

ANÁLISE NUMÉRICA DE PLACAS COM CANTOS REENTRANTES

Lucia Kazuko Nishikava

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL

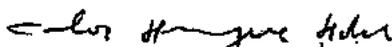
Aprovada por:



Prof. Sergio Fernandes Villaça, D.Sc.  
(Presidente)



Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D.Sc.



Prof. Carlos Henrique Holck, Dr.Ing.

**NISHIKAVA, LÚCIA KAZUKO**

Análise Numérica de Placas com Cantos Reentrantes. Rio de Janeiro, 1991.

viii, 108p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1991).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Placas I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*Aos meus pais, Ysumy e Kazuko e ao  
meu irmão, Carlos.*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Sergio Fernandes Villaça pela orientação eficiente e segura dada a este trabalho, pelos conhecimentos transmitidos e pelo constante incentivo.

Ao Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia pelos valiosos comentários que auxiliaram a dirimir dúvidas surgidas.

Aos Engenheiros Joaquim Fernando Paes de Barros Leães, José Augusto Ramos do Amaral, José Rucos e Lúcio Dias Batista Ferrari pela confiança, apoio e incentivo imprescindíveis à conclusão deste trabalho.

À Engenheira Rosângela Santarém Rodrigues pela amizade e estímulo constantes, a quem também dedico este trabalho.

A Bruno Campos Barretto, Denise Costa de Melo, Jorge Artur Medeiros Romeu, José Antonio Marques Carrer, Luiz Antonio de Souza, Marcelo Cauás Asfora, Paulo Affonso Costa Filho e Patrícia M. C. O. Duque pela amizade e apoio demonstrados.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro concedido.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

ANÁLISE NUMÉRICA DE PLACAS COM CANTOS REENTRANTES

LÚCIA KAZUKO NISHIKAVA

ABRIL DE 1991

ORIENTADOR: SERGIO FERNANDES VILLAÇA

PROGRAMA: ENGENHARIA CIVIL

Este trabalho tem por objetivo a análise em coordenadas cilíndricas de placas delgadas com cantos reentrantes, sujeitas a cargas transversais, com a aplicação de diferenças finitas através do Método da Energia Discretizada. Tal método utiliza o princípio variacional da energia potencial total, mediante a introdução dos operadores de diferenças finitas na própria expressão do funcional de energia. Além disso, são introduzidos graus de liberdade adicionais aos nós situados no contorno, de forma a eliminar a necessidade de consideração dos nós fictícios, característicos da formulação convencional de diferenças finitas. A existência de cantos reentrantes exigiu a implementação de quatro novos elementos, adequados à análise deste tipo de problema.

São apresentados resultados obtidos com o programa elaborado, com base na formulação descrita, para placas com diversas condições de contorno. Tais resultados são comparados com os obtidos através do Método dos Elementos Finitos, de modo a verificar a eficiência da formulação.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

NUMERICAL ANALYSIS OF PLATES WITH REENTRANT CORNERS

LÚCIA KAZUKO NISHIKAVA

APRIL, 1991

THESIS SUPERVISOR: SERGIO FERNANDES VILLAÇA  
DEPARTMENT: CIVIL ENGINEERING

The aim of this work is the bending analysis, in cylindrical coordinates, of thin plates with reentrant corners under transverse loading, by the Discrete Energy Method. Such method employs the variational principle of total potential energy, by introduction of finite difference operators in the energy functional. Furthermore, additional degrees of freedom are included to the boundary nodes, in order to eliminate the fictitious nodes present in the conventional finite difference analysis. The reentrant corners required the adequate implementation of four new elements for this type of analysis.

The present formulation is applied to plates with several boundary conditions and the results obtained with the computer program developed are compared with those given by the Finite Element Method, in order to verify the efficiency of the formulation.

## ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II - TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS .....	5
II.1 - Introdução .....	5
II.2 - Campo de Deslocamentos .....	6
II.3 - Relações Deformação-Deslocamento .....	6
II.4 - Relações Tensão-Deformação .....	7
II.5 - Esforços Internos .....	8
CAPÍTULO III - MÉTODO DA ENERGIA DISCRETIZADA .....	11
III.1 - Introdução .....	11
III.2 - Energia Potencial da Placa .....	11
III.3 - Avaliação da Energia de Deformação .....	11
III.4 - Relações Deformação-Deslocamento .....	13
III.5 - Malha de Discretização .....	14
III.6 - Elementos .....	15
III.6.1 - Elementos no Domínio .....	17
III.6.1.1 - Elemento $A_1$ .....	17
III.6.1.2 - Elemento do tipo B .....	20
III.6.2 - Elementos no Contorno .....	21
III.6.2.1 - Elemento $A_2$ .....	22
III.6.2.2 - Elemento $A_3$ .....	24
III.6.2.3 - Elemento $A_4$ .....	27
III.6.2.4 - Elemento $A_5$ .....	29
III.6.2.5 - Elemento $A_6$ .....	32
III.6.2.6 - Elemento $A_7$ .....	34
III.6.2.7 - Elemento $A_8$ .....	37
III.6.2.8 - Elemento $A_9$ .....	39

III.6.2.9 - Elemento $A_{10}$ .....	42
III.6.2.10 - Elemento $A_{11}$ .....	45
III.6.2.11 - Elemento $A_{12}$ .....	48
III.6.2.12 - Elemento $A_{13}$ .....	50
III.7 - Equações de Equilíbrio .....	53
III.8 - Esforços Internos .....	55
CAPÍTULO IV - PROGRAMAÇÃO .....	56
IV.1 - Introdução .....	56
IV.2 - Descrição do Programa .....	58
IV.2.1 - Entrada de Dados .....	58
IV.2.2 - Cálculo da Semi-Largura de Banda .....	59
IV.2.3 - Montagem e Espalhamento das Matrizes dos Elementos na Matriz de Rigidez Global .....	60
IV.2.4 - Resolução do Sistema de Equações .....	61
IV.2.5 - Cálculo dos Esforços Internos .....	61
CAPÍTULO V - RESULTADOS NUMÉRICOS .....	62
V.1 - Introdução .....	62
V.2 - Exemplos .....	63
V.2.1 - Exemplo 1: Placa quadrada com furo concêntrico quadrado apoiada nos bordos interno e externo e carregada uniformemente .....	63
V.2.2 - Exemplo 2: Placa quadrada com furo concêntrico quadrado apoiada nos cantos externos e carregada uniformemente .....	77
V.2.3 - Exemplo 3: Placa em forma de setor circular de $45^\circ$ com os lados adjacentes ao canto livres e demais apoiados, com carregamento uniformemente distribuído .....	87
V.3 - Análise dos Resultados .....	99
V.3.1 - Exemplo 1 .....	99

V.3.2 - Exemplo 2 .....	100
V.3.3 - Exemplo 3 .....	101

CAPITULO VI - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	102
---	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	104
----------------------------------	-----

## CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a constante evolução dos computadores foi acompanhada pelo conseqüente desenvolvimento das técnicas computacionais, o que, por sua vez, permitiu a abordagem por métodos numéricos de uma gama considerável de problemas de análise estrutural. Com efeito, muitos princípios nos quais se baseiam os métodos numéricos, embora anteriores ao advento do computador, só nos últimos 30 anos puderam ser eficientemente utilizados. Assim, problemas considerados complexos e até de impossível resolução por via analítica podem ser hoje resolvidos através de técnicas numéricas de forma prática e rotineira.

Pode-se considerar a existência de duas formas de abordagem no campo das soluções numéricas: o emprego de princípios variacionais aliados à formulação de energia, ou então a solução direta das equações diferenciais que regem o problema. Dentre as técnicas numéricas utilizadas destacam-se o método dos elementos finitos (ver, e.g., ZIENKIEWICZ<sup>[1]</sup>) e o tratamento por diferenças finitas.

No método das diferenças finitas, o comportamento do contínuo (com infinitos graus de liberdade) é representado pela consideração de um número finito de variáveis em pontos nodais, que constituem os graus de liberdade do problema. Em sua abordagem tradicional, também conhecida como método da substituição direta, diferenças finitas são aplicadas diretamente às equações diferenciais, mediante a consideração de operadores adequados seguindo o esquema convencional de moléculas. Este método, porém, apresenta dificuldade quando da consideração das condições de contorno geométricas e naturais na análise de estruturas que apresentem bordos irregulares. Outro tipo de limitação reside na geração de matrizes de coeficientes não simétricas, que demandam maior esforço computacional na resolução do sistema de equações algébricas.

As dificuldades decorrentes da utilização convencional das diferenças finitas levaram ao desenvolvimento de novo procedimento, em que diferenças finitas são combinadas com a formulação de energia, originando o Método Energético das Diferenças Finitas. Neste método, as derivadas dos deslocamentos são substituídas por formas de diferenças finitas diretamente nas expressões de energia.

O Método Energético das Diferenças Finitas possui, numa análise estrutural, as mesmas etapas de cálculo do Método dos Elementos Finitos. Os dois métodos, entretanto, diferem na escolha das componentes de deslocamentos generalizados (incógnitas nodais) e na localização dos pontos nodais (no Método Energético das Diferenças Finitas surge a necessidade da consideração de pontos fictícios fora do domínio). Observe-se que a grande virtude do Método Energético das Diferenças Finitas reside no fato de que, em muitos problemas, há uma significativa redução no número total de graus de liberdade, relativamente à análise por elementos finitos.

A utilização da formulação variacional faz com que somente as condições de contorno geométricas devam ser prescritas em problemas analisados pelo Método Energético das Diferenças Finitas. Outra característica é que são geradas matrizes de coeficientes simétricas e positiva-definidas, observando-se ainda a simplicidade com que tais matrizes são formadas. Este método, porém, não tem a mesma versatilidade apresentada pelo Método dos Elementos Finitos na análise de estruturas com contornos irregulares.

Como um aperfeiçoamento ao método, BURAGOHAIN<sup>[2]</sup> apresentou um procedimento especial, denominado Método da Energia Discretizada, que tem as mesmas características do Método Energético das Diferenças Finitas, sendo entretanto introduzidos graus de liberdade adicionais aos nós situados no contorno, de modo a eliminar os pontos fictícios (fora do domínio) da malha convencional de diferenças finitas. Na aplicação deste método à flexão de placas, a energia potencial total da estrutura é decomposta

em duas parcelas, uma devida aos momentos fletores (associada às derivadas segundas diretas do deslocamento transversal) e outra ao momento de torção (correspondente à derivada cruzada), estando estas duas contribuições associadas a duas classes de elementos.

O presente trabalho tem por objetivo estudar a aplicação do Método da Energia Discretizada a problemas de placas com cantos reentrantes.

Um dos primeiros estudos nesse assunto, para o caso de bordos simplesmente apoiados, foi apresentado por SALVADORI e REGGINI<sup>[3]</sup>, que utilizam diferenças centrais sobre as equações diferenciais de segunda ordem, eliminando assim a necessidade de consideração de nós fictícios. Em 1978, JANNONE e FISCHER<sup>[4]</sup> desenvolveram um operador de diferenças finitas para cantos livres ou apoiados elasticamente, que leva em consideração na fixação da condição de contorno no canto reentrante a presença da força concentrada de canto juntamente aos cortantes efetivos de Kirchhoff, diferentemente do que haviam feito WOOD<sup>[5]</sup> e BOWLES<sup>[6]</sup> que usaram, respectivamente, as condições de momento torçor nulo e de momento fletor nulo no canto. KARAVESIROGLOU e PENELIS<sup>[7]</sup> em 1984 fizeram, em associação à análise numérica do problema por diferenças finitas aplicadas sobre a equação diferencial, também um estudo experimental para fins de comparação de resultados.

Utilizando a formulação apresentada por BURAGOHAIN<sup>[2]</sup> e desenvolvida por PLETZ<sup>[8]</sup> para flexão moderada de placas em coordenadas cilíndricas, objetiva-se então aplicá-la à análise linear de placas com cantos reentrantes, mediante a implementação de elementos de canto adequados à abordagem desse problema.

No Capítulo II são apresentados os fundamentos básicos da Teoria Clássica de Placas, através das expressões das deformações, tensões e esforços solicitantes (em coordenadas cilíndricas), em termos de derivadas dos deslocamentos transversais.

No Capítulo III é apresentada a formulação do Método da Energia Discretizada aplicado à flexão de placas. Além dos elementos introduzidos por BURAGOHAIN<sup>[2]</sup> e utilizados por PLETZ<sup>[8]</sup>, são desenvolvidos quatro novos tipos de elemento pertencentes ao contorno, adequados à presença de cantos reentrantes.

O Capítulo IV faz uma breve descrição do programa elaborado com base na formulação apresentada no Capítulo III. Os resultados obtidos são descritos e discutidos no Capítulo V. Finalmente, no Capítulo VI, são apresentadas conclusões e considerações gerais.

## CAPÍTULO II

## TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS

## II.1 - Introdução

Apresentam-se aqui os conceitos fundamentais da teoria clássica de placas, aplicável a placas delgadas, onde os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura.

Neste trabalho são considerados problemas de elasticidade linear e, portanto, as estruturas em estudo obedecem à Lei de Hooke Generalizada; admite-se também que o material apresente ortotropia física.

As hipóteses básicas da teoria clássica de placas são:

- 1) o material da placa é perfeitamente elástico, contínuo, homogêneo e obedece à Lei de Hooke Generalizada;
- 2) a espessura da placa é constante e pequena em relação às outras duas dimensões, bem como sua máxima flecha, obtida pelo plano médio, é pequena quando comparada com a sua espessura;
- 3) não há deformação no plano médio da placa; este plano permanece neutro durante a flexão. Isto implica dizer que cargas são aplicadas normalmente ao plano médio e são desprezados os esforços de membrana;
- 4) segmentos retos e normais ao plano médio indeformado permanecem retos e normais à superfície média após a aplicação das cargas;
- 5) tensões normais na direção transversal à placa são consideradas desprezíveis quando comparadas com as demais tensões normais.

Com base nestas hipóteses, todas as tensões podem ser expressas em termos da flecha " $w$ " da placa, função das coordenadas no plano médio da placa.

## II.2 - Campo de Deslocamentos

Adotando coordenadas cilíndricas, o campo de deslocamentos associado à flexão da placa, descrito pelas componentes nas direções radial, circunferencial e transversal, é expresso por:

$$u_1 = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$u_2 = -z \cdot \frac{\partial w}{r \partial \phi} \quad (\text{II.1})$$

$$u_3 = w$$

onde  $w = w(r, \phi)$ .

## II.3 - Relações Deformação-Deslocamento

Podem-se deduzir as seguintes expressões, que relacionam as deformações com os deslocamentos de um ponto da placa, situado a uma distância "z" de seu plano médio:

$$\epsilon_r = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$\epsilon_\phi = -z \cdot \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} \right) \quad (\text{II.2})$$

$$\epsilon_{r\phi} = -2z \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \phi} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \phi} \right)$$

## II.4 - Relações Tensão-Deformação

Admitindo ortotropia cilíndrica, a Lei de Hooke generalizada fornece as seguintes expressões, que relacionam linearmente as componentes de tensão com as componentes de deformação:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= E'_r \cdot \epsilon_r + \nu_\phi \cdot E'_r \cdot \epsilon_\phi \\ \sigma_\phi &= E'_\phi \cdot \epsilon_\phi + \nu_r \cdot E'_\phi \cdot \epsilon_r \\ \tau_{r\phi} &= G \cdot \epsilon_{r\phi}\end{aligned}\tag{II.3}$$

onde:

$$\begin{aligned}E'_r &= \frac{E_r}{(1 - \nu_r \cdot \nu_\phi)} \\ E'_\phi &= \frac{E_\phi}{(1 - \nu_r \cdot \nu_\phi)} \\ G &= \frac{\sqrt{E_r \cdot E_\phi}}{2 \cdot \left(1 + \sqrt{\nu_r \cdot \nu_\phi}\right)}\end{aligned}\tag{II.4}$$

$E_r$  - módulo de elasticidade radial

$E_\phi$  - módulo de elasticidade circunferencial

$G$  - módulo de cisalhamento

$\nu_r$  - coeficiente de Poisson radial

$\nu_\phi$  - coeficiente de Poisson circunferencial

Substituindo as relações deformação - deslocamento nas expressões (II.3), obtêm-se as tensões como função dos deslocamentos:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= -z \cdot \left[ E'_r \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\phi \cdot E'_r \cdot \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial w^2}{r^2 \partial \phi^2} \right) \right] \\
 \sigma_\phi &= -z \cdot \left[ \nu_r \cdot E'_\phi \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + E'_\phi \cdot \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} \right) \right] \quad (\text{II.5}) \\
 \tau_{r\phi} &= -2 \cdot z \cdot G \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \phi} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \phi} \right)
 \end{aligned}$$

## II.5 - Esforços Internos

Os esforços internos resultantes (momentos fletores e torçor) são dados pelas expressões:

$$\begin{aligned}
 M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z \cdot dz \\
 M_\phi &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\phi \cdot z \cdot dz \quad (\text{II.6}) \\
 M_{r\phi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\phi} \cdot z \cdot dz
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (II.5), que exprimem as tensões como função dos deslocamentos, nessas expressões e procedendo à integração, vem:

$$M_r = - \left[ D_r \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + D_1 \cdot \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} \right) \right]$$

$$M_\phi = - \left[ D_\phi \cdot \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} \right) + D_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

$$M_{r\phi} = - 2 \cdot D_{r\phi} \cdot \left[ \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \phi} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \phi} \right]$$

onde

$$D_r = \frac{E_r \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu_r \cdot \nu_\phi)}$$

$$D_\phi = \frac{E_\phi \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu_r \cdot \nu_\phi)}$$

$$D_1 = \frac{\nu_r \cdot E_\phi \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu_r \cdot \nu_\phi)} = \frac{\nu_\phi \cdot E_r \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu_r \cdot \nu_\phi)} \quad (\text{II.8})$$

$$D_{r\phi} = \frac{G \cdot h^3}{12}$$

Escrevendo as expressões que fornecem os momentos em forma matricial, vem:

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} M_r \\ M_\phi \\ M_{r\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_r & D_1 & 0 \\ D_1 & D_\phi & 0 \\ 0 & 0 & D_{r\phi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ -\left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} \right) \\ -2 \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \phi} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \phi} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

ou ainda,

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (\text{II.10})$$

onde  $\underset{\sim}{\varepsilon}$  é o vetor de deformações generalizadas, e  $\underset{\sim}{D}$  a matriz de transformação associando as deformações elásticas  $\underset{\sim}{\varepsilon}$  aos momentos.

## CAPÍTULO III

## MÉTODO DA ENERGIA DISCRETIZADA

## III.1 - Introdução

Neste capítulo são abordados os conceitos básicos do Método da Energia Discretizada (M.E.D.) aplicados à análise de placas delgadas com cantos reentrantes.

## III.2 - Energia Potencial da Placa

O princípio da energia potencial total estabelece que para um sistema numa configuração de equilíbrio estável, sua energia potencial total é um mínimo. Utilizando este princípio no estudo de placas sem carregamento de bordo, a energia potencial total consiste da soma da energia de deformação com a energia potencial das cargas que agem no domínio da placa.

## III.3 - Avaliação da Energia de Deformação

A energia de deformação da placa é dada por<sup>(12)</sup>:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \underline{M}^T \cdot \underline{\epsilon} \cdot dA \quad (\text{III.1})$$

Utilizando a expressão (II.10), obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{D}^T \cdot \underline{\epsilon} \cdot dA \quad (\text{III.2})$$

Para avaliar numericamente a energia de deformação em toda placa, a mesma será decomposta em elementos e em cada um destes calculada a energia de forma aproximada, em função dos deslocamentos nodais e com o uso de diferenças finitas. Por conveniência, a energia de deformação da estrutura será dividida em duas parcelas:

$$U = U_a + U_b \quad (\text{III.3})$$

onde  $U_a$  é a energia de deformação devida aos momentos fletores e  $U_b$  a parcela associada aos momentos torçores.

