIG. II.9d

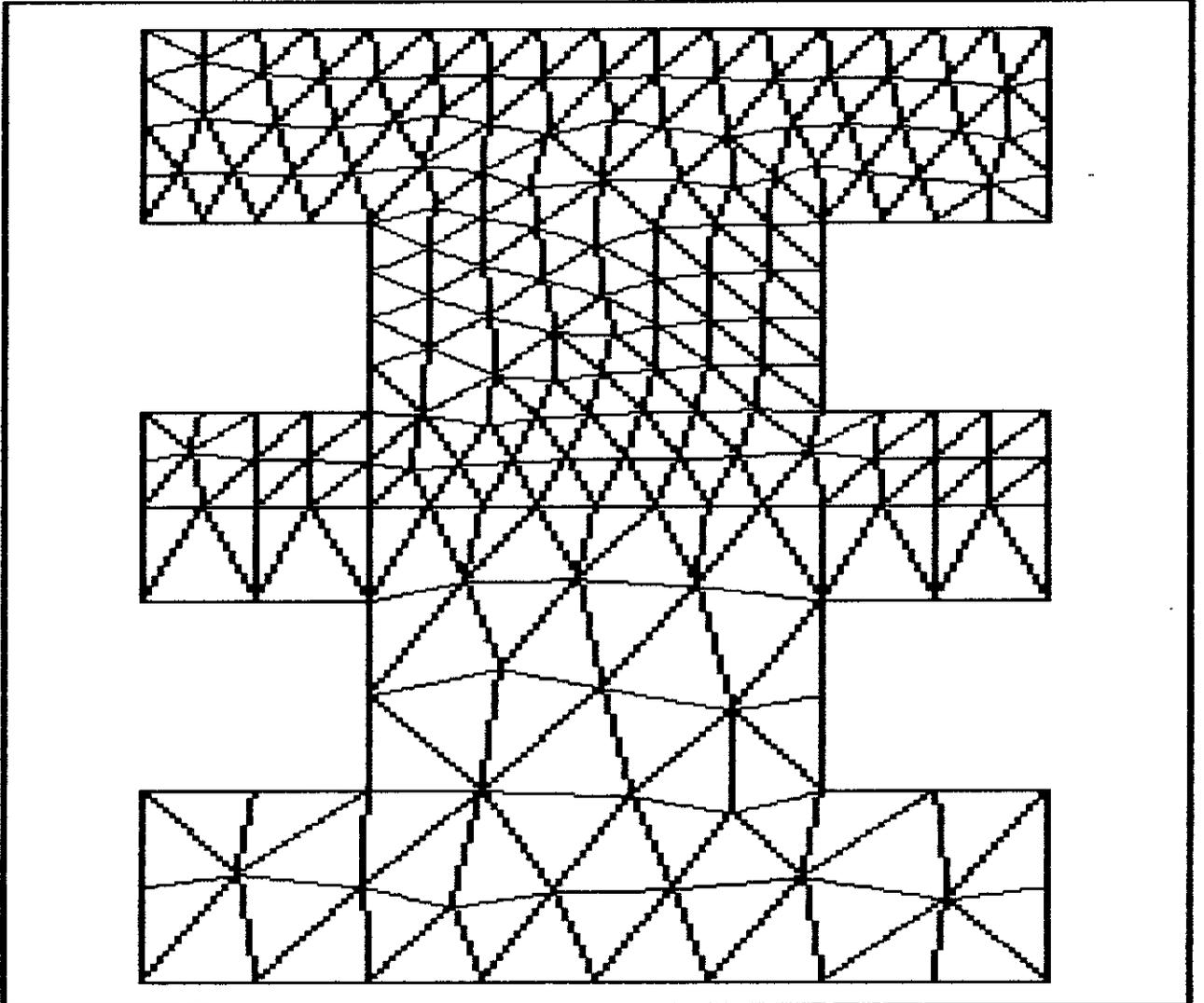


FIG. II.9E

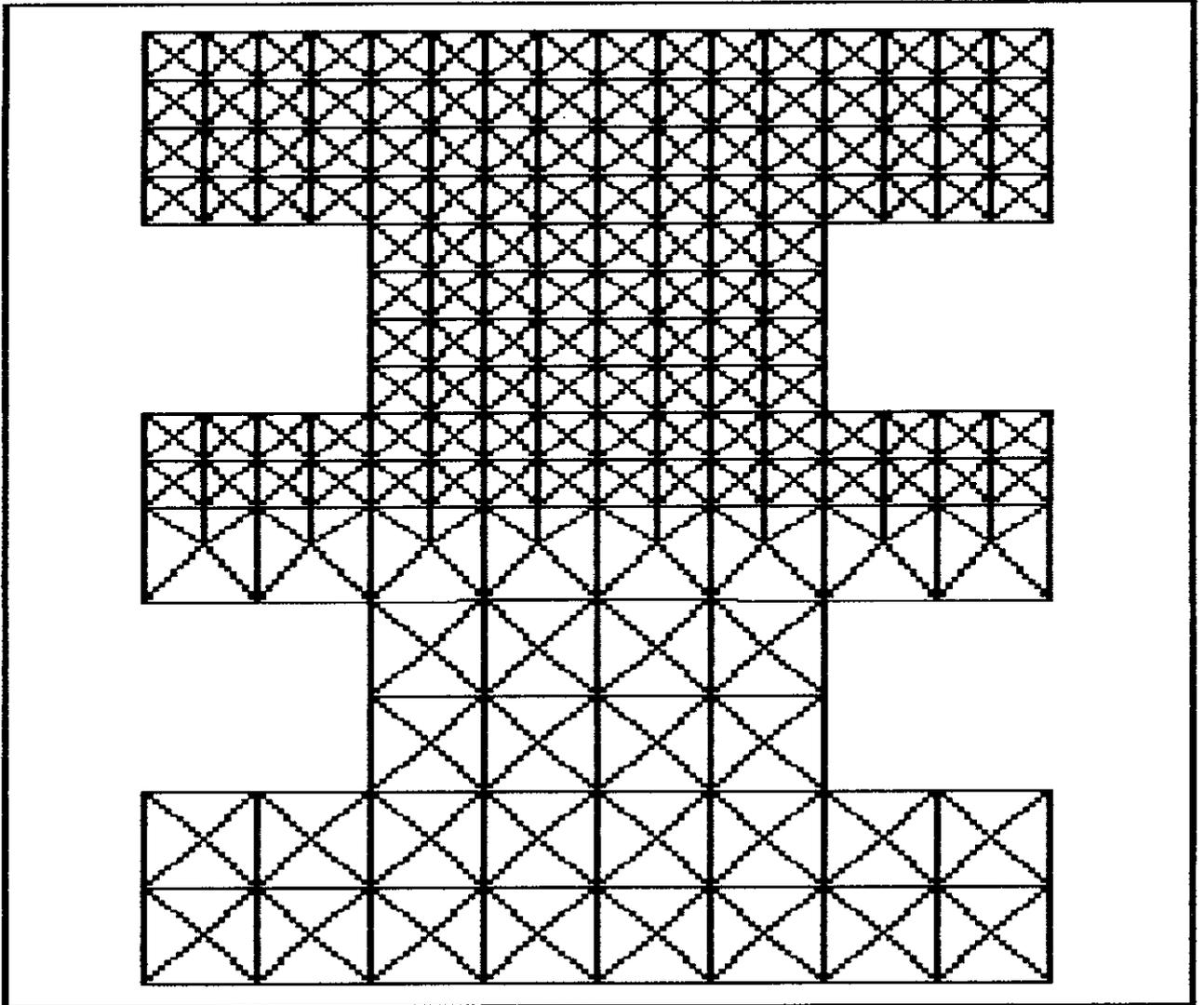


FIG. II.9F

CAPÍTULO III

ESTIMATIVAS DE ERRO E ADAPTATIVIDADE

III.1 - ANÁLISE DE ERROS -

III.1.1 - Definição do Problema -

Seja a solução de um problema de elasticidade estática linear, dado pela equação diferencial

$$L u - q = S^T D S u - q = 0 \quad \text{no domínio } \Omega \quad (\text{III.1})$$

com as condições de contorno

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{III.2a})$$

e

$$GDS u = \bar{t} \quad \text{em } \Gamma_t \quad (\text{III.2b})$$

sendo $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ o contorno total, onde L é um operador diferencial, S é a matriz que define as deformações ϵ , tal que

$$\epsilon = S u \quad (\text{III.3})$$

e D é a matriz de elasticidade, a qual permite escrever as tensões σ , de forma que,

$$\sigma = D \epsilon \quad (\text{III.4})$$

O MEF consiste em determinar uma solução aproximada

$$\hat{u} = N \bar{u} = \sum_{i=1}^m N_i \bar{u}_i \quad (\text{III.5})$$

onde m é o número de pontos nodais, N_i são funções de interpolação e u_i as incógnitas do problema, determinadas pela resolução do sistema de equações algébricas lineares

$$K u - f = 0 \quad (\text{III.6})$$

onde

$$K = \int_{\Omega} (SN)^T D (SN) d\Omega \quad (\text{III.7a})$$

$$f = \int_{\Omega} N^T q d\Omega + \int_{\Gamma_t} N^T \bar{t} d\Gamma \quad (\text{III.7b})$$

e as tensões são calculadas por

$$\hat{\sigma} = D \epsilon = D S u = (DSN) \bar{u} \quad (\text{III.8})$$

Os valores aproximados \hat{u} e $\hat{\sigma}$ diferem dos valores exatos u e σ , sendo a diferença o erro existente nesta solução. Assim, para os deslocamentos temos

$$e = u - \hat{u} \quad (\text{III.9a})$$

e para as tensões

$$e_{\sigma} = \sigma - \hat{\sigma} \quad (\text{III.9b})$$

III.1.2 - Normas de Erro -

Medidas pontuais de erros, como os obtidos pelas equações (III.9) são geralmente de difícil trabalhabilidade, sendo mais convenientemente adotadas diversas medidas integrais, ou normas. Uma das mais comuns destas medidas é a norma de energia, que pode ser escrita, para o problema genérico, como

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} e^T L e d\Omega \right)^{1/2} \quad (\text{III.10})$$

ou, no caso específico da elasticidade, como

$$\begin{aligned} \|e\| &= \left(\int_{\Omega} (Se)^T D (Se) d\Omega \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_{\Omega} (e_{\sigma}^T) D^{-1} (e_{\sigma}) d\Omega \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Pode-se utilizar também a chamada norma de L_2 , que é definida por

$$\|e\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} e^T e d\Omega \right)^{1/2} \quad (\text{III.12})$$

$$\|e_\sigma\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} (e_\sigma)^T (e_\sigma) d\Omega \right)^{1/2} \quad (\text{III.13})$$

Ainda que todas as normas acima descritas tenham sido definidas em todo o domínio, é fácil notar que o quadrado de cada uma pode ser obtido pela soma das contribuições dos elementos. Assim,

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{Nel} \|e\|_1^2 \quad (\text{III.14})$$

onde Nel é o número de elementos da malha.

Para facilitar a interpretação é comum determinar-se o erro percentual relativo :

$$\eta = 100 \left(\|e\| / \|u\| \right) \% \quad (\text{III.15})$$

III.1.3 - Estimativa de Erro -

Num caso geral, em que não se conhece a solução exata σ , pode-se utilizar um valor aproximado σ^* , através de funções de forma contínuas \tilde{N} , tal que :

$$\sigma^* = \tilde{N} \bar{\sigma}^* \quad (\text{III.16})$$

As funções de interpolação \tilde{N} devem ser da mesma ordem que as funções de forma N e, frequentemente, $\tilde{N} = N$.

Os valores de $\bar{\sigma}^*$ são obtidos por projeções adequadas de $\hat{\sigma}$ sendo necessário que

$$\int_{\Omega} P \left(\sigma^* - \hat{\sigma} \right) d\Omega = 0 \quad (\text{III.17})$$

Podem ser usadas várias formas de aproximação para $\bar{\sigma}^*$, desde as simples médias nodais a projeções mais complexas como

$$P = \left(D^{-1} \tilde{N} \right)^T \quad (\text{III.18})$$

O erro estimado pode então ser expresso por

$$\|e^*\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \quad (\text{III.19})$$

e o erro percentual relativo, por

$$\bar{\eta} = \|e^*\| / (\|e^*\|^2 + \|\hat{u}\|^2)^{1/2} \quad (\text{III.20})$$

Definindo *índice efetivo* de um erro estimado (θ) como a razão entre o valor estimado e o valor real da norma do erro, temos

$$\theta = \|e^*\| / \|e\| \quad (\text{III.21})$$

Este índice varia usualmente de 0.6 a 1.2, dependendo tanto do elemento quanto da malha utilizada. Zienkiewicz (1989b) demonstra que $\theta \rightarrow 1$ quando $N_{elm} \rightarrow \infty$ para projeções definidas pela Equação III.18. Para outras projeções o intervalo de θ é menos estreito mas os resultados práticos são excelentes mesmo para simples médias nodais de tensões (ou esforços).

III.2 - ESTRATÉGIA DE REFINAMENTO TIPO h -

III.2.1 - Convergência -

Como é sabido, soluções de elementos finitos minimizam o erro na norma de energia. Para o refinamento tipo h , quando uma sequência de malhas é obtida por um refinamento uniforme, o erro é limitado por

$$\|e\| \leq C N^{-1/2 \min(p, \lambda)} \quad (\text{III.22})$$

onde C é constante positiva, N é o número de graus de liberdade, h é o tamanho de elemento da malha, p é o grau do polinômio das funções de forma e λ representa o *peso* das singularidades. O expoente de N é chamado de taxa assintótica de convergência e depende da suavidade da solução exata e das malhas de elementos finitos.

Notando-se que N é proporcional a h^{-2} em problemas bidimensionais, a relação III.22 pode ser reescrita como

$$\|e\| \leq C N^{-1/2 \min(p,\lambda)} \cong \bar{C} h^{\min(p,\lambda)} \quad (\text{III.23})$$

onde \bar{C} é uma constante positiva.

Se a sequência de malhas é obtida de modo a se distribuir igualmente o erro em cada elemento, as malhas são ditas "quase ótimas" e a estimativa do erro é

$$\|e\| \leq C N^{-p/2} \cong \bar{C} h^p \quad (\text{III.24})$$

Pode-se, então, escrever uma expressão para cálculo da taxa de convergência a partir de III.24, em que se tem

$$TC = -p/2 = (\log \|e\| - C^*) / \log N \quad (\text{III.25})$$

sendo portanto a taxa de convergência independente do problema a ser resolvido, obtendo-se assim a taxa de convergência dita *ótima*, que para elementos lineares ($p = 1$) é de -0.5 .

