ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM DOMÍNIOS BIDIMENSIONAIS

SEBASTIÃO CESAR ASSIS PEREIRA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Nelson Francisco Favilla Ebecken

Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken

Prof. Luiz Landau

Carlos Henrique Holck

Prof. Carlos Henrique Holck

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1986

PEREIRA, SEBASTIÃO CESAR ASSIS

Análise Elasto-Plástica da Interação Solo-Estrutura em Domínios Bidimensionais (Rio de Janeiro) 1986

VIII, 118 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1986)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Interação Solo-Estrutura I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

A meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken, pela orientação.

Ao colega Alvaro Coutinho, pelo incentivo e apoio no trabalho elaborado.

Aos colegas e professores da COPPE, pelo bom ambiente de trabalho que proporcionaram.

A Sueli e Vera, pela datilografia.

Ao CNPq e CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM DOMÍNIOS BIDIMENSIONAIS

SEBASTIÃO CESAR ASSIS PEREIRA

DEZEMBRO - 1986

ORIENTADOR: NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN

PROGRAMA : ENGENHARIA CIVIL

O objetivo deste trabalho é desenvolver procedimentos computacionais efetivos, para o tratamento não linear de problemas decorrentes da interação solo-estrutura, em domínios bidimensionais. Estes procedimentos envolvem: elementos finitos isoparamétricos, com equação constitutiva elasto-plástica; elementos finitos para simular a interface solo-estrutura e elementos infinitos para a representação de domínios infinitos.

O tratamento da solução incremental das equações de equilíbrio utiliza algoritmo tipo Newton, com diversas opções. Para o estudo da análise limite implementou-se a técnica de prescrição de deslocamentos. Todos os procedimentos foram reunidos em um único programa, que se vale da técnica frontal, para resolução de sistemas de equações algébricas lineares.

Alguns casos são apresentados para investigar o comportamento dos modelos, entre estes, o estudo da análise limite de fundações rasas para plataformas offshore.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENTE OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF SOIL-STRUCTURE INTERACTION IN BIDIMENSIONAL DOMAINS

SEBASTIÃO CESAR ASSIS PEREIRA

DECEMBER - 1986

CHAIRMAIN: NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN

DEPARTMENT: CIVIL ENGINEERING

The main purpose of this work is to develop effective computer procedures, to simulate the non-linear soil structure iteraction in bidimensional domains. This procedures involve isoparametric finite elements with appropriate elasto-plastic constitutive equations, finite elements to simulate the soil structure interface and special finite elements to represent infinite domains.

The treatment of the incremental equilibrium equations uses a Newton type algorithm with several options. To the specefic limit analysis case is adopted the displacement prescription technique. All the procedures are assembled into only program, that uses the frontal technique to solve the linear algebraic equation system.

Some cases are presented to investigate the accuracy of the implemented models, enclosing the limit analysis study of shallow foundations to offshore platforms.

ÍNDICE

PÁGINA

I. INTRODUÇÃO

O crescente desenvolvimento tecnológico e a necessidade de projetos mais seguros e econômicos, tem motivado a utilização de soluções não lineares para problemas de engenharia.

O método dos elementos finitos é, atualmente, considerado uma importante técnica para solução numérica de uma grande variedade de problemas encontrados na engenharia, sejam lineares ou não lineares.

Problemas não lineares abrangem várias áreas da engenharia, tais como: elasto-plasticidade, visco-plasticidade, transferência de calor, escoamento de fluidos, etc. No presente trabalho serão analisados os casos de Estado Plano de Tensão, Estado Plano de Deformação e Sólido Axissimétrico em regime elasto-plástico bidimensional. São utilizados elementos serendipity elasto-plásticos de 4, 8 e 9 nós.

Vários sistemas estruturais são formados por um conjunto de meios que interagem entre si através das interfaces (ou descontinuidades) como por exemplo: fraturas em maciços rochosos, a interface entre uma estaca e o solo, etc. Para resolver este problema estão sendo realizados diversos estudos teóricos e empíricos em vários centros de pesquisas. Neste trabalho é analisado o elemento de interface serendipity de 4 e 6 nós.

geomecânicos, fundações, escoamentos de fluidos, etc. A solução usual na prática é truncar a região analisada e adotar uma condição de contorno apropriada. Entretanto a localização do contorno é fundamental para a precisão dos resultados na região de interesse, sendo esta escolha efetuada de acordo com a experiência do problema específico analisado. Para tratar este problema foi desenvolvido um elemento infinito com o qual evita-se o truncamento da região analisada. Tal como o elemento de interface, existem vários tipos de elementos infinitos, cuja performance e aplicabilidade têm se desenvolvido continuamente. Neste trabalho são utilizados elementos infinitos de 4 e 5 nós.

Outros métodos também são utilizados na análise de meios infinitos e semi-infinitos, tais como o método dos elementos de contorno e método dos deslocamentos descontínuos que são particularmente indicados para discretização de domínios infinitos. Entretanto, no caso de meios com grande heterogeneidade e anisotropia, e quando é necessário a análise não linear física, esses métodos ainda estão restritivos.

O objetivo deste trabalho é reunir estes 3 tipos de elementos, em um programa computacional, para analisar problemas práticos de engenharia comparando com soluções analíticas e empíricas.

Apresenta-se suscintamente a Formulação do Método dos Elementos Finitos e de Conceitos Básicos da Teoria da Plasticidade, uma vez que estes assuntos são facilmente encontrados com detalhe na literatura técnica.

Alguns resultados de aplicação são apresentados para avaliar o desempenho da modelação empregada.

II. CONCEITOS BÁSICOS DE ELASTO-PLASTICIDADE

II.1 - Introdução

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos da Teoria da Plasticidade, com sua formulação matricial para implementação computacional.

Descreve-se quatro critérios de escoamento: TRESCA e VON MISES, utilizados para metais; MOHR-COULOMB e DRUCKER PRAGER utilizados para concreto, rochas e solos.

II.2 - Teoria Matemática da Plasticidade

O objetivo da teoria matemática da plasticidade é obter uma descrição teórica da relação entre tensões e deformações, para um material que tenha comportamento elasto-plástico. Em suma, o comportamento plástico é caracterizado por uma deformação irreversível que não depende do tempo e somente pode ser sustentada após um certo nível de tensões. Maiores detalhes desta teoria é encontrada nas Refs. 1-3. Para formulação do modelo Elasto-Plástico deve-se observar 3 pontos:

- Uma relação explícita entre tensões e deformações na fase elástica.

- Um critério de escoamento indicando o nível de tensões onde começa o comportamento plástico.

. Uma relação entre tensões e deformações após o escoamento, ou seja, a deformação possui uma componente elástica e outra plástica.

$$\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \tag{II.1}$$

onde σ_{ij} e $\varepsilon_{k\ell}$ são os componentes das tensões e deformações e $\underset{\sim}{C}_{ijk\ell}$ é o tensor de constantes elásticas que para um material isotrópico tem a forma.

$$C_{ijk\ell} = \lambda\ \delta_{ij}\delta_{k\ell} + \mu\ \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \mu\ \delta_{i\ell}\delta_{jk}\ , \tag{II.2}$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé e δ_{ij} o delta de Kronecker, definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i=j \\ 0 & \text{se} \quad i\neq j \end{cases} \tag{II.3}$$

II.2.1 - Critérios de Escoamento

O critério de escoamento determina o nível de tensões, onde começa a deformação plástica, e de uma maneira geral é escrita por:

$$f(\sigma_{ij}) = K(k) \tag{II.4}$$

onde f é alguma função e K um parâmetro do material a ser determinado experimentalmente, podendo ser função de um parâmetro de endurecimento k. O critério de escoamento é independente da ori entação do sistema de coordenadas empregado, por isso deve ser função apenas dos três invariantes de tensões:

$$J_1 = \sigma_{ii}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} \qquad \text{(II.5)}$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}.$$

Observações experimentais (Bridgman[4]) indicaram que a deformação plástica de metais é essencialmente independente da pressão hidrostática, assim a função de escoamento assume a forma:

$$f(J'_2, J'_3) = K(k) \qquad \text{(II.6)}$$

onde J'_2 e J'_3 são o segundo e terceiro invariantes das tensões desviatórias:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\sigma_{kk} \qquad \text{(II.7)}$$

Critério de Escoamento de TRESCA (1864)

TRESCA estabeleceu que o escoamento inicia quando a tensão máxima de cisalhamento atinge um certo valor. Sendo σ_1, σ_2, σ_3 as tensões principais onde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ então o escoamento inicia quando :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y(k) \qquad \text{(II.8)}$$

onde Y é o parâmetro do material a ser determinado experimentalmente e o qual pode ser função do parâmetro de endurecimento k. Considerando as outras possíveis tensões de cisalhamento máximas (ex.: $\sigma_2 - \sigma_1$, se $\sigma_2 \geqslant \sigma_3 \geqslant \sigma_1$), é mostrado que este critério pode ser representado no espaço de tensões σ_1 σ_2 σ_3 pela superfície de um cilindro hexagonal regular infinitamente longo como na figura II.1. O eixo do cilindro coincide com o espaço diagonal definido pelos pontos $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, logo qualquer seção normal ao cilindro é igual, isto é consequência de assumirmos que a pressão hidrostática não influencia no escoamento. É conveniente representar a superfície de escoamento geometricamente projetando-a no plano π definido por $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, como mostrado na figura II.2.a.

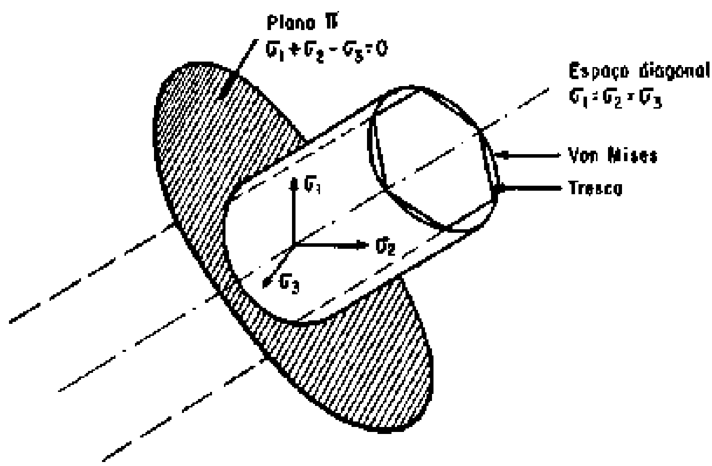


Fig. II.1 - Representação Geométrica das Superfícies de Escoamento de Tresca e Von Mises no Espaço das Tensões Principais.

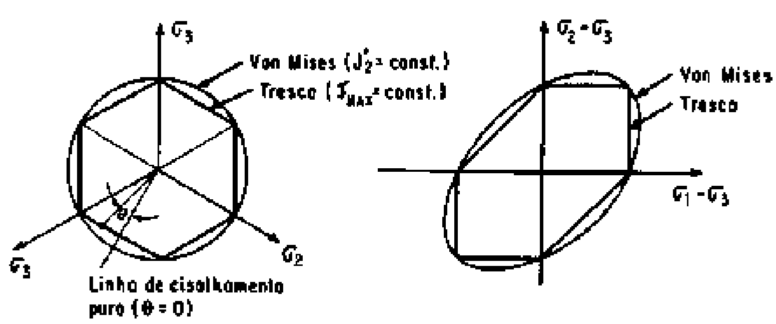


Fig. II.2 - Representação bi-dimensional dos critérios de escoamento de Tresca e Von Mises. (a) representação no plano π. (b) representação convencional na engenharia

Quando a função de escoamento depende somente de J'_2 e J'_3 ela pode ser escrita na forma $f(\sigma_1-\sigma_3,\ \sigma_2-\sigma_3)$ e a projeção a duas dimensões da superfície $f=K$ é representada como na figura II.2(b). Pode-se mostrar genericamente[1,2] que as superfícies de escoamento são convexas e devem conter a origem das tensões.

Critério de Escoamento de Von Mises (1913)

Von Mises sugeriu que o escoamento ocorre quando J'_2 atinge um valor crítico ou seja

$$(J'_2)^{1/2} = K(k) \tag{II.9}$$

onde K é o parâmetro do material a ser determinado. Escrevendo o segundo invariante de tensões na forma:

$$\underset{\sim}{J}'_2 = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}'\,\sigma_{ij}' = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2-(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sigma_x'^2+\sigma_y'^2+\sigma_z'^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \tag{II.10}$$

Escrevendo o critério de escoamento (II.9) como:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{3}\,(J'_2)^{1/2} = \sqrt{3}\,K \tag{II.11}$$

onde

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3/2}\ \{ \sigma_{ij}'\ \sigma_{ij}' \}^{1/2} \qquad \text{(II.12)}$$

e $\bar{\sigma}$ é denominada de tensão efetiva, tensão generalizada ou tensão equivalente. Há duas interpretações físicas para o critério de Von Mises. Nadai (1937) introduziu a tensão cisalhamento octaédrica, a qual é a tensão cisalhante nos planos de um octaedro regular, cujos vértices coincidem com os eixos principais de tensões. O valor de τ_{oct} é dado por:

$$\tau_{oct} = \sqrt{(2\ J_2'/3)} \qquad \text{(II.13)}$$

Logo o início do escoamento é interpretado quando τ_{oct} atinge um valor crítico. Hencky (1924) estabeleceu que por Von Mises, o escoamento começa quando a energia elástica de distorção atinge um valor crítico.

A figura II.1 mostra a interpretação geométrica da superfície de escoamento de Von Mises sendo um cilindro circular cuja projeção no plano π é um círculo de raio $\sqrt{2}\,K$ como mostrado na figura II.2(a). A projeção em 2 dimensões da superfície de escoamento de Von Mises é a elipse mostrada na figura II.2(b). Um significado físico da constante K pode ser obtido considerando o escoamento de materiais sobre estado simples de tensão. No caso de cisalhamento puro ($\sigma_1 = -\sigma_2$, $\sigma_3 = 0$) através de (II.9) e (II.10) temos que K é igual a tensão cisalhante de escoamento. Alternativamente para o caso de tensão uniaxial ($\sigma_2=\sigma_3=0$), $\sqrt{3}\,K$ é a tensão uniaxial de escoamento.

A superfície de escoamento de TRESCA é um hexágono com distância de $\sqrt{2/3}\,Y$ da origem ao vértice no plano π, enquanto a superfície de escoamento de Von Mises é um círculo de raio $\sqrt{2}\,K$ Fazendo uma escolha adequada da constante Y, o critério pode ser feito de acordo com um ou outro, e com experimentos para um estado, simples de tensões. Esta escolha é feita arbitrariamente, é convencional fazer o círculo passar pelos vértices do hexágono tomando a constante $Y = \sqrt{3}\,K$, a tensão de escoamento em estado simples. O critério é diferente para o estado de cisalhamento puro, onde o critério de Von Mises fornece uma tensão de escoamento $2/\sqrt{3}$ ($\sim$/1.15) vezes a dada pelo critério de Tresca. Para a maioria dos metais Von Mises se aproxima mais dos resultados experimentais do que Tresca, mas o critério de Tresca é mais simples para aplicações teóricas.

Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb

Coulomb (1773) estabeleceu que as tensões cisalhantes atuantes em uma massa isotrópica não devem ser maiores que a tensão cisalhante máxima. Esta condição é expressa por :

$$\tau = c - \sigma_n \tan\phi \qquad \text{(II.14)}$$

onde

τ - módulo da tensão cisalhante

c - coesão

ϕ - ângulo de atrito interno

σ_n - tensão normal (tração $\rightarrow$ +)

Graficamente (II.14) é representado por uma tangente ao maior círculo de tensões principais, como mostrado na figura II.3, e foi primeiramente demonstrado por Mohr (1882).

Da figura II.3, e para $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, reescrevendo (II.14) como:

$$-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\cos\phi = c - \left\{\frac{(\sigma_1+\sigma_3)}{2} - \frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{2}\operatorname{sen}\phi\right\}\tan\phi, \qquad \text{(II.15)}$$

ou

$$(\sigma_1-\sigma_3) = 2c\cos\phi - (\sigma_1+\sigma_3)\operatorname{sen}\phi \qquad \text{(II.16)}$$

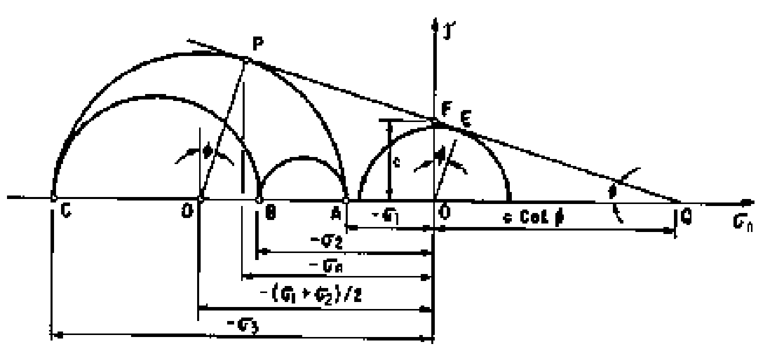


Fig. II.3 - Representação do Círculo de Mohr para o Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb.

Como para o critério de Tresca, a superfície completa de escoamento é obtida considerando todas as outras combinações de tensões que podem causar escoamento (ex.: $\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$). No espaço das tensões principais obtêm-se uma superfície de escoamento cônica, cuja seção normal num ponto é um hexágono irregular como mostrado na figura II.4.

Um cone e não um cilindro, na forma da superfície de escoamento, é consequência do fato das tensões hidrostáticas influenciarem o escoamento, como pode ser visto no último termo de (II.14). Quando $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$, de (II.16) obtem-se a tensão hidrostática média, $\sigma_n = c \cot\phi$ e por isso o eixo da pirâmide hexagonal, 0, na figura II.4, está ao longo da diagonal espacial no ponto $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=c \cot\phi$. Este critério é aplicado em problemas de concreto, rochas e solos.

Critério de Escoamento de Drucker-Prager (1952)

Uma aproximação do critério de Mohr-Coulomb foi apresentada por Drucker e Prager, como uma modificação no critério de escoamento de Von Mises.

A influência da componente de tensão hidrostática no escoamento, foi introduzida adicionando um termo na expressão de Von Mises obtendo:

$$\alpha J_1 + J_2'^{1/2} = K' \qquad \text{(II.17)}$$

A superfície de escoamento tem a forma de um cone circular. Fazendo o círculo de Drucker-Prager coincidir com o exterior dos vértices do hexágono de Mohr-Coulomb numa seção qualquer, mostra-se que:

$$\alpha = \frac{2\ \mathrm{sen}\phi}{\sqrt{3}\,(3-\mathrm{sen}\phi)} \quad , \quad K' = \frac{6c\ \cos\phi}{\sqrt{3}\,(3-\mathrm{sen}\phi)} \qquad \text{(II.18)}$$

Coincidindo com o interior dos vértices do hexágono, é possível deduzir que:

$$\alpha = \frac{2\ \mathrm{sen}\phi}{\sqrt{3}\,(3+\mathrm{sen}\phi)} \quad , \quad K' = \frac{6c\ \cos\phi}{\sqrt{3}\,(3+\mathrm{sen}\phi)} \qquad \text{(II.19)}$$

Entretanto, a aproximação dada pelo cone interior ou exterior, nos casos de superfície de ruptura, pode não ser precisa para certas combinações de tensões.

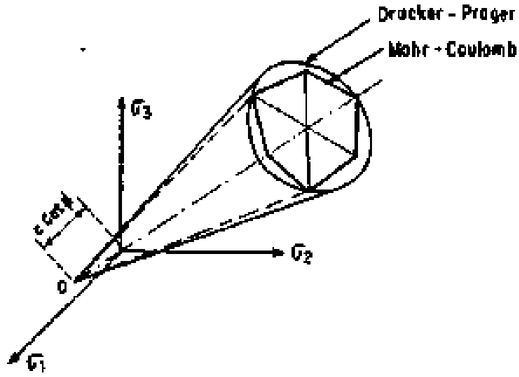


Fig. II.4(a) - Representação Geométrica das Superfícies de Escoamento de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no Espaço das Tensões Principais.

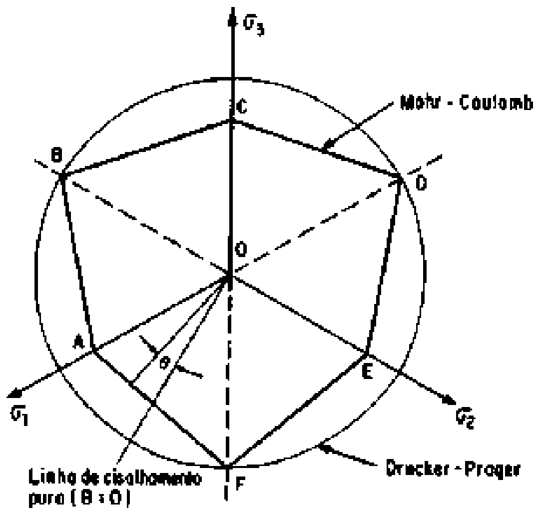


Fig. II.4(b) - Representação bi-dimensional, Plano π, dos Critérios de Escoamento de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

II.2.2 - Trabalho ou Deformação com Endurecimento ("Work or Strain Hardening")

Após o início do escoamento, o nível de tensões no qual ocorre deformações plásticas, pode ser dependente do grau de deformações plásticas corrente. Por isso a superfície de escoamento irá variar em cada estágio de deformação plástica, com a subsequente superfície de escoamento, sendo dependente da deformação plástica de alguma maneira. Alguns modelos alternativos que descrevem a deformação de endurecimento em um material são ilustrados na figura II.5. O material plástico perfeito é mostrado na figura II.5(a), onde o nível de tensões de escoamento não depende do grau de plastificação.

Se as subsequentes superfícies de escoamento, são uma expansão uniforme da curva de escoamento original, sem translação, como mostrado na figura II.5(b), o modelo de deformação de endurecimento é chamado isotrópico. Se as subsequentes superfícies de escoamento conservam sua forma e orientação, mas transladam no espaço de tensões como um corpo rígido, como mostrado na figura II.5(c), neste caso temos o endurecimento cinemático.

Para alguns materiais, como o solo, a superfície de escoamento pode não ser "strain harden" mas sim "strain soften ", de modo que o nível das tensões de escoamento em um ponto diminui com o aumento da deformação plástica. Por isso, para um modelo isotrópico, a curva original de escoamento contrai progressivamente sem translação. Consequentemente o escoamento implica em ruptura local, e a superfície de escoamento torna-se um critério de ruptura.