Com esta divisão, as componentes de deformação podem ser escritas como:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \underline{\epsilon}_a \\ \underline{\epsilon}_b \end{bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

e, da equação (III.2), vem:

$$U_a = \frac{1}{2} \int_A \underline{\epsilon}_a^T \cdot \underline{D}_a^T \cdot \underline{\epsilon}_a \cdot dA \quad (\text{III.5})$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_A \underline{\epsilon}_b^T \cdot \underline{D}_b^T \cdot \underline{\epsilon}_b \cdot dA \quad (\text{III.6})$$

onde a matriz  $\underline{D}$  se decompõe como:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{D}_a & 0 \\ 0 & \underline{D}_b \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

e as matrizes  $\underline{D}_a$  e  $\underline{D}_b$  são definidas por:

$$\underline{D}_a = \begin{bmatrix} D_r & D_1 \\ D_1 & D_\phi \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

$$\underline{D}_b = \begin{bmatrix} D_{r\phi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

sendo  $D_1$ ,  $D_r$ ,  $D_\phi$ ,  $D_{r\phi}$  definidos em (II.8).

#### III.4 - Relações Deformação - Deslocamento

As componentes de deformação podem ser escritas como:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_a \\ \underline{\varepsilon}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ -\left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} \right) \\ -2 \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \phi} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \phi} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Utilizando relações de diferenças finitas podem-se expressar as deformações em função dos deslocamentos nodais através da matriz B:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{\delta} = \begin{bmatrix} B_a & 0 \\ \sim & \sim \\ 0 & B_b \\ \sim & \sim \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_a \\ \sim \\ \delta_b \\ \sim \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

ou então:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_a = \underset{\sim}{B}_a \cdot \underset{\sim}{\delta}_a \quad (\text{III.12})$$

que envolve diferenças finitas diretas e

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_b = \underset{\sim}{B}_b \cdot \underset{\sim}{\delta}_b \quad (\text{III.13})$$

que envolve diferenças finitas cruzadas.

### III.5 - Malha de Discretização

Para poder avaliar a energia potencial da estrutura, será feita a discretização da mesma em elementos, onde a incógnita nodal única é o deslocamento transversal "w", e avaliada a contribuição de cada um destes elementos.

A energia de deformação da estrutura será decomposta em duas parcelas, uma associada aos momentos fletores e outra ao momento torçor. A parcela relativa aos fletores utiliza expressões de diferenças finitas diretas, o que faz com que sejam necessários cinco graus de liberdade relativamente a cada elemento, enquanto que na avaliação da parcela correspondente ao torçor são utilizadas expressões de diferenças finitas cruzadas, sendo necessários quatro graus de liberdade relativos ao elemento. Aos pontos situados no contorno devem ser atribuídos graus de liberdade adicionais para o uso das diferenças finitas diretas de modo que a malha não possua nós fora do domínio da estrutura.

Para avaliar a energia de deformação total da placa é portanto somada a contribuição dos diversos elementos.

### III.6 - Elementos

Com a utilização de uma malha tendo as características descritas torna-se conveniente identificar dois tipos de elementos: elementos do tipo A e elementos do tipo B.

Os elementos do tipo A, onde se avalia a contribuição da energia potencial devida aos momentos fletores, envolvem diferenças finitas diretas, enquanto que

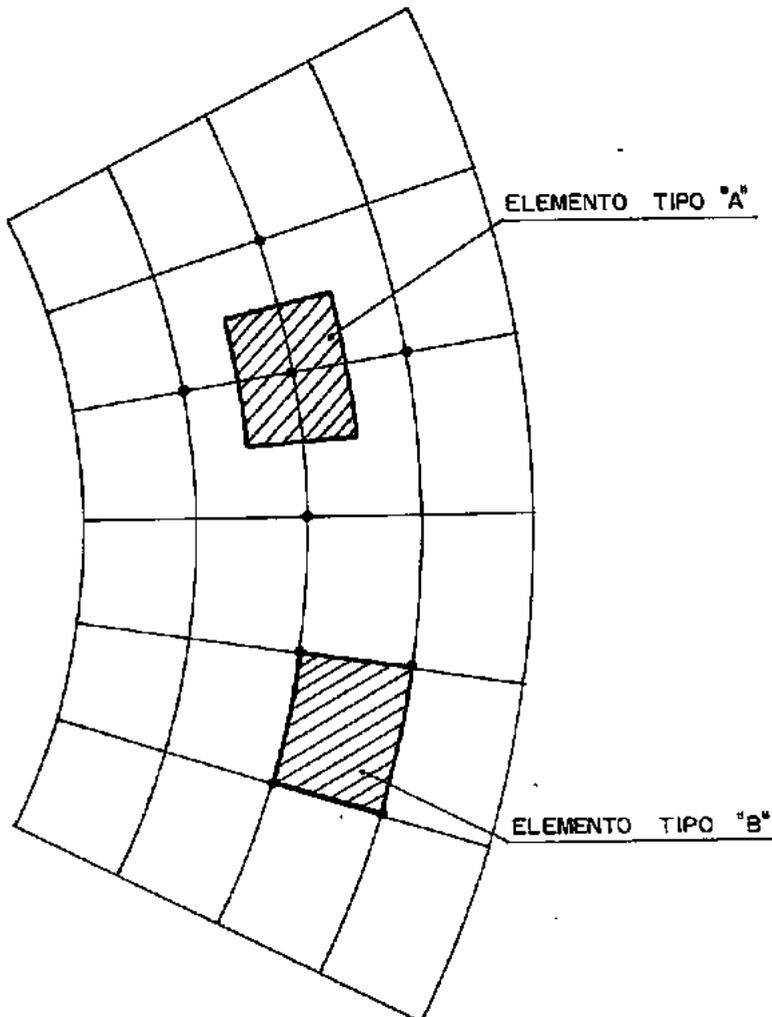


Figura III.1 - Elementos dos tipos A e B

os elementos do tipo B, utilizados na avaliação da energia devida ao torçor, fazem uso de diferenças finitas cruzadas. Nas Figuras III.1, III.2 e III.3 estão representados estes dois tipos de elementos. Ressalte-se que para avaliar a energia associada aos momentos fletores nos pontos situados no contorno foram introduzidos graus de liberdade adicionais: aos nós que se situam na interseção de dois bordos foram adicionados um grau de liberdade correspondente à rotação na direção radial e outro na direção circunferencial; aos nós em bordos curvos acrescentou-se um grau de liberdade relativo à rotação na direção radial e aos situados em bordos retos um grau de liberdade para rotação na direção circunferencial. Podem-se, assim, identificar treze elementos do tipo A, representados nas Figuras III.2 e III.3:

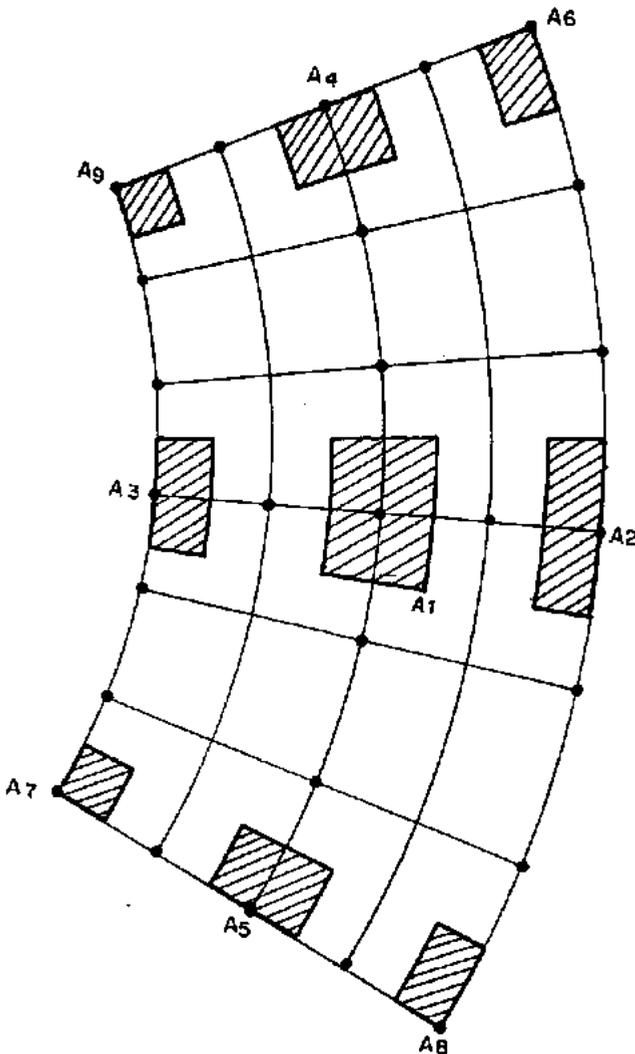


Figura III.2 - Elementos A1 a A9

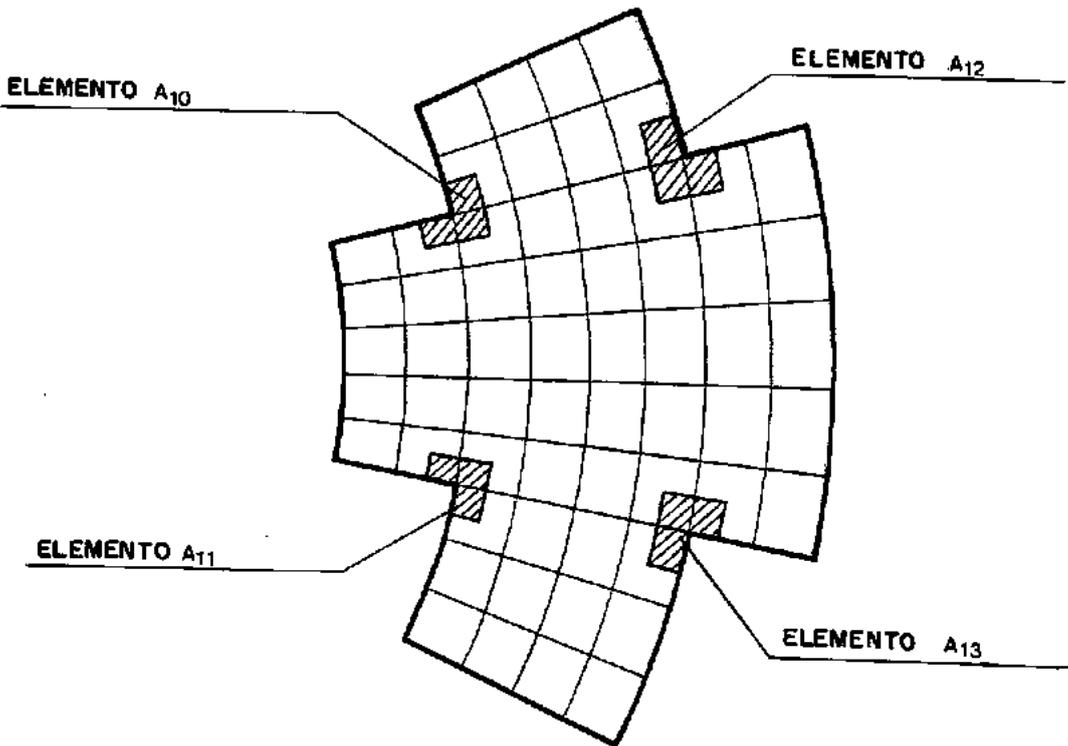


Figura III.3 - Elementos A10 a A13

### III.6.1 - Elementos no Domínio

#### III.6.1.1 - Elemento A1

As componentes de deformação interna são dadas pelas curvaturas  $\varepsilon_r$  e  $\varepsilon_\phi$ , nas direções radial e circunferencial, respectivamente representadas por:

$$\varepsilon_a = \left[ \begin{array}{c} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ - \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} \right) \end{array} \right] \quad (\text{III.14})$$

Utilizando-se diferenças finitas, podem-se relacionar as componentes de deformação  $\epsilon_a$  com os deslocamentos  $\delta_a$  através da matriz  $B_a$ , ou seja:

$$\underset{\sim}{\epsilon}_a = \underset{\sim}{B}_a \cdot \underset{\sim}{\delta}_a \quad (\text{III.15})$$

onde:

$$\underset{\sim}{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}$$

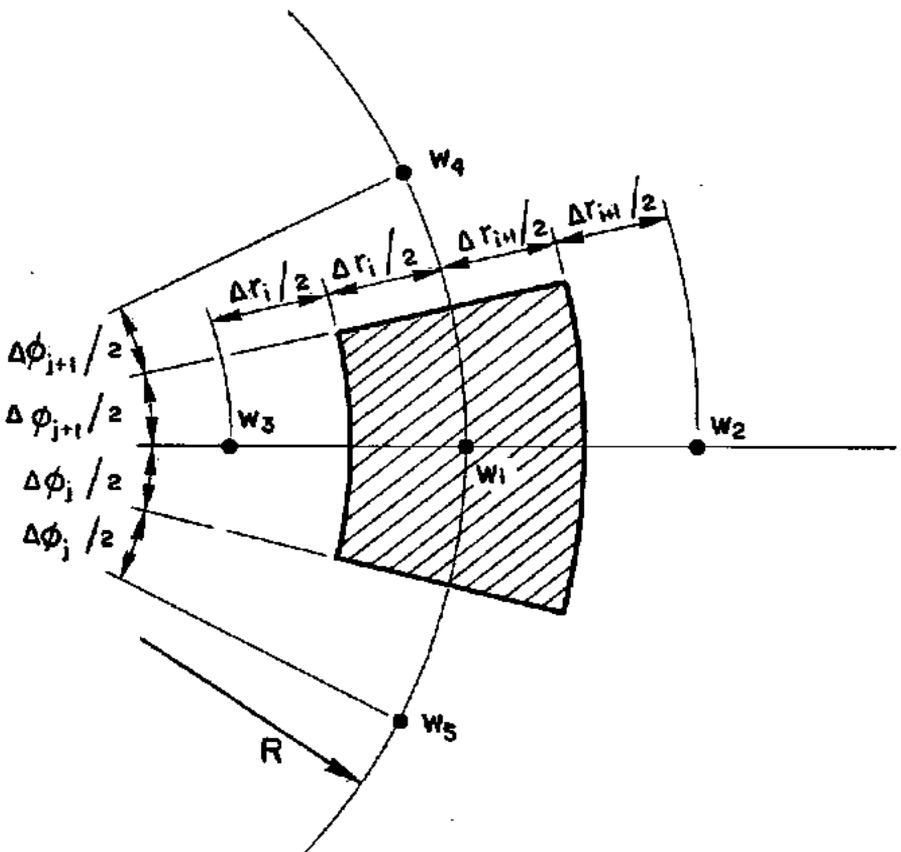


Figura III.4 - Elemento A1

Os elementos da matriz  $B_a$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta r_i + \Delta r_{i+1}} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right) \cdot \Delta r_{i+1}}$$

$$b_{13} = \frac{-2}{\left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right) \cdot \Delta r_i}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R \cdot \left( \Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1} \right)} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

$$b_{22} = \frac{-1}{\left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right) \cdot R}$$

$$b_{23} = \frac{1}{\left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right) \cdot R}$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R^2 \left( \Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1} \right) \cdot \Delta \phi_{j+1}}$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R^2 \left( \Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1} \right) \cdot \Delta \phi_j}$$

## III.6.1.2 - Elemento do tipo B

Neste tipo de elemento a componente de deformação é representada por:

$$\underline{\varepsilon}_b = -2 \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \phi} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \phi} \right) \quad (\text{III.16})$$

O uso das relações de diferenças finitas para expressar  $\underline{\varepsilon}_b$  em termos de  $\underline{\delta}_b$  através da matriz  $\underline{B}_b$  fornece:

$$\underline{\varepsilon}_b = \underline{B}_b \cdot \underline{\delta}_b \quad (\text{III.17})$$

onde

$$\underline{B}_b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_b = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz  $\underline{B}_b$  são expressos por:

$$b_1 = \frac{-2}{R \cdot \Delta r_1 \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R^2 \cdot \Delta \phi_j}$$

$$b_2 = \frac{-2}{R \cdot \Delta r_1 \cdot \Delta \phi_j} - \frac{1}{R^2 \cdot \Delta \phi_j}$$

$$b_3 = \frac{2}{R \cdot \Delta r_1 \cdot \Delta \phi_j} - \frac{1}{R^2 \cdot \Delta \phi_j}$$

$$b_4 = \frac{2}{R \cdot \Delta r_1 \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R^2 \cdot \Delta \phi_j}$$

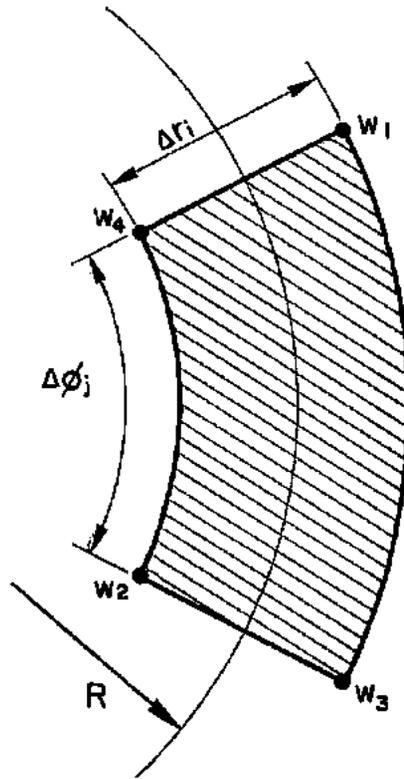


Figura III.5 - Elemento do tipo B

### III.6.2 - Elementos no Contorno

Para os elementos situados no contorno, os vetores contendo as componentes de deformação são também expressos por (III.14), tal como para os elementos  $A_1$ , porém os vetores de deslocamentos nodais são diferentes, em função da consideração de graus de liberdade adicionais acrescentados para eliminar os correspondentes aos nós fictícios na formulação convencional de diferenças finitas. São criados, portanto, doze novos elementos, pela modificação do elemento  $A_1$ , que é feita com a introdução da rotação  $\alpha$  nos pontos nodais localizados nos bordos curvos, da rotação  $\beta$  nos bordos retos e das rotações  $\alpha$  e  $\beta$  nos pontos nodais de interseção de bordos.

Os vetores com as componentes de deformação nos elementos do contorno são obtidos apenas modificando-se

convenientemente as expressões em diferenças finitas para as derivadas em (III.14), conforme cada caso.

