

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE AUTOVALOR GENERALIZADOS
ATRAVÉS DO MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS EM BLOCOS
E DO ALGORITMO DE LANCZOS COM ORTOGONALIZAÇÃO SELETIVA

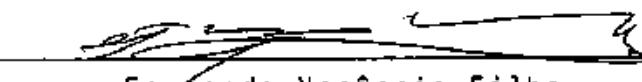
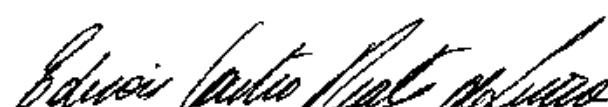
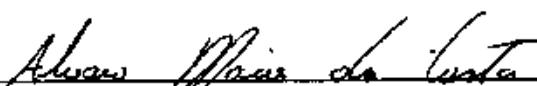
Osni Aparecido Marques

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



Luiz Landau
(Presidente)


Fernando Venâncio Filho
Edison Castro Prates de Lima
Alvaro Maia da Costa

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1986

MARQUES, OSNI APARECIDO

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE AUTOVALOR GENERALIZADOS
ATRAVÉS DO MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS EM BLOCOS
E DO ALGORITMO DE LANCZOS COM ORTOGONALIZAÇÃO SELETIVA**

VIII, 121 p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1986).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Autovalores. 1. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À

Julia, Benedito

Mauro, Wilso

e à minha querida Elza.

AGRADECIMENTOS

A Gilberto Luziê de Souza pelo serviço de desenho e a Selma Fernandes pelo serviço de datilografia.

A Lucia Maria P. Bruno, Carlos R. M. Paixão, Leonardo I. de Melo e Luiz Fernando L. Ferreira do NCE/UFRJ, que possibilitem a obtenção dos resultados apresentados neste trabalho.

A Luiz Fernando N. Mello pelo mesmo motivo.

A José Antonio M. Carrer, José Antonio F. Santiago, Luiz Antonio de Souza e demais colegas da COPPE/UFRJ pelo proveitoso convívio.

A Carlos F. Loeffler Neto pelo auxílio prestado na revisão deste trabalho.

A Alvaro L.G.A. Coutinho e a Edison C.P. de Lima pelas importantes sugestões.

A Luiz Landau pela orientação, incentivo, confiança e amizade.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE AUTOVALOR GENERALIZADOS
ATRAVÉS DO MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS EM BLOCOS
E DO ALGORITMO DE LANCZOS COM ORTOGONALIZAÇÃO SELETIVA**

Osni Aparecido Marques

Dezembro de 1986

Orientador: Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

O propósito deste trabalho é analisar a eficiência de algumas técnicas de solução de problemas de autovalor de matrizes simétricas, esparsas, de grandes dimensões. Para tanto, é estudada uma versão em blocos do Método de Iteração por Subespaços, utilizando-se ou não aceleradores de convergência. Estuda-se também uma versão com ortogonalização seletiva do Algoritmo de Lanczos, para torná-lo numericamente estável.

Tais métodos são então, aplicados à solução do problema de vibrações livres de um modelo simplificado e de dois modelos reais de estruturas **offshore**, com o intuito de se estabelecer limitações, dispositivos de melhoramento e qual o mais recomendável para um determinado tipo de estrutura.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial
fulfillment of the requirements for the degree of Master of
Science (M.Sc.)

**SOLUTION OF GENERALIZED EIGENVALUE
PROBLEMS USING BLOCK SUBSPACE ITERATION METHOD
AND LANCZOS ALGORITHM WITH SELECTIVE ORTHOGONALIZATION**

Osni Aparecido Marques

December, 1986

Chairman: Luiz Landau

Program: Civil Engineering

The purpose of this work is to analyse the efficiency of some techniques to solve the generalized eigenproblem of large, sparse, symmetric matrix pencils. A block version of the Subspace Iteration Method, considering or not convergence accelerators is studied. It is also examined a version of the Lanczos Algorithm with selective orthogonalization, in order to avoid numerical instabilities.

Those methods are applied to the free vibrations solution of a jacket platform simplified model, a self-elevative drilling unit and a jacket platform. Several questions concerning the studied methods are addressed, trying the stabilishment of the best suited method for each structure analysed.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - GENERALIDADES

II.1 - Introdução	9
II.2 - Ortonormalização de Gram-Schmidt	9
II.3 - Quociente de Rayleigh	11
II.4 - Iteração Inversa	12
II.5 - Iteração Direta	15
II.6 - Método de Jacobi Generalizado	17
II.7 - Sequência de Sturm	20
II.8 - Análise de Rayleigh-Ritz	23
II.9 - Subespaços de Krylov	25

CAPÍTULO III - O MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS

III.1 - Introdução	27
III.2 - O Método de Iteração por Subespaços Padrão	29
III.3 - O Método de Iteração por Subespaços em Blocos	32
III.4 - O Método de Iteração por Subespaços em Blocos com Shift	34

CAPÍTULO IV - O ALGORITMO DE LANCZOS

IV.1 - Introdução	42
IV.2 - O Algoritmo de Lanczos Básico	51
IV.3 - O Algoritmo de Lanczos com Ortonormalização Seletiva	57

CAPÍTULO V - APLICAÇÕES

V.1 - Introdução	62
V.2 - Modelo Simplificado	63
V.3 - Modelo Real de Plataforma Autoelevatória	68
V.4 - Modelo Real de uma Plataforma Convencio- nal	73

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES 89**APÊNDICE A - A Convergência na Iteração Inversa** 93**APÊNDICE B - Normas Residuais dos Autovalores e Autovetores
Calculados pelo Algoritmo de Lanczos** 99**APÊNDICE C - O Método da Bissecção** 102**APÊNDICE D - Monitoramento da Ortogonalidade Entre os Veto-
res de Lanczos** 107**APÊNDICE E - Monitoramento da Ortogonalidade Entre os Veto-
res de Lanczos e os Bons Vetores de Ritz** 115**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** 117

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A solução de um problema de valor próprio associado a uma matriz A qualquer, de ordem $n \times n$, consiste em determinar um escalar λ , denominado autovalor, e um vetor x não nulo, denominado autovetor que satisfaçam a relação

$$A x = \lambda x \quad (I.01)$$

ou, evidenciando-se o autovetor

$$(A - \lambda I) x = 0 \quad (I.02)$$

sendo I a matriz identidade.

A expressão (I.02) possibilita concluir que se deve ter

$$\det (A - \lambda I) = 0 \quad (I.03)$$

pois a existência de uma solução não nula para x implica que a matriz $(A - \lambda I)$ deve ser singular.

O cálculo do determinante (I.03) resulta em uma equação com o seguinte aspecto, onde C_i são constantes,

$$\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_1\lambda + C_0 = 0 \quad (I.04)$$

que é uma equação polinomial do n -ésimo grau e que possui n raízes reais ou complexas, distintas ou não.

Portanto, as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \det (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \quad (I.05)$$

são os escalares que satisfazem (I.02). Como consequência, são os autopares (λ, \mathbf{x}) que satisfazem (I.01). Os autovetores \mathbf{x} , salvo raras exceções, são sempre não paralelos (LANCZOS [1]).

Uma vez calculados os autovalores, o autovetor \mathbf{x}_i pode ser determinado substituindo-se o correspondente autovalor λ_i em (I.02) e resolvendo-se o sistema resultante. É natural que uma ou mais incógnitas deverão ser arbitradas pois após a substituição do autovalor λ_i a matriz $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ resultará singular, acarretando um número de incógnitas maior que o número de equações. No entanto, para matrizes de grandes dimensões outros procedimentos numéricos (BATHE [2], PARLETT [3], CLOUGH e PENZIEN [4], WILKINSON [5]), relacionados com iterações vetoriais ou polinomiais ou com transformações de matrizes, deverão ser empregados, pois são muito mais eficientes.

São várias as áreas da Engenharia que requerem soluções de problemas semelhantes ao definido em (I.01). No caso específico da Análise Estrutural, quando da utilização de métodos numéricos que envolvem discretizações, como o Método dos Elementos Finitos, as soluções aproximadas são obtidas por meio de resoluções de sistemas de equações com tantas equações quanto forem os graus de liberdade, resultantes das discretizações, suscetíveis a deslo-

camentos ou rotações. Problemas de autovalor que resultam das matrizes desses sistemas de equações estão relacionados com o estudo da carga crítica de flambagem ou frequências naturais e modos de vibração da estrutura. Nesta última aplicação o problema de autovalor, resultante de um problemas de vibrações livres, pode ser generalizado na forma (BATHE [2], CLOUGH e PENZIEN [4])

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varphi}} = \lambda \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\varphi}} \quad (I.06)$$

onde $\underline{\underline{K}}$ e $\underline{\underline{M}}$ são, respectivamente, matriz de rigidez e de massa da estrutura, simétricas, de ordem $n \times n$, oriundas de discretizações. A solução de problemas desta natureza, envolvendo matrizes com um grande número de equações é, portanto, o motivo deste trabalho.

Os autovalores λ que satisfazem (I.06) correspondem às frequências naturais elevadas ao quadrado (ω^2) e os correspondentes autovetores $\underline{\underline{\varphi}}$ aos modos de vibração da estrutura. Para uma estrutura não sujeita a movimentos de corpo rígido, a matriz de rigidez $\underline{\underline{K}}$, correspondente aos deslocamentos e rotações possíveis, é positiva definida (BATHE [2]), sendo válida a relação

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n \quad (I.07)$$

A expressão (I.06) pode ser escrita simultaneamente para os n autopares que a satisfazem como

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} \Lambda \quad (I.08)$$

sendo $\underline{\Phi}$ a matriz modal, cujas colunas são os modos de vibração ordenados,

$$\underline{\Phi} = [\underline{\varphi}_1 \underline{\varphi}_2 \dots \underline{\varphi}_n] \quad (I.09)$$

e $\underline{\Lambda}$ a matriz espectral, diagonal, cujos elementos são os autovectores ordenados

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (I.10)$$

Os modos de vibração podem ser tomados de maneira a satisfazerem uma \underline{M} - ortogonalidade (BATHE [2], CLOUGH e PENZIEN [4]), o que possibilita escrever

$$\underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} = \underline{I} \quad (I.11)$$

onde \underline{I} é a matriz identidade com elementos possuindo a unidade de massa. Como consequência de (I.11)

$$\underline{\Phi}^T \underline{M} = \underline{\Phi}^{-1} \quad (I.12)$$

Pré-multiplicando-se (I.08) por $\underline{\Phi}^T$ e substituindo-se (I.11) conclui-se que

$$\underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} = \underline{\Lambda} \quad (I.13)$$

com os elementos de Δ possuindo como unidade o recíproco da unidade de tempo elevada ao quadrado.

Do ponto de vista matemático, a base de vetores formada pelos modos de vibração gera um espaço vetorial de dimensão n onde qualquer campo de deslocamentos compatível da estrutura está contido, ou seja, pode ser escrito como uma combinação linear da base. Do ponto de vista físico, as frequências naturais e seus respectivos modos de vibração estão intrinsecamente ligados às propriedades dinâmicas da estrutura, sendo que a importância de cada um deles é definida pela excitação à qual a estrutura está submetida ou pela análise que está sendo feita.

As frequências naturais possibilitam verificar se a estrutura corre risco de entrar em ressonância, sob a ação de um determinado carregamento variável com o tempo e também, por comparação com as frequências obtidas através de instrumentação na estrutura construída ou instalada, detectar alguma falha de execução ou algum dano, como por exemplo fadiga em alguma parte da mesma.

Além disso, os modos de vibração são extremamente úteis na solução da equação de movimento

$$\underline{M}\ddot{\underline{u}} + \underline{C}\dot{\underline{u}} + \underline{K}\underline{u} = \underline{f}(t) \quad (I.14)$$

onde \underline{u} , $\dot{\underline{u}}$, $\ddot{\underline{u}}$ são, respectivamente, vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações, \underline{C} é a matriz de amortecimento e $\underline{f}(t)$ é o vetor de cargas externas variáveis com o tempo.

A utilização dos modos de vibração na solução da equação (I.14) constituem o Método de Superposição Modal (BATHE [2], CLOUGH e PENZIEN [4]) que, através de uma transformação de coordenadas do tipo

$$\begin{matrix} u \\ \sim \end{matrix} = \begin{matrix} \Phi \\ \sim \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \sim \end{matrix} \quad (I.15)$$

juntamente com as propriedades definidas em (I.11) e (I.13), possibilita resolver a equação (I.14) em termos de coordenadas generalizadas x . Quando tal esquema é utilizado ocorre o desacoplamento das equações, ou seja, a diagonalização das matrizes envolvidas, desde que a matriz \mathcal{G} seja proporcional às matrizes de rigidez e de massa. Em caso contrário consegue-se uma vantajosa redução do número de equações, embora acopladas. Mesmo para análises não lineares este procedimento é inteiramente válido, como demonstrado por LANDAU [6].

Em todas as situações citadas torna-se desnecessária a solução completa do problema (I.08), pois geralmente são utilizadas apenas algumas frequências e modos de vibração. Ainda assim, mesmo que a solução do problema (I.08) esteja voltada somente para as "p" primeiras frequências e modos, esta tarefa é bastante árdua, pois as matrizes envolvidas frequentemente tem ordem superior a 1000.

Portanto, à medida que as análises e as estruturas se sofisticam, torna-se imprescindível a utilização de algoritmos que agilizem a solução do problema (I.08).

Este trabalho tem então, como diretriz, um estudo crítico de algoritmos eficientes para a solução do problema (I.08), direcionados para estruturas que proporcionem sistemas com grande número de equações. Para tanto, são apresentados dois algoritmos:

- O Método de Iteração por Subespaços (BATHE [2], PARLETT [3], CLOUGH e PENZIEN [4]), em uma versão em blocos, cujo desempenho é consideravelmente melhorado com a utilização de um acelerador de convergência do tipo translação de origem, ou "shift";
- O Algoritmo de Lanczos (BATHE [2], PARLETT [3]), em uma versão que utiliza uma técnica de ortogonalização seletiva e onde se introduz, também, uma monitoração da ortogonalidade dos vetores gerados pelo algoritmo.

Ao texto deste trabalho foi dada a seguinte disposição:

Capítulo II: São apresentadas técnicas e conceitos relacionados com a solução de problemas de autovalor, que serão úteis nos demais capítulos. São mostrados, nesta ordem, a Ortogonalização de Gram-Schmidt, o Quociente de Rayleigh, as Iterações Inversa e Direta, o Método de Jacobi Generalizado, a Sequência de Sturm, a Análise de Rayleigh-Ritz e os Subespaços de Krylov.

Capítulo III: É feita uma análise do Método de Iteração por Subespaços em sua versão básica e em uma versão em blocos, com ou sem acelerador de convergência. Através de um pequeno exemplo são mostradas as características de cada versão do método.

Capítulo IV: É feita uma análise do Algoritmo de Lanczos e, na sequência, introduzida a técnica de ortogonalização seletiva para preservar a ortogonalidade entre os vetores gerados pelo algoritmo. Um pequeno exemplo ilustra o funcionamento do algoritmo e as consequências da perda de ortogonalidade.

Capítulo V: Os algoritmos estudados são aplicados à solução do problema de vibrações livres de um modelo simplificado e de dois modelos reais de estruturas offshore, procurando-se sempre fazer uma comparação entre o desempenho de cada um deles.

Capítulo VI: São expostas conclusões oriundas dos resultados obtidos nas análises das estruturas apresentadas no Capítulo V, relativas ao comportamento de cada algoritmo, visando definir qual o algoritmo indicado para um determinado tipo de estrutura. São expostas também particularidades detectadas durante o trabalho de pesquisa assim como sugestões para melhoramento dos algoritmos e para continuidade deste trabalho.

CAPÍTULO II

GENERALIDADES

II.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é estabelecer uma conexão entre o capítulo introdutório e os capítulos seguintes, procurando recordar ou tornar familiar ao leitor alguns conceitos, métodos e algoritmos que serão citados posteriormente, relacionados com a solução de problemas de autovalor. O que será aqui apresentado está bem documentado nas referências citadas, sendo por isso desnecessário o desenvolvimento de extensas demonstrações ou discussões.

II.2 - ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

A Ortogonalização de Gram-Schmidt (BATHE [2], PARLETT [3]) é uma técnica que possibilita obter um vetor \bar{z} ortogonal a um vetor z , a partir de um vetor z não paralelo a z , através da expressão

$$\bar{z} = z - \alpha z \quad (\text{II.01})$$

onde

$$\alpha = \frac{z^T z}{z^T z} \quad (\text{II.02})$$

Para se obter o que foi estabelecido em (II.02) basta pré-multiplicar os termos da expressão (II.01) por z^T e lembrar que o produto interno $z^T x$ deve ser nulo, devido a imposição de ortogonalidade entre ambos, e que o denominador $z^T z$ é incluído no caso de z não ter sido normalizado.

A ortogonalização de x pode ser feita com relação a vários vetores z_i , $i=1, \dots, m$, não paralelos a x , extrapolando-se (II.01), ou seja

$$\bar{x} = x - \sum_{i=1}^m \alpha_i z_i \quad (\text{II.03})$$

onde

$$\alpha_i = \frac{z_i^T x}{z_i^T z_i} \quad (\text{II.04})$$

Caso os vetores z_i correspondam a autovetores φ_i , deve ser imposta uma M -ortogonalidade, em concordância com a propriedade (I.11), o que permite reescrever as expressões (II.03) e (II.04) como

$$\bar{x} = x - \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i \quad (\text{II.05})$$

e

$$\alpha_i = \varphi_i^T M x \quad (\text{II.06})$$

II.3 - QUOCIENTE DE RAYLEIGH

O Quociente de Rayleigh (BATHE [2], PARLETT [3], CLOUGH e PENZIEN [4], WILKINSON [5]) aplicado ao problema de autovalor (I.06), para qualquer vetor \underline{x} não nulo, é definido como

$$\rho(\underline{x}) = \frac{\underline{x}^T K \underline{x}}{\underline{x}^T M \underline{x}} \quad (II.07)$$

Supondo-se que \underline{x} possa ser escrito como uma combinação linear dos modos de vibração

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n \delta_i \underline{\varphi}_i \quad (II.08)$$

então, a substituição de (II.08) em (II.07), e utilizando-se as relações (I.11) e (I.13), permite escrever

$$\rho(\underline{x}) = \frac{\lambda_1 \delta_1^2 + \lambda_2 \delta_2^2 + \dots + \lambda_n \delta_n^2}{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2} \quad (II.09)$$

ou

$$\rho(\underline{x}) = \lambda_1 \frac{\delta_1^2 + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right] \delta_2^2 + \dots + \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right] \delta_n^2}{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2} \quad (II.10)$$

ou ainda

$$\rho(\underline{x}) = \lambda_n \frac{\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right] \delta_1^2 + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_n} \right] \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2}{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2} \quad (II.11)$$

Lembrando que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_n$, através de uma simples inspeção dos fatores que multiplicam λ_1 e λ_n nas expressões (II.10) e (II.11), respectivamente, conclui-se que

$$\lambda_1 \leq \rho(x) \leq \lambda_n \quad (\text{II.12})$$

e

$$\lambda_1 = \min(\rho(x)) \quad (\text{II.13})$$

Para $x = \varnothing_i$ é imediato que $\rho(x) = \lambda_i$. A existência dos termos em somatória nos numeradores e denominadores nas expressões (II.10) e (II.11) permitem concluir que um autovalor é sempre um limite inferior do Quociente de Rayleigh.

II.4 - ITERAÇÃO INVERSA

A Iteração Inversa (BATHE [2], PARLETT [3], CLOUGH e PENZIEN [4], WILKINSON [5]) é uma ferramenta bastante eficiente para o cálculo de um autovetor e, se necessário, do correspondente autovalor, desde que este esteja situado entre os menores autovalores do problema definido em (I.06). Consiste em repetir um certo número de vezes, dado um vetor de partida x_1 , arbitrário não nulo, os seguintes procedimentos:

para $i = 1, 2, 3, \dots$ faça

$$\textcircled{1} \quad K\bar{x}_{i+1} = Mx_i$$

$$\textcircled{2} \quad \bar{x}_{i+1} = \frac{\bar{x}_{i+1}}{(\bar{x}_{i+1}^T M \bar{x}_{i+1})^{\frac{1}{2}}}$$

→ final

Desde que o vetor de partida não seja ortogonal ao primeiro autovetor, ϱ_1 , será para este que, após um certo número j de iterações, o vetor \bar{x}_{j+1} convergirá, como é mostrado no Apêndice A. A normalização feita no passo $\textcircled{2}$ torna desnecessária a multiplicação pelo autovalor (que é desconhecido) no passo $\textcircled{1}$, presente no problema original, além de impedir que a convergência ocorra para um múltiplo de ϱ_1 .

Como não se dispõem de meios para, a princípio, fixar um número limite de iterações, é conveniente utilizar o Quociente de Rayleigh, visto no item anterior, para se obter uma aproximação do autovalor a cada iteração e, acompanhando a convergência deste, acompanhar também a convergência do respectivo autovetor. Desta forma, fixando-se $\rho(\bar{x}_1) = 0$ e uma precisão ou erro relativo admissível, ERROR , igual a, por exemplo, 10^{-5} , a Iteração Inversa toma o seguinte aspecto:

— para $i = 1, 2, 3, \dots$ faça

$$① \quad \underline{K}\underline{x}_{i+1} = \underline{M}\underline{x}_i$$

$$② \quad \rho(\underline{x}_{i+1}) = \frac{\underline{x}_{i+1}^T \underline{K}\underline{x}_{i+1}}{\underline{x}_{i+1}^T \underline{M}\underline{x}_{i+1}}$$

$$③ \quad \underline{x}_{i+1} = \frac{\underline{x}_{i+1}}{(\underline{x}_{i+1}^T \underline{M}\underline{x}_{i+1})^{\frac{1}{2}}}$$

$$④ \quad \text{caso } \left| \frac{\rho(\underline{x}_{i+1}) - \rho(\underline{x}_i)}{\rho(\underline{x}_{i+1})} \right| \leq \text{ERROR, pare}$$

— final

Caso se tenha uma noção da distribuição dos autovalores, é possível fazer com que a Iteração Inversa converja mais rapidamente através de uma ou mais translações de origem, ou "shift", do sistema cartesiano que contém o polinômio característico do problema de autovalor, como mostrado no Apêndice A e ilustrado na Figura II.1.

Com a introdução do "shift", tem-se

$$\lambda = \mu + \eta \quad (\text{II.14})$$

$$\underline{K} = \underline{K} - \mu \underline{M} \quad (\text{II.15})$$

$$\underline{K}\underline{\phi} = \eta \underline{M}\underline{\phi} \quad (\text{II.16})$$

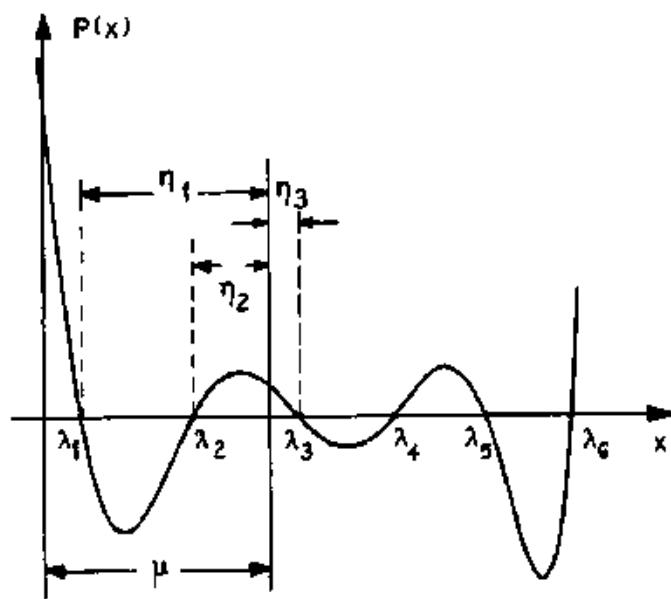


Figura II.1 - Translação de Origem ("shift")

Portanto, o problema de autovalor passa a ser resolvido em termos do resíduo η . Após o resíduo ter alcançado a precisão desejada, o autovalor real é obtido por meio de (II.14). Desta forma, consegue-se uma convergência mais rápida para um autopar de interesse se for tomado um "shift" próximo ao autovalor correspondente.