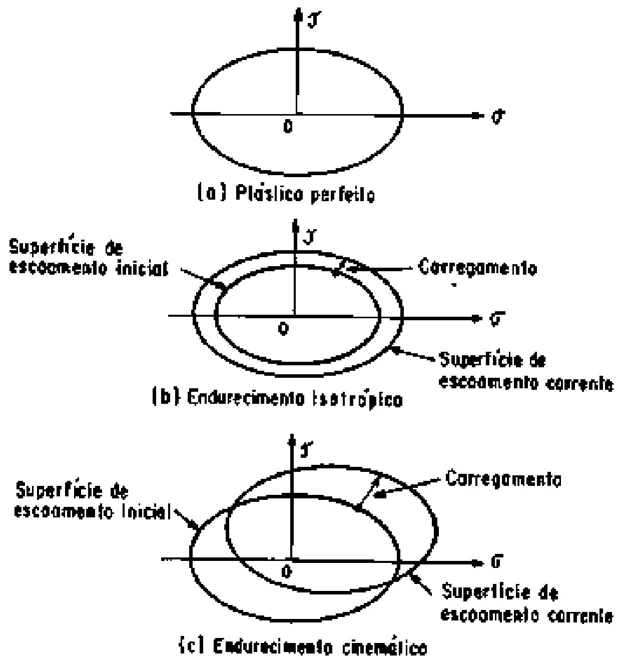


Fig. II.5 - Modelos Matemáticos para Representação do Comportamento com Endurecimento.

O progressivo desenvolvimento da superfície de escoamento, pode ser definido relacionando a tensão de escoamento K com a deformação plástica, usando o parâmetro de endurecimento k. Isto pode ser feito de 2 maneiras: Primeiramente, o grau do trabalho com endurecimento ("work hardening") é postulado como sendo função do trabalho plástico total W_p, assim:

$$k = W_p \tag{II.20}$$

onde :

$$W_p = \int \sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij})_p \,, \qquad \text{(II.21)}$$

sendo $d(\varepsilon_{ij})_p$, as componentes de deformação plástica, que ocorrem durante um incremento de deformação. Alternativamente k pode ser visto como uma medida da deformação plástica total denominada de: efetiva, generalizada ou deformação plástica equivalente, a qual é definida incrementalmente como:

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{2/3}\,\{(d\varepsilon_{ij})_p\,(d\varepsilon_{ij})_p\}^{1/2} \qquad \text{(II.22)}$$

Uma análise física desta definição, será vista na seção II.2.4, onde o escoamento uniaxial será considerado. Para situações onde é considerado que o escoamento é independente das tensões hidrostáticas, tem-se que $(d\varepsilon_{ii})_p = 0$, logo $(d\varepsilon_{ij}')_p$ = $(d\varepsilon_{ij})_p$, logo reescrevendo (II.22):

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{2/3}\,\{(d\varepsilon_{ij}')_p\,(d\varepsilon_{ij}')_p\}^{1/2} \qquad \text{(II.23)}$$

Então o parâmetro de endurecimento k é definido como:

$$k = \bar{\varepsilon}_p \qquad \text{(II.24)}$$

onde :

$\bar{\varepsilon}_p$ é resultado da integração de $d\bar{\varepsilon}_p$, sobre o campo de deformação. Este comportamento é denominado de deformação com endurecimento ("strain hardening"). Somente modelos com endurecimento isotrópico serão considerados neste trabalho.

Um estado de tensão para o qual f=K, representa um estado plástico, enquanto que o comportamento elástico é caracterizado por f < K. No estado plástico, um incremento na função de escoamento devido um incremento de tensões é dado por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \, d\sigma_{ij} \tag{II.25}$$

Então se:

$df < 0 \rightarrow$ ocorre descarregamento elástico e o ponto de tensão retorna para dentro da superfície de escoamento.

$df = 0 \rightarrow$ ocorre um carregamento neutro (comportamento plástico para um material perfeitamente plástico) e o ponto de tensão permanece na superfície de escoamento.

$df > 0 \rightarrow$ ocorre carregamento plástico (comportamento plástico para material com endurecimento) e o ponto de tensão permanece na superfície de escoamento expandida.

Pode-se provar[1-3] que, para um material estável, as superfícies de escoamento inicial e as subsequentes são convexas.

II.2.3 - Relação Elasto-plástica entre Tensões e Deformações.

Após o início do escoamento, o comportamento do material será parcialmente elástico e parcialmente plástico. Durante um incremento de tensões, assume-se que o incremento de deformações é devido a duas componentes:

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \tag{II.26}$$

O incremento elástico de deformação, é relacionado com o incremento de tensões por (II.1). Decompondo as tensões em suas componentes desviatórias e hidrostáticas:

$$(d\varepsilon_{ij})_e = \frac{d\sigma_{ij}'}{2\mu} + \frac{(1 - 2\nu)}{E}\,\delta_{ij}d\sigma_{kk}\ , \tag{II.27}$$

onde E e ν, são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson respectivamente.

Para obter a relação entre a componente de deformação plástica e o incremento de tensões, mais uma consideração no comportamento do material deve ser feita. Em particular considera-se que o incremento de deformação plástica é proporcional ao gradiente de tensões de uma quantidade denominada de potencial plástico Q, de modo que:

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda\,\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}} \tag{II.28}$$

onde $d\lambda$ é a constante de proporcionalidade denominada de multiplicador plástico. A base teórica desta consideração é desenvolvida na Ref. 1. A equação (II.28) é denominada de regra de fluxo, uma vez que governa o fluxo plástico após o escoamento.

O potencial Q deve ser função de J_2' e J_3', mas ainda não pode ser determinado em sua forma geral. Entretanto, a relação $f \equiv Q$ tem um significado especial na teoria matemática da plasticidade, uma vez que certos princípios variacionais e teoremas podem ser formulados. A identidade $f \equiv Q$ só é válida se tivermos assumido que ambos são função de J_2' e J_3'. Logo (II.28) fica:

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \; \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{II.29}$$

e é denominada de condição de normalidade, uma vez que $\partial f/\partial\sigma_{ij}$ é um vetor de direção normal à superfície de escoamento no ponto de tensão em consideração, como mostrado na figura II.6. Observa-se que os componentes do incremento da deformação plástica, combinam-se vetorialmente num espaço n-dimensional, para formar um vetor normal à superfície de escoamento.

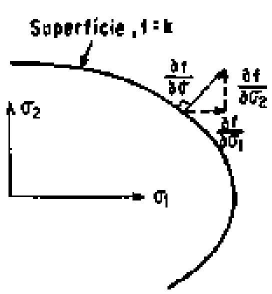


Fig. II.6 - Representação Geométrica da Regra de Normalização Associada a Plasticidade.

Para o caso particular de $f=J'_2$, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J'_2}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{ij}' \tag{II.30}$$

Logo (II.29) torna-se:

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \sigma_{ij}' \tag{II.31}$$

sendo conhecida como as equações de Prandtl-Reuss[1]. Observações experimentais mostram que a condição de normalidade é aceitável para metais, mas para rochas e solo ainda está aberta para debate[6].

Usando (II.26), (II.27) e (II.29) pode-se concluir que a relação incremental completa entre tensões e deformações para comportamento elasto-plástico é dada por:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}'}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{II.32}$$

II.2.4 - Teste Uniaxial de Escoamento para um Material com Endurecimento

Considera-se o teste uniaxial de um material elasto-plástico, obtendo o gráfico tensão x deformação mostrado na figura II.7. O comportamento é inicialmente elástico, caracterizado pelo módulo elástico E, até o início do escoamento determinado pela tensão uniaxial de escoamento σ_y. A partir deste ponto o comportamento do material é elasto-plástico com a tangente à curva variando continuamente e caracterizada pelo módulo tangente elasto-plástico E_T. A lei de endurecimento $K=K(k)$, pode ser expressa em termos das tensões efetivas, $\bar{\sigma}$ (sendo estas proporcionais a J'_2) fornecendo pela hipótese do endurecimento da deformação (II.24).

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon}_p) \qquad \text{(II.33)}$$

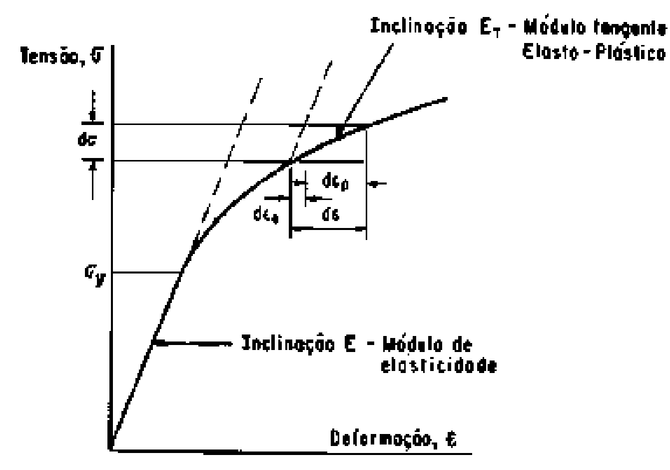


Fig. II.7 - Comportamento elasto-plástico com endurecimento para o caso uniaxial.

ou diferenciando:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d(\bar{\varepsilon}_p)} = H'(\bar{\varepsilon}_p) \qquad \text{(II.34)}$$

Para o caso uniaxial tem-se $\sigma_1=\sigma, \sigma_2=\sigma_3=0$, e de (II.12).

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3/2}\,\{\sigma_{ij}\,\sigma_{ij}\}^{1/2} = \sigma \tag{II.35}$$

Se o incremento da deformação plástica na direção do carregamento é $d\varepsilon_p$, então $(d\varepsilon_1)_p = d\varepsilon_p$ e desde que a deformação plástica é assumida incompressível, o coeficiente de Poisson será 0,5 e $(d\varepsilon_2)_p = -\frac{1}{2}\,d\varepsilon_p$ e $(d\varepsilon_3)_p = -\frac{1}{2}\,d\varepsilon_p$. Então de (II.23) a deformação plástica efetiva, torna-se:

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{2/3}\,\{(\varepsilon_{ij}')_p\,(\varepsilon_{ij}')_p\}^{1/2} = d\varepsilon_p \tag{II.36}$$

As expressões (II.35) e (II.36) mostram a aparência das constantes arbitrárias empregadas na definição de $\bar{\sigma}$ e $\bar{\varepsilon}_p$, uma vez que, estes termos são requeridos para tornar-se as tensões e deformações reais no escoamento uniaxial. Usando (II.35) e (II.36) então (II.34) torna-se :

$$H'(\bar{\varepsilon}_p) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon_e} = \frac{1}{\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma} - \dfrac{d\varepsilon_e}{d\sigma}}$$

$$H' = \frac{E_T}{1 - \dfrac{E_T}{E}} \tag{II.37}$$

Logo, a função de endurecimento H' pode ser determinada experimentalmente por um simples teste uniaxial. (Para computação numérica, será mostrado na próxima seção que H' e não H é necessário).

II.3 - Formulação Matricial

As expressões teóricas desenvolvidas na seção anterior, serão agora transformadas para forma matricial[7,8], a qual é adequada para implementação computacional. Reescrevendo a função de escoamento (II.4) como:

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = K(k) \tag{II.38}$$

onde $\underset{\sim}{\sigma}$ é o vetor de tensões e k o parâmetro de endurecimento ("hardening"), o qual controla a expansão da superfície de escoamento. Em particular de (II.20), (II.21), $dk = \underset{\sim}{\sigma}^T d\underset{\sim}{\varepsilon}_p$ pela hipótese do trabalho com endurecimento; e de (II.24) $dk = d\underset{\sim}{\varepsilon}_p$ pela hipótese da deformação com endurecimento. Rearranjando (II.38), obtém-se:

$$F(\underset{\sim}{\sigma},k) = f(\underset{\sim}{\sigma}) - K(k) = 0 \tag{II.39}$$

Diferenciando (II.39):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \, d\underset{\sim}{\sigma} - \frac{\partial F}{\partial k} \, dk = 0 \tag{II.40}$$

ou

$$\underset{\sim}{a}^T d\underset{\sim}{\sigma} + A d\lambda = 0 \tag{II.41}$$

onde $\underset{\sim}{a}$ é denominado <u>vetor de fluxo</u>, dado por:

$$\underset{\sim}{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} , \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} , \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} , \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} , \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}} , \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right] \qquad (II.42)$$

e

$$A = \frac{-1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk \qquad (II.43)$$

Reescrevendo a expressão (II.32) como:

$$d\underset{\sim}{\varepsilon} = \left[\underset{\sim}{D} \right]^{-1} d\underset{\sim}{\sigma} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad (II.44)$$

onde $\underset{\sim}{D}$ é a matriz das constantes elásticas. Pré - multiplicando ambos os lados de (II.44) por $\underset{\sim}{d}_D^{\,T} = \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{D}$ e eliminando $\underset{\sim}{a}^T d\underset{\sim}{\sigma}$ de (II.41) obtém-se o multiplicador plástico $d\lambda$.

$$d\lambda = \frac{\underset{\sim}{d}_D^{\,T}}{A + \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{a}} d\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (II.45)$$

Substituindo (II.45) em (II.44), encontra-se o incremento completo elasto-plástico, na relação tensão-deformação.

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}_{ep} \, d\underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (II.46)$$

$$\text{onde } \underset{\sim}{D}_{ep} = \underset{\sim}{D} - \frac{\underset{\sim}{d}_D \, \underset{\sim}{d}_D^{\,T}}{A + \underset{\sim}{d}_D^{\,T} \underset{\sim}{a}} \quad ; \quad \underset{\sim}{d}_D = \underset{\sim}{D} \, \underset{\sim}{a} \qquad (II.47)$$

Resta determinar a expressão do termo escalar, A. Sendo a hipótese do trabalho com endurecimento mais geral, esta será empregada no desenvolvimento numérico deste trabalho. Temos que:

$$dk = \underset{\sim}{\sigma}^T \, d\underset{\sim}{\varepsilon}_p \tag{II.48}$$

Reescrevendo a equação (II.39) na forma:

$$F(\underset{\sim}{\sigma}, k) = f(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_y(k) = 0 \tag{II.49}$$

desde que a tensão uniaxial de escoamento seja $\sigma_y = \sqrt{3}\, k$. De (II.43):

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk = \frac{1}{d\lambda} \frac{d\sigma_y}{dk} dk \tag{II.50}$$

Empregando a condição de normalidade para encontrar $d\underset{\sim}{\varepsilon}_p$:

$$dk = \underset{\sim}{\sigma}^T \, d\underset{\sim}{\varepsilon}_p = \underset{\sim}{\sigma}^T d\lambda \underset{\sim}{a} = d\lambda \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{\sigma} \tag{II.51}$$

Para o caso uniaxial: $\underset{\sim}{\sigma} = \bar{\sigma} = \sigma_y$ e $d\underset{\sim}{\varepsilon}_p = d\bar{\underset{\sim}{\varepsilon}}_p$ onde $\bar{\sigma}$ e $d\bar{\varepsilon}_p$ são respectivamente a tensão e a deformação efetiva. Logo (II.51) torna-se:

$$dk = \sigma_y \, d\bar{\varepsilon}_p = d\lambda \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{\sigma} \tag{II.52}$$

De (II.34) tem-se:

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon}_p)$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = H'(\bar{\varepsilon}_p) = \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}_p} \qquad \text{(II.53)}$$

Usando o teorema de Euler aplicado a funções homogêneas de 1ª ordem $\left[(\partial f/\partial x)\cdot x = f \right]$; de (II.49), obtêm-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \underset{\sim}{\sigma} = \sigma_y \qquad \text{(II.54)}$$

onde (II.37):

$$\underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{\sigma} = \sigma_y \qquad \text{(II.55)}$$

Substituindo (II.53), (II.55) em (II.52) e (II.50):

$$d\lambda = d\bar{\varepsilon}_p$$

$$A = H' \qquad \text{(II.56)}$$

Logo A é obtido pela inclinação da curva tensão uniaxial/deformação plástica e pode ser determinado experimentalmente de (II.37).

II.4 - Manipulação dos Critérios de Escoamento para Implementação Numérica

Para implementação numérica, é conveniente reescrever as funções de escoamento em termos dos invariantes de tensões. Esta formulação é devido a Nayak[5] e sua principal vantagem é permitir codificar as funções de escoamento e as leis de fluxo utilizando apenas 3 constantes para cada critério.

As tensões desviatórias principais σ'_1 σ'_2 e σ'_3 são dadas pelas raizes da seguinte equação cúbica[11].

$$t^3 - J'_2 t - J'_3 = 0 \qquad \text{(II.57)}$$

Observando a seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{sen}^3\theta - \frac{3}{4}\,\text{sen}\theta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,3\theta = 0 \qquad \text{(II.58)}$$

substituindo t=r senθ em (II.57) tem-se:

$$\text{sen}^3\theta - \frac{J'_2}{r^2}\,\text{sen}\,\theta - \frac{J'_3}{r^3} = 0 \qquad \text{(II.59)}$$

Comparando (II.58) e (II.59)

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}}\,(J'_2)^{1/2} \qquad \text{(II.60)}$$

$$\text{sen}\,3\theta = \frac{4\,J'_3}{r^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\;\frac{J'_3}{(J'_2)^{3/2}} \qquad \text{(II.61)}$$

A primeira raiz de (II.61), com θ determinado por 3θ variando em $\pm\frac{\pi}{2}$ é uma conveniente alternativa para o terceiro invariante J'_3. Observando o período natural de sen$(3\theta+2n\pi)$ tem-se imediatamente os três (e somente três) possíveis valores de senθ os quais definem as três tensões principais. As tensões desviatórias principais são dadas por $t=r$ senθ, substituindo os três valores de senθ em questão. Substituindo r de (II.60) e somando os componentes das tensões hidrostáticas médias obtém-se as tensões principais totais.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2(J'_2)^{1/2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \text{sen } (\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen } \theta \\ \text{sen } (\theta + \frac{4\pi}{3}) \end{Bmatrix} + \frac{J_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.62)}$$

com $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ e $-\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$. O termo θ é semelhante ao parâmetro de Lode Γ definido por $\Gamma = -\sqrt{3}\,\text{tang}\theta$. Os quatro critérios de escoamento, considerados na seção II.2.1, podem agora ser reescritos em termos de J_1, J'_2 e θ como se segue.

a) <u>Critério de Escoamento de Tresca</u>

Substituindo σ_1 e σ_3 de (II.62) em (II.8) tem-se:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} (J'_2)^{1/2} \left[\text{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) - \text{sen}(\theta + \frac{4\pi}{3}) \right] = Y(k)$$

expandindo:

$$2(J_2')\cos\theta = Y(k) = \sqrt{3}\,K(k) = \sigma_y(k) \qquad \text{(II.63)}$$

A interpretação física de θ é vista na Fig. II.2.

b) <u>Critério de Escoamento de Von Mises</u>

Neste caso não há modificação visto que a função de escoamento só depende de J_2'; de (II.9).

$$(J_2')^{1/2} = K(k)$$

ou

$$\sqrt{3}\,(J_2')^{1/2} = \sigma_y(k) \qquad \text{(II.64)}$$

c) <u>Critério de Escoamento de Mohr-Coulomb</u>

Substituindo σ_1 e σ_3 de (II.62) em (II.16) resulta:

$$\frac{1}{3} J_1 \operatorname{sen}\phi - (J_2')^{1/2} \left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\right) = c \cos\phi \qquad \text{(II.65)}$$

d) <u>Critério de Escoamento de Drucker-Prager</u>

Não há modificação para este critério, diretamente de (II.17):

$$\alpha J_1 + (J_2')^{1/2} = K' \qquad \text{(II.66)}$$

onde α e k' são definidos em (II.18) ou (II.19).

Para calcular a matriz $\underset{\sim}{D}_{ep}$ de (II.47) precisa-se expressar o vetor de fluxo $\underset{\sim}{a}$ em forma adequada para implementação numérica. Escrevendo $\underset{\sim}{a}^T$ como:

$$\underset{\sim}{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial (J_2')^{1/2}} \frac{\partial (J_2')^{1/2}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \tag{II.67}$$

onde

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}$$

Diferenciando (II.61) tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{-\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \left[\frac{1}{(J_2')^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} - \frac{3\,J_3}{(J_2')^2} \frac{\partial (J_2')^{1/2}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \right] \tag{II.68}$$

Substituindo (II.68) em (II.67) e usando (II.61), obtêm-se:

$$\underset{\sim}{a} = C_1 \underset{\sim}{a}_1 + C_2 \underset{\sim}{a}_2 + C_3 \underset{\sim}{a}_3 \tag{II.69}$$

onde:

$$\underset{\sim}{a}_1^T = \frac{\partial J_1}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \{ 1, 1, 1, 0, 0, 0\}$$

$$\underset{\sim}{a}_2^T = \frac{\partial (J_2')^{1/2}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{1}{2(J_2')^{1/2}} \{\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z', 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy}\}$$

$$\underset{\sim}{a}_3^T = \frac{\partial J_3'}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \Bigg\{ (\sigma_y'\sigma_z' - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2'}{3}),\ (\sigma_x'\sigma_z' - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2'}{3}),$$

$$(\sigma_x'\sigma_y' - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2'}{3}),\ 2(\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x'\tau_{yz}),$$

$$2(\tau_{xy}\tau_{yz} - \sigma_y'\tau_{xz}),\ 2(\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_z'\tau_{xy}) \Bigg\} \qquad \text{(II.70)}$$

e

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial J_1},\ C_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial (J_2')^{1/2}} - \frac{\tan 3\theta}{(J_2')^{1/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right),$$

$$C_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \frac{1}{(J_2')^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \qquad \text{(II.71)}$$

Somente as constantes C_1, C_2 e C_3 são necessárias para definir a superfície de escoamento. As constantes C_i são dados na tabela II.1, para os quatro critérios de escoamento considerados na seção II.2.1.

Tabela II.1 - Constantes que definem a superfície de escoamento de forma adequada para análise numérica.

CRITÉRIO DE ESCOAMENTO	C_1	C_2	C_3
Tresca	0	$2\cos\theta\,(1+\tan\theta\tan 3\theta)$	$\dfrac{\sqrt{3}}{J'_2}\,\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos 3\theta}$
Von Mises	0	$\sqrt{3}$	0
Mohr-Coulomb	$\dfrac{1}{3}\,\text{sen}\phi$	$\cos\theta\left[(1+\tan\theta\tan 3\theta) + \text{sen}\phi\,(\tan 3\theta-\tan\theta)/\,/\sqrt{3}\right]$	$\dfrac{\sqrt{3}\,\text{sen}\theta+\cos\theta\,\text{sen}\phi}{2J'_2\cos 3\theta}$
Drucker Prager	α	1,0	0

O resumo das funções de tensões, utilizadas para indicar o início ou a continuação de deformações plásticas, para os quatro critérios considerados são dados na tabela II.2

Tabela II.2 - Tensões Efetivas e Tensões Equivalentes de Escoamento.

