

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

À TEORIA DE REISSNER PARA FLEXÃO DE PLACAS

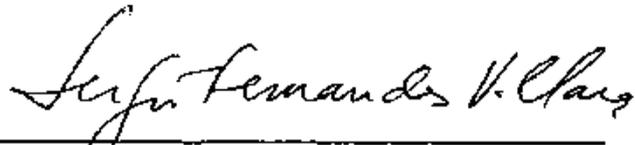
Vânia José Karam

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por:



Hebe João Mansur
(Presidente)



Sérgio Fernandes Villaça



Wilson Sérgio Venturini

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 1986

KARAM, VÂNIA JOSÉ

Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas (Rio de Janeiro) 1986.

xvi , 142 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1986)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Elementos de Contorno 2. Teoria de Reissner

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

A meu pai (in memoriam)

A minha mãe

A meu irmão

AGRADECIMENTOS

Ao Professor José Cláudio de Faria Telles pela orientação, pelo incentivo e valiosas sugestões e colaboração.

Ao Professor Webe João Mansur pelo apoio.

Aos colegas e professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ.

A José Antônio Fontes Santiago pela colaboração.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À Jaciãra Roberta e à Maria José pelo trabalho de datilografia e ao Eduardo pelos desenhos.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
À TEORIA DE REISSNER PARA FLEXÃO DE PLACAS

Vânia José Karam

Fevereiro de 1986

Orientador: José Cláudio de Faria Telles

Programa : Engenharia Civil

O presente trabalho consiste na aplicação do Método dos Elementos de Contorno à análise de flexão de placas linearmente elásticas, homogêneas e isotrópicas, quando se utiliza a teoria refinada de Reissner.

Inicialmente é apresentado um resumo da teoria de Reissner para flexão de placas.

Em seguida, é desenvolvido o Método dos Elementos de Contorno aplicado a essa formulação, deduzindo-se as equações integrais básicas por meio de dois procedimentos alternativos e apresentando-se os tensores da solução fundamental. É mostrado também como o método se aplica ao caso de placas infinitas.

Descrevem-se ainda os procedimentos adotados na implementação numérica da referida formulação e apresenta-se a estrutura do programa desenvolvido para esse fim, bem como o seu manual de utilização.

Ao final, são apresentados alguns exemplos numéricos, cujos resultados são comparados com soluções analíticas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO
REISSNER'S THEORY FOR BENDING OF PLATES

Vânia José Karam

February, 1986

Chairman : José Cláudio de Faria Telles
Department: Civil Engineering

This work consists on the application of the Boundary Element Method for the analysis of homogeneous, isotropic and linearly elastic plates, when the refined Reissner's theory is used.

First, a summary of Reissner's model for the bending of plates is shown.

Then, the Boundary Element Method is developed for this formulation, with the basic integral equations being deduced through two alternative procedures. The fundamental solution is also presented and it is shown how the method can be applied to infinite plates.

The procedures used in the numerical implementation of this formulation are described and the corresponding program structure is presented together with its user's manual.

At the end, some numerical examples are presented and the results are compared to analytical solutions.

PRINCIPAIS NOTAÇÕES UTILIZADAS NO TEXTO

Índices: $i, j, k \rightarrow$ variam de 1 a 3

$\alpha, \beta, \gamma, \theta \rightarrow$ variam de 1 a 2

$w \rightarrow$ flecha

$\phi_\alpha \rightarrow$ rotações

$\sigma_{\alpha\beta} \rightarrow$ componentes do tensor de tensões

$\chi_{\alpha\beta} \rightarrow$ componentes do tensor de deformações específicas de flexão

$\psi_\alpha \rightarrow$ componentes do tensor de deformações específicas cisalhantes transversais

$M_{\alpha\beta} \rightarrow$ momentos fletores e torsores por unidade de comprimento

$Q_\alpha \rightarrow$ esforços cortantes por unidade de comprimento

$x_i \rightarrow$ eixos coordenados

$u_i \rightarrow$ componentes dos deslocamentos generalizados

$p_i \rightarrow$ componentes das forças de superfície generalizadas

$u_{ij}^* \rightarrow$ componentes do tensor de deslocamentos da solução fundamental

$p_{ij}^* \rightarrow$ componentes do tensor de forças de superfície da solução fundamental

- v_i^* → funções que satisfazem determinada equação de Poisson
- $u_{i\beta k}^*$ → componentes do tensor que multiplica as forças de superfície na expressão dos esforços nos pontos internos
- $p_{i\beta k}^*$ → componentes do tensor que multiplica os deslocamentos na expressão dos esforços nos pontos internos
- $w_{i\beta}^*$ → componentes do tensor que multiplica as forças de domínio na expressão dos esforços nos pontos internos
- $C_{i\beta j\theta}$ → componentes do tensor isotrópico de quarta ordem de constantes elásticas
- h → espessura
- E → módulo de elasticidade
- ν → coeficiente de Poisson
- $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ → rigidez à flexão da placa
- $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$ → constante característica das equações de Reissner
- q → carga transversal por unidade de área
- ξ → ponto fonte ou ponto carga
- x → ponto campo
- r → distância do ponto ξ ao ponto x

z → produto expresso por $\lambda . r$

$r_{, \alpha}$ → derivada de r em relação à coordenada x_{α}

n_{β} → cosseno diretor da normal em relação ao eixo x_{β}

K_0 e K_1 → funções de Bessel modificadas de ordem inteira

Δ_{ij}^* → componentes do operador de Navier

δ_{ij} → delta de Kronecker

$\delta(x - \xi)$ → delta de Dirac

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\alpha}}$ → operador de Laplace

n → coordenada adimensional

\underline{A} → matriz do sistema de equações

\underline{F} → vetor correspondente aos valores prescritos

\underline{X} → vetor de incógnitas

\underline{M} → matriz que contém as funções de interpolação para as coordenadas

\underline{N} → matriz que contém as funções de interpolação para deslocamentos e forças de superfície

$|\underline{J}|$ → jacobiano

- \underline{U}^* → matriz que contém os deslocamentos fundamentais
- \underline{P}^* → matriz que contém as forças de superfície da solução fundamental
- \underline{G} → matriz formada pelas submatrizes $\underline{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \underline{U}^* \underline{N} |\underline{J}| d\eta$
- \underline{H} → matriz formada pelas submatrizes $\underline{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \underline{P}^* \underline{N} |\underline{J}| d\eta$
- \underline{B} → vetor cujas componentes são expressas por integrais associadas às forças de domínio
- Ω → domínio da região a ser analisada
- Ω^* → domínio da região que contém Ω e cujo contorno está infinitamente distante da placa
- Γ → contorno da região definida por Ω
- Γ^* → contorno da região definida por Ω^*
- Γ_j → contorno do elemento j
- Γ_u → parte do contorno Γ onde os deslocamentos generalizados são prescritos
- Γ_p → parte do contorno Γ onde as forças de superfície generalizadas são prescritas
- \bar{u}_k → deslocamentos generalizados prescritos

$\bar{p}_k \rightarrow$ forças de superfície generalizadas prescritas

$\bar{M}_{\alpha\beta} \rightarrow$ momentos prescritos

$\bar{Q}_\alpha \rightarrow$ esforços cortantes prescritos

ÍNDICE

	Pág.
<u>CAPÍTULO I</u> - <u>INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO II</u> - <u>RESUMO DA TEORIA DE REISSNER PARA A ANÁLISE</u> <u>DE FLEXÃO DE PLACAS</u>	5
2.1 - Introdução	5
2.2 - Expressões das Tensões	5
2.3 - Esforços Resultantes	7
2.4 - Equações de Equilíbrio	9
2.5 - Deslocamentos Generalizados	10
2.6 - Deformações Específicas Generalizadas...	10
2.7 - Expressões dos Esforços	11
2.8 - Sistema de Equações de Reissner	12
2.9 - Condições de Contorno	13
<u>CAPÍTULO III</u> - <u>O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO</u> <u>À TEORIA DE REISSNER</u>	15
3.1 - Introdução	15
3.2 - Equação Integral Básica	16
3.2.1 - Considerações Preliminares ...	16
3.2.2 - Dedução a Partir do Segundo Teorema de Betti	19
3.2.3 - Dedução a Partir do Método dos Resíduos Ponderados	24

ÍNDICE - Continuação

	Pág.
<u>CAPÍTULO IV - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA</u>	57
4.1 - Introdução	57
4.2 - Equações Discretizadas	58
4.2.1 - Cálculo do Problema no Con- torno, através do Sistema de Equações	59
4.2.2 - Cálculo dos Deslocamentos nos Pontos Internos	64
4.2.3 - Cálculo dos Momentos e Esfor- ços Cortantes nos Pontos Internos	65
4.3 - Elementos Utilizados	66
4.3.1 - Elemento Quadrático Isopara- métrico Contínuo	66
4.3.2 - Elemento Quadrático Isopara- métrico Descontínuo	70
4.4 - Descontinuidade da Normal ou da Condição de Contorno	72
4.4.1 - Utilização de Nô Duplo	73
4.4.2 - Utilização de Elemento Descontínuo	73

ÍNDICE - Continuação

Pág.

4.5 -	Integrais Singulares	75
4.5.1 -	Cálculo das Submatrizes da Diagonal de \underline{G}	76
4.5.2 -	Cálculo das Submatrizes da Diagonal de \underline{H}	83
4.5.2.1 -	Caso de Placas Finitas..	83
4.5.2.2 -	Caso de Placas Infi- nitas	85
4.5.3 -	Cálculo dos Subvetores de \underline{B} nos Elemen- tos Singulares	89

CAPÍTULO V - ESTRUTURA DO PROGRAMA 90

5.1 -	Introdução	90
5.2 -	Fluxograma	90
5.3 -	Definição das Subrotinas	90
5.4 -	Manual de Utilização	94

CAPÍTULO VI - APLICAÇÕES 105

6.1 -	Introdução	105
-------	------------------	-----

ÍNDICE - Continuação

	Pág.
6.2 - Exemplo 1: Torção de uma Placa Quadrada ...	105
6.3 - Exemplo 2: Placa Circular com Pressão Uniforme	108
6.4 - Exemplo 3: Placa Quadrada com Carga Distribuída Uniforme	114
6.5 - Exemplo 4: Placa Infinita com Forças de Superfície Prescritas ao Longo do Furo	122
6.6 - Exemplo 5: Placa Infinita com Furo Sujeita a Momento x Constante	126
<u>CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES</u>	132
7.1 - Introdução	132
7.2 - Conclusões e Observações	132
7.3 - Sugestões	133
<u>APÊNDICE A - FUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADAS K_0 E K_1</u>	135
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	140

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Para a análise de flexão de placas através do Método dos Elementos de Contorno foram desenvolvidas inicialmente formulações baseadas na teoria clássica de Kirchhoff-Love ^[1]-^[2]. Mais recentemente, o referido método tem sido desenvolvido também para a teoria de Reissner ^[8]-^[12].

A teoria de Reissner para flexão de placas é uma teoria mais refinada que a teoria clássica, cuja validade se limita a placas delgadas e foi estudada em ^[13].

A teoria clássica ^[14] lida com certas simplificações, destacando-se o fato de considerar desprezíveis as deformações cisalhantes transversais, o que conduz a resultados inexatos tanto nos bordos e cantos da placa como próximo a furos com diâmetro da ordem de grandeza da espessura. Além disso, não possibilita a análise de placas espessas.

Já na teoria de Reissner ^[15]-^[17], a deformação cisalhante transversal não é desprezada e os efeitos da espessura sobre os valores calculados são levados em consideração, não se apresentando portanto os problemas acima mencionados.

O Método dos Elementos de Contorno, por lidar com discretização apenas ao longo do contorno da região a ser analisada, destaca-se de outros métodos numéricos existentes, como é

o caso do Método dos Elementos Finitos, em que se necessita discretizar todo o domínio. No caso de placas, quando se usam elementos de contorno, são discretizadas apenas as linhas de contorno que circundam a sua superfície média.

Em consequência, são obtidos sistemas de equações menores e o tempo computacional, em geral, é também reduzido, embora dependa ainda de outros fatores como o número de pontos internos utilizado.

Uma outra vantagem que pode ser apontada quando se utilizam elementos de contorno é que o cálculo nos pontos internos da placa pode ser feito apenas naqueles pontos em que isso se fizer necessário. E ainda, todos os valores calculados nos pontos internos, tanto os deslocamentos como os momentos e esforços cortantes, possuem a mesma precisão. Quando da utilização do Método dos Elementos Finitos (modelo de deslocamentos), sabe-se que os esforços que são calculados possuem precisão inferior aos deslocamentos, pelo fato de serem obtidos por derivação destes. Já no Método dos Elementos de Contorno, derivam-se os tensores da chamada solução fundamental, não acarretando perda de precisão.

Baseando-se em dois procedimentos diferentes, serão deduzidas as equações integrais básicas que, depois de escritas para um ponto no contorno e discretizadas ao longo do mesmo, formarão o sistema de equações. Como temos três direções generalizadas em cada ponto considerado, sendo duas rotações e uma translação, teremos três equações para cada ponto.

Serão também apresentados os tensores da solução fundamental e obtidas as expressões que permitem o cálculo dos deslocamentos e esforços nos pontos internos.

Cabe ressaltar que as integrais relativas às forças de domínio são desenvolvidas aqui para cargas distribuídas uniformes e transformadas em integrais no contorno da placa.

A montagem do sistema de equações, assim como a aplicação das condições de contorno e o cálculo nos pontos internos foram realizados seguindo-se os procedimentos adotados em [18] e [19].

As integrais que aparecem nessas equações foram resolvidas numericamente através da quadratura de Gauss. No caso de integrais com singularidade logarítmica, o problema foi resolvido através de uma transformação quadrática sobre as coordenadas dos pontos de integração, o que permitiu que fossem resolvidas sem que se precisasse isolá-las e utilizar funções de peso logarítmicas.

Os elementos de contorno aqui empregados foram elementos quadráticos isoparamétricos, podendo ser contínuos ou descontínuos. Esses elementos foram escolhidos por representarem satisfatoriamente tanto a geometria como as funções envolvidas, sendo que os elementos descontínuos foram utilizados em casos especiais de descontinuidade tanto da normal como de condições de contorno, assim como a consideração de nó duplo.

O Método dos Elementos de Contorno permite ainda a análise de placas com domínio infinito, conforme será também mostrado.

No decorrer deste texto, será utilizada a notação indicial, representando-se por letras gregas os índices que variam de 1 a 2 e por letras romanas, quando estes índices variarem de 1 a 3.

CAPÍTULO II

RESUMO DA TEORIA DE REISSNER PARA A ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS

2.1 - Introdução

A teoria de Reissner para flexão de placas se baseia na teoria da elasticidade e no Princípio de Hellinger-Reissner, donde se obtêm um problema de integração de sexta ordem que satisfaz a três condições de contorno por bordo. Já na teoria clássica, as simplificações anteriormente citadas conduzem a uma equação de quarta ordem, satisfazendo a apenas duas condições de contorno em cada bordo ^[15].

São apresentadas neste capítulo, as fórmulas básicas para o cálculo de placas quando se utiliza a teoria de Reissner ^[15]-^[17], assim como a definição das condições de contorno.

2.2 - Expressões das Tensões

Seja uma placa linearmente elástica, homogênea e isotrópica, com espessura h constante e sujeita a um carregamento transversal q por unidade de área.

Sejam ainda x_i as coordenadas cartesianas, onde

x_α estão na superfície média e x_3 na direção transversal da placa (Figura 2.1).

As condições de carga nas faces da placas são:

$$\sigma_{33} = \pm \frac{q}{2} \text{ e } \sigma_{\alpha 3} = 0 \text{ para } x_3 = \pm \frac{h}{2} \text{ [}^{\circ}\text{]}.$$

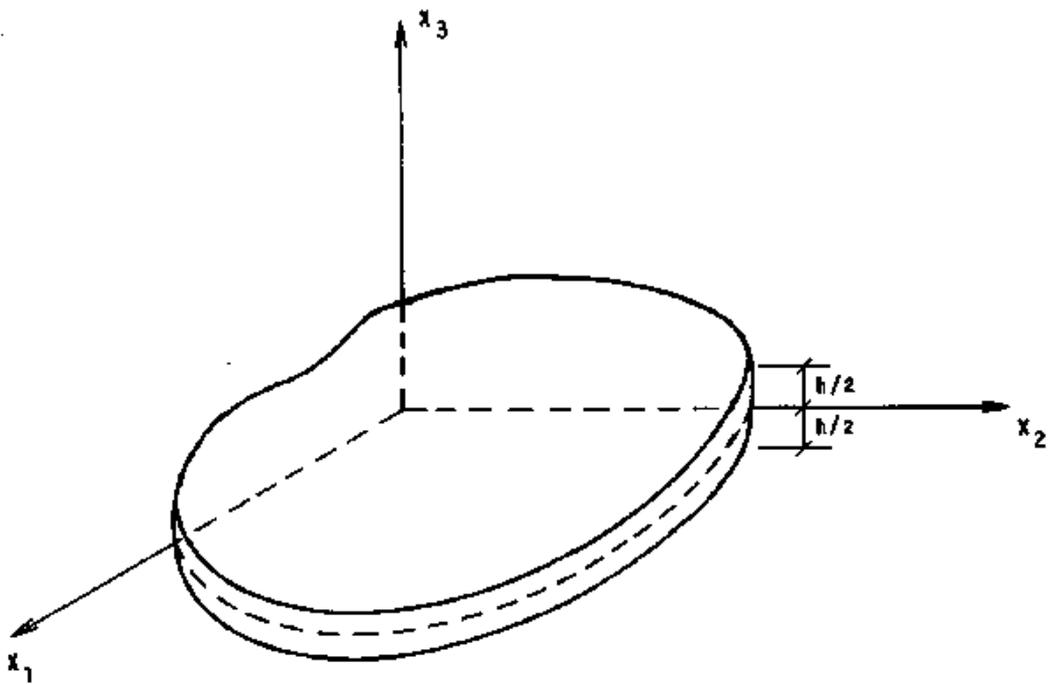


Fig.2.1 - Sistema de coordenadas

As tensões variam ao longo da espessura segundo as expressões abaixo, dadas em função dos esforços resultantes [}^{\circ}\text{]}.

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12 M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3Q_{\alpha}}{2h} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_{33} = \frac{q x_3}{2h} \left[3 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]$$

(2.1)

As tensões normais σ_{33} , que atuam na direção transversal, são consideradas desprezíveis em relação às demais.

2.3 - Esforços Resultantes

As resultantes de tensão por unidade de comprimento, na superfície média da placa, são definidas por:

i) Momentos Fletores e Torsões

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (2.2a)$$

ii) Esforços Cortantes

$$Q_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.2b)$$

Os sentidos positivos desses esforços estão indicados na Figura 2.2.

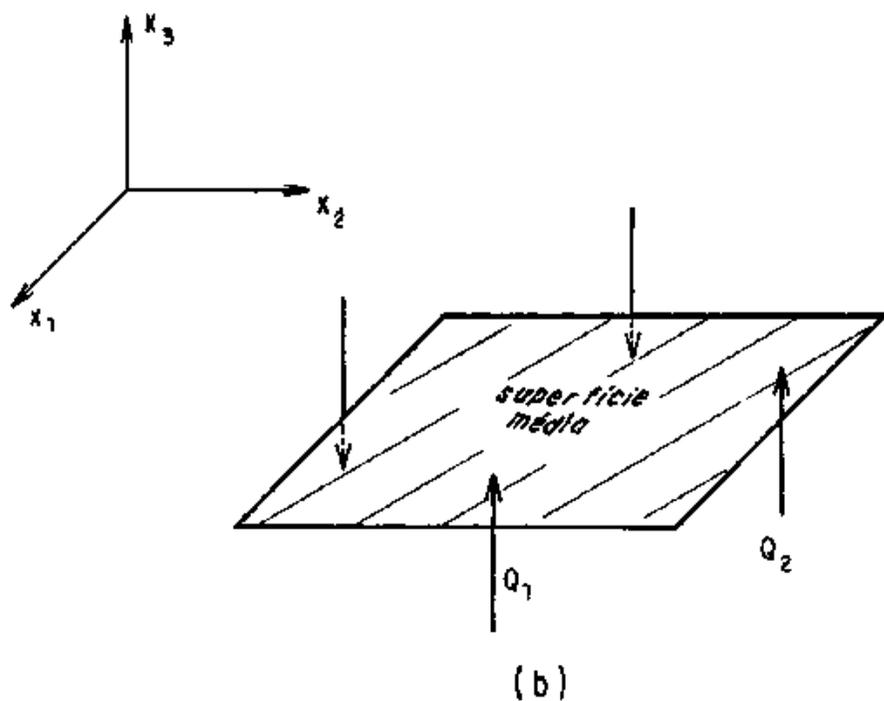
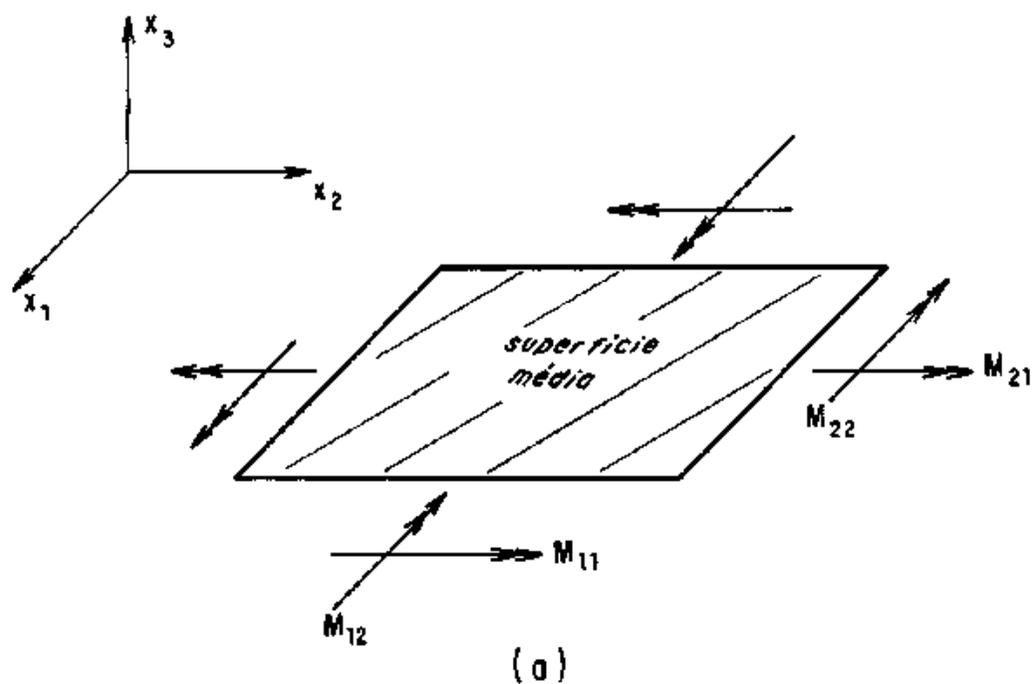


Fig. 2.2 - Esforços resultantes : a) momentos ; b) esforços cortantes

2.4 - Equações de Equilíbrio

Considerando a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos e fazendo o equilíbrio de um elemento de placa (Figura 2.3) obtêm-se:

i) Pelo equilíbrio de forças na direção x_3 :

$$Q_{\alpha, \alpha} + q = 0 \quad (2.3a)$$

ii) Pelo equilíbrio de momentos em relação aos eixos x_α :

$$M_{\alpha\beta, \beta} - Q_\alpha = 0 \quad (2.3b)$$

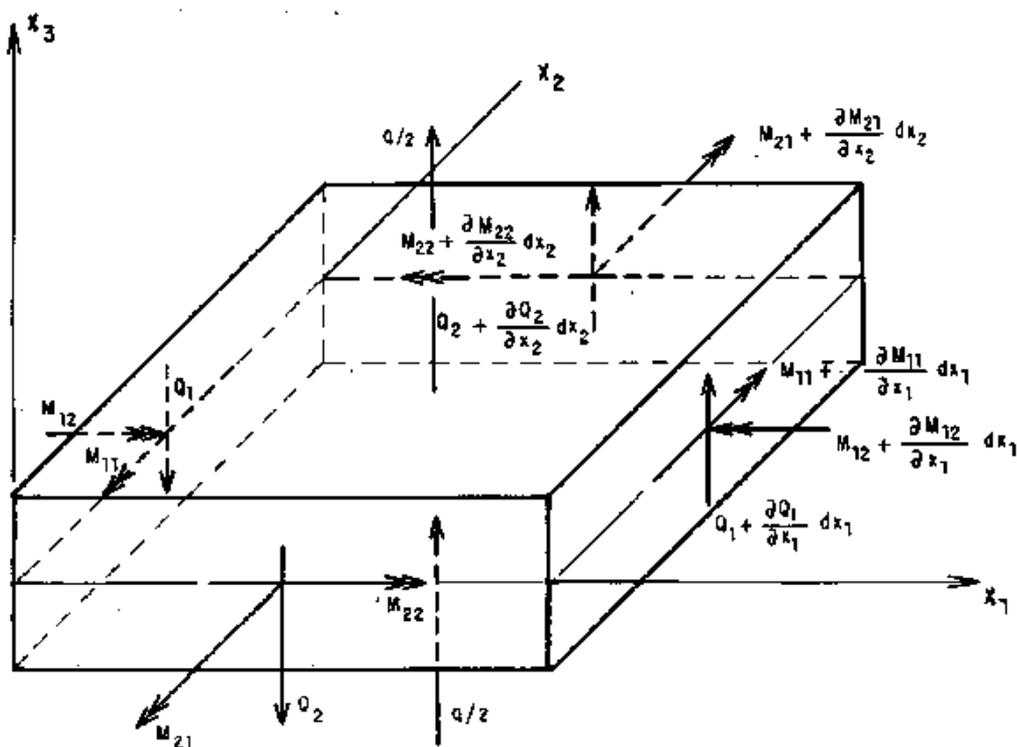


Fig. 2.3 - Elemento de placa em equilíbrio

2.5 - Deslocamentos Generalizados

Serão considerados, para pontos da superfície média da placa, deslocamentos generalizados ϕ_α e w , que representam a média ponderada dos deslocamentos v_i de pontos situados ao longo da espessura nas direções dos eixos coordenados. Suas expressões são dadas a seguir |*|:

- i) Rotação da normal ã superfície média nos planos $x_\alpha - x_3$:

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_\alpha x_3 dx_3 \quad (2.4a)$$

- ii) Deslocamento transversal (flecha):

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_3 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad (2.4b)$$

2.6 - Deformações Específicas Generalizadas

As expressões das deformações específicas generalizadas em função dos deslocamentos generalizados da placa, quando se utiliza a teoria linear são:

- i) Deformações específicas de flexão:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} \right) \quad (2.5a)$$

ii) Deformações específicas cisalhantes transversais:

$$\psi_{\alpha} = \phi_{\alpha} + w_{,\alpha} \quad (2.5b)$$

Ressalta-se aqui que a teoria clássica de Kirchhoff-Love negligencia as deformações específicas cisalhantes transversais, considerando pois $\psi_{\alpha} = 0$. Conseqüentemente, as rotações são obtidas nesse caso simplesmente através de derivadas da flecha.