### III.6.2.1 - Elemento A2

As expressões em diferenças finitas para as derivadas em (III.14) se escrevem agora:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r_1} \cdot \left( \alpha - \frac{w_1 - w_3}{\Delta r_1} \right)$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R} \quad \text{(III.18)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2}{R \cdot (\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1})} \cdot \left( \frac{w_4 - w_1}{R \cdot \Delta \phi_j} - \frac{w_1 - w_5}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

Tem-se então:

$$\tilde{\varepsilon}_a = \tilde{B}_a \cdot \tilde{\delta}_a \quad \text{(III.19)}$$

onde

$$\tilde{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ \alpha \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz  $B$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta r_i^2}$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\Delta r_i}$$

$$b_{13} = \frac{-2}{\Delta r_i^2}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R \cdot (\Delta\phi_j + \Delta\phi_{j+1})} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta\phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta\phi_{j+1}} \right)$$

$$b_{22} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{23} = 0$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R^2 \cdot (\Delta\phi_j + \Delta\phi_{j+1}) \cdot \Delta\phi_{j+1}}$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R^2 \cdot (\Delta\phi_j + \Delta\phi_{j+1}) \cdot \Delta\phi_j}$$

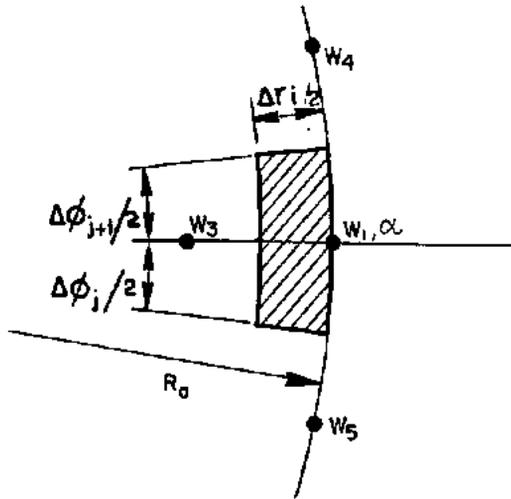


Figura III.6 - Elemento A2

## III.6.2.2 - Elemento A3

As expressões em diferenças finitas para as derivadas em (III.14) se escrevem agora:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r_i} \cdot \left( \frac{w_2 - w_1}{\Delta r_i} - \alpha \right)$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R} \quad (\text{III.20})$$

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2}{R \cdot (\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1})} \cdot \left( \frac{w_4 - w_1}{R \cdot \Delta \phi_j} - \frac{w_1 - w_5}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

Tem-se então:

$$\underline{\underline{e}}_a = \underline{\underline{B}}_a \cdot \underline{\underline{\delta}}_a \quad (\text{III.21})$$

onde

$$B_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\delta_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \alpha \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}$$

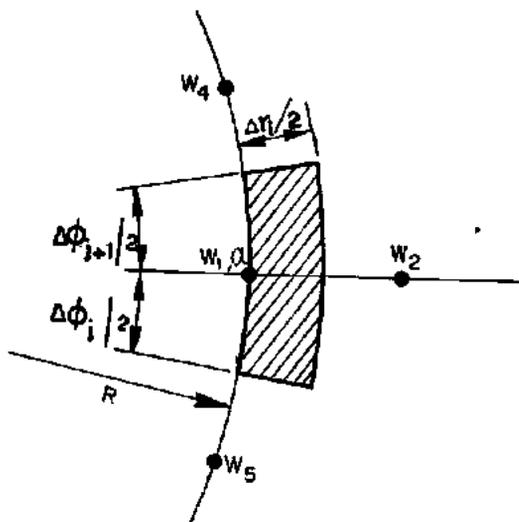


Figura III.7 - Elemento A3

Os elementos da matriz  $B_a$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta r_1^2}$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\Delta r_1^2}$$

$$b_{13} = \frac{2}{\Delta r_1}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R \cdot (\Delta\phi_j + \Delta\phi_{j+1})} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta\phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta\phi_{j+1}} \right)$$

$$b_{22} = 0$$

$$b_{23} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R^2 \cdot (\Delta\phi_j + \Delta\phi_{j+1}) \cdot \Delta\phi_{j+1}}$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R^2 \cdot (\Delta\phi_j + \Delta\phi_{j+1}) \cdot \Delta\phi_j}$$

## III.6.2.3 - Elemento A4

Expressões em diferenças finitas para as derivadas em (III.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \frac{2}{\Delta r_i + \Delta r_{i+1}} \cdot \left( \frac{w_2 - w_1}{\Delta r_{i+1}} - \frac{w_1 - w_3}{\Delta r_i} \right) \\ \frac{\partial w}{r \partial r} &= \frac{(w_2 - w_3)}{R \cdot (\Delta r_i + \Delta r_{i+1})} \\ \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} &= \frac{2}{R \cdot \Delta \phi_j} \cdot \left( \beta - \frac{w_1 - w_5}{R \cdot \Delta \phi_j} \right) \end{aligned} \quad (III.22)$$

Tem-se então:

$$\underline{\epsilon}_a = \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a \quad (III.23)$$

onde

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \beta \\ w_5 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz  $B_{\sim}$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta r_i + \Delta r_{i+1}} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right) \cdot \Delta r_{i+1}}$$

$$b_{13} = \frac{-2}{\left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right) \cdot \Delta r_i}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

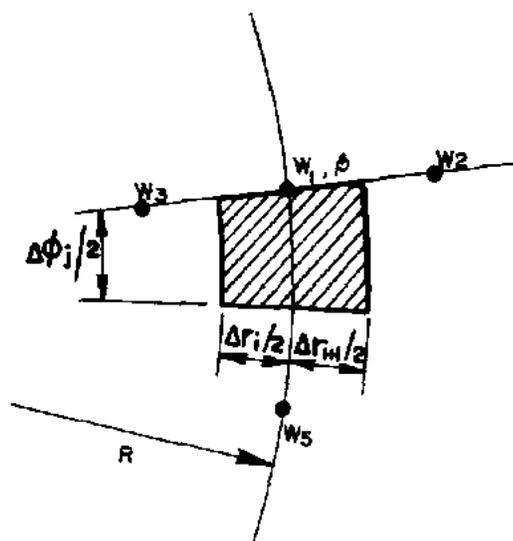
$$b_{21} = \frac{2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

$$b_{22} = \frac{-1}{R \cdot \left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right)}$$

$$b_{23} = \frac{1}{R \cdot \left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right)}$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R \cdot \Delta \phi_j}$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

Figura III.8 - Elemento A<sub>4</sub>III.6.2.4 - Elemento A<sub>5</sub>

As expressões em diferenças finitas para as derivadas em (III.14) se escrevem:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r_1 + \Delta r_{1+1}} \cdot \left( \frac{w_2 - w_1}{\Delta r_{1+1}} - \frac{w_1 - w_3}{\Delta r_1} \right)$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{(w_2 - w_3)}{R \cdot (\Delta r_1 + \Delta r_{1+1})} \quad (\text{III.24})$$

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2}{R \cdot \Delta \phi_j} \cdot \left( \frac{w_4 - w_1}{R \cdot \Delta \phi_j} - \beta \right)$$

Tem-se então:

$$\underline{\varepsilon}_a = \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a \quad (\text{III.25})$$

onde

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta \end{bmatrix}$$

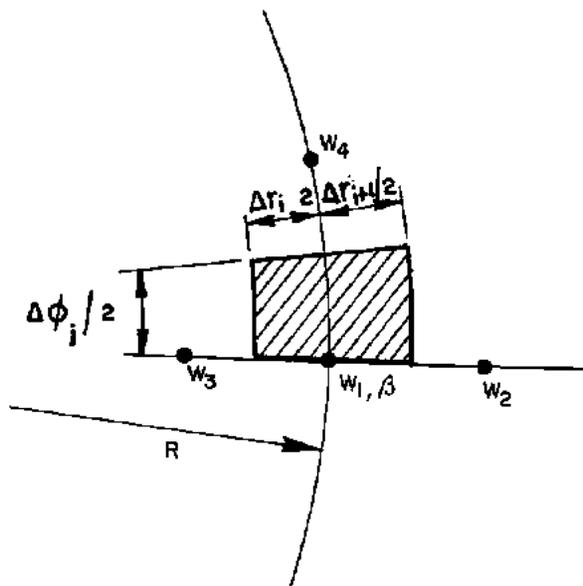


Figura III.9 - Elemento As

Os elementos da matriz  $B_a$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta r_i + \Delta r_{i+1}} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right) \cdot \Delta r_{i+1}}$$

$$b_{13} = \frac{-2}{\left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right) \cdot \Delta r_i}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

$$b_{22} = \frac{-1}{R \cdot \left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right)}$$

$$b_{23} = \frac{1}{R \cdot \left( \Delta r_i + \Delta r_{i+1} \right)}$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

$$b_{25} = \frac{2}{R \cdot \Delta \phi_j}$$

## III.6.2.5 - Elemento A6

Expressões das derivadas em diferenças finitas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r_1} \cdot \left( \alpha - \frac{w_1 - w_3}{\Delta r_1} \right)$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R} \quad (\text{III.26})$$

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2}{R \cdot \Delta \phi_j} \cdot \left( \beta - \frac{w_1 - w_5}{R \cdot \Delta \phi_j} \right)$$

Tem-se então:

$$\underline{\epsilon}_a = \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a \quad (\text{III.27})$$

onde

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ \alpha \\ w_3 \\ \beta \\ w_5 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz  $B_a$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta r_i^2}$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\Delta r_i}$$

$$b_{13} = \frac{-2}{\Delta r_i^2}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

$$b_{22} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{23} = 0$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R \cdot \Delta \phi_j}$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

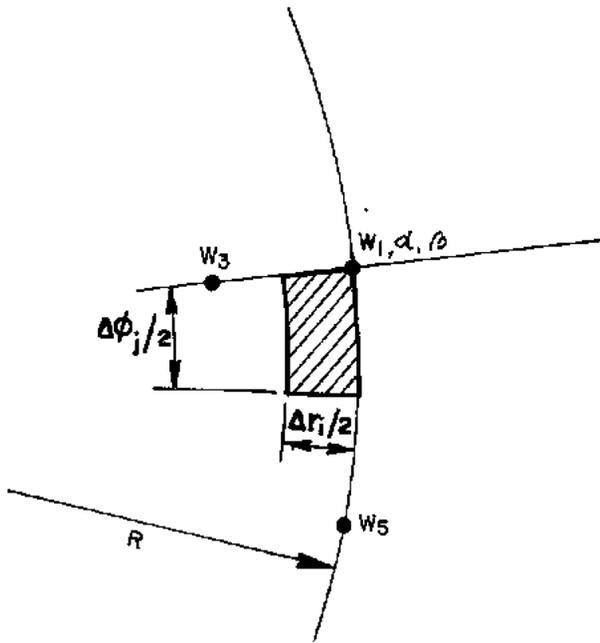


Figura III.10 - Elemento A6

## III.6.2.6 - Elemento A7

Expressões das derivadas em diferenças finitas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r_i} \cdot \left( \frac{w_2 - w_1}{\Delta r_i} - \alpha \right)$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R}$$

(III.28)

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2}{R \cdot \Delta \phi_j} \cdot \left( \frac{w_4 - w_1}{R \cdot \Delta \phi_j} - \beta \right)$$

Tem-se então:

$$\underline{\varepsilon}_a = \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a \quad (\text{III.29})$$

onde

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \alpha \\ w_4 \\ \beta \end{bmatrix}$$

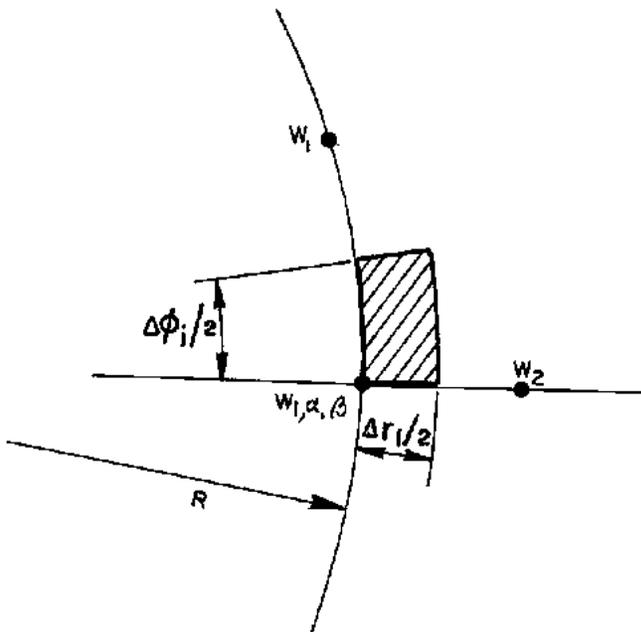


Figura III.11 - Elemento A7

Os elementos da matriz  $B_a$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta r_1^2}$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\Delta r_1^2}$$

$$b_{13} = \frac{2}{\Delta r_1}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

$$b_{22} = 0$$

$$b_{23} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

$$b_{25} = \frac{2}{R \cdot \Delta \phi}$$

## III.6.2.7 - Elemento As

Expressões das derivadas em diferenças finitas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r_1} \cdot \left( \alpha - \frac{w_1 - w_3}{\Delta r_1} \right)$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R} \quad (\text{III.30})$$

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2}{R \cdot \Delta \phi_j} \cdot \left( \frac{w_4 - w_1}{R \cdot \Delta \phi_j} - \beta \right)$$

Tem-se então:

$$\underline{\varepsilon}_a = \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a \quad (\text{III.31})$$

onde

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ \alpha \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz  $B_a$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta r_1^2}$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\Delta r_1}$$

$$b_{13} = \frac{-2}{\Delta r_1^2}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

$$b_{22} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{23} = 0$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

$$b_{25} = \frac{2}{R \cdot \Delta \phi_j}$$

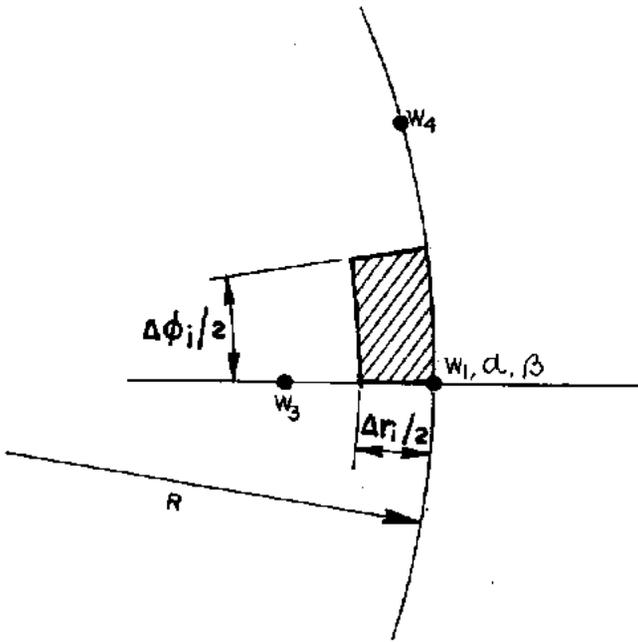


Figura III.12 - Elemento A8

## III.6.2.8 - Elemento A9

Expressões das derivadas em diferenças finitas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r_1} \cdot \left( \frac{w_2 - w_1}{\Delta r_1} - \alpha \right)$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R}$$

(III.32)

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2}{R \cdot \Delta \phi_j} \cdot \left( \beta - \frac{w_1 - w_5}{R \cdot \Delta \phi_j} \right)$$

Tem-se então:

$$\underline{\varepsilon}_a = \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a \quad (\text{III.33})$$

onde

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \alpha \\ \beta \\ w_5 \end{bmatrix}$$

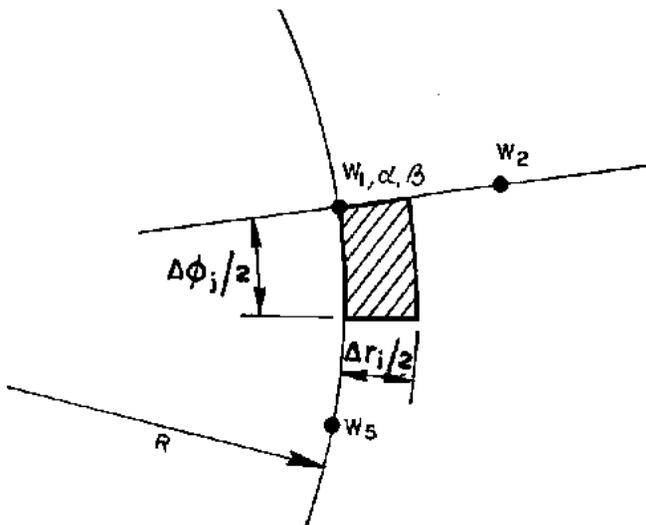


Figura III.13 - Elemento A9

Os elementos da matriz  $B$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\Delta r_i^2}$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\Delta r_i^2}$$

$$b_{13} = \frac{2}{\Delta r_i}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

$$b_{22} = 0$$

$$b_{23} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R \cdot \Delta \phi_j}$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R^2 \cdot \Delta \phi_j^2}$$

## III.6.2.9 - Elemento A10

O elemento A10 e os três subsequentes constituem os elementos implementados para a abordagem do canto reentrante.

Em função dos deslocamentos nodais  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ ,  $w_4$  e  $w_5$ , as derivadas segundas no ponto 1 do canto (Figura III.14), nas direções radial e circunferencial, podem ser expressas, respectivamente, como:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r_1 + \Delta r_{i+1}} \cdot \left( \frac{w_2 - w_1}{\Delta r_{i+1}} - \frac{w_1 - w_3}{\Delta r_1} \right) \quad (\text{III.34})$$

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2}{R \cdot (\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1})} \cdot \left( \frac{w_4 - w_1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} - \frac{w_1 - w_5}{R \cdot \Delta \phi_j} \right)$$

Definem-se  $\alpha$  e  $\beta$  por:

$$\alpha = \frac{w_2 - w_3}{\Delta r_1 + \Delta r_{i+1}} \quad (\text{III.35})$$

$$\beta = \frac{w_4 - w_5}{R \cdot (\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1})} \quad (\text{III.36})$$

Escrevendo  $w_3$  como função de  $\alpha$ , e  $w_4$  como função de  $\beta$ , tem-se:

$$w_3 = w_2 - \alpha \cdot (\Delta r_1 + \Delta r_{i+1}) \quad (\text{III.37})$$

$$w_4 = w_5 + \beta \cdot [R \cdot (\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1})]$$

Substituindo  $w_3$  e  $w_4$  assim definidos nas expressões das derivadas, tem-se então:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2 \cdot (w_2 - w_1)}{(\Delta r_i + \Delta r_{i+1})} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right) - \frac{2 \cdot \alpha}{\Delta r_i}$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R} \quad (\text{III.38})$$

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2 \cdot (w_5 - w_1)}{R \cdot (\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1})} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right) + \frac{2 \cdot \beta}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}}$$

Com estas expressões assim obtidas, escreve-se:

$$\underset{\sim}{\epsilon}_a = \underset{\sim}{B}_a \cdot \underset{\sim}{\delta}_a \quad (\text{III.39})$$

onde

$$\underset{\sim}{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \alpha \\ \beta \\ w_5 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz  $B_a$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\left(\Delta r_i + \Delta r_{i+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\left(\Delta r_i + \Delta r_{i+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{13} = \frac{2}{\Delta r_i}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R \cdot \left(\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

$$b_{22} = 0$$

$$b_{23} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}}$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R \cdot \left(\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

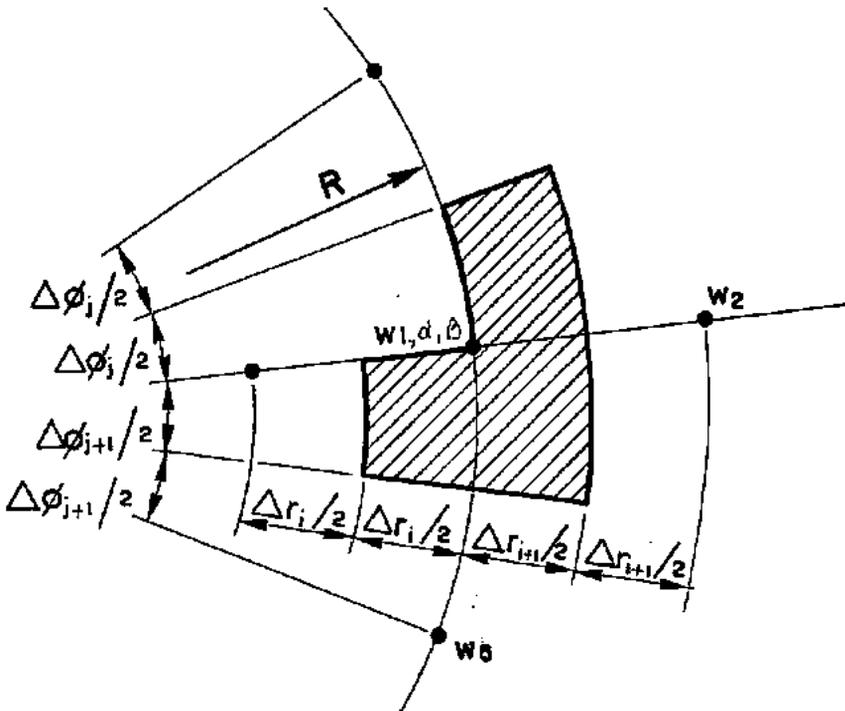


Figura III.14 - Elemento A10

## III.6.2.10 - Elemento A11

Expressões das derivadas em diferenças finitas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2 \cdot (w_2 - w_1)}{(\Delta r_i + \Delta r_{i+1})} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right) - \frac{2 \cdot \alpha}{\Delta r_i}$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R}$$