EQUAÇÃO Nº	CRITÉRIO DE ESCOAMENTO	TENSÕES EFETIVAS	TENSÃO EQUIVALENTE DE ESCOAMENTO
(II.63)	Tresca	$2(J'_2)^{1/2}\cos\theta$	σ_Y
(II.64)	Von Mises	$\sqrt{3}\,(J'_2)^{1/2}$	σ_Y
(II.65)	Mohr-Coulomb	$\frac{1}{3} J_1 \operatorname{sen}\phi + (J'_2)^{1/2} *$ $* \left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\phi}{\sqrt{3}}\right)$	$C \cos\phi$
(II.66)	Drucker-Prager	$\alpha J_1 + (J'_2)^{1/2}$	k'

II.5 - Expressões Básicas para Problemas em Duas Dimensões

Nesta seção são apresentadas as adaptações na teoria desenvolvida na seção anterior, para problemas em duas dimensões.

Para os casos de estado plano de tensão, estado plano de deformação e sólido axissimétrico, existem apenas quatro componentes de tensões ou deformações, apresentados a seguir.

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = \{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy},\ \sigma_z\},\ \sigma_z = 0 \qquad \text{para Estado Plano de Tensão}$$

$$\{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy},\ \sigma_z\},\ \varepsilon_z = 0 \qquad \text{para Estado Plano de Deformação}$$

$$\{\sigma_r,\ \sigma_z,\ \tau_{rz},\ \sigma_\theta\} \qquad \text{para Sólido Axissimétrico}$$

(II.72)

Os sistemas de coordenados utilizados para os três casos são mostrados na figura II.8.

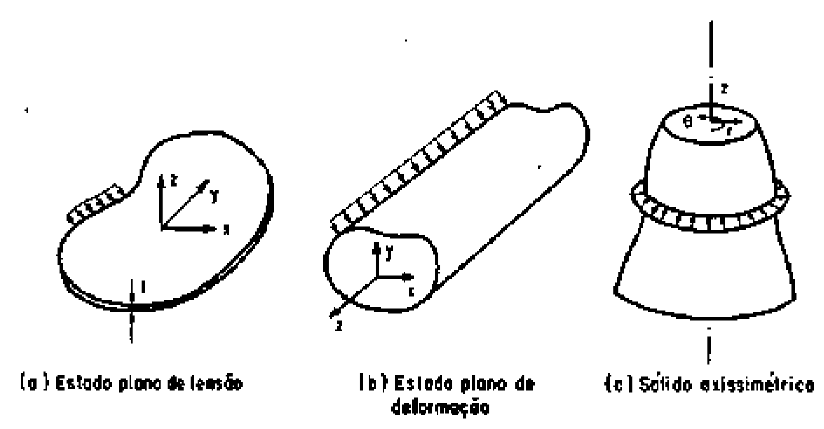


Figura II.8 - Aplicações bi-dimensionais mostrando os sistemas de coordenadas utilizados.

A matriz elástica $\underset{\sim}{D}$ é dada por:

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \hline \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Estado Plano de Deformação e Sólido Axissimétrico

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estado Plano de Tensão

(II.73)

O vetor de fluxo $\underset{\sim}{a}$ torna-se:

$$\underset{\sim}{a}^T = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} , \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} , \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} , \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right\} \qquad \text{(II.74)}$$

com x, y e z sendo substituídos por r, z e θ respectivamente para o caso de sólido axissimétrico. O vetor $\underset{\sim}{a}$ continua sendo dado por (II.69), mas neste caso (II.70) se transforma em:

$$\underset{\sim}{a}_1^T = \{ 1, 1, 0, 1 \}$$

$$\underset{\sim}{a}_2^T = \frac{1}{2(J'_2)^{1/2}} \{\sigma'_x, \sigma'_y, 2\tau_{xy}, \sigma'_z\}$$

$$\underset{\sim}{a}_3^T = \left\{\left(\sigma'_y\ \sigma'_z + \frac{J'_2}{3}\right), \left(\sigma'_x\ \sigma'_z + \frac{J'_2}{3}\right),\right.$$

$$\left. -2\ \sigma'_z\ \tau_{xy},\ \left(\sigma_x{}',\ \sigma_y{}' - \tau_{xy}{}^2 + \frac{J'_2}{3}\right)\right\} \qquad \text{(II.75)}$$

De (II.5), os invariantes das tensões desviatórias se transformam em:

$$J'_2 = \frac{1}{2} (\sigma_x{}'^2 + \sigma_y{}'^2 + \sigma_z{}'^2) + \tau_{xy}{}^2$$

$$J'_3 = \sigma_z{}' \ (\sigma_z{}'^2 - J'_2) \qquad \text{(II.76)}$$

Para obter a matriz elasto plástica $\underset{\sim}{D}_{ep}$ dada em (II.47), necessita-se do vetor $\underset{\sim}{d}_D$, que é facilmente obtido pelo produto $\underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{a}$. Para estado plano de deformação e sólido axissimétrico tem se:

$$\underset{\sim}{d}_D = \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ \\ d_2 \\ \\ d_3 \\ \\ d_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{E}{1+\nu} \cdot a_1 + M_1 \\ \\ \dfrac{E}{1+\nu} \cdot a_2 + M_1 \\ \\ G\, a_3 \\ \\ \dfrac{E}{1+\nu} \cdot a_4 + M_1 \end{array} \right\} , \quad M_1 = \frac{E\nu(a_1 + a_2 + a_4)}{(1+\nu)\ (1 - 2\nu)} \qquad \text{(II.77)}$$

onde $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de elasticidade transversal e a_1, a_2, a_3 e a_4 são as componentes do vetor $\underset{\sim}{a}$.

Para o estado plano de tensão tem-se:

$$\underset{\sim}{d}_D = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{E}{1+\nu} \cdot a_1 + M_2 \\ \\ \dfrac{E}{1+\nu} \cdot a_2 + M_2 \\ \\ G\, a_3 \\ \\ \dfrac{E}{1+\nu} \cdot a_4 + M_2 \end{array} \right\} , \quad M_2 = \frac{E\nu(a_1+a_2)}{1 - \nu^2} \qquad \text{(II.78)}$$

II.6 - PONTOS SINGULARES NAS SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTOS.

Para algumas superfícies de escoamento, o vetor $\underset{\sim}{a}$ não é univocamente definido para certas combinações de tensões. Por exemplo, isto ocorre para os cantos nos critérios de Tresca e Mohr-Coulomb onde $\theta = + 30^0$, e há indeterminação das direções de deformações plásticas. Koiter(12) estudou limites para os quais os incrementos de deformações plásticas deveriam ficar. Dificuldades numéricas serão encontradas quando θ se aproximar de $+ 30^0$ para os critérios de Tresca e Mohr-Coulomb como é visto na tabela II.1, C_2 e C_3 ficam indeterminados. Esta dificuldade é contornada, retornando às expressões originais (II.63) para Tresca e (II.65) para Mohr-Coulomb e reescrevendo estas expressões para valores explícitos de $\theta = \pm 30^0$.

Para Tresca tem-se:

$$\sqrt{3}(J'_2)^{1/2} = Y(k) = \sqrt{3}\, K(k) \tag{II.79}$$

e de (II.71) obtêm-se as 3 constantes $C_1=0$, $C_2=\sqrt{3}$, $C_3=0$ para $\theta = + 30^0$ (II.80)

Fisicamente, (II.79) é a expressão para o critério de Von Mises, ou seja as direções de deformações plásticas nos cantos do critério de Tresca são dados pelo círculo de Von Mises que também passam por estes cantos (veja figura II.2).

Analogamente para o critério de Mohr-Coulomb, de (II.65):

$$\frac{1}{3} J_1 \operatorname{sen}\phi + (J_2')^{1/2} \; \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{3}} \right] - C \cos\phi = 0 \quad \text{para } \theta = +30^0$$

$$\frac{1}{3} J_1 \operatorname{sen}\phi + (J_2')^{1/2} \; \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{3}} \right] - C \cos\phi = 0 \quad \text{para } \theta = -30^0$$

(II.81)

De (II.71):

$$C_1 = \frac{1}{3} \operatorname{sen}\phi \;, \; C_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{3}} \right], \; C_3 = 0 \quad \text{para } \theta = +30^0$$

(II.82)

$$C_1 = \frac{1}{3} \operatorname{sen}\phi \;, \; C_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{3}} \right], \; C_3 = 0 \quad \text{para } \theta = -30^0$$

Resumindo, utilizam-se as expressões gerais para C_1, C_2 e C_3 dados na tabela II.1 para $|\theta| \leq 29^0$; e (II.80) para Tresca ou (II.82) para Mohr-Coulomb nos cantos. Este procedimento elimina a indeterminação e satisfaz os requisitos de Koiter. Fisicamente este artifício corresponde a arredondar os cantos da superfície de escoamento.

III. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Considera-se um sólido com tensões internas $\underset{\sim}{\sigma}$, com carregamento distribuido por unidade de volume $\underset{\sim}{b}$ e sobre forças externas $\underset{\sim}{f}$, no estado de equilíbrio. Um deslocamento virtual $\delta\underset{\sim}{d}^*$ provoca deformações compatíveis $\delta\underset{\sim}{\varepsilon}^*$ e deslocamentos internos $\delta\underset{\sim}{u}^*$.

Pelo princípio dos trabalhos virtuais tem-se:

$$\int_\Omega (\delta\underset{\sim}{\varepsilon}^{*T}\underset{\sim}{\sigma} - \delta\underset{\sim}{u}^{*T}\underset{\sim}{b})d\Omega - \delta\underset{\sim}{d}^{*T}\underset{\sim}{f} = 0 \qquad \text{(III.1)}$$

Os deslocamentos e deformações no interior de um elemento finito são dados por:

$$\delta\underset{\sim}{u}^* = \underset{\sim}{N}\delta\underset{\sim}{d}^* \quad , \quad \delta\underset{\sim}{\varepsilon}^* = \underset{\sim}{B}\delta\underset{\sim}{d}^* \qquad \text{(III.2)}$$

onde $\underset{\sim}{N}$ e $\underset{\sim}{B}$ são respectivamente as matrizes usuais das funções de interpolação e a matriz que relaciona deformações e deslocamentos. Substituindo (III.2) em (III.1):

$$\int_\Omega \delta\underset{\sim}{d}^{*T}(\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{b})d\Omega - \delta\underset{\sim}{d}^*\underset{\sim}{f} = 0 \qquad \text{(III.3)}$$

onde o volume de integração sobre o sólido é a soma da contribuição individual de cada elemento. Como (II.3) é válida para qualquer $\delta\underset{\sim}{d}^*$ arbitrário tem-se:

$$\int_{\Omega} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\sigma} d\Omega - \underset{\sim}{f} - \int_{\Omega} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{b} d\Omega = 0 \qquad \text{(III.4)}$$

Para solução de problemas não lineares, utilizamos métodos iterativos e (III.4) não é satisfeita em cada iteração, logo:

$$\underset{\sim}{\psi} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\sigma}\, d\Omega - (f + \int_{\Omega} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{b}\, d\Omega) \neq 0 \qquad \text{(III.5)}$$

onde $\underset{\sim}{\psi}$ é o vetor de forças residuais. Para uma situação elastoplástica a rigidez do material está continuamente variando e a relação instantânea dos incrementos tensão/deformação é dada por (II.46). Para avaliar a matriz de rigidez tangencial do material $\underset{\sim}{K}^T$ em cada iteração, deve-se empregar a forma incremental de (III.5). Para um incremento de carregamento tem-se:

$$\Delta\underset{\sim}{\psi} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{B}^T\, \Delta\underset{\sim}{\sigma}\, d\Omega - (\Delta\underset{\sim}{f} + \int_{\Omega} \underset{\sim}{N}^T\, \Delta\underset{\sim}{b}\, d\Omega) \qquad \text{(III.6)}$$

Substituindo $\Delta\underset{\sim}{\sigma}$ de acordo com (II.46)

$$\Delta\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{K}_T\, \underset{\sim}{d} - (\Delta\underset{\sim}{f} + \int_{\Omega} \underset{\sim}{N}^T\, \Delta\underset{\sim}{b}\, d\Omega) \qquad \text{(III.7)}$$

onde

$$\underset{\sim}{K}_T = \int_\Omega \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{Dep} \underset{\sim}{B} \, d\Omega \qquad \text{(III.8)}$$

Um sistema de equação não linear é representado por

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{g} \qquad \text{(III.9)}$$

onde os coeficientes da matriz $\underset{\sim}{H}$, são funções das incógnitas $\underset{\sim}{\psi}$ ou de suas derivadas. A solução direta de (III.9) é geralmente impossível, por isso são adotados métodos iterativos. Durante uma iteração genérica do processo (III.9) não será satisfeita, a menos que a convergência tenha ocorrido, ficando um resíduo:

$$\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{H} \underset{\sim}{\psi} - \underset{\sim}{g} \qquad \text{(III.10)}$$

Comparando (III.7) e (III.10) nota-se que as equações são semelhantes, logo podemos utilizar os processos convencionais de soluções de sistemas de equações não lineares para resolver (III.7).

IV. MODELO DE INTERFACE

Para estudar a interação entre interfaces de modelos estruturais, já foram desenvolvidos um grande número de modelos [IV.3, IV.4, IV.11, IV.12, IV.13, IV.14, IV.15, IV.16].

Neste trabalho as interfaces são simuladas por um elemento especial, conhecido por elemento de junta [IV.1, IV.2, IV.6, IV.8].

IV.1 - COMPORTAMENTO FÍSICO DE UMA INTERFACE

Uma descontinuidade em um maciço rochoso ou em um modelo estrutural qualquer, Fig.IV.1, pode ser razoavelmente definida em suas dimensões geométricas, e é classificada como junta. Uma característica favorável e necessária à análise de uma junta é a pequena espessura, o que permite relacionar o seu comportamento físico com os deslocamentos relativos entre as duas superfícies, que a delimitam segundo a direção longitudinal. GOODMAN refs. [IV.1 e IV.6], em seu modelo matemático e experimental não considera a espessura, porém no presente estudo, como na referência [IV.2], a mesma é utilizada com a finalidade de tornar adimensional o campo de deformação. Esta característica é importante no estudo de sólido axissimétrico (item IV.3).

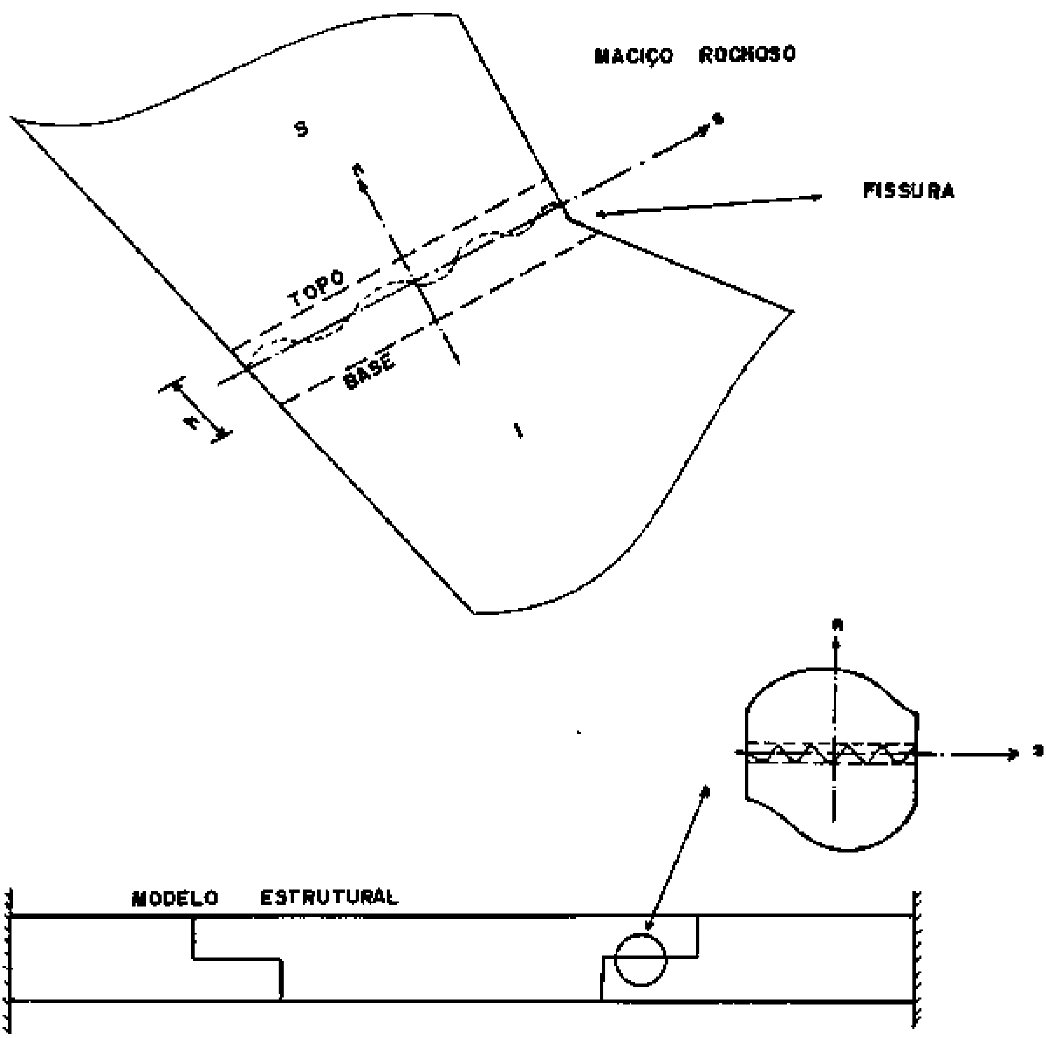


Figura IV.1

A deformabilidade de uma junta é analisada segundo 2 propriedades físicas:

- rigidez à deformação normal;
- rigidez à deformação cisalhante.

Ambas são obtidas por intermédio de modelos reduzidos, ou através de ensaios realizados com amostras representativas ou artificiais.

Normalmente as juntas se caracterizam pela relação não linear entre (tensão x deformação), sendo tal comportamento evidenciado experimentalmente.

Costuma-se classificar as juntas em duas categorias: dilatantes, quando durante a deformação cisalhante há expansão ou contração, o que implica no acoplamento entre a deformação normal e cisalhante; e não dilatantes, em caso contrário.

No presente estudo apenas as juntas não-dilatantes são analisadas, porém nas refs. [IV.2 e IV.10] um comportamento adequado ao comportamento dilatante é apresentado.

Para uma junta não dilatante, a matriz constitutiva utilizada na formulação do modelo matemático é desacoplada, sendo dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.1)}$$

onde:

C_s = coeficiente de rigidez cisalhante σ_s = tensão cisalhante

C_n = coeficiente de rigidez normal σ_n = tensão normal

ε_s = deformação cisalhante

ε_n = deformação normal

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta\, u_s}{h} \qquad\qquad \varepsilon_n = \frac{\Delta\, v_n}{h}$$

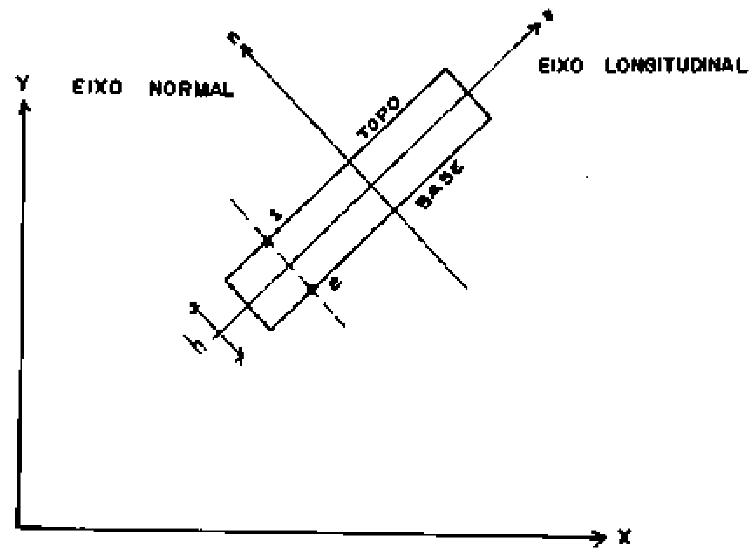


Figura IV.2

Os termos $\Delta\, u_s$ e $\Delta\, v_n$ são os deslocamentos relativos entre dois pontos 1 e 2, pertencentes respectivamente ao topo e à base do elemento, em uma mesma direção normal ao longo do eixo longitudinal; e h a espessura do elemento.

Para o caso de interação solo-estrutura, Fig. IV.3, as juntas recebem a denominação mais geral de "interface". Um nº de fatores podem contribuir para a complexidade do comportamento da interface. Estes fatores podem incluir a modificação das propriedades do solo, devido a migração de umidade e amolgamento, possibilidade da rotura em zonas fora da interface e dificuldades na obtenção de parâmetros físicos. Na interface, devido a baixa resistência introduzida pelo solo, predomina o comportamento não dilatante, o que conduz a uma matriz constitutiva desacoplada.

A importância fundamental do elemento de interface, em problemas de interação, é permitir o movimento relativo entre os dois meios. Por este motivo a análise da interface, quando submetida a deformações cisalhantes, é mais criteriosa. Para isto, existem alguns tipos de ensaios levando em consideração efeitos estáticos e dinâmicos (ref. [IV.3]).

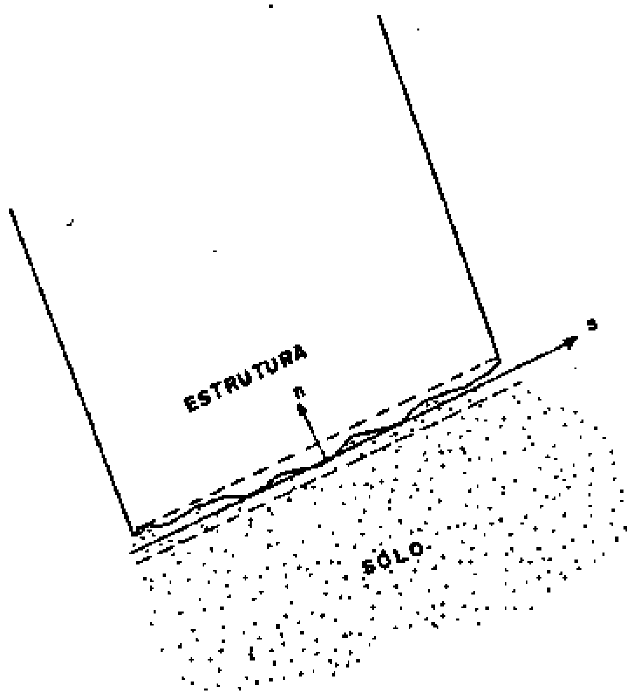


Figura IV.3

IV.2 - Modelo Matemático para o Estado Plano de Tensões e Deformações

Conhecido o comportamento físico das interfaces (item IV.1), e sabendo que este é analisado em função dos deslocamentos relativos entre o topo e a base do elemento, desenvolve-se agora o respectivo modelo matemático. A continuidade do campo de deslocamentos relativos no domínio do elemento é conseguido pela interpolação dos respectivos valores nodais, sendo esta conduzida segundo a direção longitudinal do elemento de interface. Inicialmente, os modelos são desenvolvidos assumindo variação quadrática dos deslocamentos, mais tarde particularizados para variação linear.