Já na teoria de Reissner isso não ocorre pois as deformações específicas cisalhantes transversais não são desprezadas.

2.7 - Expressões dos Esforços

Utilizando-se a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos aliada a princípios variacionais, podem ser obtidas as expressões dos momentos e esforços cortantes em função dos deslocamentos generalizados, sendo dadas em ⁸ na forma:

i) Momentos:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.6a)$$

ii) Esforços Cortantes

$$Q_{\alpha} = \frac{D (1 - \nu) \lambda^2}{2} (\phi_{\alpha} + w_{,\alpha}) \quad (2.6b)$$

sendo:

ν = coeficiente de Poisson

E = módulo de elasticidade longitudinal

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} = \text{rigidez à flexão da placa} \quad (2.7)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} = \text{constante característica das equações de Reissner} \quad (2.8)$$

$\delta_{\alpha\beta}$ = delta de Kronecker

2.8 - Sistema de Equações de Reissner

As três equações de equilíbrio dadas em (2.3) acrescidas das cinco equações (2.6) independentes (pois $M_{21} = M_{12}$) formam um sistema com oito equações, satisfazendo a três condições de contorno por bordo.

Substituindo as expressões (2.6) nas equações de equilíbrio (2.3), pode-se condensar essas oito equações, obtendo-se um sistema com três equações diferenciais parciais [13] dado por:

$$Q_{\alpha} - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_{\alpha} + \frac{1}{\lambda^2 (1 - \nu)} q_{,\alpha} = -D \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\nabla^2 w)$$

$$D \nabla^4 w + \frac{(2-\nu)}{\lambda^2 (1-\nu)} \nabla^2 q = q \quad (2.9)$$

onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \text{operador de Laplace}$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2$$

2.9 - Condições de Contorno

Devem ser satisfeitas três condições de contorno por bordo, podendo-se prescrever, em cada uma das três direções generalizadas, o deslocamento ou a força de superfície correspondente.

Seja Γ o contorno total da placa, e chamando de Γ_u o contorno onde os deslocamentos generalizados ϕ_α e w são prescritos e Γ_p , onde as forças de superfície generalizadas p_α e p_3 são prescritas, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Em } \Gamma_u : \quad \phi_\alpha &= \bar{\phi}_\alpha \\ w &= \bar{w} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Em } \Gamma_p : \quad p_\alpha &= \bar{p}_\alpha \\ p_3 &= \bar{p}_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
 p_{\alpha} &= M_{\alpha\beta} n_{\beta} \\
 p_{\beta} &= Q_{\beta} n_{\beta}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

e

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{\alpha} &= \bar{M}_{\alpha\beta} n_{\beta} \\
 \bar{p}_{\beta} &= \bar{Q}_{\beta} n_{\beta}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

onde n_{β} são os co-senos diretores da normal exterior ao contorno.

Deve-se ressaltar que na teoria clássica, como as deformações cisalhantes transversais são consideradas desprezíveis, chega-se a uma equação de quarta ordem, satisfazendo a apenas duas condições de contorno por bordo. Isso acarreta resultados inexatos em cantos ou em proximidades de furos com diâmetro da ordem de grandeza da espessura da placa ^{[13], [16]}.

Tal fato não ocorre na teoria de Reissner, onde as três condições de contorno físicas do problema são satisfeitas independentemente e a influência da espessura sobre os deslocamentos e esforços resultantes é levada em consideração ^{[13], [16]}.

CÁPIULO III

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO

À TEORIA DE REISSNER

3.1 - Introdução

Neste capítulo são deduzidas as equações integrais básicas através de dois procedimentos diferentes. Primeiramente, partindo-se diretamente do Segundo Teorema de Betti e em seguida, a partir do Método dos Resíduos Ponderados.

Serão também apresentados os tensores da solução fundamental e obtidas as equações tanto para a resolução do problema no contorno como para o cálculo dos deslocamentos e esforços nos pontos internos.

Além disso, serão feitas certas considerações a respeito do cálculo de placas infinitas.

Cabe ressaltar que no decorrer deste e do próximo capítulos, os deslocamentos generalizados ϕ_α e w definidos em (2.4) serão representados por u_α e u_3 , ou ainda, genericamente, como u_k , por maior conveniência nas expressões que serão utilizadas.

3.2 - Equação Integral Básica

3.2.1 - Considerações Preliminares

Seja uma placa definida por um domínio Ω representado pela sua superfície média e um contorno Γ , representado pela linha que a circunda, em estado de equilíbrio, sujeita a um carregamento transversal q atuando em Ω e possuindo uma espessura constante h .

Sejam as condições de contorno para as três direções generalizadas da placa:

$$\begin{aligned} u_k &= \bar{u}_k & \text{em} & \Gamma_u \\ p_k &= \bar{p}_k & \text{em} & \Gamma_p \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo:

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$$

Seja ainda um domínio Ω^* com um contorno Γ^* , também em equilíbrio, e contendo a referida placa (Figura 3.1).

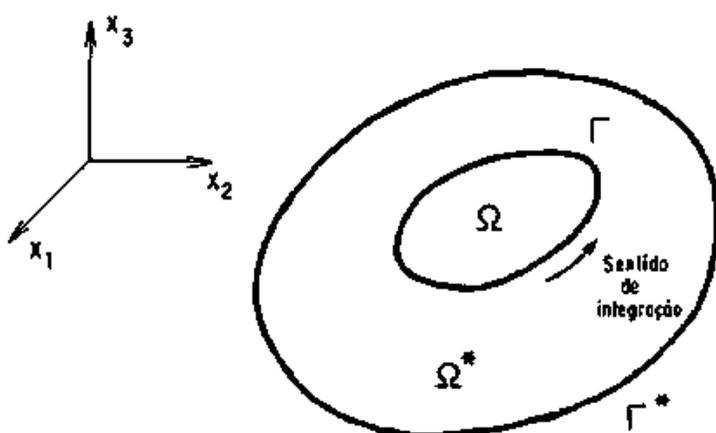


Fig. 3.1 - Região $\Omega^* + \Gamma^*$ que contém a placa $\Omega + \Gamma$

Considerando as equações dadas no capítulo anterior, tem-se:

i) Para a região $(\Omega + \Gamma)$:

Deslocamentos: u_k

forças de superfície: p_k

Sendo: $p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta$

$p_3 = Q_\alpha n_\alpha$

(3.2)

Deformações específicas: $\chi_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta}$

(3.3)

$\psi_\alpha = u_\alpha + u_{j,\alpha}$

Esforços:

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{(1-\nu)}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

$$Q_{\alpha} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\alpha} + u_{3,\alpha})$$

Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} = 0 \quad (3.5)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q = 0$$

ii) Para a região $(\Omega^* + \Gamma^*)$:

Deslocamentos: u_k^*

Forças de superfície: p_k^*

$$\text{Sendo: } p_{\alpha}^* = M_{\alpha\beta}^* n_{\beta} \quad (3.6)$$

$$p_3^* = Q_{\alpha}^* n_{\alpha}$$

$$\text{Deformações específicas: } \chi_{\alpha\beta}^* = u_{\alpha,\beta}^* \quad (3.7)$$

$$\psi_{\alpha}^* = u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*$$

Esforços:

$$M_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} (u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta})$$

$$Q_{\alpha}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*)$$
(3.8)

Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\alpha}^* + F_{\alpha}^* = 0$$
(3.9)

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0$$

onde:

F_k^* são componentes das forças de domínio definidas a fim de se obter a solução fundamental. Estas se distribuem ao longo da es pes su ra como mostrado abaixo:

$$f_{\alpha}^* = \frac{12 x_3}{h^3} F_{\alpha}^*$$

$$f_3^* = \frac{3 F_3^*}{2h} \left[1 - \left(\frac{2 x_3}{h} \right)^2 \right]$$
(3.10)

3.2.2 - Dedução a Partir do Segundo Teorema de Betti.

A primeira das expressões (3.4) pode ser escrita na forma:

$$M_{\alpha\beta} = \bar{M}_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

Sejam:

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\theta} x_{\gamma\theta}$$

$$M_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\theta} x_{\gamma\theta}^*$$

(3.12)

$$Q_{\beta} = C_{\alpha\beta\alpha\theta} \psi_{\theta}$$

$$Q_{\beta}^* = C_{\alpha\beta\alpha\theta} \psi_{\theta}^*$$

onde:

$C_{i\beta j\theta}$ são as componentes do tensor de quarta ordem de constantes elásticas (para o caso isotrópico).

Considerando as equações (3.12), pode-se escrever:

$$\bar{M}_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \psi_{\beta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\theta} x_{\gamma\theta} x_{\alpha\beta}^* + C_{\alpha\beta\alpha\theta} \psi_{\theta} \psi_{\beta}^* \quad (3.13)$$

Reagrupando o segundo membro e considerando que:

$$C_{i\beta j\theta} = C_{j\theta i\beta} \quad (3.14)$$

fica:

$$\widehat{M}_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \psi_{\beta}^* = \chi_{\gamma\theta} (C_{\gamma\theta\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^*) + \psi_{\theta} (C_{\alpha\theta\beta} \psi_{\beta}^*) \quad (3.15)$$

Ou ainda, considerando (3.11) e (3.12):

$$\left[M_{\alpha\beta} - \frac{\nu q \delta_{\alpha\beta}}{(1-\nu)\lambda^2} \right] \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \psi_{\beta}^* = \chi_{\gamma\theta} M_{\gamma\theta}^* + \psi_{\theta} Q_{\theta}^* \quad (3.16)$$

Assim, podemos escrever a equação integral abaixo, envolvendo integrais de domínio:

$$\int_{\Omega} (M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} + Q_{\alpha}^* \psi_{\alpha}) d\Omega = \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\alpha} \psi_{\alpha}^*) d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q \delta_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega \quad (3.17)$$

Substituindo as equações (3.3) e (3.7) em (3.17) e integrando por partes (usando a divergência) em ambos os lados, fornece:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha} n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} n_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta} u_{\alpha}^* n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* n_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.18)$$

Considerando as expressões (3.2) e (3.6), e ainda, as equações de equilíbrio (3.5) e (3.9), a expressão anterior fica:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} p_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma + \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma} p_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Cancelando os termos iguais e escrevendo de forma genérica para as três direções, tem-se a expressão abaixo, correspondente ao Segundo Teorema de Betti (ou da Reciprocidade):

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma + \int_{\Omega} q \left(u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega \quad (3.20)$$

As forças de domínio F_j^* são forças generalizadas concentradas unitárias aplicadas em cada uma das três direções generalizadas de um ponto pertencente à região Ω^* , o qual será chamado de ponto carga ou fonte e representado por ξ .

Essas forças podem ser representadas por:

$$F_j^* = \delta(x - \xi) P_j \quad (3.21)$$

Onde:

$$P_j = 1 \quad (3.22)$$

$\delta(x - \xi)$ = função generalizada delta de Dirac com singularidade em ξ .

A função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega^*} g(x) \delta(x - \xi) d\Omega(x) = \begin{cases} g(\xi) & \text{se } \xi \in \Omega^* \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega^* \end{cases} \quad (3.23)$$

Considerando (3.21) e (3.23), a primeira integral de (3.20) fica como mostrado abaixo, sendo agora ξ pertencente à região Ω :

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = u_j(\xi) P_j \quad (3.24)$$

E, considerando (3.22):

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \sum_{j=1}^3 u_j(\xi) \quad (3.25)$$

Considerando agora cada carga concentrada generalizada unitária atuando independentemente, pode-se escrever:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) P_i \quad (3.26)$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) P_i$$

sendo:

ξ → ponto fonte, isto é, ponto onde são aplicadas as cargas concentradas generalizadas unitárias

x + ponto campo, isto é, ponto onde são observados os efeitos das cargas unitárias aplicadas.

$u_{ij}^*(\xi, x)$ + deslocamento generalizado na direção j do ponto x , correspondente a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção i do ponto ξ .

$p_{ij}^*(\xi, x)$ + força de superfície generalizada na direção j do ponto x , correspondente a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção i do ponto ξ .

Podemos então escrever três equações da forma seguinte, sendo válidas para um ponto ξ qualquer situado no interior da região Ω , onde as cargas unitárias são consideradas atuando em cada uma das três direções generalizadas:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} \left[u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) \right] d\Gamma(x) + \int_{\Omega} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) \quad (3.27)$$

3.2.3 - Dedução a Partir do Método dos Resíduos Ponderados

A equação anterior também pode ser obtida pelo método dos resíduos ponderados, utilizando a solução fundamental como função de ponderação, a fim de se obter uma solução aproxi-

mada para as equações de equilíbrio (3.5), com as condições de contorno (3.1).

Pode-se então distribuir o erro da forma seguinte, para uma solução aproximada composta de u_α e u_3 :

$$\int_{\Omega} \left[(M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha) u_\alpha^* + (Q_{\alpha,\alpha} + q) u_3^* \right] d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \quad (3.28)$$

Integrando o primeiro termo por partes e considerando as expressões (3.2), obtêm-se:

$$-\int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_\alpha (u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega = -\int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (3.29)$$

Considerando as expressões (3.3) e (3.7) e substituindo (3.17) em (3.29), fornece:

$$-\int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_\alpha^* (u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega = -\int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (3.30)$$

Integrando novamente por partes e utilizando (3.6) e (3.9), fica:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega - \\
 & - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega = \\
 & = - \int_{\Gamma_u} p_{k,\alpha} u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} u_k p_k^* d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

A equação anterior pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} F_k^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma} (u_k p_k^* - p_k u_k^*) d\Gamma = \int_{\Omega} q \left(u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega \tag{3.32}$$

Como se pode observar, a equação (3.32) é igual a equação (3.20) e, a partir daí, o procedimento é análogo ao do item (3.2.2).

3.3 - Solução Fundamental

Será chamada de solução fundamental aquela que satisfaz as equações de equilíbrio quando se considera que as forças de domínio são forças concentradas generalizadas unitárias

aplicadas no ponto fonte.

Essa solução fundamental será caracterizada pelos tensores representativos dos deslocamentos generalizados e correspondentes forças de superfície generalizadas.

3.3.1 - Deslocamentos Generalizados

Os tensores $u_{ij}^*(\xi, x)$ da equação (3.27) representam os deslocamentos da solução fundamental e foram obtidos da maneira mostrada a seguir.

Substituindo as equações dos esforços resultantes nas equações de equilíbrio que são dadas em função desses esforços são obtidas equações de equilíbrio em termos de deslocamentos, na forma:

$$\Delta_{ij}^* \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) u_j(\xi) = -b_i(\xi) \quad (3.33)$$

Onde:

a) Δ_{ij}^* são as componentes do operador de Navier dadas por:

$$\Delta_{\alpha\beta}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \left[(\nabla^2 - \lambda^2) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha(\xi) \partial x_\beta(\xi)} \right]$$

$$\Delta_{\alpha\alpha}^* = -\Delta_{\beta\beta}^* = -D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha(\xi)}$$

$$\Delta_{33}^* = D \frac{1 - \nu}{2} \lambda^2 \nabla^2 \quad (3.34)$$

$$\text{Sendo: } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha(\xi) \partial x_\alpha(\xi)} = \text{operador de Laplace} \quad (3.35)$$

b) $b_i(\xi)$ são as componentes de carregamento.

Sejam as equações (3.33) para cargas concentradas unitárias na direção k no ponto fonte ξ , ou seja, para cada carga em separado. Nesse caso, tem-se:

$$b_i = \delta(x - \xi) \delta_{i1} \quad \text{para } k = 1$$

$$b_i = \delta(x - \xi) \delta_{i2} \quad \text{para } k = 2 \quad (3.36)$$

$$b_i = \delta(x - \xi) \delta_{i3} \quad \text{para } k = 3$$

E a equação (3.33) fica:

$$\Delta_{ij}^* \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] u_{kj}^*(\xi, x) = - \delta(x - \xi) \delta_{ik} \quad (3.37)$$

onde o campo de deslocamentos u_{kj}^* representa a solução dessa equação e é chamada de solução fundamental.

As expressões de u_{ij}^* foram obtidas pelo método de Hörmander [8], sendo dadas por:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D (1-\nu)} \left\{ \left[8B(z) - (1-\nu)(2 \ln z - 1) \right] \delta_{\alpha\beta} - \left[8A(z) + 2(1-\nu) \right] r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\}$$

$$u_{\alpha_3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2 \ln z - 1) r r_{,\alpha}$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[(1-\nu) z^2 (\ln z - 1) - 8 \ln z \right] \quad (3.38)$$

Onde:

$$r = \sqrt{r_{\alpha} r_{\alpha}} = \text{dist\~{a}ncia entre o ponto fonte e o ponto campo} \quad (3.39)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}(x)} = \frac{r_{\alpha}}{r} \quad (3.40)$$

Sendo:

$$r_{\alpha} = x_{\alpha}(x) - x_{\alpha}(\xi) \quad (3.41)$$

$$z = \lambda r \quad (3.42)$$

Temos ainda que $A(z)$ e $B(z)$ dependem das funções de Bessel modificadas de ordem inteira $K_0(z)$ e $K_1(z)$, sendo expressos por:

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right]$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (3.43)$$

As funções $K_0(z)$ e $K_1(z)$ podem ser calculadas através de expansões polinomiais $|z^0|$ e constam no Apêndice A deste texto.

3.3.2 - Forças de Superfície Generalizadas

Os tensores p_{ij}^* da equação (3.27) representam as forças de superfície da solução fundamental. São obtidos por:

$$\begin{aligned} p_{\gamma\alpha}^* &= M_{\alpha\beta}^*(\gamma) n_\beta \\ p_{3\alpha}^* &= M_{\alpha\beta}^*(3) n_\beta \\ p_{\gamma 3}^* &= Q_\beta^*(\gamma) n_\beta \\ p_{33}^* &= Q_\beta^*(3) n_\beta \end{aligned} \quad (3.44)$$

Onde:

$M_{\alpha\beta}^*(\gamma)$ e $M_{\alpha\beta}^*(3)$ são os momentos devidos ao carregamento concentrado unitário nas direções γ e 3 , respectivamente.

$Q_\beta^*(\gamma)$ e $Q_\beta^*(3)$ são os esforços cortantes devidos à carga concentrada unitária nas direções γ e 3 , respectivamente.

Assim, tem-se:

$$M_{\alpha\beta}^*(\gamma) = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(u_{\gamma\alpha,\beta}^* + u_{\gamma\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma\theta,\theta}^* \delta_{\alpha\beta} \right)$$

$$M_{\alpha\beta}^*(z) = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(u_{z\alpha,\beta}^* + u_{z\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{z\theta,\theta}^* \delta_{\alpha\beta} \right)$$

(3.45)

$$Q_{\beta}^*(\gamma) = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 (u_{\gamma\beta}^* + u_{\gamma z,\beta}^*)$$

$$Q_{\beta}^*(z) = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 (u_{z\beta}^* + u_{zz,\beta}^*)$$

As derivadas de u_{ij}^* que aparecem nas equações anteriores serão obtidas derivando-se as equações (3.38) em relação às coordenadas do ponto x (ponto campo).

Considerando as equações (3.39) a (3.43) e utilizando as derivadas de $A(z)$ e $B(z)$ dadas no Apêndice A com a consideração de que o argumento z é dado pela equação (3.42) obtêm-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}(x)} = \lambda r_{,\alpha}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_{\alpha}(x)} = - \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + 2A)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_{\alpha}(x)} = - \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + A)$$

$$\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_{\alpha}(x)} = \frac{\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}}{r} \quad (3.46)$$

Derivando então (3.38) em relação às coordenadas do ponto x , utilizando-se as equações (3.40), (3.42) e (3.46), obtêm-se as derivadas dos deslocamentos fundamentais dadas a seguir:

$$u_{\alpha\beta,\gamma}^* = -\frac{1}{4\pi D (1-\nu)r} \left[(4A + 4z K_1 + 1 - \nu) r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \right. \\ \left. - 2(8A + 2z K_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha}) \right]$$

$$u_{\alpha\beta,\beta}^* = \frac{1}{8\pi D} \left[\delta_{\alpha\beta} (2 \ln z - 1) + 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} \right]$$

$$u_{\beta\alpha,\beta}^* = - u_{\alpha\beta,\beta}^*$$

$$u_{\beta\beta,\alpha}^* = \frac{r_{,\alpha}}{8\pi D (1-\nu) \lambda^2 r} \left[(1-\nu) z^2 (2 \ln z - 1) - 8 \right] \quad (3.47)$$

Substituindo (3.38) e (3.47) em (3.45) e reagrupando os termos, obtêm-se:

$$M_{\alpha\beta}^*(\gamma) = -\frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2z K_1 + 1 - \nu) (\delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha} + \delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta}) - \right. \\ \left. - 2(8A + 2z K_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 + \nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} \right]$$

$$M_{\alpha\beta}^*{}^{(3)} = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left[2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] \delta_{\alpha\beta} + 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} \right]$$

$$Q_{\beta}^*{}^{(\gamma)} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[B \delta_{\gamma\beta} - A r_{,\gamma} r_{,\beta} \right]$$

$$Q_{\beta}^*{}^{(3)} = -\frac{1}{2\pi\lambda} r_{,\beta}$$

(3.48)

Substituindo agora as expressões (3.48) em (3.44) e expandindo as expressões obtidas, tem-se, após reagrupar os termos:

$$p_{\gamma\alpha}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2z K_1 + 1 - \nu) (\delta_{\alpha\gamma} r_{,n} + r_{,\alpha} n_{\gamma}) + \right. \\ \left. + (4A + 1 + \nu) r_{,\gamma} n_{\alpha} - 2(8A + 2z K_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\gamma} r_{,n} \right]$$

$$p_{\gamma 3}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[B n_{\gamma} - A r_{,\gamma} r_{,n} \right]$$

$$p_{3\alpha}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left[2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] n_{\alpha} + 2 r_{,\alpha} r_{,n} \right]$$

$$p_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,n}$$

(3.49)

onde $r_{,n}$ é a derivada de r em relação à normal no ponto x , sendo definido por:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(x)} = r_{,\alpha} n_{\alpha} \quad (3.50)$$

3.3.3 - Singularidades dos Tensores

Os tensores u_{ij}^* e p_{ij}^* apresentados anteriormente possuem singularidades para $r=0$, ou seja, quando os pontos ξ e x forem coincidentes. Tal fato ocorrerá quando levarmos o ponto ξ para o contorno (ver próximo item) e, em vista disso, essas singularidades precisam ser analisadas.