(III.40)

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2 \cdot (w_4 - w_1)}{R \cdot (\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1})} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right) - \frac{2 \cdot \beta}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}}$$

Tem-se então:

$$\underline{\varepsilon}_a = \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a$$

onde

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

(III.41)

$$\underline{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \alpha \\ w_4 \\ \beta \end{bmatrix}$$

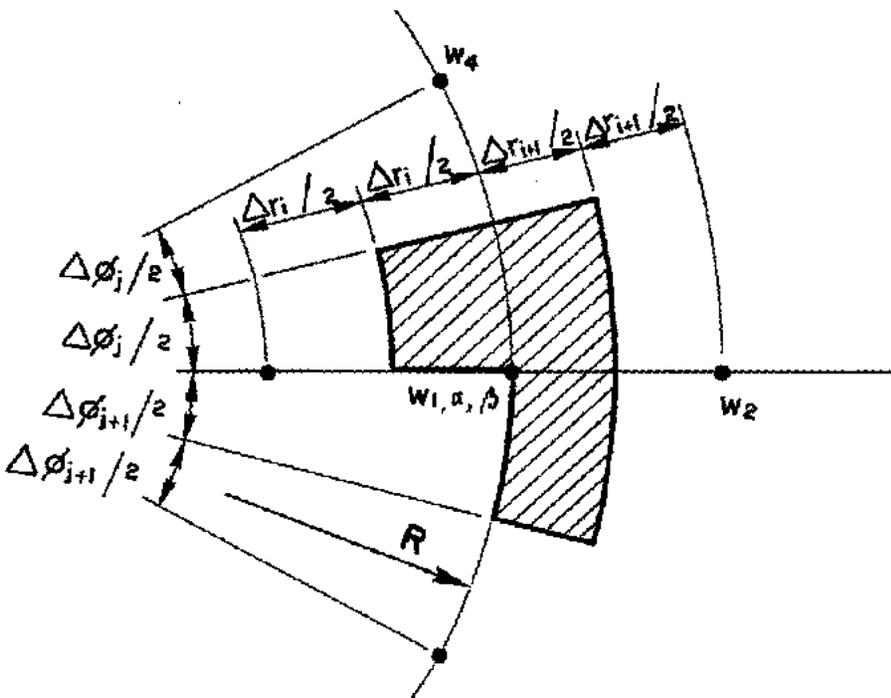


Figura III.15 - Elemento A11

Os elementos da matriz  $B_a$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\left(\Delta r_i + \Delta r_{i+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\left(\Delta r_i + \Delta r_{i+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{13} = \frac{2}{\Delta r_i}$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R \cdot \left(\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

$$b_{22} = 0$$

$$b_{23} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R \cdot \left(\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R \cdot \Delta \phi_j}$$

## III.6.2.11 - Elemento A12

Expressões das derivadas em diferenças finitas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2 \cdot (w_3 - w_1)}{(\Delta r_1 + \Delta r_{1+1})} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_1} + \frac{1}{\Delta r_{1+1}} \right) + \frac{2 \cdot \alpha}{\Delta r_{1+1}}$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R} \quad (\text{III.42})$$

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2 \cdot (w_5 - w_1)}{R \cdot (\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1})} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right) + \frac{2 \cdot \beta}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}}$$

Tem-se então:

$$\underline{\epsilon}_a = \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a \quad (\text{III.43})$$

onde

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ \alpha \\ w_3 \\ \beta \\ w_5 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz  $B_a$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\left(\Delta r_i + \Delta r_{i+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\Delta r_{i+1}}$$

$$b_{13} = \frac{-2}{\left(\Delta r_i + \Delta r_{i+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R \cdot \left(\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

$$b_{22} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{23} = 0$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}}$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R \cdot \left(\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

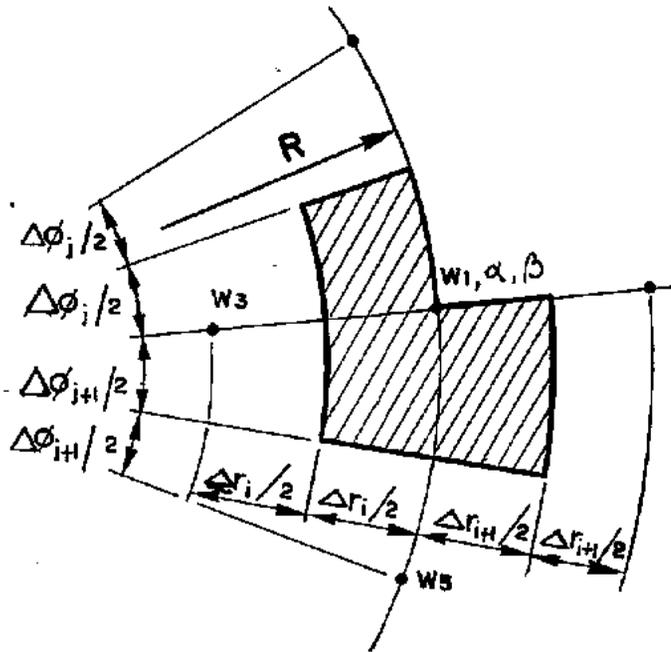


Figura III.16 - Elemento A12

## III.6.2.12 - Elemento A13

Expressões das derivadas em diferenças finitas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{2 \cdot (w_3 - w_1)}{(\Delta r_i + \Delta r_{i+1})} \cdot \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right) + \frac{2 \cdot \alpha}{\Delta r_i}$$

$$\frac{\partial w}{r \partial r} = \frac{\alpha}{R}$$

(III.44)

$$\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \phi^2} = \frac{2 \cdot (w_4 - w_1)}{R^2 (\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1})} \cdot \left( \frac{1}{\Delta \phi_j} + \frac{1}{\Delta \phi_{j+1}} \right) - \frac{2 \cdot \beta}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}}$$

Tem-se então:

$$\underline{\varepsilon}_a = \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a \quad (\text{III.45})$$

onde

$$\underline{B}_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta}_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ \alpha \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta \end{bmatrix}$$

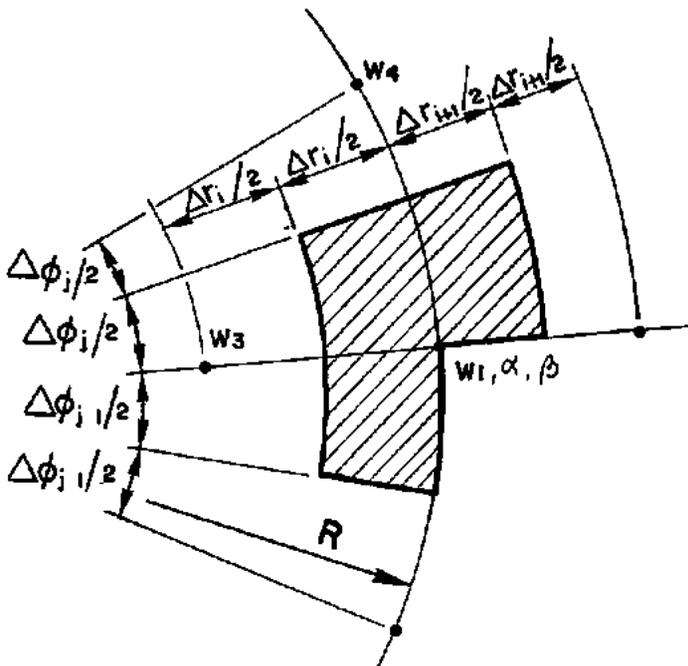


Figura III.17 - Elemento A13

Os elementos da matriz  $\underline{B}$  são expressos por:

$$b_{11} = \frac{2}{\left(\Delta r_i + \Delta r_{i+1}\right)} \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{12} = \frac{-2}{\Delta r_i}$$

$$b_{13} = \frac{-2}{\left(\Delta r_i + \Delta r_{i+1}\right)} \left( \frac{1}{\Delta r_i} + \frac{1}{\Delta r_{i+1}} \right)$$

$$b_{14} = 0$$

$$b_{15} = 0$$

$$b_{21} = \frac{2}{R \cdot \left(\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

$$b_{22} = \frac{-1}{R}$$

$$b_{23} = 0$$

$$b_{24} = \frac{-2}{R \cdot \left(\Delta \phi_j + \Delta \phi_{j+1}\right)} \cdot \left( \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_j} + \frac{1}{R \cdot \Delta \phi_{j+1}} \right)$$

$$b_{25} = \frac{-2}{R \cdot \Delta \phi_j}$$

## III.7 - Equações de Equilíbrio

A contribuição de cada elemento para a energia potencial total da placa, com base nas expressões (III.5), (III.6) e (III.11) pode ser assim estabelecida, em função do tipo de solicitação (fletores ou torçor):

$$\Pi_a = \frac{1}{2} \int_{A_a} \delta_a^T \cdot \underset{\sim}{B}_a^T \cdot \underset{\sim}{D}_a \cdot \underset{\sim}{B}_a \cdot \delta_a \cdot dA_a - \delta_a^T \underset{\sim}{Q} \quad (\text{III.46})$$

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_{A_b} \delta_b^T \cdot \underset{\sim}{B}_b^T \cdot \underset{\sim}{D}_b \cdot \underset{\sim}{B}_b \cdot \delta_b \cdot dA_b \quad (\text{III.47})$$

incorporando-se em  $\Pi_a$  o potencial das cargas. Observe-se que  $\underset{\sim}{Q}$  representa o vetor de forças nodais, dado por:

$$\underset{\sim}{Q} = \left[ \begin{array}{ccccc} q & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T \quad (\text{III.48})$$

sendo

$$q = \int_{A_a} \bar{p} \cdot dA$$

onde  $\bar{p}$  representa a carga distribuída sobre os elementos do tipo A.

Como as matrizes envolvidas nas expressões (III.46) e (III.47) são constantes, tais expressões podem ser reescritas na forma:

$$\Pi_a = \frac{1}{2} \cdot \delta_a^T \cdot \underset{\sim}{B}_a^T \cdot \underset{\sim}{D}_a \cdot \underset{\sim}{B}_a \cdot \delta_a \cdot A_a - \delta_a^T \underset{\sim}{Q} \quad (\text{III.49})$$

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \cdot \delta_b^T \cdot \underset{\sim}{B}_b^T \cdot \underset{\sim}{D}_b \cdot \underset{\sim}{B}_b \cdot \delta_b \cdot A_b \quad (\text{III.50})$$

Portanto, varrendo os diversos elementos pode-se escrever para a estrutura:

$$\Pi^* = \sum_{i=1}^{N_a} \Pi_a^i + \sum_{i=1}^{N_b} \Pi_b^i \quad (\text{III.51})$$

com  $N_a$  e  $N_b$  denotando o número total de elementos associados, respectivamente, à contribuição dos momentos fletores e torçor.

As equações de equilíbrio são então obtidas mediante a minimização da energia potencial total da estrutura, podendo-se escrevê-las na forma:

$$\underline{\underline{K}}^* \cdot \underline{\underline{\delta}}^* = \underline{\underline{Q}}^* \quad (\text{III.52})$$

onde  $\underline{\underline{K}}^*$  é a matriz de rigidez,  $\underline{\underline{\delta}}^*$  o vetor de deslocamentos nodais e  $\underline{\underline{Q}}^*$  o vetor de cargas nodais relativos à estrutura.

A matriz  $\underline{\underline{K}}^*$  é montada através da coleta da contribuição dos diversos elementos dos tipos A e B, considerando-se para cada elemento, em função da solicitação:

$$\underline{\underline{K}}_a = \underline{\underline{B}}_a^T \cdot \underline{\underline{D}}_a \cdot \underline{\underline{B}}_a \cdot A_a \quad (\text{III.53})$$

$$\underline{\underline{K}}_b = \underline{\underline{B}}_b^T \cdot \underline{\underline{D}}_b \cdot \underline{\underline{B}}_b \cdot A_b \quad (\text{III.54})$$

Portanto, simbolicamente, tem-se:

$$\underline{\underline{K}}^* = \sum_{\text{Est.}} (\underline{\underline{K}}_a + \underline{\underline{K}}_b) \quad (\text{III.55})$$

### III.8 - Esforços Internos

Obtidos os deslocamentos nodais da estrutura é possível então calcular os momentos atuantes. Para tanto é preciso compor para cada elemento seu vetor de deslocamentos; para os elementos do tipo A são avaliados os momentos fletores na forma:

$$\underline{M} = \underline{D}_a \cdot \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a \quad (\text{III.56})$$

e, para os do tipo B, calculado o momento torçor no centro de cada elemento pela expressão:

$$\underline{M} = \underline{D}_b \cdot \underline{B}_b \cdot \underline{\delta}_b \quad (\text{III.57})$$

# CAPÍTULO IV

## PROGRAMAÇÃO

### IV.1 - Introdução

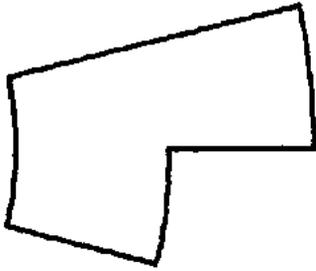
Neste capítulo é descrito o programa elaborado de acordo com a formulação apresentada neste trabalho, para a análise linear de placas que possuem cantos reentrantes.

O programa foi desenvolvido na linguagem FORTRAN77, podendo ser executado em micro-computadores PC compatíveis ou mainframes. Entre as diversas configurações geométricas que podem advir da combinação de regiões quadriláteras que formem cantos reentrantes, foram consideradas no programa as configurações mostradas na Figura IV.1. Adicionalmente, a combinação destas configurações foi levada em conta, sendo possível analisar estruturas cuja geometria seja formada por até cinco configurações combinadas.

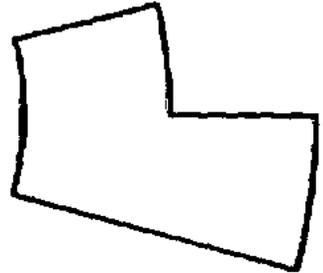
Como dados necessários à execução do programa, devem ser fornecidas as especificações relativas ao material, geometria, malha de discretização, condições de contorno e carregamento.

A malha de discretização empregada na análise pode possuir diferentes valores de espaçamento em quaisquer direções, o que permite maior refinamento nas áreas de interesse.

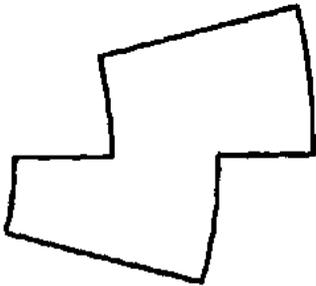
O método de armazenamento da matriz de rigidez da estrutura faz uso da técnica de eliminação de linhas e colunas do sistema de equações algébricas correspondentes aos graus de liberdade restringidos. Para a resolução do sistema de equações algébricas lineares foi utilizado o Método de Gauss.



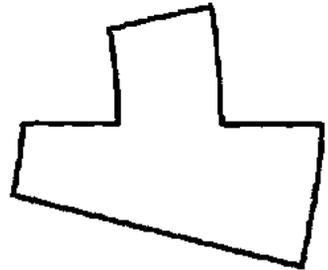
a) TIPO 1



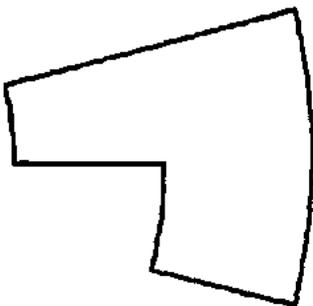
b) TIPO 2



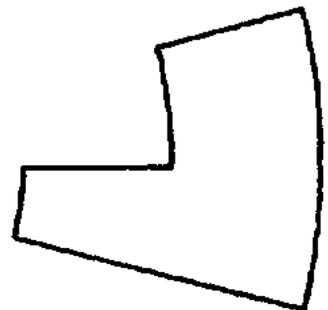
c) TIPO 3



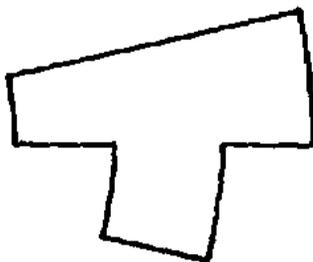
d) TIPO 4



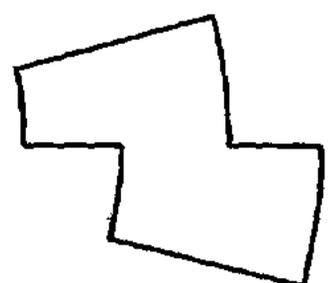
e) TIPO 5



f) TIPO 6



g) TIPO 7



h) TIPO 8

Figura IV.1 - Configurações Geométricas

## IV.2 - Descrição do programa

### IV.2.1 - Entrada de dados

Os dados necessários para a execução do programa são descritos a seguir:

#### a) Características elásticas

módulo de elasticidade radial  
 módulo de elasticidade circunferencial  
 módulo de cisalhamento  
 coeficiente de Poisson radial  
 coeficiente de Poisson circunferencial

#### b) Características geométricas e da malha de discretização

número de regiões quadrangulares  
 raio interno da  $i$ -ésima região  
 número de divisões radiais da  $i$ -ésima região  
 número de divisões circunferenciais da  $i$ -ésima região  
 espaçamento da  $j$ -ésima divisão radial  
 espaçamento da  $j$ -ésima divisão circunferencial  
 espessura

A partir dos dados fornecidos, a geração das conectividades é feita automaticamente pelo programa, a partir da numeração dos nós efetuada internamente, iniciando pela extremidade inferior esquerda (ponto de menor valor de  $\phi$ ) e seguindo varrendo-se primeiro o eixo R e depois o eixo  $\phi$ .

#### c) Condições de contorno

A primeira informação a ser dada é o número total de graus de liberdade que possuem restrições e, a seguir, de acordo com a numeração dos graus de liberdade já estabelecida, deve ser fornecido o número

de cada restrição, sendo tais números armazenados no vetor GLR.

A partir do vetor GLR, o programa faz então a montagem de um vetor auxiliar (AUX) que contém em sua  $i$ -ésima posição os valores zero, se o correspondente grau de liberdade é restringido, ou 1, em caso contrário.

Baseado no vetor AUX, é feita a montagem do vetor CT, onde os valores nulos são mantidos inalterados, e os valores unitários do vetor AUX são acumulados, obtendo-se assim um vetor onde as posições correspondentes a graus de liberdade sem restrição estão numerados em ordem crescente.