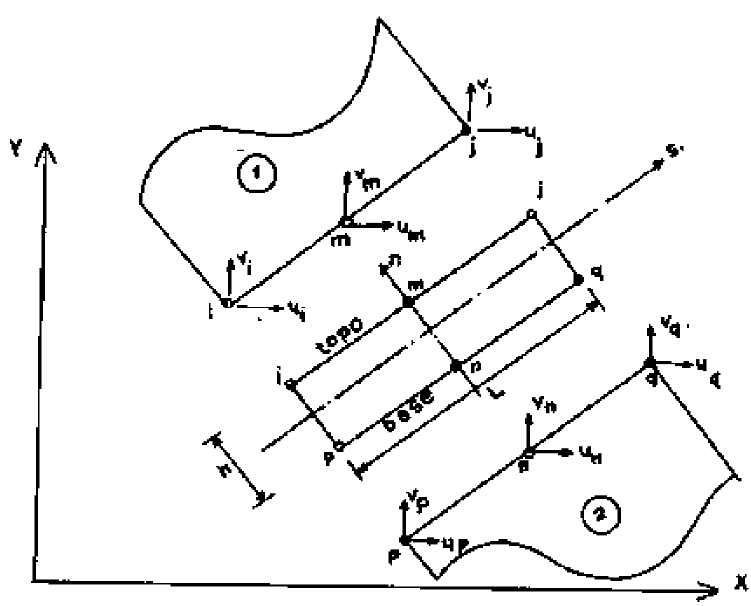


Figura IV.5

Para o elemento de interface mostrado na figura IV.5 os deslocamentos relativos nodais são definidos por:

$$u_i = u_p + \Delta u_i$$

$$v_i = v_p + \Delta v_i$$

$$u_m = u_n + \Delta u_m$$

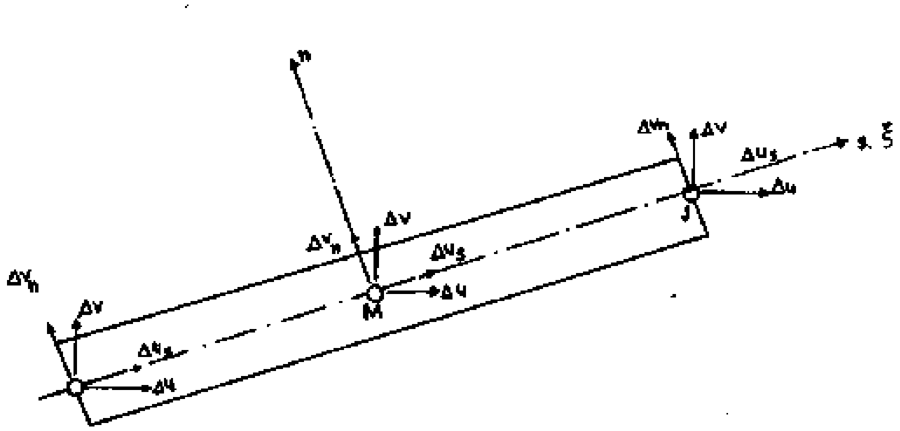
$$v_m = v_n + \Delta v_m \qquad (IV.2)$$

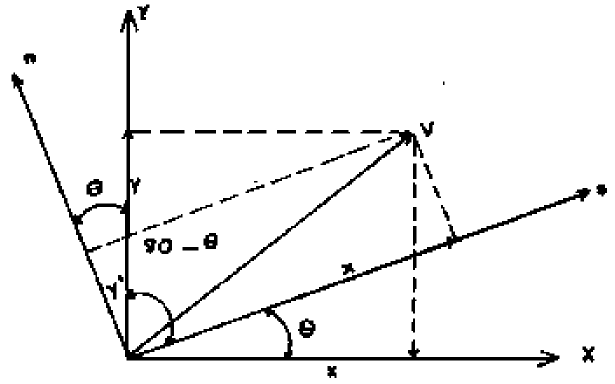
$$u_j = u_q + \Delta u_j$$

$$v_j = v_q + \Delta v_j$$

Com os deslocamentos relativos referidos ao sistema global, deve-se obter os deslocamentos relativos referidos ao sistema local (s xn), o que pode ser feito com o uso da matriz de rotação convencional.

Aplicando a transformação em cada nó, tem- se:





$a = \cos\theta$

$b = \operatorname{sen}\theta$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b \\ -b & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

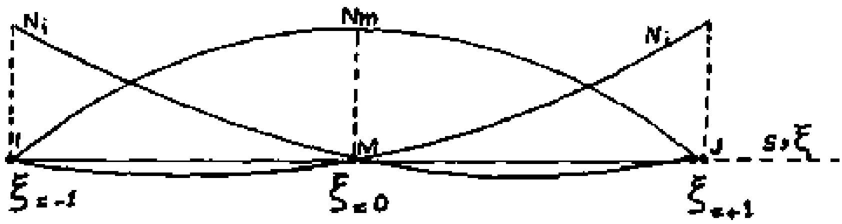
Figura IV.6

$$
\underset{\text{SISTEMA LOCAL}}{\begin{Bmatrix} (\Delta u_s)_i \\ (\Delta v_n)_i \\ (\Delta u_s)_m \\ (\Delta v_n)_m \\ (\Delta u_s)_j \\ (\Delta v_n)_j \end{Bmatrix}} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix} \underset{\text{SISTEMA GLOBAL}}{\begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix}} \qquad \text{(IV.3)}
$$

A partir dos deslocamentos relativos nodais referidos ao sistema local, define-se o campo de deslocamentos relativos no domínio do elemento:

$$
\begin{aligned}
\Delta u_s &= N_i \ (\Delta u_s)_i + N_m \ (\Delta u_s)_m + N_j \ (\Delta u_s)_j \\
\Delta v_n &= N_i \ (\Delta v_n)_i + N_m \ (\Delta v_n)_m + N_j \ (\Delta v_n)_j
\end{aligned} \qquad \text{(IV.4)}
$$

Onde as funções de interpolação estão indicadas na figura IV.4.



$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2) \qquad \text{(IV.5)}$$

$$N_m = (1-\xi^2) \qquad \text{(IV.6)}$$

$$N_j = \frac{1}{2}(1+\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2) \qquad \text{(IV.7)}$$

Figura IV.7

O campo de deformações (item IV.1) é então dado por:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\Delta u_s}{h} \\ \dfrac{\Delta v_n}{h} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_m & 0 & N_j & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_m & 0 & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\Delta u_s)_i \\ (\Delta v_n)_i \\ (\Delta u_s)_m \\ (\Delta v_n)_m \\ (\Delta u_s)_j \\ (\Delta u_n)_j \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.8)}$$

Da substituição de (IV.3) em (IV.8) resulta a expressão final das deformações em função dos deslocamentos relativos, referidos ao sistema global:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_m & 0 & N_j & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_m & 0 & N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix}$$

(IV.9)

Efetuando o produto matricial (IV.9):

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} a\,N_i & b\,N_i & a\,N_m & b\,N_m & a\,N_j & b\,N_j \\ -b\,N_i & a\,N_i & -b\,N_m & a\,N_m & -b\,N_j & a\,N_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.10)}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\overline{B}} \cdot \underset{\sim}{\Delta} u$$

O vetor de deslocamentos relativos $\underset{\sim}{\Delta}$ u em (IV.10) é calculado através do seguinte produto matricial:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ u_i \\ v_i \\ u_p \\ v_p \\ u_q \\ v_q \\ u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

(IV.11)

$$\underset{\sim}{\Delta} u = \underset{\sim}{T} \quad \underset{\sim}{u}$$

Substituindo (IV.11) em (IV.10):

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\bar{B}} \cdot \underset{\sim}{T} \; \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{B} \; \underset{\sim}{u}$$

onde

$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{\bar{B}} \cdot \underset{\sim}{T}$, dada por:

$$\underset{\sim}{B} = \frac{1}{h}\begin{Bmatrix} aN_j & bN_j & aN_i & bN_i & -aN_i & -bN_i & -aN_j & -bN_j & aN_m & bN_m & -aN_m & -bN_m \\ -bN_j & aN_j & -bN_i & aN_i & bN_i & -aN_i & bN_j & -aN_j & -bN_m & aN_m & bN_m & -aN_m \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.14)}$$

Determinando o campo de deformações no domínio do elemento, pode-se com a matriz constitutiva apresentada em (IV-1), calcular as tensões com as quais são obtidas as forças nodais internas.

O desenvolvimento matemático do elemento linear da Fig.IV.8 é um caso particular do elemento quadrático, bastando para isto eliminar nos arranjos anteriores as parcelas associadas a função de interpolação N_m.

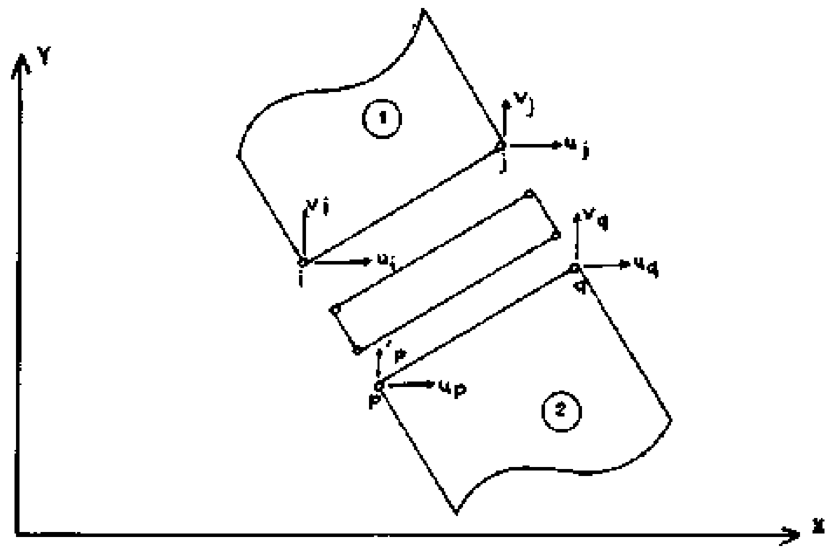


Figura IV.8

IV.3 - Modelo Matemático para Sólido Axissimétrico

O tratamento matemático utilizado em sólidos axissimétricos é idêntico ao anterior. Como diferença básica, tem-se o acréscimo da deformação circunferencial calculada por:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{R} \tag{IV.15}$$

onde:

u - deslocamento radial de um ponto no domínio do elemento com raio R.

O campo de deformações é então definido por:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\Delta\ u_s}{h} \\ \dfrac{\Delta\ v_n}{h} \\ \dfrac{u}{R} \end{Bmatrix} \tag{IV.16}$$

Como em (IV.4), $\Delta\ u_s$ e $\Delta\ u_n$ são interpolados dos respectivos valores nodais, ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta\ u_s &= N_i(\Delta\ u_s)_i + N_j(\Delta\ u_s)_j + N_m(\Delta\ u_s)_m \\ \Delta\ v_n &= N_i(\Delta\ v_n)_i + N_j(\Delta\ v_n)_j + N_m(\Delta\ v_n)_m \end{aligned} \tag{IV.17}$$

O deslocamento radial u é dado por:

$$u = u_{base} + \frac{\Delta u}{2}$$

u_{base} - é o deslocamento radial na base do elemento.

$\frac{\Delta u}{2}$ - deslocamento relativo radial entre a superfície média do elemento e a base.

A continuidade do deslocamento radial no domínio do elemento, é conseguida por interpolação dos deslocamentos radiais nodais, tomados em relação à superfície média:

$$u = (u_p + \frac{\Delta u_i}{2})\ N_i + (u_n + \frac{\Delta u_m}{2})\ N_m + (u_q + \frac{\Delta u_j}{2})\ N_j \qquad \text{(IV.18)}$$

Com as equações (IV.15, IV.16, IV.17 e IV.18), pode-se escrever a matriz $\bar{\underset{\sim}{B}}$ para sólidos axissimétricos, do mesmo modo que (IV.10).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_i\ a}{h} & \frac{N_i\ b}{h} & \frac{N_m\ a}{h} & \frac{N_m\ b}{h} & \frac{N_j\ a}{h} & \frac{N_j\ b}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-N_i\ b}{h} & \frac{N_i\ a}{h} & \frac{-N_m\ b}{h} & \frac{N_m\ a}{h} & \frac{-N_j\ b}{h} & \frac{N_j\ a}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{2R} & 0 & \frac{N_m}{2R} & 0 & \frac{N_j}{2R} & 0 & \frac{N_i}{R} & \frac{N_m}{R} & \frac{N_j}{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ u_p \\ u_n \\ u_q \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.19)}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \bar{\underset{\sim}{B}} \quad \Delta \underset{\sim}{u}$$

O vetor de deslocamentos é dado por:

$$
\begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ u_p \\ u_n \\ u_q \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ u_i \\ v_i \\ u_p \\ v_p \\ u_q \\ v_q \\ u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}
\qquad \text{(IV.20)}
$$

$$\Delta u = \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{u}$$

Substituindo (IV.20) em (IV.19):

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\overline{B}}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{u} \qquad \text{(IV.21)}$$

onde:

$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{\overline{B}} \cdot \underset{\sim}{T}$ é dada por:

$$
\underset{\sim}{B} \; \left[\begin{array}{cccccccccccc}
\dfrac{N_j\, a}{h} & \dfrac{N_j\, b}{h} & \dfrac{N_i\, a}{h} & \dfrac{N_i\, b}{h} & \dfrac{-N_i\, a}{h} & \dfrac{-N_i\, b}{h} & \dfrac{-N_j\, a}{h} & \dfrac{-N_j\, b}{h} & \dfrac{N_m\, a}{h} & \dfrac{N_m\, b}{h} & \dfrac{-N_m\, a}{h} & \dfrac{-N_m\, b}{h} \\[2ex]
\dfrac{-N_j\, b}{h} & \dfrac{N_j\, a}{h} & \dfrac{-N_i\, b}{h} & \dfrac{N_i\, a}{h} & \dfrac{N_i\, b}{h} & \dfrac{-N_i\, a}{h} & \dfrac{N_j\, b}{h} & \dfrac{-N_j\, a}{h} & \dfrac{-N_m\, b}{h} & \dfrac{N_m\, a}{h} & \dfrac{N_m\, b}{h} & \dfrac{-N_m\, a}{h} \\[2ex]
\dfrac{N_j}{2R} & 0 & \dfrac{N_i}{2R} & 0 & \dfrac{N_i}{2R} & 0 & \dfrac{N_j}{2R} & 0 & \dfrac{N_m}{2R} & 0 & \dfrac{N_m}{2R} & 0
\end{array} \right] \qquad \text{(IV.22)}
$$

As tensões correspondentes são:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \text{(IV.23)}$$

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} C_s & 0 & 0 \\ 0 & C_n & 0 \\ 0 & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.24)}$$

onde C_θ - coeficiente de rigidez circunferencial

Como no item IV.2, o elemento linear é o caso particular do elemento quadrático, cuja formulação é obtida eliminando nos arranjos anteriores os termos associados a N_m.

IV.4 EXEMPLO DO COMPORTAMENTO DO ELEMENTO DE INTERFACE

A figura IV.9 mostra um modelo estrutural em estado plano de deformação em comportamento elástico linear, sem interface e com interface.

Os elementos são solicitados com carregamentos verticais diferentes. As propriedades dos elementos dos sólidos e da interface são as seguintes:

Sólido:

E = 10.000 psi (69 x 10^3kPa)

ν = 0,3

Interface:

E = 1.000 psi (69 x 10^2kPa)

ν = 0,3

G = 20 psi = 138 kPa

f = 0.1 inch (0,254 cm)

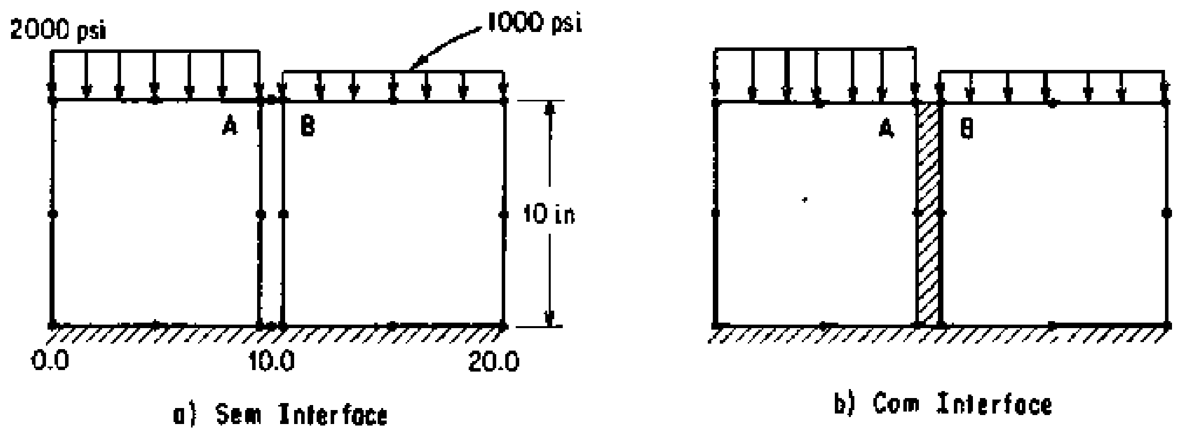


Figura IV.9

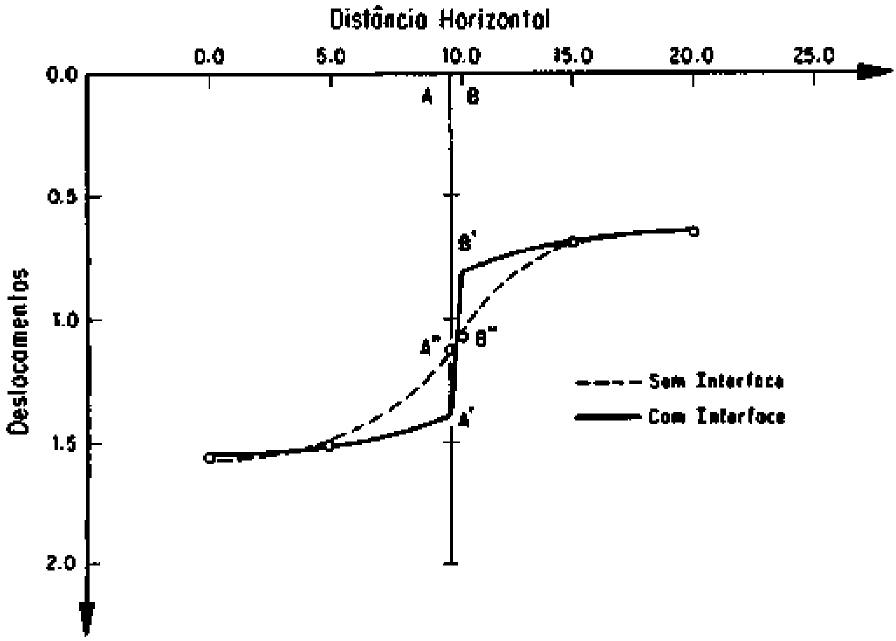


Figura IV.10

Análise dos Deslocamentos (Unidade-Polegada)

Foram analisados 2 casos: um sem o elemento de interface (fig.IV.9a) e outro com o elemento de interface (fig.IV.9b).

Os resultados para os deslocamentos verticais dos pontos A e B com e sem interface são mostrados na figura IV.10. Observa-se que o elemento de interface leva a um deslocamento relativo significante entre os 2 elementos sólidos compatível com o que realmente ocorre na prática.

V. MODELO INFINITO

Para o estudo de domínios infinitos, o analista estrutural se defronta com os seguintes problemas: o afastamento do contorno da região de interesse, o nº de elementos finitos da malha e o tipo das condições de contorno. Não se pode refinar muito a malha devido ao aumento do esforço computacional. Para resolver estes problemas as seguintes técnicas são comumentes usadas:

- utilização de contornos consistentes onde as restrições nodais são substituídas por elementos lineares de amortecimento, sendo necessário determinar propriedades mecânicas do meio para a simulação;

- método dos elementos de contorno, baseado em soluções fundamentais que consideram o domínio infinito;

- modelo que emprega elementos finitos especiais que simulam domínios infinitos. Estes elementos podem ser facilmente incorporados em um programa de elementos finitos sem alterar suas características, e tem sido empregados na prática com sucesso.

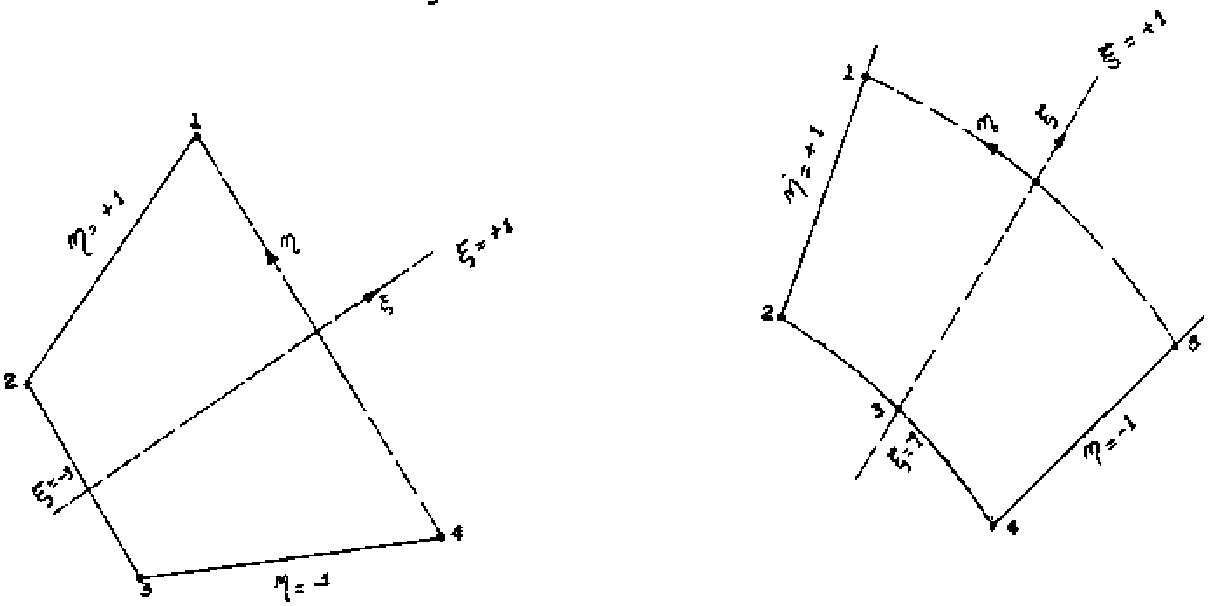
Diversos são os tipos de elementos infinitos referidos pela literatura técnica ref. (V.1 a V.4), que de modo geral tem sido alcançados bons resultados.