A Iteração Inversa pode perfeitamente ser empregada para a obtenção de vários autopares, desde que o vetor da iteração seja mantido ortogonal pela técnica de Gram-Schmidt, vista no Item II.2, aos autovetores encontrados em iterações anteriores.

II.5 - ITERAÇÃO DIRETA

A Iteração Direta (BATHE [2], PARLETT [3], CLOUGH e

PENZIEN [4]) desfruta da propriedade de convergir para os auto-vetores correspondentes aos maiores autovalores. Para o problema de autovalor definido em (I.06) pode ser colocada da seguinte forma:

para $i = 1, 2, 3, \dots$ faça

$$① \quad \underline{M}\underline{x}_{i+1} = \underline{K}\underline{x}_i$$

$$② \quad \underline{x}_{i+1} = \frac{\underline{x}_i}{(\underline{x}_{i+1}^T \underline{M}\underline{x}_{i+1})^{\frac{1}{2}}}$$

→ final

Como, ao contrário da matriz de rigidez \underline{K} , a matriz de massa \underline{M} não é necessariamente positiva definida, é possível adotar um "shift" para tornar sua decomposição possível (BATHE [2]), viabilizando a resolução do sistema de equações no passo ①. Da mesma maneira que na Iteração Inversa, vista no item anterior, a Iteração Direta pode ser suplementada com o Quociente de Rayleigh para um acompanhamento da convergência do autovetor, possibilitando interromper o processo iterativo quando for conveniente.

Por intermédio de um raciocínio análogo ao apresentado no Apêndice A, para a Iteração Inversa, mostra-se que a taxa de convergência do autovetor na Iteração Direta é dada por $\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$, para um vetor de partida não ortogonal a $\underline{\phi}_n$. Com a introdução de um "shift" μ a convergência se dará para um autovetor $\underline{\phi}_j$ com razão $\frac{|\lambda_p - \mu|}{|\lambda_j - \mu|}$, o que torna o "shift" pouco atraente no processo iterativo, pois neste caso λ_p está no numerador.

É natural que aqui também seja possível calcular outros pares de autovalores e autovetores desde que seja imposta a ortogonalidade entre o vetor de iteração e os autovetores obtidos anteriormente.

II.6 - MÉTODO DE JACOBI GENERALIZADO

O Método de Jacobi Generalizado (BATHE [2], PARLETT [3]) aplicado ao problema de autovalor (I.06) fundamenta-se nas propriedades (I.11) e (I.13), ou seja

$$\underbrace{\Phi^T}_{\sim} \underbrace{M \Phi}_{\sim} = \underbrace{I}_{\sim} \quad (II.17)$$

e

$$\underbrace{\Phi^T}_{\sim} \underbrace{K \Phi}_{\sim} = \underbrace{\Lambda}_{\sim} \quad (II.18)$$

Tomando-se $\underline{K}_1 = \underline{K}$ e $\underline{M}_1 = \underline{M}$, o Método de Jacobi Generalizado constrói a sequência de matrizes

$$\left. \begin{array}{l} \underline{K}_2 = \underline{R}_1^T \underline{K}_1 \underline{R}_1 \\ \underline{K}_3 = \underline{R}_2^T \underline{K}_2 \underline{R}_2 \\ \vdots \\ \underline{K}_{k+1} = \underline{R}_k^T \underline{K}_k \underline{R}_k \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (II.19)$$

$$\left. \begin{array}{l} M_2 = R_1^T M_1 R_1 \\ M_3 = R_2^T M_2 R_2 \\ \vdots \\ M_{k+1} = R_k^T M_k R_k \end{array} \right\} \quad (II.20)$$

com matrizes de rotação R_k que possibilitem diagonalizar \tilde{K}_{k+1} e \tilde{M}_{k+1} e que têm a seguinte forma

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \text{linha } i \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & \beta & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \text{linha } j \\ & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (II.21)$$

col. i col. j

onde α e β são constantes que devem permitir anularem-se simultaneamente os elementos (i,j) em \tilde{K}_k e \tilde{M}_k .

Então, para $k \rightarrow \infty$

$$\tilde{K}_{k+1} \longrightarrow \tilde{A} \quad (II.22)$$

$$\tilde{M}_{k+1} \longrightarrow \tilde{I} \quad (II.23)$$

$$\tilde{R}_1 \tilde{R}_2 \dots \tilde{R}_k \longrightarrow \tilde{\Phi} \quad (II.24)$$

Contudo, a transformação de \tilde{M}_{k+1} na matriz identidade não é necessária, pois é possível fazer

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}^{(k+1)}}{m_{11}^{(k+1)}} \\ \frac{k_{22}^{(k+1)}}{m_{22}^{(k+1)}} \\ \ddots \\ \frac{k_{nn}^{(k+1)}}{m_{nn}^{(k+1)}} \end{bmatrix} \quad (II.25)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 \dots \tilde{R}_k \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_{11}^{(k+1)}}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{m_{22}^{(k+1)}}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{m_{nn}^{(k+1)}}} \end{bmatrix} \quad (II.26)$$

Considera-se que a cada vez que os elementos $(n-1, n)$ de \underline{K}_{k+1} e \underline{M}_{k+1} forem zerados completa-se uma "varredura". Contudo, quando isto ocorre, é intuitivo que os elementos que foram zerados anteriormente tiveram seus valores alterados, portanto mais de uma varredura deve ser feita.

II.7 - SEQUÊNCIA DE STURM

Uma sequência de polinômios $p_i(x)$, $i=1, \dots, k$, formam uma Sequência de Sturm (BATHÉ [2], PARLETT [3], WILKINSON [5]) se as raízes $\lambda^{(j+1)}$ do polinômio $p_{j+1}(x)$ "separam" as raízes $\lambda^{(j)}$ do polinômio $p_j(x)$. Por "separar" entenda-se que a seguinte relação é satisfeita

$$\lambda_1^{(j)} \leq \lambda_1^{(j+1)} \leq \lambda_2^{(j)} \leq \lambda_2^{(j+1)} \dots \leq \lambda_{m-1}^{(j)} \leq \lambda_{m-1}^{(j+1)} \leq \lambda_m^{(j)} \quad (II.27)$$

sendo m o grau do polinômio $p_j(x)$ e $m-1$ o grau do polinômio $p_{j+1}(x)$. A Figura II.2 mostra, a título de exemplo, uma sequência de polinômios que satisfazem (II.27).

Desta forma, considerando-se o problema de autovalor (I.06), os polinômios

$$p_i(\lambda^{(i)}) = \det(\underline{K}^{(i)} - \lambda^{(i)} \underline{M}^{(i)}) \quad (II.28)$$

satisfazem (II.27), formando uma Sequência de Sturm (BATHÉ [2]), sendo que as matrizes $\underline{K}^{(i)}$ e $\underline{M}^{(i)}$ são de ordem $n-1$, obtidas eliminando-se as últimas i linhas e colunas de \underline{K} e \underline{M} .

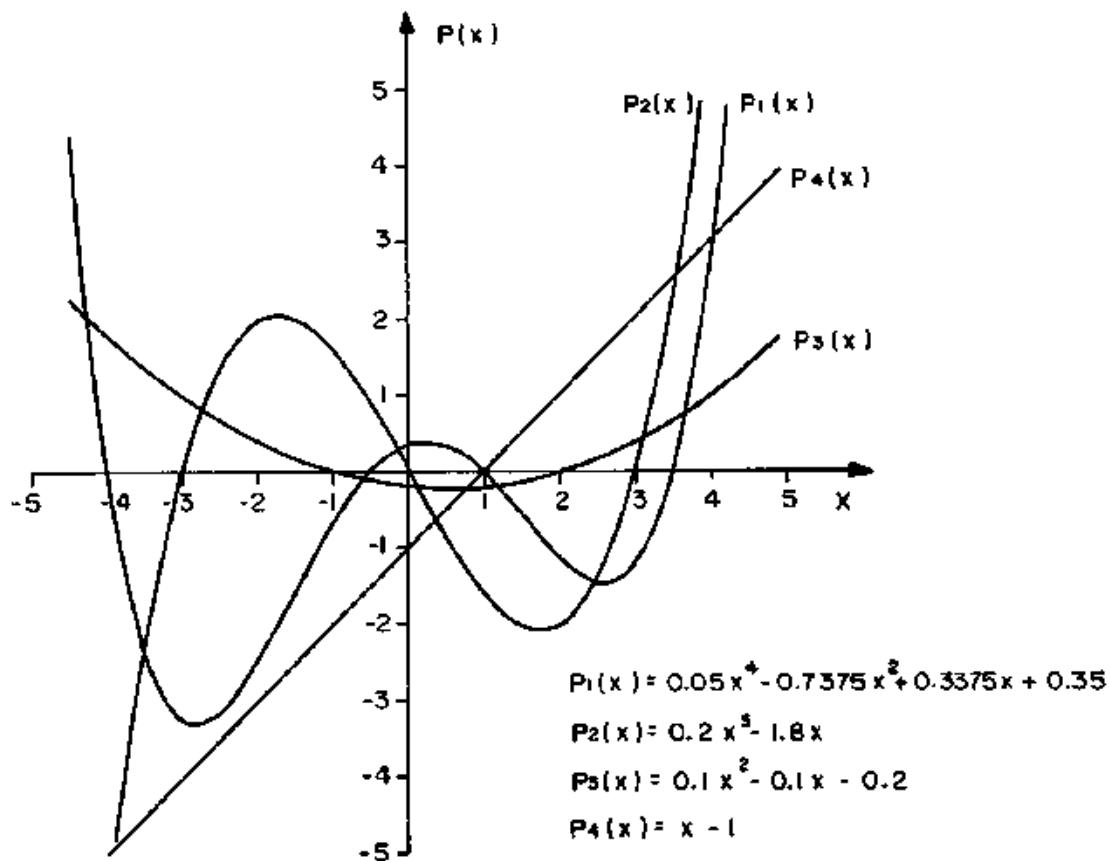


Figura II.2 - Polinômios que formam uma Sequência de Sturm

Na solução do problema de autovalor expresso pela equação (I.06) deve-se observar que, para um dado "shift" μ , o número de elementos negativos na matriz \underline{D} , na decomposição de Gauss

$$\underline{K} - \mu \underline{M} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \quad (II.29)$$

é igual ao número de autovalores menores que o "shift" (BATHE [2]). Portanto, o número de autovalores existentes em um intervalo (μ_A, μ_B) pode ser determinado tomando-se a diferença entre o número de elementos negativos em \underline{D}_B e \underline{D}_A nas decomposições

$$\mathbb{K} - \mu_A \mathbb{M} = \mathbb{L}_A \mathbb{D}_A \mathbb{L}_A^T \quad (\text{III.30})$$

e

$$\mathbb{K} - \mu_B \mathbb{M} = \mathbb{L}_B \mathbb{D}_B \mathbb{L}_B^T \quad (\text{III.31})$$

Em termos dos polinômios definidos em (II.28), o número de autovalores menores que o "shift" é igual ao número de polinômios $p_i(\mu)$ menores do que zero (PARLETT [3], WILKINSON [5]). É na repetição desta propriedade que se baseia o Método da Bissecção (WILKINSON [5]), conveniente para a determinação dos autovalores de matrizes com largura de banda muito pequena, como é o caso das matrizes tridiagonais (PARLETT [3], WILKINSON [5]). A Figura III.3 procura mostrar o funcionamento do Método da Bissecção, onde os números i entre círculos indicam a i -ésima bissecção, voltada para a determinação, por exemplo, de λ_3 .

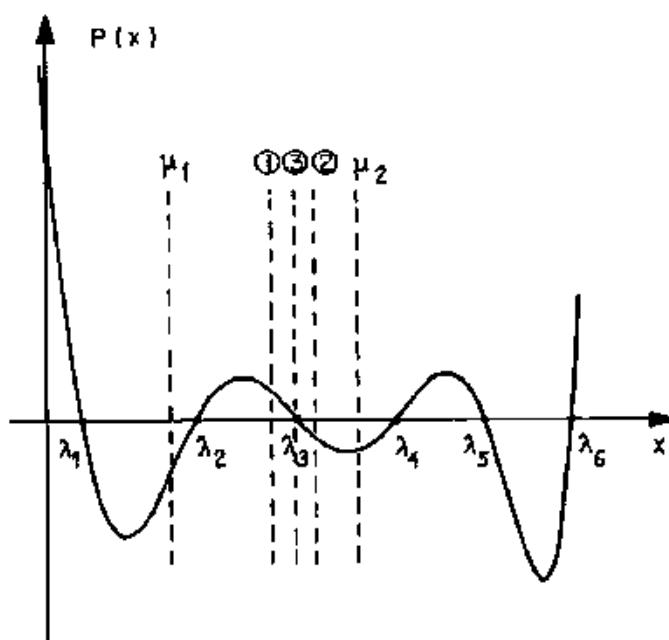


Figura III.3 - Funcionamento do Método da Bissecção

II.8 - ANÁLISE DE RAYLEIGH-RITZ

O Método de Ritz (BATHE [2], CLOUGH e PENZIEN [4]) objetiva tornar possível a escrita de um vetor $\bar{\delta}$ como uma combinação linear de certos vetores $\psi_i, i=1, \dots, m$, da seguinte forma

$$\bar{\delta} = \sum_{i=1}^m \delta_i \psi_i = \Psi \delta \quad (\text{II.32})$$

onde

$$\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_m] \quad (\text{II.33})$$

Os vetores pré-estabelecidos ψ_i formam uma "base de Ritz", enquanto os δ_i são as "coordenadas de Ritz" a serem determinadas de maneira a satisfazer (II.32).

Por sua vez, a Análise de Rayleigh-Ritz (BATHE [2], PARLETT [3], CLOUGH e PENZIEN [4]) objetiva encontrar vetores $\bar{\delta}_i, i=1, \dots, m$, que estando contidos no subespaço vetorial gerado pela base de Ritz melhor aproximem os autovetores desejados do problema (I.06). Os procedimentos que permitem obter tais vetores $\bar{\delta}_i, i=1, \dots, m$, são derivados do Quociente de Rayleigh, definido por (II.7), aplicado ao vetor $\bar{\delta}$ que, por meio de (II.32), conduz a

$$\rho(\bar{\delta}) = \frac{\bar{\delta}^T \Psi^T K \Psi \bar{\delta}}{\bar{\delta}^T \Psi^T M \Psi \bar{\delta}} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \delta_i \delta_j k_{ij}}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \delta_i \delta_j m_{ij}} = \frac{\bar{k}}{\bar{m}} \quad (\text{II.34})$$

sendo

$$\bar{k}_{ij} = \Psi_i \bar{K} \Psi_j \quad (II.35)$$

$$\bar{m}_{ij} = \Psi_i \bar{M} \Psi_j \quad (II.36)$$

Como o Quociente de Rayleigh é um limite superior do autovalor, como mostrado no Item II.3, a melhor aproximação para o mesmo é obtida através dos valores δ_i que minimizam (II.31). Então, diferenciando-se (II.34) em relação a δ_i , as únicas variáveis na expressão, tem-se

$$\frac{\partial \rho(\bar{\rho})}{\partial \delta_i} = \frac{2\hat{m} \sum_{j=1}^m \delta_i \bar{k}_{ij} - 2\bar{k} \sum_{j=1}^m \delta_j \bar{m}_{ij}}{\hat{m}^2} \quad (II.37)$$

Usando $\rho = \frac{\bar{k}}{\hat{m}}$, a condição de mínimo

$$\frac{\partial \rho(\bar{\rho})}{\partial \delta_i} = 0 \quad (II.38)$$

aplicada à expressão (II.37) conduz a

$$\sum_{j=1}^m (\bar{k}_{ij} - \rho \bar{m}_{ij}) \delta_j = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (II.39)$$

que pode ser escrita como

$$\bar{K} \delta = \rho \bar{M} \delta \quad (II.40)$$

sendo

$$\tilde{K} = \tilde{\Psi}^T \tilde{K} \tilde{\Psi} \quad (q \times q) \quad (II.41)$$

e

$$\tilde{M} = \tilde{\Psi}^T \tilde{M} \tilde{\Psi} \quad (q \times q) \quad (II.42)$$

A solução do problema (II.40) fornece m autovalores $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ que são aproximações dos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ bem como autovetores $\tilde{\delta}_i$, $i=1, \dots, m$, que possibilitam encontrar os autovetores desejados $\tilde{\mathcal{Z}}_i$, $i=1, \dots, m$, por meio de

$$\tilde{\mathcal{Z}}_i = \tilde{\Psi} \tilde{\delta}_i \quad (II.43)$$

Portanto, a expressão (II.40) pode ser escrita para os m autovalores ρ e autovetores $\tilde{\delta}$ simultaneamente como

$$\tilde{K} \tilde{\Delta} = \tilde{M} \tilde{P} \tilde{\Delta} \quad (II.44)$$

e consequentemente

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Psi} \tilde{\Delta} \quad (II.45)$$

II.9 - SUBESPAÇOS DE KRYLOV

Sequência de Krylov (PARLETT [3]) é a sequência de m vetores, dada uma matriz \tilde{A} e um vetor de partida \tilde{y} , definida por

$$(\tilde{y}, \tilde{A}\tilde{y}, \tilde{A}^2\tilde{y}, \dots, \tilde{A}^{m-1}\tilde{y}) \quad (II.46)$$

Por sua vez, Subespaço de Krylov, $\mathcal{K}^m(y)$, é o subespaço gerado pelos m vetores da sequência (II.46), ou seja

$$\mathcal{K}^m(y) = \text{span}(y, Ay, \dots, A^{m-1}y) \quad (\text{II.47})$$

Com este tipo de subespaço, mesmo para valores modestos de m , consegue-se boas aproximações para os autovalores e auto-vetores da matriz A . Como se pode notar, os vetores que formam a sequência (II.46) podem ser assimilados aos oriundos de uma iteração vetorial, direta ou inversa, com a matriz A .

Todo um estudo sobre Subespaços de Krylov pode ser encontrado no trabalho de PARLETT [3], bem como a Teoria de KANIEL e SAAO, relacionada com a análise dos erros cometidos nas aproximações que estes subespaços obtêm para as soluções do problema

$$Ax = \lambda x \quad (\text{II.48})$$

CAPÍTULO III

O MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS

III.1 - INTRODUÇÃO

Os processos de cálculo de autovalores e autovetores relacionados com iteração vetorial podem ser empregados eficientemente na determinação de vários pares de autovalores e autovetores, desde que o vetor da iteração seja mantido ortogonal aos vetores encontrados anteriormente, em concordância com o que foi exposto nos Itens II.4 e II.5. Baseados neste fato, CORR e JENNINGS [7] propuseram uma iteração simultânea com vetores mantidos ortogonais entre si pela técnica de Gram-Schmidt, vista no Item II.2. Utilizaram-se da Iteração Inversa, que converge para os menores autovalores, pois tal trabalho estava relacionado com o estudo de vibrações estruturais, onde os autovetores ou modos de vibração correspondentes às menores frequências naturais, e consequentemente aos menores autovalores, geralmente são mais importantes.

O Método de Iteração por Subespaços (BATHE [2], PARLETT [3], CLOUGH e PENZIEN [4]) é uma técnica derivada da iteração simultânea, porém muito mais elaborada, pois o que se busca é um subespaço vetorial de dimensão m que contenha boas aproximações dos autovalores e autovetores de interesse, contidos no espaço vetorial de dimensão n , solução do problema. A Análise de Rayleigh-Ritz, mostrada no Item II.8, possibilita a projeção do problema de autovalor de dimensão n em um problema de dimensão reduzida m que pode ser resolvido, por exemplo, pelo Método de

Jacobi Generalizado, visto no Item II.6. Deve ser utilizada esta versão do método porque as matrizes projetadas, de dimensão m , são cheias, independentemente das características de banda das matrizes de dimensão n ou da matriz de massa ser diagonal. As propriedades (II.17) e (II.18), nas quais o Método de Jacobi está baseado, asseguram a ortogonalidade entre os vetores que estão sendo iterados.

Portanto, o Método de Iteração por Subespaços pode ser summarizado conforme apresentado na Tabela III.1.

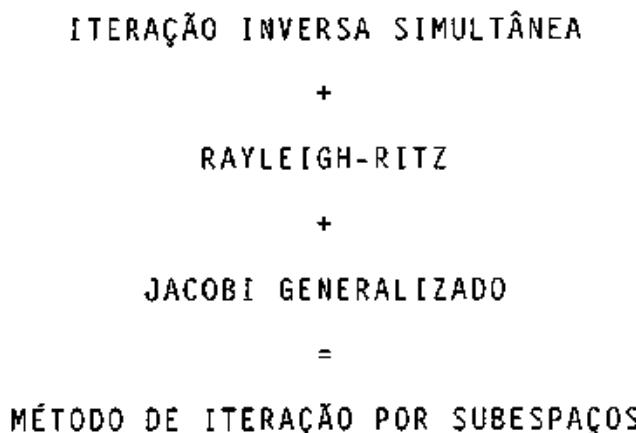


Tabela III.1 - Esquema do Método de Iteração por Subespaços

A convergência do método é mensurada tomando-se o erro relativo entre os autovalores obtidos em iterações consecutivas. Verifica-se que os autovalores calculados e os erros relativos relacionam-se como mostrado qualitativamente na Figura III.1, ou seja, os erros relativos são menores para os menores autovalores. Isto decorre do fato da convergência ser mais rápida para os autovetores correspondentes aos menores autovalores, característica herdada da Iteração Inversa. Este comportamento sugere a utilização do método em blocos, onde todos os autovalores e autove-

tores seriam calculados mais ou menos com a mesma precisão. Assim que os vetores de um bloco ou subespaço convergirem toma-se outro bloco e o método é continuado. Fixando-se um erro relativo admissível, a convergência é considerada alcançada quando este for satisfeito para o número de autovalores a serem extraídos do subespaço.

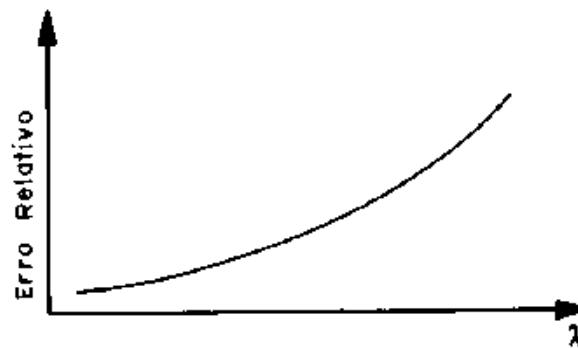


Fig.III.1 - Relação entre os autovalores e os erros relativos

III.2 - O MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS PADRÃO

Este trabalho considera como padrão, o Método de Iteração por Subespaços proposto por BATHE [2], que se encontra resumido no Quadro III.1, onde é dado também o número aproximado de operações requeridas em cada passo do método (WILSON e ITOH [10]) para uma matriz de massa \underline{M} diagonal e uma matriz de rigidez \underline{K} com largura de banda média b . A dimensão do subespaço é fixada no menor valor entre $2p$ e $p+8$, sendo p o número de frequências e modos de vibração a serem determinados. Com tal esquema, ou seja, $m > p$, são poucas as possibilidades de algum dos p modos de vibração desejados ser \underline{M} -ortogonal aos vetores de iteração de

partida, pois aquele não seria detectado pelo método.