#### e) Carregamento

Foram previstos quatro casos de carregamento:  
 carga uniformemente distribuída  
 carga não uniformemente distribuída  
 carga momento aplicado

Para o caso de carregamento uniformemente distribuído, a geração do vetor de forças externas  $Q^*$  é feita automaticamente, devendo-se informar apenas a taxa de carga, enquanto que o programa calcula o valor das forças nodais em função da área de cada elemento (do tipo A).

Para os demais tipos de carregamento devem ser fornecidos os números dos pontos nodais onde atuam forças externas e o valor destas cargas.

#### IV.2.2 - Cálculo da semi-largura de banda

O cálculo da semi-largura de banda é necessário para que se possa dimensionar a matriz de rigidez da estrutura. Sendo função da matriz de conectividades (CNT) e do vetor que fornece as condições de contorno (CT), a semi-largura de banda é calculada ordenando-se em ordem crescente as conectividades de cada elemento; a diferença

entre os valores das conetividades que tem deslocamento livre (dado pelo vetor CT) fornece um valor para a semi-largura de banda. Varrendo-se toda a matriz de conetividades de acordo com este procedimento, o maior dos valores das diversas semi-larguras de banda fornece o valor final da semi-largura de banda.

#### IV.2.3 - Montagem e espalhamento das matrizes associadas aos elementos na matriz de rigidez da estrutura

Aproveitando as características de simetria e esparsidade da matriz de rigidez da estrutura obtida através do M.E.D., é utilizada a técnica de armazenamento na qual matrizes simétricas e em banda são armazenadas em matrizes retangulares com dimensão (número de graus de liberdade sem restrição) x (semi-largura de banda). Utiliza-se também a técnica de eliminação de linhas e colunas do sistema de equações algébricas, correspondentes aos graus de liberdade com restrição. Para tanto, é empregado o vetor CT, que indica com um valor nulo em sua i-ésima posição que as i-ésimas linhas e colunas serão suprimidas da matriz de rigidez da estrutura; o valor "1" na n-ésima posição indica que as n-ésimas linhas e colunas passam a ser respectivamente as i-ésimas após a eliminação daquelas linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade restringidos.

Para as etapas de montagem e espalhamento das matrizes relativas aos elementos na matriz de rigidez da estrutura, foram elaboradas sub-rotinas distintas.

Na sub-rotina que faz a montagem da matriz  $K_a$  ou  $K_b$  de cada elemento é efetuado o produto

$$\tilde{K}_a = \tilde{B}_a^T \cdot \tilde{D}_a \cdot \tilde{B}_a \cdot A_a$$

$$\tilde{K}_b = \tilde{B}_b^T \cdot \tilde{D}_b \cdot \tilde{B}_b \cdot A_b$$

onde as áreas de cada elemento, assim como seu respectivo raio de curvatura são calculados a partir do número de divisões da malha utilizada e dos valores de cada um destes intervalos, segundo as direções radial e circunferencial.

Na sub-rotina que faz o espalhamento, os coeficientes da matriz de cada elemento são espalhados na matriz de rigidez da estrutura nas posições correspondentes aos valores das conetividades que não tem deslocamento restringido, fazendo-se uso do vetor CT.

#### IV.2.4 - Resolução do sistema de equações

A resolução do sistema de equações lineares de equilíbrio é feita pelo Método de Gauss, com um algoritmo específico para a técnica de armazenamento utilizada<sup>[30]</sup>.

#### IV.2.5 - Cálculo dos esforços internos

Os momentos fletores e torçor são avaliados em cada elemento respectivo (fletores para o tipo A e torçor para o tipo B), através das expressões:

$$\underline{M}_a = \underline{D}_a \cdot \underline{B}_a \cdot \underline{\delta}_a$$

$$\underline{M}_b = \underline{D}_b \cdot \underline{B}_b \cdot \underline{\delta}_b$$

onde o vetor de deslocamentos é montado para cada elemento a partir dos valores dos deslocamentos nodais obtidos com a resolução do sistema de equações e das conetividades; o produto D.B foi efetuado quando foram montadas as respectivas matrizes de cada elemento e armazenados numa matriz auxiliar, para evitar a necessidade de reconstituição de tais matrizes.

## CAPÍTULO V

## RESULTADOS NUMÉRICOS

## V.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados resultados obtidos através do programa elaborado de acordo com a formulação apresentada neste trabalho.

Efetou-se a análise linear, em coordenadas cilíndricas, de placas com espessura constante. Os dados obtidos são apresentados em forma de tabelas e gráficos, através dos quais pode-se pesquisar a convergência dos resultados obtidos para os deslocamentos nodais e momentos fletores, quando comparados com os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos (M.E.F.).

Para a análise via elementos finitos, foi utilizado o programa COSMOS/M, versão 1.61, desenvolvido pela S.R.A.C. - Structural Research and Analysis Corporation para micro-computadores 386.

Apesar da formulação empregada considerar que o material é ortotrópico, em todos os exemplos foi admitida isotropia, por facilidade de comparação de resultados; além disso, para os exemplos com geometria retangular fez-se a simulação mediante o uso de um raio de curvatura muito maior que as principais dimensões da placa.

## V.2 - Exemplos

### V.2.1 - Exemplo 1: Placa quadrada com furo concêntrico quadrado apoiada nos bordos interno e externo e carregada uniformemente

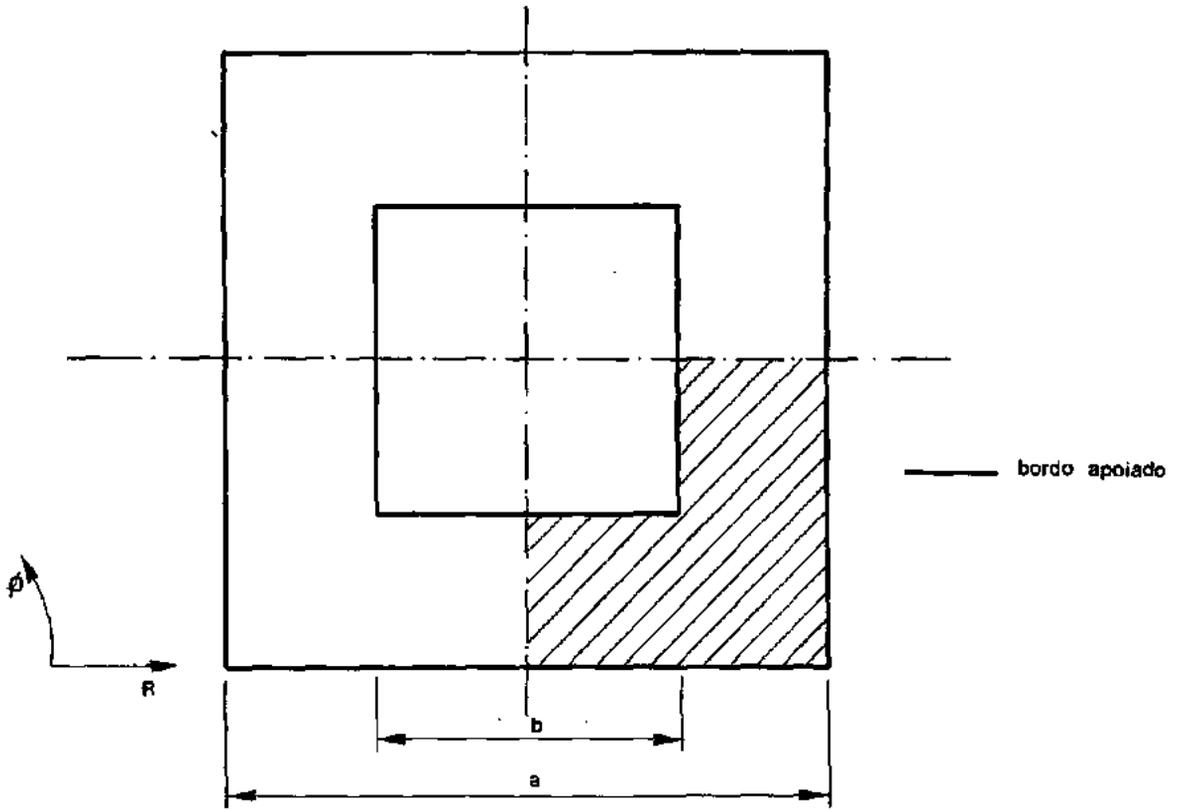
Analisou-se através do Método da Energia Discretizada (M.E.D.), com o uso de malhas de diferentes espaçamentos, uma placa quadrada com furo concêntrico também quadrado, apoiada em ambos os bordos e sujeita a um carregamento uniforme unitário.

Aproveitando a forma geométrica regular e simétrica, foi discretizado somente 1/4 da placa. Na Figura V.1 é mostrada a geometria da placa e a parte discretizada. Foram utilizados quatro diferentes tipos de malha, os quais são mostrados nas Figuras V.2 a V.5.

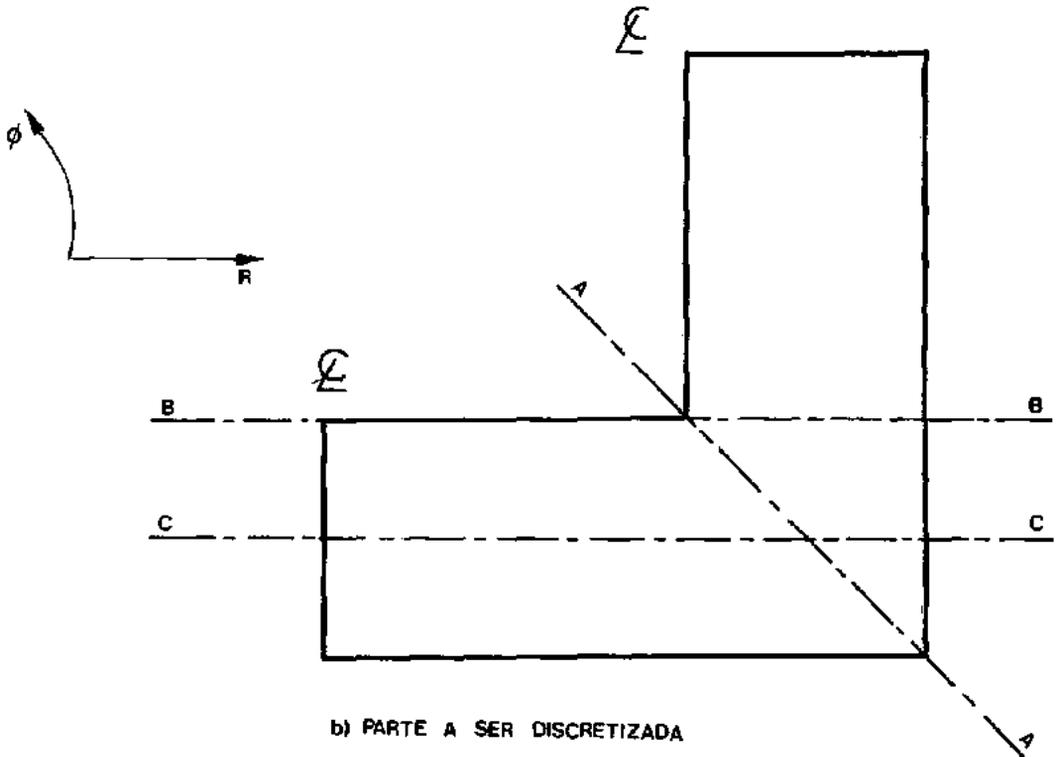
Para a análise via elementos finitos, foi utilizada, após alguns testes, a malha mostrada na Figura V.6.

As características elásticas e geométricas da estrutura são as seguintes:

Módulo de Elasticidade	$E = 3,0 \text{ E}07 \text{ lb/in}^2$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Comprimento do lado externo	$a = 20 \text{ in}$
Comprimento do lado interno	$b = 12 \text{ in}$
Raio de Curvatura	$R = 1,0 \text{ E}08 \text{ in}$
Espessura	$h = 0,25 \text{ in}$



a) GEOMETRIA



b) PARTE A SER DISCRETIZADA

Figura V.1

cotas em in.

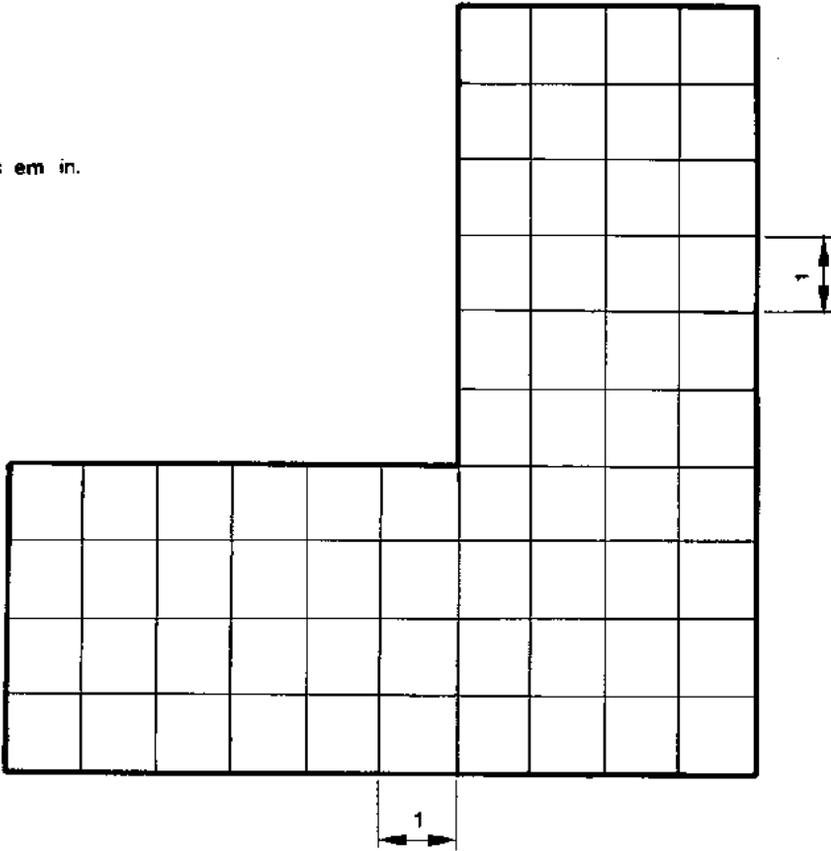


Figura V.2 - Malha M1

cotas em in.

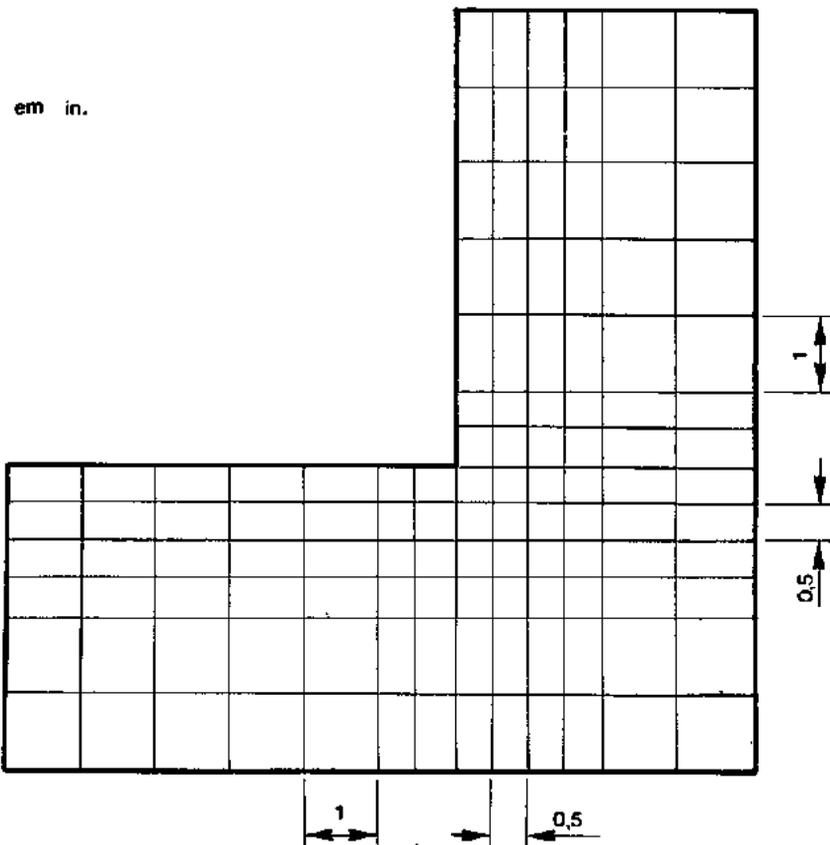


Figura V.3 - Malha M2

cotas em in.

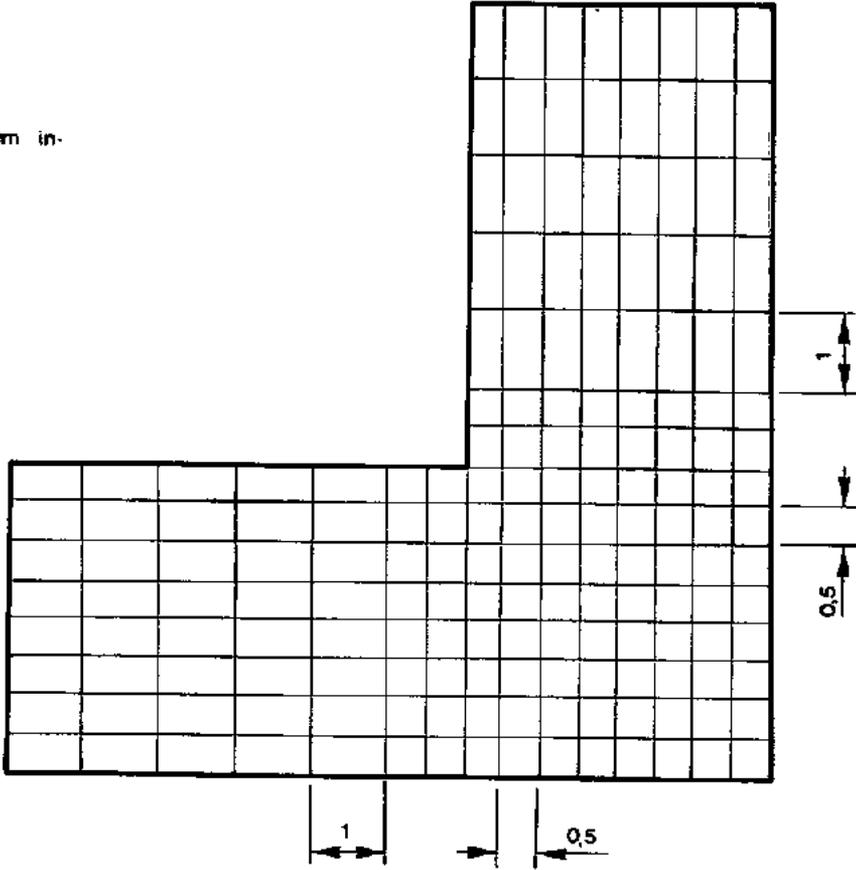


Figura V.4 - Malha M3

cotas em in.