V.1 ELEMENTO INFINITO IMPLEMENTADO

O elemento infinito desenvolvido no presente trabalho se assemelha em sua formulação ao elemento infinito desenvolvido por Beer(V.1). As funções de interpolação para descrição geométrica do elemento, e as funções para descrição do campo de deslocamentos, conduziam a distorções quanto a localização dos pontos de integração.

O elemento infinito é do tipo paramétrico cujas funções de interpolação pertencem à família de funções serendipity.

Foram desenvolvidos 2 tipos de elementos: o de 4 nós e o de 5 nós. A figura V.1 ilustra os elementos:



a) elemento infinito de 4 nós   b) elemento infinito de 5 nós

Fig. V.1 - Elementos Infinitos Implementados

Apresenta -se a formulação do elemento de 5 nós e depois as modificações para o elemento de 4 nós.

V.1.1 DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA

A descrição geométrica do elemento é conduzida pela associação da função serendipity usual multiplicada por um termo com singularidade em $\xi = +1$.

$$\phi = (a_1+a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\,\eta^2)\,\frac{1}{1-\xi} \tag{V.1}$$

O termo $\frac{1}{1-\xi}$ na região finita do elemento não introduz distorções geométricas em sua descrição. Para obter as funções de interpolação associadas a cada ponto nodal (N_i, $i=1,5$) segue-se o procedimento normal, atribuindo-se valores a η e ξ correspondentes a localização de cada ponto nodal, obtém-se a matriz de transformação cuja inversa fornece as constantes (a_i, $i = 1,5$).

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 1,0 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 1,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} \tag{V.2}$$

$$\underset{\sim}{\phi} \qquad\qquad \underset{\sim}{A} \qquad\qquad \underset{\sim}{a}$$

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{A}^{-1}\,\underset{\sim}{\phi} \tag{V.3}$$

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & -0,5 \\ -1,0 & -1,0 & 0,5 & 2,0 & 0,5 \\ -1,0 & 1,0 & 0,5 & 0,0 & -0,5 \\ -1,0 & -1,0 & 0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 1,0 & 1,0 & 0,0 & -2,0 & 0,0 \end{bmatrix} \qquad (V.4)$$

Fazendo-se o produto matricial em (V.3) obtêm-se as seguintes constantes:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,0\ \phi_1 + 0,0\ \phi_2 + 0,5\ \phi_3 + 0,0\ \phi_4 - 0,5\ \phi_5 \\ a_2 &= -\ \phi_1 - \phi_2 + 0,5\ \phi_3 + 2,0\ \phi_4 + 0,5\ \phi_5 \\ a_3 &= -\ \phi_1 + \phi_2 + 0,5\ \phi_3 + 0,0\ \phi_4 - 0,5\ \phi_5 \\ a_4 &= -\ \phi_1 - \phi_2 + 0,5\ \phi_3 + 0,0\ \phi_4 + 0,5\ \phi_5 \\ a_5 &= \phi_1 + \phi_2 + 0,0\ \phi_3 - 2,0\ \phi_4 + 0,0\ \phi_5 \end{aligned} \qquad (V.5)$$

Substituindo (V.5) em (V.1):

$$\phi = (0,5\ \phi_3 - 0,5\ \phi_5)\ \frac{1}{1-\xi} + (-\ \phi_1 - \phi_2 + 0,5\ \phi_3 + 2,0\ \phi_4 + 0,5\ \phi_5)\ x$$

$$x\ \frac{\xi}{1-\xi} + (-\phi_1 + \phi_2 + 0,5\ \phi_3 - 0,5\ \phi_5)\ \frac{\eta}{1-\xi} + (-\phi_1 - \phi_2 + 0,5\ \phi_3 + 0,5\ \phi_5)\ x$$

$$x\ \frac{\xi\eta}{1-\xi} + (\phi_1 + \phi_2 - 2,0\ \phi_4)\ \frac{\eta^2}{1-\xi} \qquad (V.6)$$

Colocando em evidência os $\frac{1}{1-\xi}\,\phi_i$ (i=1,5):

$$\phi = (0,5 + 0,5\ \xi + 0,5\ \eta + 0,5\ \xi\ \eta)\ \frac{1}{1-\xi}\ \phi_1 +$$

$$+ (-1,0 - \xi - \xi\eta + \eta^2)\ \frac{1}{1-\xi}\ \phi_2 +$$

$$+ (2,0 - 2,0\ \eta^2)\ \frac{1}{1-\xi}\ \phi_3 +$$

$$+ (-1,0 - \xi + \xi\eta + \eta^2)\ \frac{1}{1-\xi}\ \phi_4 +$$

$$+ (0,5 + 0,5\ \xi - 0,5\ \eta - 0,5\ \xi\eta)\ \frac{1}{1-\xi}\ \phi_5 \qquad \text{(V.7)}$$

ou ainda:

$$\phi = \sum_{i=1}^{5} \bar{N}_i\ \phi_i \qquad \text{(V.8)}$$

onde

$$\bar{N}_i = N_i\ N_i^{\alpha} \qquad \text{(V.9)}$$

i=1,5 são as funções de interpolação.

e

$$N_i^{\alpha} = \frac{1}{1-\xi} \quad , \quad i=1,5 \qquad \text{(V.10)}$$

logo:

$N_1 = 0,5 + 0,5\ \xi + 0,5\ \eta + 0,5\ \xi\eta$

$N_2 = -1,0 - \xi - \xi\eta + \eta^2$

$N_3 = 2,0 - 2,0\ \eta^2$

$N_4 = -1,0 - \xi + \xi\eta + \eta^2$

$N_5 = 0,5 + 0,5\ \xi - 0,5\ \eta - 0,5\ \xi\eta$

As coordenadas cartesianas no domínio do elemento são dadas por:

$$x = \sum_{i=1}^{5} \overline{N}_i\ x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{5} \overline{N}_i\ y_i \qquad (V.12)$$

O Jacobiano da matriz de transformação, de coordenadas cartesianas em coordenadas naturais, é obtido a partir das derivadas das funções de interpolação em relação às coordenadas naturais.

V.1.2 Descrição dos Deslocamentos

Os deslocamentos no domínio do elemento são interpolados por:

$$u = \sum_{i=1}^{5} \overline{H}_i \, u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^{5} \overline{H}_i \, v_i \qquad (V.13)$$

onde u_i e v_i são os deslocamentos nodais e

$$\overline{H}_i = H_i \, f\left(\frac{r_i}{r}\right) \qquad (V.14)$$

$\overline{H}_i$ = função de interpolação.

H_i = função de interpolação obtida pela função serendipity sem o termo singular.

$f\left(\frac{r_i}{r}\right)$ = função de decaimento dos deslocamentos r_i, são os raios dos pontos nodais a uma origem qualquer e r, o raio a esta mesma origem de um ponto qualquer de coordenada x, y; localizado no interior do contínuo pertencente ao domínio do elemento.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (V.15)$$

As funções H_i são obtidas pelo procedimento normal, atribuindo valores a ξ e η.

$$\phi = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\eta^2 \qquad (V.16)$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 & 1,0 \\ 1,0 & -1,0 & 1,0 & -1,0 & 1,0 \\ 1,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & -1,0 & -1,0 & 1,0 & 1,0 \\ 1,0 & 0,0 & -1,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad \text{(V.17)}$$

$$\underset{\sim}{\phi} \qquad\qquad\qquad \underset{\sim}{A} \qquad\qquad\qquad \underset{\sim}{a}$$

A matriz inversa é dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 1,0 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,0 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,0 & -1,0 & 0,0 \end{bmatrix} \qquad \text{(V.18)}$$

$$\underset{\sim}{a} = A^{-1} \quad \underset{\sim}{\phi} \qquad \text{(V.19)}$$

Fazendo o produto matricial (V.19) obtemos as constantes (a_i, i=1,5), substituindo estas constantes em (V.16) è colocando ϕ_i em evidência tem-se:

$$\phi = (0{,}5+0{,}5\ \xi+0{,}5\ \xi\ \eta+0{,}5\ \eta)\phi_1+(-0{,}5-0{,}5\ \xi-0{,}5\ \xi\ \eta+0{,}5\ \eta^2)\phi_2 +$$

$$+ (1{,}0-\eta^2)\phi_3 + (-0{,}5-0{,}5\ \xi+0{,}5\ \xi\ \eta + 0{,}5\ \eta^2)\phi_4 +$$

$$+ (0{,}5 + 0{,}5\ \xi - 0{,}5\ \xi\ \eta - 0{,}5\ \eta)\ \phi_5 \qquad (V.20)$$

ou $$\phi = \sum_{i=1}^{5} H_i\ \phi_i \qquad (V.21)$$

onde:

$$H_1 = 0{,}5 + 0{,}5\ \xi + 0{,}5\ \xi\ \eta + 0{,}5\ \eta$$

$$H_2 = -0{,}5 - 0{,}5\ \xi - 0{,}5\ \xi\ \eta + 0{,}5\ \eta^2$$

$$H_3 = 1{,}0 - \eta^2 \qquad (V.22)$$

$$H_4 = -0{,}5 - 0{,}5\ \xi + 0{,}5\ \xi\ \eta + 0{,}5\ \eta^2$$

$$H_5 = 0{,}5 + 0{,}5\ \xi - 0{,}5\ \xi\ \eta - 0{,}5\ \eta$$

As funções de interpolação anteriores atendem às condições de convergência exigidas pelo método dos elementos finitos, ou seja, compatibilidade (elementos conformes) e completidade.

$$\Sigma\ H_i = 1 \qquad (V.23)$$

O tensor de deformações é função das derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas cartesianas que, por sua vez, é função das derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas naturais, sendonecessário o conhecimento das derivadas das funções (V.22) em relação às coordenadas naturais.

$$
\begin{aligned}
&H_1\,,\,\xi = 0,5 + 0,5\,\eta \\
&H_1\,,\,\eta = 0,5 + 0,5\,\xi \\
&H_2\,,\,\xi = -0,5 - 0,5\,\eta \\
&H_2\,,\,\eta = -0,5\,\xi + \eta \\
&H_3\,,\,\xi = 0 \\
&H_3\,,\,\eta = -2\,\eta \\
&H_4\,,\,\xi = -0,5 + 0,5\,\eta \\
&H_4\,,\,\eta = 0,5\,\xi + \eta \\
&H_5\,,\,\xi = 0,5 - 0,5\,\eta \\
&H_5\,,\,\eta = -0,5 - 0,5\,\xi
\end{aligned}
\qquad (V.24)
$$

V.1.3 - FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO INFINITO

A matriz de rigidez do elemento é obtida pelo procedimento padrão de elementos parametrizados, tomando-se o cuidado do termo singular na matriz Jacobiana.

Tensor de deformação para o estado plano de tensão e Estado plano de deformação, é dado por:

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u,_x \\ u,_y \\ v,_x \\ v,_y \end{Bmatrix} \qquad (V.25)
$$

onde

$$\begin{Bmatrix} u,_\xi \\ u,_\eta \\ v,_\xi \\ v,_\eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x,_\xi & y,_\xi & 0 & 0 \\ x,_\eta & y,_\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x,_\xi & y,_\xi \\ 0 & 0 & x,_\eta & y,_\eta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u,_x \\ u,_y \\ v,_x \\ v,_y \end{Bmatrix} \qquad (V.26)$$

Para sólidos axissimétricos,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u,_r \\ u,_z \\ v,_r \\ v,_z \\ u \end{Bmatrix} \qquad (V.27)$$

As derivadas das coordenadas cartesianas em relação às coordenadas naturais são dadas por:

$$x,_\xi = \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi} x_j \quad ; \quad x,_\eta = \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \eta} x_j$$

$$(V.28)$$

$$y,_\xi = \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi} y_j \quad ; \quad y,_\eta = \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \eta} y_j$$

onde

$$\bar{N}_j = N_j \cdot N_j^\alpha \quad \text{e} \quad N_j^\alpha = \frac{1}{1-\xi}$$

$$\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi} = \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \cdot N_j^{\alpha} + N_j \frac{\partial N_j^{\alpha}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \eta} = \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \cdot N_j^{\alpha} + 0 \qquad \text{(V.29)}$$

As derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas naturais são dadas por:

$$u = H_j \; f \left(\frac{r_j}{r} \right) u_j$$

$$v = H_j \; f \left(\frac{r_j}{r} \right) v_j \qquad \text{(V.30)}$$

então

$$u_{,\mu} = \frac{\partial H_j}{\partial \mu} \cdot u_j \cdot f\left(\frac{r_j}{r} \right) + \frac{\partial f}{\partial \mu} H_j \; u_j$$

$$v_{,\mu} = \frac{\partial H_j}{\partial \mu} \cdot v_j \cdot f\left(\frac{r_j}{r} \right) + \frac{\partial f}{\partial \mu} H_j \; v_j \qquad \text{(V.31)}$$

para $\mu = \begin{cases} \xi \\ \eta \end{cases}$

A derivada da função de decaimento em relação às coordenadas naturais é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mu} \tag{V.32}$$

Determinação de $\frac{\partial r}{\partial \mu}$:

$r^2 = x^2 + y^2$, mas

$x = \bar{N}_j \; x_j \qquad y = \bar{N}_j \; y_j$

$$r^2 = (\bar{N}_j \; x_j)^2 + (\bar{N}_j \; y_j)^2 \tag{V.33}$$

$$2r \frac{\partial r}{\partial \mu} = 2(\bar{N}_j \; x_j)(\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu} x_j) + 2(\bar{N}_j \; y_j) \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu} y_j)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \mu} = \frac{1}{r} \left[(\bar{N}_j \; x_j)(\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu} x_j) + (\bar{N}_j \; y_j)(\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu} y_j) \right] \tag{V.34}$$

Para a função de decaimento $f(\frac{r_j}{r})$, adota-se uma potência n qualquer de $\frac{r_j}{r}$, ou seja:

$$f(\frac{r_j}{r}) = (\frac{r_j}{r})^n \tag{V.35}$$

O expoente n=1 fornece bons resultados, mas pode ser adotado outros valores conforme interesse do usuário.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{-n\ r_j^n}{r^{n+1}} \qquad (V.36)$$

substituindo (V.34) e (V.35) em (V.32)

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = -\ n\ \frac{r_j^n}{r^{n+1}} \cdot \left\{ \frac{1}{r} \left[(\bar{N}_j\ x_j)\ (\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu}\ x_j) + (\bar{N}_j\ y_j)\ (\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu}\ y_j) \right] \right\} \qquad (V.37)$$

Agora substituindo (V.37) em (V.31) obtém-se as derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas naturais:

$$u_{,\mu} = \left\{ H_{j,\mu} \cdot (\frac{r_j}{r})^n - n\ H_j\ \frac{r_j^n}{r^{n+1}} \left[\frac{1}{r} \left\{ (\bar{N}_j\ x_j)\ (\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu}\ x_j) + (\bar{N}_j\ y_j)\ (\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu}\ y_j) \right\} \right] \right\} u_j$$

$$(V.38)$$

$$v_{,\mu} = \left\{ H_{j,\mu} \cdot (\frac{r_j}{r})^n - n\ H_j\ \frac{r_j^n}{r^{n+1}} \left[\frac{1}{r} \left\{ (\bar{N}_j\ x_j)\ (\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu}\ x_j) + (\bar{N}_j\ y_j)\ (\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \mu}\ y_j) \right\} \right] \right\} v_j$$

Substituindo (V.38) em (V.26) e esta em (V.25), obtemos a matriz padrão $\underset{\sim}{B}$ que relaciona deformações com deslocamentos nodais:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{u}$$

A matriz $\underset{\sim}{B}$ para o estado plano de tensões e deformações se escreve por:

$$\underset{\sim}{B} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & 0 & 0 \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ 0 & 0 & x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left\{ \begin{matrix} (H_{1,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_1) & (0) & (H_{2,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_2) \\ (H_{1,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_1) & (0) & (H_{2,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_2) \\ (0) & (H_{1,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_1) & (0) \\ (0) & (H_{1,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_1) & (0) \end{matrix} \right. \rightarrow$$

$$\begin{matrix} (0) & (H_{3,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_3) & (0) & (H_{4,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_4) & (0) \\ (0) & (H_{3,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_3) & (0) & (H_{4,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_4) & (0) \\ (H_{2,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_2) & (0) & (H_{3,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_3) & (0) & (H_{4,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_4) \\ (H_{2,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_2) & (0) & (H_{3,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_3) & (0) & (H_{4,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_4) \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} (H_{5,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_5) & (0) \\ (H_{5,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_5) & (0) \\ (0) & (H_{5,\xi}\cdot f+f_{,\xi}\cdot H_5) \\ (0) & (H_{5,\eta}\cdot f+f_{,\eta}\cdot H_5) \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \qquad \text{(V.39)}$$

$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{U}$, onde

$$\underset{\sim}{U}^T = [u_1\ v_1\ u_2\ v_2\ u_3\ v_3\ u_4\ v_4\ u_5\ v_5]$$

A matriz $\underset{\sim}{B}$ para sólidos axissimétricos se escreve por:

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x,_\xi & y,_\xi & 0 & 0 & 0 \\ x,_\eta & y,_\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x,_\xi & y,_\xi & 0 \\ 0 & 0 & x,_\eta & y,_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \underset{\sim}{H}'$$

(V.40)

onde $\quad R = \sum_{i=1}^{5} \bar{N}_j \, x_j$ e

H' = a matriz $\underset{\sim}{H}$ da equação (V.39) acrescida da linha:

$$\begin{bmatrix} H_1 \frac{r_1}{r} & 0 & H_2 \frac{r_2}{r} & 0 & H_3 \frac{r_3}{r} & 0 & H_4 \frac{r_4}{r} & 0 & H_5 \frac{r_5}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

(V.41)

Com a matriz $\underset{\sim}{B}$ obtêm-se a matriz de rigidez do elemento infinito:

Para estado plano de tensões e deformações:

$$K = \int_\eta \int_\xi \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \, \underset{\sim}{B} \det \underset{\sim}{J} \; d\xi \, d\eta \qquad \text{(V.42)}$$

Para os sólidos axissimétricos

$$\underset{\sim}{K} = \int_{\eta}\int_{\xi} \underset{\sim}{B}^{T}\ \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{B}\ \det\ \underset{\sim}{J}\ R \cdot d\xi d\eta \qquad \text{(V.43)}$$

onde $\underset{\sim}{D}$ é a matriz constitutiva do material.

Para o elemento infinito de quatro nós, o procedimento é o mesmo, onde obtém-se quatro funções de interpolação. A seguir apresenta-se as principais modificações:

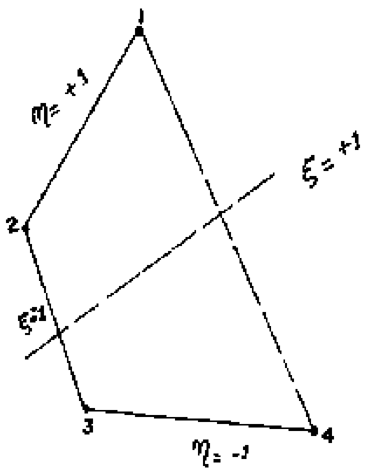


Fig. V.3 - Elemento Infinito de 4 Nós

Descrição da Geometria:

$$\phi = (a_1 + a_2\ \xi + a_3\ \eta + a_4\ \xi\ \eta)\ \frac{1}{1-\xi} \qquad \text{(V.44)}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,5 & -0,5 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,5 \\ -1,0 & -1,0 & 0,5 & 0,5 \\ -1,0 & 1,0 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \quad (V.45)$$

$$\underset{\sim}{a} = A^{-1} \underset{\sim}{\phi} \quad (V.46)$$

$$\overline{N}_i = N_i \, N_i^{\alpha} \qquad i=1,4 \quad (V.47)$$

$$N_i^{\alpha} = \frac{1}{1-\xi} \quad (V.48)$$

$$N_1 = 0,5 + 0,5\ \xi + 0,5\ \eta + 0,5\ \xi\ \eta$$

$$N_2 = -\ \xi - \xi\ \eta$$

$$(V.49)$$

$$N_3 = -\ \xi + \xi\ \eta$$

$$N_4 = 0,5 + 0,5\ \xi - 0,5\ \eta - 0,5\ \xi\ \eta$$

<u>Descrição dos deslocamentos</u>:

$$\phi = a_1 + a_2\ \xi + a_3\ \eta + a_4\ \xi\ \eta \quad (V.50)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,5 & -0,5 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \tag{V.51}$$

$$\overline{H}_j = H_j \, f\left(\frac{r_j}{r} \right) \quad , \quad j=1,4 \tag{V.52}$$

$$f\left(\frac{r_j}{r} \right) = \left(\frac{r_j}{r} \right)^{n} \tag{V.53}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= 0,5 + 0,5\,\xi + 0,5\,\eta + 0,5\,\xi\,\eta \\ H_2 &= -0,5\,\xi - 0,5\,\xi\,\eta \\ H_3 &= -0,5\,\xi + 0,5\,\xi\,\eta \\ H_4 &= 0,5 + 0,5\,\xi - 0,5\,\eta - 0,5\,\xi\,\eta \end{aligned} \tag{V.54}$$

Assim, monta-se a matriz $\underset{\sim}{B}$ como no elemento de 5 nós.

É importante lembrar, que o elemento infinito se enquadra num programa de elementos finitos padrão, pelo fato de manter as características de banda e simetria.