III.2.2 - Refinamento -

Como vários autores tem destacado (Babuska (1978, 1986)), quando processos adaptativos são usados no refinamento da malha, a taxa de convergência máxima, para o tipo de elemento utilizado, pode ser obtida promovendo uma distribuição uniforme do erro na malha. Com este procedimento a solução apresenta um erro próximo do ótimo para um dado número de graus de liberdade.

A convergência de procedimentos adaptativos de recriação da malha (refinamento tipo h com malha não estruturada) com elementos lineares e quadráticos tem sido objeto de pesquisa mais recente, principalmente por Zienkiewicz (1987) e Zhu (1987). No lugar do enriquecimento sucessivo da malha os autores utilizam um mecanismo que tenta obter o valor admissível do erro em cada região, determinando diretamente um novo tamanho de elemento.

Dado um erro máximo admissível (η_L) e admitindo-se que o

erro seja igualmente distribuído em todos os elementos, determina-se o valor do erro admissível para cada elemento (\bar{e}_m), e se o erro de um determinado elemento de tamanho h_i tem valor estimado de $\|e\|_i$, pode-se calcular o novo tamanho deste elemento admitindo uma taxa de convergência de ordem p . Assim,

$$h = h_i / \xi^{1/p} \quad (\text{III.26})$$

onde

$$\xi = \|e\|_i / \bar{e}_m \quad (\text{III.27})$$

Naturalmente, se a taxa de convergência admitida for exata e se o erro for calculado com precisão, os novos tamanhos de elemento fornecerão uma malha que apresentará a precisão desejada, da maneira mais econômica. Normalmente se admite que p é igual ao grau do polinômio das funções de interpolação, o que, obviamente, não é válido perto de singularidades. Assim, perto de pontos singulares, o novo tamanho de elemento deve ser calculado admitindo-se uma nova taxa de convergência,

$$h = h_i / \xi^{1/\lambda} \quad (\text{III.28})$$

onde $0 < \lambda < 1$ é a taxa de convergência *a priori* da solução de elementos finitos para problemas com singularidades. Para diversas singularidades λ é conhecido, e em grande parte de problemas de elasticidade plana (Szabo (1986)), temos

$$0.5 \leq \lambda < 1.0 \quad (\text{III.29})$$

O intervalo de variação de λ é relativamente pequeno, e, na prática, podemos adotar, conforme sugestão de Szabo (1986) $\lambda=0.5$. O possível refinamento excessivo causado por se tomar um valor muito pequeno de λ é localizado e não muito dispendioso.

A estratégia de refinamento descrita pode ser aplicada tanto a elementos quadriláteros quanto a triangulares, mas o sucesso de sua implementação depende da eficácia de um gerador automático de malhas específico.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE PLANA

IV.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA -

O problema geral de Estado Plano de Tensões (EPT) ou de Estado Plano de Deformações (EPD) pode ser expresso particularizando-se as Equações III.1 a III.8, em que teremos :

$$\hat{u} = N \bar{u} = \sum_{i=1}^m N_i \bar{u}_i \quad (\text{IV.1a})$$

$$\hat{u}^T = [u \quad , \quad v] \quad (\text{IV.1b})$$

$$\bar{u}_i^T = [u_i \quad , \quad v_i] \quad (\text{IV.1c})$$

$$\hat{\sigma} = D \epsilon = DSN \bar{u} = [\sigma_x \quad , \quad \sigma_y \quad , \quad \tau_{xy}]^T \quad (\text{IV.2})$$

onde D é a matriz de elasticidade, que depende do caso analisado, EPT ou EPD .

O elemento utilizado é triangular linear e teremos para cada nó dois graus de liberdade (Eq. IV.1c): um deslocamento na direção de x (u) e outro na direção de y (v). Através de coordenadas triangulares (ξ_1, ξ_2, ξ_3) pode-se definir as funções de forma $N_i = \xi_i$, ficando o problema totalmente definido com a expressão :

$$\epsilon = \left\{ \begin{array}{c} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y - \partial v / \partial x \end{array} \right\} \quad (\text{IV.3})$$

A norma de energia do erro (Eq. III.10 e III.11) para o caso da elasticidade plana será :

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega \quad (IV.4)$$

O erro estimado (Eq. III.16 a III.19) será

$$\|e^*\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \quad (IV.5)$$

e o erro percentual relativo,

$$\bar{\eta} = \|e^*\| / (\|e^*\|^2 + \|\hat{u}\|^2)^{1/2} \quad (IV.6)$$

IV.2 - EXEMPLOS -

A análise dos exemplos subsequentes tem por objetivo avaliar o estimador de erros e a estratégia de refinamento utilizados, para casos de Elasticidade Plana. Para os elementos que circundam uma singularidade foi adotado o valor 0.5 para λ .

IV.2.1 - Fratura

Neste exemplo analisa-se a região em torno da extremidade de uma fratura, como mostra a Figura IV.1. O carregamento é obtido através das trações fornecidas pela solução analítica correspondente ao primeiro modo da solução (simétrico) do fator de intensidade de tensões

$$\sigma_x = K_1 \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] / (2\pi r)^{1/2} \quad (IV.7a)$$

$$\sigma_y = K_1 \cos(\theta/2) [1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] / (2\pi r)^{1/2} \quad (IV.7b)$$

$$\tau_{xy} = K_1 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) / (2\pi r)^{1/2} \quad (IV.7c)$$

Admitiu-se o EPD com um coeficiente de Poisson, $\nu = 0.3$ e módulo de Young, $E = 1000$. Somente metade do domínio foi analisado, devido a simetria. Os resultados numéricos foram comparados à solução analítica apresentada pelas Eq. IV.7.

A performance do estimador de erro pode ser melhorada com a

aplicação de um fator empírico para correção de subvalorizações. Zienkiewicz (1988) sugere os fatores 1.3 para triângulos lineares; 1.1 para quadriláteros bilineares; 1.4 para triângulos quadráticos e 1.6 para quadriláteros biquadráticos. Nas ilustrações subsequentes será utilizado o superíndice * para destacar as grandezas em que tenha sido utilizado o fator de correção.

Para analisar o refinamento uniforme o domínio foi subdividido em duas regiões como mostra a figura IV.2. A região 1, extremamente próxima da singularidade, teve o tamanho de elemento inalterado (de valor 1/2) e um valor de λ igual a 0.5. Podem ser verificados abaixo os resultados e as características de cada análise realizada, tanto no refinamento uniforme (malhas 1 a 3) quanto no refinamento adaptativo (malha 4) :

Ref.	Malha	h	Nós	Elm	NGL	η	$\bar{\eta}$	$\bar{\eta}^*$	θ	θ^*
Unif	1	2.5	20	24	33	44.9	29.8	38.7	.664	.863
	2	1.0	69	106	126	30.0	20.7	26.9	.688	.895
	3	0.5	231	400	440	21.9	15.6	20.3	.715	.929
Adap	4	-	267	484	513	16.7	12.3	16.0	.741	.963

Tabela IV.1

A malha inicial (malha 1) é mostrada na figura IV.3. Para se chegar a malha 4 (ver figura IV.5) o domínio foi subdividido em regiões conforme a figura IV.4, a partir dos resultados obtidos com a análise da malha 2. A robustez do índice efetivo corrigido (θ^*) pode ser verificada, já que o mesmo tende à unidade.

A figura IV.6 mostra a taxa de convergência, tanto para o refinamento uniforme (-0.274), quanto para o adaptativo (-0.385). Estes valores estão de acordo com os resultados obtidos por Zienkiewicz (1989c) e a taxa de convergência para o refinamento adaptativo ainda está relativamente longe do valor ideal (-0.5) pelo fato de se ter ainda um número relativamente pequeno de graus de liberdade; mas, ainda assim, pode-se notar uma melhora

razoável em relação ao refinamento uniforme.

IV.2.2 - Domínio em L

As características físicas e geométricas, assim como a distribuição do carregamento são mostradas na Figura IV.7. O problema é de Estado Plano de Tensões, tendo se desenvolvido inicialmente, também neste exemplo, um refinamento uniforme, e a partir deste, um refinamento adaptativo, cujos resultados e características são apresentados na tabela abaixo :

Ref.	Malh	h	Nós	Elm	NGL	$\bar{\eta}$	$\bar{\eta}^*$
Unif.	1	2.5	21	24	36	38.45	49.99
	2	1.66	40	54	72	31.45	40.88
	3	1.25	165	96	120	26.42	34.35
	4	0.625	225	384	432	15.88	20.65
Adapt.	5	-	881	1630	1723	7.36	9.56

Tabela IV.2

A malha 1 pode ser observada na figura IV.8 . A partir dos resultados obtidos pela análise da malha 4 o domínio foi subdividido em regiões conforme pode ser visto na figura IV.9 . A partir desta subdivisão foi então gerada a malha 5 que pode ser observada na figura IV.10 . A figura IV.11 apresenta as taxas de convergência para o refinamento uniforme (-0.356) e para o refinamento adaptativo (-0.556) . Este último valor deveria estar limitado em -0.5, mas, devido a escolha manual (não automática) tanto das regiões quanto dos respectivos tamanhos de elemento, verifica-se esta pequena distorção.

Fig. IV.1

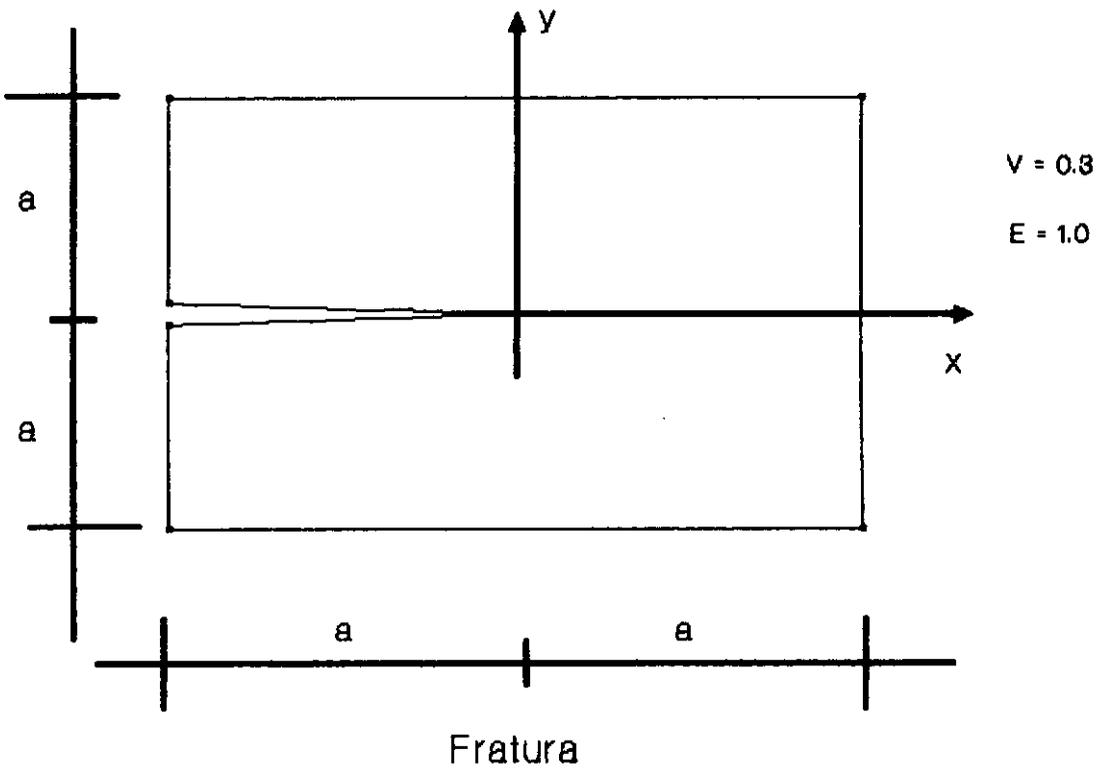
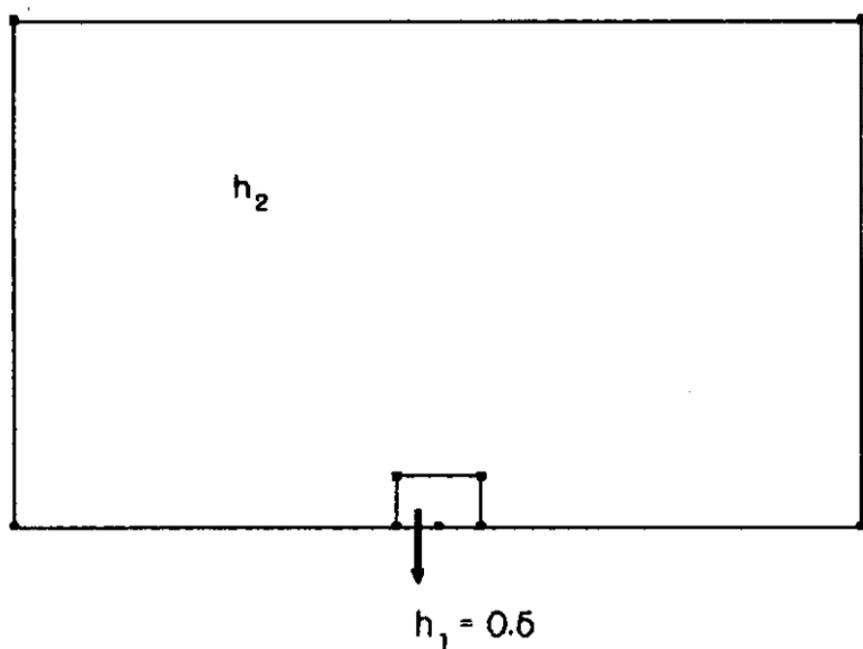