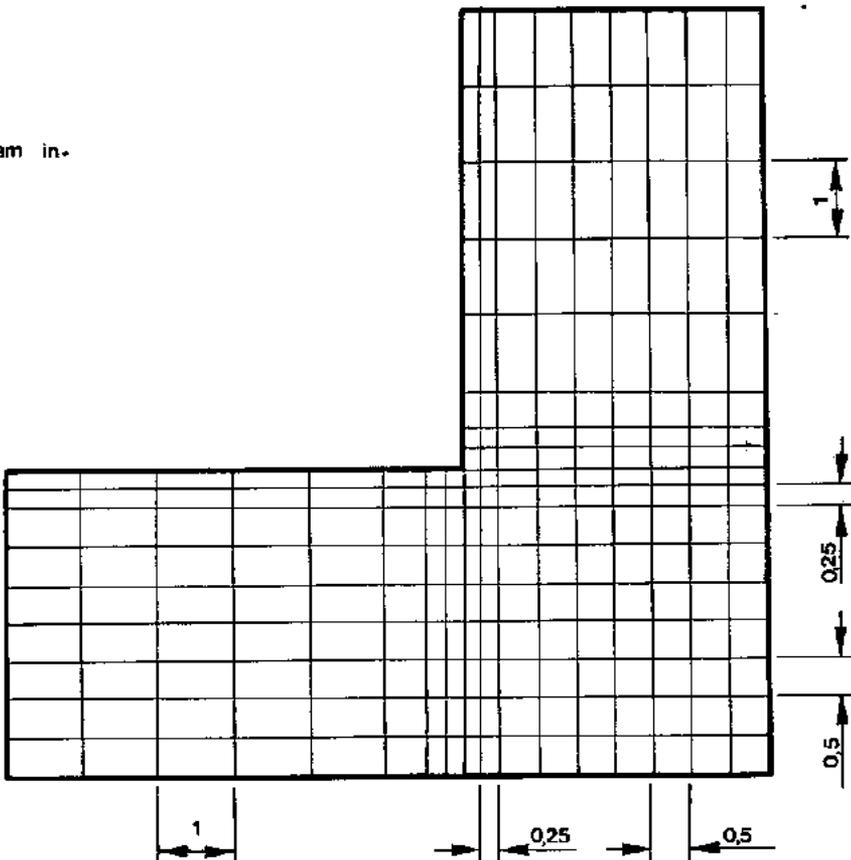


Figura V.5 - Malha M4

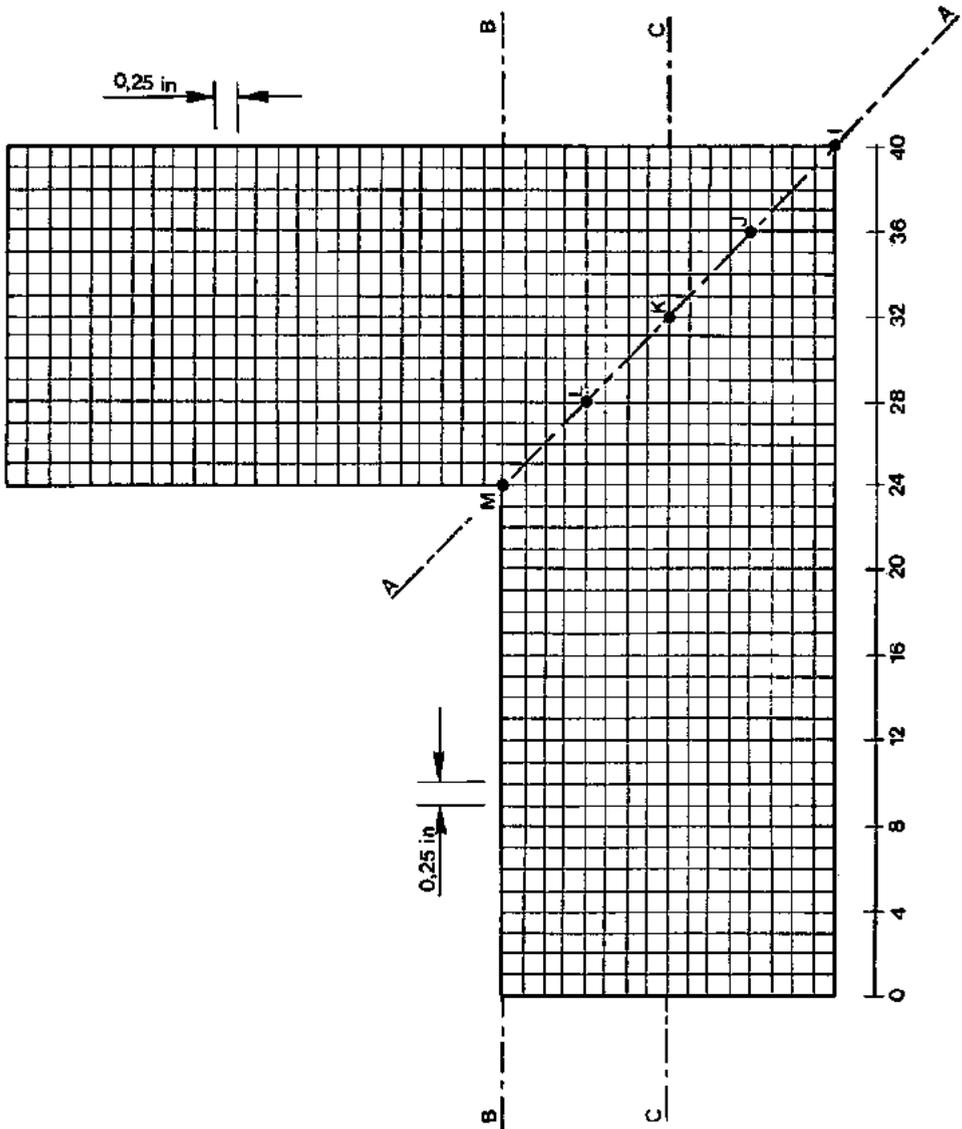


Figura V.6 - Malha utilizada para análise via M.E.F.

Os deslocamentos nodais e os momentos fletores radiais ocasionados pelo carregamento uniformemente distribuído de taxa "q" são dados pelas seguintes expressões:

$$w = K_1 \cdot \frac{q \cdot a^4}{D} \quad (V.1)$$

$$M_r = K_2 \cdot q \cdot a^2 \quad (V.2)$$

Na Tabela V.1 são apresentados os resultados fornecidos pelo M.E.D., com os diferentes tipos de malha, para a constante multiplicadora  $K_1$  ao longo da seção A-A (Figura V.1), também os correspondentes valores obtidos pelo M.E.F. (discretização da Figura V.6), e ainda a diferença percentual entre resultados.

MALHA PONTO	M.E.F.	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)	M4	Dif (%)
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	0,0057	0,0059	-3,5	0,0058	-1,8	0,0057	0	0,0057	0
K	0,0141	0,0143	-1,4	0,0136	3,5	0,0138	2,1	0,0141	0
L	0,0123	0,0123	0	0,0117	4,9	0,0119	3,3	0,0121	1,6
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela V.1 - Coeficientes  $K_1$  para a seção A-A

Na Figura V.7 são mostrados graficamente os resultados obtidos para as constantes multiplicadoras  $K_1$  ao longo da seção A-A.

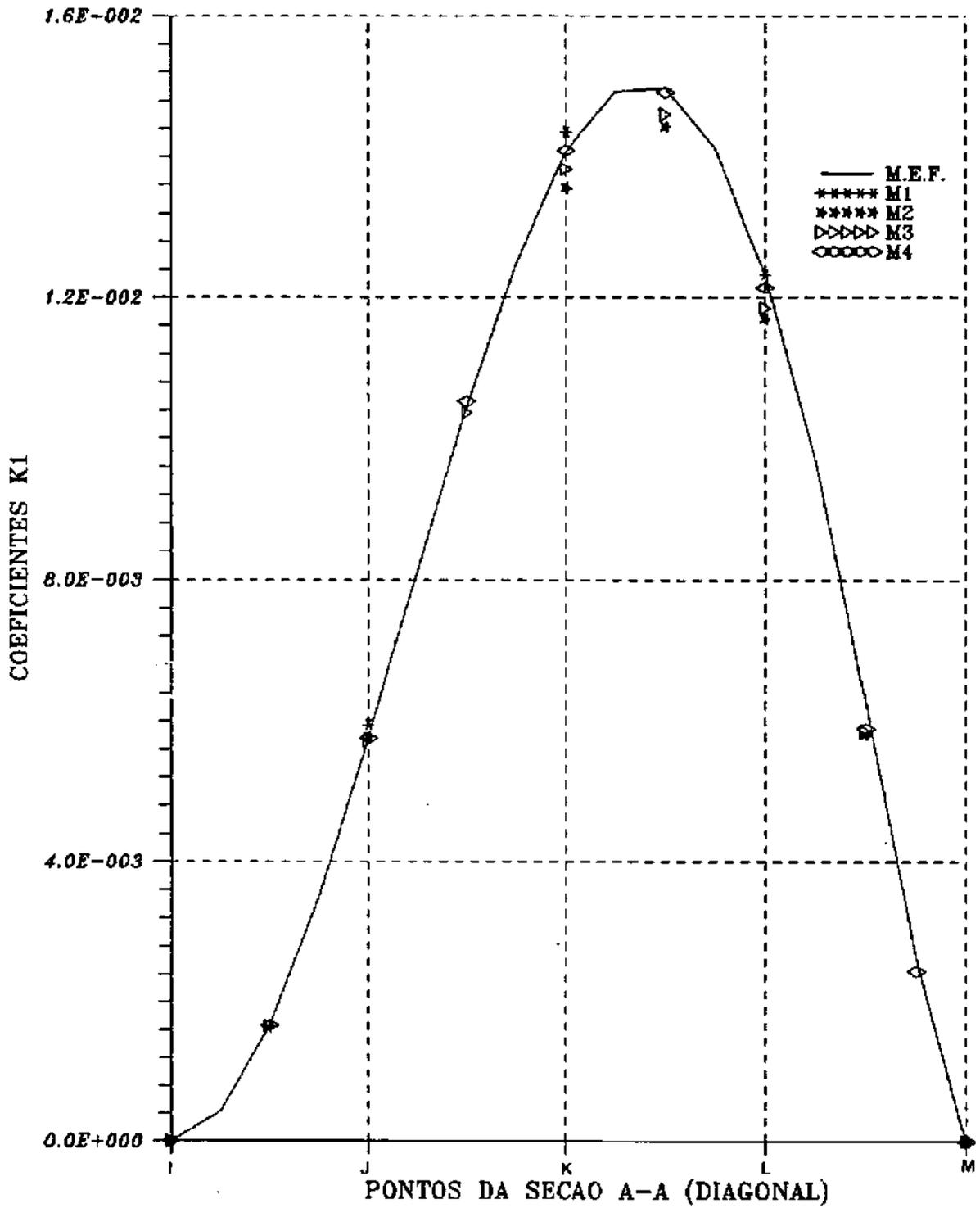


Figura V.7 - Deslocamentos ao longo da seção A-A

A Tabela V.2 apresenta os valores dos coeficientes  $K_1$  relativos os diversos pontos situados na seção B-B (Figura V.1) para as diversas malhas, enquanto que na Tabela V.3 são apresentados os respectivos valores dos coeficientes  $K_2$  para esta seção.

MALHA PONTO	M.E.F	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)	M4	Dif (%)
B24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B28	0,088	0,081	8,0	0,081	8,0	0,082	6,8	0,086	2,3
B32	0,143	0,139	2,8	0,137	4,2	0,138	3,5	0,142	0,7
B36	0,107	0,106	0,9	0,103	3,7	0,105	1,9	0,107	0,0
B40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela V.2 - Coeficientes  $K_1$  para a seção B-B ( $\cdot 10^{-4}$ )

MALHA PONTO	M.E.F.	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)	M4	Dif (%)
B24	-2,440	-0,840	65,6	-1,375	43,6	-1,380	43,4	-2,150	11,9
B28	0,121	0,014	88,4	0,078	35,5	0,076	37,2	0,109	9,9
B32	0,360	0,330	8,3	0,350	2,8	0,350	2,8	0,355	1,4
B36	0,305	0,293	3,9	0,297	2,6	0,298	2,3	0,300	1,6
B40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela V.3 - Coeficientes  $K_2$  para a seção B-B ( $\cdot 10^{-2}$ )

— MEF  
 \* \* \* \* \* M1  
 ● ● ● ● M2  
 ○ ○ ○ ○ M3  
 ▶ ▶ ▶ ▶ M4

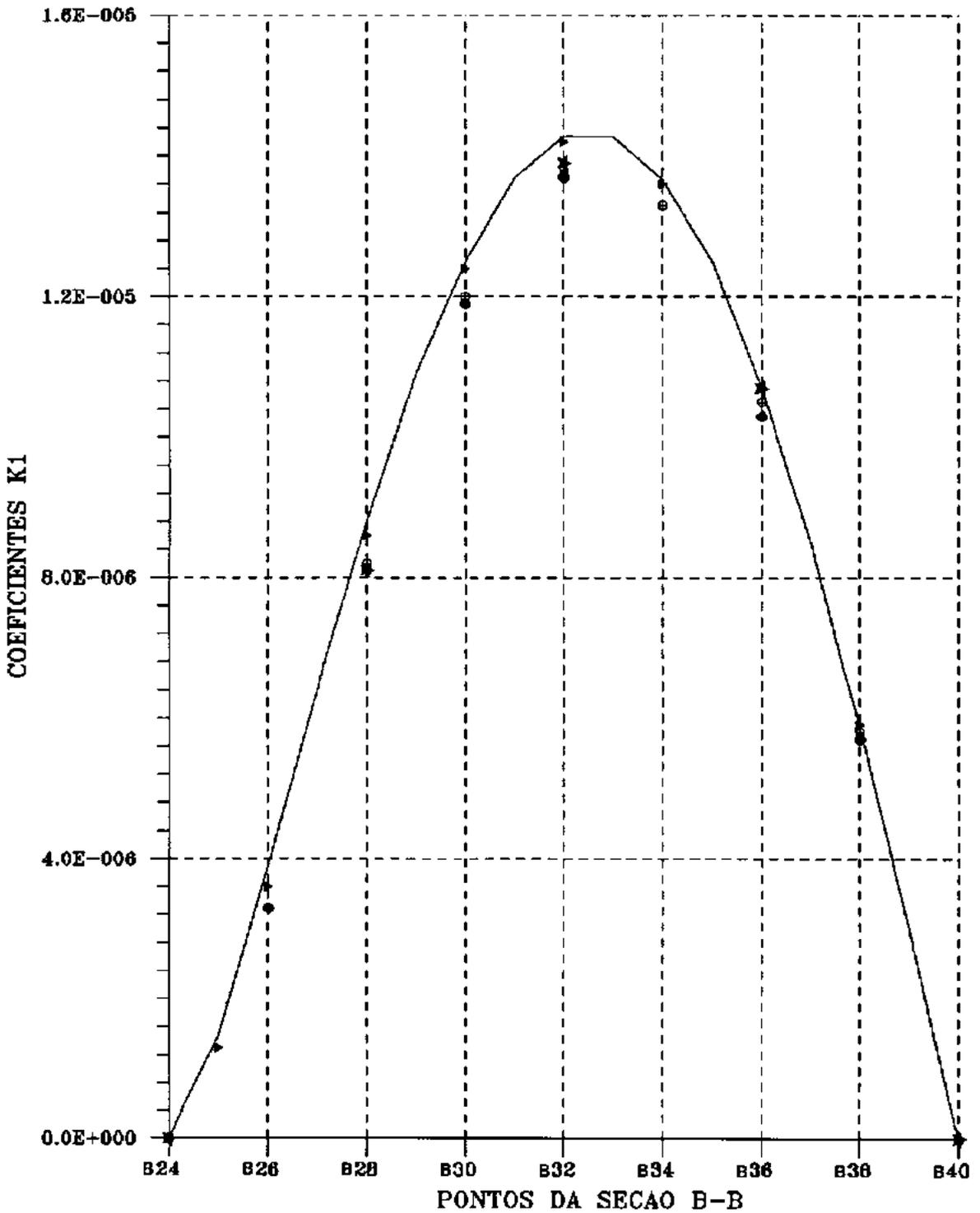


Figura V.8 - Deslocamentos para a seção B-B

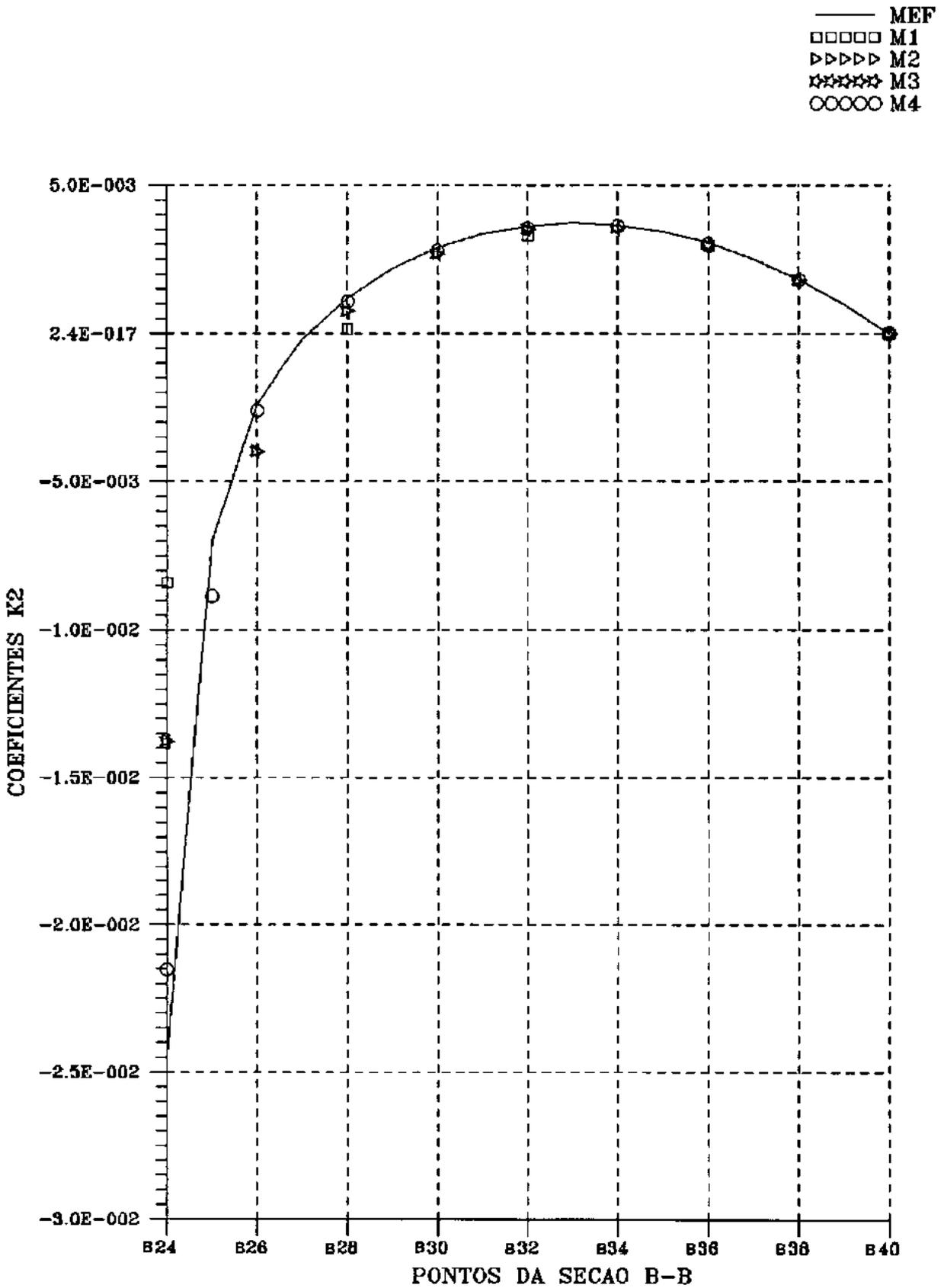


Figura V.9 - Momentos Fletores Radiais para a seção B-B

A Tabela V.4 e a Figura V.10 apresentam os valores dos coeficientes  $K_1$  para os diversos pontos situados na seção C-C (Figura V.1) com o uso das diversas malhas.