Os vetores de iteração de partida, no passo A.1, podem ser tomados de várias formas (BTHE [2], PARLETT [3], CORR e JENNINGS [7], BTHE e RAMASWAMY [8]), impondo-se porém a condição de independência linear entre os mesmos. No presente trabalho o primeiro vetor é tomado simplesmente como a diagonal da matriz de massa, enquanto que os demais são tomados como colunas da matriz identidade, com a unidade nas posições correspondentes aos maiores quocientes m_{ii}/k_{ii} , elementos diagonais das matrizes de massa e rigidez.

Na parte iterativa propriamente dita, parte B do método, é possível fixar um número de iterações que podem ser feitas, NMITE.

Para a solução do problema de autovalor reduzido, no passo B.3, utiliza-se o Método de Jacobi Generalizado, pelas razões expostas no item anterior. A convergência, no passo B.5, é monitorada por meio dos erros relativos dos p menores autovalores do subespaço. Para tanto, o erro relativo, ERROR, é geralmente fixado em 10^{-5} .

O Método de Iteração por Subespaços Padrão tem grande reputação entre os analistas estruturais em parte pelas vantagens oriundas da Iteração Inversa (como a convergência) e da Análise de Rayleigh-Ritz e em parte pela confiabilidade decorrente de uma ampla utilização. Mesmo assim, trabalhos como o de BTHE e RAMASWAMY [8] e YAMAMOTO e OHTSUBO [9] propõem dispositivos para melhorá-lo.

QUADRO III.1 - MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPACOS PADRÃO

A - Cálculos Iniciais

A.1 - Dimensão do Subespaço : $m = \minimo de (2p, p+8)$ A.2 - Seleção dos Vetores de Iteração de Partida \bar{Y}_1 A.3 - Fatoração de X

$$LDL^T = X \quad n.o. = Nb^2/2$$

B - Iteração por Subespaços - $i = 1, \dots, NMITE$

B.1 - Iteração Inversa

$$LDL^T X_{i+1} = Y_i \quad n.o. = 2Nm$$

B.2 - Projeção das Matrizes

$$K_{i+1} = X_{i+1}^T K X_{i+1} = X_{i+1}^T Y_i \quad n.o. = Nm^2$$

$$M_{i+1} = X_{i+1}^T M X_{i+1} = X_{i+1}^T \bar{Y}_{i+1} \quad n.o. = Nm^2$$

B.3 - Solução do Problema de Autovalor Reduzido

$$K_{i+1} Q_{i+1} = M_{i+1} Q_{i+1} \Lambda_{i+1} \quad n.o. = 10m^3$$

B.4 - Melhor Aproximação dos Vetores de Iteração

$$Y_{i+1} = \bar{Y}_{i+1} Q_{i+1} \quad n.o. = Nm^2$$

B.5 - Teste da Convergência

$$\left| \frac{\lambda_j^{(i+1)} - \lambda_j^{(1)}}{\lambda_j^{(i+1)}} \right| < TOL ? \quad j = 1, \dots, p$$

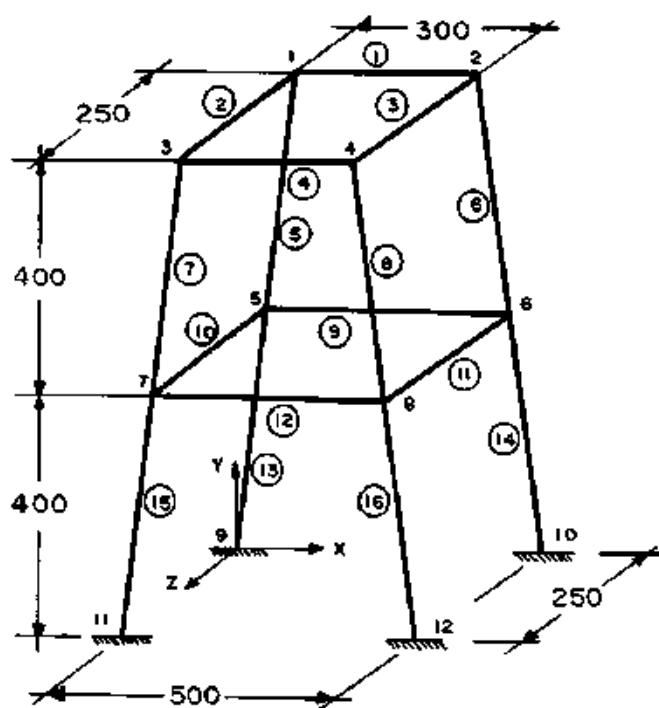
SIM - -> PARE

NÃO ---> B.1

Com o objetivo de mostrar o seu funcionamento, o Método de Iteração por Subespaços Padrão é utilizado, no Exemplo III.1, na determinação das 6 primeiras frequências e dos correspondentes modos de vibração de um pórtico espacial de 12 nós e 16 elementos.

III.3 - O MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS EM BLOCOS

A relação entre a convergência, medida pelos erros relativos, e os autovalores, mostrada na Figura III.1, sugere a possibilidade de se resolver o problema de autovalor por etapas, em blocos. Assim sendo, se, por exemplo, devem ser obtidas as 8 primeiras frequências naturais e os correspondentes modos de vibração de uma estrutura, tal solução poderia ser obtida por meio de dois blocos, determinando 4 frequências de cada vez. A dimensão do subespaço é função do número r de autovalores e autovetores a serem extraídos do mesmo e pode ser definida pelo analista estrutural ou tomada como no item anterior. Os vetores de um bloco devem ser mantidos ortogonais aos q autovetores convergidos em blocos anteriores e isto pode ser feito pela técnica apresentada no Item II.2. Caso esta ortogonalização não seja feita a cada iteração, a característica de convergência da Iteração Inversa, apresentada no Item II.4, poderá ser responsável pelo aparecimento de cópias indevidas de autovalores e autovetores em blocos distintos. Mesmo que os vetores de partida de um bloco sejam ortogonais a autovetores já obtidos, a ortogonalização deve ser feita, pois os erros de truncamento podem ocasionar a perda de ortogonalidade.

EXEMPLO III.1

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\nu = 0.2$$

$$\rho = 0.002 \text{ Kg/cm}^3$$

diâmetro dos elementos

1, 2, 3, 4 : 20cm

9, 10, 11, 12 : 25cm

demais : 30cm

$$N = 48$$

$$b = 59$$

$$p = 6$$

$$m = 12$$

$$\text{ERROR} = 10^{-5}$$

Número de iterações necessárias : 9

	FREQUÊNCIA (rad/s)	ERRO RELATIVO FINAL	ITERAÇÃO NA QUAL CONVERGIU
1	2.0985	$\sim 10^{-23}$	3 ^a
2	2.3319	$\sim 10^{-24}$	3 ^a
3	2.9140	$\sim 10^{-14}$	5 ^a
4	5.7831	$\sim 10^{-23}$	4 ^a
5	5.8469	$\sim 10^{-23}$	3 ^a
6	6.5079	$\sim 10^{-6}$	9 ^a

Número teórico de operações realizadas : 1.0×10^6

O esquema proposto para o Método de Iteração por Subespaços em Blocos é dado no Quadro III.2. Em virtude da ortogonalidade que deve ser mantida em relação a autovetores convergidos anteriormente, estes devem ser obtidos com a precisão ou erro relativo especificado, razão de não se impor um número de iterações para cada bloco, ou subespaço, na parte B do método.

A título de ilustração, o Exemplo III.2 mostra o funcionamento deste método na obtenção das 6 primeiras frequências do pórtico espacial utilizado no Exemplo III.1, com uma grande economia de operações em relação ao procedimento anterior.

Como neste caso o analista estrutural pode definir a dimensão do subespaço, os vetores de partida devem ser tomados com um pouco de cuidado, de maneira a evitar os problemas discutidos no item anterior. Um esquema testado que se revelou eficientemente é o que introduz a unidade em m posições em cada um dos m vetores do subespaço. Essas posições são determinadas pelos maiores quocientes m_{ii}/k_{ii} também discutidos anteriormente. Assim sendo, para um subespaço de dimensão 4, por exemplo, em um problema de ordem 100 com os maiores quocientes m_{ii}/k_{ii} correspondendo às posições diagonais 12,13,30,38,49,70,87,etc, o primeiro vetor teria a unidade nas posições 12,13,30 e 38, o segundo nas posições 13,30,38 e 49 e assim por diante, com as demais assumindo o valor zero.

III.4 - O MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS COM SHIFT

O desempenho do Método de Iteração por Subespaços em Blocos pode ser consideravelmente melhorado com um acelerador de

QUADRO III.2 - MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS EM BLOCOS

A - Cálculos Iniciais

A.1 - Dimensão do Subespaço : m = fixada pelo usuárioA.2 - Fatoração de K

$$LDL^T = K$$

n.o. = $Nb^2/2$

B - Cálculo dos Autovetores em Grupos

Seleção dos Vetores de Iteração de Partida \bar{Y}_1

C - Iteração por Subespaços

C.1 - Ortop. de \bar{Y}_1 contra autovetores já encontrados n.o. = $2Nm^2$

C.2 - Cálculo do Vetor de Força Inercial

$$F_{i+1} = M\bar{Y}_{i+1}A_{i+1}$$

n.o. = $2Nm$

C.3 - Iteração Inversa

$$LDL^T X_{i+1} = F_{i+1}$$

n.o. = $2Nmb$

C.4 - Projeção das Matrizes

$$A_{i+1} = X_{i+1}^T F_{i+1}$$

n.o. = Nm^2

$$B_{i+1} = X_{i+1}^T M X_{i+1} = X_{i+1}^T \bar{Y}_{i+1}$$

n.o. = Nm^2

C.5 - Solução do Problema de Autovalor Reduzido

$$A_{i+1}Q_{i+1} = B_{i+1}Q_{i+1}A_{i+1}$$

n.o. = $10m^3$

C.6 - Melhor Aproximação dos Vetores de Iteração

$$\bar{Y}_{i+1} = \bar{Y}_{i+1}Q_{i+1}$$

n.o. = Nm^2

C.7 - Teste da Convergência

$$TOLMAX = \max \left| \frac{\lambda_j^{(i+1)} - \lambda_j^{(i)}}{\lambda_j^{(i+1)}} \right| \quad j = 1, \dots, r$$

TOLMAX \leq TOL :Se vetores encontrados = p \rightarrow PARESe vetores encontrados $<$ p \rightarrow BTOLMAX $>$ TOL \rightarrow C.1

EXEMPLO III.2

N = 48

b = 59

p = 6

m = 4 (2 blocos)

ERROR = 10^{-5}

BLOCO 1:

Número de iterações necessárias : 5

	FREQUÊNCIA (rad/s)	ERRO RELATIVO FINAL	ITERAÇÃO NA QUAL CONVERGIU
1	2.0985	$\sim 10^{-6}$	5 ^a
2	2.3319	$\sim 10^{-6}$	5 ^a
3	2.9140	$\sim 10^{-5}$	5 ^a

BLOCO 2:

Número de iterações necessárias : 6

	FREQUÊNCIA (rad/s)	ERRO RELATIVO FINAL	ITERAÇÃO NA QUAL CONVERGIU
4	5.7831	$\sim 10^{-20}$	2 ^a
5	5.8469	$\sim 10^{-18}$	3 ^a
6	6.5079	$\sim 10^{-6}$	6 ^a

Número teórico de operações realizadas : 3.7×10^5

convergência do tipo translação de origem, ou "shift". Tal dispositivo proporciona uma convergência mais rápida na Iteração Inversa, conforme discutido no Item II.4, e no Apêndice A. Baseados nestes fatos, WILSON e ITOH [10] desenvolveram um método aplicável a problemas de autovalor de grandes estruturas, mostrado no Quadro III.3. Associando o número aproximado de operações requeridas em cada passo a uma vasta experiência profissional, esses pesquisadores concluíram, através de algumas simplificações, que a dimensão ideal do subespaço para o caso é aquela correspondente à raiz quadrada da largura de banda média b , da matriz de rigidez K . O número de iterações a serem feitas com cada "shift" é definido também pelo número de operações requeridas em cada passo e é, portanto, função das matrizes envolvidas e da própria dimensão do subespaço. Algumas modificações foram feitas no método originalmente proposto para que o analista estrutural também possa utilizar sua experiência, nos passos A.1 e A.2 do Quadro III.3, para cada tipo de estrutura a ser analisada.

Os vetores de partida utilizados, no passo B.1, seguem o esquema proposto no item anterior, enquanto que cada "shift" no passo B.2, é tomado verificando-se a convergência dos autovalores, onde λ_k é o último autovalor a ter convergido e λ_{k+1} é o próximo a convergir. Para autovalores bastante próximos, ou seja, $\lambda_{k+1} - \lambda_k < 0.01 \mu$, o shift é fixado em $0.99\lambda_k$. Este esquema de "shifts" também é interessante no sentido de que o número de elementos negativos na matriz D , na fatoração do passo B.3, indica o número de autovalores menores que o "shift" aplicado, conforme exposto no Item II.7, possibilitando detectar a possível perda de algum autovalor pelo método. Então, os p autovalores devem ser calculados em grupos de $m-1$, pois o autovalor corres-

QUADRO III.3 - MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPACOS EM BLOCOS COM SHIFT

A - Cálculos Iniciais

A.1 - Dimensão do Subespaço : $m = \max(4, \sqrt{b})$ ou especif. pelo usuário

A.2 - Número de Iterações para cada Shift

 $NMITE = \max(2, (Nb^2) / (3Nm^2 + 2Nmb + 10m^3))$ ou especif. pelo usuário

B - Cálculo dos Autovetores em Grupos

B.1 - Seleção dos Vetores de Iteração de Partida \bar{Y}_1 B.2 - Translação da Origem (Shift) : $\mu = \lambda_k + 0.9(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ ou $\mu = 0.99\lambda_k$ B.3 - Fatoração de \bar{K}

$$LDL^T = \bar{K} = K - \mu M \quad n.o. = Nb^2 / 2$$

C - Iteração por Subespacos - $i = 1, \dots, NMITE$ C.1 - Ortogon. de \bar{Y}_i contra autovetores já encontrados $n.o. = 2Nm^2$ C.2 - Cálculo do Vetor de Força Inercial
 $F_{i+1} = M\bar{Y}_i A_i$ $n.o. = 2Nm$

C.3 - Iteração Inversa

$$LDL^T X_{i+1} = F_{i+1} \quad n.o. = 2Nmb$$

C.4 - Projeção das Matrizes

$$A_{i+1} = X_{i+1}^T F_{i+1} + \mu B_{i+1} \quad n.o. = Nm^2$$

$$B_{i+1} = X_{i+1}^T M X_{i+1} = X_{i+1}^T \bar{Y}_{i+1} \quad n.o. = Nm^2$$

C.5 - Solução do Problema de Autovalor Reduzido

$$A_{i+1} \bar{\Omega}_{i+1} = B_{i+1} \bar{\Omega}_{i+1} A_{i+1} \quad n.o. = 10m^3$$

C.6 - Melhor Aproximação dos Vetores de Iteração

$$\bar{Y}_{i+1} = \bar{Y}_{i+1} \bar{\Omega}_{i+1} \quad n.o. = Nm^2$$

C.7 - Teste da Convergência

$$TOLMAX = \max \left| \frac{\lambda_j^{(i+1)} - \lambda_j^{(i)}}{\lambda_j^{(i+1)}} \right| \quad j = 1, \dots, m-1$$

TOLMAX \leq TOL :Se vetores encontrados = p \rightarrow PARESe vetores encontrados $< p \rightarrow$ B.1TOLMAX $>$ TOL :Se $i < NMITE \rightarrow$ C.1Se $i = NMITE \rightarrow$ B.2

pondente ao m -ésimo autovalor servirá para a definição do primeiro "shift" para o próximo grupo.

Quando se utiliza a técnica de "shifts" os autovalores encontrados são na realidade resíduos, ou seja, as "distâncias" dos autovalores reais ao "shift", como discutido no Item II.4, que correspondem à solução, \underline{H}_{i+1} , do problema reduzido

$$\underline{K}_{i+1}\underline{Q}_{i+1} = \underline{M}_{i+1}\underline{Q}_{i+1}\underline{H}_{i+1} \quad (\text{III.01})$$

Contudo, incorporando-se o "shift" em ambos os termos de (III.01) tem-se

$$\underline{K}_{i+1}\underline{Q}_{i+1} + \mu\underline{M}_{i+1}\underline{Q}_{i+1}\underline{I} = \underline{M}_{i+1}\underline{Q}_{i+1}(\underline{H}_{i+1} + \mu\underline{I}) \quad (\text{III.02})$$

ou

$$(\underline{K}_{i+1} + \mu\underline{M}_{i+1})\underline{Q}_{i+1} = \underline{M}_{i+1}\underline{Q}_{i+1}\underline{A}_{i+1} \quad (\text{III.03})$$

cuja solução fornece os autovalores propriamente ditos e que corresponde ao procedimento feito no passo C.4 do Quadro III.3.

O funcionamento do método é mostrado no Exemplo III.3, para o cálculo das 6 primeiras frequências da estrutura utilizada no Exemplo III.1. Embora neste caso o número teórico de operações tenha sido maior do que no exemplo anterior, os tempos de processamento de cada problema indicam o contrário, como mostra a Tabela III.2. Isto provavelmente se deve às características de esparsidade da matriz de rigidez \underline{K} , apesar de duas fatorações adicionais, uma vez que foi feito um número menor de iterações.

EXEMPLO	TEMPO DE PROCESSAMENTO (Segundos)
III.1	33
III.2	15
III.3	14

Tabela III.2 - Tempos de processamento para os Exemplos III.1, III.2 e III.3

EXEMPLO [II.3]

N = 48

b = 59

p = 6

m = 4 (2 blocos)

ERROR = 10^{-5}

BLOCO 1:

Número de iterações necessárias : 5

	FREQUÊNCIA (rad/s)	ERRO RELATIVO FINAL	ITERAÇÃO NA QUAL CONVERGIU
1	2.0985	$\sim 10^{-8}$	5 ^a
2	2.3319	$\sim 10^{-7}$	5 ^a
3	2.9140	$\sim 10^{-6}$	5 ^a

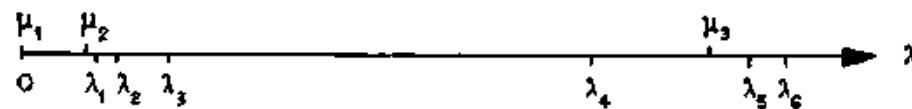
BLOCO 2:

Número de iterações necessárias : 3

	FREQUÊNCIA (rad/s)	ERRO RELATIVO FINAL	ITERAÇÃO NA QUAL CONVERGIU
4	5.7831	$\sim 10^{-14}$	2 ^a
5	5.8469	$\sim 10^{-10}$	3 ^a
6	6.5079	$\sim 10^{-8}$	3 ^a

Número teórico de operações realizadas : 4.6×10^5

História dos "shifts" (NMITE = 3):



CAPÍTULO IV

O ALGORITMO DE LANCZOS

IV.1 - INTRODUÇÃO

O Algoritmo de Lanczos (BATHE [2], PARLETT [3]) é originário do "Método de Iterações Minimizadas" publicado em 1950 por LANCZOS [11] como uma técnica de solução de problemas de autovalor de operadores integrais e diferenciais lineares. Contudo, tal método foi visto mais como uma técnica de tridiagonalização de matrizes e, devido a problemas de instabilidade numérica, preterido a favor de outros algoritmos, como o de Givens e o de Householder (BATHE [2], PARLETT [3]). Somente no começo da década de 1970 é que os estudos de PAIGE [12,13] revelaram que o Algoritmo de Lanczos poderia ser utilizado eficientemente na solução de problemas de autovalor de matrizes simétricas e esparsas de grandes dimensões do tipo

$$Ax = \lambda x \quad (IV.1)$$

A esses estudos seguiram-se os importantes trabalhos de KAHAN e PARLETT [14], no qual se fez um estudo dos limites de erro do algoritmo, o de GOLUB e UNDERWOOD [15], no qual se sugeriu a utilização do algoritmo em blocos, o de SCOTT [16], a respeito da convergência do algoritmo, e o do próprio PAIGE [17], sobre a precisão e a eficiência do algoritmo.

Desta forma, considerando-se o problema de autovalor definido em (I.08)

$$\underline{\underline{K}}\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{\Phi}}\Lambda \quad (\text{IV.02})$$

uma transformação de coordenadas do tipo

$$\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{S}} \quad (\text{IV.03})$$

possibilita escrever

$$\underline{\underline{K}}\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{S}}\Lambda \quad (\text{IV.04})$$

ou

$$\underline{\underline{K}}\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{S}}\Lambda^{-1} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{S}} \quad (\text{IV.05})$$

ou ainda, pré-multiplicando-se ambos os termos da expressão (IV.05) por $\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{K}}^{-1}$

$$\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}} \Lambda^{-1} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{S}} \quad (\text{IV.06})$$

Impondo-se à $\underline{\underline{Q}}$ uma $\underline{\underline{M}}$ -ortogonalidade tem-se

$$\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} \quad (\text{IV.07})$$

onde $\underline{\underline{I}}$ é a matriz identidade com os elementos possuindo a unidade de massa. A substituição da propriedade (IV.07) na expressão (IV.06) possibilita escrever

$$\underline{S}\underline{A}^{-1} = \underline{Q}^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{Q} \quad (\text{IV.08})$$

Definindo-se

$$\underline{I} = \underline{Q}^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{Q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.09})$$

e

$$\underline{\varrho} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & & & \\ & \underline{e}_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_2 & & & \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\Lambda}^{-1} \quad (\text{IV.10})$$

chega-se ao problema do autovalor, substituindo-se (IV.09) e (IV.10) na expressão (IV.08)

$$\underline{I}\underline{S} = \underline{S}\underline{\varrho} \quad (\text{IV.11})$$

cujos autovalores ϱ são, portanto, os recíprocos dos autovalores do problema (IV.02) e cujos autovetores $\underline{\varrho}$ relacionam-se com os autovetores do problema (IV.02) através de (IV.03).

Os termos α_i e β_i da matriz \underline{I} podem ser deduzidos lembrando-se que

$$\underline{Q}^T \underline{M} = \underline{Q}^{-1} \quad (\text{IV.13})$$

o que permite escrever, pré-multiplicando-se a expressão (IV.09) por \mathbf{Q} ,

$$\mathbf{Q}\mathbf{L} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q} \quad (\text{IV.13})$$

Considerando-se então uma submatriz \mathbf{Q}_j , de dimensão $n \times j$, tem-se, por intermédio da expressão (IV.13),

$$\begin{matrix} \mathbf{K}^{-1} & \mathbf{M} & \mathbf{Q}_j & = & \mathbf{Q}_n & \mathbf{I}_j & \mathbf{Q} \\ \boxed{\phantom{K^{-1}}} & \boxed{} & \boxed{} & = & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ nxn & nxn & nxj & & nxn & nxj & \\ \end{matrix} \quad (\text{IV.14})$$

$$\begin{matrix} & \mathbf{Q}_j & \mathbf{I}_j & + & \mathbf{Q} \\ = & \boxed{} & \boxed{} & + & \boxed{} \\ nxj & j \times j & & & nxj \\ & & & & \xrightarrow{\beta_j \mathbf{Q}_{j+1}} \mathbf{r}_j \end{matrix} \quad (\text{IV.14})$$

ou então

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_j\mathbf{I}_j + \mathbf{r}_j \mathbf{e}_j^T \quad (\text{IV.15})$$

sendo \mathbf{e}_j um vetor canônico.