Expandindo $A(z)$ e $B(z)$ dados em (3.43) através da substituição das expressões de $K_0(z)$ e $K_1(z)$ dadas no Apêndice A, observa-se que:

- a) Para $A(z)$, as parcelas que possuem singularidade de ordem r^{-2} se cancelam, o mesmo ocorrendo para as parcelas com singularidade logarítmica. Logo, $A(z)$ não possui singularidade.
- b) Para $B(z)$, as parcelas com singularidade r^{-2} também se cancelam, porém, as parcelas com singularidade logarítmica, não.

Assim, conclui-se que $B(z)$ possui singularidade de ordem $\ln r$.

Levando em conta as considerações feitas acima e observando-se as expressões (3.38) e (3.49) conclui-se que:

- a) u_{ij}^* possui singularidade $\ln r$;
- b) p_{ij}^* possui singularidades $\ln r$ e r^{-1} .

3.4 - Equação Integral para um Ponto do Contorno

Para resolver o problema no contorno, torna-se necessário escrever a equação (3.27) para um ponto ξ situado no contorno da região.

Seja a placa representada na Figura 3.2, com o ponto ξ situado no contorno e envolvido por um semi-círculo.

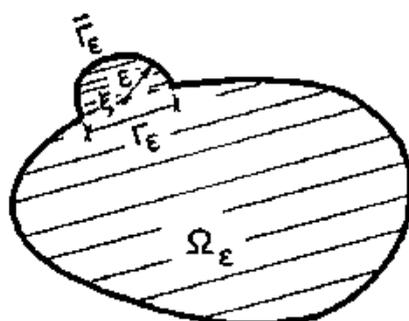


Fig. 3.2 - Placa com ponto ξ no contorno

A equação (3.27), nesse caso, fica:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + \int_{\Omega_\epsilon} \left[u_{i\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x)
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

Pode-se estudar separadamente o limite de cada integral de (3.51) quando $\epsilon \rightarrow 0$.

A segunda integral em (3.51) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde a primeira integral à direita pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi)] d\Gamma(x) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

A primeira integral à direita na equação (3.53) se anula devido à continuidade de $u_j(x)$ e a segunda integral à direita, juntamente com o lado esquerdo da equação (3.51), fornece:

$$C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (3.54)$$

A segunda integral à direita em (3.52) deve ser considerada no sentido de valor principal de Cauchy, cuja exis-

tência pode ser demonstrada se $u_j(x)$ satisfaz a condição de Hölder, isto é:

$$|u_j(x) - u_j(\xi)| \leq B r^\alpha \quad (3.55)$$

onde B e α são constantes positivas.

As integrais restantes em (3.51) não apresentam problemas, pois possuem singularidades mais fracas.

Assim, podemos escrever, para um ponto ξ do contorno:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) = \int_{\Gamma} \left[u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) \right] d\Gamma(x) + \\ + \int_{\Omega} \left[u_{is}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) \quad (3.56)$$

onde a primeira integral à direita deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy e o coeficiente $C_{ij}(\xi)$ definido em (3.54) depende da geometria do contorno no ponto ξ . Esse termo pode ser obtido em forma fechada, mas sob o ponto de vista computacional torna-se mais eficiente calculá-lo indiretamente, através da consideração de movimento de corpo rígido. Para o caso de contorno suave, o resultado $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}/2$ é obtido [8], [9].

Em geral, pode-se considerar a equação (3.56) escrita para um ponto ξ qualquer, onde:

$$C_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{quando } \xi \text{ é ponto do interior} \quad (3.57)$$

$$C_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2} \quad \text{quando } \xi \text{ é ponto de contorno suave}$$

3.5 - Transformação da Integral de Forças de Domínio em Integral de Contorno

A integral de domínio que aparece em (3.56) representa a contribuição da carga transversal $q(x)$.

Essa integral pode ser transformada em integral de contorno para vários tipos de carregamento.

Será considerado aqui que a carga $q(x)$ é um carregamento uniformemente distribuído.

Tem-se:

$$I_i(\xi) = \int_{\Omega} q(x) \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.58)$$

Considerando a equação de Poisson abaixo, para a qual v_i^* é uma solução:

$$v_{i, \alpha\alpha}^*(\xi, x) = u_{i3}^*(\xi, x) \quad (3.59)$$

e aplicando o teorema da divergência em (3.58), tem-se, sendo $q(x) = q = \text{cte}$:

$$I_i(\xi) = q \int_{\Gamma} \left[v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) \quad (3.60)$$

Assim, as equações (3.56) podem ser escritas na forma seguinte, envolvendo apenas integrais de contorno:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) = \int_{\Gamma} \left[u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) \right] d\Gamma(x) + \\ + q \int_{\Gamma} \left[v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) \quad (3.61)$$

A equação (3.61) será a equação utilizada no sistema de equações após discretização ao longo do contorno (ver Capítulo IV).

Deve-se ressaltar que a normal aponta para fora da região e o sentido de integração é indicado na Figura 3.3.

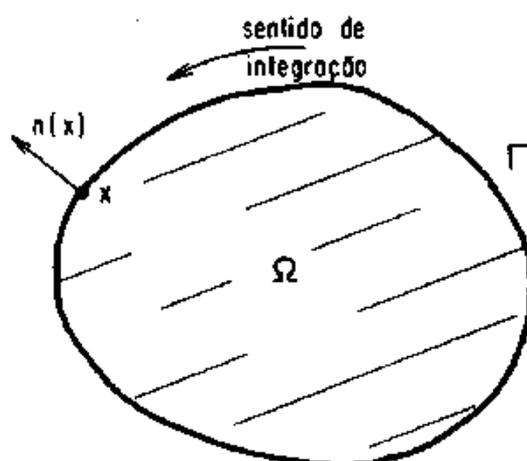


Fig. 3.3 - Definição da normal e sentido de integração

3.6 - Expressões Associadas às Forças de Domínio na Integral de Contorno

As expressões associadas às forças de domínio referem-se a $u_{i,\alpha}^*$ e $v_{i,\alpha}^*$ como se pode observar da equação (3.61).

Os tensores $u_{i,\alpha}^*$ já foram mostrados no Item (3.3.1) e suas expressões são obtidas de (3.38).

E ainda, mostrou-se no Item (3.5) que v_i^* devem satisfazer a equação (3.59). Funções que possuem essa característica são dadas pelas expressões abaixo [8]:

$$v_{\alpha}^* = \frac{1}{128 \pi D \lambda^2} r_{,\alpha} r z^2 (4 \ln z - 5)$$

$$v_{\beta}^* = \frac{-z^2}{256 \pi D \lambda^2 (1-\nu)} \left[64 (\ln z - 1) - z^2 (1-\nu) (2 \ln z - 3) \right]$$

(3.62)

Derivando essas funções em relação às coordenadas do ponto x , utilizando a primeira e a quarta das equações (3.46), obtêm-se, após o reagrupamento dos termos:

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128 \pi D} \left[\delta_{\alpha\beta} (4 \ln z - 5) + 2 (4 \ln z - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right]$$

$$v_{\beta,\beta}^* = -\frac{r r_{,\beta}}{128 \pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[32 (2 \ln z - 1) - z^2 (1-\nu) (4 \ln z - 5) \right]$$

(3.63)

3.7 - Deslocamentos e Esforços nos Pontos Internos

3.7.1 - Deslocamentos

Os deslocamentos nos pontos internos são obtidos através da expressão (3.61) com $C_{ij} = \delta_{ij}$.

Assim, para um ponto interno ξ qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + q \int_{\Gamma} \left[v_{i,\beta}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\beta}^*(\xi, x) \right] n_\beta(x) d\Gamma(x)
 \end{aligned}
 \tag{3.64}$$

3.7.2 - Momentos e Esforços Cortantes

O cálculo dos momentos e esforços cortantes nos pontos internos é realizado através das expressões (3.4) onde os deslocamentos e as derivadas de deslocamentos que nela aparecem são substituídos pelas expressões (3.64) e suas respectivas derivadas em relação às coordenadas do ponto ξ .

Nesse caso, como se pode observar de (3.40) e (3.41), tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial x_\alpha(\xi)} = - \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = -r_{,\alpha}
 \tag{3.65}$$

E, conseqüentemente, vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_\alpha(\xi)} &= -\lambda r_{,\alpha} \\ \frac{\partial A}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + 2A) \\ \frac{\partial B}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + A) \\ \frac{\partial K_1}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_0 + K_1) \\ \frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r} \\ \frac{\partial r_{,n}}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha} r_{,n} - n_\alpha}{r} \end{aligned} \tag{3.66}$$

Resultam então expressões da seguinte forma:

i) Momentos

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}(\xi) &= \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ &+ q \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.67}$$

ii) cortantes

$$Q_{\beta}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{\beta k}^* (\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{\beta k}^* (\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} w_{\beta}^* (\xi, x) d\Gamma(x) \quad (3.68)$$

A determinação dos tensores $u_{i\beta k}^*$, $p_{i\beta k}^*$ e $w_{i\beta}^*$ foi feita como será mostrado a seguir, considerando-se que são os termos que multiplicam, respectivamente, as forças de superfície $p_k(x)$, os deslocamentos $u_k(x)$ e a carga distribuída q , quando da substituição das expressões dos deslocamentos nos pontos internos e suas derivadas nas expressões dos esforços.

a) Para $u_{i\beta k}^*$, tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \left(u_{1\gamma,1}^* + u_{2\gamma,2}^* \right) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

(3.69a)

$$u_{\alpha\beta\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha\beta,\beta}^* + u_{\beta\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \left(u_{1\beta,1}^* + u_{2\beta,2}^* \right) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

Na expressão dos cortantes:

$$u_{\beta\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left(u_{\beta\gamma}^* + u_{\beta\gamma,\beta}^* \right)$$

$$u_{\beta\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left(u_{\beta\beta}^* + u_{\beta\beta,\beta}^* \right) \quad (3.69b)$$

Derivando-se as expressões (3.38) em relação às coordenadas do ponto ξ , obtêm-se, após reagrupar os termos:

$$u_{\alpha\beta,\gamma}^* = \frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} \left[(4A+4zK_1+1-\nu) r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2(8A+2zK_1+1-\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A+1-\nu) (\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha}) \right]$$

$$u_{\alpha\beta,\beta}^* = \frac{-1}{8\pi D} \left[\delta_{\alpha\beta} (2 \ln z - 1) + 2 r_{,\beta} r_{,\alpha} \right]$$

$$u_{\beta\alpha,\beta}^* = -u_{\alpha\beta,\beta}^*$$

$$u_{\beta\beta,\alpha}^* = \frac{-r_{,\alpha}}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2 r} \left[(1-\nu) z^2 (2 \ln z - 1) - 8 \right] \quad (3.70)$$

A substituição de (3.38) e (3.70) em (3.69) fornece, após reagrupar-se os termos:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{4\pi r} \left[(4A+2zK_1+1-\nu) (\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta}) - 2(8A+2zK_1+1-\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A+1+\nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} \right]$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] \delta_{\alpha\beta} + 2 r_{,\alpha} r_{,\beta}$$

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[B \delta_{\gamma\beta} - A r_{,\gamma} r_{,\beta} \right]$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta} \quad (3.71)$$

b) Para $p_{i\beta k}^*$, tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[p_{\alpha\gamma,\beta}^* + p_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \left(p_{1\gamma,1}^* + p_{2\gamma,2}^* \right) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (3.72a)$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[p_{\alpha 3,\beta}^* + p_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \left(p_{1 3,1}^* + p_{2 3,2}^* \right) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

Na expressão dos cortantes:

$$p_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left(p_{\beta\gamma}^* + p_{3\gamma,\beta}^* \right) \quad (3.72b)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left(p_{\beta 3}^* + p_{3 3,\beta}^* \right)$$

Derivando-se as expressões (3.49) em relação às coordenadas do ponto ξ , obtêm-se, após reagrupar os termos:

$$\begin{aligned}
p_{\gamma\alpha,\beta}^* = & \frac{1}{4\pi r^2} \left[(4A + 2z K_1 + 1 - \nu) (\delta_{\alpha\gamma} n_\beta + \delta_{\alpha\beta} n_\gamma) + \right. \\
& + (4A + 1 + \nu) \delta_{\gamma\beta} n_\alpha - 2(8A + 4z K_1 + z^2 K_0 + 1 - \nu) \cdot \\
& \cdot (n_\gamma r_{,\beta} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} r_{,n}) - 2(8A + 2z K_1 + 1 - \nu) \cdot \\
& \cdot (n_\beta r_{,\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha} r_{,n}) - \\
& - 2(8A + 2z K_1 + 1 + \nu) n_\alpha r_{,\gamma} r_{,\beta} + \\
& \left. + 4(24A + 8z K_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{\gamma\beta,\beta}^* = & \frac{\lambda^2}{2\pi r} \left[(z K_1 + A) r_{,\beta} n_\gamma + A r_{,\gamma} n_\beta - \right. \\
& \left. - (4A + z K_1) r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,n} + A \delta_{\gamma\beta} r_{,n} \right]
\end{aligned}$$

$$p_{3\alpha,\beta}^* = \frac{(1-\nu)}{4\pi r} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} n_\alpha r_{,\beta} - 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + r_{,\alpha} n_\beta + \delta_{\alpha\beta} r_{,n} \right]$$

$$p_{3\beta,\beta}^* = \frac{1}{2\pi r^2} \left[n_\beta - 2 r_{,\beta} r_{,n} \right]$$

(3.73)

A substituição de (3.49) e (3.73) em (3.72) fornece, após reagrupar os termos:

$$\begin{aligned}
 p_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ (4A + 2z K_1 + 1 - \nu) (\delta_{\gamma\alpha} n_\beta + \delta_{\gamma\beta} n_\alpha) + \right. \\
 &+ (4A + 1 + 3\nu) \delta_{\alpha\beta} n_\gamma - (16A + 6z K_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) \cdot \\
 &\cdot \left[(n_\alpha r_{,\beta} + n_\beta r_{,\alpha}) r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha}) r_{,n} \right] - \\
 &- 2(8A + 2z K_1 + 1 + \nu) (\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + n_\gamma r_{,\alpha} r_{,\beta}) + \\
 &\left. + 4(24A + 8z K_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,n} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{\alpha\beta\alpha}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + z K_1) (r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) - \right. \\
 &\left. - 2(4A + z K_1) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + 2A \delta_{\alpha\beta} r_{,n} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{-D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + z K_1) (\delta_{\gamma\beta} r_{,n} + r_{,\gamma} n_\beta) + \right. \\
 &\left. + 2A n_\gamma r_{,\beta} - 2(4A + z K_1) r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,n} \right]
 \end{aligned}$$

$$p_{\alpha\beta\alpha}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left[(z^2 B + 1) n_\beta - (z^2 A + 2) r_{,\beta} r_{,n} \right]$$

(3.74)

c) Para $w_{i\beta}^*$, tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$w_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (v_{1,\gamma 1}^* + v_{2,\gamma 2}^*) - \right. \\ \left. - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \left(u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (u_{1\gamma,1}^* + u_{2\gamma,2}^*) \right) \right] n_{\gamma} \quad (3.75a)$$

Na expressão dos cortantes:

$$w_{\beta\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[v_{\beta,\gamma}^* + v_{\beta,\gamma\beta}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{\beta\gamma,\beta}^*) \right] n_{\gamma} \quad (3.75b)$$

Considerando as expressões (3.69), pode-se escrever as expressões (3.75) como:

$$w_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (v_{1,\gamma 1}^* + v_{2,\gamma 2}^*) \right] n_{\gamma} - \\ - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_{\gamma}$$

$$w_{\beta\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[v_{\beta,\gamma}^* + v_{\beta,\gamma\beta}^* \right] n_{\gamma} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\beta\beta\gamma}^* n_{\gamma} \quad (3.76)$$

Derivando-se as expressões (3.63) em relação às coordenadas do ponto ξ , obtêm-se, após reagrupar os termos:

$$\begin{aligned}
 v_{\alpha, \beta \gamma}^* &= -\frac{r}{64 \pi D} \left\{ \left[\delta_{\alpha \beta} (4 \ln z - 3) + 4 r_{, \alpha} r_{, \beta} \right] r_{, \gamma} + \right. \\
 &\quad \left. + (4 \ln z - 3) (\delta_{\alpha \gamma} r_{, \beta} + \delta_{\beta \gamma} r_{, \alpha}) \right\} \\
 v_{\beta, \beta \gamma}^* &= \frac{1}{8 \pi D (1 - \nu) \lambda^2} \left\{ \delta_{\gamma \beta} \left[(4 \ln z - 2) - \frac{z^2}{16} (1 - \nu) (4 \ln z - 5) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + r_{, \beta} r_{, \gamma} \left[4 - \frac{z^2}{8} (1 - \nu) (4 \ln z - 3) \right] \right\} \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

A substituição de (3.63) e (3.77) em (3.76) fornece, após reagrupar os termos:

$$\begin{aligned}
 w_{\alpha \beta}^* &= -\frac{r}{64 \pi} \left\{ (4 \ln z - 3) \left[(1 - \nu) (r_{, \beta} n_{\alpha} + r_{, \alpha} n_{\beta}) + (1 + 3\nu) \delta_{\alpha \beta} r_{, n} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 4 \left[(1 - \nu) r_{, \alpha} r_{, \beta} + \nu \delta_{\alpha \beta} \right] r_{, n} \right\} - \frac{\nu}{(1 - \nu) \lambda^2} u_{\alpha \beta \gamma}^* n_{\gamma} \\
 w_{\beta \beta}^* &= \frac{1}{8 \pi} \left[(2 \ln z - 1) n_{\beta} + 2 r_{, \beta} r_{, n} \right] - \frac{\nu}{(1 - \nu) \lambda^2} u_{\beta \beta \gamma}^* n_{\gamma} \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

3.8 - Regiões Infinitas

A presente formulação pode ser estendida para o caso de placas infinitas. Para que isso seja possível, deve-se

levar em conta o comportamento das funções envolvidas em um contorno infinitamente distante do ponto ξ .

Seja uma placa com uma cavidade (ou cavidades) de contorno Γ . Imagina-se que ρ seja o raio de um círculo de contorno Γ_ρ , infinitamente distante de Γ e centrado no ponto ξ (ver Figura 3.4).

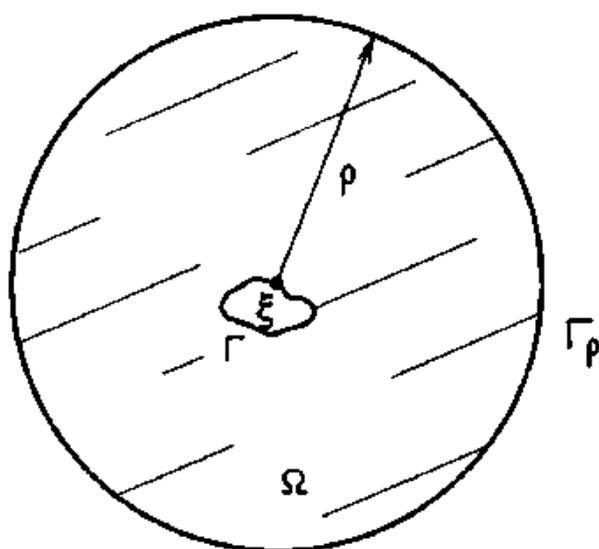


Fig. 3.4 - Região infinito com cavidade

Nesse caso, a equação (3.61) pode ser escrita para a região Ω , de contorno $\Gamma + \Gamma_\rho$, na forma mostrada abaixo, onde ξ é um ponto de Γ e q foi considerada nula:

$$\begin{aligned}
 C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \\
 = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) &
 \end{aligned}$$

(3.79)

Se o limite das integrais em Γ_ρ na equação (3.79) for igual a zero, restarão, nessa equação, apenas as integrais em Γ .

A condição desse limite ser igual a zero é chamada de condição de regularidade, sendo dada pela expressão:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} \left[p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) - u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) \right] d\Gamma(x) = 0 \quad (3.80)$$

Para verificá-la, é necessário analisar o comportamento tanto da solução fundamental como de $u_j(x)$ e $p_j(x)$ no infinito.

Para um ponto x pertencente a Γ_ρ , como se observa da Figura 3.5, tem-se:

$$r = \rho$$

$$z = \lambda \rho$$

$$r_{,1} = \frac{x_1(x) - x_1(\xi)}{\rho} = \cos \theta$$

$$r_{,2} = \frac{x_2(x) - x_2(\xi)}{\rho} = \sin \theta$$

$$n_1 = \cos \theta$$

$$n_2 = \text{sen } \theta$$

$$r_{,n} = 1 \tag{3.81}$$

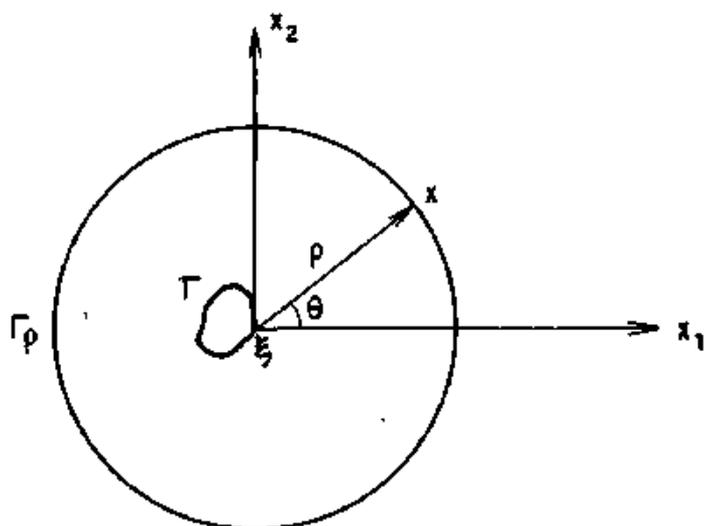


Fig. 3.5 - Ponto x em coordenadas polares

Ainda em Γ_ρ , tem-se que:

$$K_0 \rightarrow 0 \quad ; \quad K_1 \rightarrow 0 \quad ; \quad z K_1 \rightarrow 0 \tag{3.82}$$

E as expressões (3.43) podem ser escritas como:

$$A = - \frac{2}{z^2} \tag{3.83}$$

$$B = - \frac{1}{z^2}$$

Da substituição de (3.81) a (3.83) nas expressões dos tensores u_{ij}^* e p_{ij}^* da solução fundamental (equações (3.38) e (3.49)), resulta:

i) Para os deslocamentos u_{ij}^* :

$$u_{11}^* = - \frac{1}{8\pi D (1-\nu)} \left[\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + (1-\nu) (2 \ln \lambda \rho - 1) - 2 \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} - (1-\nu) \right) \cos^2 \theta \right]$$

$$u_{12}^* = u_{21}^* = \frac{1}{4\pi D (1-\nu)} \left[\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} - (1-\nu) \right] \cos \theta \sin \theta$$

$$u_{22}^* = - \frac{1}{8\pi D (1-\nu)} \left[\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + (1-\nu) (2 \ln \lambda \rho - 1) - 2 \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} - (1-\nu) \right) \sin^2 \theta \right]$$

$$u_{13}^* = -u_{31}^* = \frac{1}{8\pi D} (2 \ln \lambda \rho - 1) \rho \cos \theta$$

$$u_{23}^* = -u_{32}^* = \frac{1}{8\pi D} (2 \ln \lambda \rho - 1) \rho \sin \theta$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[(1-\nu) \lambda^2 \rho^2 (\ln \lambda \rho - 1) - 8 \ln \lambda \rho \right] \quad (3.84)$$

ii) Para as forças de superfície p_{ij}^* :

$$p_{11}^* = - \frac{1}{4\pi \rho} \left[1 + (2 \cos^2 \theta - 1) \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + \nu \right) \right]$$

$$p_{12}^* = p_{21}^* = - \frac{1}{2 \pi \rho} \left[\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + \nu \right] \cos \theta \operatorname{sen} \theta$$

$$p_{22}^* = - \frac{1}{4 \pi \rho} \left[1 + (2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1) \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + \nu \right) \right]$$

$$p_{13}^* = \frac{1}{2 \pi \rho^2} \cos \theta$$

$$p_{23}^* = \frac{1}{2 \pi \rho^2} \operatorname{sen} \theta$$

$$p_{31}^* = - \frac{(1-\nu)}{8 \pi} \left[2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \operatorname{en} \lambda \rho + 1 \right] \cos \theta$$

$$p_{32}^* = - \frac{(1-\nu)}{8 \pi} \left[2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \operatorname{en} \lambda \rho + 1 \right] \operatorname{sen} \theta$$

$$p_{33}^* = - \frac{1}{2 \pi \rho}$$

(3.85)

Para as funções $u_j(x)$ e $p_j(x)$ no infinito, tem-se que, pelo princípio de Saint-Venant, o comportamento será, no pior caso, igual ao da solução fundamental correspondente a uma carga concentrada na direção da resultante das forças aplicadas em Γ .