Fig. IV.2



Regiões p/ Refinamento Uniforme

MALHA 1

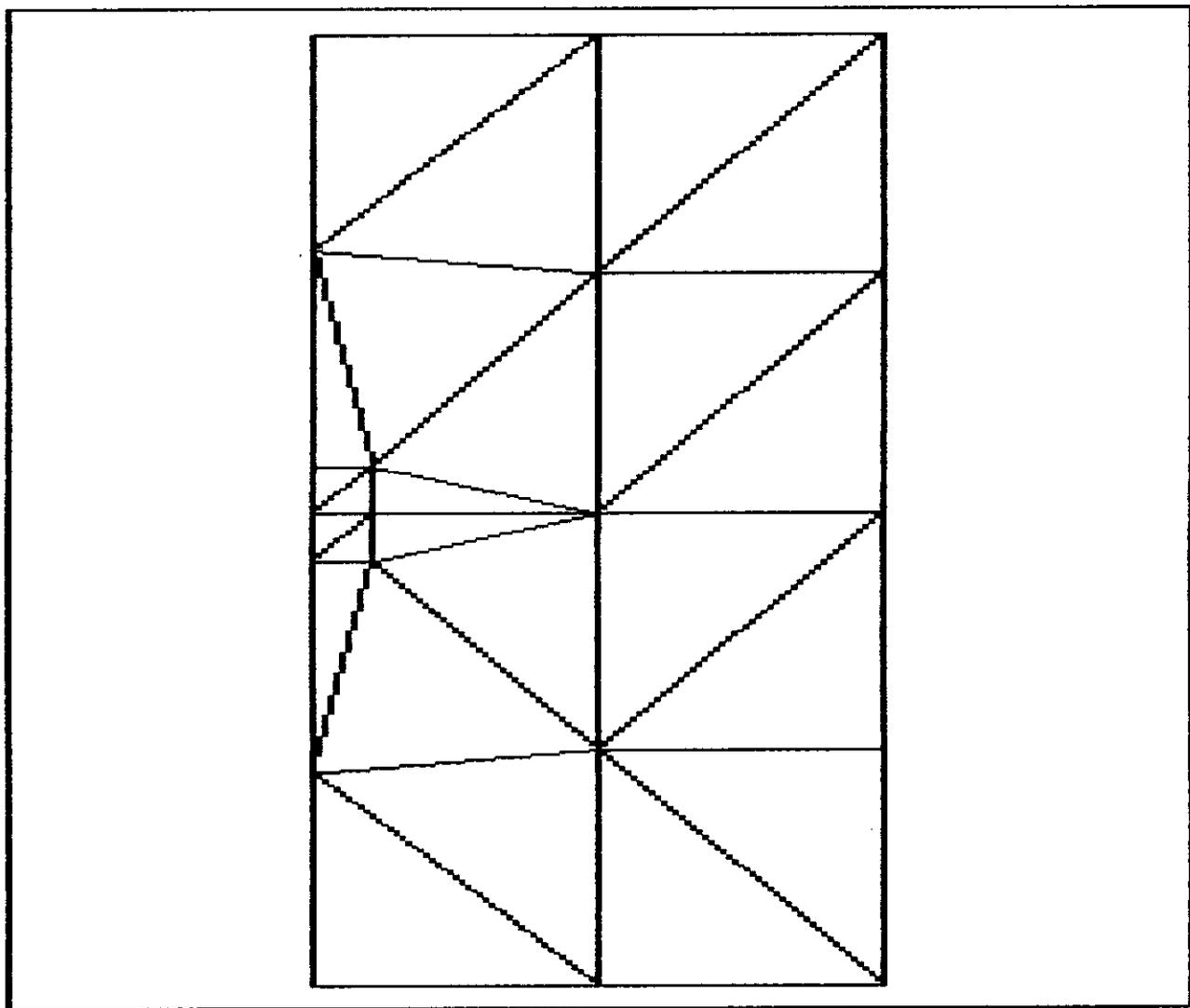
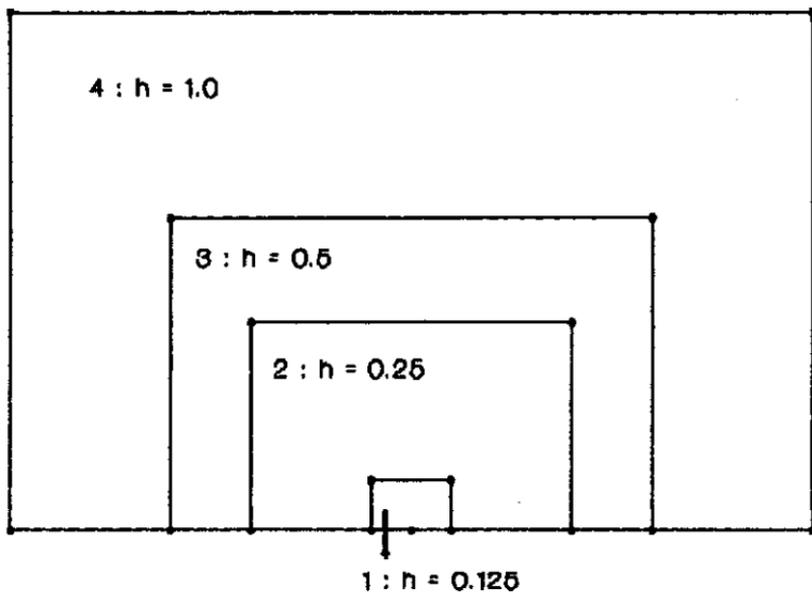


FIGURA IV.3

Fig. IV.4



Regiões p/ Refinamento Adaptativo

MALLHA 4

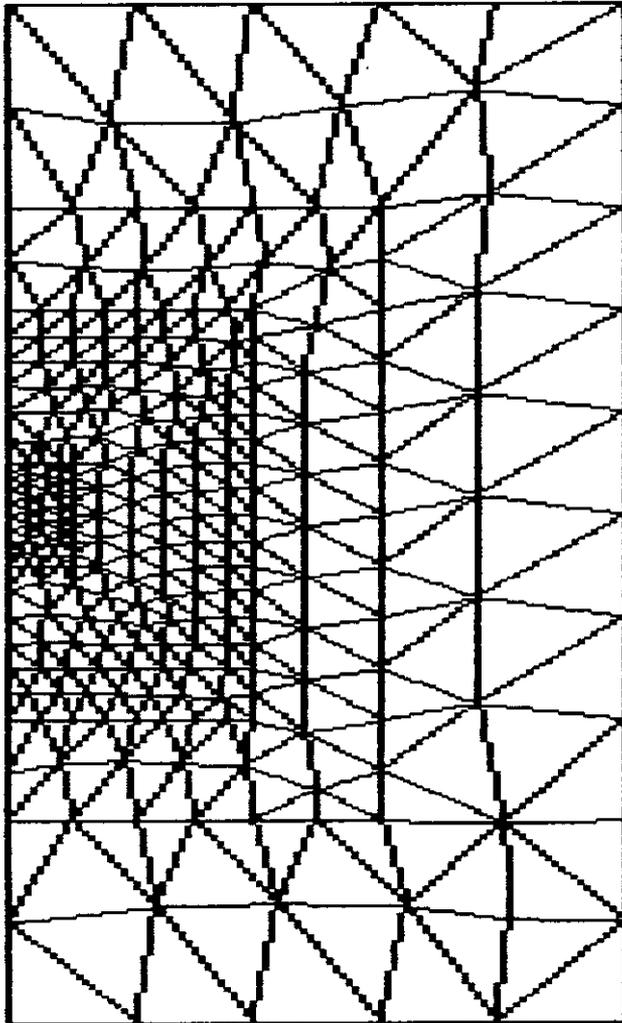


FIGURA IV.5

Figura IV.6
Taxa de Convergencia

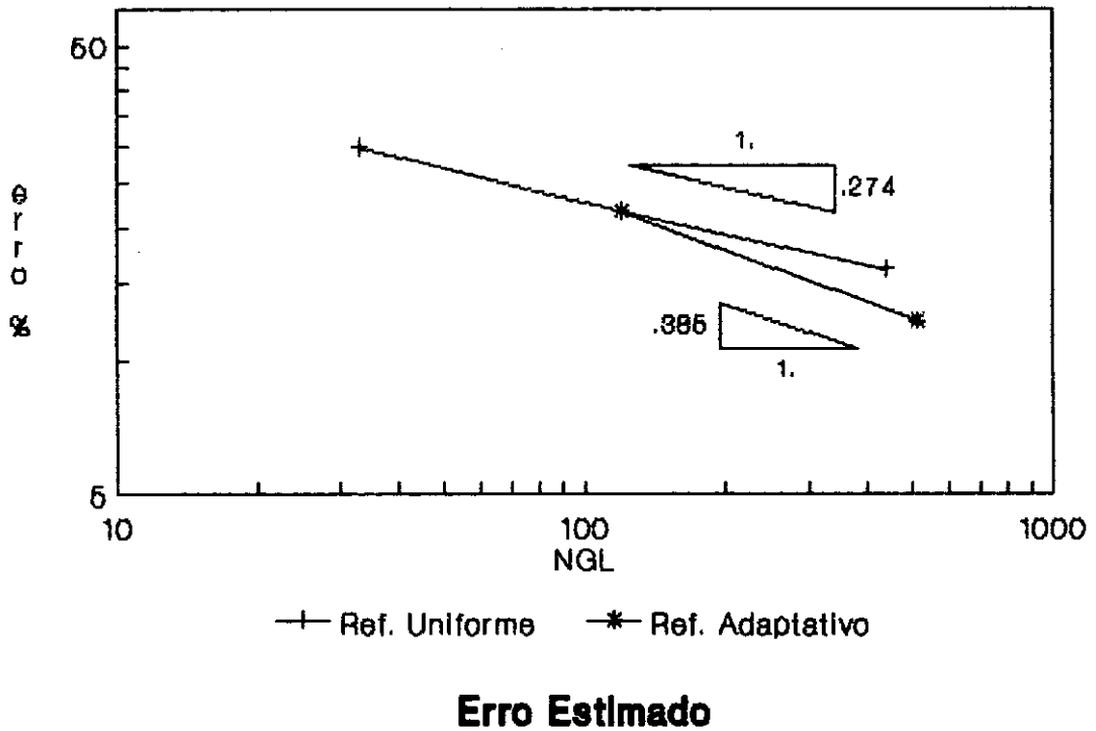
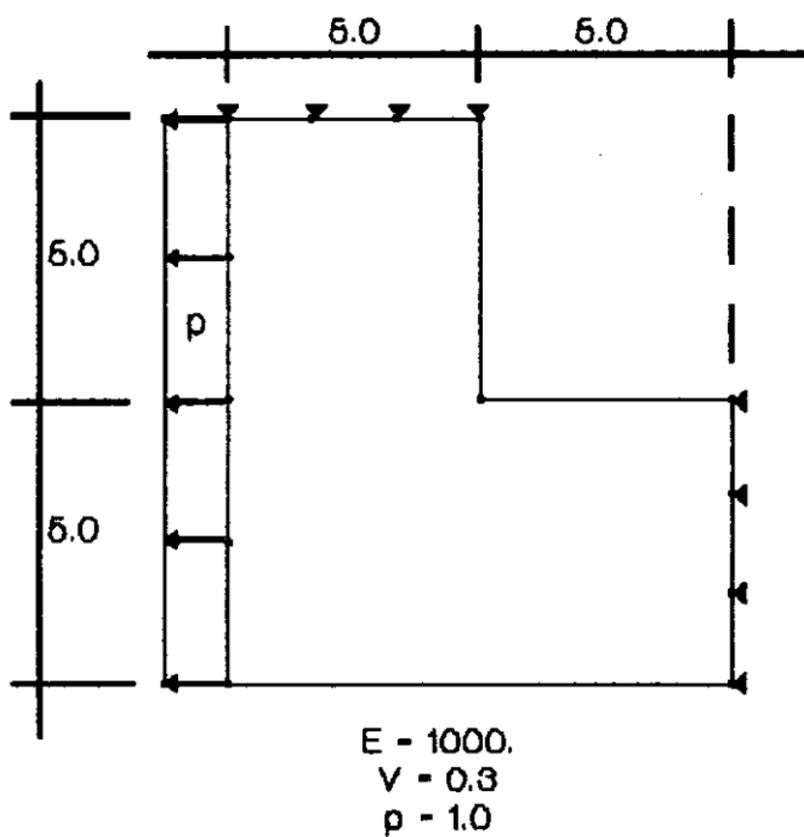


Fig. IV.7

Domínio em L



MALHA 1

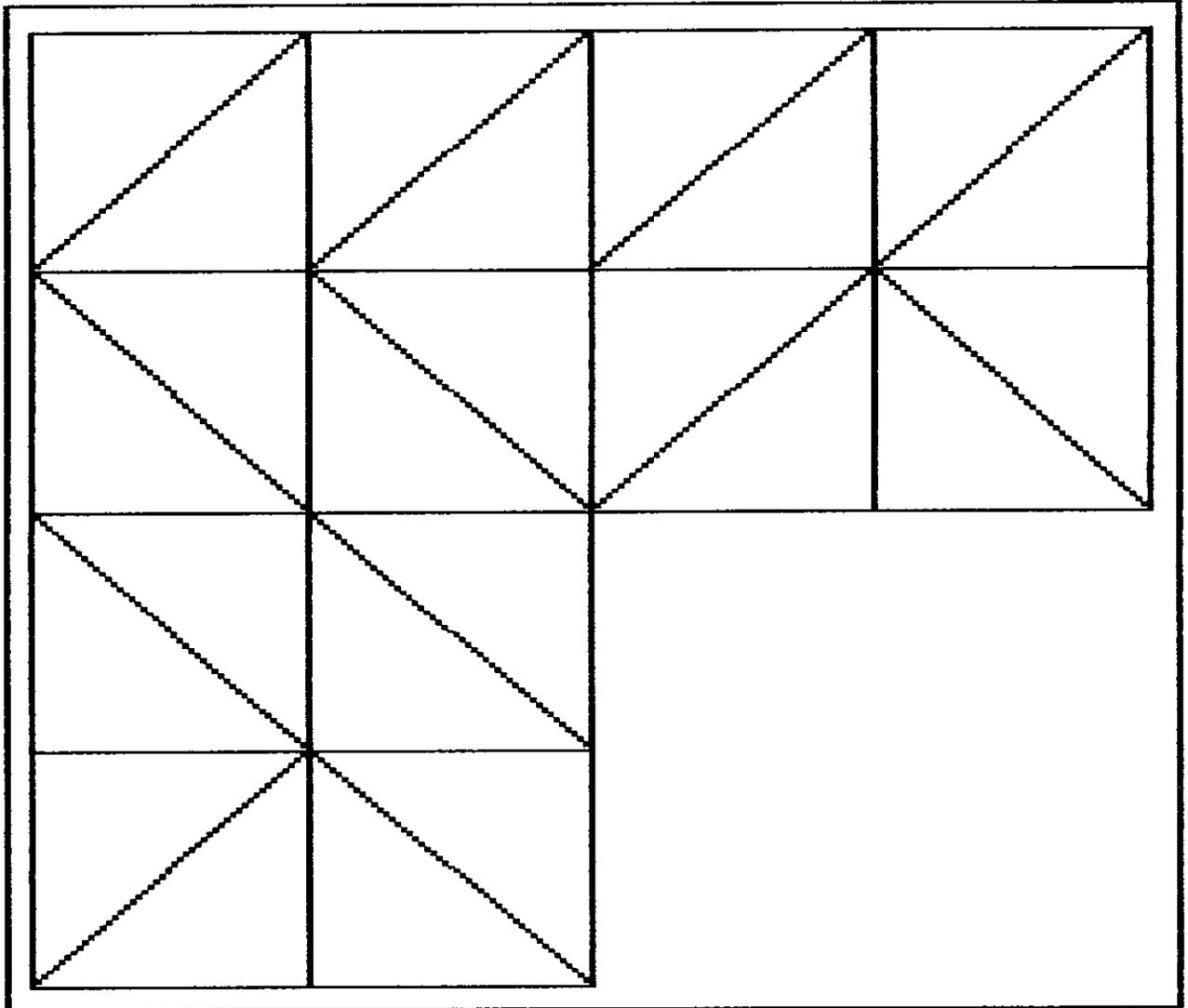
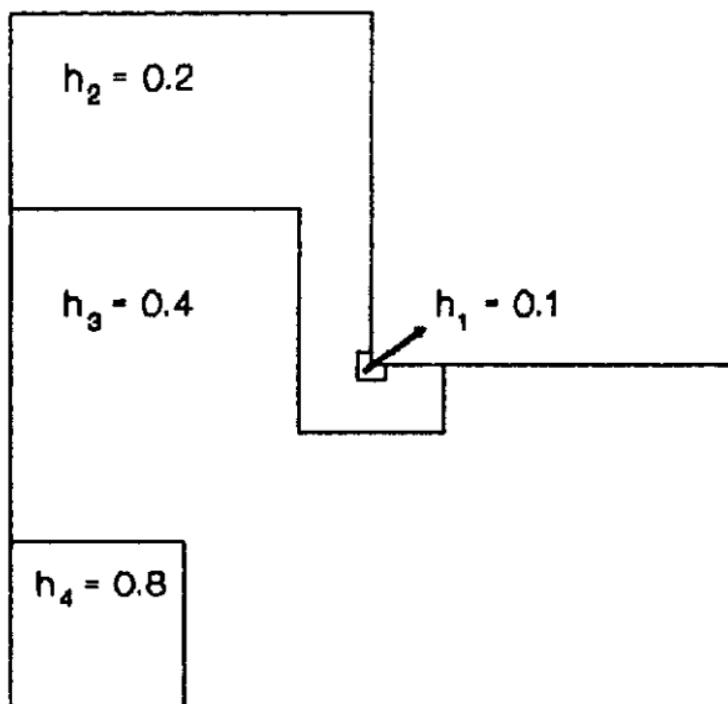