A expressão (IV.14) pós-multiplicada por \mathbf{e}_j resulta em

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}_j = \beta_{j-1}\mathbf{Q}_{j-1} + \alpha_j\mathbf{Q}_j + \mathbf{r}_j \quad (\text{IV.16})$$

ou

$$\underline{L}_j = \underline{L}_{j-1} - \beta_{j-1} \underline{q}_{j-1} - \alpha_j \underline{q}_j \quad (\text{IV.17})$$

fazendo-se

$$\underline{L}_j = \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{q}_j \quad (\text{IV.18})$$

Como, através das expressões (IV.07) e (IV.14)

$$\underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{q}_{j+1} = \frac{\underline{L}_j^T \underline{M} \underline{L}_j}{\beta_j} = 1 \quad (\text{IV.19})$$

e

$$\alpha_j = \underline{q}_j^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{q}_j \quad (\text{IV.20})$$

conclui-se que

$$\beta_j = \sqrt{\underline{q}_j^T \underline{M} \underline{r}_j} \quad (\text{IV.21})$$

$$\alpha_j = \underline{q}_j^T \underline{M} \underline{r}_j \quad (\text{IV.22})$$

Então, dado um vetor de partida \underline{q}_1 arbitrário de módulo unitário, o Algoritmo de Lanczos constrói uma sequência de vetores, através das expressões (IV.17), (IV.18), (IV.21) e (IV.22), que formam uma base para o Subespaço de Krylov, definido pela expressão (II.47), sendo que neste caso tem-se

$$\underline{A} = \underline{K}^{-1} \underline{M} \quad (\text{IV.23})$$

Como se pode notar, na expressão (IV.17) é feita uma ortogonalização pela técnica de Gram-Schmidt, apresentada no Item II.2. Neste caso entretanto, a ortogonalização é truncada, feita apenas em relação aos dois últimos vetores g calculados, o que não traria problemas caso a precisão da aritmética utilizada fosse infinita (PARLETT [3], PAIGE [13]), ou seja não ocorressem erros de truncamento. Como isto não se verifica na realidade, após um certo número de passos os vetores gerados pela expressão (IV.17) tornar-se-ão paralelos e esta é a causa da instabilidade numérica do algoritmo. A perda de ortogonalidade depende das características das matrizes envolvidas bem como da precisão e da aritmética utilizada, definida como sendo o menor número da aritmética finita que satisfaz (PARLETT [3])

$$1 + \epsilon > 1 \quad (\text{IV.24})$$

A consequência da perda de ortogonalidade se faz sentir na determinação de cópias indevidas de autovalores e autovetores pelo algoritmo (PARLETT [3]).

Verifica-se, porém, que mesmo para um pequeno número j de passos o Algoritmo de Lanczos consegue obter boas aproximações para alguns autovalores e autovetores do problema (IV.02). Isto possibilita summarizar o algoritmo como apresentado na Tabela IV.1, sendo que neste caso a base de Ritz vai sendo construída a cada passo e tem, portanto, dimensão variável, ao contrário do método apresentado no capítulo anterior.

SUBESPAÇOS DE KRYLOV

+

GRAM-SCHMIDT

+

RAYLEIGH-RITZ

=

ALGORITMO DE LANCZOS

Tabela IV.1 - Esquema do Algoritmo de Lanczos

O Algoritmo de Lanczos tem tido também uma ampla utilização na resposta de estruturas submetidas a carregamentos variáveis com o tempo, onde os vetores g por ele gerados são utilizados como uma base que possibilita uma transformação de coordenadas na equação diferencial de movimento, já definida em (I.14),

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t) \quad (IV.25)$$

objetivando simplificar sua solução.

Portanto, fazendo-se

$$u = Q_j x \quad (IV.26)$$

e considerando-se

$$f(t) = \sum g(t) \quad (IV.27)$$

o esquema proposto por NOUR-OMID e CLOUGH [18] utiliza as relações (IV.07) e (IV.09) para transformar a equação (IV.25) em

$$\underline{I}_j \ddot{\underline{x}} + (a_0 \underline{I}_j + a_1 \underline{I}_j) \dot{\underline{x}} + \underline{x} = \beta_1 \underline{e}_1 g(t) \quad (IV.28)$$

supondo-se também um amortecimento na forma

$$\underline{C} = a_0 \underline{M} + a_1 \underline{K} \quad (IV.29)$$

A matriz \underline{I}_j é como mostrado em (IV.09), porém de ordem j , e o vetor \underline{e}_1 é o vetor canônico correspondente à primeira coluna da matriz identidade de ordem j . A solução da equação (IV.28) pode ser feita então por algum método de integração no tempo (BATHE [2]) ou por superposição das respostas das equações desacopladas através dos autovetores de \underline{I}_j .

Já o esquema proposto por COUTINHO et alii [19] utiliza os autovetores aproximados

$$\underline{\Phi}_j = \underline{Q}_j \underline{Y} \quad (IV.30)$$

para o desacoplamento das equações expressas em (IV.25), sendo que a matriz \underline{Y} corresponde à solução do problema de autovalor

$$\underline{E}\underline{Y} = \underline{Y}\underline{\Lambda} \quad (IV.31)$$

onde

$$\underline{E} = \underline{Q}_j^T \underline{K} \underline{Q}_j \quad (IV.32)$$

Nota-se que devido à propriedade (IV.07) o problema de autovalor (IV.31) assume uma forma mais simples.

Em ambos os procedimentos apresentados o vetor de partida g_1 é obtido pela solução de

$$\beta_1 g_1 = K^{-1} \bar{f} \quad (\text{IV.33})$$

invocando-se (IV.27).

Tais procedimentos são muito eficientes pois conseguem determinar o número j necessário de vetores na base através da importância de cada um deles na resposta dinâmica, o que possibilita interromper o algoritmo (NOUR-OMID e CLOUGH [18], COUTINHO et alii [19]). Isto significa que os mesmos conseguem filtrar ou aproximar os modos de vibração que são excitados pelo carregamento e que de fato contribuirão para a resposta dinâmica.

Desta forma fica estabelecida a diferença da utilização do Algoritmo de Lanczos voltado para a resposta dinâmica e para a solução do problema de autovalor. Enquanto no primeiro caso a sequência de vetores é truncada de forma a conter a influência do vetor de cargas, e devem ser tomadas sequências diferentes para carregamentos diferentes, no segundo a sequência é continuada de maneira a obter boas aproximações para os autovetores e autovalores reais, que independem do carregamento.

IV.2 - O ALGORITMO DE LANCZOS BÁSICO

A forma mais simples do Algoritmo de Lanczos para a solução do problema de autovalor (IV.02) é dada no Quadro IV.1. O que fica em dúvida é o número j de passos que devem ser feitos. É natural que o mesmo dependa do número de autopares a serem calculados e também da capacidade de armazenamento disponível no equipamento no qual o algoritmo estiver implementado.

O vetor de partida g_1 no passo 1 é tomado arbitrariamente (OJALVO [20]) e somente em alguns poucos casos é que o mesmo será responsável por uma demora na convergência (SCOTT [16]). A convergência do algoritmo depende também da separação dos autovalores e será mais lenta para autovalores múltiplos ou agrupados (PARLETT [3]).

Um aspecto interessante do algoritmo é que tanto os menores quanto os maiores autovalores são aproximados pelo mesmo e não necessariamente de uma forma ordenada. Outro aspecto importante é que a qualidade com a qual os pares de Ritz $(\bar{\lambda}, \bar{q})$, obtidos pelo Algoritmo de Lanczos, aproximam os pares (λ, q) do problema (IV.02) pode ser mensurada sem ser necessário o cálculo dos mesmos. Isto é conseguido através da norma residual (PARLETT [3]).

$$\beta_{ji} = \beta_j |s_{ji}| \quad (\text{IV.34})$$

deduzida no Apêndice B, onde s_{ji} corresponde ao último elemento do autovetor $s_i, i=1, \dots, j$, do problema reduzido, na sétima operação do Quadro IV.1. Portanto, se a norma β_{ji} correspondente ao ve-

QUADRO IV.1 - ALGORITMO DE LANCZOS BÁSICO

1. Fixar $\beta_0 = 0$, $q_0 = 0$, q_1 = arbitrário (tal que $q_1^T M q_1 = 1$)
Para $i=1, \dots, j$ repetir os passos 2 até 6
2. $Kr_i = Mq_i$ (resolver para \bar{r}_i) n.o. = $2Nb+N$
3. $\alpha_i = q_i^T M \bar{r}_i$ n.o. = $2N$
4. $r_i = \bar{r}_i - \beta_{i-1} q_{i-1} - \alpha_i q_i$ n.o. = $2N$
5. $\beta_i = (r_i^T M r_i)^{1/2}$ n.o. = $2N$
6. $q_{i+1} = \frac{1}{\beta_i} r_i$ n.o. = N
7. Resolução do problema de autovalor $TS = \lambda S$
8. Cálculo dos autovetores: $Y = QS$

tor de Ritz

$$\tilde{z}_i = q_j s_i \quad (IV.35)$$

assumir um valor pequeno, o mesmo, juntamente com o respectivo $\tilde{\lambda}_i$, serão uma boa aproximação de um autopar do problema (IV.02). Boas aproximações podem ser obtidas, como se pode notar na expressão (IV.34) independentemente da magnitude de β_j . PARLETT [3] propõe que sejam considerados aceitáveis todos os pares $(\tilde{\lambda}, \tilde{z})$ cujas normas residuais β_{ji} sejam inferiores à norma residual limite

$$\beta_{ji}^{\text{LIM}} = \sqrt{\epsilon} \|T_j\| = \sqrt{\epsilon} \max(\Theta) \quad (IV.36)$$

quando o problema a ser resolvido é semelhante ao problema (IV.01). Como os autovalores da matriz tridiagonal, neste caso, são os reciprocos dos autovalores desejados, o limite

$$\beta_{ji}^{\text{LIM}} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\min(\Theta)} \quad (IV.37)$$

é mais razoável.

A norma residual definida em (IV.34) pode ser concebida intuitivamente se a expressão (IV.35) for expandida como

$$\tilde{z}_i = q_1 s_1 + q_2 s_2 + \dots + q_{j-1} s_{j-1} + q_j s_j \quad (IV.38)$$

onde s_k , $k=1, \dots, j$, denota, para efeito de simplificação, o k -ésimo elemento do vetor s_i . Caso \tilde{z}_i seja uma boa aproximação para um autovetor do problema (IV.02) no passo $j-2$, por exemplo, é na-

tural que os próximos vetores de Lanczos não terão componentes significativas no mesmo e isto se manifesta em valores pequenos para s_{j-1} e s_j .

Os autovalores da matriz tridiagonal (IV.09) podem ser eficientemente determinados pelo Método de Biseção, descrito no Apêndice C, uma vez que, considerando-se

$$p_0(\mu) = 1 \quad (\text{IV.39})$$

tem-se os determinantes

$$p_1(\mu) = |\lambda_1 - \mu| = \lambda_1 - \mu \quad (\text{IV.40})$$

$$p_1(\mu) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \mu & \beta_1 \\ \beta_1 & \lambda_2 - \mu \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \mu)(\lambda_1 - \mu) - \beta_1^2 \quad (\text{IV.42})$$

⋮

$$p_i(\mu) = (\lambda_i - \mu)p_{i-1}(\mu) - \beta_{i-1}^2 p_{i-2}(\mu) \quad (\text{IV.42})$$

o que facilita a aplicação da Sequência de Sturm na solução do problema de autovalor

$$T_j S_j = S_j \Theta \quad (\text{IV.43})$$

no sétimo passo do algoritmo básico. Uma vez obtidos os autovalores, os autovetores da matriz tridiagonal podem ser calculados por meio da Iteração Inversa, à qual é possível aplicar a técnica de "shifts", discutida no Item II.4.

O Algoritmo de Lanczos Básico aplicado à estrutura do Exemplo III.1, em um total de 15 passos, tem seus resultados mostrados no Exemplo IV.1. Nota-se a limitação desta versão simples do algoritmo, refletida na perda de ortogonalidade entre os vetores da base, o que acarretou o aparecimento de cópias indevidas de autovalores e, consequentemente, de autovetores.

Alguns dispositivos possibilitam, entretanto, contornar o problema da perda de ortogonalidade entre os vetores gerados pelo Algoritmo de Lanczos. A proposta apresentada por PARLETT e SCOTT [21] consiste em uma ortogonalização seletiva, que será discutida no próximo capítulo. Por sua vez, OJALVO [20] adota uma reortogonalização total entre os vetores g pela técnica de Gram-Schmidt, de forma semelhante à proposta de PAIGE [12]. JIANG NING e XIANGLIN [22] também utilizam-se de uma reortogonalização total, mas baseados nas características de convergência do algoritmo fazem-na apenas quando estritamente necessário. O esquema seguido por CULLUM e WILLOUGHBY [23] simplesmente ignora a perda de ortogonalidade, mas suplementa o algoritmo com testes baseados na Sequência de Sturm, apresentada no Item II.7, que possibilitam definir se autovalores repetidos são cópias ou se são de fato decorrentes de uma multiplicidade.

Na realidade a perda de ortogonalidade entre os vetores de Lanczos não é catastrófica pois ela é um indício de que pelo menos um dos pares de Ritz ($\bar{\lambda}, \bar{\varphi}$) está convergindo para uma solução do problema (IV.02) (PARLETT [3]).

EXEMPLO IV.1

$$g_1 = .78664E-02 \{ 1 \quad 1 \quad 1 \dots 1 \}^T$$

Número de Passos = 15

As 6 primeiras frequências, em ordem crescente, no 15º passo:

Frequência (rad/s)	Norma
2.099	$\sim 10^{-17}$
2.099	$\sim 10^{-9}$
2.332	$\sim 10^{-15}$
2.332	$\sim 10^{-6}$
2.914	$\sim 10^{-7}$
5.783	$\sim 10^{-16}$

} Cópia

} Cópia

Ortogonalidade entre alguns vetores de Lanczos após 15 passos:

i	$ g_1^T M g_i $	$ g_2^T M g_i $	$ g_3^T M g_i $	$ g_4^T M g_i $	$ g_5^T M g_i $
1	1	-	-	-	-
2	$\sim 10^{-22}$	1	-	-	-
3	$\sim 10^{-21}$	$\sim 10^{-21}$	1	-	-
4	$\sim 10^{-21}$	$\sim 10^{-21}$	$\sim 10^{-22}$	1	-
5	$\sim 10^{-19}$	$\sim 10^{-20}$	$\sim 10^{-19}$	$\sim 10^{-20}$	1
6	$\sim 10^{-18}$	$\sim 10^{-18}$	$\sim 10^{-18}$	$\sim 10^{-18}$	$\sim 10^{-21}$
7	$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{-17}$
8	$\sim 10^{-11}$	$\sim 10^{-10}$	$\sim 10^{-10}$	$\sim 10^{-11}$	$\sim 10^{-13}$
9	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-10}$
10	~ 0.006	~ 0.006	~ 0.008	~ 0.003	$\sim 10^{-3}$
11	~ 0.412	~ 0.457	~ 0.562	~ 0.215	$\sim 10^{-3}$
12	~ 0.288	~ 0.300	~ 0.283	~ 0.102	$\sim 10^{-3}$
13	~ 0.269	~ 0.180	~ 0.285	~ 0.144	$\sim 10^{-3}$
14	~ 0.501	~ 0.325	~ 0.589	~ 0.293	$\sim 10^{-3}$
15	~ 0.003	~ 0.003	~ 0.004	~ 0.010	~ 0.008

Nota-se a perda de ortogonalidade, após o 10º passo, refletida em cópias de autovalores.

IV.3 - O ALGORITMO DE LANCZOS COM ORTOGONALIZAÇÃO SELETIVA

A proposta adotada neste trabalho para evitar o problema da perda de ortogonalidade na sequência de vetores gerados pelo Algoritmo de Lanczos é a sugerida por PARLETT [21], que a utiliza na solução do problema de autovalor

$$Ax = \lambda x \quad (\text{IV.44})$$

sendo A uma matriz simétrica. Tal proposta pode ser perfeitamente estendida à solução do problema de autovalor (IV.02) como o próprio PARLETT [3] e NOUR-OMID et alii [24] o fizeram.

A técnica de ortogonalização seletiva baseia-se fundamentalmente nas seguintes propriedades (PARLETT [3], PARLETT e SCOTT [21]):

– A ortogonalidade entre os vetores $q_i, i=1, \dots, j$, gerados pelo Algoritmo de Lanczos é preservada até que um dos vetores de Ritz comece a convergir.

– Os vetores de Lanczos e os vetores de Ritz que ainda não convergiram têm componentes significantes dos vetores de Ritz que convergiram anteriormente.

Considerando-se então que a expressão (IV.15) possa ser escrita como

$$k^{-1}Mq_j = Q_j T_j + r_j e_j^T - E_j \quad (\text{IV.45})$$

onde $\underline{\epsilon}_j$ é relativo aos erros de truncamento da precisão finita da aritmética, tem-se que após um certo número de passos a propriedade (IV.07) não é mais satisfeita, sendo que é possível escrever

$$\|I_j - \underline{Q}_j^T M \underline{Q}_j\| \leq \kappa_j \quad (\text{IV.46})$$

Assim sendo, após κ_j ter ultrapassado um certo limite deve ser feita uma pausa no algoritmo para que sejam calculados os bons vetores de Ritz. Feito isto, os vetores de Lanczos \underline{g}_{j+1} e \underline{g}_{j+2} deverão ser ortogonalizados contra os mesmos, o que garantirá uma ortogonalidade aceitável até a próxima pausa. É do fato da ortogonalização ser feita apenas em relação aos bons vetores de Ritz, de acordo com as propriedades citadas, que decorre o nome do procedimento.

Um constante monitoramento da ortogonalidade entre os vetores de Ritz que convergiram e o $(j+1)$ -ésimo vetor de Lanczos pode ser feito por meio de um limite τ_{j+1} no produto $|\underline{Q}^T M \underline{g}_{j+1}|$, que indica se os vetores \underline{g}_{j+1} e \underline{g}_{j+2} devem ser ortogonalizados contra o vetor de Ritz \underline{Q} .

Um aspecto extremamente atraente deste procedimento é que os parâmetros de monitoramento κ_j e τ_{j+1} podem ser calculados sem a necessidade do cálculo explícito dos produtos $\underline{Q}_j^T M \underline{Q}_j$ e $\underline{Q}^T M \underline{g}_{j+1}$ como é mostrado nos Apêndices D e E, respectivamente. O valor limite aceitável para tais parâmetros pode ser fixado em $\sqrt{\epsilon'}$ (PARLETT [3], [21]).

O Algoritmo de Lanczos suplementado com a técnica de ortogonalização seletiva encontra-se resumido no Quadro IV.2 e seu funcionamento é mostrado no Exemplo IV.2 para a estrutura utilizada no Exemplo III.1. O número de vetores suficientes, no último passo do algoritmo, é tomado como cerca de 1.5 vezes o número de autovalores e autovetores desejados (OJALVO [20]). Isto significa que o algoritmo é continuado até que tal número de pares de Ritz tenham convergido pois, de acordo com o que foi discutido anteriormente, a convergência não ocorre necessariamente de forma ordenada, o que poderia ocasionar perdas de autovalores e autovetores caso o algoritmo fosse interrompido prematuramente.

O vetor de partida que tem sido utilizado é aquele cujos elementos são tomados como os quocientes dos elementos da matriz de massa, diagonal, pelos elementos correspondentes na matriz de rigidez, ou seja,

$$x_0 = \left\{ \frac{m_{11}}{k_{11}} \quad \frac{m_{22}}{k_{22}} \quad \cdots \quad \frac{m_{nn}}{k_{nn}} \right\}^T \quad (IV.47)$$

com resultados satisfatórios.

Em virtude do Algoritmo de Lanczos **investigar** apenas o Subespaço de Krylov gerado pelo vetor de partida normalizado g_1 , ele não **se**ria capaz de detectar, a princípio, a existência de qualquer autovetor que tivesse projeção nula neste subespaço, como no caso, por exemplo, dos autovetores correspondentes a autovalores múltiplos. Contudo, os erros de truncamento introduzem componentes em todas as direções e tais autovetores, embora com uma convergência mais lenta, podem ser encontrados (PARLETT [3] e PARLETT e SCOTT [21]).

QUADRO IV.2 - ALGORITMO DE LANCZOS COM ORTOGONALIZACAO SELETIVA

-
1. Fixar $q_0 = 0$, r_0 = arbitrário, $\beta_0 = (r_0^T M r_0)^{1/2}$

Para os passos 2 a 10 : $i=1, \dots, \text{número máximo de passos permitido}$

2. Orto. r_{i-1} contra os vetores de Ritz indicados e recalcular β_{i-1}
3. $q_i = \frac{1}{\beta_{i-1}} r_{i-1}$ n.o.=N
4. $K\bar{r}_i = Mq_i$ (resolver para \bar{r}_i) n.o.=2Nb+N
5. $\alpha_i = q_i^T M \bar{r}_i$ n.o.=2N
6. $r_i = \bar{r}_i - \beta_{i-1} q_{i-1} - \alpha_i q_i$ n.o.=2N
7. $\beta_i = (r_i^T M r_i)^{1/2}$ n.o.=2N
8. Atualizar κ
9. Caso $\kappa \leq \sqrt{\epsilon} \rightarrow$ B.2
10. Resolver $TS = S\theta$ e calcular os bons vetores de Ritz.
Se o número de vetores é suficiente pare.

EXEMPLO IV.2

Número de Passos = 12

As 6 primeiras frequências no 12º passo

Frequência (rad/s)	Norma	Passo em que convergiu
2.099	$\sim 10^{-9}$	6º (1ª pausa)
2.332	$\sim 10^{-9}$	6º (1ª pausa)
2.914	$\sim 10^{-7}$	12º (3ª pausa)
5.783	$\sim 10^{-10}$	8º (2ª pausa)
5.847	$\sim 10^{-10}$	8º (2ª pausa)
48.782	$\sim 10^{-9}$	12º (3ª pausa)

Ortogonalidade entre alguns vetores de Lanczos após 12 passos

i	$ g_1^T M g_i $	$ g_2^T M g_i $	$ g_3^T M g_i $	$ g_4^T M g_i $	$ g_5^T M g_i $
1	1	-	-	-	-
2	$\sim 10^{-22}$	1	-	-	-
3	$\sim 10^{-23}$	$\sim 10^{-22}$	1	-	-
4	$\sim 10^{-22}$	$\sim 10^{-22}$	$\sim 10^{-22}$	1	-
5	$\sim 10^{-21}$	$\sim 10^{-20}$	$\sim 10^{-19}$	$\sim 10^{-20}$	1
6	$\sim 10^{-19}$	$\sim 10^{-19}$	$\sim 10^{-18}$	$\sim 10^{-19}$	$\sim 10^{-21}$
7	$\sim 10^{-18}$				
8	$\sim 10^{-16}$	$\sim 10^{-16}$	$\sim 10^{-16}$	$\sim 10^{-16}$	$\sim 10^{-15}$
9	$\sim 10^{-17}$				
10	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-17}$
11	$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{-15}$
12	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-16}$	$\sim 10^{-16}$	$\sim 10^{-15}$

A ortogonalidade entre vetores foi preservada e não há cópias de autovalores. O algoritmo não detectou, entretanto, para o número de passos efetuados, 4 frequências existentes entre 5.847 rad/s e 48.784 rad/s. Tal fato não é raro em problemas que envolvem sistemas com um número reduzido de equações.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo os algoritmos estudados são utilizados na solução do problema de vibrações livres de três modelos de plataformas metálicas para exploração de petróleo no mar. Primeiramente são apresentados os resultados obtidos em uma análise de um modelo simplificado, concebido de maneira a possuir os mesmos mecanismos pertinentes a um modelo real. Em segundo lugar é feita uma análise de um modelo de uma plataforma autoelevatória onde, para efeito de simplificação, o treliçamento das pernas é substituído por elementos de rigidez e inércia equivalentes. Por fim apresentam-se os resultados da análise de uma plataforma metálica estaqueada, projetada para uma lâmina d'água de 170m (MARQUES et alii [27,28]).

As análises foram feitas em um computador Burroughs 6800, com 6 Mbytes de memória principal, do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro. A palavra do referido equipamento possui 48 bits. Os algoritmos foram escritos em linguagem **FORTRAN** e as variáveis reais foram declaradas com precisão dupla. Isto fez com que a precisão da aritmética fosse da ordem de 10^{-22} .