Para verificar a condição de regularidade, pode-se portanto substituir $u_j(x)$ e $p_j(x)$ na equação (3.80) pelos tensores correspondentes à solução fundamental.

Então, para cada uma das três direções k onde se supõe ser a direção da resultante, podemos fazer:

$$u_j(x) = u_{kj}^*(\xi, x) \quad (3.86)$$

$$p_j(x) = p_{kj}^*(\xi, x)$$

e substituir (3.86) nas três equações dadas em (3.80), as quais, considerando ainda:

$$d\Gamma = \rho d\theta \quad (3.87)$$

fornece:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[u_{ij}^* p_{kj}^* - p_{ij}^* u_{kj}^* \right] \rho d\theta = 0 \quad (3.88)$$

Expandindo agora em j , substituindo os tensores da solução fundamental (expressões (3.38) e (3.49)) e integrando, verifica-se que a integral de cada parcela é zero, e, conseqüentemente, o limite também o será, concluindo-se portanto, que a condição de regularidade é satisfeita.

Para o caso de carregamentos auto-equilibrados, as integrais em (3.80) tenderão para zero mais rapidamente ainda.

Logo, a condição de regularidade será também satisfeita.

Portanto, quando temos, na pior hipótese, $u_j(x)$ e $p_j(x)$ se comportando como a solução fundamental no infinito, podemos considerar, na equação (3.79), apenas as integrais em Γ , ou seja, aquelas que se referem ao contorno das cavidades existentes, ficando:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \quad (3.89)$$

Além disso, deve-se ressaltar que a normal deverá apontar para dentro dos furos, pois a mesma deve ser direcionada sempre para fora da região Ω . Tem-se ainda que o sentido de integração é o indicado na Figura 3.6.

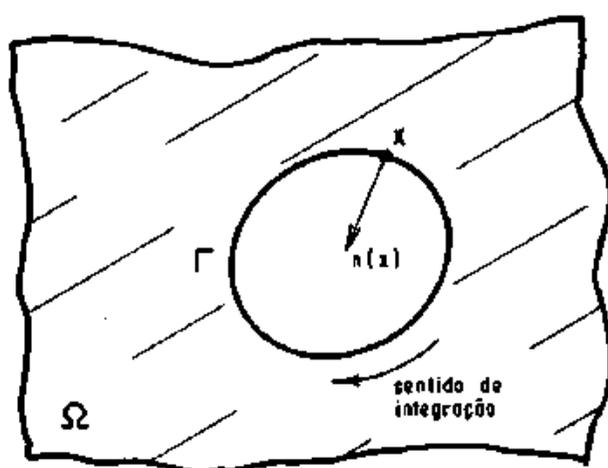


Fig. 3.6 - Definição da normal e do sentido de integração para o contorno da cavidade

CAPÍTULO IVIMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA4.1 - Introdução

Neste capítulo será descrito o procedimento numérico que foi adotado na implementação computacional da formulação apresentada no capítulo anterior.

A implementação é realizada utilizando-se as equações anteriores discretizadas ao longo do contorno.

Descreve-se a montagem do sistema de equações, o qual é composto de três equações para cada ponto nodal, cada uma correspondendo a uma das três direções generalizadas.

Após a aplicação das condições de contorno e resolução do sistema de equações, os valores dos deslocamentos e esforços nos pontos internos são também calculados, a partir dos valores obtidos no contorno pelo sistema de equações.

Ainda neste capítulo, são apresentados os elementos utilizados no programa, os procedimentos adotados nos casos de descontinuidade da normal ou da condição contorno e são também comentadas as integrações numéricas utilizadas, incluindo as integrais singulares, cujos procedimentos especiais adotados são também descritos.

4.2 - Equações Discretizadas

Para a resolução numérica das equações integrais obtidas no Capítulo III, o contorno Γ será discretizado em elementos, cada um possuindo um contorno Γ_j e contendo certos pontos nodais (Figura 4.1). Para cada ponto teremos três componentes de deslocamento e três de forças de superfície, sendo uma para cada direção generalizada.

Logo, as equações integrais deverão ser escritas de forma discretizada, conforme será mostrado a seguir.

Os valores das funções a serem integradas, para um ponto qualquer do elemento de contorno, são obtidos interpolando-se os valores nodais, o mesmo ocorrendo para as coordenadas. Para isso, serão utilizadas certas funções de interpolação que, no programa realizado para este trabalho, são de ordem quadrática, necessitando portanto de três pontos para serem definidas.

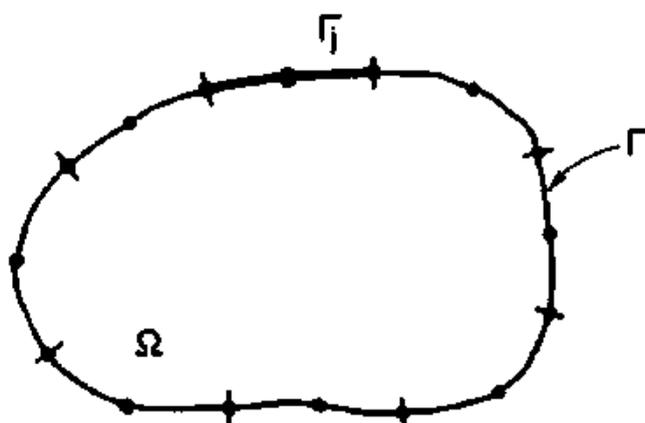


Fig. 4.1 - Contorno Γ discretizado em elementos

4.2.1 - Cálculo do Problema no Contorno Através do Sistema de Equações

Para a resolução numérica da equação (3.61), com as condições de contorno dadas em (3.1), tem-se a seguinte equação discretizada, escrita para um ponto nodal ξ_i em forma matricial (a convenção de somatório não é mais implícita):

$$\begin{aligned} \underline{C}_i \underline{u}_i &= \sum_{j=1}^e \left[\int_{\Gamma_j} \underline{u}_i^* \underline{N} \, d\Gamma \right] \underline{p}^n - \\ &- \sum_{j=1}^e \left[\int_{\Gamma_j} \underline{p}_i^* \underline{N} \, d\Gamma \right] \underline{u}^n + \\ &+ \sum_{j=1}^e \left[\int_{\Gamma_j} q \underline{s}_i^* \, d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde:

\underline{C}_i = matriz cujos elementos são os C_{ij} que aparecem na equação (3.61)

\underline{u}_i = vetor deslocamento do ponto fonte

e = número de elementos de contorno

\underline{N} = matriz que contém as funções de interpolação

\underline{U}_i^* e \underline{P}_i^* = matrizes que contêm as componentes dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

\underline{U}^n e \underline{P}^n = vetores que contêm as componentes dos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, relativos aos pontos nodais do elemento considerado

\underline{S}_i^* = vetor cujas componentes são expressas por:

$$S_k^* = \left[v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{k\alpha} \right] n_\alpha \quad (4.2)$$

Para um ponto qualquer do elemento j , foram consideradas as expressões abaixo para interpolar os deslocamentos e forças de superfície em função dos valores nodais:

$$\underline{U}^j = \underline{N} \underline{U}^n \quad (4.3)$$

$$\underline{P}^j = \underline{N} \underline{P}^n$$

E ainda, como as funções de interpolação são dadas em função de uma coordenada intrínseca adimensional η (ver item 4.3), torna-se necessário transformar a diferencial de contorno $d\Gamma$ para esse sistema. Sendo $|\underline{J}|$ o jacobiano da transformação, será usada a expressão:

$$d\Gamma = |\underline{j}| \, d\eta \quad (4.4)$$

Chamando:

$$\underline{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \underline{U}_i^* \underline{N} \, d\Gamma \quad (4.5)$$

$$\underline{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \underline{P}_i^* \underline{N} \, d\Gamma \quad (4.6)$$

$$\underline{B}_{ij} = q \int_{\Gamma_j} \underline{S}_i^* \, d\Gamma \quad (4.7)$$

a equação (4.1) pode ser escrita como:

$$\underline{C}_i \underline{U}_i = \sum_{j=1}^e \underline{G}_{ij} \underline{P}_j - \sum_{j=1}^e \underline{H}_{ij} \underline{U}_j + \sum_{j=1}^e \underline{B}_{ij} \quad (4.8)$$

ou ainda:

$$\sum_{j=1}^e \underline{H}_{ij} \underline{U}_j = \sum_{j=1}^e \underline{G}_{ij} \underline{P}_j + \sum_{j=1}^e \underline{B}_{ij} \quad (4.9)$$

onde tem-se:

$$\underline{H}_{ij} = \underline{\hat{H}}_{ij} \text{ para } i \neq j \quad (4.10)$$

$$\underline{H}_{ij} = \underline{\hat{H}}_{ij} + \underline{C}_i \text{ para } i = j$$

As integrais nas expressões (4.5), (4.6) e (4.7) foram resolvidas numericamente, através da quadratura de Gauss.

Para o caso de integrais singulares que ocorrem quando $\xi \in \Gamma_j$, foram adotados procedimentos especiais (ver item 4.5). Para as integrais com singularidade logarítmica, foi realizada uma transformação quadrática sobre as coordenadas dos pontos de integração.

A integração numérica foi realizada como mostrado a seguir. A expressão (4.4) foi utilizada para substituir a diferencial de contorno e as integrais assim obtidas foram então substituídas pelos somatórios indicados nas expressões seguintes:

$$\int_{\Gamma_j} \underline{U}_i^* \underline{N} \, d\Gamma = \int_{-1}^1 \underline{U}_i^* \underline{N} |\underline{J}| \, d\eta = \sum_{k=1}^K (\underline{U}_i^* \underline{N})_k |\underline{J}| w_k \quad (4.11)$$

$$\int_{\Gamma_j} \underline{P}_i^* \underline{N} \, d\Gamma = \int_{-1}^1 \underline{P}_i^* \underline{N} |\underline{J}| \, d\eta = \sum_{k=1}^K (\underline{P}_i^* \underline{N})_k |\underline{J}| w_k \quad (4.12)$$

$$\int_{\Gamma_j} \underline{S}_i^* \, d\Gamma = \int_{-1}^1 \underline{S}_i^* |\underline{J}| \, d\eta = \sum_{k=1}^K (\underline{S}_i^*)_k |\underline{J}| w_k \quad (4.13)$$

onde:

K → número de pontos de integração

w_k → fatores de peso referentes aos pontos de integração.

Para as integrais regulares, utilizou-se um refinamento no número de pontos de integração, isto é, uma seleção adequada desse número, baseando-se no fato de se necessitar de um número menor de pontos de integração à medida em que o ponto ξ se afasta do ponto x considerado.

Aplicando a equação (4.9) para todos os pontos nodais ξ do contorno, obtêm-se um sistema com um número de equações total igual a três vezes o número de nós, da seguinte forma:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{P} + \underline{B} \quad (4.14)$$

Os vetores \underline{U} e \underline{P} em (4.14), contêm os valores nodais de deslocamento e forças de superfície, respectivamente, onde devemos ter, para cada direção nodal, um dos dois valores como incôgnita, sendo o outro prescrito.

O sistema dado em (4.14) pode então ser reordenado, colocando-se todas as incôgnitas num único vetor \underline{X} e todos os valores prescritos multiplicados pelos respectivos coeficientes de \underline{G} ou \underline{H} , juntamente com a parcela referente à carga distribuída e que é sempre conhecida, num outro vetor, ao qual chamaremos de \underline{F} .

Consequentemente, obtêm-se um sistema da forma abaixo, onde \underline{A} é a matriz dos coeficientes que multiplicam as incôgnitas, sendo cheia e não simétrica:

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{F} \quad (4.15)$$

Esse sistema é então resolvido, sendo obtidos os valores dos deslocamentos e forças de superfície incógnitos.

No programa computacional que foi desenvolvido, utilizou-se a resolução do sistema de equações pelo Método de Gauss e a matriz \underline{A} foi montada diretamente, sem chegar-se a montar as matrizes \underline{G} e \underline{H} globais.

Após a resolução do problema no contorno, podem ser calculados, caso se queira, os deslocamentos, momentos e esforços cortantes em qualquer ponto interno a partir dos deslocamentos e forças de superfície calculados no contorno, pois estes já são agora conhecidos em todos os pontos nodais para cada direção generalizada. Cabe observar aqui que este método difere do Método dos Elementos Finitos neste aspecto, pois calculam-se os valores das funções apenas nos pontos internos onde se achar necessário.

4.2.2 - Cálculo dos Deslocamentos nos Pontos Internos

Para o cálculo dos deslocamentos nos pontos internos, é utilizada a equação (3.64) discretizada ao longo do contorno, analogamente ao que foi feito quando da discretização da equação (3.61).

Obtêm-se então, para cada ponto ξ_j do interior da região Ω :

$$\begin{aligned} \underline{U}_i = & \sum_{k=1}^e \left[\int_{\Gamma_k} \underline{U}_i^* \underline{N} \, d\Gamma \right] \underline{P}^n - \sum_{k=1}^e \left[\int_{\Gamma_k} \underline{P}_i^* \underline{N} \, d\Gamma \right] \underline{U}^n + \\ & + \sum_{k=1}^e \left[\int_{\Gamma_k} q \underline{S}_i^* \, d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.2.3 - Cálculo dos Momentos e Esforços Cortantes nos Pontos Internos

Para o cálculo dos esforços resultantes nos pontos internos são utilizadas as equações (3.67) e (3.68), também discretizadas ao longo do contorno.

Para cada ponto interno ξ_i , tem-se:

i) Momentos:

$$\begin{aligned} \underline{M}_i = & \sum_{k=1}^e \left[\int_{\Gamma_k} \underline{U}_i^{*'} \underline{N} \, d\Gamma \right] \underline{P}^n - \sum_{k=1}^e \left[\int_{\Gamma_k} \underline{P}_i^{*'} \underline{N} \, d\Gamma \right] \underline{U}^n + \\ & + \sum_{k=1}^e \left[\int_{\Gamma_k} q \underline{W}_i^{*'} \, d\Gamma \right] + \frac{q \delta_{\alpha\beta}}{(1-\nu)\lambda^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

ii) Cortantes:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_i = & \sum_{k=1}^e \left[\int_{\Gamma_k} \underline{U}_i^{*''} \underline{N} \, d\Gamma \right] \underline{P}^n - \sum_{k=1}^e \left[\int_{\Gamma_k} \underline{P}_i^{*''} \underline{N} \, d\Gamma \right] \underline{U}^n + \\ & + \sum_{k=1}^e \left[\int_{\Gamma_k} q \underline{W}_i^{*''} \, d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $\underline{U}_i^{*'} , \underline{U}_i^{*''} , \underline{P}_i^{*'} , \underline{P}_i^{*''} , \underline{W}_i^{*'} , \underline{W}_i^{*''}$ são matrizes que contêm os tensores cujas componentes foram obtidas no item 3.7.

As integrais que aparecem nas equações (4.16), (4.17) e (4.18) foram resolvidas através da quadratura de Gauss com refinamento, tal como no item anterior. Deve-se observar que nesse caso as integrais de contorno serão sempre regulares.

4.3 - Elementos Utilizados

Os elementos utilizados no programa são elementos quadráticos isoparamétricos, podendo ser contínuos ou descontínuos, sendo este último usado em casos especiais (ver item 4.4).

4.3.1 - Elemento Quadrático Isoparamétrico Contínuo

É um elemento que possui três pontos nodais situados sobre uma curva, sendo um em cada uma das duas extremidades e o terceiro situado entre os dois. Suas funções de interpolação, tanto para as coordenadas como para as funções envolvidas, são do segundo grau (Figura 4.2). Esse elemento é dito contínuo pelo fato de assegurar a continuidade das funções consideradas, entre elementos adjacentes.

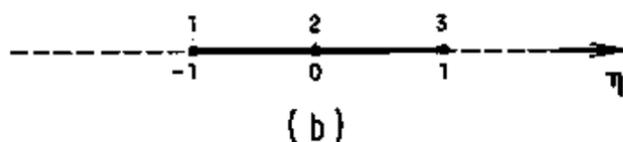
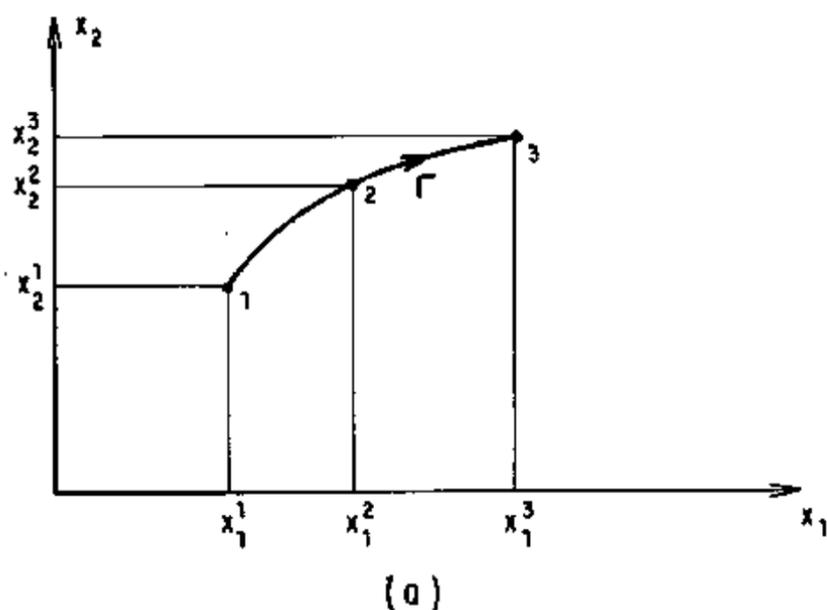


Fig. 4.2 - Elemento quadrático isoparamétrico contínuo:
 a) em relação às coordenadas cartesianas x_1 e x_2
 e ao contorno Γ ; b) em relação à coordenada
 intrínseca η .

As funções de interpolação, dadas em função da coordenada adimensional η são as seguintes:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} \eta (\eta - 1) \\ N_2 &= (1 - \eta) (1 + \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{2} \eta (\eta + 1) \end{aligned} \quad (4.19)$$

e possuem valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos outros dois.

Um ponto qualquer do elemento tem suas coordenadas (x_1, x_2) calculadas em função das coordenadas nodais, ou seja:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^1 N_1 + x_1^2 N_2 + x_1^3 N_3 \\ x_2 &= x_2^1 N_1 + x_2^2 N_2 + x_2^3 N_3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

ou ainda, em forma matricial:

$$\underline{x}^j = \underline{M} \underline{x}^n \quad (4.21)$$

onde:

$$\underline{x}^j = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\underline{x}^n = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1^3 \\ x_2^3 \end{Bmatrix}$$

Os deslocamentos e forças de superfície são interpolados como em (4.3), onde, para o elemento considerado, tem-se:

$$\underline{u}^j = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{p}^j = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

(4.23)

$$\underline{u}^n = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{Bmatrix} \quad \underline{p}^n = \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \\ p_3^3 \end{Bmatrix}$$

O jacobiano da transformação é obtido em função de derivadas de (4.20), através da expressão:

$$|\underline{J}| = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (4.24)$$

4.3.2 - Elemento Quadrático Isoparamétrico Descontínuo

Para esse elemento (Figura 4.3), o procedimento é o mesmo utilizado para o elemento contínuo mostrado no item 4.3.1, mudando apenas as expressões das funções de interpolação. Estas também foram obtidas considerando-se que devem possuir valor um no ponto nodal considerado e zero nos outros dois. Porém, como os nós 1 e 3 não estão mais situados nas extremidades do elemento, não haverá continuidade das funções envolvidas nessas extremidades.

Utilizou-se aqui o elemento descontínuo no caso de descontinuidade de normal que será exposto no item 4.4.2.

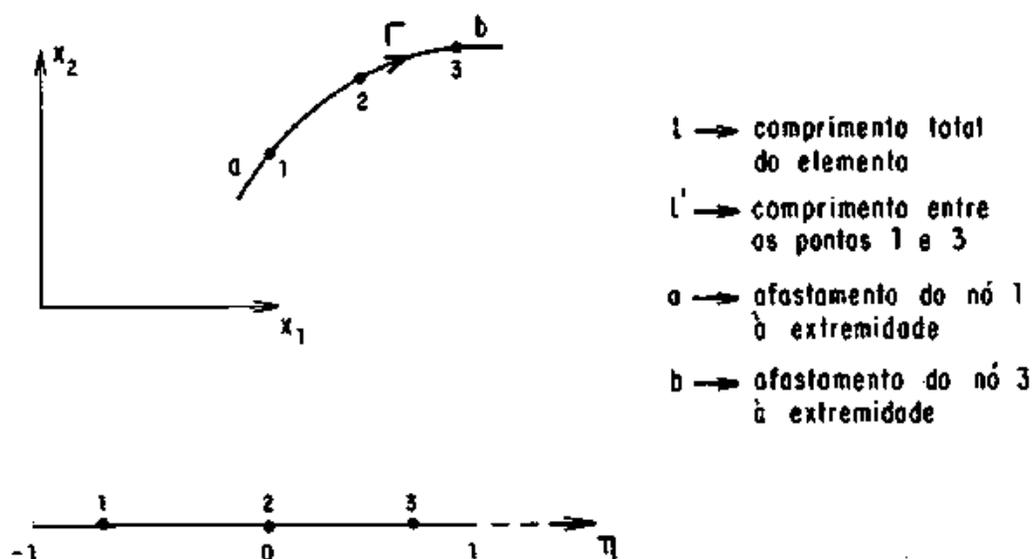


Fig. 4.3 - Elemento quadrático isoparamétrico descontínuo

Suas funções de interpolação são dadas a seguir, onde a , b e l são definidos na Figura 4.3.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{l\eta(l\eta - l + 2b)}{2(l - a - b)(l - 2a)} \\
 N_2 &= \frac{l\eta(2(a - b) - l\eta)}{(l - 2a)(l - 2b)} + 1 \\
 N_3 &= \frac{l\eta(l\eta + l - 2a)}{2(l - a - b)(l - 2b)}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Nos casos em que se tem $a = 0$ e $b \neq 0$ ou ainda, $a \neq 0$ e $b = 0$, o elemento é dito semi-contínuo, podendo-se utilizar as mesmas funções (4.25) com $a = 0$ ou $b = 0$, respectivamente.

Para o caso especial em que se tem a e b nulos, as expressões (4.25) recaem nas expressões (4.19).

4.4 - Descontinuidade da Normal ou da Condição de Contorno

No caso em que o contorno da região não possui continuidade da normal, não é assegurada a continuidade das forças de superfície no contorno, podendo-se ter direções da normal diferentes para um mesmo nó que pertença a dois elementos adjacentes (Figura 4.4).

Para resolver esse problema foram utilizados o nó duplo e o elemento descontínuo.

Cabe observar que estes procedimentos podem também ser empregados quando existe continuidade da normal, porém as condições de contorno são descontínuas.

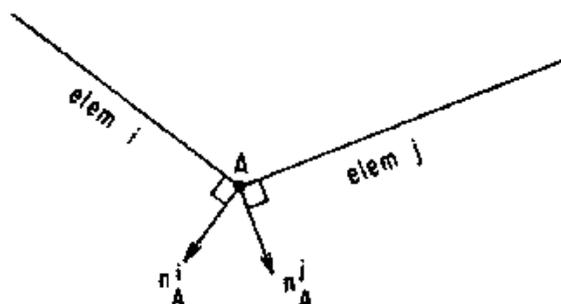


Fig. 4.4 - Descontinuidade do normal

4.4.1 - Utilização de Nó Duplo

Quando, para uma dada direção do ponto de interseção de dois elementos, no qual existe descontinuidade da normal ou da condição de contorno, tem-se a força de superfície conhecida nos dois elementos adjacentes ou então, o deslocamento conhecido num elemento e a força de superfície conhecida no outro, pode-se considerar como se houvesse dois pontos nodais no mesmo ponto geométrico, cada um pertencendo a um elemento diferente (Figura 4.5).