FIGURA IV.8

Fig. IV.9



Regiões p / Refinamento Adaptativo

MALHA 5

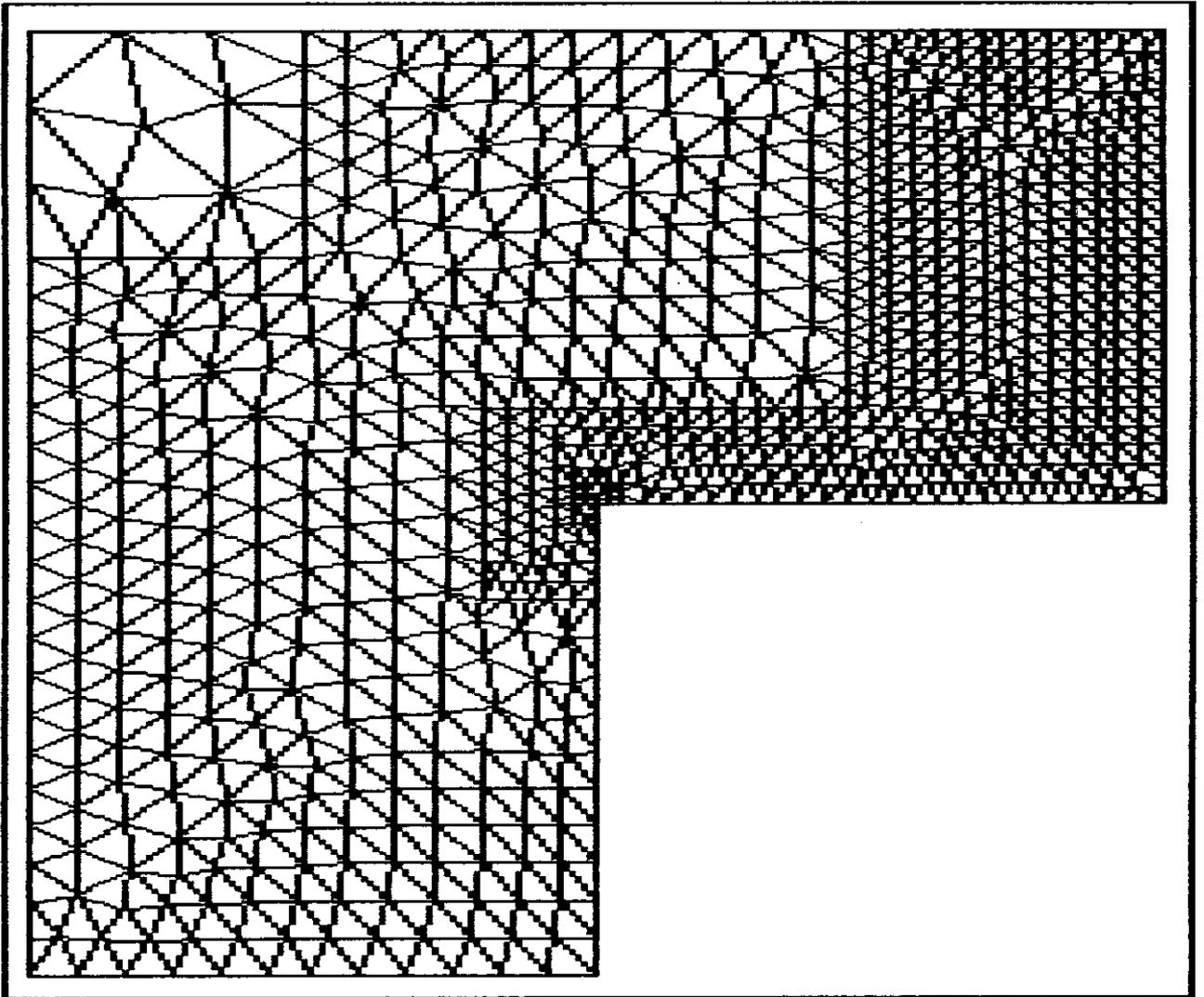
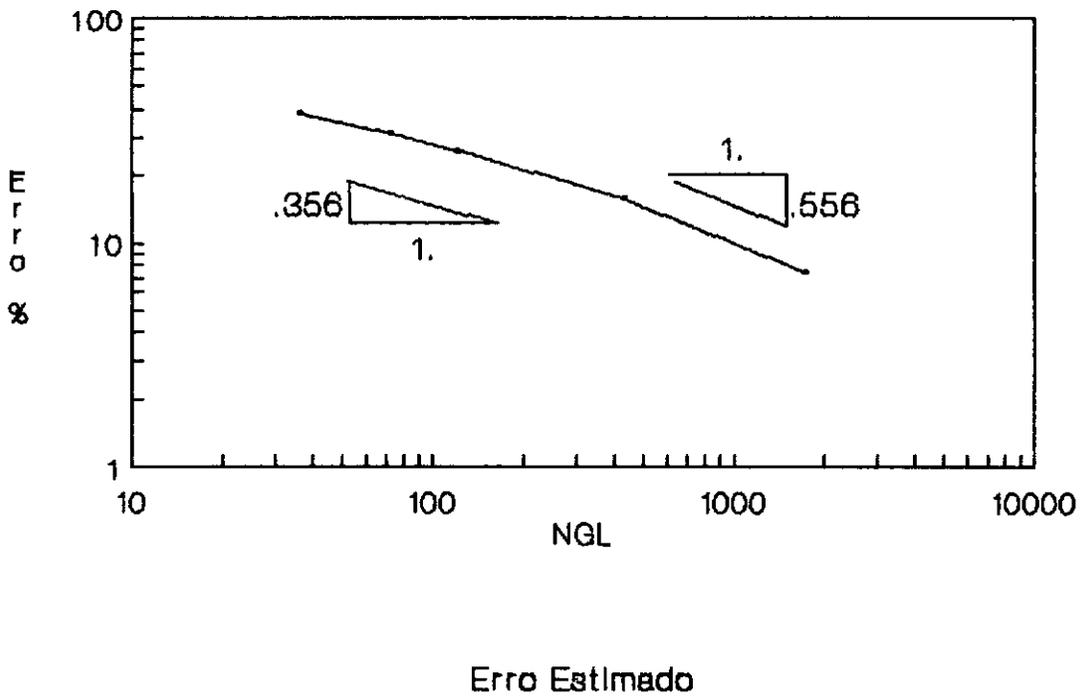


FIGURA IV.10

Figura IV.11
Taxa de Convergencia



CAPÍTULO V

ANÁLISE DE PROBLEMAS DE FLEXÃO DE PLACAS

V.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA -

O problema geral de placas espessas (teoria de *Reissner-Mindlin*) incluindo as deformações de corte pode ser expresso particularizando as Equações III.1 a III.8, em que teremos :

$$\hat{u} = N \bar{u} = \sum_{i=1}^m N_i \bar{u}_i \quad (\text{V.1a})$$

$$\hat{u} = [w , \beta_y , \beta_x] \quad (\text{V.1b})$$

$$\bar{u}_i^T = [w_i , \theta_{x_i} , \theta_{y_i}] \quad (\text{V.1c})$$

$$w = \sum_{i=1}^m N_i w_i ; \quad \beta_y = \sum_{i=1}^m N_i \theta_{x_i} \quad \text{e}$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^m N_i \theta_{y_i} \quad (\text{V.1d})$$

$$\hat{\sigma} = DSN \bar{u} = [\hat{M} , \hat{Q}]^T \quad (\text{V.2})$$

onde $M^T = [M_x , M_y , M_{xy}]$ são os momentos fletores e $Q^T = [Q_x , Q_y]$ as forças cortantes.

$$M = D_f \chi \quad \text{e} \quad Q = D_s \phi \quad (\text{V.3})$$

O elemento utilizado é triangular linear e teremos em cada nó três graus de liberdade (Eq. V.1c): um deslocamento transversal ao plano da placa (w) e duas rotações (θ). Através de coordenadas triangulares (ξ_1, ξ_2, ξ_3) pode-se definir as funções de forma $N_i = \xi_i$, ficando o problema totalmente definido com as expressões:

$$\chi = \left\{ \begin{array}{c} \partial\beta_x / \partial x \\ - \partial\beta_y / \partial y \\ \partial\beta_x / \partial y - \partial\beta_y / \partial x \end{array} \right\} \quad (\text{V.4})$$

$$\phi = \left\{ \begin{array}{c} -\phi_y \\ -\phi_x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \partial w / \partial y - \beta_y \\ \partial w / \partial x + \beta_x \end{array} \right\} \quad (\text{V.5})$$

Para placas espessas simplesmente apoiadas, dois tipos de apoio podem ser prescritos:

- SS1, o apoio simples *flexível*, com $w = 0$ ($M_n = M_s = 0$); e
 SS2, o apoio simples *rígido*, com $w = \theta_s = 0$ ($M_n = 0$).

A condição SS2 corresponde de um modo geral a solução de Kirchhoff mas SS1 é fisicamente mais próximo do real, tendo sido mostrado recentemente que corresponde quase exatamente aos resultados da análise tridimensional (Babuska (1989)).

Também para placas engastadas podem ser prescritos dois tipos de contorno:

- engaste *flexível*, com $w = \theta_n = 0$ ($M_s = 0$); e
 engaste *rígido*, com $w = \theta_s = \theta_n = 0$.

A norma de energia do erro (Eq. III.10 e III.11) para o caso de flexão de placas será :

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega} [(M - \hat{M})^T D_f^{-1} (M - \hat{M}) + (Q - \hat{Q})^T D_s^{-1} (Q - \hat{Q})] d\Omega \quad (\text{V.6})$$

sendo $D = \begin{bmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix}$ e $D^{-1} = \begin{bmatrix} D_f^{-1} & 0 \\ 0 & D_s^{-1} \end{bmatrix}$

O erro estimado (Eq. III.16 a III.19) pode então ser expresso por

$$\|e^*\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma}) D^{-1} (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} [(M^* - \hat{M})^T D_f^{-1} (M^* - \hat{M}) + (Q^* - \hat{Q})^T D_g^{-1} (Q^* - \hat{Q})] d\Omega \quad (V.7)$$

V.2 - EXEMPLOS -

V.2.1 - Placa Circular -

Para avaliar o estimador de erros utilizado foi analisada uma placa circular de raio unitário, com apoio flexível e espessura de 0.1. Em coordenadas polares o domínio do plano médio da placa pode ser definido como, $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Os demais dados numéricos são, módulo de Young, $E = 1.$, coeficiente de Poisson, $\nu = 0.3$ e a carga distribuída, $p = t^2 \cos\theta$ (onde t é a espessura da placa). Os resultados numéricos foram comparados às soluções analíticas apresentadas por Arnold(1989). A tabela V.1 apresentada abaixo fornece as características e os resultados das diversas análises realizadas :

Ref.	Malha	h	Nós	Elm.	NGL	η	$\bar{\eta}$	θ
Unif.	1	0.50	19	24	45	80.24	60.53	0.75
	2	0.25	61	96	159	51.77	45.13	0.87
	3	0.20	93	156	251	43.35	36.71	0.85
	4	0.10	333	604	939	26.26	24.86	0.95
Adapt.	5	—	589	1084	1675	20.03	18.75	0.94

Tabela V.1

Numa primeira etapa foi analisado o refinamento uniforme, através das malhas 1 a 4. A malha 1 é apresentada na figura V.1 e as demais (2, 3 e 4) forma obtidas alterando-se o tamanho do elemento conforme indicado na tabela. As distribuições do erro e do tamanho de elemento requerido foram analisadas com o auxílio do programa COLOR16, de Fernando L.B. Ribeiro, em que as regiões mais claras representam os menores valores. (Fig. V.2, V.3 e V.6).

A distribuição do erro decorrente da análise da malha 4 é apresentada na figura V.2 . O menor valor do erro é proporcional a 0.64 e o maior, a 1.68 . A figura V.3 apresenta a distribuição dos novos tamanhos de elemento, calculados a partir dos erros da figura V.2 . Com base nestes resultados o domínio foi então subdividido em regiões conforme pode ser visto na figura V.4, na tentativa de se acelerar a taxa de convergência, através de um refinamento adaptativo, resultando assim, na geração da malha 5, que pode ser observada na figura V.5. A distribuição do erro proveniente da análise da malha 5 é apresentada na figura V.6. O menor e o maior valores do erro, neste caso, são proporcionais a 0.29 e a 1.0, valores bem menores do que os relativos a malha 4. Pode-se verificar, também, que esta distribuição é bem mais suave do que a apresentada na figura V.2.