Para efeito de simplificação os algoritmos serão abreviados da seguinte forma

M.I.S.P. = Método de Iteração por Subespaços Padrão

M.I.S.B. = Método de Iteração por Subespaços em Blocos

M.I.S.B.S. = Método de Iteração por Subespaços em Blocos
com Shift

A.L.O.S. = Algoritmo de Lanczos com Ortogonalização Seletiva

V.2 - MODELO SIMPLIFICADO

O Modelo Simplificado analisado corresponde à estrutura discretizada por meio de elementos de pórtico espacial, mostrada na Figura V.1. Tal discretização resultou em 132 graus de liberdade e uma largura de banda média, para a matriz de rigidez \mathbb{K} , igual a 47. A massa do convés e dos equipamentos é simulada através da distribuição de massas concentradas nos nós da mesa do modelo. Um certo número de molas lineares simula a interação entre o solo adjacente e as estacas de fundação.

As 15 primeiras frequências naturais e períodos deste modelo são dados na Tabela V.1.

A Figura V.2 mostra o desempenho dos algoritmos estudados tomando-se como base o tempo de processamento necessário para a determinação de uma série de pares de frequências e modos de vibração. É interessante observar que o A.L.O.S revelou-se o mais eficiente para a determinação de até 10 frequências. A partir daí, o M.I.S.B.S. tornou-se mais eficiente. Tal fato é explicado pela relação existente entre a rigidez e a massa do modelo que determinou um salto para frequências agrupadas, logo após as 6 primeiras frequências, relativamente bem separadas, como mostra a Tabela V.1. Per-

cebe-se que foi a partir deste salto que a convergência do A.L.O.S. começou a ficar mais lenta, de acordo com o exposto no Item IV.3. Como este modelo não envolve uma discretização refinada, tal fenômeno foi decisivo a favor do M.I.S.B.S.

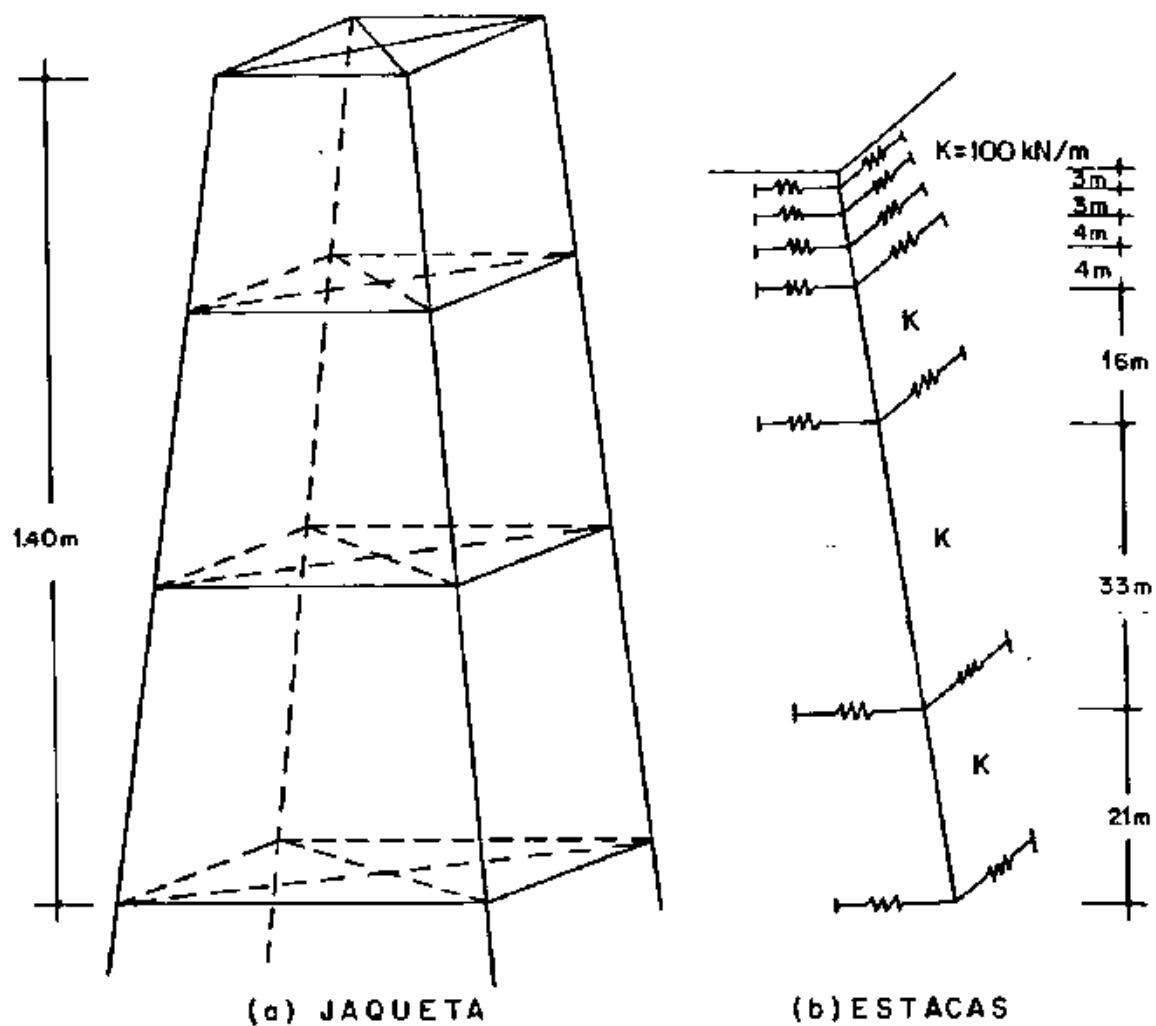


Figura V.1 - Modelo Simplificado

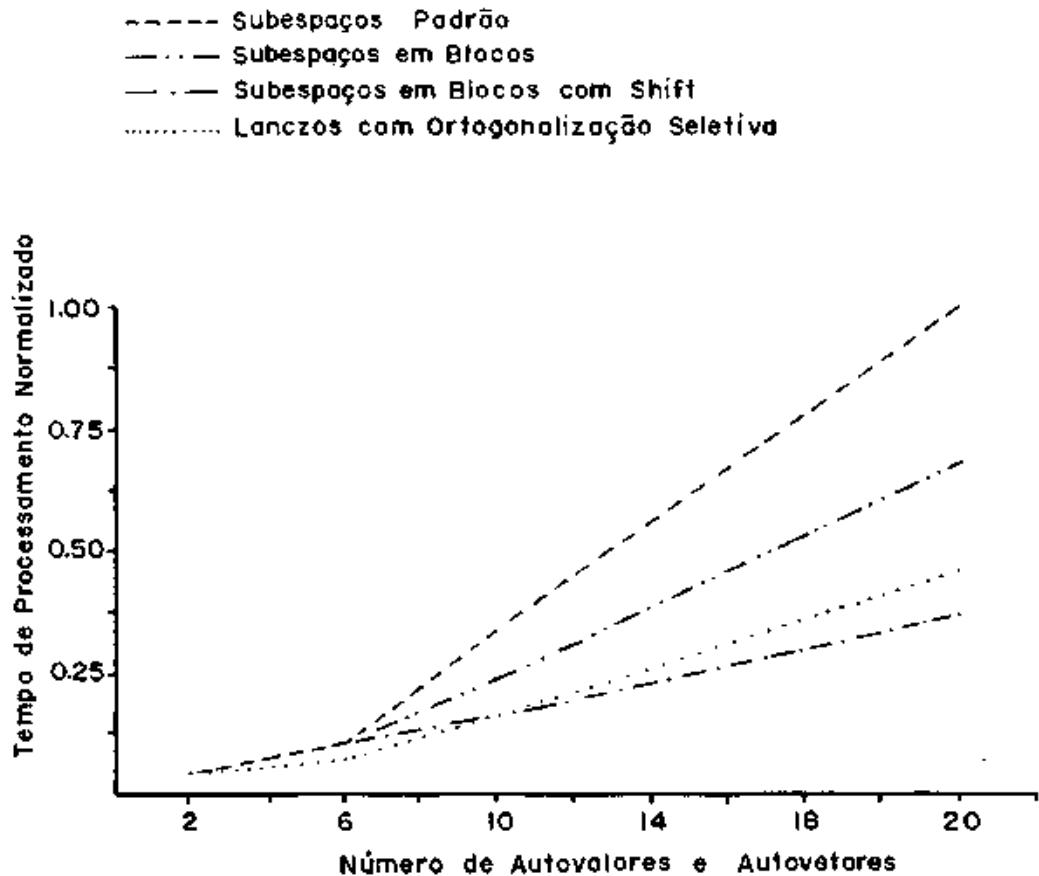


Fig. V.2 – Desempenho dos Algoritmos para o Modelo Simplificado

MODO DE VIBRAÇÃO	ω (rad/s)	T (s)
1	2.614	2.404
2	4.584	1.371
3	5.711	1.100
4	7.201	0.873
5	8.541	0.736
6	8.842	0.711
7	17.859	0.352
8	23.265	0.270
9	26.557	0.237
10	28.995	0.217
11	30.313	0.207
12	35.231	0.178
13	35.979	0.175
14	37.560	0.167
15	38.140	0.165

Tabela V.1 - Frequências Naturais e Períodos do Modelo Simplificado

As versões em bloco do Método de Iteração por Subespaços passaram a ser utilizadas na determinação de um número de frequências superior a 6 pois de outra forma as dimensões dos blocos torna-los-iam inviáveis. Para a determinação de um número de frequências superior a 10 passou-se a utilizar como dimensão dos blocos a raiz quadrada da largura de banda média da matriz de rigidez. Tal dimensão revelou-se ser a mais eficiente, como

mostra a comparação feita na Tabela V.2 para 3 blocagens diferentes, na determinação, por exemplo, das 20 primeiras frequências do modelo simplificado. É importante esclarecer que para todas as blocagens foram utilizadas duas iterações por shift, ou seja, o **default** do algoritmo.

	M.I.S.P. $m=28$	M.I.S.B.S.		
		$m=11$	$m=8$	$m=6$
Número teórico de operações	1.2×10^7	9.6×10^6	6.8×10^6	5.5×10^6
Tempo de processamento normalizado	1.00	0.69	0.51	0.37
Número de iterações	14	35	32	33
Número de blocos	-	2	3	4

Tabela V.2 - Iteração por Subespaços: M.I.S.P. x M.I.S.B.S.

Com respeito ao A.L.O.S. verificou-se que a convergência dos autovalores ocorreu praticamente de forma ordenada e que neste caso, para um número de autovalores a serem determinados maior do que 10, o número suficiente de bons vetores de Ritz poderia ter sido tomado menor do que o valor costumeiro. A Tabela V.3 contém algumas informações sobre o A.L.O.S. na determinação de 2, 6, 10 e 20 frequências. Observa-se, neste último caso, que o número elevado de pausas realizadas se deve à característica de distribuição das frequências, mostrada na Tabela V.1. Para es-

te modelo reduzido fixou-se em 40 o número máximo de passos permitido no A.L.O.S. O menor valor de β_i foi detectado no 30º passo, correspondendo a $.76496 \times 10^{-4}$. Em virtude dos menores autoválues convergirem mais rapidamente é de se esperar que os mesmos possuam normas residuais menores e sejam, consequentemente, mais precisos.

NÚMERO DE FREQUÊNCIAS	NÚMERO DE PASSOS	NÚMERO DE PAUSAS	NORMA RESIDUAL	
			Mínima	Máxima
2	12	3	.35146E-10	.36500E-09
6	19	6	.35146E-10	.52086E-07
10	29	11	.35146E-10	.10315E-06
20	40	17	.35146E-10	.17173E-05

Tabela V.3 - Informações sobre o A.L.O.S.

V.3 - MODELO REAL DE PLATAFORMA ALTOELEVATÓRIA

Esse tipo de plataforma, cuja discretização pode ser vista na Figura V.3, é utilizada para prospecção e perfuração em lâminas d'água que não ultrapassem 100 metros. O modelo aqui utilizado foi discretizado em 90 nós, com 96 elementos finitos de pórtico espacial, resultando em 531 graus de liberdade e uma largura de banda média para a matriz de rigidez igual a 203. As análises foram feitas com o convés da plataforma em sua posição mais alta.

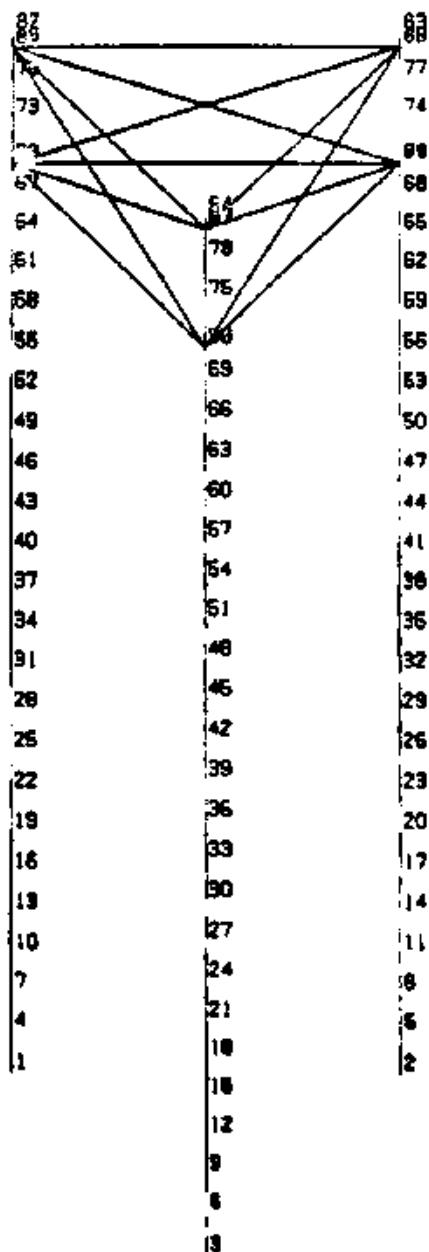


Figura V.3 - Discretização do Modelo de Plataforma Autoelevatória

As 20 primeiras frequências deste modelo são dadas na Tabela V.4. É interessante notar o aparecimento de frequências múltiplas e agrupadas. Cada uma das frequências repetidas corresponde a uma das pernas da plataforma, ou seja, a modos de vibração localizados.

O desempenho dos algoritmos estudados pode ser visto na Figura V.4. Tomando-se como base os resultados do modelo anterior, nesta e na próxima aplicação utiliza-se apenas a versão com "shift" do M.I.S.B.

É importante destacar-se o comportamento atípico do M.I.S.B.S. para este modelo. A explicação para tal fenômeno é encontrada na forma do espectro de frequências do mesmo. Como os resultados colhidos correspondem à utilização de dois blocos, nota-se que os melhores foram obtidos quando os agrupamentos de frequências foram calculados em blocos distintos. Verificou-se também que as frequências repetidas mais altas convergiram lentamente e que, para alguns "shifts" aplicados após um agrupamento ter convergido, uma certa perturbação nos autovalores do mesmo refletiu-se em um ligeiro aumento dos erros relativos.

Os resultados obtidos para o A.L.O.S. não apresentaram problemas para a determinação de até 4 frequências. Para um número maior de frequências verificou-se que a multiplicidade dos mesmos não era detectada de imediato. Verificou-se, por exemplo, que as frequências correspondentes a 11.230 rad/s convergiram no 17º, no 23º e no 27º passos do algoritmo, sendo que frequências mais altas convergiram antes dela, como uma frequência correspondente a 133.95 rad/s, que convergiu no 15º passo. Este comporta-

MODO DE VIBRAÇÃO	ω (rad/s)	T (s)
1	0.546	11.503
2	0.698	8.992
3	5.245	1.198
4	11.204	0.561
5	11.230	0.560
6	11.230	0.560
7	11.230	0.560
8	11.574	0.543
9	12.312	0.510
10	16.176	0.388
11	16.602	0.378
12	28.747	0.219
13	28.747	0.219
14	28.747	0.219
15	28.914	0.217
16	29.016	0.216
17	29.485	0.213
18	46.513	0.135
19	46.513	0.135
20	46.513	0.135

Tabela V.4 - Frequências Naturais e Periodos do Modelo de Plataforma Autoelevatória.

mento já era esperado, de acordo com o exposto no Item IV.3, mas pode ser contornado de algumas maneiras. A primeira possibilidade é permitir que seja feito um número maior de passos, estabele cendo-se uma quantidade maior de bons pares de Ritz necessários.

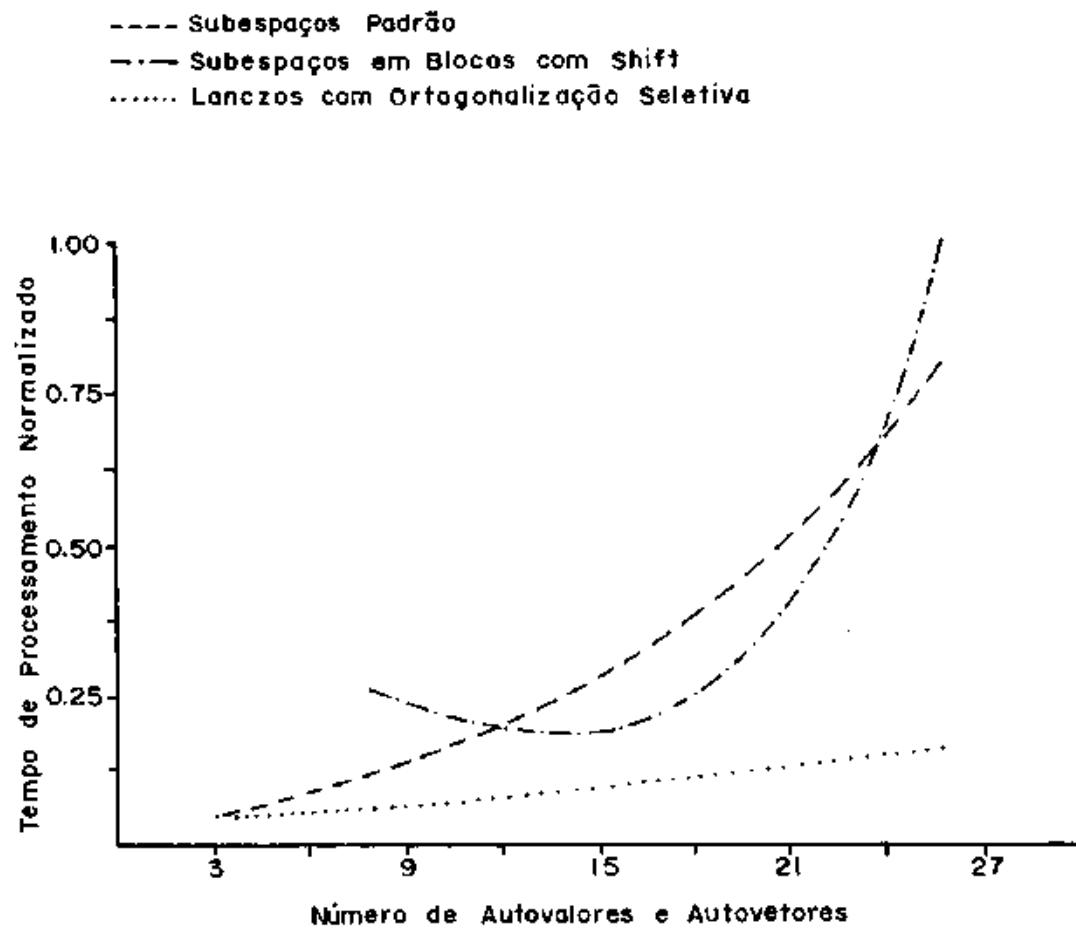


Fig. V.4 — Desempenho dos Algoritmos para o Modelo de Plataforma Altoelevatória

Uma segunda possibilidade, mais elegante, consiste em se utilizar o A.L.O.S. em blocos, ortogonais entre si, simultaneamente (PARLETT [3]). É natural que o número de operações necessárias resultaria aumentado, mas não significativamente porque o número de passos em cada bloco seria reduzido, uma vez que ocorreria convergência para autovetores diferentes em todos os blocos utilizados. Esta proposta é reforçada ainda mais quando se considera que foram necessários 40 passos do algoritmo, o máximo permitido no caso, para que 25 frequências convergissem, e que a frequência de 46.513 rad/s não foi detectada. O número de frequências que convergiram corresponde aos bons pares de Ritz que o algoritmo havia detectado, para os quais foram necessários 19 pausas.

As Figuras V.5 a V.8 mostram as interessantes configurações dos 4 primeiros modos de vibração do modelo de plataforma autoelevatória analisado.

V.3 - MODELO REAL DE UMA PLATAFORMA CONVENCIONAL

Os procedimentos já discutidos anteriormente foram também utilizados na análise de uma jaqueta metálica convencional, similar às plataformas encontradas na Bacia de Campos, a principal área de produção de petróleo da costa brasileira. A Figura V.9 apresenta uma perspectiva da discretização da jaqueta, em um total de 437 nós e 1097 elementos de pórtico espacial, resultando em 2463 graus de liberdade e uma largura de banda média para a matriz de rigidez igual a 689. A Tabela V.5 apresenta as 20 primeiras frequências naturais desta plataforma.