MALHA PONTO	M.E.F.	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)	M4	Dif (%)
C0	2,006	2,098	-4,6	2,018	-0,6	2,028	-1,1	2,009	-0,1
C4	1,991	2,081	-4,5	2,002	-0,6	2,012	-1,1	2,007	-0,8
C8	1,940	2,027	-4,5	1,950	-0,5	1,961	-1,1	1,957	-0,9
C12	1,850	1,926	-4,1	1,851	-0,1	1,863	-0,7	1,862	-0,6
C16	1,710	1,766	-3,3	1,694	0,9	1,708	0,1	1,719	-0,5
C20	1,530	1,559	-1,9	1,493	2,4	1,506	1,6	1,526	0,3
C24	1,428	1,393	2,5	1,373	3,9	1,384	3,1	1,416	0,8
C28	1,470	1,479	-0,6	1,416	3,7	1,434	2,4	1,464	0,4
C32	1,410	1,434	-1,7	1,356	3,8	1,383	1,9	1,408	0,1
C36	0,910	0,939	-3,2	0,885	2,7	0,904	0,7	0,908	0,2
C40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela V.4 - Coeficientes  $K_1$  para a seção C-C ( $\cdot 10^{-5}$ )

— MEF  
 □□□□ M1  
 ▷▷▷▷ M2  
 ×××× M3  
 ○○○○ M4

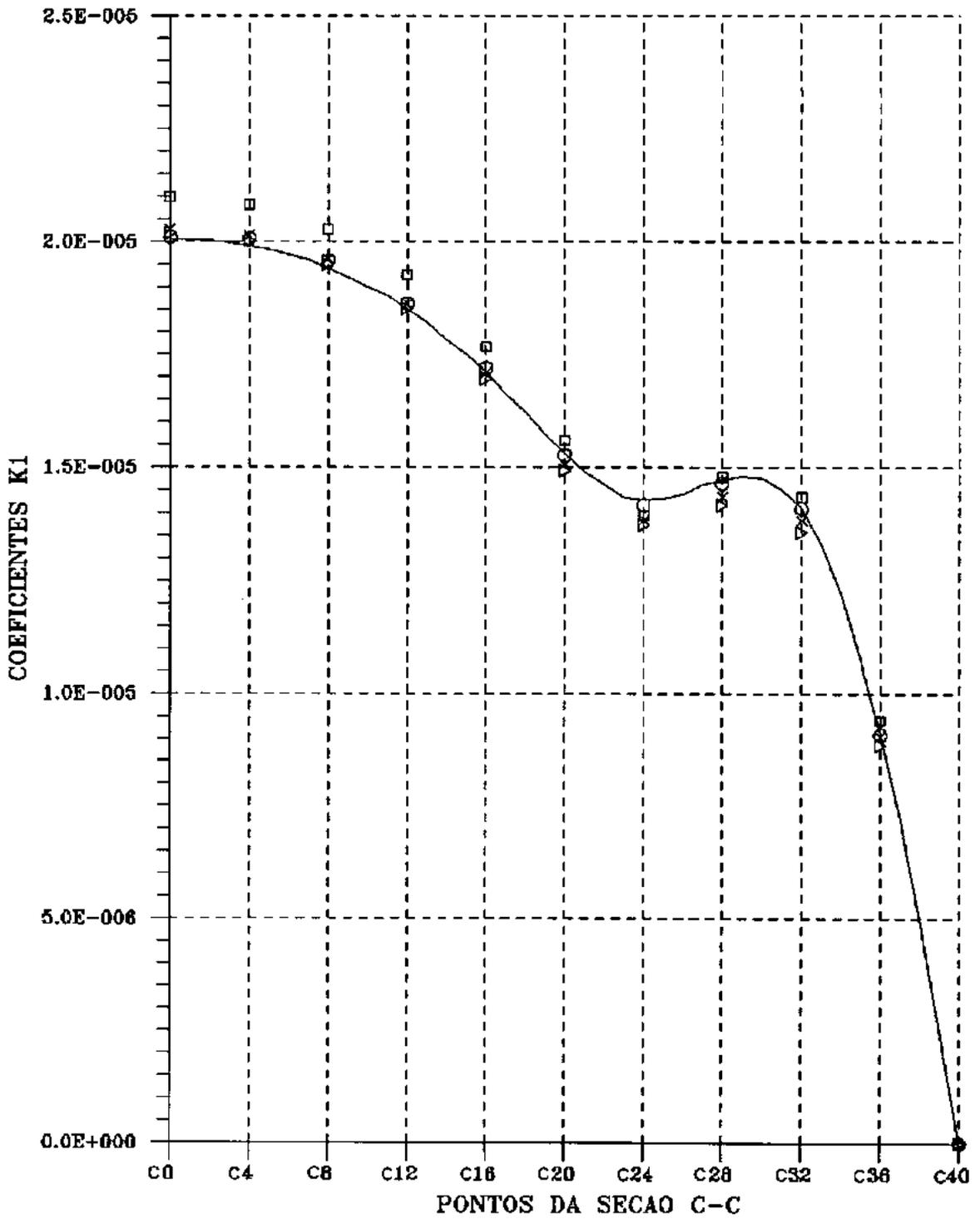


Figura V.10 - Deslocamentos ao longo da seção C-C

A Tabela V.5 e a Figura V.11 apresentam os valores das contantes multiplicadoras  $K_2$  para a seção C-C.

MALHA PONTO	M.E.F.	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)	M4	Dif (%)
C0	1,568	1,570	-0,1	1,567	0,1	1,566	0,1	1,563	0,3
C4	1,574	1,575	-0,1	1,572	0,1	1,571	0,2	1,568	0,4
C8	1,582	1,583	-0,1	1,579	0,2	1,578	0,3	1,574	0,5
C12	1,561	1,555	0,4	1,555	0,4	1,555	0,4	1,553	0,5
C16	1,408	1,410	-0,1	1,402	0,4	1,409	-0,1	1,411	-0,2
C20	0,898	0,954	-6,2	0,913	-1,7	0,921	-2,6	0,925	-3,0
C24	0,418	0,074	82,3	0,314	24,9	0,324	22,5	0,370	11,5
C28	1,310	1,338	-2,1	1,269	3,1	1,259	3,9	1,299	0,8
C32	2,470	2,341	5,2	2,315	6,3	2,336	5,4	2,368	4,1
C36	2,128	2,059	3,2	2,096	1,5	2,092	1,7	2,108	0,9
C40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela V.5 - Coeficientes  $K_2$  para a seção C-C ( $\cdot 10^{-3}$ )

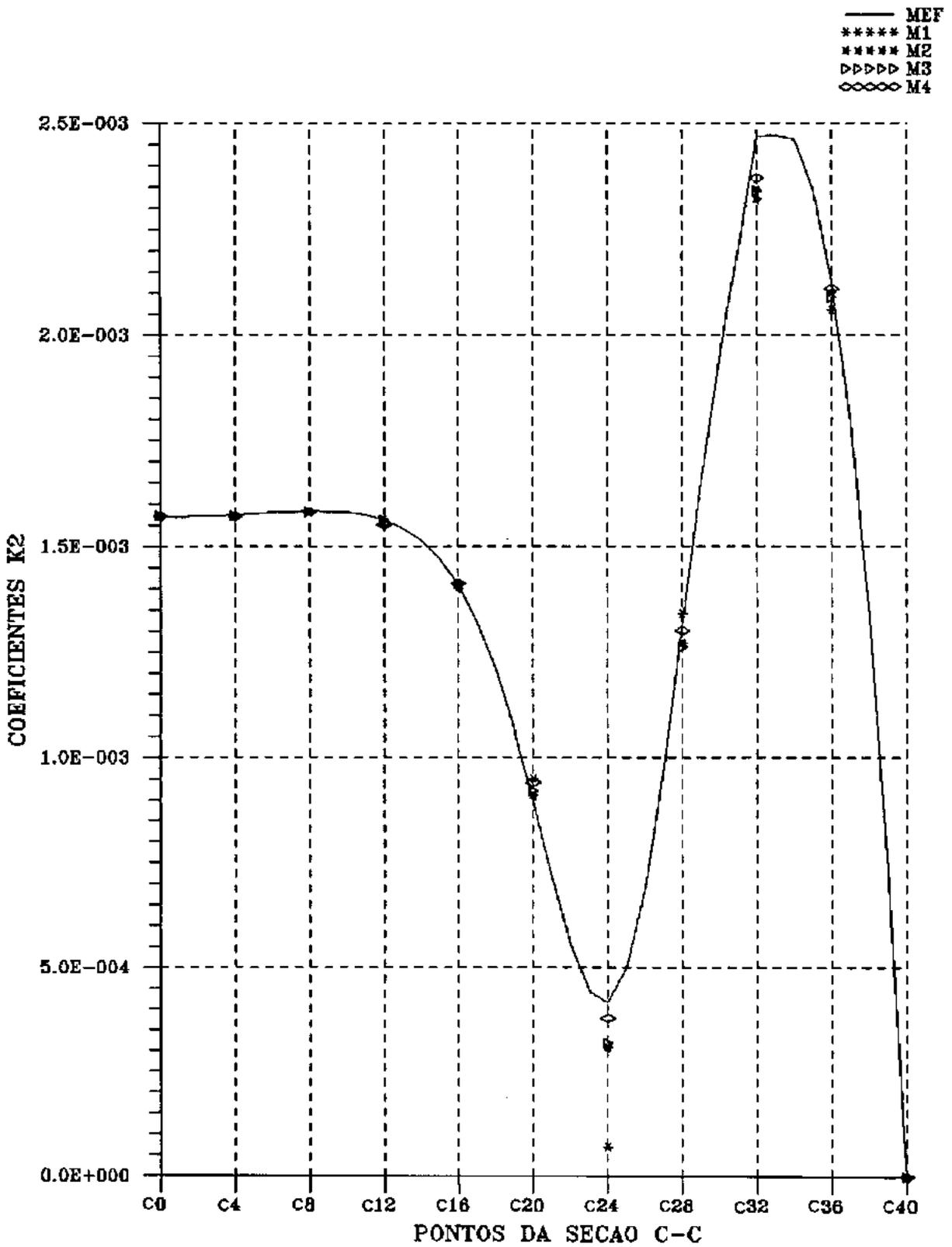


Figura V.11 - Momentos fletores radiais para a seção C-C

V.2.2 - Exemplo 2: Placa quadrada com furo concêntrico quadrado apoiada nos cantos externos e carregada uniformemente

Faz-se aqui o estudo de uma placa com as mesmas características elásticas e geométricas do item anterior. Como condição de contorno foram considerados somente apoios discretos nos quatro cantos externos.

A geometria da placa e a parte a ser discretizada são mostradas na Figura V.12. Os diversos tipos de malha utilizados são os mesmos do exemplo anterior (Figuras V.2 a V.5).

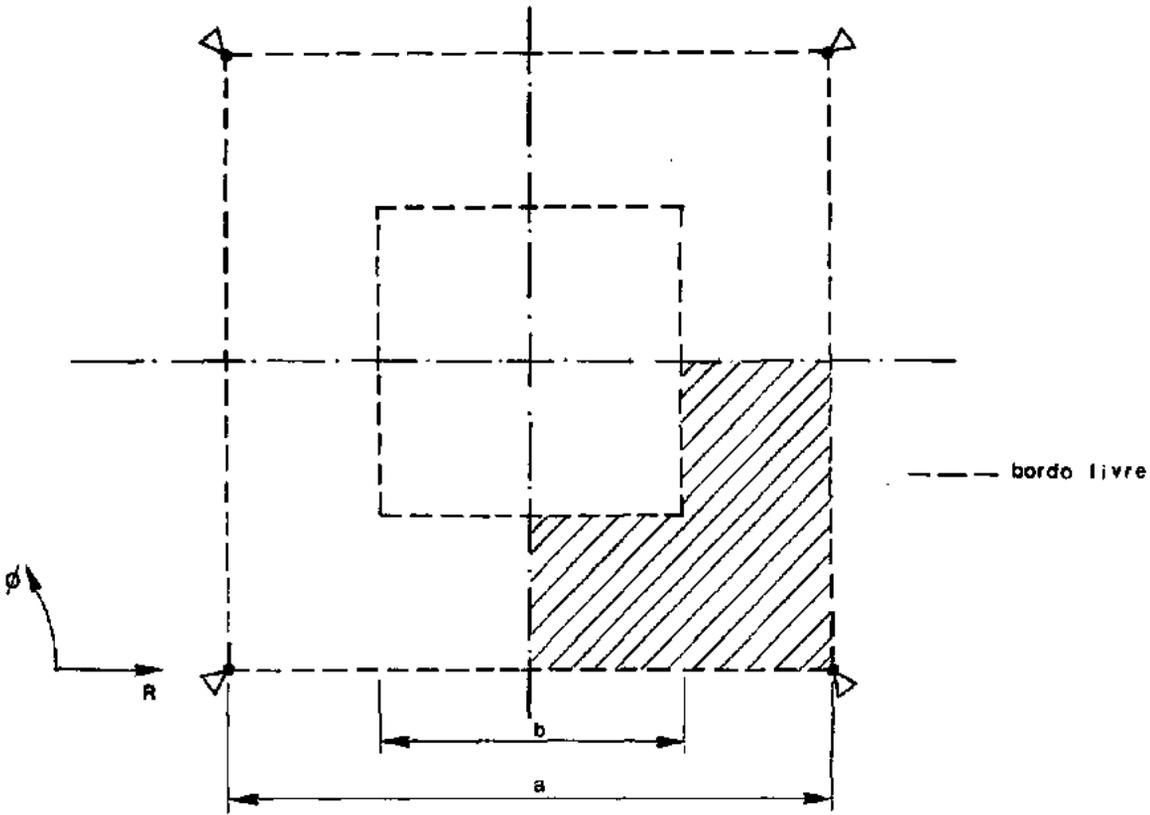
Foi feita a avaliação dos deslocamentos de três seções distintas: a diagonal A-A, a seção B-B que passa pelo canto reentrante e outra, C-C, que passa no interior da região considerada. A indicação destas seções é mostrada na Figura V.13. Avaliaram-se ainda, os momentos fletores na seção C-C.

Os deslocamentos nodais e os momentos fletores radiais são dados, respectivamente, pelas expressões:

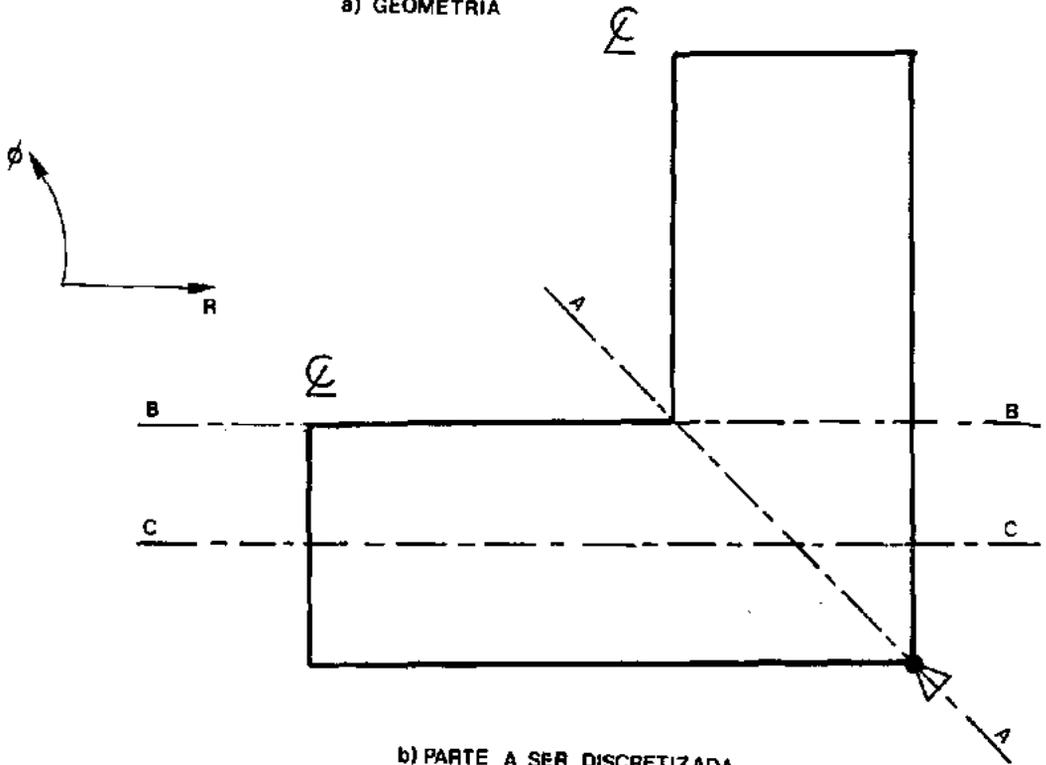
$$w = K_3 \cdot \frac{q \cdot a^4}{D} \quad (V.3)$$

$$M_r = K_4 \cdot q \cdot a^2 \quad (V.4)$$

Na Tabela V.6 e na Figura V.13 são mostrados os valores da constante multiplicadora  $K_3$  obtidos no canto reentrante para as diversas malhas adotadas. Apresentam-se também os resultados obtidos através de análise feita pelo Método dos Elementos Finitos e a diferença percentual entre os resultados. A discretização do modelo utilizado na análise via elementos finitos é a mesma do exemplo anterior (Figura V.6).



a) GEOMETRIA



b) PARTE A SER DISCRETIZADA

Figura V.12

MALHA	$K_3$	DIF (%)
M1	0,02210	5,09
M2	0,02142	1,85
M3	0,02140	1,76
M4	0,02117	0,67
M.E.F.	0,02103	—

Tabela V.6 - Coeficientes  $K_3$  no canto reentrante

Nas Tabelas V.7 e V.8 são apresentados os valores dos coeficientes  $K_3$  para as seções B-B e C-C, enquanto que a Tabela V.9 apresenta os valores dos coeficientes  $K_4$  para a seção C-C.