A Figura V.7 mostra o índice de Efetividade, comprovando a robustez do estimador de erros utilizado. A medida que o número de graus de liberdade aumenta, o índice de Efetividade tende a unidade, isto é, o estimador de erros tende ao erro calculado.

Na figura V.8 pode-se ver a taxa de convergência do erro calculado através do resultado analítico, para momento fletor, esforço cortante e total. No refinamento uniforme a taxa de convergência do erro total é de -0.367 e no refinamento adaptativo, de -0.466 .

A figura V.9 mostra a taxa de convergência do erro estimado. Neste caso, o valor da taxa de convergência do erro total é de -0.334 para o refinamento uniforme e de -0.490 para o adaptativo. Pode-se notar que a evolução de ambas é extremamente semelhante e que o erro percentual do cortante decresce muito pouco ao longo do processo. Isto ocorre, quase sem interferir na taxa de convergência total, porque a energia de deformação por corte torna-se cada vez menos representativa, conforme pode ser visto na figura V.10.

A figura V.11 se refere a uma placa com espessura 0.5 e mesmo tipo de apoio (simples flexível), em que foram analisadas as mesmas malhas. Neste caso, nota-se que as taxas de convergência para o momento, cortante e total são praticamente iguais, o que se explica pelo fato de que as energias de

deformação por corte e flexão apresentarem a mesma ordem de grandeza ao longo do processo.

É importante destacar, principalmente para o caso de placas finas, que ao longo do processo de análise, são indicadas direções alternativas para o refinamento da malha. Isto se deve, principalmente, a distribuição da energia de deformação por flexão e corte, como pode ser visto na figura V.10).

V.2.2 - Placa Quadrada -

Neste exemplo é analisada uma placa quadrada com uma carga concentrada no meio do vão e que apresenta nos quatro bordos a condição de "apoio flexível". A modelagem se restringe a um quarto da placa, devido às condições de simetria. As características físicas e geométricas do problema são apresentadas na Figura V.12. A tabela V.2, apresentada abaixo, fornece as características e os resultados das análises realizadas :

Ref.	Malha	h	Nós	Elm.	NGL	$\bar{\eta}$
Unif.	1	.250	41	64	96	35.48
	2	.200	61	100	150	30.62
	3	.125	145	256	384	21.40
	4	.070	425	796	1196	15.22
Adapt.	5	--	1333	2564	3810	8.94

Tabela V.2

O refinamento uniforme se deu a partir da malha 1, que pode ser observada na figura V.13. Como se pode notar foi utilizada a geração da malha em diagonais cruzadas conforme sugere Hughes (1987), principalmente para o caso de contornos retangulares.

A partir da distribuição dos erros e tamanhos provenientes da análise da malha 4, o domínio foi subdividido em regiões, conforme pode se ver na figura V.14. Com esta subdivisão gerou-se, então, a malha 5, que pode ser observada na figura V.15. A figura V.16 apresenta as taxas de convergência

experimental, tanto para o refinamento uniforme (-0.336), quanto para o refinamento adaptativo (-0.463). Pode-se observar que a melhora é significativa, estando o último valor bem próximo do ideal (-0.5) .

MALHA 1

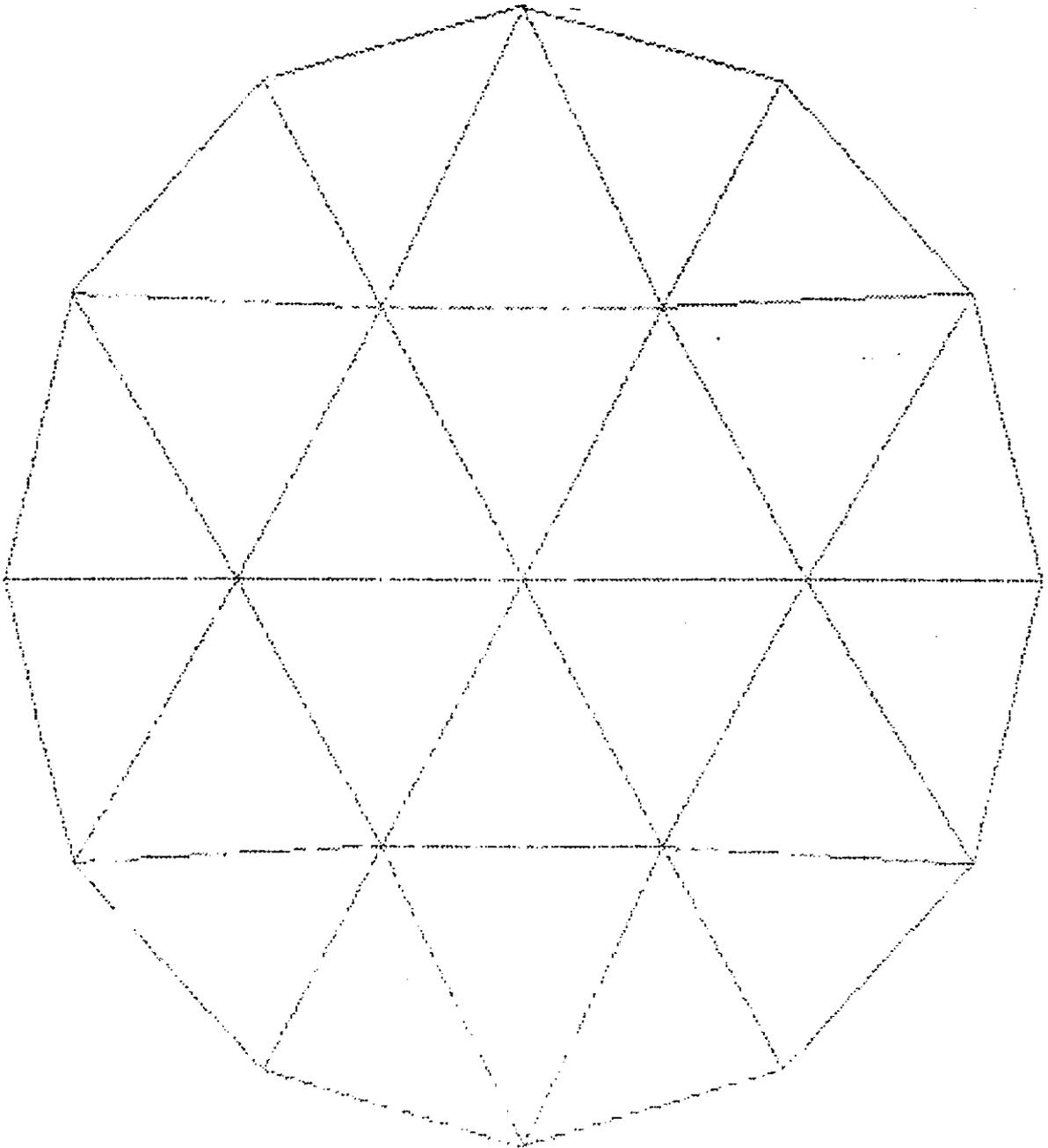


FIGURA V.1

DISTRIBUIÇÃO DO ERRO NA MALLHA 4

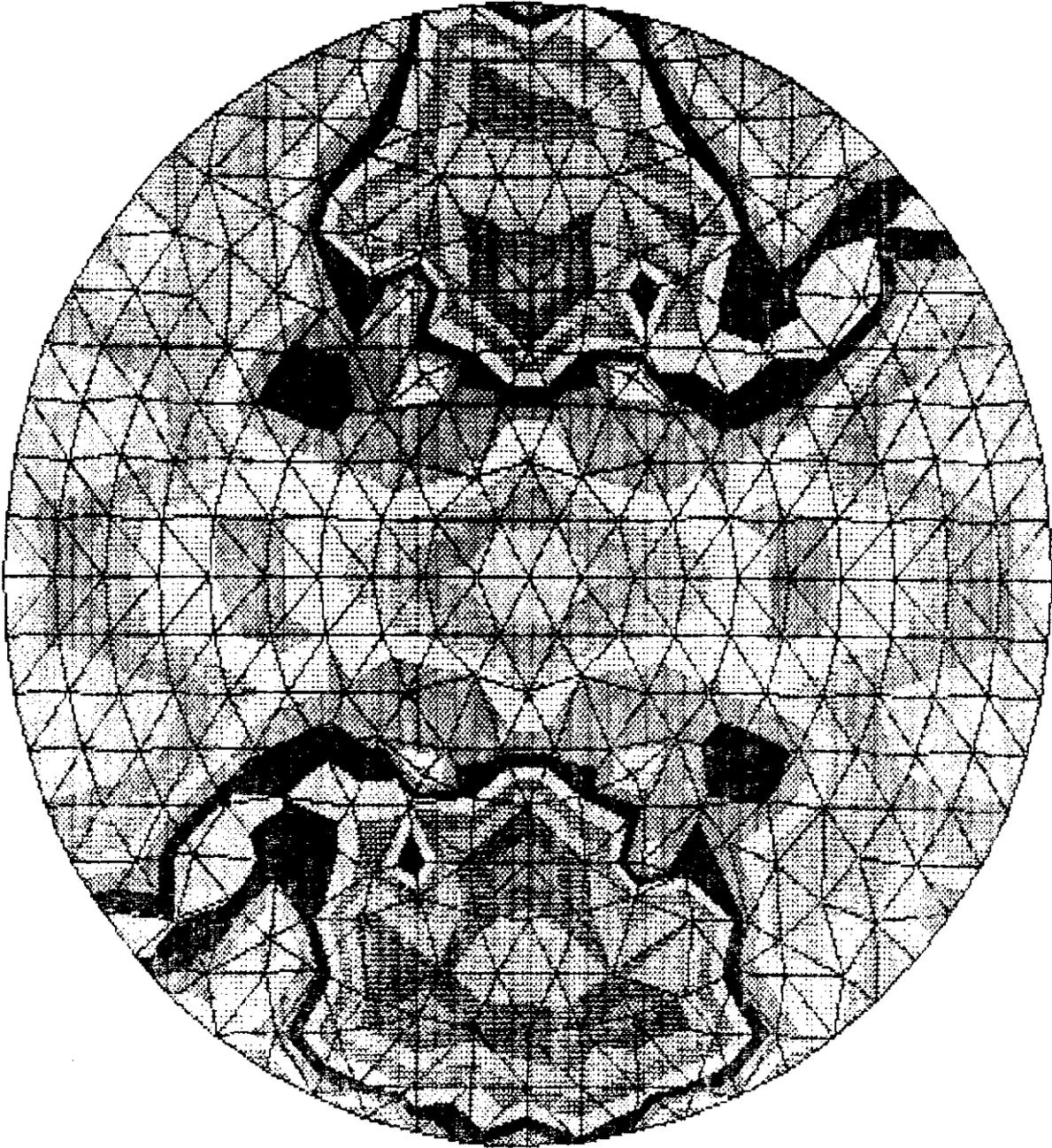


FIGURA V.2

DISTRIBUIÇÃO DO TAMANHO NA MALHA 4

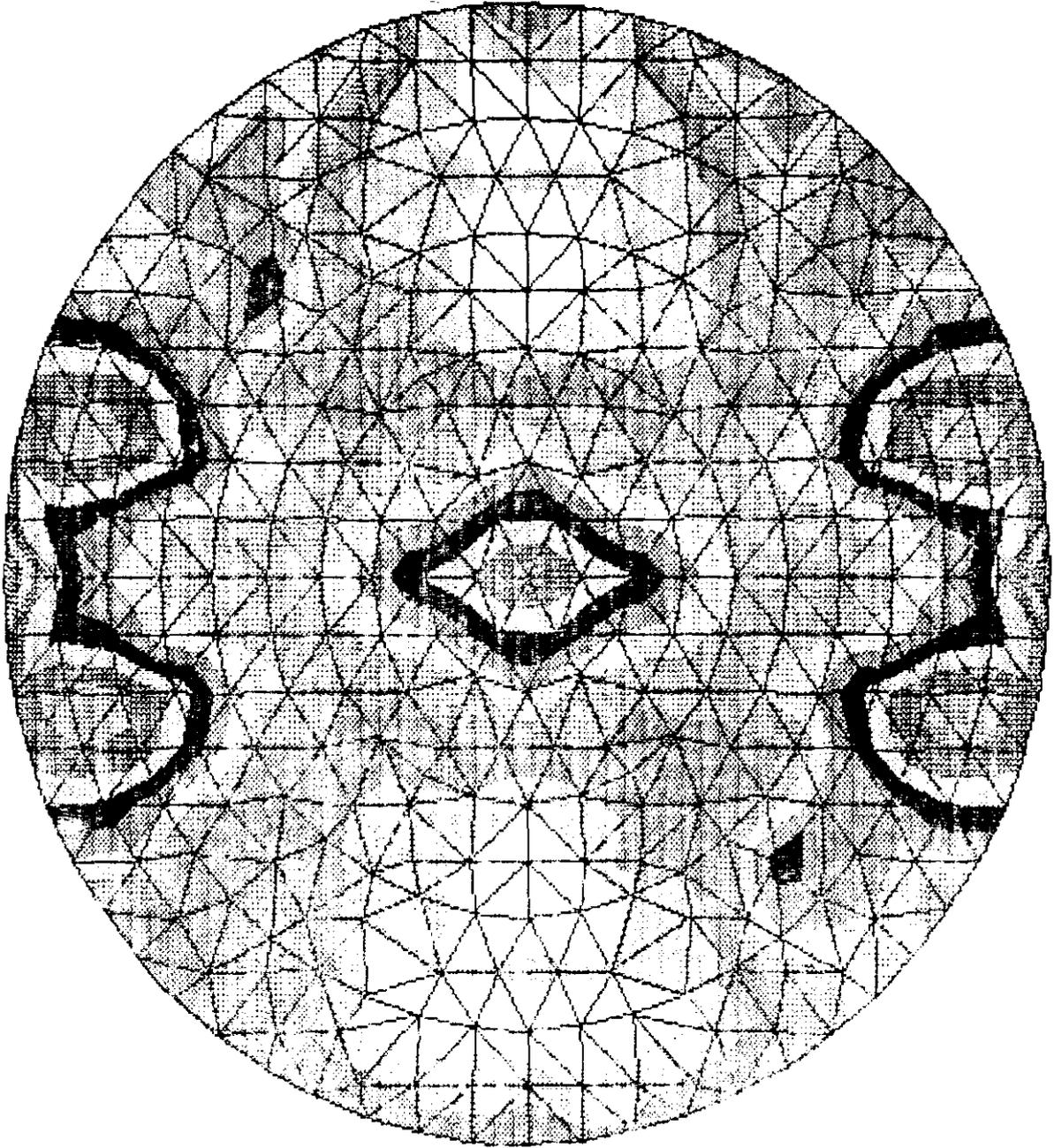
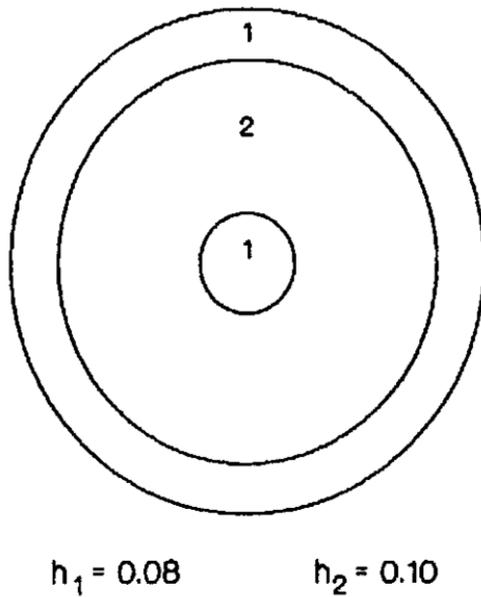