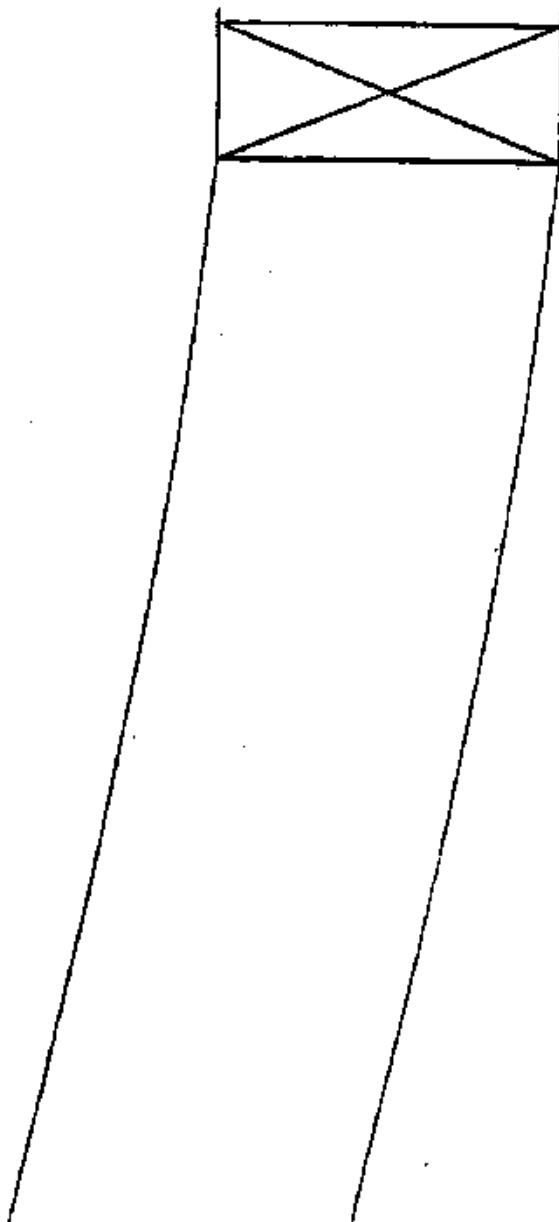


Figura V.5 - 1º Modo de Vibração ($\omega = 0.546$ rad/s)

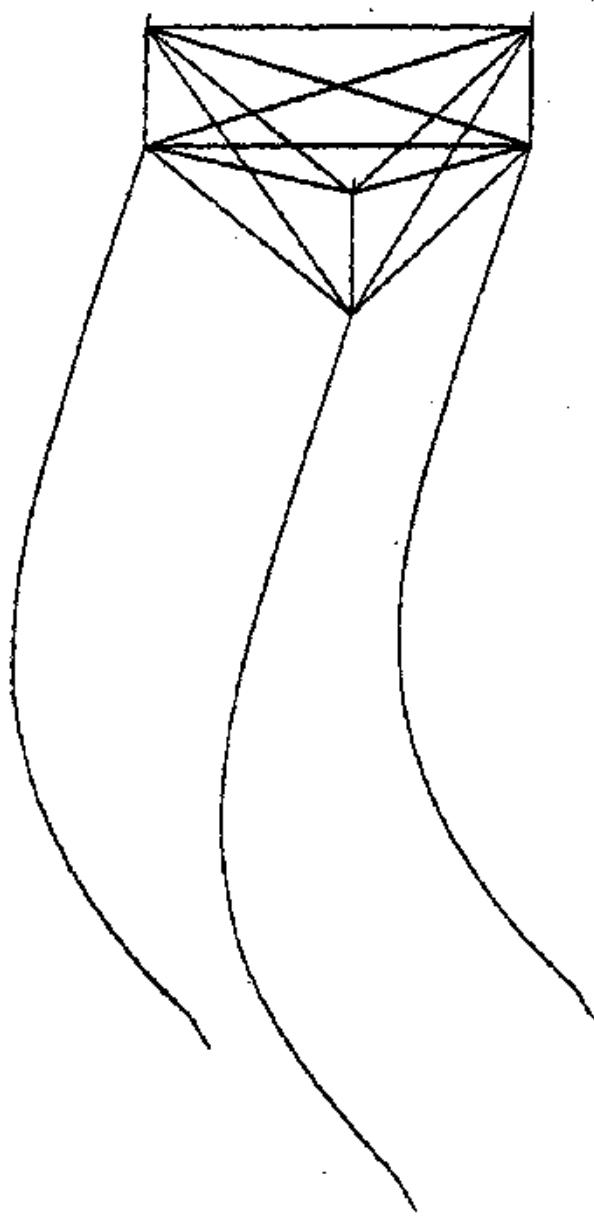


Figura V.6 - 2º Modo de Vibração ($\omega = 0.698$ rad/s)

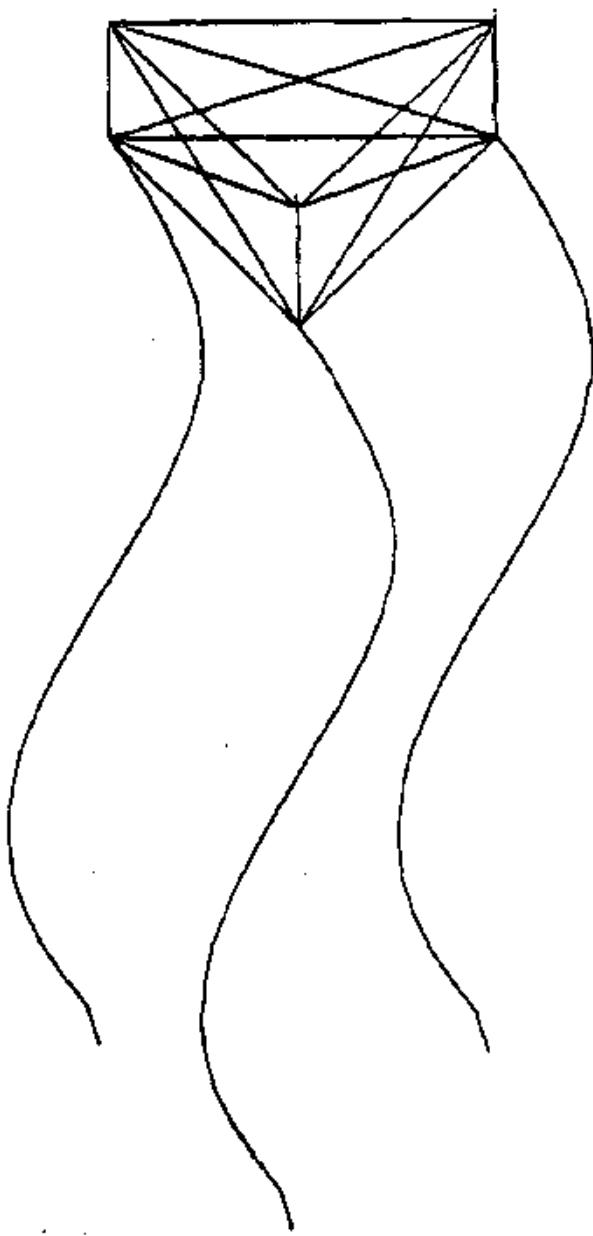


Figura V.7 - 3º Modo de Vibração ($\omega = 5.245$ rad/s)

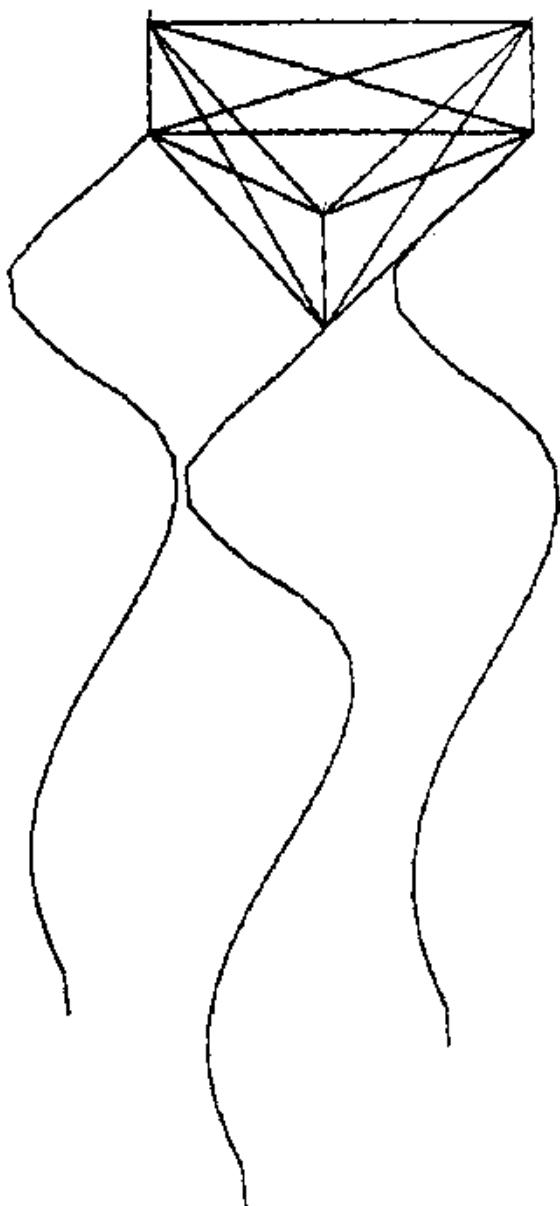


Figura V.8 - 4º Modo de Vibração ($\omega = 11.204$ rad/s)

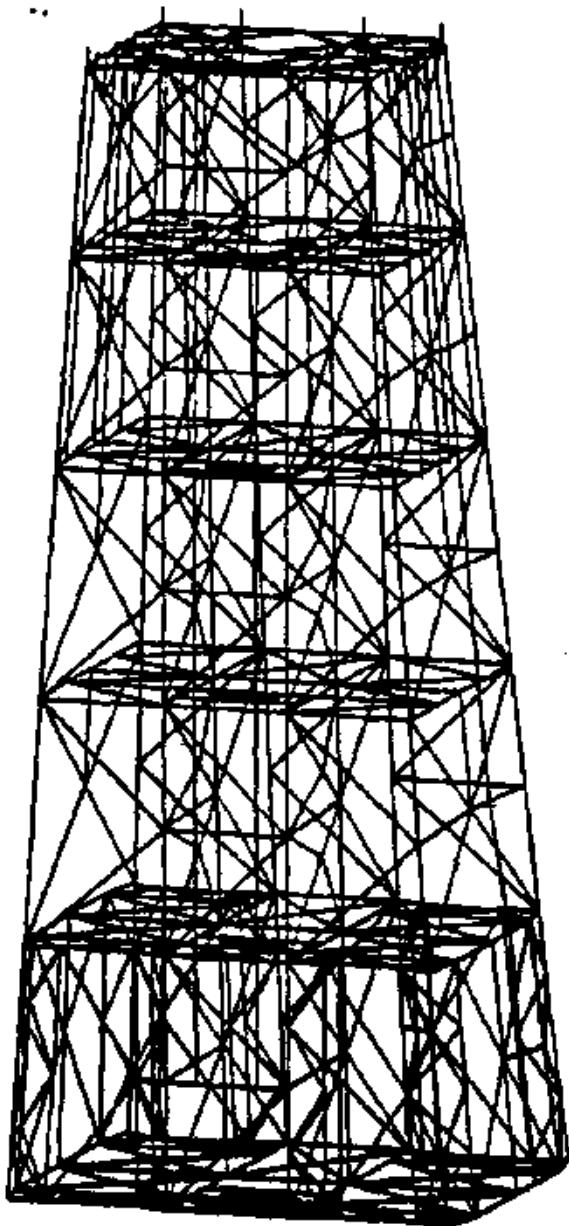


Figura V.9 - Discretização da Jaqueta Metálica

MODO DE VIBRAÇÃO	ω (rad/s)	T (s)
1	1.714	3.666
2	1.860	3.378
3	3.106	2.023
4	3.197	1.965
5	3.510	1.790
6	4.894	1.284
7	4.941	1.272
8	5.300	1.186
9	5.316	1.182
10	6.292	0.999
11	6.308	0.996
12	6.514	0.965
13	6.985	0.899
14	7.072	0.888
15	7.307	0.860
16	7.456	0.842
17	7.544	0.833
18	7.931	0.792
19	8.225	0.764
20	8.339	0.753

Tabela V.5 - Frequências Naturais e Períodos da Plataforma Convencional

O desempenho dos algoritmos estudados pode ser visto na Figura V.10.

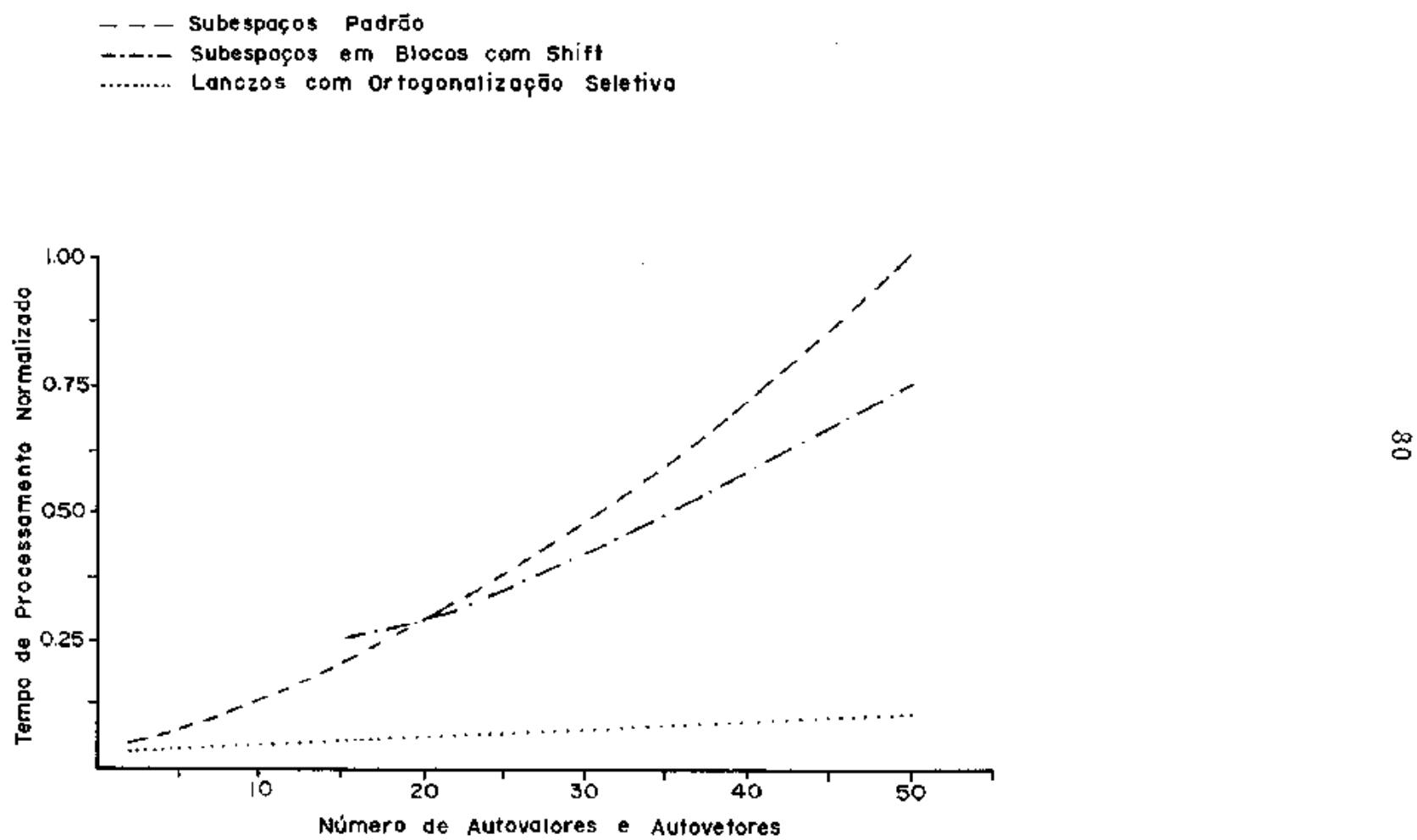


Fig. V.10 – Desempenho dos Algoritmos para a Jaqueta Metólica

É interessante notar que nesta aplicação, assim como na primeira, a determinação dos autovalores pelo M.I.S.B.S. passou a ser mais eficiente do que o M.I.S.P. para um número de autovalores maior do que a raiz quadrada da largura de banda da matriz de rigidez. Para se ter idéia do desempenho dos dois métodos, na determinação das 50 primeiras frequências do modelo, o M.I.S.P., com um subespaço de dimensão 58, necessitou de 29 iterações, o que corresponde a 1682 resoluções do sistema de equações. Já o M.I.S.B.S., com dois blocos de dimensão 26, considerada ideal, necessitou de 40 iterações, ou seja, 1040 resoluções, sendo que foram necessários 8 "shifts", feitos a cada 6 iterações, cujas decomposições da matriz de rigidez representaram 26,3% do tempo total de processamento da análise.

O A.L.O.S. por sua vez tem, nesta aplicação, uma distribuição de frequência ideal, não sendo verificados os problemas das aplicações anteriores. Para este tipo de estrutura o A.L.O.S. praticamente não necessita de aperfeiçoamentos e é importante que ele seja comparado com o M.I.S.P. Considerando-se, por exemplo, a determinação das 5 primeiras frequências e modos de vibração deste modelo, o M.I.S.P., com um subespaço de dimensão 10, realizou-a em 11 iterações, ou seja, foram necessárias 110 resoluções do sistema de equações, enquanto que o A.L.O.S. necessitou de 29 passos e, consequentemente, o mesmo número de resoluções do sistema de equações. Desconsiderando-se os tempos de processamento necessários para montagem de matrizes de elementos, matrizes globais e decomposição da matriz de rigidez, o A.L.O.S. requereu 37.1% do tempo total de análise, enquanto que o M.I.S.P. 66.6%. Embora no A.L.O.S. não se possa desprezar o número de operações necessárias para o cálculo de α_i, β_i , ortogonalização seletiva e

da solução do problema de autovalor da matriz tridiagonal, quando das pausas, ele é ainda menor do que para a obtenção das matrizes projetadas, resolução do sistema de autovalor reduzido pelo Método de Jacobi e para a obtenção de uma melhor aproximação dos autovetores, no caso do M.I.S.P.

Com respeito à precisão do A.L.O.S., verificou-se que na determinação das 15 primeiras frequências, por exemplo, a menor norma residual foi da ordem de .15074E-10, enquanto que a maior da ordem de .55824E-06.

A título ilustrativo, as Figuras V.11 a V.13 mostram as configurações dos 3 primeiros modos de vibração, globais. As Figuras V.14 a V.16 mostram o 7º, o 8º e o 9º modos de vibração, localizados, modos de vibração de painéis.

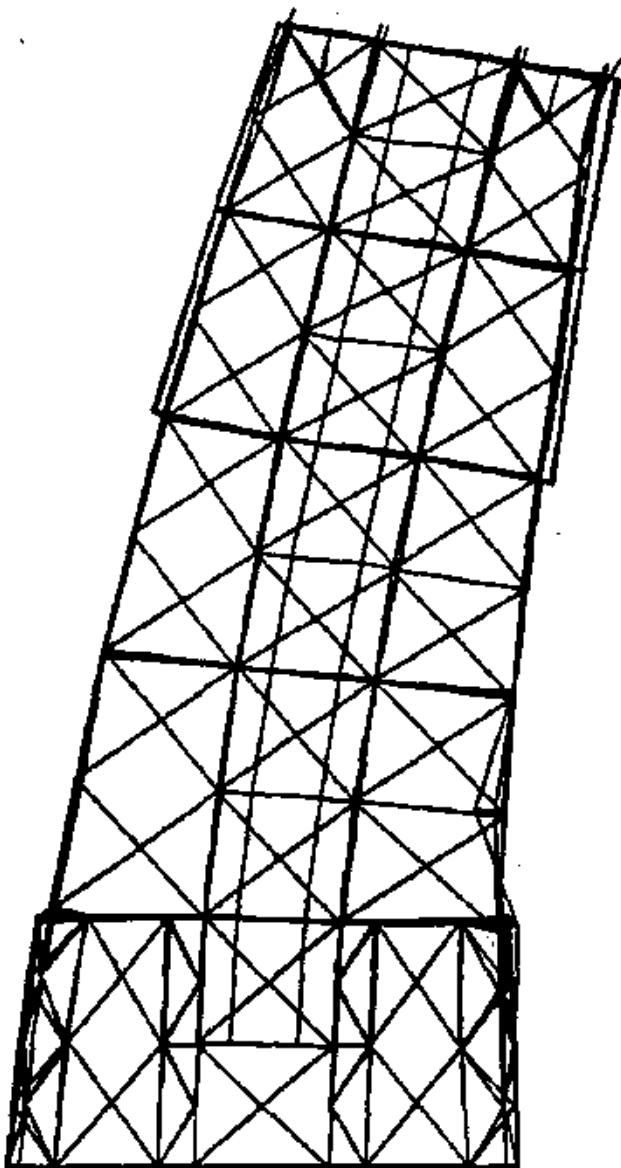


Figura V.11 - 19 Modo de Vibração ($\omega = 1.714$ rad/s)
Modo de Flexão

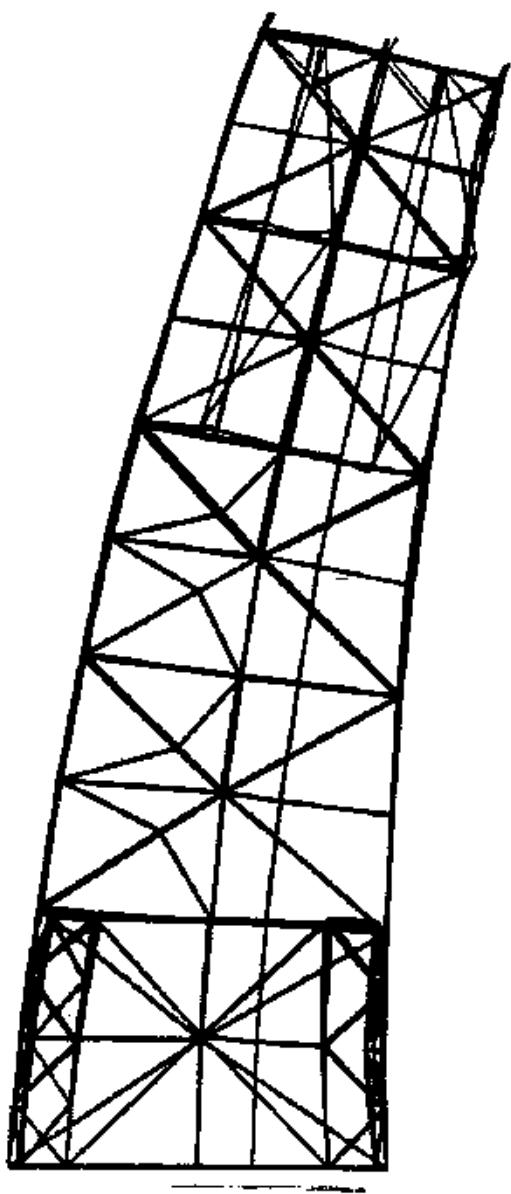


Figura V.12 - 2º Modo de Vibração ($\omega = 1.860$ rad/s)
Modo de Flexão

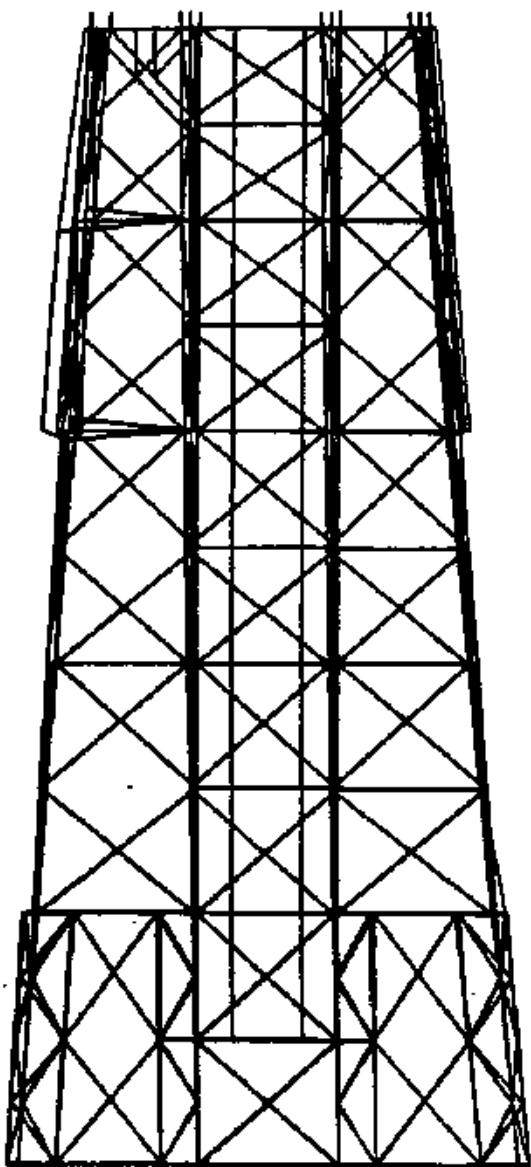


Figura V.13 - 3º Modo de Vibração ($\omega = 3.106$ rad/s)