V.2 Exemplo do Comportamento do Elemento Infinito

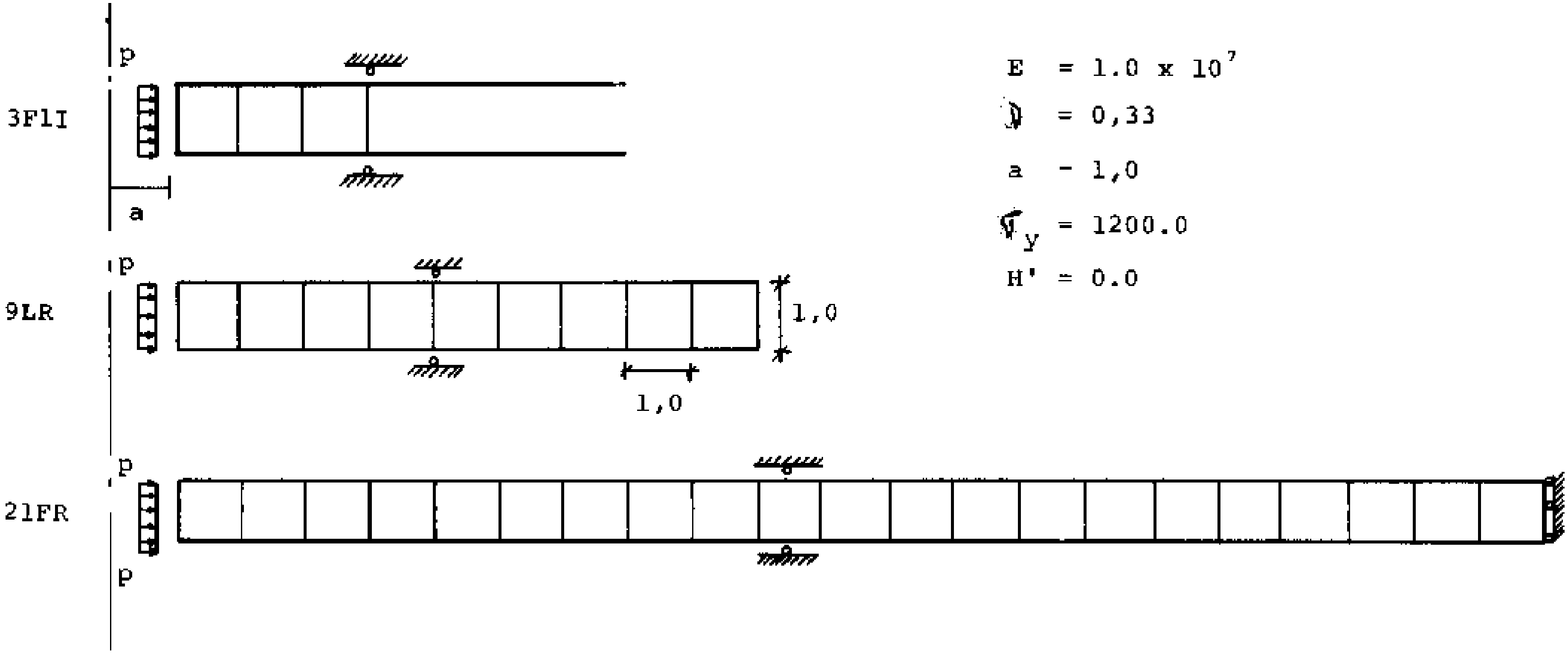
- TENSÕES INTERNAS NUMA CAVIDADE CILÍNDRICA EM UM MEIO INFINITO

O problema a ser analisado é mostrado na tabela (V.1). Na direção axial é assumido Estado Plano de Deformação, e o comportamento elasto-plástico do material obedece o critério de escoamento de Tresca. Quatro soluções são analisadas usando somente elementos finitos, com malhas de 9 e 21 elementos isoparamétricos com oito nós. Os últimos nós da malha são considerados livres radialmente (malhas 9LR e 21LR) ou fixos (9FR e 21FR).

Três soluções são também analisadas usando um elemento infinito com 5 nós com 1, 2 ou 3 elementos isoparamétricos com 8 nós (malhas 1F1I, 2F1I e 3F1I) respectivamente.

A tabela (V.1) lustra as malhas descritas acima, as propriedades do material e o raio, a partir do qual começa a plastificação, para cada um dos cinco incrementos de carga.

A tabela (V.2) apresenta a distribuição de tensões radiais para os casos apresentados.



$E = 1.0 \times 10^7$

$\nu = 0,33$

$a = 1,0$

$\sigma_y = 1200.0$

$H' = 0.0$

Incremento de Carga	1	2	3	4	5
Pressão Interna p	500.	1520.0	1750.0	2250.0	0.0
Raio da Região Plastificada	-	1.71887	2.60735	3.95508	1.54883

Malha	1F1I	2F1I	3F1I	9FR	9LR	21FR	21LR
Tempo de CPU (B-6800)	9	13	17	28	30	53	59

Tabela V.1 - Dados da geometria, material e carregamento para uma cavidade cilíndrica em um meio infinito.

INC.	RAIO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	SOMENTE COM ELEMENTOS FINITOS				RAIO	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ELEM.FINITOS + ELEM.INFINITOS		
			9FR	9LR	21FR	21LR			1F1I	2F1I	3F1I
1	1.21	-340.76	-350.62	-344.67	-347.15	-345.91	1.21	-340.76	-346.23	-346.23	-346.23
	1.79	-156.28	-163.67	-150.28	-155.07	-153.06	1.79	-156.29	-153.76	-156.78	-153.78
	3.21	- 48.48	- 61.44	- 43.78	- 51.27	- 47.61	5.07	- 19.44			- 19.44
	9.21	- 5.89	- 20.01	- 0.90	- 8.88	- 4.87	9.46	- 5.58	- 5.58		
	14.21	- 2.48			- 5.48	- 1.45	14.20	- 2.48		- 2.40	
	18.79	- 1.42			- 4.43	- 0.38	18.93	- 1.40			- 1.40
2	1.21	-1019.94	-1006.16	-1010.70	-1008.74	-1009.72	1.21	-1019.94	-1009.47	-1009.47	-1009.47
	1.79	-554.08	-578.16	-563.73	-569.74	-566.86	1.79	-554.08	-567.65	-567.65	-567.65
	3.21	-171.90	-210.56	-158.91	-101.14	-170.09	5.07	- 68.91			- 69.25
	9.21	- 20.09	- 68.58	- 3.76	- 31.37	- 17.40	9.46	- 19.79	- 19.89		
	14.21	- 8.78			- 19.36	- 5.17	14.20	- 8.60		- 8.84	
	18.79	- 5.02			- 15.64	- 1.37	18.93	- 4.95			- 4.97
3	1.21	-1519.94	-1514.27	-1514.27	-1514.27	-1514.27	1.21	-1519.94	-1514.27	-1514.27	-1514.27
	1.79	-1052.23	-1052.39	-1052.39	-1052.39	-1052.39	1.79	-1052.39	-1052.39	-1052.39	-1052.39
	3.21	-395.53	-437.48	-331.96	-407.85	-395.41	5.07	-158.57			-157.65
	9.21	- 49.77	-142.49	- 7.34	- 70.63	- 40.45	9.46	- 45.54	- 40.94		
	14.21	- 20.20			- 43.60	- 12.01	14.20	- 20.24		- 20.38	
	18.79	- 11.55			- 35.23	- 3.19	18.93	- 11.38			- 11.46
4	1.21	-2019.94	-2014.27	-2014.27	-2014.27	-2014.27	1.21	-2019.94	-2014.27	-2014.27	-2014.27
	1.79	-1552.23	-1552.39	-1552.39	-1552.39	-1552.39	1.79	-1552.23	-1552.39	-1552.39	-1552.39
	3.21	-849.98	-844.36	-848.02	-847.86	-848.02	5.07	-364.87			-362.73
	9.21	-110.62	-277.60	- 20.21	-152.65	- 94.05	9.46	-104.79	-150.26		
	14.21	- 46.47			- 74.26	- 27.92	14.20	- 46.57		- 41.53	
	18.79	- 26.59			- 76.15	- 7.42	18.93	- 26.20			- 26.11
5	1.21	-230.06	-267.78	-260.21	-263.46	-261.65	1.21	-230.06	-262.26	-262.26	-262.26
	1.79	-652.47	-595.90	-619.94	-609.55	-614.73	1.79	-652.47	-613.41	-613.41	-613.41
	3.21	-570.84	-493.64	-583.40	-546.25	-564.78	5.07	-252.96			-248.51
	9.21	- 76.69	-163.41	- 14.70	-100.45	- 65.08	9.46	- 72.65	-117.14		
	14.21	- 32.22			- 62.01	- 19.32	14.20	- 32.29		- 26.81	
	18.79	- 18.43			- 50.10	- 5.13	18.93	- 10.16			- 17.83

Tabela V.2 - Comparação das tensões radiais para soluções com elementos finitos e finitos/infinitos

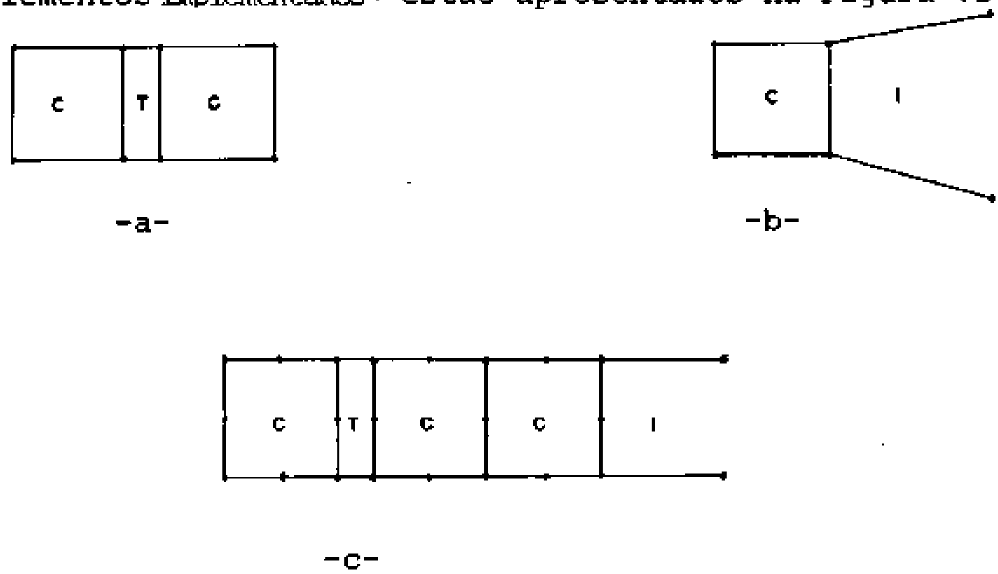
Todos os resultados são comparados com as soluções analíticas deste problema (V.11) , com isso podemos chegar a seguinte conclusão geral:

Para soluções baseadas somente em elementos finitos temos 2 tipos de condições de contorno (radialmente livre ou fixo), e se aproximam da solução analítica como esperado. Esta apresentação é melhor perto da região em estudo, mas difere significativamente quando se afasta. A solução com elementos finitos e infinitos va a bons resultados em ambos os casos, desde que a zona de plastificação não atinja o elemento infinito. Isto é observado com evidência nas malhas IF1I e 2F1I depois dos incrementos de carregamento 2 e 3 respectivamente. Os resultados obtidos (com plastificação somente na região de elementos finitos), estão sempre entre os valores com condições de contorno livres e fixas, e se aproximam mais da solução analítica. Os resultados obtidos com a malha 3F1I não são somente mais precisos que os da malha com 21 elementos finitos, mas o tempo de execução é reduzido por um fator de 3,5.

VI. ESTRUTURA DO PROGRAMA

Neste capítulo são apresentados os aspectos principais do programa utilizado e suas particularidades.

Alguns exemplos possíveis de acoplamento dos 3 tipos de elementos implementados estão apresentados na Figura VI.1



C - elemento convencional

T - elemento de interface

I - elemento infinito

FIGURA VI.1 - Exemplos de acoplamento dos elementos implementados.

Para compreender o funcionamento do programa, um fluxograma simplificado é apresentado na Figura VI.2, e alguns de seus aspectos serão descritos a seguir.

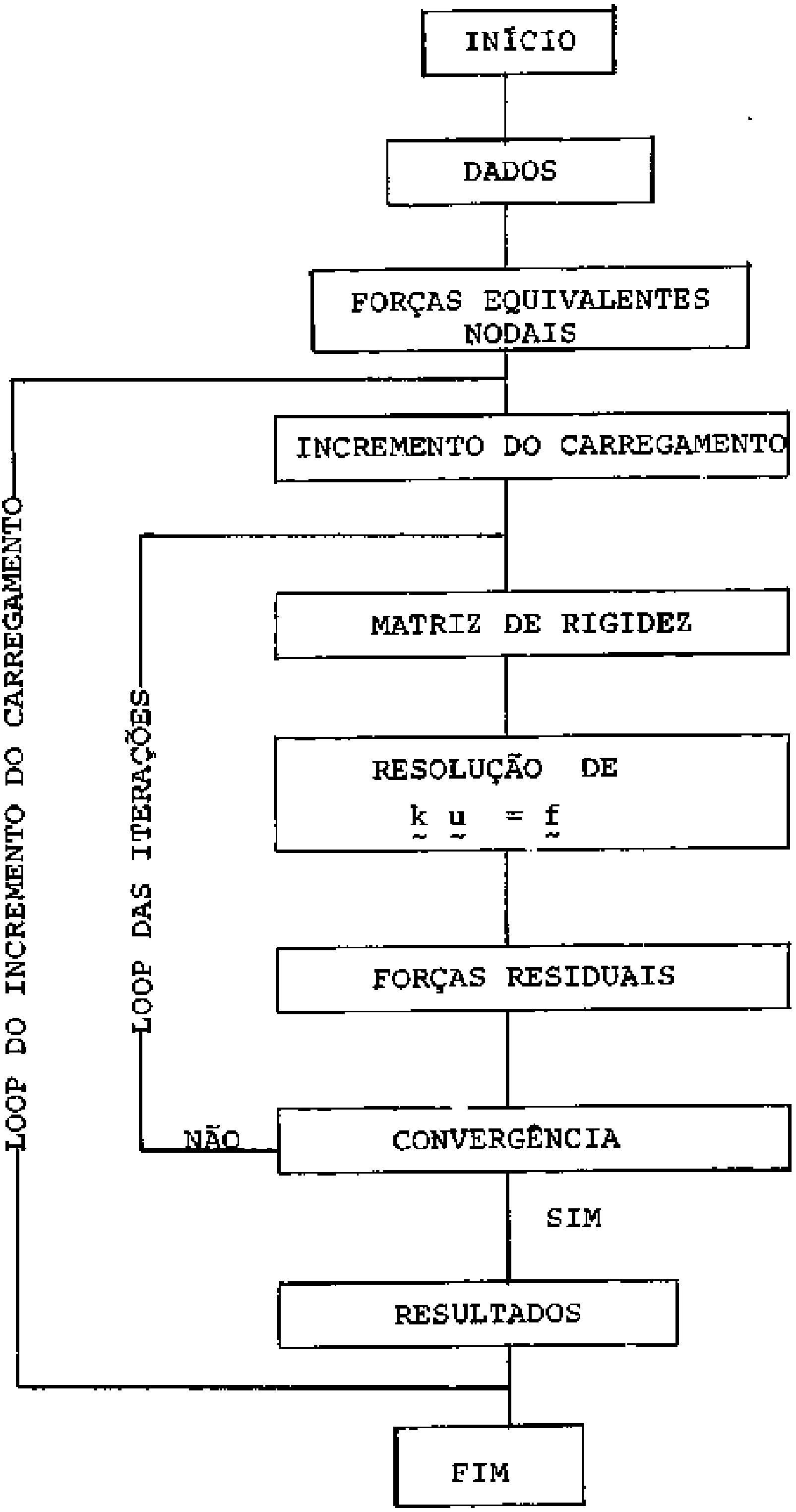


FIGURA VI.2 - ESTRUTURA DO PROGRAMA

O programa resolve os problemas de estado plano de tensão, estado plano de deformação e sólido axissimétrico.

O carregamento pode ser nodal, distribuído e de peso próprio.

O incremento do carregamento é feito para as forças e para os deslocamentos prescritos.

A matriz de rigidez é calculada utilizando $\underline{D}ep$ ou $\underset{\sim}{D}$, conforme o ponto de integração tenha plastificado ou não.

Utiliza-se quatro tipos de soluções para o sistema não linear:

1 - Método da rigidez inicial - A matriz de rigidez dos elementos é caldulada no início da análise, e permanece inalterada até o fim do processamento.

2 - Método da rigidez tangente - A matriz de rigidez dos elementos é calculada para todas iterações, para cada incremento de carga.

3 - Algoritmo combinado 1 - A matriz de rigidez dos elementos é calculada somente para a primeira iteração de cada incremento.

4 - Algoritmo combinado 2 - A matriz de rigidez dos elementos é calculada na primeira e segunda iteração de cada incremento de carga.

O sistema de equações é resolvido pelo método de eliminação de Gauss, utilizando a técnica FRONTAL, o qual monta as equações e elimina as variáveis ao mesmo tempo, não sendo necessário montar a matriz de rigidez global da estrutura.

Utiliza-se quatro critérios de escoamento:

- Tresca
- Von Mises
- Drucker Prager
- Mohr Coulomb

As tensões são calculadas de acordo com o critério de escoamento adotado, a seguir calculam-se as forças equivalentes nodais a estas tensões e, comparando estas forças com o carregamento aplicado, obtem-se as forças residuais.

A convergência pode ser verificada para deslocamentos e/ou forças, em uma direção ou nas duas direções. A convergência é obtida quando a norma das forças residuais (ou deslocamentos atuantes) torna-se menor que T vezes a norma do carregamento (ou deslocamento) aplicado, sendo T um parâmetro fornecido pelo usuário.

O programa fornece os resultados quando ocorre a convergência e/ou para a primeira iteração de cada incremento de carga. Possui quatro opções de impressão:

1. Impressão dos deslocamentos

2. Impressão dos deslocamentos e reações

3. Impressão dos deslocamentos, reações e tensões

4. Impressão seletiva, o usuário escolhe nós e elementos que deseja os resultados.

O programa possui também, duas sub-rotinas que verificam a consistência da entrada de dados.

VII. EXEMPLOS

VII.1 COMPORTAMENTO DE UM MEIO SEMI-INFINITO SUBMETIDO A UM CARREGAMENTO AXISSIMÉTRICO NA SUPERFÍCIE.

Os resultados obtidos são comparados com os apresentados por Lynn (VII.1)e com a solução exata. A Figura VII.1 ilustra o modelo discreto empregado por Lynn e a Figura VII.2, o modelo utilizado no presente estudo, a diferença está na discretização próxima a origem dos eixos.

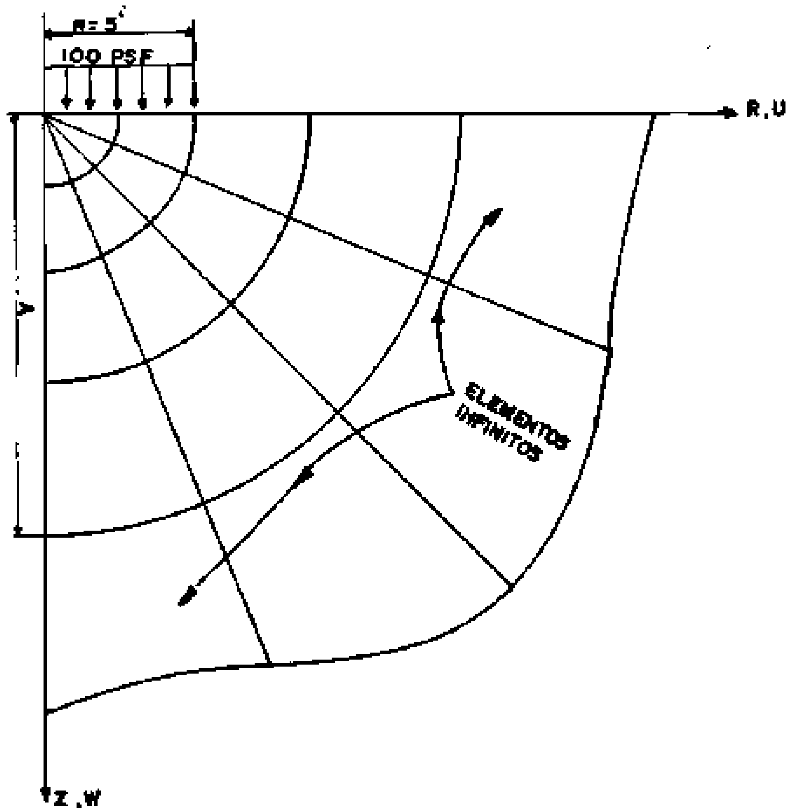


Fig. VII.1 - Modelo adotado por Lynn

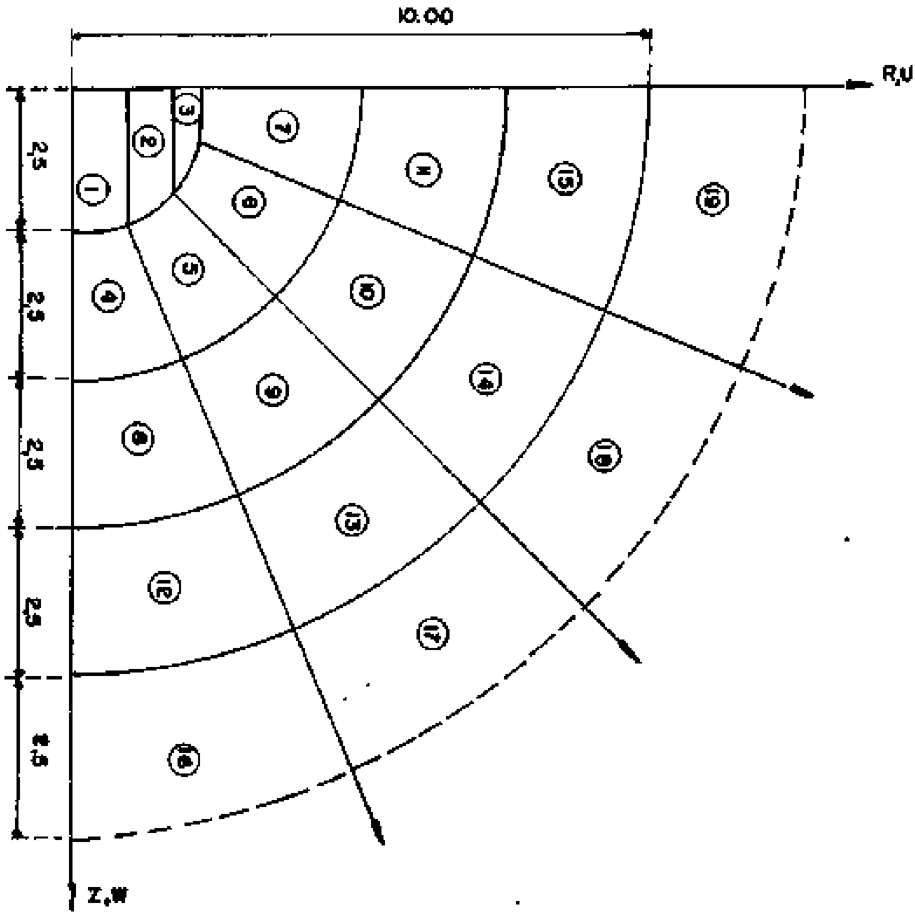


Fig. VII.2 - Modelo adotado no presente estudo.