FIGURA V.3

Fig. V.4



Regiões p / Refinamento Adaptativo

MALHA 5

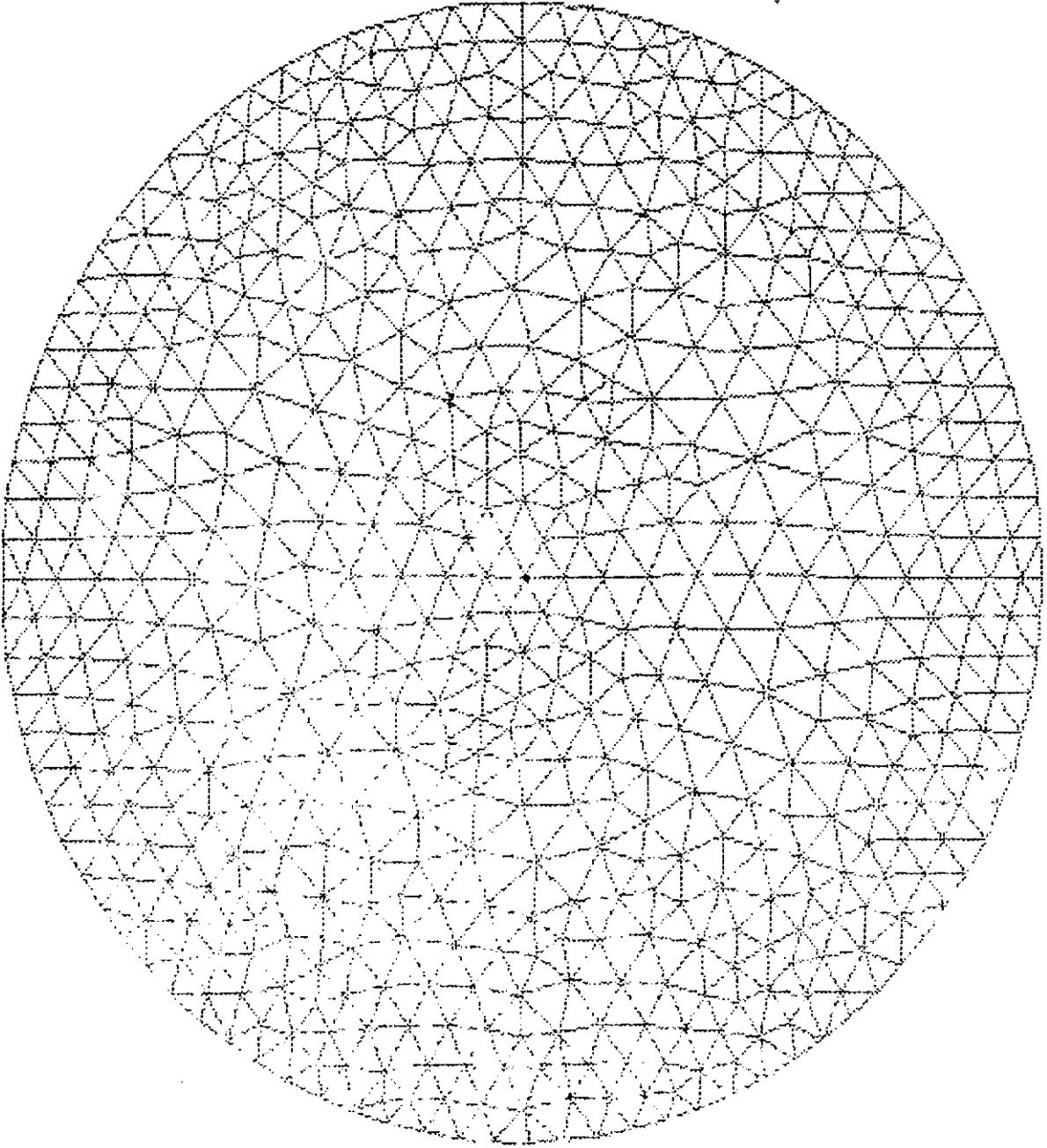


FIGURA V.5

DISTRIBUIÇÃO DO ERRO NA MALHA 5

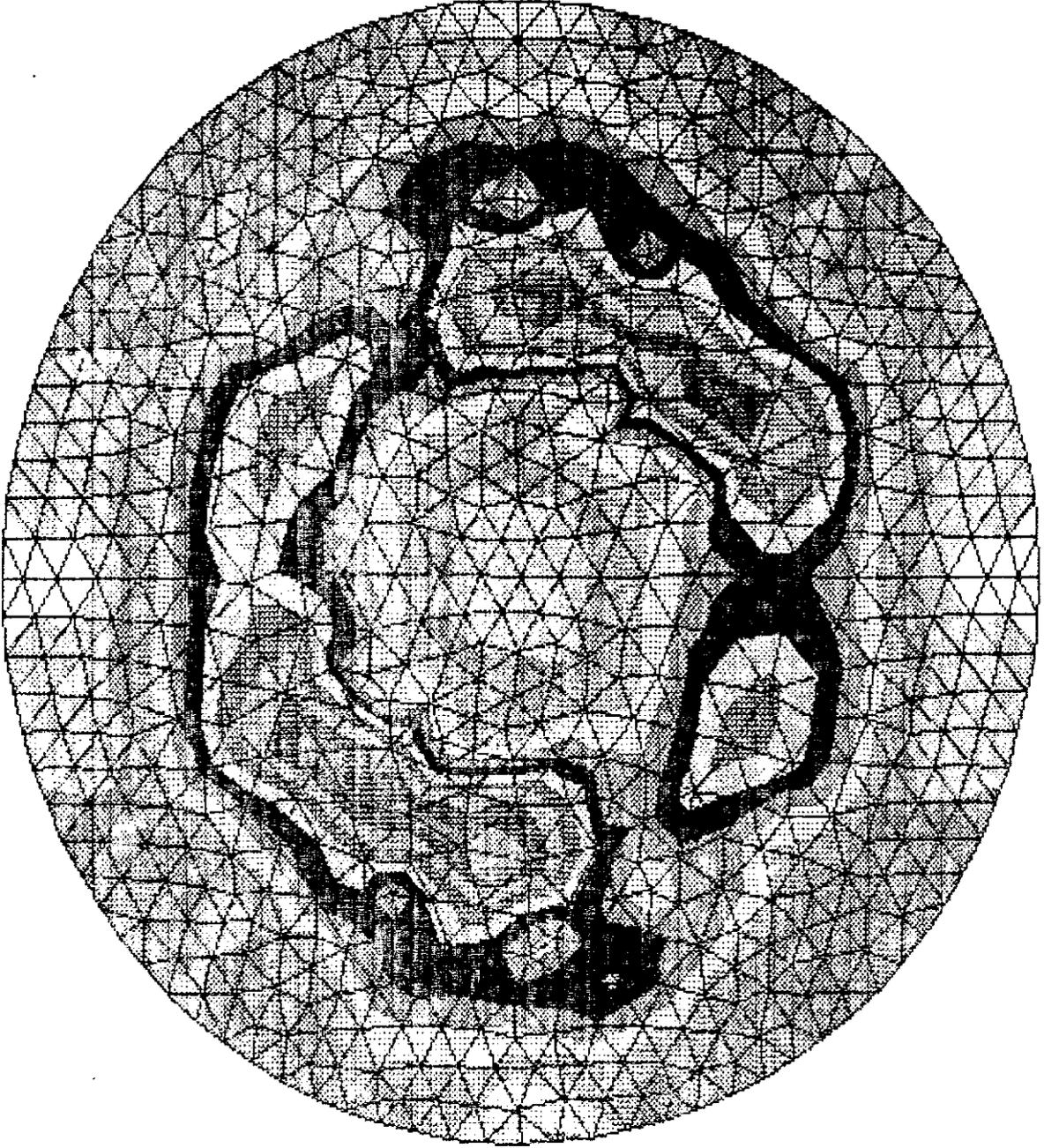
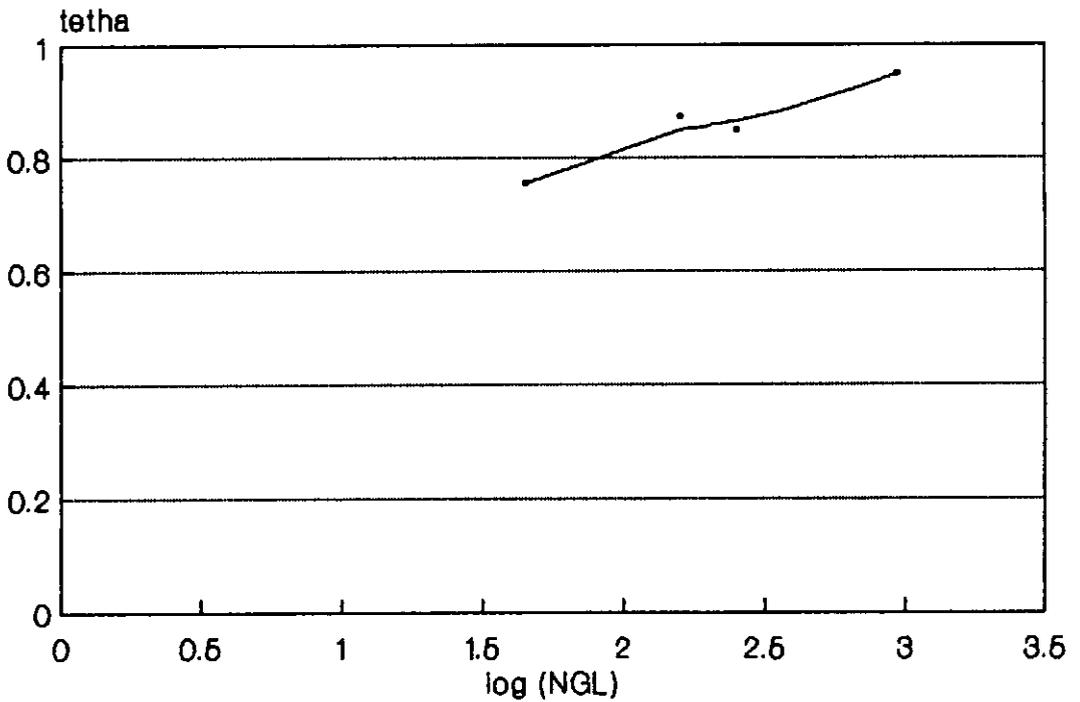