Modo de Torção

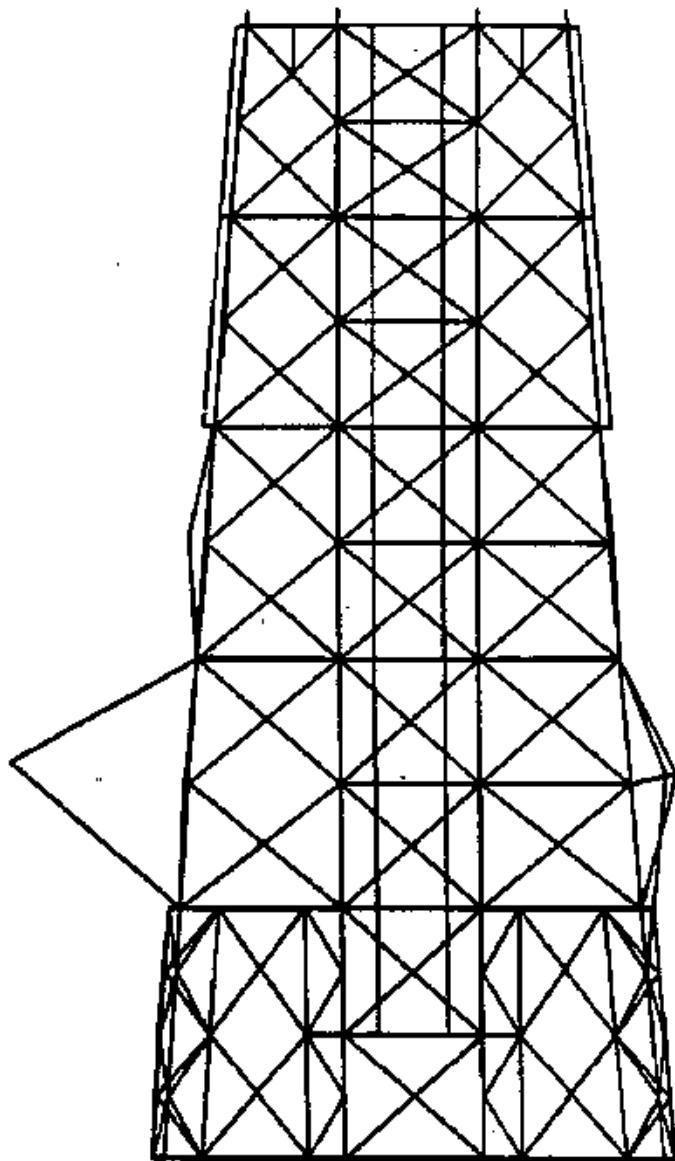


Figura V.14 - 7º Modo de Vibração ($\omega = 4.941$ rad/s)

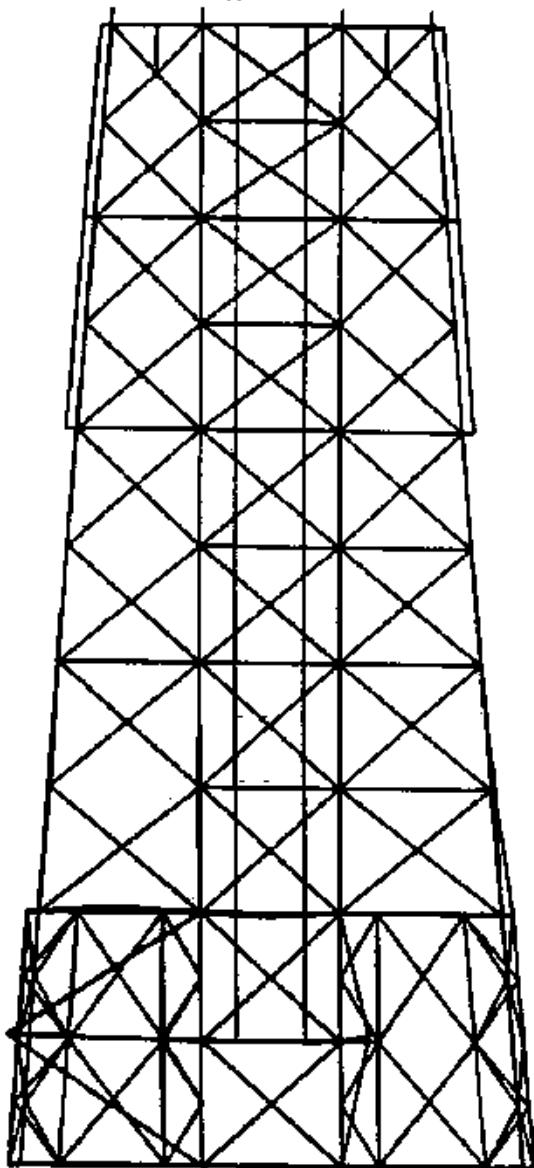


Figura V.15 - 8º Modo de Vibração ($\omega = 5.300$ rad/s)

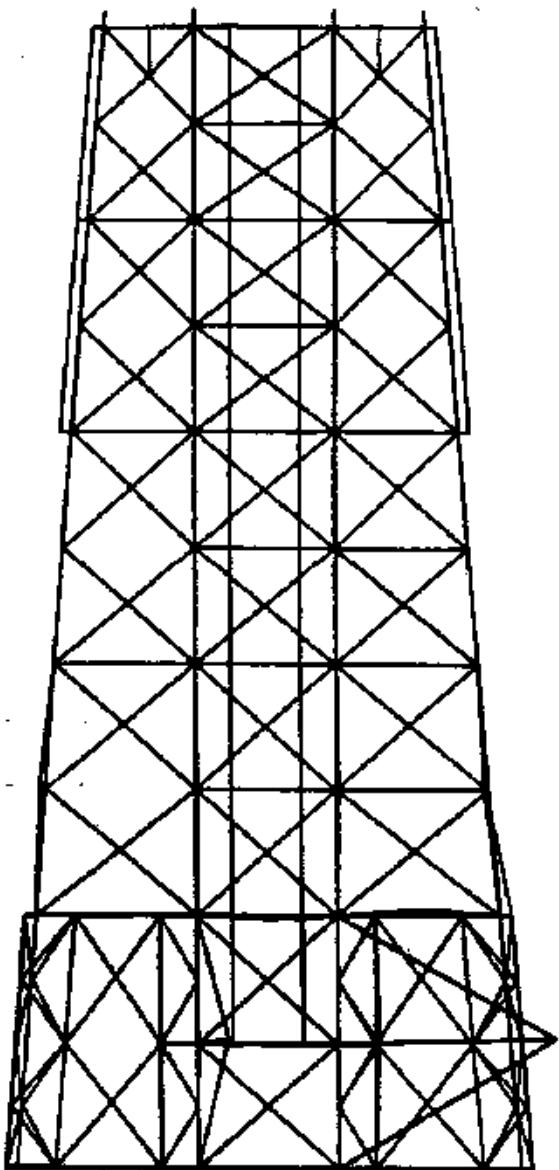


Figura V.16 - 9º Modo de Vibração ($\omega = 5.316 \text{ rad/s}$)

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

A solução de problemas de autovalor reveste-se de especial importância em Análise Estrutural Dinâmica, pois as frequências naturais e modos de vibração contêm uma série de informações que estão intimamente associadas às propriedades de inércia e rigidez das estruturas. Estas soluções, entretanto, requerem um grande esforço computacional e os algoritmos e métodos que as viabilizam devem ser os mais eficientes possíveis. Tal exigência é ainda mais rigorosa quando é necessária a consideração das sofisticações introduzidas nas análises e nas próprias estruturas.

Este trabalho se propôs então, a realizar uma avaliação criteriosa de algumas versões de técnicas conhecidas de solução do problema de autovalor, procurando definir qual o mais indicado quando as estruturas analisadas são de grandes dimensões e envolvem, consequentemente, um grande número de equações, fato comum às estruturas de plataformas marítimas de prospecção, exploração e produção de petróleo.

Desta forma, discutiu-se em primeiro lugar duas versões do Método de Iteração por Subespaços. A primeira consiste da utilização do referido método em blocos, onde as frequências e modos de vibração são calculados em grupos, não simultâneos. Tal dispositivo objetiva obter frequências mais ou menos com a mesma precisão e com economia de operações, uma vez que os blocos, ou subespaços, podem ser tomados com dimensões menores do

que a versão tradicional do método. A segunda versão utiliza também uma técnica de blocagem e inclui a utilização de um acelerador de convergência do tipo translação de origem, ou "shift". Como, para cada "shift", deve ser feita uma nova fatoração da matriz de rigidez, poderia parecer, a princípio, que esta versão é desvantajosa em relação à anterior. Entretanto, não é o que se verifica, pois o "shift" é capaz de aumentar significativamente a velocidade de convergência do método. Os testes efetuados revelaram que tal dispositivo se torna atraente quando o número de frequências e modos de vibração a serem determinados é relativamente grande, superior à raiz quadrada da largura de banda média da matriz de rigidez. Este valor corresponde também, à dimensão do subespaço considerada ideal, ou seja, à dimensão na qual a convergência dos autovalores ocorreria com um menor número de operações. Se bem que o número de iterações a serem feitas para cada "shift" possa ser fixado arbitrariamente, o número que se revelou mais eficiente é o que iguala as operações do processo iterativo com aquelas necessárias à fatoração da matriz de rigidez.

Portanto, o Método de Iteração por Subespaços em Blocos torna-se mais eficiente quando suplementado com um acelerador de convergência. Tal técnica é recomendável principalmente para estruturas que não apresentem agrupamentos de frequências, ou **clusters**, acentuados com multiplicidades de autovalores. Com respeito aos gastos computacionais, apenas o tempo de acesso à memória auxiliar é ligeiramente maior, uma vez que a matriz de rigidez e os autovetores convergidos estão, geralmente, lá armazenados, e a cada novo "shift" ou iteração, respectivamente, devem ser chamados à memória principal.

Por sua vez, o Algoritmo de Lanczos, discutido em segundo lugar, é um procedimento elegante e simples, sendo que a única operação dispendiosa no mesmo é relativa à fatoração da matriz de rigidez. Contudo, verificou-se que o mesmo deve ser complementado com algum mecanismo que possibilite a preservação da ortogonalidade entre os vetores por ele gerados. A omissão desta precaução se reflete na determinação de cópias indevidas de autovalores e autovetores. A solução adotada, que torna o algoritmo aplicável a uma série de problemas, consiste de uma ortogonalização seletiva, na qual se faz um monitoramento da perda de ortogonalidade. Este monitoramento possibilita também que as pausas, para a solução do problema de autovalor reduzido, da matriz tridiagonal, sejam feitas apenas quando necessário.

A versão implementada do Algoritmo de Lanczos com Orthogonalização Seletiva mostrou-se extremamente eficiente quando aplicada aos modelos reais de jaquetas metálicas. Para que o algoritmo seja utilizado com igual eficiência em problemas onde existam autovalores repetidos, como é o caso das plataformas autoelativórias, onde a convergência é mais lenta, sugere-se uma implementação do mesmo em blocos simultâneos, ortogonais entre si. Um esquema de reinicializações também é conveniente quando um grande número de frequências for requerido, para que seja possível trabalhar com matrizes tridiagonais de ordem não muito grandes, embora neste caso sempre sejam perdidas informações. Deve-se ressaltar por fim, que o algoritmo se utiliza basicamente de três vetores e que, devido a isto, a matriz de rigidez fatorada pode ser praticamente mantida em memória principal. O tempo de acesso à memória auxiliar seria então, quase que relativo ao armazenamento e recuperação dos vetores de Lanczos e dos bons vetores de

Ritz.

Além disso, uma outra possibilidade de aplicação do Algoritmo de Lanczos diz respeito à sua utilização na determinação de autovalores situados em um intervalo especificado, conforme proposto por ERICSSON e RUHE [25], através da utilização da técnica de "shifts".

Os próprios vetores de Lanczos podem ser utilizados como vetores de partida para os processos iterativos por subespaços (BATHÉ e RAMASWAMY [8], WILSON e ITOH [10]). Supõe-se uma convergência mais rápida neste caso, pois tais vetores geram uma base para um Subespaço de Krylov, que desfruta, por sua vez, da propriedade de aproximar autovalores e autovetores satisfatoriamente.

Ultimamente, uma série de trabalhos tem trazido novamente à tona a utilização de algoritmos iterativos para a solução de sistemas de equações lineares, como o próprio Algoritmo de Lanczos (PARLETT [28], COUTINHO et alii [29]). Baseados em tal fato, NGUYEN e ARORA [30] propõem a utilização do Método de Iteração por Subespaços associado ao Método dos Gradientes Conjugados (HAGEMAN e YOUNG [31], AXELLSON e BARKER [32]), sendo vislumbrada a possibilidade de se adotar uma técnica de "shifts" também neste caso. Procurando-se então, seguir um raciocínio semelhante, sugere-se por fim, a elaboração de um procedimento que utilize dois Algoritmos de Lanczos em conjunto, tanto para a solução do sistema de equações lineares, a cada passo, quanto para a solução do problema de autovalor generalizado, conforme exposto neste trabalho.

APÊNDICE A

A CONVERGÊNCIA NA ITERAÇÃO INVERSA

Supondo-se que o vetor de partida possa ser escrito como uma combinação linear dos autovetores

$$\underline{x}_1 = \sum_{k=1}^n \delta_k \underline{\phi}_k = \underline{\Phi} \underline{\delta} \quad (A.01)$$

$$\delta_1 \neq 0 \quad (A.02)$$

Tem-se, na Iteração Inversa

$$\text{para } i = 1 : \underline{x}_2 = \underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M} \underline{x}_1 \quad (A.03)$$

$$\underline{x}_2 = \frac{\underline{x}_2}{(\underline{x}_2^T \underline{M} \underline{x}_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M} \underline{x}_1}{[(\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M} \underline{x}_1)^T \underline{M} (\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M} \underline{x}_1)]^{\frac{1}{2}}} \quad (A.04)$$

$$\text{para } i = 2 : \underline{x}_3 = \underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M} \underline{x}_2 = \frac{(\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M})^2 \underline{x}_1}{[(\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M} \underline{x}_1)^T \underline{M} (\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M} \underline{x}_1)]^{\frac{1}{2}}} \quad (A.05)$$

$$\underline{x}_3 = \frac{\underline{x}_3}{(\underline{x}_3^T \underline{M} \underline{x}_3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M})^2 \underline{x}_1}{[((\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M})^2 \underline{x}_1)^T \underline{M} ((\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{M})^2 \underline{x}_1)]^{\frac{1}{2}}} \quad (A.06)$$

$$\text{para } i = j : \underline{x}_{j+1} = \frac{(\underline{\mathbb{L}}^{-1} \underline{\mathbb{M}})^j \underline{x}_1}{[((\underline{\mathbb{L}}^{-1} \underline{\mathbb{M}})^j \underline{x}_1)^T \underline{\mathbb{M}} ((\underline{\mathbb{L}}^{-1} \underline{\mathbb{M}})^j \underline{x}_1)]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.07})$$

Por intermédio das expressões (I.08) e (I.12) tem-se

$$\underline{\mathbb{L}}^{-1} \underline{\mathbb{M}} = \underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-1} \underline{\Phi}^{-1}$$

$$(\underline{\mathbb{L}}^{-1} \underline{\mathbb{M}})^2 = (\underline{\mathbb{L}}^{-1} \underline{\mathbb{M}})(\underline{\mathbb{L}}^{-1} \underline{\mathbb{M}}) = \underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-1} \underline{\Phi}^{-1} \underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-1} \underline{\Phi}^{-1} = \underline{\Phi} (\underline{\Lambda}^{-1})^2 \underline{\Phi}^{-1} \quad (\text{A.09})$$

⋮
⋮
⋮

$$(\underline{\mathbb{L}}^{-1} \underline{\mathbb{M}})^j = \underline{\Phi} (\underline{\Lambda}^{-1})^j \underline{\Phi}^{-1} \quad (\text{A.10})$$

Substituindo-se as expressões (A.01) e (A.10) em (A.07) e sendo $\underline{\Lambda}$ uma matriz diagonal (expressão (I.10))

$$\begin{aligned} \underline{x}_{j+1} &= \frac{\underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-j} \underline{\Phi}^{-1} \underline{\Phi} \underline{\Lambda} \delta}{[(\underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-j} \underline{\Phi}^{-1} \underline{\Phi} \delta)^T \underline{\mathbb{M}} (\underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-j} \underline{\Phi}^{-1} \underline{\Phi} \delta)]^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{\underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-j} \delta}{(\delta^T \underline{\Lambda}^{-j} \underline{\Phi}^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-j} \delta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-j} \delta}{(\delta^T \underline{\Lambda}^{-2j} \delta)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{\delta_1 \phi_1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^j \delta_k \phi_k}{[\delta_1^2 + \sum_{k=2}^n \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^j \delta_k\right)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

Assumindo-se $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots < \lambda_n$, para $j \rightarrow \infty$ o quociente $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^j$, na expressão (A.11), será desprezível, o que propor-

cionala

$$\tilde{x}_{j+1} \approx \frac{\delta_1 \varphi_1}{(\delta_1^2)^{\frac{1}{2}}} = \varphi_1 \quad (A.12)$$

confirmando-se a convergência de \tilde{x}_{j+1} para φ_1 .

Caso exista multiplicidade de autovalores, $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m < \lambda_{m+1} \dots < \lambda_n$, a convergência se dará para o autovetor correspondente a um dos m autovalores repetidos que tenha maior participação no vetor de partida, ou seja, o valor máximo de $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$.

A taxa de convergência para φ_1 pode ser mensurada através do limite (BATHE [2]).

$$r_{\varphi} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\tilde{x}_{j+1} - \varphi_1\|}{\|\tilde{x}_j - \varphi_1\|} \quad (A.13)$$

sendo $\|\cdot\|$ a norma euclidiana.

Por meio de (A.11), desprezando-se os termos de ordem superior no denominador

$$\tilde{x}_{j+1} \approx \varphi_1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^j \varphi_2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^j \varphi_n \quad (A.14)$$

e

$$\tilde{x}_j \approx \varphi_1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{j-1} \varphi_2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{j-1} \varphi_n \quad (A.15)$$

Então

$$\begin{aligned}
 r_{\varrho} &\approx \frac{\left\| \frac{\delta_2}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^j \varrho_2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^j \varrho_n \right\|}{\left\| \frac{\delta_2}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{j-1} \varrho_2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^{j-1} \varrho_n \right\|} = \\
 &= \frac{\sqrt{\left[\frac{\delta_2}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^j \right]^2 + \dots + \left[\frac{\delta_n}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^j \right]^2}}{\sqrt{\left[\frac{\delta_2}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{j-1} \right]^2 + \dots + \left[\frac{\delta_n}{\delta_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^{j-1} \right]^2}} \approx \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^j \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1-j} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (A.16)
 \end{aligned}$$

uma vez que, como anteriormente, para $j \rightarrow \infty$ o quociente $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \right)^j$, $k \neq 2$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots < \lambda_n$, será desprezível.

Para autovalores múltiplos $0 < \lambda_1 = \lambda_2 \dots = \lambda_m$, $m < n$, a taxa de convergência é dada por

$$r_{\varrho} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} \quad (A.17)$$

Por sua vez, a taxa de convergência para λ_1 é avaliada por (BATHE [2])

$$r_{\lambda} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\rho(\tilde{x}_{j+1}) - \lambda_1}{\rho(\tilde{x}_j) - \lambda_1} \right| \quad (A.18)$$

onde $\rho(x_{j+1})$ é o Quociente de Rayleigh definido como

$$\rho(x_{j+1}) = \frac{x_{j+1}^T x_j}{x_{j+1}^T x_{j+1}} \quad (A.19)$$

Substituindo-se as expressões (A.14) e (A.15) em (A.19)

$$\rho(x_{j+1}) \approx \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2j-1}}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2j}} = \lambda_1 \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2j-1}}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^2 \frac{\lambda_1^{2j+1}}{\lambda_k^{2j}}} \quad (A.20)$$

e, da mesma forma

$$\rho(x_j) \approx \lambda \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)^{2j-3}}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^2 \frac{\lambda_1^{2j-1}}{\lambda_k^{2j-2}}} \quad (A.21)$$

Então, substituindo-se as expressões (A.20) e (A.21) em (A.18) e desprezando-se os termos de ordem superior

$$r_\lambda \approx \frac{\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-1} - \lambda_1 \right]}{\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-3} - \frac{\lambda_1^{-1}}{\lambda_2^2} \right]} = \frac{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}}{\frac{\lambda_2^3}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 \quad (A.22)$$

Para autovalores múltiplos, $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$, $m < n$, a taxa de convergência é dada por

$$r_\lambda = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} \right)^2 \quad (A.23)$$

Os resultados expressos em (A.16) e (A.22) permitem concluir que a convergência é mais rápida para o autovalor e será tanto mais rápida quanto maior for a separação entre os autovalores, ou seja, quanto menor for o quociente $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Com a introdução de um "shift" μ demonstra-se, de maneira análoga, que as taxas de convergência dos autovetores e autovalores tornam-se

$$r_g = \max_{p \neq j} \left| \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_p - \mu} \right| \quad (A.24)$$

$$r_\lambda = \max_{p \neq j} \left(\frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_p - \mu} \right)^2 \quad (A.25)$$

$$\lambda_p \neq \mu \quad (A.26)$$

Portanto, verifica-se facilmente que, para um "shift" tomado próximo a λ_1 , as razões de convergência serão menores do que as dadas por (A.16) e (A.22), sendo esta conclusão perfeitamente extensível a outros autopares.

APÊNDICE B

NORMAS RESIDUAIS DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

CALCULADOS PELO ALGORITMO DE LANCZOS

Seja (λ, φ) uma solução exata do problema de autovalor

$$K\varphi = \lambda M\varphi \quad (B.01)$$

já definida em (1.06).

Então

$$\frac{1}{\lambda} \varphi - K^{-1} M\varphi = 0 \quad (B.02)$$

ou, fazendo-se $\frac{1}{\lambda} = \theta$

$$\theta\varphi - K^{-1} M\varphi = 0 \quad (B.03)$$

Portanto, pré-multiplicando-se a expressão (B.03) por $q_{j+1}^T M$, onde q_{j+1} é o vetor gerado pelo j -ésimo passo do Algoritmo de Lanczos,

$$q_{j+1}^T M (\theta\varphi - K^{-1} M\varphi) = 0 \quad (B.04)$$

ou

$$q_{j+1}^T M\theta\varphi - q_{j+1}^T M K^{-1} M\varphi = 0 \quad (B.05)$$

Tomando-se a expressão (IV.15)

$$\underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{Q}_j = \underline{Q}_j \underline{I}_j + \underline{r}_j \underline{e}_j^T \quad (B.06)$$

e pré-multiplicando-a por $\underline{q}_{j+1}^T \underline{M}$, tem-se

$$\underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{Q}_j = \underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{Q}_j \underline{I}_j + \underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{r}_j \underline{e}_j^T \quad (B.07)$$

ou

$$\underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{Q}_j - \underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{Q}_j \underline{I}_j = \underline{B}_j \underline{e}_j^T \quad (B.08)$$

considerando-se que

$$\underline{q}_{j+1} = \underline{B}_j \underline{r}_j \quad (B.09)$$

Desta forma, se $(\bar{\theta}, \bar{\varphi})$ é um par de Ritz, no j-ésimo passo do Algoritmo de Lanczos, que aproxima (θ, φ) na expressão (B.03), tem-se, substituindo-se e tomando-se a norma euclidiana da expressão (B.05),

$$\| \underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \bar{\varphi} - \underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \underline{M} \bar{\varphi} \| =$$

$$\| \underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{Q}_j \underline{s}_i \bar{\theta} - \underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{Q}_j \underline{s}_i \| =$$

(pois $\bar{\varphi}_i = \underline{q}_j \underline{s}_i$, expressão (IV.35))

$$\| (\underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{Q}_j \underline{I}_j - \underline{q}_{j+1}^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{Q}_j) \underline{s}_i \| =$$

(pois $\tilde{I}_j \tilde{s}_i = \theta_i \tilde{s}_i$, expressão (IV.43))

$$\| -\beta_j \tilde{e}_j^T \tilde{s}_i \| =$$

(através da expressão (B.08))

$$= \beta_j |s_{ji}| = \beta_{ji} \quad (B.10)$$

sendo s_{ji} o j-ésimo elemento do vetor \tilde{s}_i .

APÊNDICE C

O MÉTODO DA BISECÇÃO

Pela facilidade com a qual a Sequência de Sturm pode ser avaliada em uma matriz tridiagonal, o Método da Biseção torna-se a técnica mais eficiente de cálculo dos autovalores deste tipo de matriz.