Além disso, impõe-se que, nesses dois nós, o deslocamento \bar{u} é o mesmo, para assegurar a continuidade de deslocamentos no ponto de interseção.

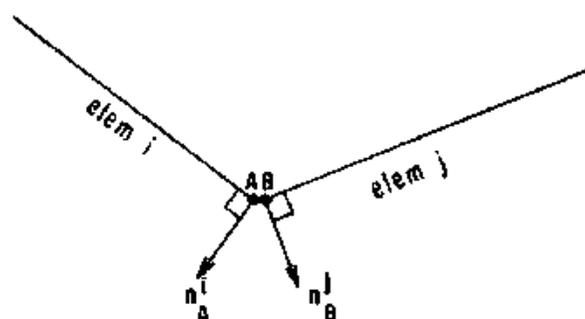


Fig. 4.5 - Nó duplo

4.4.2 - Utilização de Elemento Descontínuo

Quando, em uma determinada direção de um nó onde haja descontinuidade da normal, as forças de superfície não são conhecidas em nenhum dos dois elementos adjacentes, a utilização do nó duplo mostrado no item 4.4.1 não resolve o problema. Isto porque tem-se um número de equações independentes, para esse

não, menor que o número de incógnitas, devido ao fato dos deslocamentos serem contínuos no ponto e as forças de superfície podem não ser.

Existem algumas formas de se resolver esse problema. Uma delas é a utilização de equações adicionais, sendo obtidas assumindo a continuidade dos esforços resultantes^[9]. Estas equações são dadas em função de derivadas de deslocamentos e substituem equações no sistema.

Neste trabalho foi utilizado para esses casos o elemento descontínuo. Este elemento possui precisão da mesma ordem do elemento contínuo, quando se escolhe uma distância conveniente dos nós às extremidades do elemento e ainda, número de pontos de integração adequado.

Como os dois pontos nodais estão afastados, isto é, não possuem as mesmas coordenadas (Figura 4.6), tem-se equações independentes no sistema para cada um dos dois.

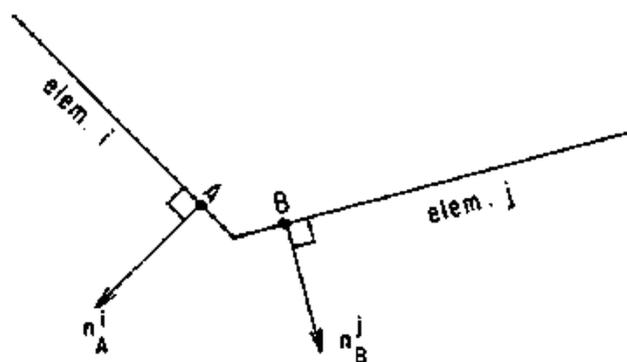


Fig. 4.6 - Elemento descontínuo

Para este elemento, foram testados diversos afastamentos do nó deslocado da extremidade do elemento. Observou-se que, à medida em que essa distância se torna menor, a integração numérica requer maior número de pontos de Gauss, pois os nós deslocados dos dois elementos adjacentes ficam mais próximos, dificultando a integração. Observou-se ainda uma discreta tendência de piorar o resultado quando essa distância se torna muito grande, provavelmente devido à extrapolação existente nessa extremidade. Além disso, quando os nós deslocados dos dois elementos adjacentes ficam muito próximos, as linhas correspondentes na matriz do sistema tendem a ficar iguais, causando perturbação na resposta. Através da otimização dos valores desses afastamentos e do número de pontos de integração, foram obtidos resultados bastante satisfatórios.

4.5 - Integrais Singulares

Quando o ponto fonte e o ponto campo estiverem no mesmo elemento, as integrais correspondentes às matrizes \underline{G} e \underline{H} e ao vetor \underline{B} possuirão singularidades de ordem $\ln r$ e r^{-1} , em consequência dos tensores u_{ij}^* e p_{ij}^* serem singulares quando $r = 0$ (ver item 3.3.3).

Para os elementos quadráticos que foram utilizados no programa, as singularidades desaparecem quando os nós que correspondem aos pontos ξ e x não são coincidentes, continuando porém a existir quando esses pontos coincidem. Isto se deve ao fato das funções de interpolação, que multiplicam esses tensores,

terem valor um no ponto nodal considerado e zero nos outros pontos nodais do elemento.

Portanto, teremos singularidades nas integrais correspondentes às submatrizes da diagonal de \underline{G} e de \underline{H} , e ainda, no vetor \underline{B} , cuja integral não envolve funções de interpolação para a carga distribuída uniforme considerada.

Os procedimentos que foram adotados para esses casos são mostrados nos itens seguintes.

4.5.1 - Cálculo das Submatrizes da Diagonal de \underline{G}

As submatrizes da diagonal de \underline{G} , que envolvem integrais dos tensores u_{ij}^* , possuem singularidades de ordem logarítmica.

Uma forma de se resolver o problema seria a utilização de integração numérica com funções de peso logarítmicas.

Uma outra alternativa, porém, é utilizar uma transformação quadrática envolvendo a coordenada intrínseca η e a coordenada θ dos pontos de integração^[8], da forma:

$$\eta(\theta) = a\theta^2 + b\theta + C \quad (4.26)$$

e ainda, de tal maneira que a derivada dessa expressão em relação a θ seja igual a zero no ponto onde ocorre a singularidade.

Isso produz um mapeamento em que os novos pontos de integração η são concentrados em torno da singularidade.

Nesse caso, não é necessário isolar a parcela onde há singularidade e integrá-la separadamente, como ocorre quando se utiliza funções de peso logarítmicas. Ao contrário, essas parcelas são integradas juntamente com as demais, fazendo-se apenas uma mudança nas coordenadas dos pontos de integração.

Optou-se pela transformação quadrática, a qual foi realizada conforme será mostrado a seguir e que conduziu a precisão de mesma ordem de grandeza da que foi obtida em $|^8|$.

Seja a integral

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (4.27)$$

onde, no nosso caso, η é a coordenada adimensional e a função f envolve um produto entre o tensor u_{ij}^* , as funções de interpolação e o jacobiano.

Será chamado de $\bar{\eta}$ o ponto singular, o qual está situado no intervalo $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$.

Seja ainda a equação (4.26), para a qual são impostas as condições:

$$\frac{d\eta}{d\theta} = 0 \text{ em } \bar{\eta}$$

$$\eta = 1 \text{ para } \theta = 1 \quad (4.28)$$

$$\eta = -1 \text{ para } \theta = -1$$

Resolvendo a equação (4.26) para θ , obtêm-se, para cada valor de η , dois valores de θ , isto é:

$$\theta' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - \bar{\eta})}}{2a} \quad (4.29)$$

$$\theta'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c - \bar{\eta})}}{2a}$$

Das condições (4.28), tem-se:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2a\bar{\theta} + b &= 0 \\ \text{no ponto singular } \bar{\eta} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a + b + c &= 1 \\ a - b + c &= -1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

As equações (4.31) fornecem:

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ a &= -c \end{aligned} \quad (4.32)$$

Usando θ' ou θ'' , tem-se:

$$b^2 - 4a(c - \bar{\eta}) = 0 \quad (4.33)$$

ou, substituindo (4.32) em (4.33), fica:

$$4a^2 + 4a\bar{\eta} + 1 = 0 \quad (4.34)$$

donde se obtêm:

$$a' = \frac{-\bar{\eta} + \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2} \quad (4.35)$$

$$a'' = \frac{-\bar{\eta} - \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2}$$

A substituição de (4.35) na segunda das equações (4.32) conduz a:

$$c' = \frac{\bar{\eta} - \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2} \quad (4.36)$$

$$c'' = \frac{\bar{\eta} + \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2}$$

Observando que $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$, conclui-se de (4.35) e (4.36) que somente teremos valores reais para os coeficientes a e c se $|\bar{\eta}| = 1$, ficando portanto:

$$a = a' = a'' = -\frac{\bar{\eta}}{2} \quad (4.37)$$

$$c = c' = c'' = \frac{\bar{\eta}}{2}$$

A substituição de (4.37) em (4.26), fornece:

$$\eta = \frac{\bar{\eta}}{2} (1 - \theta^2) + \theta \quad (4.38)$$

E ainda, tem-se, de (4.38):

$$d\eta = (1 - \bar{\eta} \theta) d\theta \quad (4.39)$$

Portanto, a integral dada em (4.27), nesse caso,

fica:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 f\left[\frac{\bar{\eta}}{2} (1 - \theta^2) + \theta\right] (1 - \bar{\eta} \theta) d\theta \quad (4.40)$$

sendo válida para $\bar{\eta} = -1$ e $\bar{\eta} = 1$.

Quando o ponto singular $\bar{\eta}$ estiver situado entre -1 e 1 , a integral (4.27) pode ser dividida em duas, da seguinte forma:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^{\bar{\eta}} f(\eta) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 f(\eta) d\eta \quad (4.41)$$

onde as integrais à direita podem ser transformadas em integrais de -1 a 1 , fazendo-se as seguintes mudanças de variáveis:

a) Na primeira integral à direita:

$$\eta = \frac{1}{2} \left[\rho' (1 + \bar{\eta}) - 1 + \bar{\eta} \right] \quad (4.42)$$

$$d\eta = \frac{1}{2} (\bar{\eta} + 1) d\rho'$$

b) Na segunda integral \bar{a} direita:

$$\eta = \frac{1}{2} \left[\rho'' (1 - \bar{\eta}) + 1 + \bar{\eta} \right] \quad (4.43)$$

$$d\eta = \frac{1}{2} (1 - \bar{\eta}) d\rho''$$

Substituindo (4.42) e (4.43) em (4.41), vem:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} \left[(\bar{\eta} + 1) \rho' - 1 + \bar{\eta} \right] \right] \frac{(\bar{\eta} + 1)}{2} d\rho' + \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} \left[(1 - \bar{\eta}) \rho'' + 1 + \bar{\eta} \right] \right] \frac{(1 - \bar{\eta})}{2} d\rho'' \quad (4.44)$$

onde a primeira integral \bar{a} direita possui singularidade em $\rho' = 1$ e a segunda, em $\rho'' = -1$.

Podemos agora utilizar (4.38) e (4.39) escritas para ρ' e ρ'' , considerando os pontos singulares citados acima, isto é:

$$\rho' = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) + \theta$$

$$d\rho' = (1 - \theta) d\theta$$

$$\rho'' = \frac{1}{2} (\theta^2 - 1) + \theta$$

$$d\rho'' = (1 + \theta) d\theta \quad (4.45)$$

e substituir (4.45) em (4.44), obtendo-se a equação:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta &= \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} \left[(\bar{\eta} + 1) \left[\frac{1}{2} (1 - \theta^2) + \theta \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \bar{\eta} - 1 \right] \right] \left[\frac{(\bar{\eta} + 1) (1 - \theta)}{2} \right] d\theta + \\
 &\quad + \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{2} \left[(1 - \bar{\eta}) \left[\frac{1}{2} (\theta^2 - 1) + \theta \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \bar{\eta} + 1 \right] \right] \left[\frac{(1 - \bar{\eta}) (1 + \theta)}{2} \right] d\theta
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

que permite resolver o problema da singularidade logarítmica para qualquer ponto do intervalo considerado.

Resumindo, integrais com singularidades logarítmicas podem ser calculadas fazendo-se a transformação:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 \left[f(\eta_1) \frac{d\eta_1}{d\theta} + f(\eta_2) \frac{d\eta_2}{d\theta} \right] d\theta \tag{4.47}$$

onde se tem, para qualquer $\bar{\eta}$ de $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left[(\bar{\eta} + 1) \left[\frac{1}{2} (1 - \theta^2) + \theta \right] + \bar{\eta} - 1 \right]$$

$$\frac{d\eta_1}{d\theta} = \frac{1}{2} (\bar{\eta} + 1) (1 - \theta)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \left[(1 - \bar{\eta}) \left(\frac{1}{2} (\theta^2 - 1) + \theta \right) + \bar{\eta} + 1 \right] \quad (4.48)$$

$$\frac{d\eta_2}{d\theta} = \frac{1}{2} (1 - \bar{\eta}) (1 + \theta)$$

Deve-se observar que, para $\bar{\eta} = -1$, a primeira parcela na integral do 2º membro de (4.47) desaparece, pois $d\eta_1/d\theta = 0$ e para $\bar{\eta} = 1$, a segunda parcela é que desaparece, pois agora tem-se $d\eta_2/d\theta = 0$, ambos os casos recaindo em (4.40).

4.5.2 - Cálculo das Submatrizes da Diagonal de H

As submatrizes da diagonal de \underline{H} , que correspondem às submatrizes \underline{C}_i somadas às submatrizes $\underline{\bar{H}}_{ij}$ (ver equações (4.10)), são expressas através de integrais envolvendo os tensores p_{ij}^* e possuem singularidades de ordem $\ln r$ e r^{-1} .

Entretanto, essas submatrizes podem ser obtidas sem que se calcule explicitamente os valores de \underline{C}_i e de $\underline{\bar{H}}_{ij}$, através da consideração de que, para movimentos de corpo rígido, não temos nenhuma força aplicada. Portanto, a equação (4.14) fica:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{0} \quad (4.49)$$

4.5.2.1 - Caso de Placas Finitas

Considerando a equação (3.61) para um ponto ξ qualquer do contorno Γ , tem-se, para movimentos de corpo rígido:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = 0 \quad (4.50)$$

Essa equação admite soluções não triviais para os deslocamentos de corpo rígido seguintes:

$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{u} &= (1, 0, x_1(\xi) - x_1(x)) \\ \text{b) } \underline{u} &= (0, 1, x_2(\xi) - x_2(x)) \\ \text{c) } \underline{u} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Substituindo (4.51) em (4.50), vem:

$$C_{i\alpha} + \int_{\Gamma} \left[p_{i\alpha}^* + (x_{\alpha}(\xi) - x_{\alpha}(x)) p_{i3}^* \right] d\Gamma = 0 \quad (4.52)$$

$$C_{i3} + \int_{\Gamma} p_{i3}^* d\Gamma = 0$$

Portanto, as submatrizes 3×3 \underline{H}_{pp} da diagonal de \underline{H} podem ser calculadas pela seguinte expressão, escrita em forma matricial:

$$\underline{H}_{pp} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^N \underline{H}_{pq} \underline{D}_{qp} \quad p = 1, \dots, N \quad (4.53)$$

onde

N = número de pontos nodais

$$D_{qp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1(p) - x_1(q) & x_2(p) - x_2(q) & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

4.5.2.2 - Caso de Placas Infinitas

Para placas infinitas, as condições de regularidade são violadas (ver item 3.8) se aplicarmos deslocamentos de corpo rígido; portanto, neste caso, deve-se considerar:

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = 0 \quad (4.55)$$

sendo ξ pertencente ao contorno Γ e $u_j(x)$, um movimento de corpo rígido qualquer.

Considerando (4.51) e substituindo em (4.55), vem:

$$C_{i\alpha} + \int_{\Gamma} \left[p_{i\alpha}^* + (x_{\alpha}(\xi) - x_{\alpha}(x)) p_{i3}^* \right] d\Gamma +$$

$$+ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} \left[p_{i\alpha}^* + (x_{\alpha}(\xi) - x_{\alpha}(x)) p_{i3}^* \right] d\Gamma = 0 \quad (4.56)$$

$$C_{i3} + \int_{\Gamma} p_{i3}^* d\Gamma + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} p_{i3}^* d\Gamma = 0$$

Para se obter os valores dos limites indicados, de vemos considerar as expressões (3.84) e (3.85) e substituí-las nas integrais em Γ_{ρ} de (4.56). Observando ainda que:

$$2 \cos^2 \theta - 1 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (4.57)$$

$$2 \sin^2 \theta - 1 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

a primeira e a terceira das equações (3.85) podem ser escritas na forma:

$$p_{11}^* = - \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ 1 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + \nu \right) \right\}$$

$$(4.58)$$

$$p_{22}^* = - \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ 1 + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \left(\frac{8}{\lambda^2 \rho^2} + \nu \right) \right\}$$

Temos, ainda em Γ_ρ , como se observa na Figura 3.4 :

$$x_1(\xi) - x_1(x) = -\rho \cos \theta \quad (4.59)$$

$$x_2(\xi) - x_2(x) = -\rho \operatorname{sen} \theta$$

Calculando então os limites, resulta que:

i) para $\underline{u} = (1, 0, -\rho \cos \theta)$, tem-se:

com $i = 1$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \int_0^{2\pi} \left[p_{11}^* - \rho \cos \theta p_{13}^* \right] d\theta = -1$$

com $i = 2$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \int_0^{2\pi} \left[p_{21}^* - \rho \cos \theta p_{23}^* \right] d\theta = 0 \quad (4.60a)$$

com $i = 3$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \int_0^{2\pi} \left[p_{31}^* - \rho \cos \theta p_{33}^* \right] d\theta = 0$$

ii) para $\underline{u} = (0, 1, -\rho \operatorname{sen} \theta)$, tem-se:

com $i = 1$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \int_0^{2\pi} \left[p_{12}^* - \rho \operatorname{sen} \theta p_{13}^* \right] d\theta = 0$$

com $i = 2$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \int_0^{2\pi} \left[p_{22}^* - \rho \operatorname{sen} \theta p_{23}^* \right] d\theta = -1 \quad (4.60b)$$

com $i = 3$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \int_0^{2\pi} \left[p_{32}^* - \rho \operatorname{sen} \theta p_{33}^* \right] d\theta = 0$$

iii) para $\underline{u} = (0, 0, 1)$, tem-se:

com $i = 1$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} p_{13}^* d\theta = 0$$

com $i = 2$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} p_{23}^* d\theta = 0 \quad (4.60c)$$

com $i = 3$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} p_{33}^* d\theta = -1$$

Pode-se concluir então que no caso de placas infinitas, as submatrizes da diagonal de \underline{H} podem ser calculadas pela seguinte expressão, dada em forma matricial:

$$\underline{H}_{pp} = \underline{I} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^N \underline{H}_{pq} \underline{D}_{qp} \quad p = 1, \dots, N \quad (4.61)$$

sendo N e \underline{D}_{qp} como no item anterior e \underline{I} , a matriz identidade de ordem 3.

Deve-se observar que a equação (4.61) difere de (4.53) apenas pela matriz identidade somada à diagonal principal de \underline{H} .

Cabe ressaltar ainda que no caso de placas infinitas, a matriz \underline{H} não é mais singular, ao contrário do que ocorre no caso de placas finitas, para as quais sempre teremos \underline{H} singular, para permitir que a equação (4.49) admita soluções não triviais.

4.5.3 - Cálculo dos Subvetores de \underline{B} nos Elementos Singulares

Os subvetores do vetor \underline{B} que aparece na equação (4.14) são calculados por (4.7) e também possuem singularidade logarítmica quando o ponto ξ pertence ao elemento em que se este já integrando.

Nesse caso, a singularidade deve-se aos tensores $u_{i\alpha}^*$, pois $v_{i,\alpha}^*$ não possuem singularidade.

Como essas singularidades são de ordem logarítmica, o procedimento aqui adotado é o mesmo do item 4.5.1.

CAPÍTULO VESTRUTURA DO PROGRAMA5.1 - Introdução

O programa computacional realizado para a resolução numérica da formulação apresentada nos capítulos anteriores foi desenvolvido em linguagem FORTRAN e o computador utilizado foi o Burroughs/6700 do NCE/UFRJ.

Mostra-se a seguir o seu fluxograma, bem como a definição das subrotinas que o compõem e o seu manual de utilização.

5.2 - Fluxograma

O programa é modulado em subrotinas que realizam as várias etapas da análise e são chamadas na seqüência mostrada no fluxograma apresentado na Figura 5.1.

As subrotinas são caracterizadas no item seguinte e as variáveis NNO e NINT que aparecem no fluxograma encontram-se definidas no manual de utilização (item 5.4).

5.3 - Definição das Subrotinas

A caracterização de cada uma das subrotinas do programa é dada a seguir:

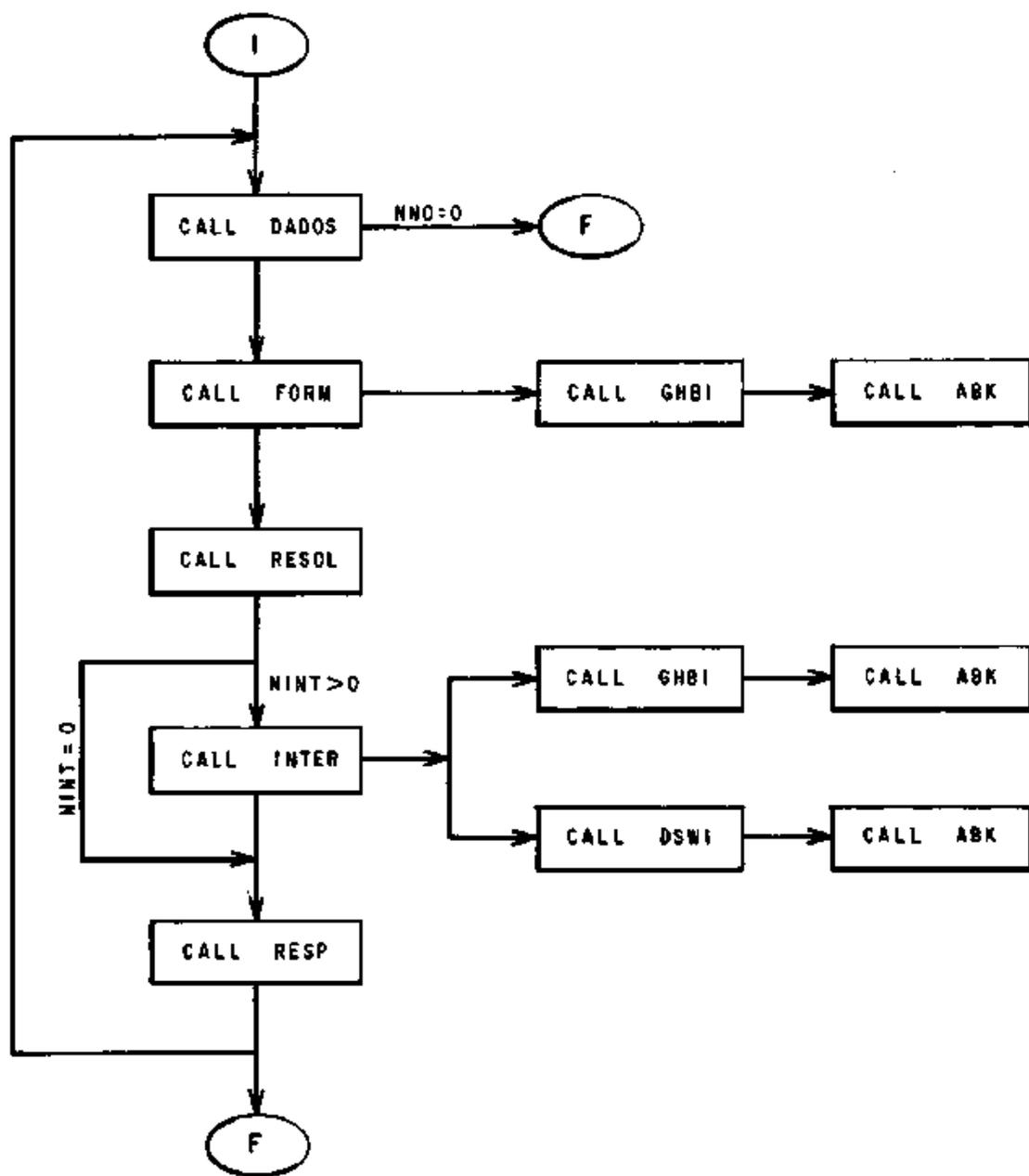


Fig. 5.1 - Fluxograma

a) Subrotina DADOS:

Realiza a leitura e impressão dos dados para cada placa a ser analisada, tais como: título do problema, parâmetros básicos, coordenadas dos pontos nodais, incidência dos elementos, condições de contorno e coordenadas dos pontos internos.