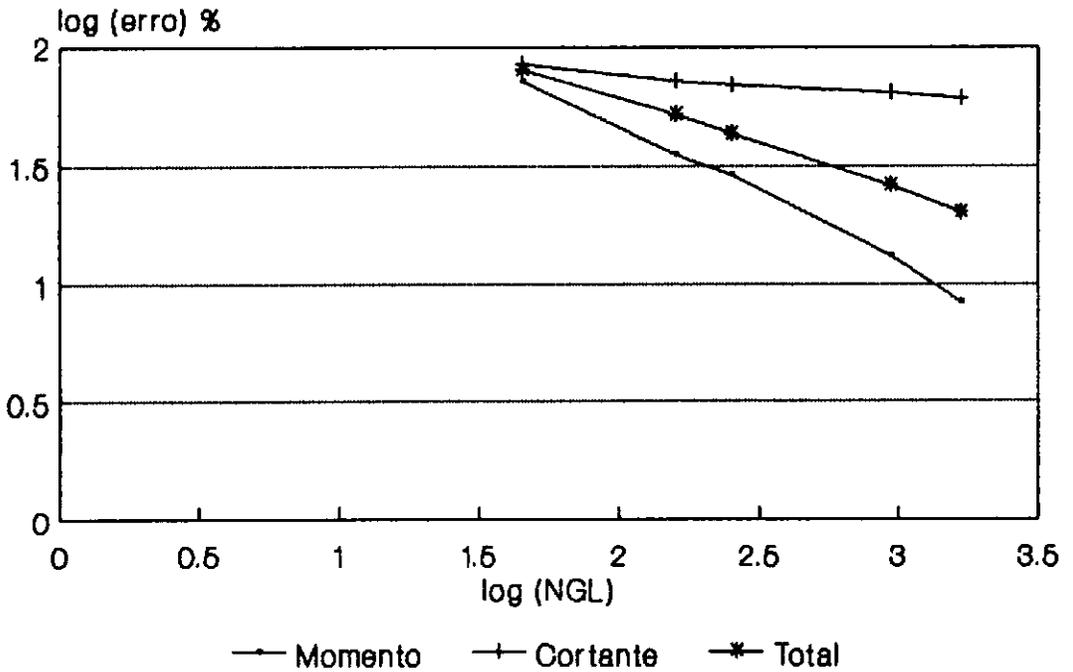
FIGURA V.6

Figura V.7
Índice de Efetividade



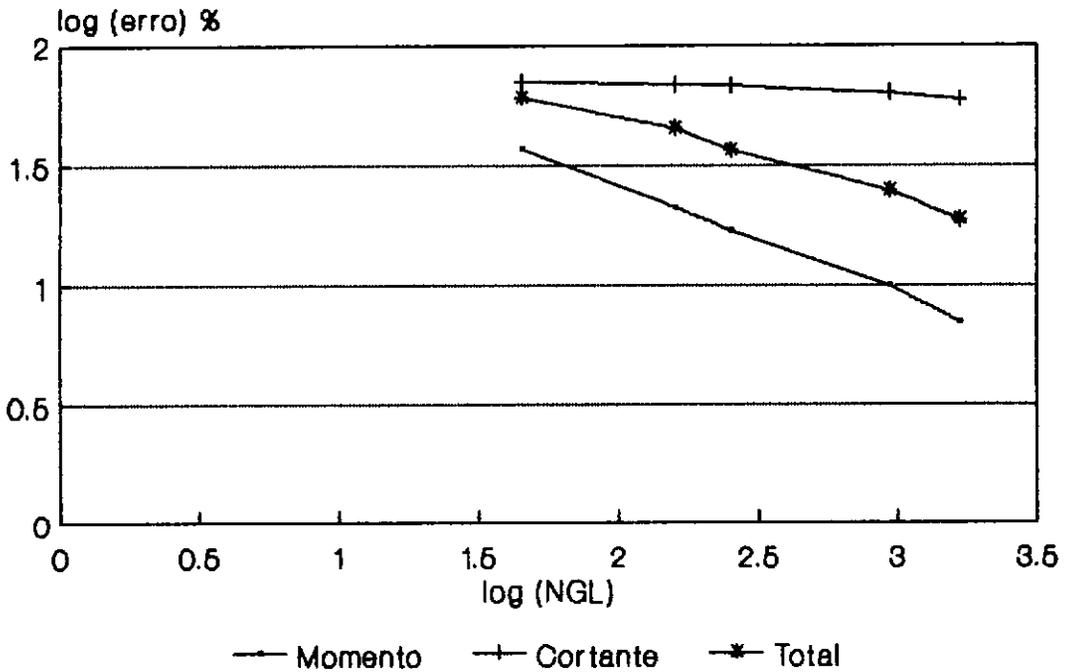
Apoio Flexível - Espessura = 0.1

Figura V.8
Taxa de Convergencia
Erro Calculado



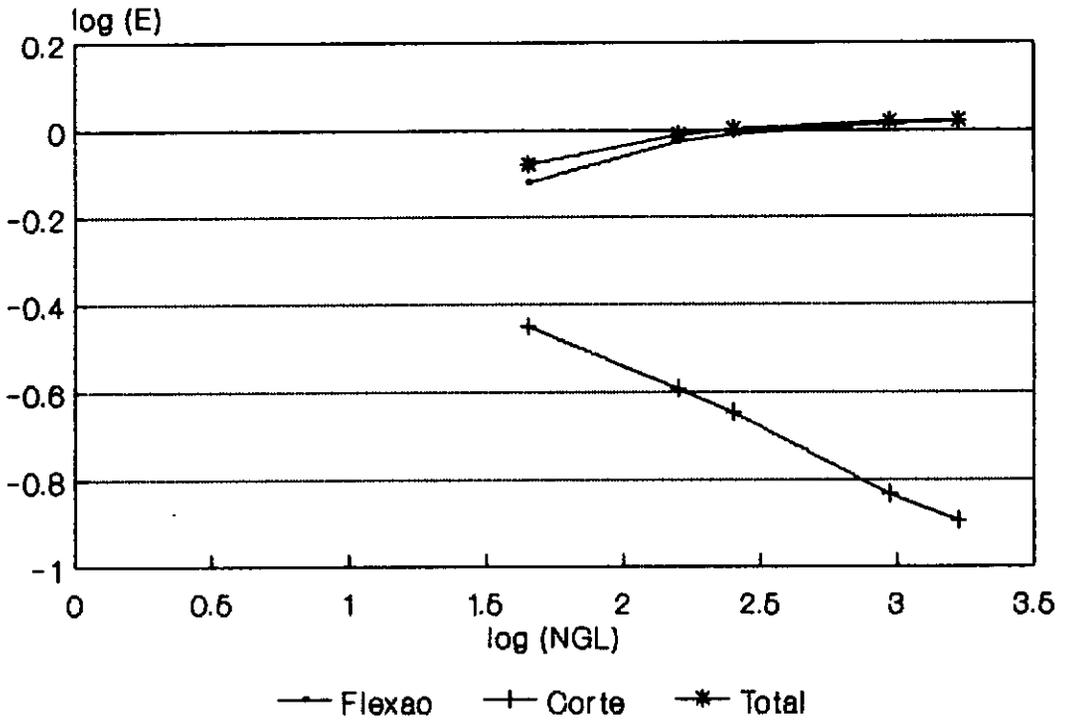
Apolo Flexivel - Espessura= 0.1

Figura V.9
Taxa de Convergencia
Erro Estimado



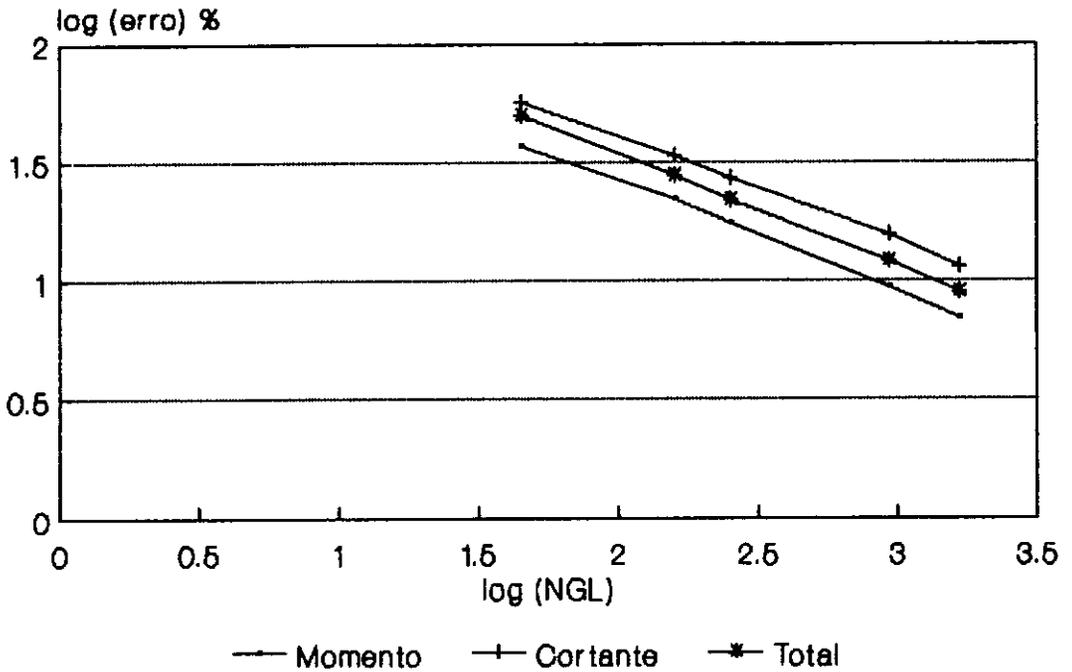
Apoio Flexível - Espessura = 0.1

Figura V.10
Norma de Energia



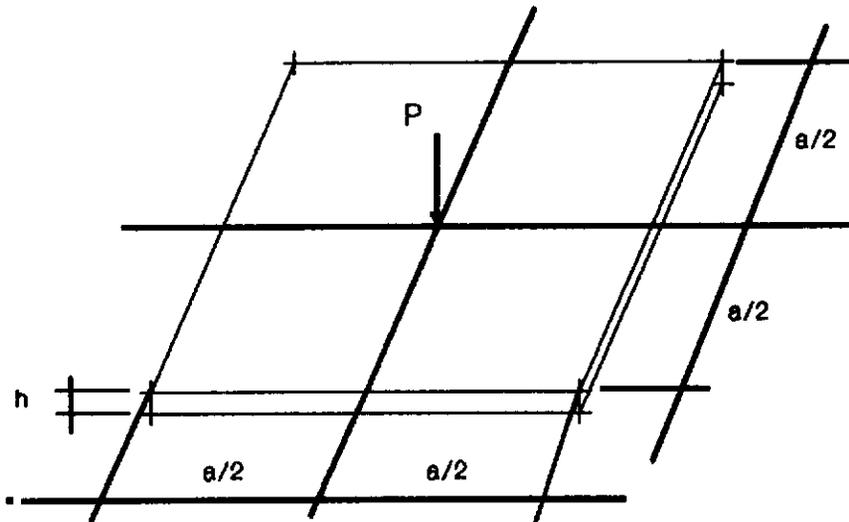
Apolo Flexivel - Espessura = 0.1

Figura V.11
Taxa de Convergencia
Erro Estimado



Apolo Flexível - Espessura = 0.5

Fig. V.12



$$\begin{aligned} E &= 2000. & a &= 2.0 \\ P &= 10.0 \\ V &= 0.3 & h &= 0.08 \end{aligned}$$