Fixando-se então, um intervalo no qual os autovalores da matriz tridiagonal devem ser determinados, o Método de Biseção calcula um autovalor por vez e ao mesmo tempo obtém para os demais. Seja, por exemplo, uma matriz tridiagonal que tenha como autovalores

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 = 2.1 \\ \theta_2 = 2.6 \\ \theta_3 = 3.5 \\ \theta_4 = 5.2 \end{array} \right\} \quad (C.01)$$

e o intervalo, ou seja, as estimativas mínima e máxima dos autovalores

$$\left. \begin{array}{l} R_{\text{MIN}} = 0 \\ \\ R_{\text{MAX}} = 6 \end{array} \right\} \quad (C.02)$$

O Método de Biseção procederia da seguinte forma:

1º AUTOVALOR

$$1^{\text{a}} \text{ Biseção: } \mu = \frac{0 + 6}{2} = 3 \quad (\text{C.03})$$

A Sequência de Sturm indicaria a existência de 2 autovalores menores que 3, portanto, este "shift" passaria a servir como estimativa máxima dos 2 primeiros e mínima para os demais.

$$2^{\text{a}} \text{ Biseção: } \mu = \frac{0 + 3}{2} = 1.5 \quad (\text{C.04})$$

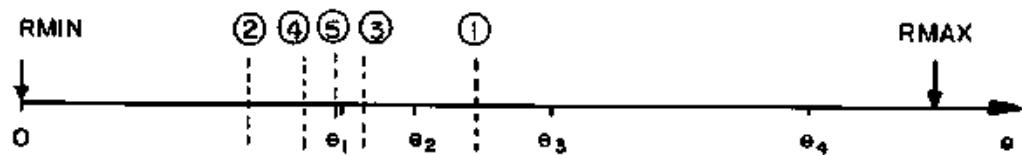
Este "shift" passaria a servir como estimativa mínima para os dois primeiros autovalores pois a Sequência de Sturm indicaria a não existência de autovalores menores do que 1.5.

$$3^{\text{a}} \text{ Biseção: } \mu = \frac{(1.5 + 3)}{2} = 2.25 \quad (\text{C.05})$$

A Sequência de Sturm indicaria 2.25 como uma estimativa máxima para o primeiro autovalor e mínima para o segundo.

•
•
•

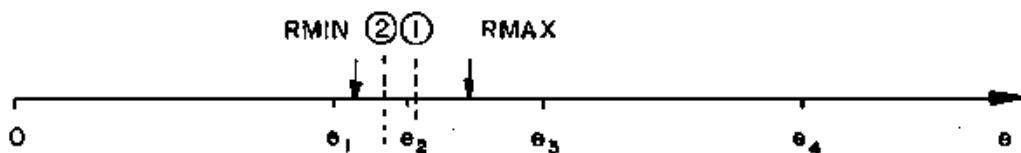
Esquematizando:



•
•
•

2º AUTOVALOR

Esquematizando:



•
•
•

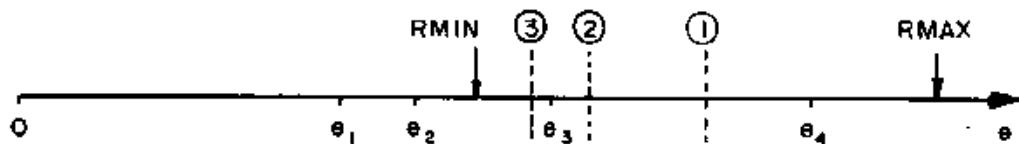
3º AUTOVALOR

$$1^{\text{a}} \text{ Biseção: } \mu = \frac{(3 + 6)}{2} = 4.5$$

A Sequência de Sturm indicaria 4.5 como uma estimativa máxima para o terceiro autovalor e mínima para o quarto.

•
•
•

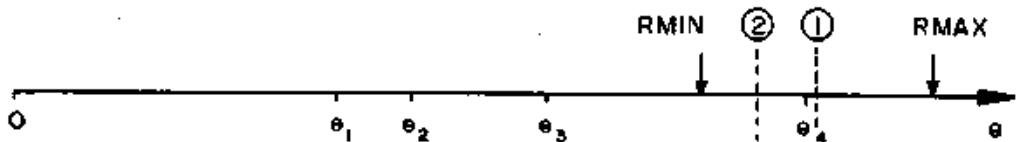
Esquematizando:



•
•
•

4º AUTOVALOR

Esquematizando:



•
•
•

Desta forma, para cada autovalor, são feitas bissecções até que a diferença entre as estimativas mínima e máxima seja inferior a um limite pré-fixado.

Portanto, o Método de Bissecção pode ser utilizado independentemente da distribuição ou multiplicidade dos autovalores. Caso alguns autovalores sejam conhecidos, é possível evitar que os mesmos sejam recalculados, subtraindo-se o número de autovalores conhecidos menores que um certo "shift", do número de autovalores indicados pela Sequência de Sturm.

APÊNDICE D

MONITORAMENTO DA ORTONALIDADE ENTRE
OS VETORES DE LANCZOS

- PAUSA NO ALGORITMO (PARLETT [21]) -

Seja κ_1 um limite superior do erro de truncamento cometido na normalização de um vetor de ordem n , em qualquer passo do Algoritmo de Lanczos, de maneira que

$$| 1 - \mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_j | \leq \kappa_1 \quad (D.01)$$

É natural que κ_1 dependa, entre outros, da rotina de extração da raiz quadrada, de detalhes do programa e da própria dimensão do vetor.

Supondo-se que são conhecidos números ξ_j , em qualquer passo do algoritmo, tais que

$$\| \mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{j+1} \| \leq \xi_j \quad (D.02)$$

define-se

$$\kappa_{j+1} = \left\| \begin{bmatrix} \kappa_j & \xi_j \\ \xi_j & \kappa_1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left[\kappa_j + \kappa_1 + \sqrt{(\kappa_j - \kappa_1)^2 + 4 \xi_j^2} \right] \quad (D.03)$$

Reescrevendo-se então a expressão (IV.46)

$$\| I_j - Q_j^T M Q_j \| \leq \kappa_j \quad (D.04)$$

tem-se por particionamento

$$I_{j+1} - Q_{j+1}^T M Q_{j+1} = \begin{bmatrix} I_j - Q_j^T M Q_j & - Q_j^T M Q_{j+1} \\ - Q_{j+1}^T M Q_j & 1 - Q_{j+1}^T M Q_{j+1} \end{bmatrix} \quad (D.05)$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned} \| I_{j+1} - Q_{j+1}^T M Q_{j+1} \| &\leq \left\| \begin{bmatrix} \| I_j - Q_j^T M Q_j \| & - Q_j^T M Q_{j+1} \\ - Q_{j+1}^T M Q_j & \| 1 - Q_{j+1}^T M Q_{j+1} \| \end{bmatrix} \right\| = \\ &= \begin{vmatrix} \kappa_j & \zeta_j \\ \zeta_j & \kappa_1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (D.06)$$

ou

$$\| I_{j+1} - Q_{j+1}^T M Q_{j+1} \| \leq \kappa_{j+1}$$

Como, considerando-se a expressão (IV.14),

$$Q_{j+1} = \frac{\tilde{e}_j}{\beta_j} \quad (D.07)$$

a precisão aritmética finita acarreta

$$\| Q_j^T M Q_{j+1} \| \leq \frac{1}{\beta_j} \| Q_j^T M \tilde{e}_j \| + \| Q_j^T M \tilde{e}_j \| \quad (D.08)$$

sendo que \tilde{e}_j leva em conta o erro introduzido na divisão β_j e

cujos elementos são, naturalmente, pequenos, dependendo da precisão e relativa do equipamento.

Por intermédio da expressão (IV.45), tem-se

$$\underline{r}_j = (\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j - \underline{\mathbb{Q}}_j \underline{\mathbb{I}}_j + \underline{\mathbb{E}}_j) \underline{e}_j \quad (D.09)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{r}}_j &= \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} (\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j - \underline{\mathbb{Q}}_j \underline{\mathbb{I}}_j + \underline{\mathbb{E}}_j) \underline{e}_j \\ &= [(\underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j)^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j - \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j \underline{\mathbb{I}}_j] \underline{e}_j + \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{E}}_j \underline{e}_j \\ &= [\underline{\mathbb{I}}_j \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j - \underline{e}_j \underline{\mathbb{I}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j - \underline{\mathbb{E}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j - \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j \underline{\mathbb{I}}_j] \underline{e}_j + \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{E}}_j \underline{e}_j \end{aligned}$$

(substituindo-se (IV.45))

$$\begin{aligned} &= [- \underline{\mathbb{I}}_j (\underline{\mathbb{I}}_j - \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j) + (\underline{\mathbb{I}}_j - \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j) \underline{\mathbb{I}}_j] \underline{e}_j - \underline{\mathbb{E}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{q}_j + \\ &+ \underline{e}_j \underline{\mathbb{I}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j \underline{e}_j + \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{E}}_j \underline{e}_j \\ &= [- \underline{\mathbb{I}}_j (\underline{\mathbb{I}}_j - \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j) + (\underline{\mathbb{I}}_j - \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j)] - \underline{\mathbb{E}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{q}_j + \\ &+ \underline{e}_j [\underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{\mathbb{M}} \underline{q}_j - \alpha_j + \underline{e}_j^T (\underline{\mathbb{I}}_j - \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{Q}}_j) \underline{\mathbb{I}}_j \underline{e}_j + \underline{e}_j^T \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{E}}_j \underline{e}_j] + \\ &+ \underline{\mathbb{Q}}_j^T \underline{\mathbb{M}} \underline{\mathbb{E}}_j \underline{e}_j \end{aligned}$$

(transportando-se (D.09))

$$= \underline{e}_j + \underline{d}_j \quad (D.10)$$

onde

$$\xi_j = [(I_j - Q_j^T M Q_j) \xi_j - (I_j - \xi_j \xi_j^T) \xi_j (I_j - Q_j^T M Q_j)] \xi_j \quad (D.11)$$

$$d_j = -\xi_j^T M q_j + 2 Q_j^T M E_j \xi_j + (Q_j^T M K^{-1} M q_j - \alpha_j) \xi_j \quad (D.12)$$

Novamente, por particionamento

$$(I_j - Q_j^T M Q_j) \xi_j = \begin{Bmatrix} -Q_{j-1}^T M q_j \\ 1 + Q_j^T M q_j \end{Bmatrix} \alpha_j + \begin{Bmatrix} -Q_{j-1}^T M q_{j-1} \\ 1 - Q_{j-1}^T M q_{j-1} \\ -Q_j^T M q_{j-1} \end{Bmatrix} \beta_{j-1} \quad (D.13)$$

e

$$I_j (I_j - Q_j^T M Q_j) = \begin{Bmatrix} -I_{j-1} Q_{j-1}^T M q_j + \xi_{j-1} \beta_{j-1} (1 - Q_j^T M q_j) \\ \alpha_j (1 - Q_j^T M q_j) - \beta_{j-1} Q_{j-1}^T M q_j \end{Bmatrix} \quad (D.14)$$

Considerando-se agora

$$\|Q_i^T M q_{i+1}\| \leq \xi_i \quad (D.15)$$

para $i < j$, a norma euclidiana da expressão (D.11), utilizando-se as expressões (D.13) e (D.14), resulta em

$$\|\xi_j\| = \left\| \begin{pmatrix} -\mathbf{q}_{j-2}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_j \\ 1 - \mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_j \end{pmatrix} \alpha_j + \begin{pmatrix} -\mathbf{q}_{j-2}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{j-1} \\ 1 - \mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{j-1} \\ -\mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{j-1} \end{pmatrix} \beta_{j-1} - \right. \\ \left. - \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_{j-1} \mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_j + \xi_{j-1} \beta_{j-1} (1 - \mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_j) \\ \vdots \end{pmatrix} \right\}$$

(notar que o elemento (j, j) na matriz $\mathbf{I}_j - \xi_j \xi_j^T$ é nulo)

$$= \left\| \begin{pmatrix} (\mathbf{I}_{j-1} - \alpha_j \mathbf{I}_{j-1}) \mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_j \\ (1 - \mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_j) \alpha_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_{j-1} \beta_{j-1} (1 - \mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_j) \\ \vdots \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} -\mathbf{q}_{j-2}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{j-1} \\ 1 - \mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{j-1} \\ -\mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{j-1} \end{pmatrix} \beta_{j-1} \right\|$$

$$\leq \|(\mathbf{I}_{j-1} - \alpha_j \mathbf{I}_{j-1})\| \xi_{j-1} + |\alpha_j| k_1 + |\beta_{j-1}| k_1 +$$

$$+ |\beta_{j-1}| (\xi_{j-2} + k_1 + \xi_{j-1})$$

(fazendo-se $|\mathbf{q}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_j| = |\mathbf{q}_j^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{j-1}| \leq \xi_{j-1}$)

$$= \|(\mathcal{L}_{j-1} - \alpha_j \mathcal{L}_{j-1})\| \zeta_{j-1} + \beta_{j-1}(\zeta_{j-1} + \zeta_{j-2} + 2k_1) + |\alpha_j| k_1 \quad (D.16)$$

Sendo

$$A_{MAX} = \text{maior } \alpha \text{ de } \mathcal{L}_{j-1} \quad (D.17)$$

$$A_{MIN} = \text{menor } \alpha \text{ de } \mathcal{L}_{j-1} \quad (D.18)$$

$$B_{MAX} = \text{maior } \beta \text{ de } \mathcal{L}_{j-1} \quad (D.19)$$

tem-se

$$\|(\mathcal{L}_{j-1} - \alpha_j \mathcal{L}_{j-1})\| \leq \max \{A_{MAX} - \alpha_j, \alpha_j - A_{MIN}\} + 2 B_{MAX} \quad (D.20)$$

Desta forma, fixando-se

$$k_1 = \infty \quad (D.21)$$

desprezando-se a parcela d_j em (D.12) e inicializando-se

$$\zeta_1 = \epsilon \quad \dots \quad (D.22)$$

a divisão da expressão (D.16) por β_j possibilita a obtenção de ζ_j e, consequentemente, o cálculo de k_{j+1} através da expressão (D.03).

Portanto, quando k_{j+1} indicar que a ortogonalidade entre os vetores de Lanczos atinge níveis inaceitáveis, deve ser feita uma pausa no algoritmo para que sejam calculados os bons

pares de Ritz e seja procedida a ortogonalização contra os mesmos. Então, κ_j , ζ_j e ζ_{j-1} podem ser reinicializados com

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}_{\max}(\theta) \\ \hat{\beta}_{ji} \end{aligned} \quad (D.23)$$

onde $\hat{\beta}_{ji}$ é o mínimo β_{ji} acima do mínimo aceitável, para que seja possível definir a próxima pausa.

Após o algoritmo ter feito uma pausa no passo j é possível definir

$$T_{\max} = \text{maior autovalor de } \mathcal{L}_j \quad (D.24)$$

$$T_{\min} = \text{menor autovalor de } \mathcal{L}_j \quad (D.25)$$

e então

$$\|(\mathcal{L}_{k-1} - \alpha_k \mathcal{L}_{k-1})\| \leq \max \{\max(T_{\max} - \alpha_k, \alpha_k - T_{\min}),$$

$$\|\mathcal{L}_{k-1}^j - \alpha_k \mathcal{L}_{k-1}\| \} + \beta_j \quad (D.26)$$

onde

$$J_{k-1}^j = \begin{bmatrix} \alpha_{j+1} & \beta_{j+1} \\ \beta_{j+1} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{k-2} \\ \beta_{k-2} & \alpha_{k-1} \end{bmatrix} \quad (0.27)$$

e $\|J_{k-1}^j - \alpha_k J_{k-1}^{j-1}\|$ é avaliada como em (0.20).

APÊNDICE E

MONITORAMENTO DA ORTOGONALIDADE ENTRE OS VETORES
DE LANCZOS E OS BONS VETORES DE RITZ

Sendo $(\bar{\lambda}, \bar{\varrho})$ um bom par de Ritz, tem-se

$$\underline{K}\bar{\varrho} = \bar{\lambda}\underline{M}\bar{\varrho} + \underline{e}_R \quad (E.01)$$

onde \underline{e}_R é um vetor de resíduos.

Considerando-se a expressão (IV.45)

$$\underline{K}^{-1}\underline{M}\underline{q}_j = \underline{q}_j \underline{r}_j + \underline{r}_j \underline{e}_j^T - \underline{E}_j \quad (E.02)$$

pós-multiplicando-a por \underline{e}_j e reagrupando-a

$$\underline{r}_j = \underline{K}^{-1}\underline{M}\underline{q}_j - \beta_{j-1}\underline{q}_{j-1} - \alpha_j\underline{q}_j + \underline{E}_j \underline{e} \quad (E.03)$$

Considerando-se agora que

$$\underline{r}_j = \beta_j \underline{q}_{j+1} \quad (E.04)$$

e, da expressão (E.01)

$$\bar{\varrho}^T \underline{K} = \bar{\lambda} \bar{\varrho}^T \underline{M} + \underline{e}_R^T \quad (E.05)$$

a expressão (E.03) pré-multiplicada por $\bar{\varrho}^T \underline{M}$ resulta em

$$\bar{\mathcal{L}}^T M q_{j+1} \beta_j = \frac{1}{\lambda} \bar{\mathcal{L}}^T M q_j - \frac{1}{\lambda} \mathcal{E}_R^T K^{-1} M q_j - \bar{\mathcal{L}}^T M q_{j-1} \beta_{j-1} - \\ (E.06)$$

$$- \bar{\mathcal{L}}^T M q_j \alpha_j + \bar{\mathcal{L}}^T M E_j \mathcal{E}$$

Fazendo-se

$$|\bar{\mathcal{L}}^T M q_j| \leq \tau_j \quad (E.07)$$

e desprezando-se, para efeito de simplificação, os termos relativos aos erros, a norma da expressão (E.06) resulta em

$$\beta_{j+1} \leq -\frac{1}{\beta_j} \left[|\theta - \alpha_j| \tau_j + \beta_{j-1} \tau_{j-1} \right] \quad (E.08)$$

onde

$$\theta = \frac{1}{\lambda} \quad (E.09)$$

Portanto, a fórmula de recorrência (E.08) é atualizada a cada passo e toda vez que a mesma exceder a tolerância, q_{j+1} e q_{j+2} são ortogonalizados contra $\bar{\mathcal{L}}$, e então é se aproxima da n precisão relativa da aritmética.

Desta forma, τ pode ser interpretado como um arranjo de duas colunas e tantas linhas quantos forem os bons pares de Ritz.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LANCZOS, C. - Applied Analysis, Sir Isaac Pitman & Sons,Ltd, London, 1967.
- [2] BATHE, K.J. - Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
- [3] PARLETT, B.N. - The Symmetric Eigenvalue Problem, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
- [4] CLOUGH,R.W. e PENZIEN, J. - Dynamics of Structures, McGraw-Hill International Book Company, 1982.
- [5] WILKINSON, J.H. - The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [6] LANDAU, L. - Comportamento Não Linear de Estruturas pelo Método de Superposição Modal, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, 1983.
- [7] CORR, R.B. e JENNINGS, A. - "A Simultaneous Iteration Algorithm for Symmetric Eigenvalue Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.10, pp.647-663 (1976).
- [8] BATHE, K.J. e RAMASWAMY, S. - "An Accelerated Subspace Iteration Method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.23, pp.313-331 (1980).

- [9] YAMAMOTO, Y. e OHTSUBO, H. - "Subspace Iteration Accelerated by Using Chebyshev Polynomials for Eigenvalue Problems with Symmetric Matrices", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 10, pp.935-944 (1976).
- [10] WILSON, E.L. e ITOH, T. - "An Eigensolution Strategy for Large Systems", Computers & Structures, vol.16, pp. 259-265 (1983).
- [11] LANCZOS, C. - "An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators", Journal of Research of the National Bureau of Standards, vol.45, pp.255-282 (1950).
- [12] PAIGE, C.C. - "Practical Use of the Symmetric Lanczos Process with Re-Orthogonalization", BIT, vol.10, pp.183-195 (1970).
- [13] PAIGE, C.C. - "Computational Variants of the Lanczos Method for the Eigenproblem", Journal of the Institute of Mathematics and Computations, vol.10, pp.373-381 (1972).
- [14] KAHAN, W. e PARLETT, B.N. - "How Far Should you Go with the Lanczos Process?", Sparse Matrix Computations (Symposium on Sparse Matrix Computations, Argonne National Laboratory), pp.131-144, Academic Press Inc., 1976.

- [15] GOLUB, G.H. e UNDERWOOD, R. - "The Block Lanczos Method for Computing Eigenvalues", Mathematical Software III (Proceedings of a Symposium Conducted by the Mathematics Research Center, The University of Wisconsin - Madison), pp.361-377, Academic Press Inc., 1977.
- [16] SCOTT, D.S. - "How To Make the Lanczos Algorithm Converge Slowly", Mathematics of Computation, vol.33, pp. 239-247 (1979).
- [17] PAIGE, C.C. - "Accuracy and Effectiveness of the Lanczos Algorithm for the Symmetric Eigenproblem", Large Scale Matrix Problems, pp.235-258, Elsevier North Holland, Inc., 1981.
- [18] NOUR-OMID, B. e GLOUGH, R.W. - "Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Co-ordinates", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.12, pp. 565-577 (1984).
- [19] COUTINHO, A.L.G.A., LANDAU, L., LIMA, E.C.P. e EBECKEN, N. F.F. - "The Application of the Lanczos Method Superposition Method in Dynamic analysis of Offshore Structures", Computers & Structures, a ser publicada.
- [20] OJALVO, L.U. - "Proper Use of Lanczos Vectors for Large Eigenvalue Problems", Computers & Structures, vol. 20, pp.115-120 (1985).

- [21] PARLETT, B.N. e SCOTT, D.S. - "The Lanczos Algorithm with Selective Orthogonalization", Mathematics of Computation, vol.33, pp.217-238 (1979).
- [22] JIANGNING, Q. e XIANGLIN, Z. - "Tracking Reorthogonalization Lanczos Algorithm and its Applications", Finite Elements in Computational Mechanics (FEICOM-85), pp. 51-58, Pergamon Press, 1985.
- [23] CÜLLUM, J.J. e WILLOUGHBY, R.A. - Lanczos Algorithms for Large Symmetric Eigenvalue Computations, vol.I - Theory, vol.II - Programs, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [24] NOUR-OMID, B., PARLETT, B.N. e TAYLOR, R.L. - "Lanczos Versus Subspace Iteration for Solution of Eigenvalue Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.19, pp.859-871 (1983).
- [25] ERICSSON, T. e RUHE, A. - "The Spectral Transformation Lanczos Method for the Numerical Solution of Large Sparse Generalized Symmetric Eigenvalue Problems", Mathematics of Computation, vol.35, pp.1251-1268 (1980).
- [26] MARQUES, O.A., COUTINHO, A.L.G.A. e LANDAU, L. - "Um Estudo de Algoritmos para a Solução de Grandes Problemas de Autovalor", VII Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, São Carlos-SP, Novembro 4-7, 1986.

- [27] MARQUES, O.A., COUTINHO, A.L.G.A. e LANDAU, L. - "Solução de Grandes Problemas de Autovalor Através do Algoritmo de Lanczos", XXI Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, Porto Alegre, Julho, 1987, a ser apresentado.
- [28] PARLETT, B.N. - "A New Look at the Lanczos Algorithm for Solving Symmetric Systems of Linear Equations", Linear algebra and Applications, vol.29, pp.323-346 (1980).
- [29] COUTINHO, A.L.G.A., ALVES, J.L.D., LANDAU, L., LIMA, E.C.P. e EBECKEN, N.F.F. - "On the Application of an Element-by-Element Lanczos Solver to Large Offshore Structural Engineering Problems", First World Congress on Computational Mechanics, The University of Texas at Austin, Setembro 22-26, 1986.
- [30] NGUYEN, D.T. e ARORA, J.S. - "An Algorithm for Solution of Large Eigenvalue Problems", Computers & Structures, vol.24, pp.645-650 (1986).
- [31] HAGEMAN, L.A. e YOUNG, D.M. - Applied Iterative Methods, Academic Press, Inc., New York, 1981.
- [32] AXELSSON, O. e BARKER, V.A. - Finite Element Solution of Boundary Value Problems - Theory and Computation, Academic Press, Inc., Orlando, 1984.