O número de pontos internos igual a zero ($NNO = 0$) é usado como FLAG do programa.

Esta subrotina também calcula as dimensões dos elementos, ou seja, o comprimento ℓ e as distâncias a , b e ℓ' de finidos na Figura 4.3.

b) Subrotina FORM:

Monta o sistema de equações $\underline{A} \underline{X} = \underline{F}$, sendo a montagem realizada diretamente, ou seja, sem calcular as matrizes \underline{G} e \underline{H} e o vetor \underline{B} globais.

c) Subrotina GHBI:

Calcula as submatrizes \underline{G}_{ij} e \underline{H}_{ij} e a integral que multiplica a carga distribuída no subvetor \underline{B}_{ij} relativos a cada elemento de contorno.

O cálculo é realizado por meio de integração numérica utilizando a quadratura de Gauss, sendo que para as integrais com singularidade logarítmica, faz-se uma transformação quadrática sobre as coordenadas dos pontos de integração.

d) Subrotina ABK:

Calcula as funções de Bessel modificadas $K_0(z)$ e $K_1(z)$ através das respectivas expansões polinomiais e também os valores das expressões de $A(z)$ e $B(z)$ que são definidas a partir de $K_0(z)$ e $K_1(z)$.

e) Subrotina RESOL:

Resolve o sistema de equações através do Método de Gauss, reordenando em seguida o vetor solução do sistema e o vetor que contém os valores prescritos, sendo colocados todos os deslocamentos generalizados em um único vetor e todas as forças de superfície generalizadas em outro.

f) Subrotina INTER:

Calcula os deslocamentos generalizados, momentos e esforços cortantes nos pontos internos.

Quando o número de pontos internos é igual a zero ($NINT = 0$), essa subrotina não é chamada, passando-se diretamente à impressão dos resultados.

g) Subrotina DSWI:

Calcula as integrais dos tensores que multiplicam as forças de superfície, os deslocamentos e a carga distribuída nas expressões dos esforços nos pontos internos, através da quadratura de Gauss.

h) Subrotina RESP:

Imprime os resultados relativos aos pontos nodais do contorno (deslocamentos e forças de superfície generalizados) e aos pontos internos (deslocamentos generalizados, momentos e esforços cortantes).

5.4 - Manual de Utilização

Para cada placa a ser analisada, a seqüência dos cartões, assim como os FORMAT's de cada variável são detalhados a seguir:

i) Título do Problema

1 Cartão:

COLUNAS	VARIÁVEL	FORMAT
1 a 80	TIT(20)	20A4

sendo:

TIT(20) - título do problema

ii) Parâmetros Básicos

1º Cartão:

COLUMNAS	VARIÁVEL	FORMAT
1 a 10	NNO	I10
11 a 20	NINT	I10
21 a 30	NEL	I10
31 a 40	INF	I10

2º Cartão:

COLUMNAS	VARIÁVEL	FORMAT
1 a 10	EE	F10.0
11 a 20	CP	F10.0
21 a 30	T	F10.0
31 a 40	Q	F10.0

sendo:

NNO - número de pontos nodais

NINT - número de pontos internos

NEL - número de elementos de contorno

INF - código que indica se existe ou não contorno no infinito

=0: não há contorno no infinito

=1: há contorno no infinito

EE - módulo de elasticidade longitudinal

CP - coeficiente de Poisson

T - espessura da placa

Q - carga distribuída.

iii) Coordenadas dos Pontos Nodais

NNO Cartões:

COLUNAS	VARIÁVEL	FORMAT
1 a 10	I	I10
11 a 20	X(I)	F10.0
21 a 30	Y(I)	F10.0
31 a 40	NODUP(I)	I10

sendo:

I - número do nó

X(I) - coordenada x do nó I

Y(I) - coordenada y do nó I

NODUP(I) - número do nó duplo do nó I (nó com as mesmas coordenadas do nó I)

=0 ou branco: o nó I não possui nó duplo

>0 : o nó I possui nó duplo.

Observação: O nó duplo deve ser utilizado quando houver descontinuidade da normal ao contorno e/ou descontinuidade de condição de contorno nas extremidades de elementos adjacentes. Deverão ser considerados então dois pontos nodais com as mesmas coordenadas, porém, cada um pertencendo a um elemento diferente (Figura 5.2).

Deve-se prescrever para cada direção nodal, o deslocamento em um e a força de superfície no outro, ou as respectivas forças de superfície em ambos. Caso se conheça apenas o deslocamento em ambos e exista descontinuidade da normal, devem ser utilizados os elementos descontínuos ou os semi-contínuos (ver próximo item).

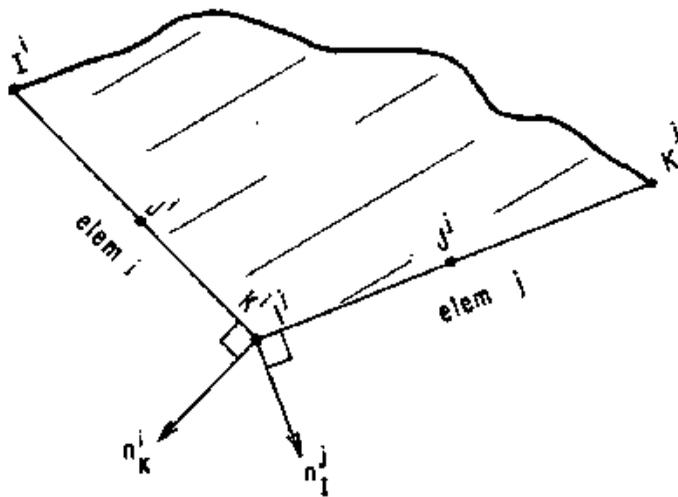


Fig. 5.2 - Nó duplo

iv) Incidência dos Elementos

NEL Cartões:

COLUNAS	VARIÁVEL	FORMAT
1 a 10	I	I10
11 a 20	INC(1,1)	I10
21 a 30	INC(1,2)	I10
31 a 40	INC(1,3)	I10
41 a 50	ALR(1)	F10.0
51 a 60	BLR(1)	F10.0

sendo:

I - número do elemento

$INC(I,1)$ - número do nó 1 do elemento I

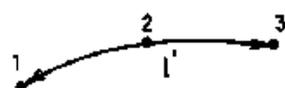
$INC(I,2)$ - número do nó 2 do elemento I

$INC(I,3)$ - número do nó 3 do elemento I

$ALR(I)$ - relação a/l'

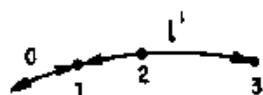
$BLR(I)$ - relação b/l'

onde a , b e l' são definidos na Figura 5.3.



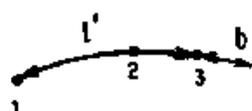
elemento contínuo
($a = b = 0$)

$ALR(I) = BLR(I) = 0$



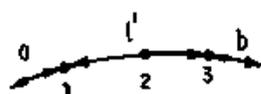
elemento semi-contínuo
($a \neq 0$ e $b = 0$)

$ALR(I) \neq 0$
 $BLR(I) = 0$



elemento semi-contínuo
($a = 0$ e $b \neq 0$)

$ALR(I) = 0$
 $BLR(I) \neq 0$



elemento descontínuo
($a \neq 0$ e $b \neq 0$)

$ALR(I) \neq 0$
 $BLR(I) \neq 0$

Fig. 5.3 - Definição dos elementos

Observações:

- 1 - A incidência deve ser fornecida considerando que o domínio da placa deve ficar sempre à esquerda do contorno.
- 2 - Os elementos descontínuos e semi-contínuos devem ser utilizados nos casos em que há descontinuidade da normal na interseção de elementos adjacentes e não se conhece a força de superfície em nenhum desses dois elementos, em uma dada direção do ponto de interseção. Nesse caso, procede-se como na Figura 5.4, colocando-se dois nós afastados das extremidades dos elementos (ou então afastando apenas um dos dois).

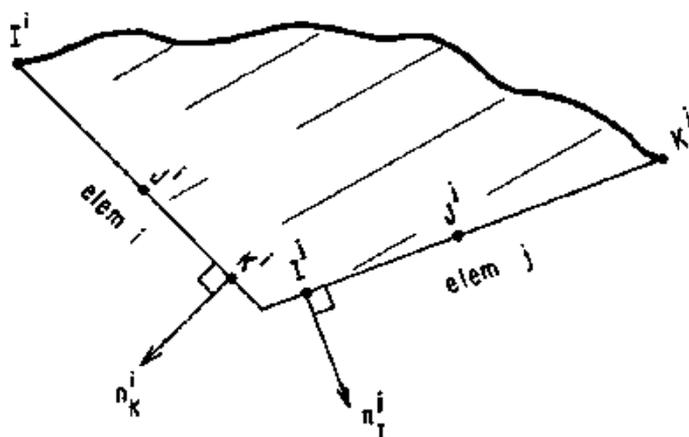


Fig. 5.4 - Elemento descontínuo

v) Condições de Contorno

NNO Cartões:

COLUMNAS	VARIÁVEL	FORMAT
1 a 10	I	I10
11 a 20	KOD(3*I-2)	I10
21 a 30	VP(3*I-2)	F10.0
31 a 40	KOD(3*I-1)	I10
41 a 50	VP(3*I-1)	F10.0
51 a 60	KOD(3*I)	I10
61 a 70	VP(3*I)	F10.0

sendo:

I - número do nó

KOD(3*I-2), KOD(3*I-1), KOD(3*I) - códigos que indicam se há deslocamento ou força de superfície prescritos nas direções 1, 2 e 3, respectivamente, do nó I.

=0: deslocamento generalizado prescrito

=1: força de superfície generalizada prescrita.

$VP(3*I-2)$, $VP(3*I-1)$, $VP(3*I)$ - valores prescritos de deslocamentos ou forças de superfície (apenas um dos dois deve ser prescrito em cada direção nodal) nas direções 1, 2 e 3, respectivamente.

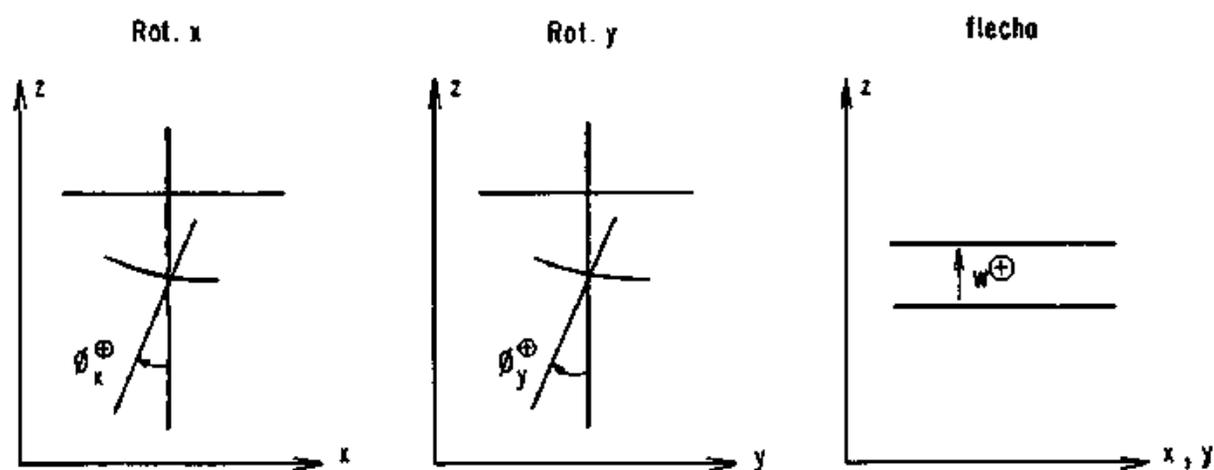
sendo:

direção nodal 1 → rotação x ou momento de superfície x

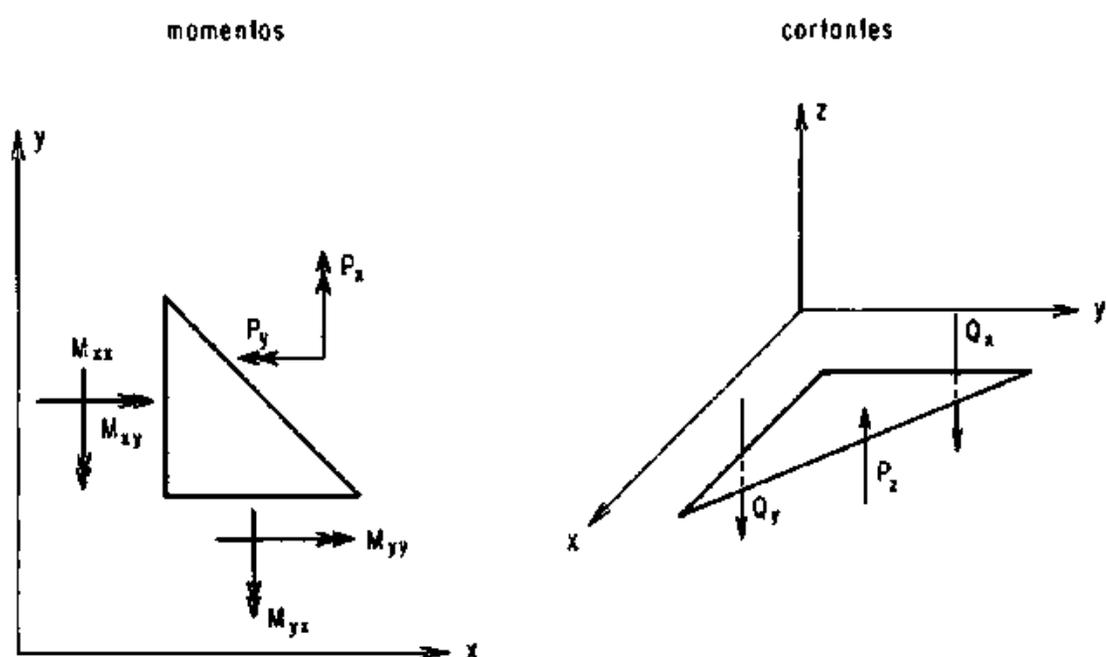
direção nodal 2 → rotação y ou momento de superfície y

direção nodal 3 → flecha ou força de superfície z

Os sinais positivos dos deslocamentos generalizados, esforços e forças de superfície acham-se indicados na Figura 5.5.



(a)



(b)

Fig. 5.5 - Convenção de sinais: a) deslocamentos generalizados ;
b) esforços resultantes e forças de superfície generalizadas

vi) Coordenadas dos Pontos Internos

NINT Cartões:

COLUNAS	VARIÁVEL	FORMAT
1 a 10	I	I10
11 a 20	XI(I)	F10.0
21 a 30	YI(I)	F10.0

sendo:

I - número do ponto interno

XI(I) - coordenada x do ponto I

YI(I) - coordenada y do ponto I

Observação: Se NINT definido no item ii) for igual a zero, não fornecer nenhum cartão nesse bloco.

FLAG do Programa

Ao final de todos os problemas a serem analisados, devem ser colocados dois cartões em branco, pois o programa para quando NNO definido no item ii) é igual a zero.

CAPÍTULO VIAPLICAÇÕES6.1 - Introdução

O programa desenvolvido foi testado para várias aplicações numéricas e os resultados obtidos foram comparados com soluções analíticas.

A seguir, são apresentados esses exemplos, assim como as respectivas análises dos resultados.

6.2 - Exemplo 1: Torção de Uma Placa Quadrada

Seja uma placa quadrada de lado igual a $2a$ e espessura h onde, nos lados $y = \pm a$ as tensões são nulas e nas seções $x = \pm a$, a tensão normal é nula, ocorrendo rotação sem que haja distorção transversal.

A solução analítica para esse problema usando a teoria de Reissner é dada pelas expressões abaixo ⁸, ¹⁶:

deslocamentos:

$$\phi_x = \frac{\theta}{\lambda} \left[2 \frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda a)} - \lambda y \right]$$

$$\phi_y = -\theta x \quad (6.1a)$$

$$w = \theta xy$$

momentos:

$$M_{xy} = (1 - \nu)D \theta \left[\frac{\cosh(\lambda y)}{\cosh(\lambda a)} - 1 \right] \quad (6.1b)$$

$$M_{xx} = M_{yy} = 0$$

cortantes:

$$Q_x = (1 - \nu)D \theta \lambda \frac{\sinh(\lambda y)}{\cosh(\lambda a)} \quad (6.1c)$$

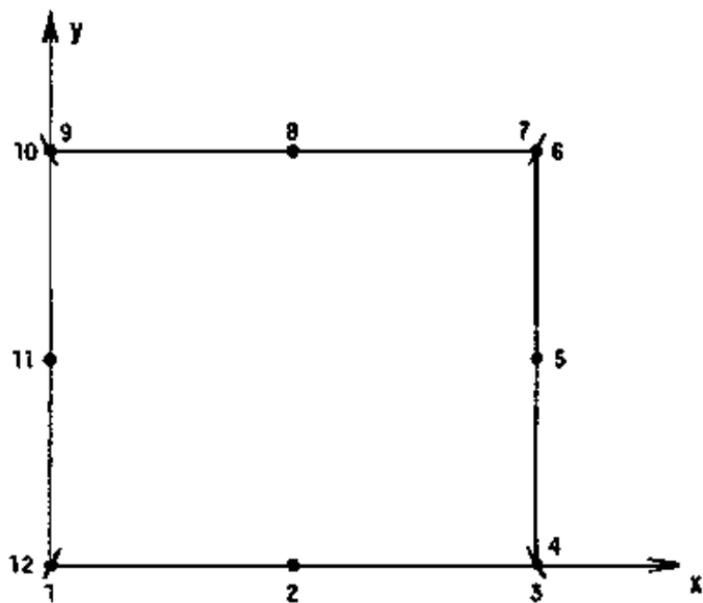
$$Q_y = 0$$

Em virtude da simetria existente, considerou-se apenas um quarto da placa, cujo contorno foi discretizado primeiramente utilizando-se uma malha com 4 elementos e 12 pontos nodais e, em seguida, uma outra com 8 elementos e 20 pontos nodais (ver Figura 6.1).

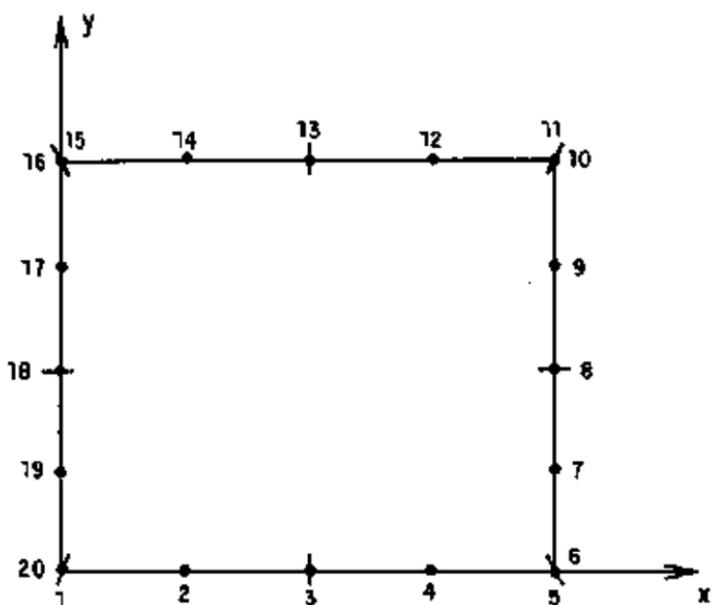
Em ambas foi utilizado o n \bar{o} duplo para resolver o problema da descontinuidade de normal nos cantos da placa e adotaram-se as seguintes condi \tilde{c} oes de contorno:

$$\text{Em } y = 0: \phi_x = M_{yy} = Q_y = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Em } x = a: \phi_y &= -\theta a \\ w &= \theta a y \\ M_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$



(a)



(b)

Fig. 6.1 - Placa quadrada : a) malha com 4 elementos ;
 b) malha com 8 elementos .

$$\text{Em } y = a: M_{xy} = M_{yy} = Q_y = 0$$

$$\text{Em } x = 0: \phi_y = w = M_{xx} = 0$$

Os resultados numéricos obtidos considerando $h/2a = 1$ e $\nu = 0,3$ são mostrados na Tabela 6.1 para as duas malhas. Como pode ser observado, além da convergência do método, esses resultados são bastante satisfatórios quando comparados com a solução analítica, mesmo para a malha de 4 elementos.

Os resultados aqui encontrados corresponderam àqueles obtidos por VANDER WEEËN¹⁸ para discretizações análogas.

6.3 - Exemplo 2: Placa Circular Com Pressão Uniforme

Seja uma placa circular de raio a e espessura h , engastada em $r = a$ e submetida a uma pressão uniforme $q/2$ nas faces da mesma (Figura 6.2).

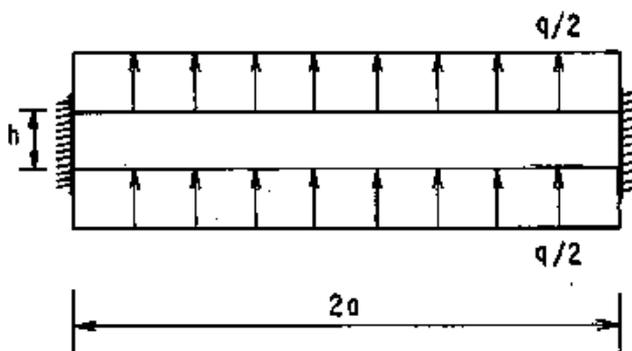


Fig. 6.2 - Placa circular engastada com pressão uniforme

TABELA 6.1 - Torção de uma placa quadrada

$\frac{y}{a}$	$\phi_x(y)/\phi_x(a)$			$M_{xy}(y)/M_{xy}(a)$			$Q_x(y)/Q_x(a)$		
	EXATO	4 ELEM.	8 ELEM.	EXATO	4 ELEM.	8 ELEM.	EXATO	4 ELEM.	8 ELEM.
0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0760	1,0195	0,0	0,0059	0,0009
0,25	-0,2925	—	-0,2916	0,9484	—	0,9371	0,1743	—	0,1743
0,50	-0,3873	-0,3700	-0,3857	0,7853	0,7317	0,8096	0,3762	0,3779	0,3770
0,75	-0,0553	—	-0,0528	0,4850	—	0,4683	0,6376	—	0,6373
1,00	1,0	1,0234	1,0014	0,0	0,1155	0,0361	1,0	0,9992	1,0000

A solução analítica dada pela teoria de Reissner para esse problema se expressa por ⁸ |:

deslocamentos:

$$\phi_r = \frac{qa^3}{16D} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \frac{r}{a} \quad (6.3a)$$

$$w = \frac{qa^4}{64D} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \cdot \left[1 + 2C - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

momentos:

$$M_{rr} = \frac{qa^2}{16} \left[1 + \nu(1 + C) - (3 + \nu) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

$$M_{r\theta} = 0 \quad (6.3b)$$

$$M_{\theta\theta} = \frac{qa^2}{16} \left[1 + \nu(1 + C) - (1 + 3\nu) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

constantes:

$$Q_r = - \frac{qa}{2} \left[\frac{r}{a} \right]$$

$$Q_\theta = 0 \quad (6.3c)$$

$$\text{onde: } C = \frac{1,6}{(1 - \nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2$$

Foram analisadas aqui duas malhas diferentes, sendo que na primeira, a qual será chamada de malha 1, discretizou-se o contorno da placa inteira e na segunda, que será chamada de malha 2, discretizou-se um quarto da placa (ver Figura 6.3).

Considerou-se ainda que $h = 0,2a$ e o valor de v utilizado foi de 0,3.

i) Malha 1:

Nesse caso foram utilizados 8 elementos de contorno, sendo todos contínuos, com um total de 16 pontos nodais e ainda, 4 pontos internos, como pode ser observado na Figura 6.3a.

As condições de contorno adotadas nesse caso foram:

$$\text{Em } r = a: \phi_r = w = 0 \quad (6.4)$$

Os resultados obtidos para essa malha são mostrados na Tabela 6.2, onde se observa que são excelentes tanto para os deslocamentos como para os esforços, correspondendo à solução exata do problema.

ii) Malha 2:

Foram utilizados aqui 6 elementos de contorno, sendo 2 contínuos e 4 semi-contínuos. Para resolver o problema da descontinuidade de normal que ocorre nesse caso, utilizou-se um

não duplo e os quatro elementos semi-contínuos já citados, optando-se por um ou pelo outro de acordo com as condições de contorno prescritas (ver item 4.4).