MALHA 1

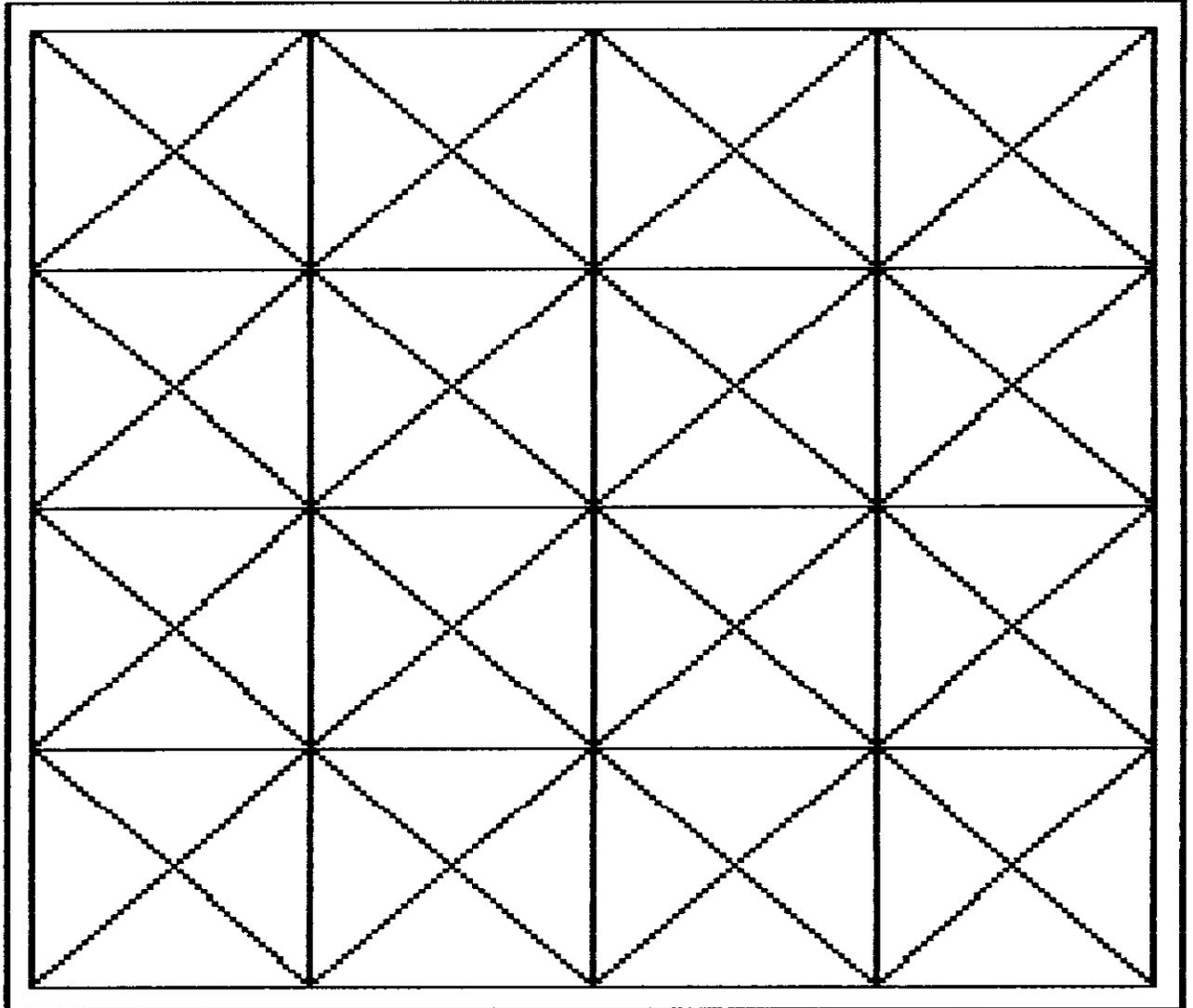


FIGURA V.13

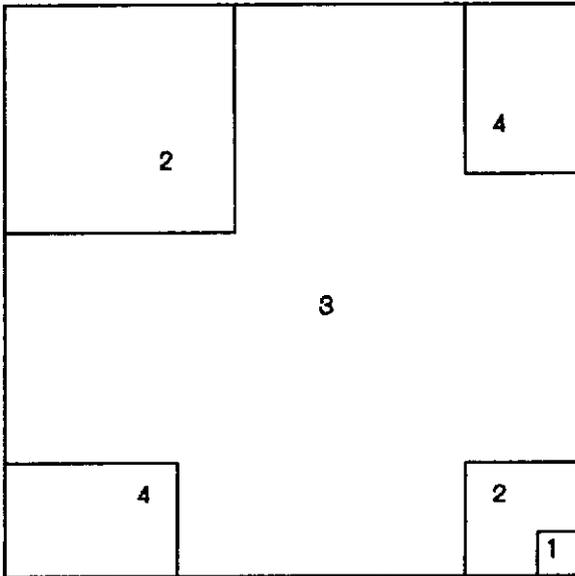
Fig. V.14

$$h_1 = 0.0125$$

$$h_2 = 0.0250$$

$$h_3 = 0.05$$

$$h_4 = 0.10$$



Regiões p/ Refinamento Adaptativo

MALHA 5

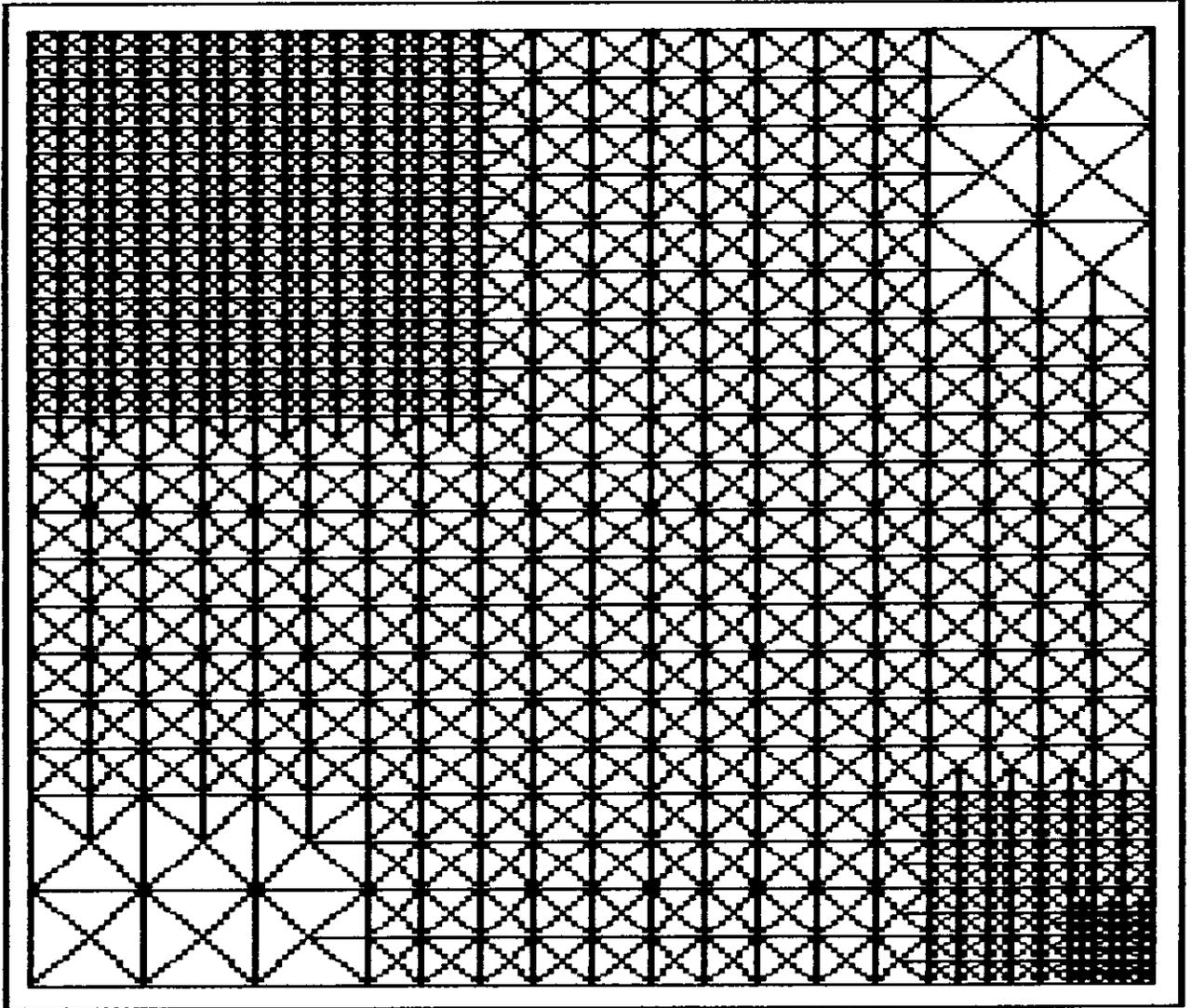
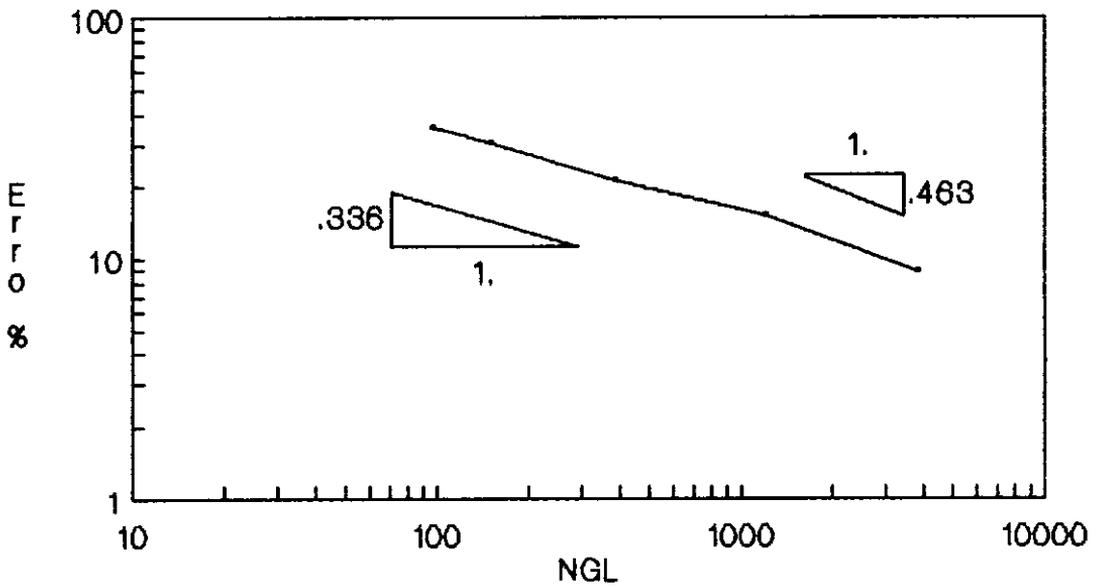


FIGURA V.15

Figura V.16
Taxa de Convergencia



Erro Estimado

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

Foi apresentado neste trabalho um procedimento de análise adaptativa do Método dos Elementos Finitos (versão h) aplicado a problemas de elasticidade plana e de flexão de placas, através de um refinamento não estruturado da malha.

A implementação de uma estimativa de erro *a-posteriori*, por si só, já representa um grande ganho na utilização do M. E. F. pois permite avaliar a confiabilidade dos resultados.

A análise dos resultados obtidos demonstra que, com o procedimento apresentado, é perfeitamente possível utilizar um elemento triangular linear e um estimador de erros que utiliza como projeção a simples média nodal, ambos extremamente simples, com significativo sucesso.

Os resultados aqui obtidos motivam a continuidade das pesquisas. Pode-se salientar, neste sentido, algumas linhas de ação:

- (i) pode-se esperar melhores resultados com uma ligeira alteração no gerador de malhas que permita definir regiões com tamanho de elemento variável, passando gradativamente de um valor mínimo para um máximo;
- (ii) seria interessante a montagem de um esquema auto-adaptativo a partir da alteração descrita no item anterior;
- (iii) a estimativa de erro utilizada ignora a continuidade dos erros entre os elementos, ou seja, não considera o efeito conjunto quando da definição dos novos tamanhos

de elementos. Não se tem, também, uma interpretação do erro de maneira imediata, em termos pontuais, uma vez que os resultados são dados em termo de normas. O estudo desses problemas e a necessidade de medidas de erro mais precisas e gerais constituem algumas das motivações na área do estudo dos erros de discretização.

- (iv) a partir da combinação do elemento de estado plano com o de flexão de placas, pode-se implementar um elemento para análise de cascas. Porém, para o caso de placas finas, o elemento baseado na teoria de Mindlin apresenta algumas dificuldades (camada limite, truncamento, ...) sendo, talvez, mais apropriada a utilização de elementos lineares baseados na teoria de Kirchhoff, como os elementos DKT (Hughes (1987)).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arnold (1987)** - D.N. ARNOLD, R.S. FALK - A uniformly accurate finite element method for Mindlin-Reissner plates. IMA Preprint 307. University of Minnesota. 1987.
- Arnold (1989)** - D.N. ARNOLD, R.S. FALK - Edge Effects in the Reissner-Mindlin Plate Theory. in Analytical and Computational Models of Shells. ASME, CED Vol. 3, 1989.
- Babuska (1978)** - I. BABUSKA, W.C. RHEINBOLDT - Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM J. Num. Analysis. 15(4). 736-754. 1978.
- Babuska (1979)** - I. BABUSKA, W.C. RHEINBOLDT - Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 17/18, 519-540. 1979.
- Babuska (1986)** - I. BABUSKA, O.C. ZIENKIEWICZ, J.P. DE S.R. GAGO, E.R. DE A. OLIVEIRA - (eds), Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations, John Wiley & Sons. 1986.
- Babuska (1989)** - I. BABUSKA, T. SCAPOLLA - Benchmark Computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem. Int. J. Numer. Meth. Eng. 27, 157-179. 1989.
- Baker (1987)** - T.J. BAKER - 3-D mesh generation by triangulation of arbitrary points sets. AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference - Honolulu - Hawaii. 1987.
- Baker (1988)** - T.J. BAKER - Generation of tetrahedral meshes around complete aircraft. Second Int. Conf. on Numerical grid generation in Computational Fluid Dynamics. Miami Beach. Florida. USA. 1988.
- Carey-Oden (1984)** - GRAHAM F. CAREY and J. TINSLEY ODEN - Finite Elements - Computational Aspects - Vol. III - Prentice-Hall - New Jersey - 1984.
- Cavendish (1985)** - J.C. CAVENDISH, D.A. FIELD, W.H. FREY - An approach to automatic 3-D finite element mesh generation. Int. Jour. Meth. in Eng. - 21 - pp 329-347. 1985.
- Cheng (1988)** - J.H. CHENG, P.M. FINNIGAN, A.F. HATHAWAY, A. KELA, W.J. SCHROEDER - Quadtree/Octree meshing with adaptive

analysis. Second Int. Conf. on Numerical grid generation in Computational Fluid Dynamics. Miami Beach. Florida. USA. 1988.

- George (1988a)** - P.L. GEORGE, F. HECHT, E. SALTEL - Tetraedrisation automatique et respect de la frontiere. Rapport de recherche L.N.R.I.A. n^o. 835. 1988.
- George (1988b)** - P.L. GEORGE, F. HECHT, E. SALTEL - Constraint of the boundary and automatic mesh generation. Second Int. Conf. on Numerical grid generation in Computational Fluid Dynamics. Miami Beach. Florida. USA. 1988.
- Hermeline (1982)** - F. HERMELINE - Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension n . R.A.I.R.O. Analyse numérique. Vol. 16 - n^o.3 211-242. 1982.
- Hughes (1987)** - T.J.R. HUGHES - The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis - Prentice Hall International, Inc. 1987.
- Kelly (1983)** - D.W. KELLY, J.P. DE S.R. GAGO, O.G. ZIENKIEWICZ, I. BABUSKA - A-posteriori error analysis and adaptive process in finite element method. Int. J. Num. Eng. 19, 1593-1656. 1983.
- Lo (1985)** - S.H. LO - A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. Int. Jour. Num. Meth. Eng. Vol. 21 pp 1403-1426. 1985.
- Lohner (1988a)** - R. LOHNER, P. PARIKH - Generation of 3-D unstructured grids by the advancing front method. AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting. Reno. Nevada. USA. 1988.
- Lohner (1988b)** - R. LOHNER, P. PARIKH, C. GUMBERT - Interactive generation of unstructured grids for 3-D problems. Second Int. Conf. on Numerical grid generation in Computational Fluid Dynamics. Miami Beach. Florida. USA. 1988.
- Peraire (1988)** - J. PERAIRE, J. PEIRO, L. FORMAGGIA, K. MORGAN, O.G. ZIENKIEWICZ - Finite element EULER computations in 3-D. AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting. Reno. Nevada. 1988.
- Perronnet (1988)** - A. PERRONNET - A generation of tetrahedral finite elements for multi-material objects or fluids. Second Int. Conf. on Numerical grid generation in Computational Fluid Dynamics. Miami Beach. Florida. USA. 1988.

- Ribeiro (1988)** - FERNANDO L.B. RIBEIRO, LUIZ LANDAU - Geracão Automática de Malhas de Elementos Finitos para análise de tensões em juntas tubulares. 5.^o Simp. Brasileiro s/ Tub. e Vasos de Pressão. 56 . 785-798. 1988.
- Shephard (1984)** - M.A. YERRY, M.S. SHEPHARD - Automatic 3-D mesh generation by the modified-octree technique. Int. Jour. Num. Meth. Eng. Vol. 20 pp 1965-1990. 1984.
- Shephard (1988)** - M.S. SHEPHARD, F. GUERINONI J.E. FLAHERTY, R.A. LUDWIG, P.L. BAEHMANN - Finite octree mesh generation for automated adaptive 3-D flow analysis. Second Int. Conf. on Numerical grid generation in Computational Fluid Dynamics. Miami Beach. Florida. USA. 1988.
- Szabo (1986a)** - B.A. SZABO, I. BABUSKA - Computation of the amplitude of stress singular terms for cracks and re-entrant corners. Center for Comp. Mech. Washington University. 1986.
- Szabo (1986b)** - B.A. SZABO - Estimation and control of error based on p -convergence, in Accuracy Estimates and Adaptivity for Finite Elements. ed. by I. Babuska et al. 61-78. 1986.
- Watson (1981)** - D.F. WATSON - Computing the n -dimensional DELAUNAY tessellation with applications to VORONOI polytopes. Computer Journal 24 (2). 1981.
- Zhu (1987a)** - J.Z. ZHU - Error Estimation Adaptivity end Multigrid Techniques in the Finite Element Method. Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea. 1987.
- Zhu (1987b)** - J.Z. ZHU, O.C. ZIENKIEWICZ, A.W. CRAIG - Adaptive Techniques in Finite Element Analysis - Inst. for Num. Methods in Eng. 1987.
- Zienkiewicz (1983)** - O.C. ZIENKIEWICZ, J.P. DE S.R. GAGO, D.W. KELLY - The hierarchical concept in finite element analysis. Comp. and Structures. 16, 53-65. 1983.
- Zienkiewicz (1984)** - O.C. ZIENKIEWICZ, A.W. CRAIG - A posteriori error estimation and adaptive mesh refinement in finite element method. in D.F. Griffiths (ed.) The Mathematical Basis of Finite Element Methods, Clarendon Press, Oxford. 1984.
- Zienkiewicz (1987a)** - O.C. ZIENKIEWICZ, J.Z. ZHU - A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering

- analysis. Int. J. Numer. Meth. Eng. 24, 337-357. 1987.
- Zienkiewicz (1987b)** - O.C. ZIENKIEWICZ, D. LEFEBVRE - Three field mixed approximation and thin plate bending problems. Com. Appl. Numer. Meth. 3, 301-308. 1987.
- Zienkiewicz (1988)** - O.C. ZIENKIEWICZ, D. LEFEBVRE - A robust triangular plate bending of the Reissner-Mindlin type. Int. J. Numer. Meth. Eng. 26, 1169-1184. 1988.
- Zienkiewicz (1989a)** - O.C. ZIENKIEWICZ, J.Z. ZHU - Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems. Inst. of Num. Meth. Eng. University of Wales, Swansea. 1989.
- Zienkiewicz (1989b)** - O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR, P. PAPADOPOULOS, E. ONATE - Plate bending with discrete constraints: some new triangular elements. Comp. Struct. 1989.
- Zienkiewicz (1989c)** - O.C. ZIENKIEWICZ, J.Z. ZHU, N.G. GONG - Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the Finite Element Method - Int. J. Numer. Meth. Eng. 28, 879-891. 1989.