A variação do deslocamento em função da distância do ponto na superfície ao centro de carregamento, está representada na Figura VII.3.

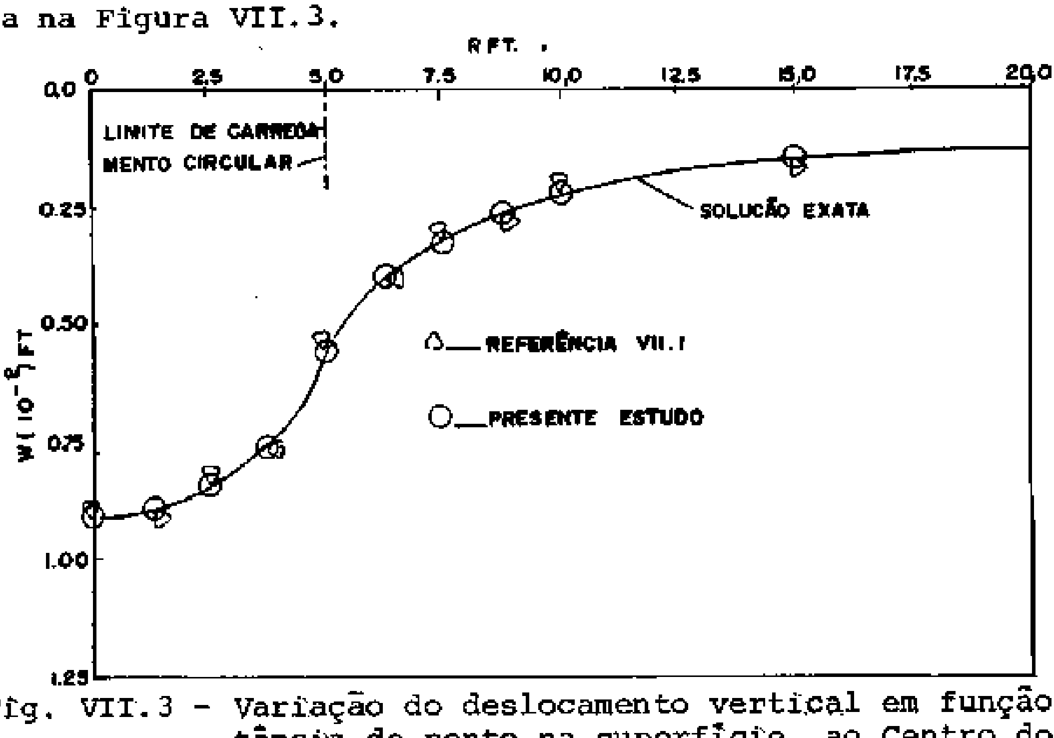


Fig. VII.3 - Variação do deslocamento vertical em função da distância do ponto na superfície, ao Centro do Carregamento.

A Figura VII.4 apresenta a distribuição das tensões verticais com a profundidade.

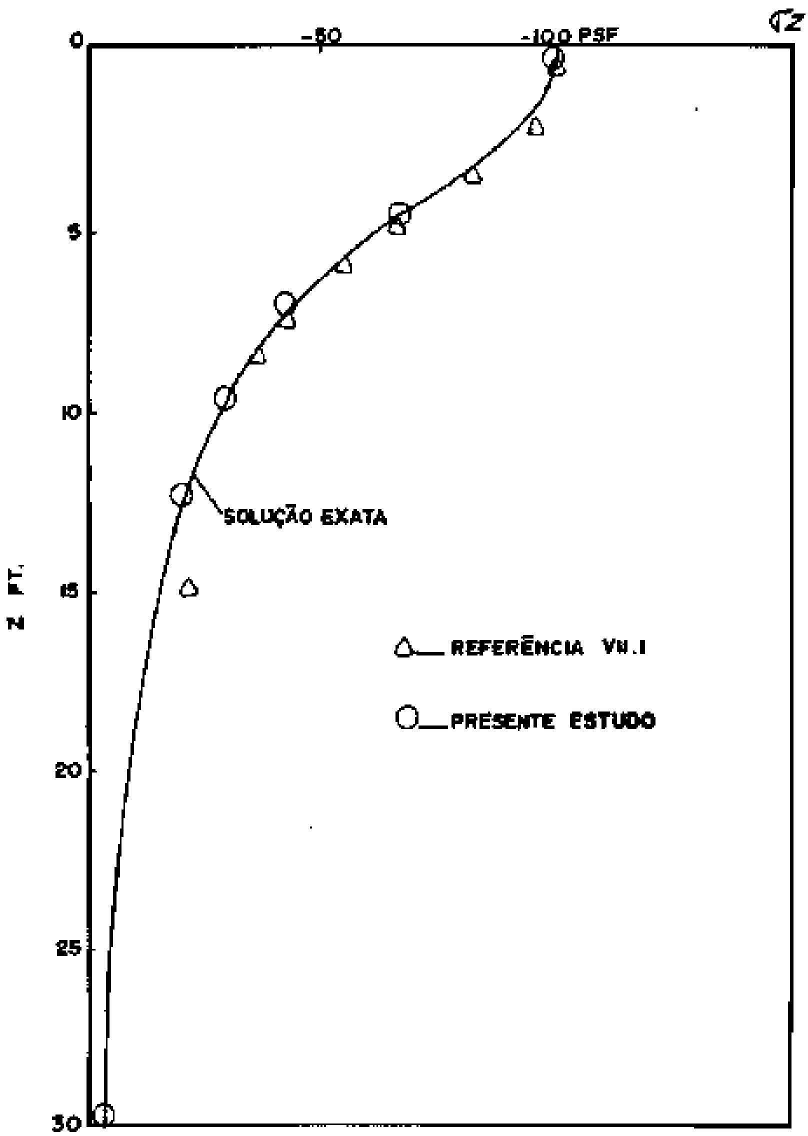


Fig. VII.4 - Distribuição da tensão vertical com a profundidade

A precisão alcançada pelo elemento pode ser observada na Tabela VII.1.

Tabela VII.1 - Deslocamento vertical na superfície $z = 0$

r em ft	Solução Exata (10^{-2}) ft	Solução ref. VII.1	Presente Estudo
0	0,9100	0,9103	0,9012
2,5	0,8501	0,8404	0,8506
5,0	0,5793	0,5700	0,5788
10,0	0,2353	0,2263	0,2361

Observa-se que os resultados alcançados pelo elemento infinito, ora apresentado, são mais precisos que os obtidos na referência (VII.1). O elemento infinito empregado por Lynn tem formulação diferente do desenvolvido aqui, e baseia-se no resultado da solução de integrais impróprias resolvidas analiticamente.

VII.2 CAVIDADE CIRCULAR EM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

As tensões e deslocamentos provocados pela escavação em um meio, podem ser obtidos pelo artifício de aplicar um campo de tensões na superfície de escavação, de tal forma que anule as tensões pré-existentes, assim obtem-se as tensões e deslocamentos adicionais ao estado natural do meio.

A malha utilizada para este estudo, está apresentada na Figura (VII.5), consistindo de dois níveis de elementos con

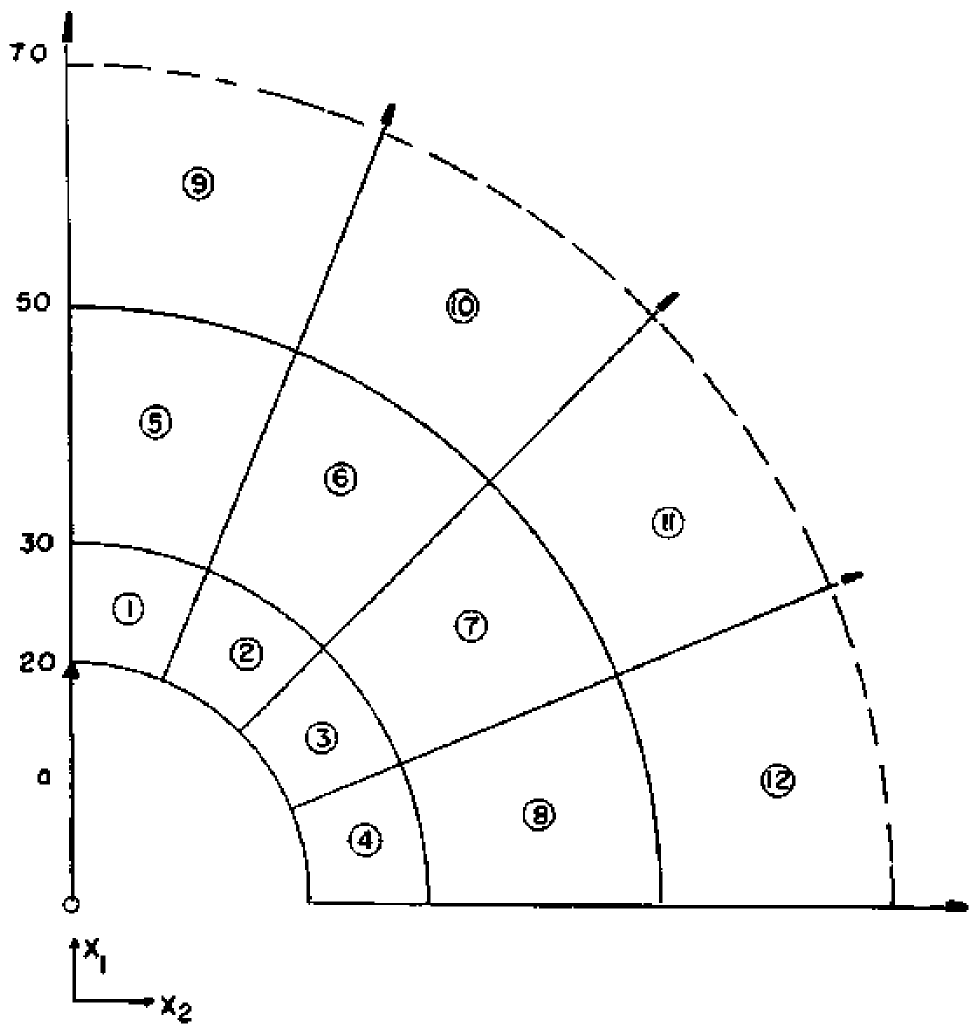


Fig. VII.5 - Malha de uma cavidade circular.

vencionais com oito nós,e um nível de elemento infinito. Foi utilizada a seguinte função de decaimento:

$$f\left(\frac{rj}{r}\right) = \frac{rj}{r} \qquad \text{(VII.1)}$$

O campo inicial de tensões adotado foi $\sigma x = -1000$.

Os resultados teóricos para uma cavidade em meio infinito são encontrados na ref. (VII.2), onde as tensões são fornecidas por

$$\sigma_{r\theta} = \pm \frac{Pa^2}{r^2}; \quad \tau r\theta = 0 \qquad \text{(VII.2)}$$

em coordenados cartesianos, tem-se:

$$\sigma x = \sigma r \cos^2\theta + \sigma_\theta \,\text{sen}^2\theta - 2\ \tau r\theta\ \text{sen}\,\theta\ \cos\theta$$
$$\sigma y = \sigma r\ \text{sen}^2\theta + \sigma_\theta \cos^2\theta - 2\ \tau r\theta\ \text{sen}\,\theta\ \cos\theta \qquad \text{(VII.3)}$$
$$\tau xy = (\sigma r - \sigma_\theta)\ \text{sen}\,\theta\ \cos\theta + \tau r\theta\ (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$$

A tabela (VII.2) apresenta os resultados obtidos,e os teóricos para o angulo de $4{,}75^{o}$

Tabela VII.2 - Comparação entre resultados obtidos e teóricos.

r	σ_x Teórico	σ_x obtidos
22,11	806,71	806,53
27,89	507,09	507,11
34,23	336,74	336,85
45,77	188,28	188,15
55,46	128,19	128,10
125,06	24,81	24,22

Observa-se que os resultados estão bem próximos, concluindo- se que a função decaimento utilizada é adequada para cavidades em meio infinito.

VII.3 AVALIAÇÃO NUMÉRICA DA CAPACIDADE DE CARGA PARA FUNDAÇÕES DE PLATAFORMAS AUTO-ELEVATÓRIAS

A capacidade de carga para fundações é significativamente afetada pela sua forma. As soluções clássicas para o cálculo da capacidade de carga em fundações rasas, consideram a sapata como uma placa rígida e plana, fornecendo estimativas pobres para fundações não planas.

Um exemplo prático de fundações rasas não planas, são as plataformas auto-elevatórias onde as sapatas são individuais em cada perna ("spud-cans") (Fig. VII.6).

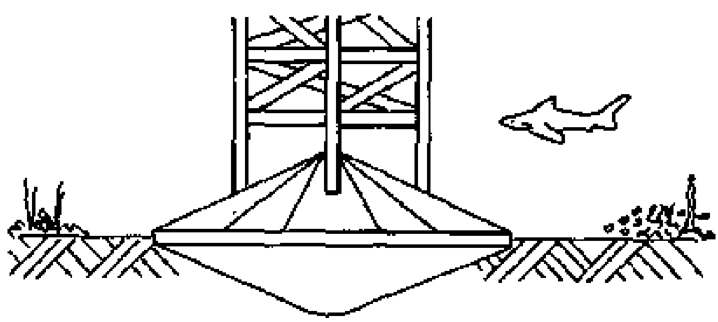


Fig. VII.6 - Fundação de Auto-Elevatória

Durante a instalação de uma plataforma auto-elevatória, diversos problemas podem ocorrer devido a interação sapata - solo (VII.5). Entre eles citam-se: penetração excessiva da fundação , decorrente da estratigrafia do local e da forma da sapata; rotações excessivas da estrutura comprometendo a sua estabilidade , etc.

A maioria destes problemas se relaciona com a determinação precisa da capacidade de carga do terreno. As soluções clássicas, como as de PRANDTL, TERZAGHI, BRINCH-HANSEN, MEYRHOFF, etc., não atendem completamente às situações encontradas na prática da engenharia offshore. Em geral, a forma da sapata e a estratificação do terreno no local de operação da plataforma, não se enquadram nas hipóteses assumidas, além do pouco conhecimento que se tem a respeito do comportamento desse tipo de fundação em solos tropicais.

Neste exemplo investiga-se, através do método dos elementos finitos, a influência da geometria da fundação na sua capacidade de carga e a influência dos elementos de interface e infinitos.

MODELO NUMÉRICO

Para a análise da influência da geometria na capacidade de carga empregou-se o modelo discreto da Figura VII.7, que compreende 184 elementos quadráticos com integração 2 x 2, para estado plano de deformações. Considera-se o solo homogênio não drenado, isotrópico e sem tensões iniciais, atendendo ao critério de plastificação de Mohr-Coulomb, verificado nos pontos de integração dos elementos. Para a solução do sistema de equações não linear ($\underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{u} = \underline{f}$) adota-se o processo que a rigidez do elemento é computada, somente na primeira iteração de cada incremento. São os seguintes parâmetros físicos utilizados:

$E = 2 \times 10^5\ kN/m^2 \quad \phi = 0,35 \quad C = 20\ kN/m^2$

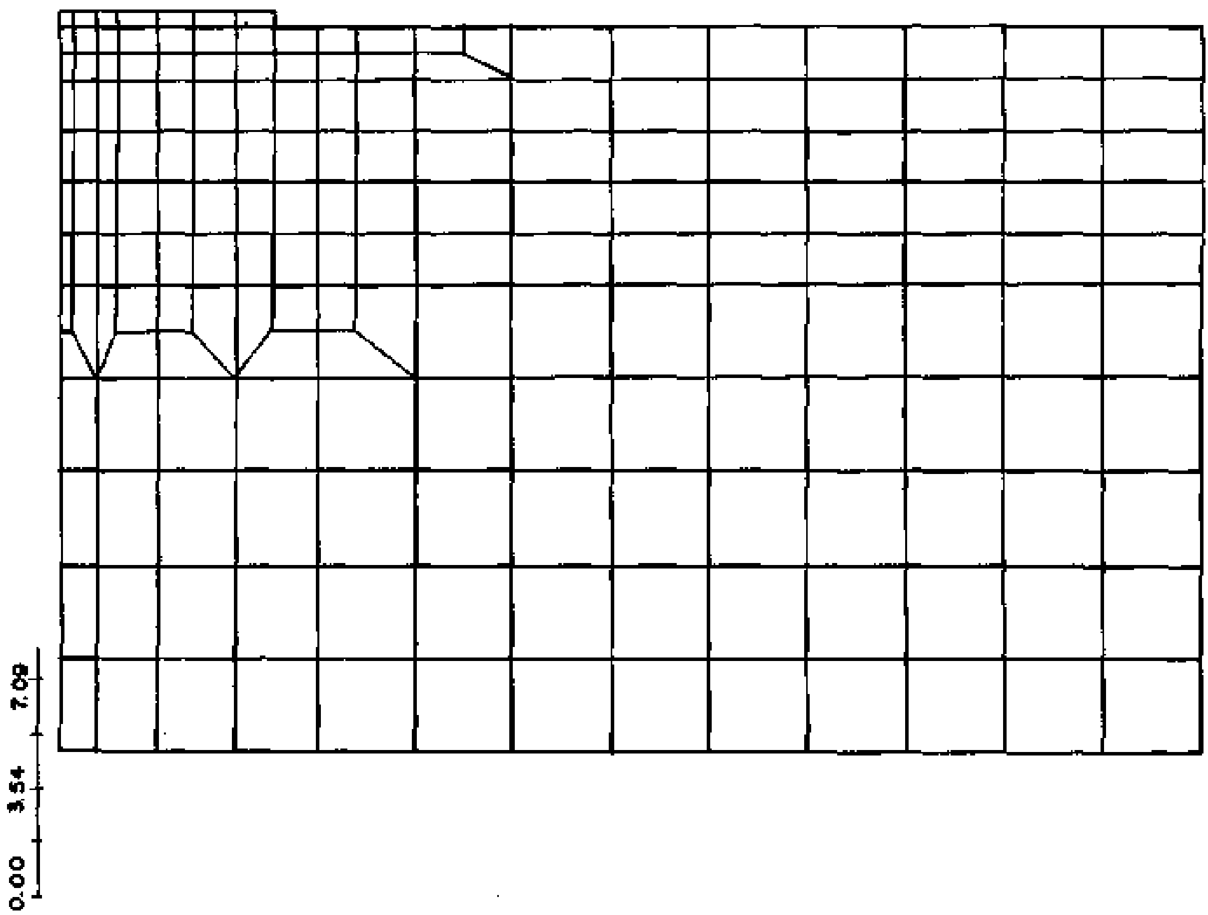


Fig. VII.7 - Malha de Elementos Finitos.

p/θ = 0°

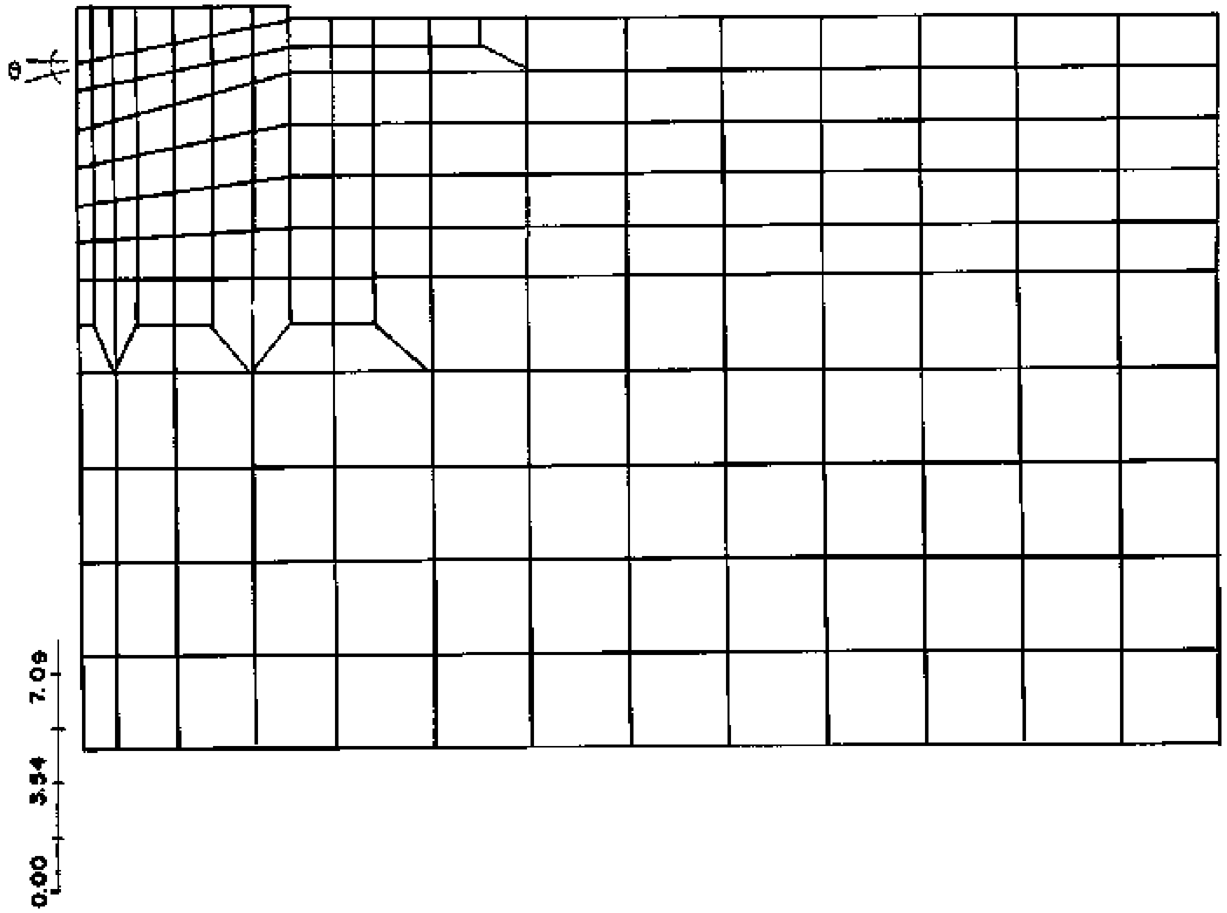


Fig. VII.8 - Malha de Elementos Finitos
p/ θ = 10°

As soluções são obtidas por meio da prescrição sucessiva de deslocamentos verticais, nos pontos nodais da interface entre o solo e a fundação, simulando a condição de não aderência.