A malha possui ao todo quinze pontos nodais no contorno. Foram calculados ainda os resultados nos três pontos internos indicados na Figura 6.3b.

As condições de contorno, em virtude da simetria, ficam:

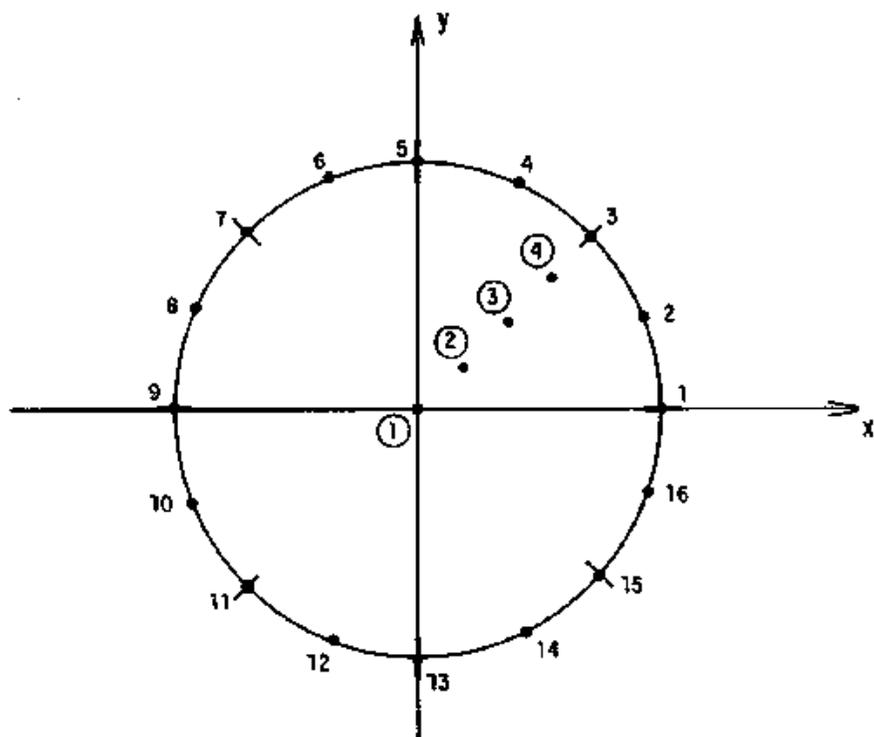
$$\text{Em } x = 0 \text{ e } y = 0: \phi_{\theta} = M_{r\theta} = Q_{\theta} = 0$$

(6.5)

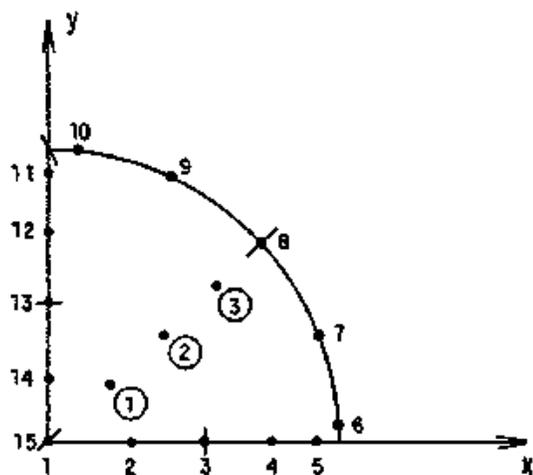
$$\text{Em } r = a: \phi_r = w = M_{r\theta} = 0$$

Os resultados obtidos, considerando-se uma relação $a/l' = b/l' = 0,10$ (ver Figura 5.3) para os elementos semi-contínuos, encontram-se na Tabela 6.3, sendo calculados através dos pontos situados ao longo de um raio com inclinação de 45° em relação ao eixo x .

Como se pode observar, esses resultados são bastante satisfatórios quando comparados com a solução analítica.



(a)



(b)

Fig. 6.3 - Placa circular : a) malha 1 ; b) malha 2

Cabe ressaltar que os valores de w , ϕ_r e $M_{\theta\theta}$ dados na Tabela 6.3 podem também ser calculados diretamente dos valores obtidos através do sistema de equações para os pontos nodais situados sobre os eixos x e y . Os valores assim obtidos acham-se na Tabela 6.4 e possuem uma precisão da mesma ordem de grandeza daquela que foi obtida por VANDER WEEËN¹⁸ para uma discretização análoga, utilizando equações adicionais para resolver o problema da descontinuidade de normal.

6.4 - Exemplo 3: Placa Quadrada com Carga Uniformemente Distribuída

Este exemplo consiste em uma placa quadrada de lado $l = 4\text{m}$ e espessura $h = 0,08\text{m}$, submetida a uma carga uniformemente distribuída $q = -0,64 \text{ tf/m}^2$, para a qual se utilizou a discretização mostrada na Figura 6.4, considerando a quarta parte da placa e utilizando as condições de contorno dadas abaixo:

$$\text{Em } y = 0: \phi_y = M_{xy} = Q_y = 0$$

$$\text{Em } x = a: \phi_y = w = M_{xx} = 0$$

(6.6)

$$\text{Em } y = a: \phi_x = w = M_{yy} = 0$$

$$\text{Em } x = 0: \phi_x = M_{yx} = Q_x = 0$$

TABELA 6.2 - Placa circular com a malha 1

$\frac{r}{a}$	$\frac{64D}{qa^4} w$		$\frac{16D}{qa^3} \phi_r$		$\frac{16}{qa^2} M_{\theta\theta}$		$\frac{16}{qa^2} M_{rr}$		$\frac{2}{qa} Q_r$	
	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.
0,0	1,1829	1,1828	0,0	0,0	1,3274	1,3273	1,3274	1,3273	0,0	0,0
0,25	1,0503	1,0503	0,2344	0,2344	1,2087	1,2086	1,1212	1,1211	-0,25	-0,2500
0,50	0,6996	0,6996	0,3750	0,3750	0,8524	0,8523	0,5024	0,5024	-0,50	-0,5000
0,75	0,2714	0,2714	0,3281	0,3281	0,2587	0,2582	-0,5288	-0,5291	-0,75	-0,7505
1,00	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,5726	-0,5727	-1,9726	-1,9736	-1,00	-1,0042

TABELA 6.3 - Placa circular com a malha 2

$\frac{r}{a}$	$\frac{64D}{qa^4} w$		$\frac{16D}{qa^3} \phi_r$		$\frac{16}{qa^2} M_{\theta\theta}$		$\frac{16}{qa^2} M_{rr}$		$\frac{2}{qa} Q_r$	
	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.
0,0	1,1829	1,1741	0,0	0,0	1,3274	1,3027	1,3274	1,3027	0,0	0,0
0,25	1,0503	1,0425	0,2344	0,2311	1,2087	1,1873	1,1212	1,1241	-0,25	-0,2413
0,50	0,6996	0,6951	0,3750	0,3724	0,8524	0,8498	0,5024	0,5008	-0,50	-0,4956
0,75	0,2714	0,2698	0,3281	0,3259	0,2587	0,2591	-0,5288	-0,5239	-0,75	-0,7470
1,00	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,5726	-0,5699	-1,9726	-1,9638	-1,00	-1,0028

TABELA 6.4 - Placa circular com a malha 2, calculando os valores nos pontos situados sobre os eixos x e y

$\frac{r}{a}$	$\frac{16D}{qa^4} w$			$\frac{16D}{qa^3} \phi_r$			$\frac{16}{qa^2} M_{\theta\theta}$		
	EXATO	M.E.C.		EXATO	M.E.C.		EXATO	M.E.C.	
		V. WEEN	PROGRAMA		V. WEEN	PROGRAMA		V. WEEN	PROGRAMA
0,0	1,1829	1,190	1,174	0,0	0,0	0,0	1,3274	1,303	1,303
0,25	1,0503	1,057	1,041	0,2344	0,2345	0,2314	1,2087	1,231	1,211
0,50	0,6996	0,705	0,693	0,3750	0,3765	0,3716	0,8524	0,826	0,813
0,75	0,2714	0,275	0,268	0,3281	0,3306	0,3249	0,2587	0,267	0,275
1,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,5726	-0,578	-0,589

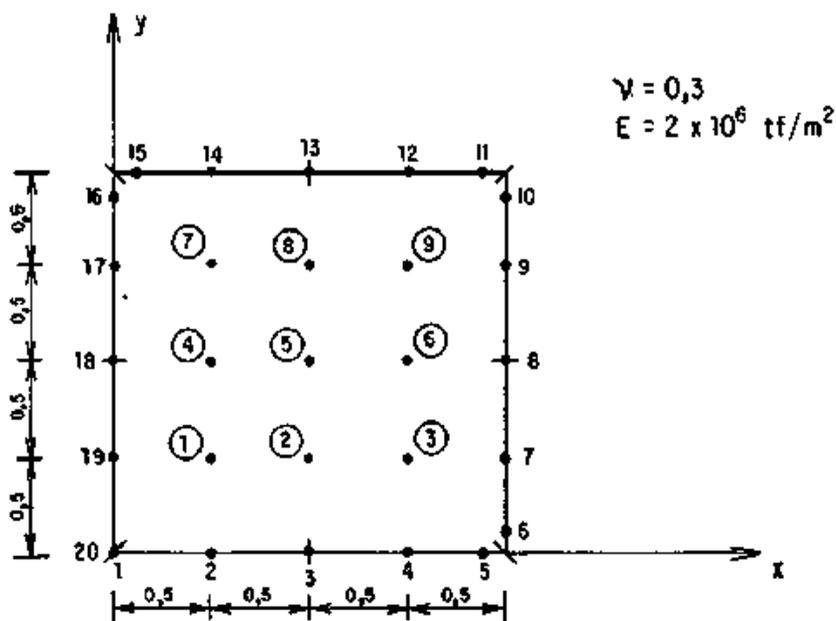


Fig. 6.4 - Placa quadrada

Foram utilizados 8 elementos de contorno e 20 pontos nodais, calculando-se ainda os resultados em 9 pontos internos.

Para resolver o problema de descontinuidade da normal nos cantos da placa, foram utilizados tanto um nó duplo como 6 elementos semi-contínuos.

Pra uma relação $a/\ell' = b/\ell' = 0,10$ (ver Figura 5.3), os resultados obtidos encontram-se nas Tabelas 6.5, 6.6 e 6.7. Esses resultados foram comparados com a solução analítica calculada através da teoria clássica de Kirchhoff^[24] para placas delgadas.

TABELA 6.5 - Placa quadrada com carga uniforme.

Deslocamentos nos pontos do contorno.

PONTO NODAL	ϕ_x (10^{-2} rad)		ϕ_y (10^{-2} rad)		w (10^{-2} m)	
	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.
1	0,000	0,000	0,0000	0,0000	-0,7098	-0,7093
2	-0,1989	-0,1972	0,0000	0,0000	-0,6598	-0,6601
3	-0,3826	-0,3816	0,0000	0,0000	-0,5134	-0,5141
4	-0,5269	-0,5263	0,0000	0,0000	-0,2836	-0,2843
5	-0,5865	-0,5860	0,0000	0,0000	-0,0535	-0,0539
6	-0,5876	-0,5878	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	-0,5487	-0,5488	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	-0,4301	-0,4302	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	-0,2407	-0,2408	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	-0,0459	-0,0459	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000	-0,0459	-0,0459	0,0000	0,0000
12	0,0000	0,0000	-0,2407	-0,2408	0,0000	0,0000
13	0,0000	0,0000	-0,4301	-0,4302	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000	-0,5487	-0,5488	0,0000	0,0000
15	0,0000	0,0000	-0,5876	-0,5878	0,0000	0,0000
16	0,0000	0,0000	-0,5865	-0,5860	-0,0535	-0,0539
17	0,0000	0,0000	-0,5269	-0,5263	-0,2836	-0,2843
18	0,0000	0,0000	-0,3826	-0,3816	-0,5134	-0,5141
19	0,0000	0,0000	-0,1989	-0,1972	-0,6598	-0,6601
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,7098	-0,7093

TABELA 6.6 - Placa quadrada com carga uniforme. Deslocamentos nos pontos internos

PONTO	ϕ_x (10^{-2} rad)		ϕ_y (10^{-2} rad)		w (10^{-2} m)	
	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.
1	-0,1844	-0,1832	-0,1844	-0,1832	-0,6134	-0,6140
2	-0,3552	-0,3551	-0,1424	-0,1417	-0,4776	-0,4787
3	-0,4902	-0,4901	-0,0778	-0,0776	-0,2641	-0,2648
4	-0,1424	-0,1417	-0,3552	-0,3551	-0,4776	-0,4787
5	-0,2752	-0,2753	-0,2752	-0,2753	-0,3725	-0,3736
6	-0,3822	-0,3824	-0,1510	-0,1511	-0,2066	-0,2072
7	-0,0778	-0,0776	-0,4902	-0,4901	-0,2641	-0,2648
8	-0,1510	-0,1511	-0,3822	-0,3824	-0,2066	-0,2072
9	-0,2117	-0,2118	-0,2117	-0,2118	-0,1151	-0,1155

TABELA 6.7 - Placa quadrada com carga uniforme. Esforços resultantes nos pontos internos

PONTO	M_{xx} (tf.m/m)		M_{xy} (tf.m/m)		M_{yy} (tf.m/m)		Q_x (tf/m)		Q_y (tf/m)	
	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.
1	-0,4396	-0,4419	0,0378	0,0360	-0,4396	-0,4419	0,1529	0,1508	0,1529	0,1508
2	-0,3744	-0,3764	0,0715	0,0717	-0,3504	-0,3528	0,3278	0,3308	0,1200	0,1243
3	-0,2410	-0,2417	0,0960	0,0947	-0,2027	-0,2033	0,5471	0,5519	0,0668	0,0666
4	-0,3504	-0,3528	0,0715	0,0717	-0,3744	-0,3764	0,1200	0,1243	0,3278	0,3308
5	-0,3014	-0,3026	0,1367	0,1366	-0,3014	-0,3026	0,2613	0,2635	0,2613	0,2635
6	-0,1982	-0,1985	0,1857	0,1857	-0,1769	-0,1774	0,4505	0,4529	0,1485	0,1499
7	-0,2027	-0,2033	0,0960	0,0947	-0,2410	-0,2417	0,0668	0,0666	0,5471	0,5519
8	-0,1769	-0,1774	0,1857	0,1857	-0,1982	-0,1985	0,1485	0,1499	0,4505	0,4529
9	-0,1212	-0,1213	0,2577	0,2579	-0,1212	-0,1213	0,2713	0,2708	0,2713	0,2708

Com este exemplo pode-se observar que mesmo para placas delgadas, o Método dos Elementos de Contorno aplicado à teoria de Reissner conduz a excelentes resultados.

6.5 - Exemplo 4: Placa Infinita com Forças de Superfície Prescritas ao Longo do Furo

Seja uma placa infinita contendo um furo de diâmetro igual a 4m e espessura h igual a 0,40m. A discretização foi realizada apenas no contorno do furo, com uma malha de 8 elementos e 16 nós.

Foram considerados dois carregamentos diferentes, para os quais calcularam-se os resultados em alguns pontos internos, sendo que os valores obtidos foram comparados com a solução fundamental correspondente à resultante da carga aplicada no furo.

Os resultados se mostraram excelentes e são dados nas Tabelas 6.8 e 6.9 para o problema mostrado na Figura 6.5 e nas Tabelas 6.10 e 6.11 para o problema da Figura 6.6. Os valores de ν e E são, respectivamente, 0,3 e 2×10^6 tf/m².

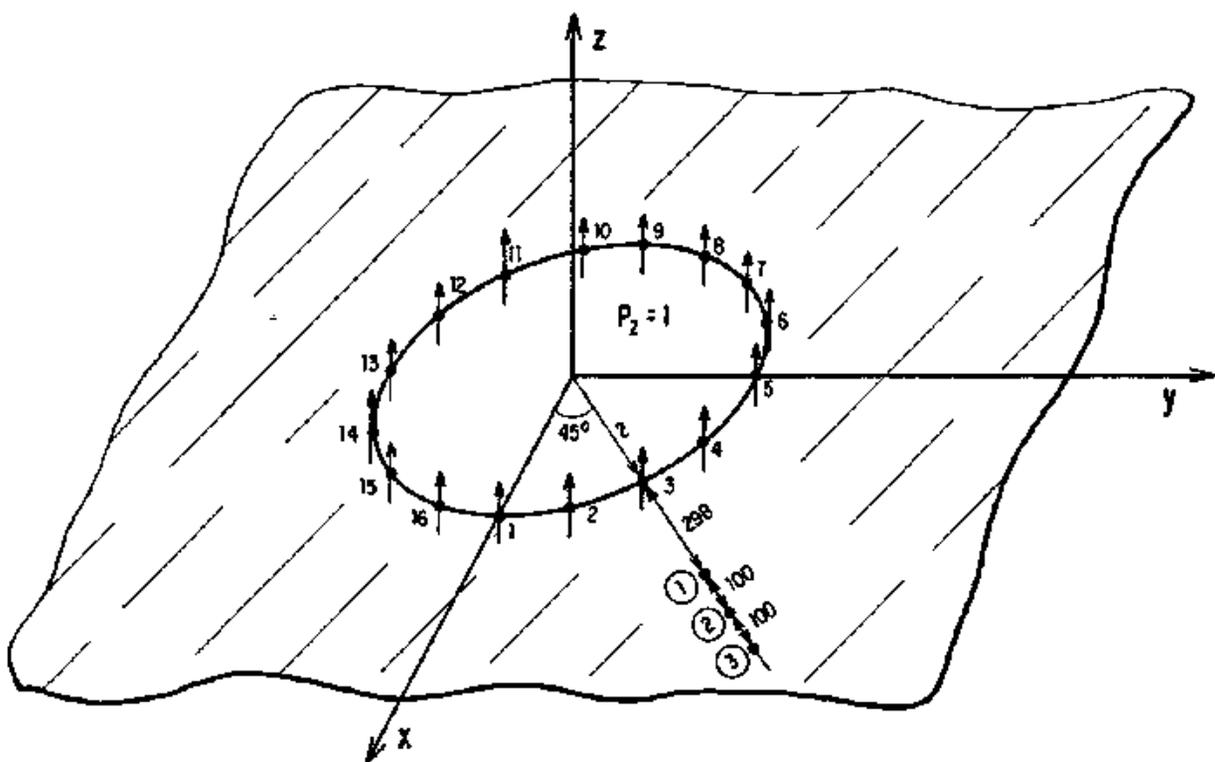


Fig. 6.5 - Placa infinita com força de superfície z prescrita.

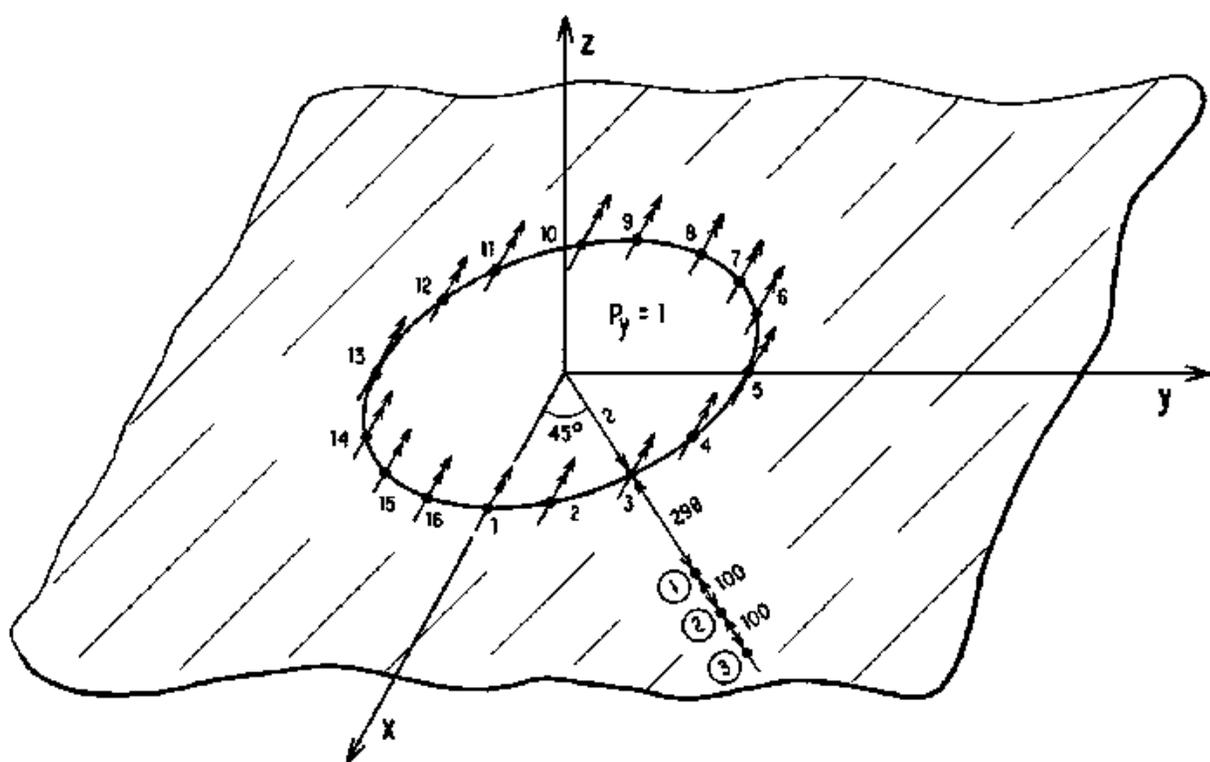


Fig. 6.6 - Placa infinita com momento de superfície y prescrita.

TABELA 6.8 - Placa infinita com força de superfície z prescrita. Deslocamentos

PONTO	r (m)	ϕ_x (rad)	u_{31}^* (rad)	ϕ_y (rad)	u_{32}^* (rad)	w (m)	u_{33}^* (m)
1	300	-0,1316	-0,1316	-0,1316	-0,1316	26,001	25,996
2	400	-0,1823	-0,1824	-0,1823	-0,1824	48,175	48,178
3	500	-0,2347	-0,2347	-0,2347	-0,2347	77,644	77,658

TABELA 6.9 - Placa infinita com força de superfície z prescrita. Forças de superfície

PONTO	r (m)	p_x (tf.m/m)	p_{31}^* (tf.m/m)	p_y (tf.m/m)	p_{32}^* (tf.m/m)	p_z (10^{-2} tf/m)	p_{33}^* (10^{-2} tf/m)
1	300	-7,388	-7,391	-7,388	-7,391	-0,6664	-0,6667
2	400	-7,653	-7,656	-7,653	-7,656	-0,4998	-0,5000
3	500	-7,858	-7,861	-7,858	-7,861	-0,3999	-0,4000

TABELA 6.10 - Placa infinita com momento de superfície y prescrito. Deslocamentos

PONTO	r(m)	$\phi_x (10^{-4} \text{ rad})$	$u_{21}^* (10^{-4} \text{ rad})$	$\phi_y (10^{-3} \text{ rad})$	$u_{22}^* (10^{-3} \text{ rad})$	w (m)	$u_{23}^* (m)$
1	300	-0,4264	-0,4266	-0,6627	-0,6630	0,1315	0,1316
2	400	-0,4264	-0,4266	-0,6873	-0,6875	0,1823	0,1824
3	500	-0,4264	-0,4266	-0,7063	-0,7066	0,2346	0,2347

TABELA 6.11 - Placa infinita com momento de superfície y prescrito. Forças de superfície

PONTO	r(m)	$p_x (10^{-2} \frac{\text{tf.m}}{\text{m}})$	$p_{21}^* (10^{-2} \frac{\text{tf.m}}{\text{m}})$	$p_y (10^{-2} \frac{\text{tf.m}}{\text{m}})$	$p_{22}^* (10^{-2} \frac{\text{tf.m}}{\text{m}})$	$p_z (10^{-5} \text{ tf/m})$	$p_{23}^* (10^{-5} \text{ tf/m})$
1	300	-0,09998	-0,1000	-0,3332	-0,3333	-1,5708	-1,5714
2	400	-0,07498	-0,0750	-0,2499	-0,2500	-0,8836	-0,8839
3	500	-0,05998	-0,0600	-0,1999	-0,2000	-0,5655	-0,5657

6.6 - Exemplo 5: Placa Infinita com Furo Sujeita a Momento x Constante

Seja uma placa infinita de espessura h e contendo um furo de diâmetro $2a$, sujeita a um momento constante $M_{xx} = M_0$ no infinito.