Sendo assim, a Figura VII.9 apresenta as curvas de tensões médias verticais normalizadas em relação a coesão, avaliadas nos pontos de integração próximos a placa de fundação em função dos deslocamentos prescritos; para os angulos de inclinação de 10, 20 e 30 graus em confronto com a solução da fundação plana (inclinação nula). A partir destes resultados, elabora-se o gráfico da Figura VII.10 relação fator de capacidade de carga (N_C) x inclinação da sapata, que evidencia uma variação de até 40% no fator de capacidade de carga, N_C, para os casos considerados.

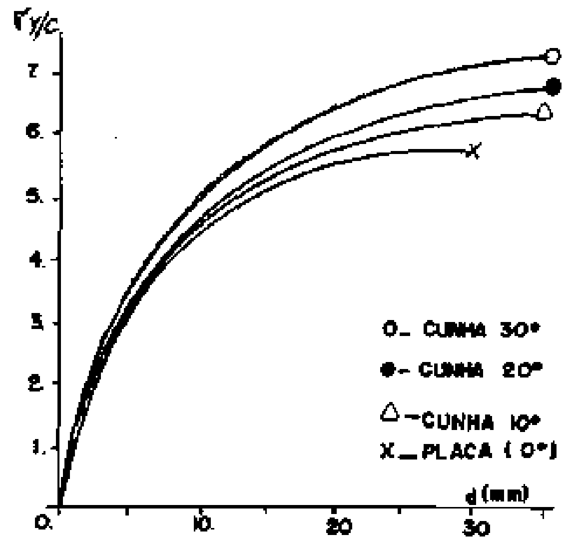


Fig. VII.9 - Análise Limite

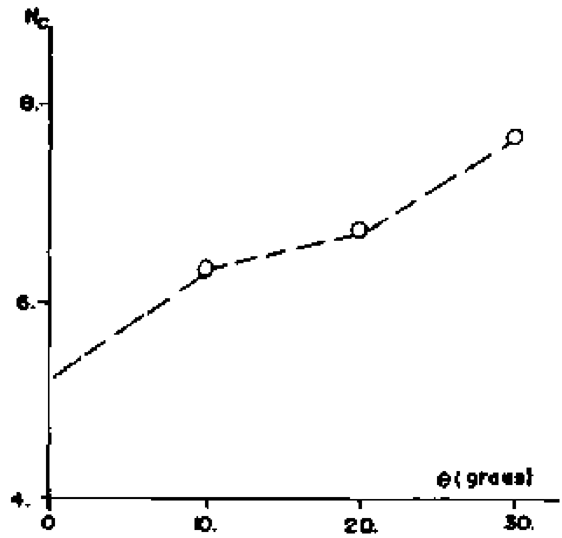


Fig. VII.10 - N_C x Inclinação da Sapata

Para análise da influência do elemento infinito na capacidade de carga, empregou-se a malha da Figura VII.11, para uma inclinação de 30°.

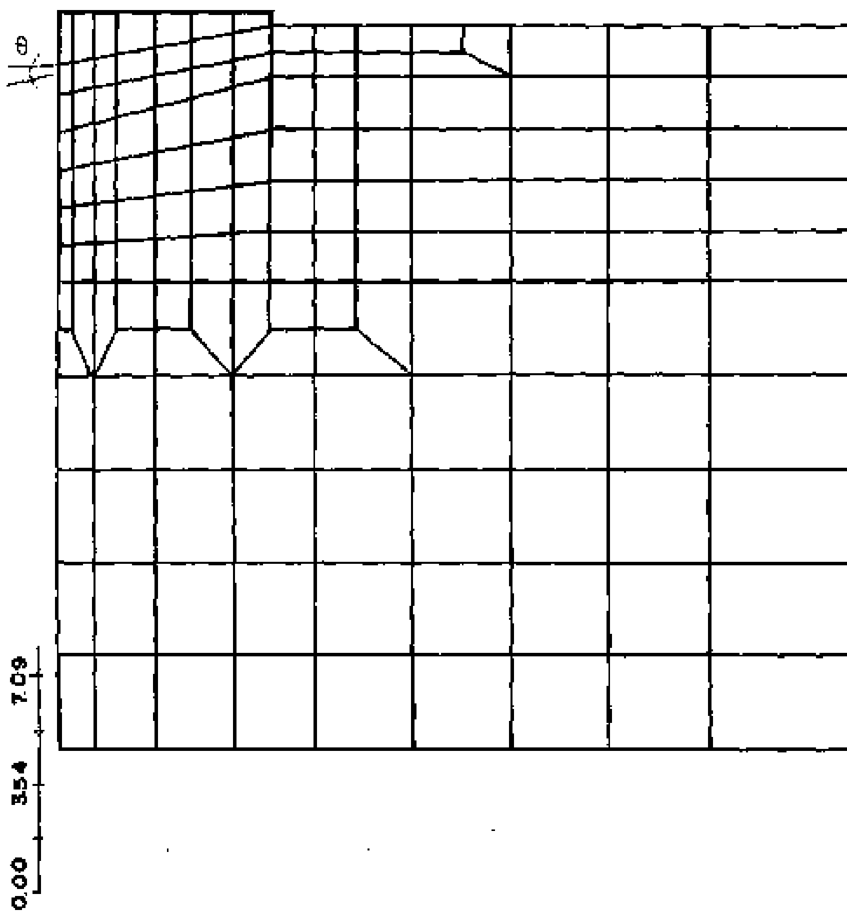


Fig. VII.11 - Malha com Elemento Infinito

p/θ = 30°

A Tabela VII.3, confronta os resultados obtidos sem elemento infinito e com elemento infinito para a inclinação de 30°.

Observa-se que as diferenças são praticamente desprezíveis, constatando que as duas malhas foram bem escolhidas, de ve-se observar, porém, que o custo computacional é menor com a utilização do elemento infinito, e que este deve ser colocado fora da região de plastificação do solo.

Tabela VII.3 - Comparação dos resultados com a utilização do elemento infinito (E.I.) para inclinação de 30^o.

d (mm)	σ_y/C sem E.I.	σ_y/C com E.I.
5	3,31	3,33
10	4,94	4,97
15	5,82	5,83
20	6,52	6,55
25	6,91	6,92
30	7,19	7,21
35	7,25	7,28

Para a análise da influência do elemento de interface na capacidade de carga, empregou-se a malha da figura VII.12 para uma inclinação de 30^o, com os seguintes parâmetros físicos de interface:

Espessura = 5 cm

Coeficiente de rigidez normal = 70000 kN/m^2

Coeficiente de rigidez cisalhante = 24150 kN/m^2

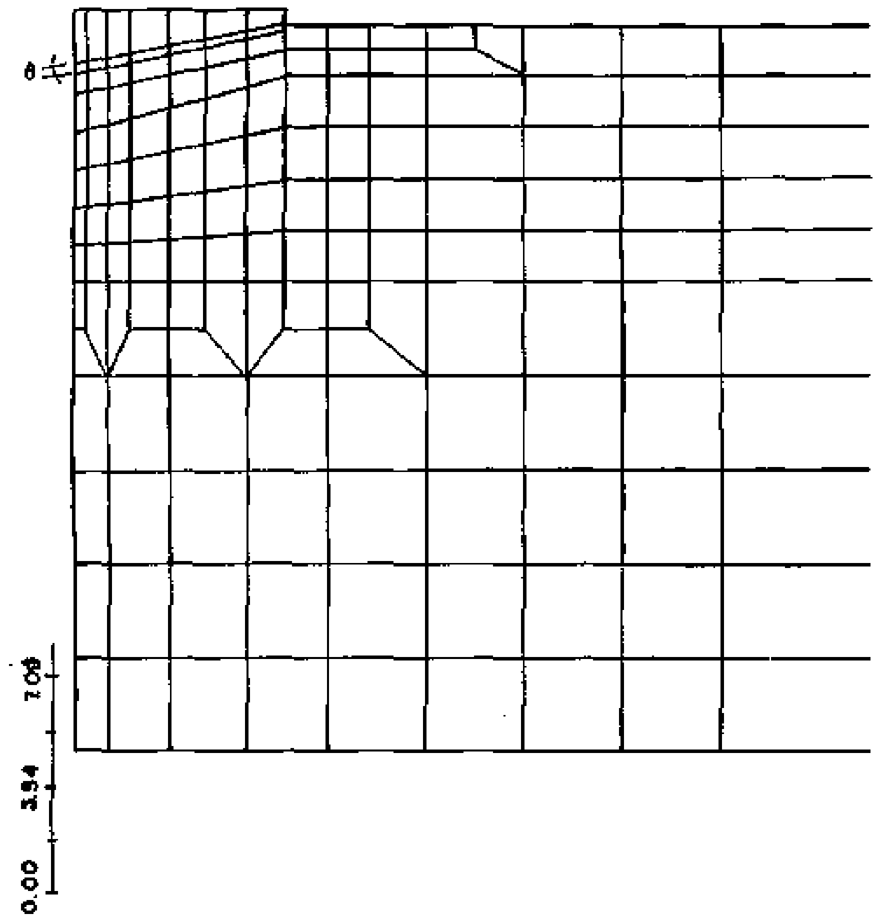


Fig. VII.12 - Malha com Elemento de Interface e Infinito.

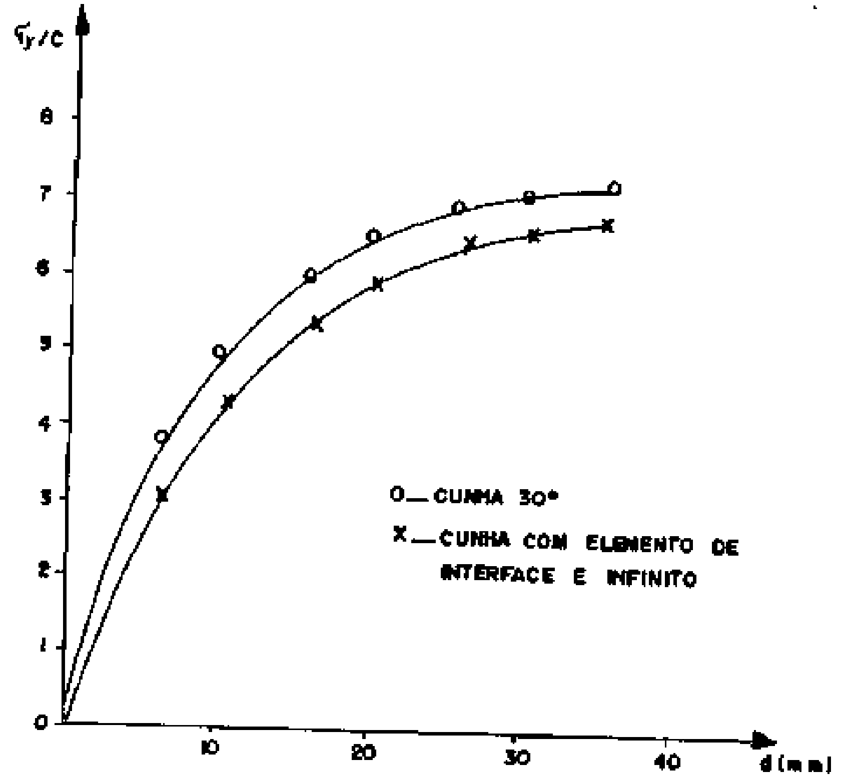


Fig. VII.13 - Análise Limite σ_y/C x d.

A Figura VII.13 apresenta as curvas $\sqrt{y}/C \times d$ para os casos de cunha com 30°, e cunha com 30° com elemento de interface e infinito. Observa-se que para o segundo caso obtém-se resultados consideravelmente menores, o que é explicado pela não aderência sapata-solo, amenizando a transferência de tensões para o solo, resultando em valores menores para a capacidade de carga na ordem de 10%.

Verifica- se que os resultados obtidos com elementos quadráticos (8 nós) e integração (2x2), são mais precisos e econômicos que os obtidos com elementos lineares (4 nós) e integração (3x3).

O algoritimo combinado 1 revelou- se o mais eficiente tanto em termos de precisão quanto em tempo de processamento. Os incrementos iniciais do carregamento devem ser pequenos para estabilização da matriz de rigidez. Para o material plástico- perfeito (H'=0) a convergência é mais rápida.

Observa- se que a função de decaimento (r_j/r) para o elemento infinito, também funcionou bem este caso.

Para determinar a espessura do elemento de interface realizou- se um estudo paramétrico, concluindo- se que a relação entre a espessura (h) e comprimento (L) deve ficar entre o intervalo 0,01 a 0,1. É importante ressaltar que quando a espessura é muito pequena defronta- se com dificuldades computacionais; e quando é muito grande a interface comporta- se como um elemento convencional não representando o deslocamento relativo.

VIII. CONCLUSÕES

A análise não linear de estruturas envolve um alto esforço computacional, levando a um custo de processamento elevado. Por este motivo, no desenvolvimento de um programa desta natureza, deve-se alertar para certos ítens tais como: portabilidade, modelos eficientes, economia de memória, harmonia na lógica para evitar redundância etc..

O resumo apresentado sobre os conceitos básicos de elasto-plasticidade e os critérios de plastificação, são indispensáveis à interpretação dos parâmetros necessários a formulação elasto-plástica, e ao conhecimento dos limites de aplicabilidade, deficiências e hipóteses de cada modelo.

Os problemas analisados com elementos infinitos, fornecem resultados melhores, comparados com outras soluções aproximadas; além de obter considerável economia computacional. Constata-se que a utilização do elemento infinito fora da região de plastificação é o ideal para obtenção de bons resultados, uma vez que não é necessário se preocupar com a posição nem com o tamanho do elemento, eliminando assim o problema de onde restringir a malha. A literatura técnica apresenta vários tipos de elementos infinitos e todos apresentaram bons resultados, mas ainda prossegue a discussão sobre a função de decaimento mais adequada para cada tipo de problema.

A implementação do elemento de interface para análise da interação solo-estrutura, foi um grande avanço tecnológico nesta área de pesquisa. O efeito de deslizamento é bem representado por este elemento, obtendo assim, resultados mais coerentes com a realidade. A obtenção dos parâmetros físicos da interface é a questão mais importante para aplicação deste elemento; é difícil obter amostras representativas (ou mesmo elaborar amostras artificiais e modelos reduzidos). Para amenizar tais dificuldades, faz-se um estudo paramétrico, estabelecendo com segurança a influência dos parâmetros físicos na solução. Embora o elemento de interface tenha sido extensamente testado, ao nível do modelo matemático, ressalta-se que sua implementação não é definitiva, necessitando uma investigação mais elaborada no que se refere a sua compatibilidade com o modelo físico, e sua influência na estabilidade numérica do algorítmo.

O programa implementado utiliza-se das modernas técnicas de programação estruturada, sendo não redundante e abrangente, além de se valer da técnica frontal para soluções de equações, proporcionando considerável economia de memória e facilmente transportado para um microcomputador.

Com os resultados obtidos, pretende-se estimular o interesse de continuar este estudo, na análise dinâmica de estruturas, incluindo além dos efeitos não-linear discutidos, os provenientes de outras fontes, como não linearidade geométrica, viscoplasticidade, equações constitutivas para tratar com rigor solos submersos, tensões iniciais, aplicações tridimensionais, etc.

IX. REFERÊNCIAS

IX.1 - REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO II

II.1 - HILL, R., The Mathematical Theory of Plasticity,Oxford University, 1950.

II.2 - PRAGER, W., An Introduction to Plasticity, Addison Wesley, Amsterdam and London, 1959.

II.3 - HOFFMAN, O. and SACHS, G., Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers. Mc Graw-Hill, 1953.

II.4 - BRIDGMAN,P. W., Studies in Large Plastic Flow and Fracture, Mc Graw-Hill, New York, 1952.

II.5 - NAYAK, G.C. and ZIENKIEWICZ, O.C., Convenient form of stress invariants for Plasticity, journ of the Struct. Div. Proc. of A.S.C.E., 949-953, April,1972

II.6 - D.R.J. Owen, E. Hinton - Finite Elements in Plasticity, Redwood Burn Limited, Swansea, 1980.

IX.2 - REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO III

III.1 - O.C.ZIENKIEWICZ. The Finite Element Method in Engineering Science - Mc Graw-Hill, London - 1971.

III.2 - Klaus-Jürgen Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis - Prentice Hall, New Jersey - 1982.

III.3 - D.R.J. Owen; E. Hinton, Finite Elements in Plasticity, Pedwood Burn Limited, Swansea, 1980.

IX.3 - REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO IV

IV.1 - GOODMAN, R.E.; TAYLOR, R.L.; BREKKE, T.L. - "A Model for the Mecanics of Jointed Rock" - Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, SM3, 637-659, May 1968.

IV.2 - GHABOUSSI, J.; WILSON, E.L.; ISEMBERG, J. - "Finite Element for Rock Joints and Interfaces" - Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division,SM10, 833-847, 1973.

IV.3 - DESAI, C.S. - "Soil-Structure Interaction and Simulation Problems" - Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. GUDEHUS, John Wiley & Sons, 1977.

IV.4 - SMITH, I.M. - "Some Time - Dependent Soil - Structure Interaction Problems" - Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. GUDEHUS, John Wiley & Sons, 1977.

IV.5 - WILSON, W.L. - Finite Elements for Foundadions, Joints and Fluids" - Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. GUDEHUS, John Wiley & Sons, 1977.

IV.6 - GOODMAN, R.E. -"Analysis in Jointed Rocks" - Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. GUDEHUS, John Wiley & Sons, 1977.

IV.7 - DESAI, C.S.; ABEL, J.F. - "Introduction to the Finite Element Method. A Numerical Method for Engineering Analysis" - Von Nostrand Reinhold Company, 1972.

IV.8 - ZIENKIEWICZ, O.C. et all - "Analysis of Nonlinear Problems in Rock Mechanics with Particular Reference to Jointed Rock Systems" - Proceedings of the 2nd Congress of the International Society for Rock Mechanics, Belgrade, Yugoslavia, 1970.

IV.9 - BARTON, N.R. - "A Model Study of Rock-Joint Deformation" International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 9, Nº 5, 1972.

IV.10 - GOODMAN, R.E.; DUBOIS, J. - "Duplication of Dilatancy in Analysis of Jointed Rocks" - Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 98, No. SM4, Proc. Paper, 399-422, April, 1972.

IV.11 - LUCO, J.E.; HADJIAN, A.H. - "Two-Dimensional Approximations to the Three-Dimensional Soil-Structure Interaction Problem" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 31, 195-203, 1974.

IV.12 - SCAVUZZO, R.J.; RAFTOPOULOS, D.D. - "A Review of Soil - Structure Interaction Effects in the Seismic Analysis of Nuclear Power Plants" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 28, 400-413, 1974.

IV.13 - CONSTANTINO, C.J.; MILLER, C.A. - "Soil-Structure Interaction Parameters from Finite Element Analysis" Nuclear Engineering and Design, Vol. 38, 289-302, 1976.

IV.14 - WOLF, J.P. - "Soil-Structure Interaction With Separation of Base Mat from Soil" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 38, No. 2, 357-384, August, 1976.

IV.15 - LYSMER, J.; UDAKA, T.; TSAI, E.; CHAN and SEED, H.B. - "Flush - A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems" - U.S. Department of Commerce, National Technical Information Service, PB-259332.

IV.16 - LEE, T.H.; WESLEY, D.A. - "Soil-Structure Interaction of Nuclear Reactor Structures Considering Through-Soil Coupling Between Adjacent Structures" - Nuclear Engineering and Design, Vol. 24, 374-387, 1973.

IX.4 - REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO V

V.1 - BEER, G. and MEEK, J.L. - "Infinite Domain Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 43-52, 1981.

V.2 - LYNN, P.P. - "Infinite Elements with $1/r^n$ Type Decay", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 347-355, 1981.

V.3 - MEDINA, F. - "An Axysimmetric Infinite Element", International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 17, 1177-1185, 1981.

V.4 - BETESS, P. - "More on Infinite Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, 1613-1626, 1980.

V.5 - TELLES, J.C. and BREBBIA, C.A. - "Boundary Element Solution for Half-Plane Problems", Int. J. Solids Structure, Vol. 17, Nº 12, pp 1149-1158, 1981.

V.6 - TIMOSHENKO, P. and GOODIER, J.N. "Theory of Elasticity. Out. Student Edition, 3rd vol, McGraw Hill.

V.7 - COSTA, A.M. - "Análise Visco-Elástica de Escavações Subterrâneas pelo Método dos Elementos Finitos". Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

V.8 - CHOW, Y.K. and SMITH, I.M. - "Static and Periodic Infinite Solid Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp 503-526, 1981.

V.9 - BETESS, P. and ZIENCIENWCZ, O.C. - "Diffration and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 1271-1290, 1977.

V.10 - POULOS, H.G. e DAVIS, E.H.- "Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics", John Wiley & Sons, IMC, 1979.

V.11 - B. Venkatraman and S.A. Patel, Structured Mechanics with Introduction to Elasticity and Plasticity. McGraw Hill, New York, (1970).

IX.5 - REFERÊNCIAS DO CAPÍTULO VII

VII.1 - LYNN, P.P. - "Infinite Elements with $1/r^n$ Type Decay", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 347-355, 1981.

VII.2 - FEODOSIEV, V.I. - Resistência de Materiàles - Ed. Mir, Moscou, 1972.

VII.3 - BEER, G. and MEEK, J.L. - "Infinite Domain Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 43-52, 1981.

VII.4 - TIMOSHENKO, P. and GOODIER, J.N. - Theory of Elasticity. Out. Student Edition, 3rd vol., McGraw Hill.

VII.5 - KEE, R., Geotechinical Hazards Associated with leg Penetration of Jack up Rigs, 5th, offshore South East Asia, Singapore, 1984,

VII.6 - J.L.D. Alves; A.L. G.A. Coutinho; N.F.F. Ebecken;e L. Landau - "Avaliação Numérica para Capacidade de Carga para Fundações de Plataformas Auto-Elevatórias. Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Estruturas, Vol. 3, Nº 1, pp. 37-48, 1985.