A solução analítica para esse problema foi obtida por REISSNER ¹⁶ e os esforços resultantes se expressam por:

momentos:

$$\begin{aligned}
 M_{rr} = & -(1 + \nu) A_0 + (1 - \nu) \frac{F_0}{r^2} - \\
 & - \cos 2\theta \left[2(1 - \nu)E_2 + \frac{\nu B_2}{r^2} + 6(1 - \nu) \frac{F_2}{r^4} \right] - \\
 & - \cos 2\theta \left[\frac{12 B_2}{r^2 \zeta^2} + D_2 \left(\frac{12 K_2(\zeta)}{\zeta^2} + \frac{4 K_1(\zeta)}{\zeta} \right) \right] \\
 M_{\theta\theta} = & -(1 + \nu) A_0 - (1 - \nu) \frac{F_0}{r^2} + \quad (6.7a) \\
 & + \cos 2\theta \left[2(1 - \nu)E_2 - \frac{B_2}{r^2} + 6(1 - \nu) \frac{F_2}{r^4} \right] + \\
 & + \cos 2\theta \left[\frac{12 B_2}{\zeta^2 r^2} + D_2 \left(\frac{12 K_2(\zeta)}{\zeta^2} + \frac{4 K_1(\zeta)}{\zeta} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$M_{r\theta} = 2(1 - \nu) \sin 2\theta \left[E_2 + \frac{0,25 B_2}{r^2} - \frac{3 F_2}{r^4} \right] - \\ - \sin 2\theta \left[\frac{12 B_2}{\zeta^2 r^2} + D_2 \left\{ \frac{12 K_2(\zeta)}{\zeta^2} + \frac{4 K_1(\zeta)}{\zeta} + K_0(\zeta) \right\} \right]$$

constantes:

$$v_r = \frac{2 \cos 2\theta}{r} \left[\frac{B_2}{r^2} + D_2 K_2(\zeta) \right] \quad (6.7b)$$

$$v_\theta = \frac{2 \sin 2\theta}{r} \left[\frac{B_2}{r^2} + D_2 \left\{ K_2(\zeta) + \frac{\zeta}{2} K_1(\zeta) \right\} \right]$$

onde:

$$\zeta = \frac{\sqrt{10}}{h} r \quad (6.8)$$

$K_0(\zeta)$, $K_1(\zeta)$ e $K_2(\zeta)$ = funções de Bessel modifica-
das.

As constantes que aparecem nas fórmulas (6.7) são:

$$A_0 = - \frac{M_0}{2(1 + \nu)}$$

$$F_0 = - \frac{M_0 a^2}{2(1 - \nu)}$$

$$E_2 = - \frac{M_0}{4(1 - \nu)}$$

(6.9)

$$B_2 = \frac{M_0 a^2 K_2(\mu)}{\frac{1+\nu}{2} K_2(\mu) + K_0(\mu)}$$

$$D_2 = \frac{-M_0}{\frac{1+\nu}{2} K_2(\mu) + K_0(\mu)}$$

$$F_2 = \frac{M_0 a^4}{6(1-\nu)} \frac{\frac{1-3\nu}{4} K_2(\mu) + \frac{4}{\mu} K_1(\mu) + 0,5 K_0(\mu)}{\frac{1+\nu}{2} K_2(\mu) + K_0(\mu)}$$

onde:

$$\mu = \frac{\sqrt{10'}}{h} a \quad (6.10)$$

Para esse problema, utilizou-se uma superposição de efeitos, como mostrado na Figura 6.7. Considerou-se a placa sem o furo e sujeita ao momento constante $M_{xx} = M_0$, somando-se a isso os resultados obtidos para a placa com o furo e sujeita às seguintes forças de superfície:

$$\text{Em } r=a: \quad p_x = M_0 n_x \quad ; \quad p_y = p_z = 0 \quad (6.11)$$

A placa foi considerada com uma relação $h/a = 0,2$ e $\nu = 0,3$.

As funções de Bessel K_0 e K_1 foram calculadas através das fórmulas dadas no Apêndice A. A função K_2 tende rapidamente para zero à medida em que o argumento cresce e, para os valores do argumento aqui utilizados, pode ser calculada pela seguinte fórmula assintótica [16]:

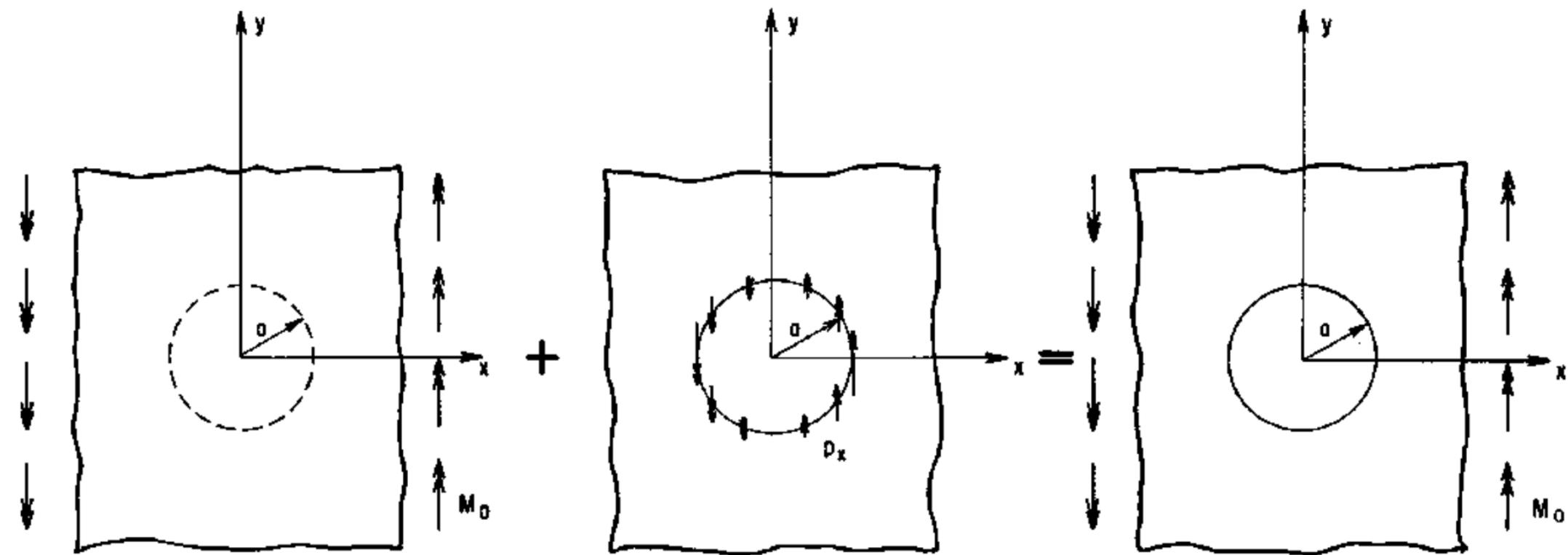


Fig. 6.7 - Placa infinita. Superposição de efeitos

$$K_2(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} e^{-\zeta} \left(1 + \frac{15}{8\zeta} \right) \quad (6.12)$$

Discretizou-se apenas o contorno do furo, utilizando-se uma malha com 16 elementos e 32 pontos nodais.

Os resultados obtidos para os esforços nos pontos internos indicados na Figura 6.8 são comparados com as respectivas soluções analíticas e encontram-se na Tabela 6.12, onde se observa que são bastante satisfatórios.

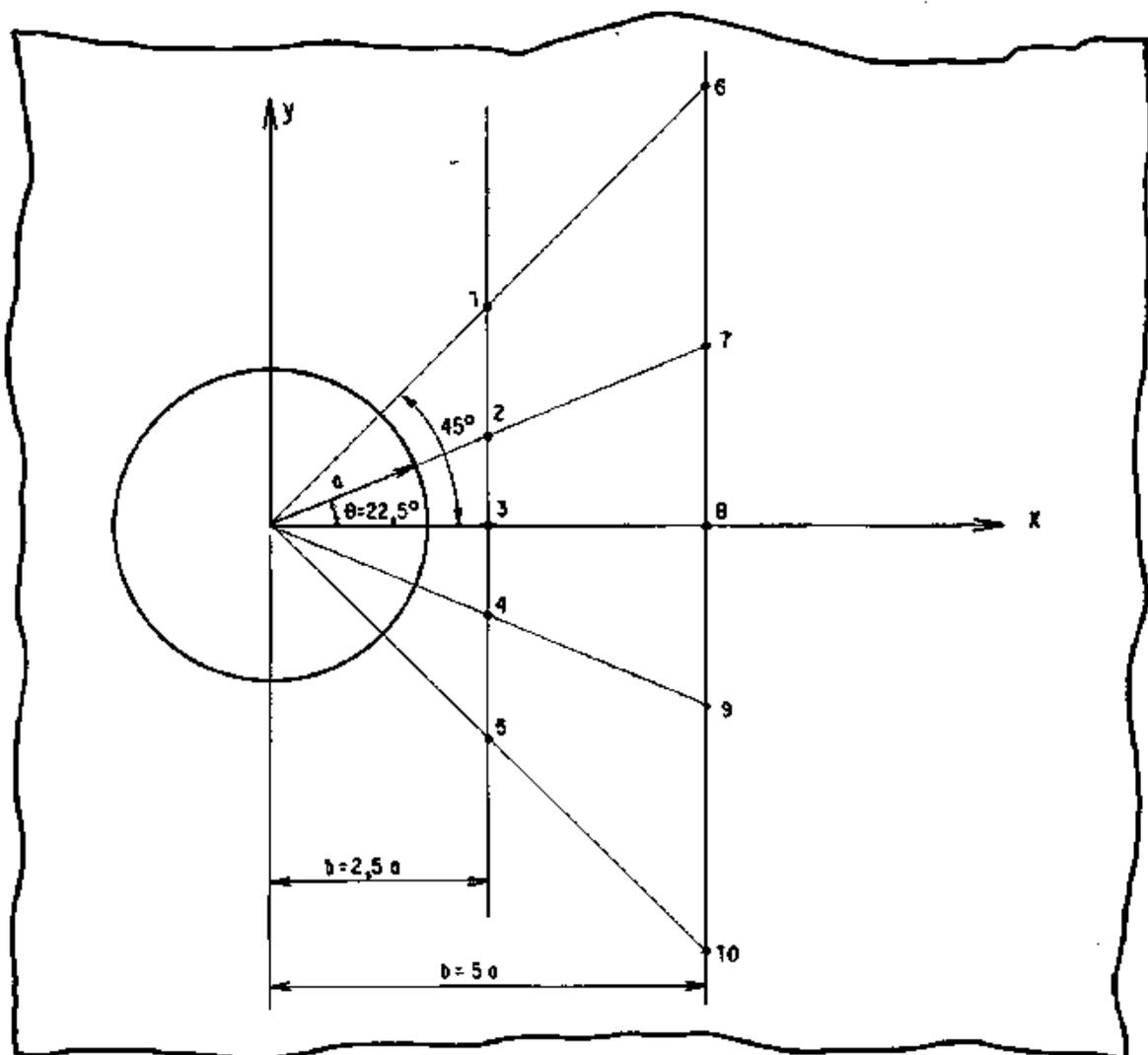


Fig. 6.8 - Placa infinita. Localização dos pontos internos

TABELA 6.12 - Placa infinita com furo e sujeita a momento x constante

PONTO	$\frac{b}{a}$	θ ($^{\circ}$)	$\frac{M_{rr}}{M_0}$		$\frac{M_{r\theta}}{M_0}$		$\frac{M_{\theta\theta}}{M_0} \times 10$		$\frac{h Q_{\theta}}{4M_0} \times 10^2$		$\frac{h Q_r}{4M_0} \times 10^2$	
			EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.	EXATO	M.E.C.
1	2,5	45,0	0,4600	0,4600	-0,4849	-0,4849	5,400	5,400	0,0000	0,0000	0,1472	0,1474
2	2,5	22,5	0,7600	0,7600	-0,3380	-0,3379	1,583	1,582	0,2322	0,2325	0,2322	0,2325
3	2,5	0,0	0,8763	0,8763	0,0000	0,0000	-0,116	-0,118	0,4164	0,4170	0,0000	0,0000
4	2,5	-22,5	0,7600	0,7600	0,3380	0,3379	1,583	1,582	0,2322	0,2325	-0,2322	-0,2325
5	2,5	-45,0	0,4600	0,4600	0,4849	0,4849	5,400	5,400	0,0000	0,0000	-0,1472	-0,1474
6	5,0	45,0	0,4900	0,4900	-0,4956	-0,4956	5,100	5,100	0,0000	0,0000	0,0184	0,0184
7	5,0	22,5	0,8314	0,8314	-0,3485	-0,3485	1,482	1,482	0,0290	0,0291	0,0290	0,0291
8	5,0	0,0	0,9714	0,9714	0,0000	0,0000	-0,052	-0,053	0,0520	0,0521	0,0000	0,0000
9	5,0	-22,5	0,8314	0,8314	0,3485	0,3485	1,482	1,482	0,0290	0,0291	-0,0290	-0,0291
10	5,0	-45,0	0,4900	0,4900	0,4956	0,4956	5,100	5,100	0,0000	0,0000	-0,0184	-0,0184

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 - Introdução

As conclusões e observações a respeito da formulação apresentada e de sua aplicação numérica serão comentadas a seguir.

A referida formulação é passível ainda de ser estendida a análises mais complexas, e, conseqüentemente, o mesmo ocorrendo para o programa computacional. Portanto, serão também apresentadas algumas sugestões para futuros estudos.

7.2 - Conclusões e Observações

Mostrou-se aqui uma aplicação do Método dos Elementos de Contorno para calcular deslocamentos e esforços em placas onde se utilizou a teoria de Reissner.

Como pôde-se observar através dos exemplos apresentados, as respostas foram satisfatórias quando comparadas com as respectivas soluções analíticas, mesmo para malhas não muito refinadas.

Verificou-se ainda a convergência do método através de refinamento da malha, ou seja, utilizando-se um maior número de elementos menores.

O Método dos Elementos de Contorno, quando comparado com outros métodos numéricos, como é o caso do Método dos Elementos Finitos, apresenta algumas vantagens. O fato de se discretizar apenas o contorno da região conduz a um sistema de equações menor. Em geral, o tempo de computador costuma também ser inferior. Além disso, o volume de dados de entrada no programa é menor e o método representa satisfatoriamente problemas com domínio infinito, para os quais outros métodos não são adequados.

O cálculo nos pontos internos pode ser omitido, caso não se necessite fazê-lo. Nesse caso, o tempo de CPU decresce consideravelmente.

Verificou-se ainda que os deslocamentos e esforços nos pontos internos possuem precisão de mesma ordem de grandeza que os valores calculados no contorno através do sistema de equações.

Concluindo, podemos dizer que o Método dos Elementos de Contorno aliado à teoria de Reissner, constitui um importante instrumento para a análise de flexão de placas, conduzindo a resultados excelentes tanto para placas espessas como delgadas.

7.3 - Sugestões

São dadas a seguir algumas sugestões para trabalhos futuros:

- implementação no programa do cálculo dos esforços no contorno, através das forças de superfície e de derivadas de deslocamentos.
- implementação de considerações de simetria, refletindo-se os elementos (ou refletindo o nó singular).
- implementação de outros tipos de carga transversal além da uniformemente distribuída apresentada.
- utilização de sub-regiões, o que conduz a um sistema de equações cuja matriz é em banda, além de permitir a análise nos casos em que a placa não é homogênea, mas possui regiões homogêneas.
- expansão da formulação para problemas não lineares.
- expansão da formulação para termo-elasticidade.

APENDICE AFUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADAS K_0 E K_1

As funções de Bessel modificadas de ordem inteira $K_0(z)$ e $K_1(z)$ podem ser calculadas pelas expansões polinomiais seguintes $|z^0|$, para um argumento z real:

a) para $0 < z \leq 2$:

$$\begin{aligned}
 K_0(z) = & - \ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) - 0,57721566 + \\
 & + 0,42278420 \left(\frac{z}{2}\right)^2 + 0,23069756 \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \\
 & + 0,03488590 \left(\frac{z}{2}\right)^6 + 0,00262698 \left(\frac{z}{2}\right)^8 + \\
 & + 0,00010750 \left(\frac{z}{2}\right)^{10} + 0,00000740 \left(\frac{z}{2}\right)^{12} \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_1(z) = & \frac{1}{z} \left[z \ln\left(\frac{z}{2}\right) I_1(z) + 1 + 0,15443144 \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \right. \\
 & - 0,67278579 \left(\frac{z}{2}\right)^4 - 0,18156897 \left(\frac{z}{2}\right)^6 - \\
 & - 0,01919402 \left(\frac{z}{2}\right)^8 - 0,00110404 \left(\frac{z}{2}\right)^{10} - \\
 & \left. - 0,00004686 \left(\frac{z}{2}\right)^{12} \right] \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 I_0(z) = & 1 + 3,5156229 t^2 + 3,0899424 t^4 + \\
 & + 1,2067492 t^6 + 0,2659732 t^8 + \\
 & + 0,0360768 t^{10} + 0,0045813 t^{12} \quad (A.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1(z) = & z \left[0,5 + 0,87890594 t^2 + 0,51498869 t^4 + \right. \\
 & + 0,15084934 t^6 + 0,02658733 t^8 + \\
 & \left. + 0,00301532 t^{10} + 0,00032411 t^{12} \right] \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

sendo:

$$t = \frac{z}{3,75} \quad (A.5)$$

b) para $z > 2$:

$$\begin{aligned}
 K_0(z) = & \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z} \left[1,25331414 - 0,07832358 \left(\frac{2}{z}\right) + \right. \\
 & + 0,02189568 \left(\frac{2}{z}\right)^2 - 0,01062446 \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \\
 & + 0,00587872 \left(\frac{2}{z}\right)^4 - 0,00251540 \left(\frac{2}{z}\right)^5 + \\
 & \left. + 0,00053208 \left(\frac{2}{z}\right)^6 \right] \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} e^z & \left[1,25331414 + 0,23498619 \left(\frac{2}{z}\right) - \right. \\
& - 0,03655620 \left(\frac{2}{z}\right)^2 + 0,01504268 \left(\frac{2}{z}\right)^3 - \\
& - 0,00780353 \left(\frac{2}{z}\right)^4 + 0,00325614 \left(\frac{2}{z}\right)^5 - \\
& \left. - 0,00068245 \left(\frac{2}{z}\right)^6 \right] \quad (A.7)
\end{aligned}$$

As derivadas das funções K_0 e K_1 em relação ao argumento z podem ser obtidas pelas fórmulas de recorrência dadas em [20], ou seja:

$$e^{(v-1)\pi i} K_{v-1}(z) - e^{(v+1)\pi i} K_{v+1}(z) = \frac{2v}{z} e^{v\pi i} K_v(z) \quad (A.8a)$$

$$e^{v\pi i} K'_v(z) = e^{(v-1)\pi i} K_{v-1}(z) - \frac{v}{z} e^{v\pi i} K_v(z) \quad (A.8b)$$

$$e^{(v-1)\pi i} K_{v-1}(z) + e^{(v+1)\pi i} K_{v+1}(z) = 2 e^{v\pi i} K'_v(z) \quad (A.8c)$$

$$e^{v\pi i} K'_v(z) = e^{(v+1)\pi i} K_{v+1}(z) + \frac{v}{z} e^{v\pi i} K_v(z) \quad (A.8d)$$

Com a utilização da fórmula de Euler dada por $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta$, obtêm-se, das equações acima:

$$\text{de (A.8d), com } v = 0: \quad \boxed{K'_0(z) = -K_1(z)} \quad (A.9)$$

$$\text{de (A.8a) e (A.8c), com } v = 1: \quad \begin{cases} K_0(z) - K_2(z) = -\frac{2}{z} K_1(z) \\ K_0(z) + K_2(z) = -2 K'_1(z) \end{cases} \quad (A.10)$$

$$(A.11)$$

Tirando o valor $K_2(z)$ na equação (A.10) e substituindo em (A.11), chega-se a:

$$K_2(z) = -K_0(z) - \frac{1}{z} K_1(z) \quad (A.12)$$

Para fins deste texto são definidas:

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (A.13)$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right]$$

As derivadas dessas expressões em relação ao argumento z são obtidas a seguir.

Considerando (A.9) e (A.12) e derivando (A.13), obtêm-se:

$$A'(z) = -K_1(z) - \frac{2}{z^2} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] - \frac{2}{z} \left[K_0(z) + \frac{K_1(z)}{z} - \frac{1}{z^2} \right] \quad (A.14)$$

$$B'(z) = -K_1(z) - \frac{1}{z^2} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] - \frac{1}{z} \left[K_0(z) + \frac{K_1(z)}{z} - \frac{1}{z^2} \right]$$

Reagrupando (A.14), fica:

$$A'(z) = -K_1(z) - \frac{2}{z} \left[K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) - \frac{2}{z^2} \right] \quad (A.15)$$

$$B'(z) = -K_1(z) - \frac{1}{z} \left[K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) - \frac{2}{z^2} \right]$$

Substituindo a primeira das equações (A.13) em

(A.15), obtêm-se:

$$A'(z) = -\frac{1}{z} \left[z K_1(z) + 2 A(z) \right]$$

(A.16)

$$B'(z) = -\frac{1}{z} \left[z K_1(z) + A(z) \right]$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [¹] JASWON; M.A. and MAITI, M. - An Integral Formulation of Plate Bending Problems, J. Engng. Math. 2, pp. 83-93 (1968).
- [²] MAITI, M. and CHAKRABARTY, S.K. - Integral Equation Solutions for Simply Supported Polygonal Plates, Int. J. Engng. Sci. 12, pp. 793-806 (1974).
- [³] NIWA, Y.; KOBAYASHI, S. and FUKUI, T. - An Application of the Integral Equation Method to Plate Bending, Faculty Engng., Kyotô Univ. 36 (Pt-2), pp. 140-158 (1974).
- [⁴] CHRISTIANSEN, S. and HOUGAARD, P. - An Investigation of a Pair of Integral Equations for the Biharmonic Problem, DCAMM Report nº 121, The Technical University of Denmark (1977).
- [⁵] TOTTENHAM, H. - The Boundary Element Method for Plates and Shells, Developments in Boundary Element Methods -1 (Eds. Banerjee, P.K. and Butterfield, R.), Appl. Science Publishers Ltd., London (1979).
- [⁶] WU, E.C. and ALTIERO, N.J. - A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form and Arbitrary Boundary Conditions, Computers & Structures 10, pp. 703-717 (1979).

- | ⁷ | BEZINE, G. - A Boundary Integral Equation Method for Plate Flexure with Conditions Inside the Domain, International Journey for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 1647-1657 (1981).
- | ⁸ | VANDER WEEËN, F. - Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model, International Journey for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, pp. 1-10 (1982).
- | ⁹ | VANDER WEEËN, F. - Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model, Boundary Elements in Engineering (C.A. Brebbia, Ed.), Springer-Verlag, Berlin (1982).
- | ¹⁰ | VANDER WEEËN, F. - Randintegraalvergelijkingen voor het Plaatmodel van Reissner, Ph.D. Thesis, State University of Ghent, Belgium (1981).
- | ¹¹ | ANTES, H. - On a Regular Boundary Integral Equation and a Modified Trefftz Method in Reissner's Plate Theory - Engineering Analysis - Vol. 1, n^o 3 (1984).
- | ¹² | ANTES, H. - The Stress Functions of Point Loadings in Reissner's Plate Theory - Mechanics Research Communications - Vol. 11(2), pp. 115-120 (1984).

- |¹³| RIBEIRO, J.R.M. - Estudo da Validade da Hipótese de Kirchhoff - Love na Teoria das Placas - Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ (Julho de 1976).
- |¹⁴| TIMOSHENKO, S. and WOINOWSKY-KRIEGER - Theory of Plates and Shells - McGraw-Hill (1959).
- |¹⁵| REISSNER, E. - On The Theory of Bending of Elastic Plates, Journal of Mathematics and Physics, Vol. 23, pp.184-191 (1944).
- |¹⁶| REISSNER, E. - The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, Vol. 12 (1945).
- |¹⁷| REISSNER, E. - On Bending of Elastic Plates, Quarterly of Applied Mechanics, Vol. 5, pp. 55-58 (1947).
- |¹⁸| BREBBIA, C.A. - The Boundary Element Method for Engineers - Pentech Press, London (1978).
- |¹⁹| BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C. - Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1984).
- |²⁰| ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. - Handbook of Mathematical Functions - Dover Publications, New York (1965).