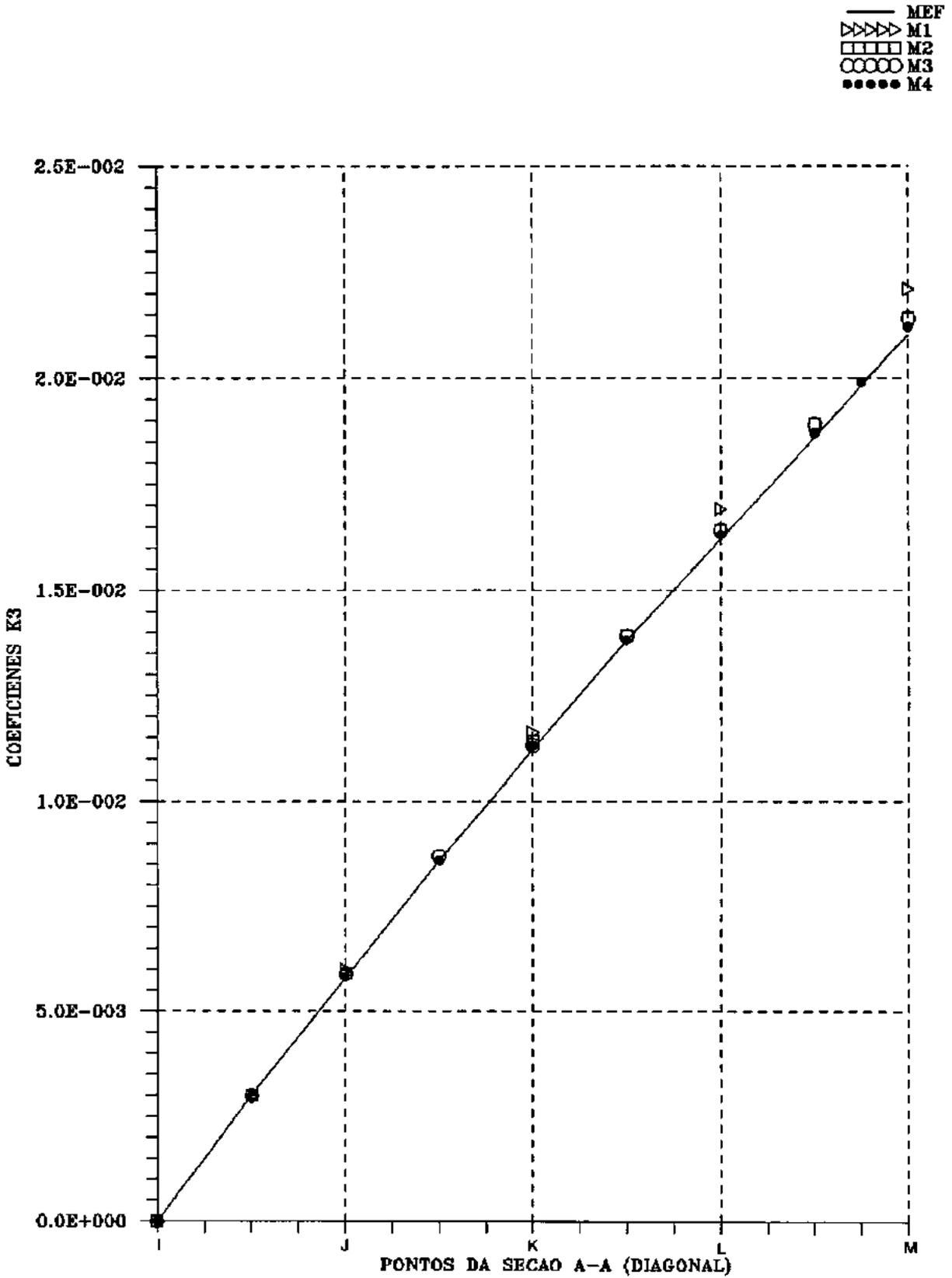


Figura V.13 - Deslocamentos ao longo da diagonal A-A

MALHA PONTO	M.E.F.	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)	M4	Dif (%)
B0	0,0284	0,0294	-3,5	0,0288	-1,4	0,0287	-1,1	0,0286	-0,7
B4	0,0282	0,0291	-3,2	0,0285	-1,1	0,0285	-1,1	0,0283	-0,4
B8	0,0276	0,0285	-3,3	0,0279	-1,1	0,0279	-1,1	0,0277	-0,4
B12	0,0265	0,0274	-3,4	0,0268	-1,1	0,0268	-1,1	0,0266	-0,4
B16	0,0251	0,0260	-3,6	0,0254	-1,2	0,0254	-1,2	0,0252	-0,4
B20	0,0232	0,0242	-4,3	0,0236	-1,7	0,0236	-1,7	0,0234	-0,9
B24	0,0210	0,0221	-5,2	0,0214	-1,9	0,0214	-1,9	0,0212	-1,0
B28	0,0186	0,0194	-4,3	0,0188	-1,1	0,0188	-1,1	0,0187	-0,5
B32	0,0161	0,0167	-3,7	0,0163	-1,2	0,0163	-1,2	0,0162	-0,6
B36	0,0136	0,0140	-2,9	0,0137	-0,7	0,0137	-0,7	0,0136	0
B40	0,0111	0,0115	-3,6	0,0112	-0,9	0,0112	-0,9	0,0112	-0,9

Tabela V.7 - Coeficientes  $K_3$  para a seção B-B

MALHA PONTO	M.E.F.	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)	M4	Dif (%)
C0	0,0232	0,0239	-3,0	0,0234	-0,9	0,0234	-0,9	0,0233	-0,4
C4	0,0230	0,0237	-3,0	0,0232	-0,9	0,0232	-0,9	0,0231	-0,4
C8	0,0224	0,0230	-2,7	0,0226	-0,9	0,0226	-0,9	0,0225	-0,4
C12	0,0214	0,0220	-2,8	0,0216	-0,9	0,0216	-0,9	0,0214	0
C16	0,0199	0,0206	-3,5	0,0202	-1,5	0,0201	-1,0	0,0200	-0,5
C20	0,0182	0,0188	-3,3	0,0184	-1,1	0,0184	-1,1	0,0182	0
C24	0,0161	0,0167	-3,7	0,0163	-1,2	0,0163	-1,2	0,0162	-0,6
C28	0,0137	0,0143	-4,4	0,0139	-1,5	0,0139	-1,5	0,0138	-0,7
C32	0,0112	0,0116	-3,6	0,0114	-2,8	0,0113	-0,9	0,0113	-0,9
C36	0,0086	0,0089	-3,5	0,0087	-1,2	0,0087	-1,2	0,0086	0
C40	0,0059	0,0061	-3,4	0,0055	6,8	0,0060	-1,7	0,0060	-1,7

Tabela V.8 - Coeficientes  $K_3$  para a seção C-C

MALHA PONTO	M.E.F.	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)	M4	Dif (%)
C0	0,1545	0,1544	0,1	0,1545	0	0,1545	0	0,1545	0
C4	0,1531	0,1532	-0,1	0,1532	-0,1	0,1532	-0,1	0,1532	-0,1
C8	0,1494	0,1493	0,1	0,1493	0,1	0,1493	0,1	0,1493	0,1
C12	0,1428	0,1430	-0,1	0,1428	0	0,1428	0	0,1428	0
C16	0,1334	0,1347	-1,0	0,1337	-0,2	0,1337	-0,2	0,1335	-0,1
C20	0,1208	0,1262	-4,5	0,1226	-1,5	0,1225	-1,4	0,1215	-0,6
C24	0,1029	0,1203	-16,9	0,1079	-4,9	0,1078	-4,8	0,1047	-1,7
C28	0,0784	0,0870	-11,0	0,0820	-4,6	0,0818	-4,3	0,0797	-1,7
C32	0,0525	0,0564	-7,4	0,0541	-3,0	0,0540	-2,9	0,0531	-1,1
C36	0,0267	0,0282	-5,6	0,0274	-2,6	0,0272	-1,9	0,0269	-0,7
C40	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela V.9 - Coeficientes  $K_1$  para a seção C-C

— MEF  
 ▷▷▷▷ M1  
 ×××× M2  
 □□□□ M3  
 ●●●● M4

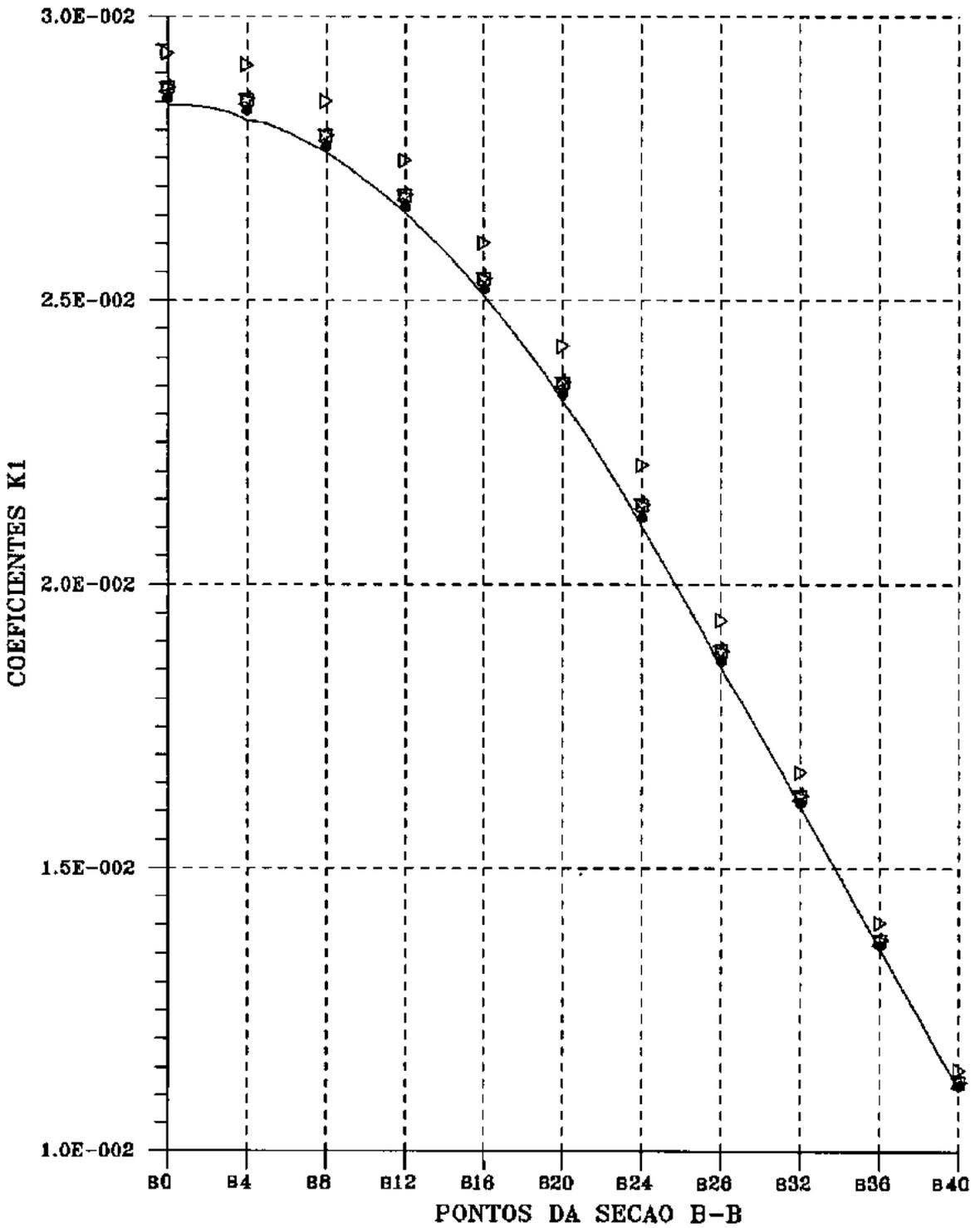


Figura V.14 - Deslocamentos ao longo da seção B-B

— MEF  
 ▷▷▷▷ M1  
 ××××× M2  
 □□□□ M3  
 ●●●● M4

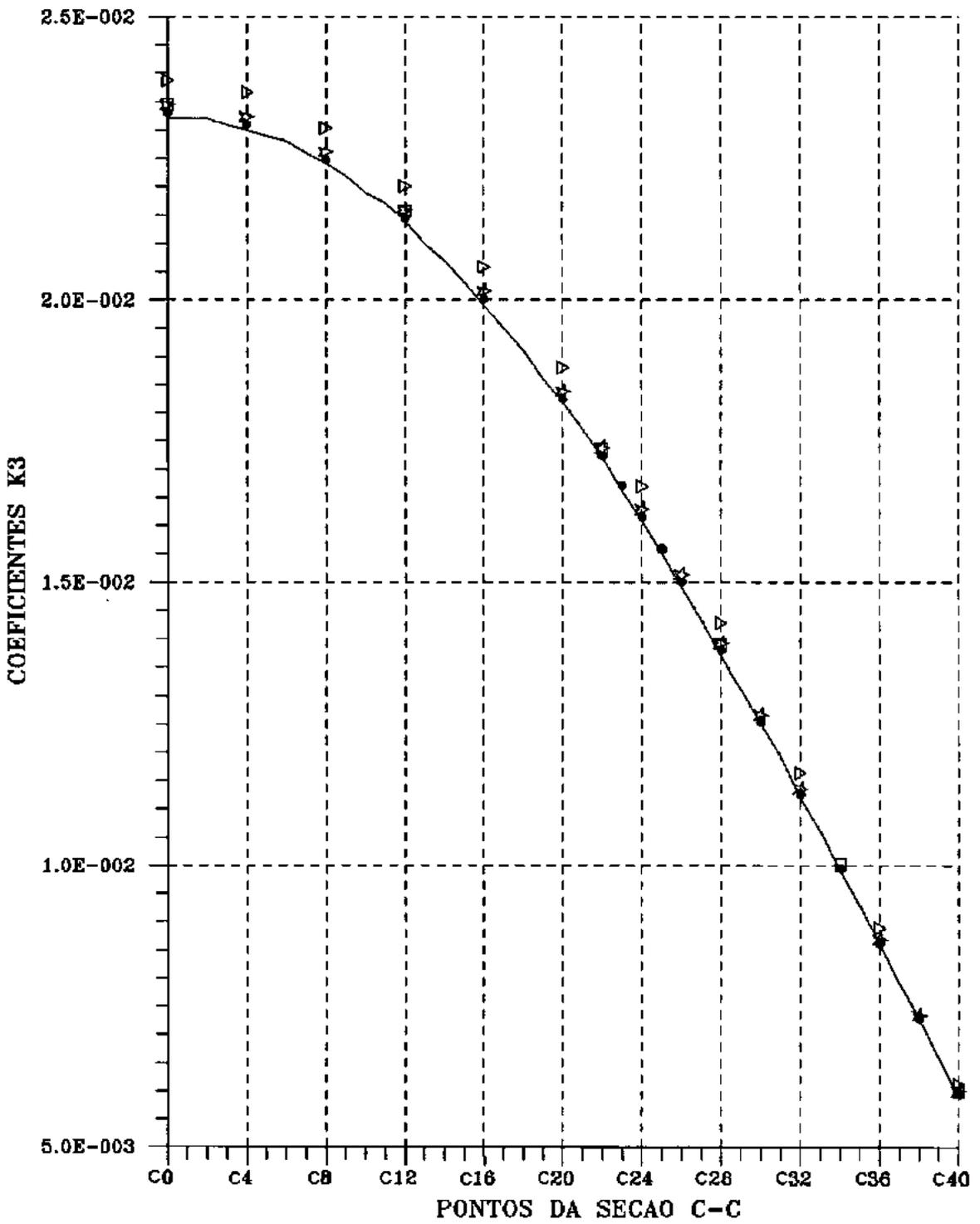


Figura V.15 - Deslocamentos ao longo da seção C-C

— MEF  
 \*\*\*\*\* M1  
 □□□□ M2  
 ○○○○ M3  
 \*\*\*\*\* M4

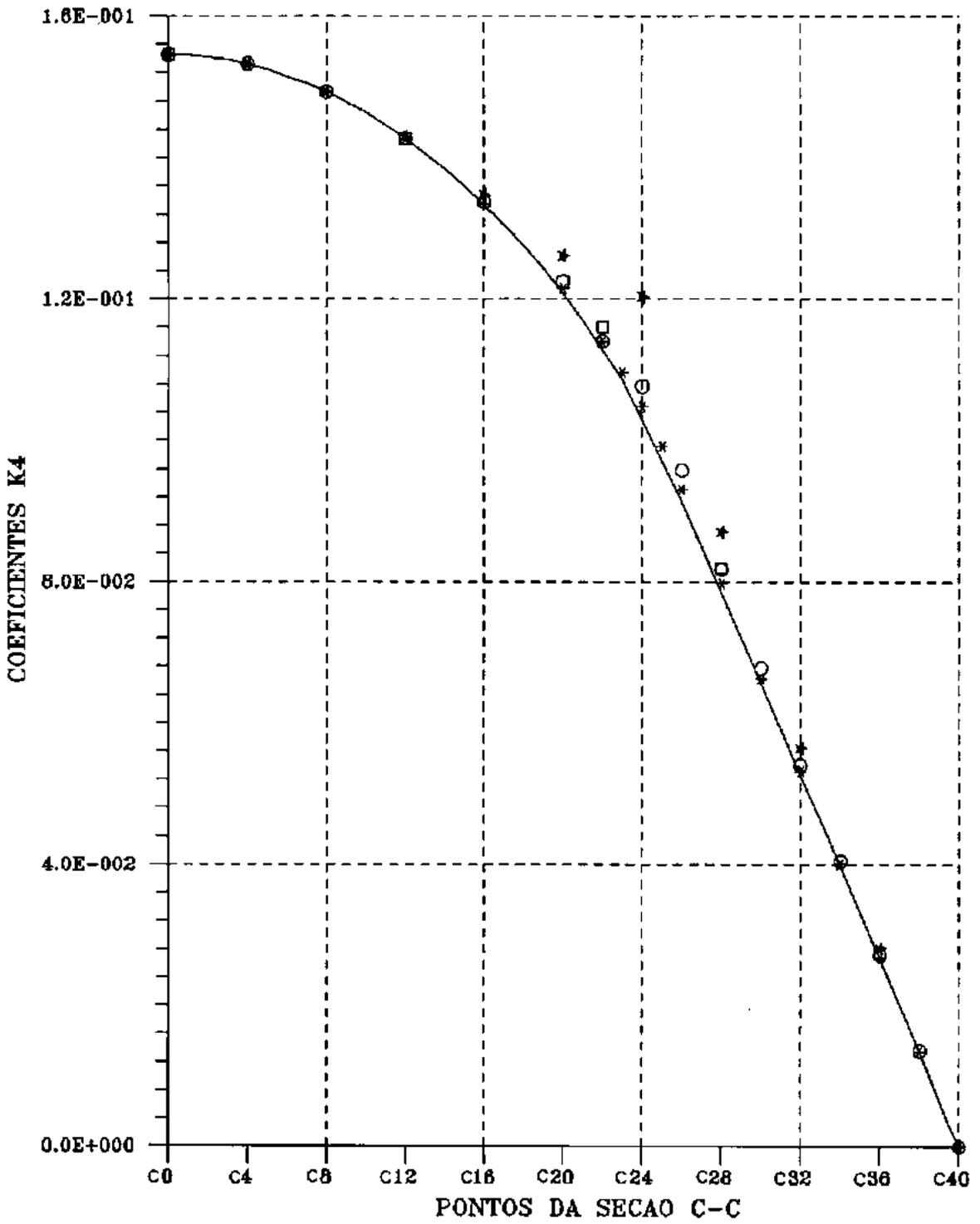


Figura V.16 - Momentos fletores radiais na seção C-C

V.2.3 - Exemplo 3: Placa em forma de setor circular de  $45^\circ$  com os lados adjacentes ao canto reentrante livres e demais apoiados, com carregamento uniformemente distribuído.

Para aferir a formulação empregada com o uso de coordenadas cilíndricas, é apresentada a seguir uma placa que forma um setor circular de  $45^\circ$  com os lados concorrentes no canto reentrante livres e os demais simplesmente apoiados (Figura V.17), submetida a carregamento uniformemente distribuído.

Foram utilizados os seguintes dados:

$$\begin{aligned} E &= 3,0E07 \text{ lb/in}^2 \\ \nu &= 0,30 \\ R_{int} &= 10 \text{ in} \\ R_{ext} &= 30 \text{ in} \\ h &= 0,25 \text{ in} \end{aligned}$$

Os diversos tipos de malha empregados na análise, assim como as seções estudadas são mostrados nas Figuras V.18 a V.20. A Figura V.21 mostra a malha utilizada na análise via elementos finitos.

Os deslocamentos nodais e os momentos fletores radiais são dados, respectivamente, pelas expressões:

$$w = K_5 \cdot \frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3} \quad (V.5)$$

$$M_r = K_6 \cdot q \cdot a^2 \quad (V.6)$$

A Tabela V.10 apresenta os valores de deslocamentos para o canto reentrante. A Figura V.22 mostra os deslocamentos encontrados para a seção A-A com as diversas malhas e também os resultados do M.E.F.

$$R_a = 10 \text{ in}$$

$$R_b = 20 \text{ in}$$

$$R_c = 30 \text{ in}$$

$$\phi_d = \phi_e = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

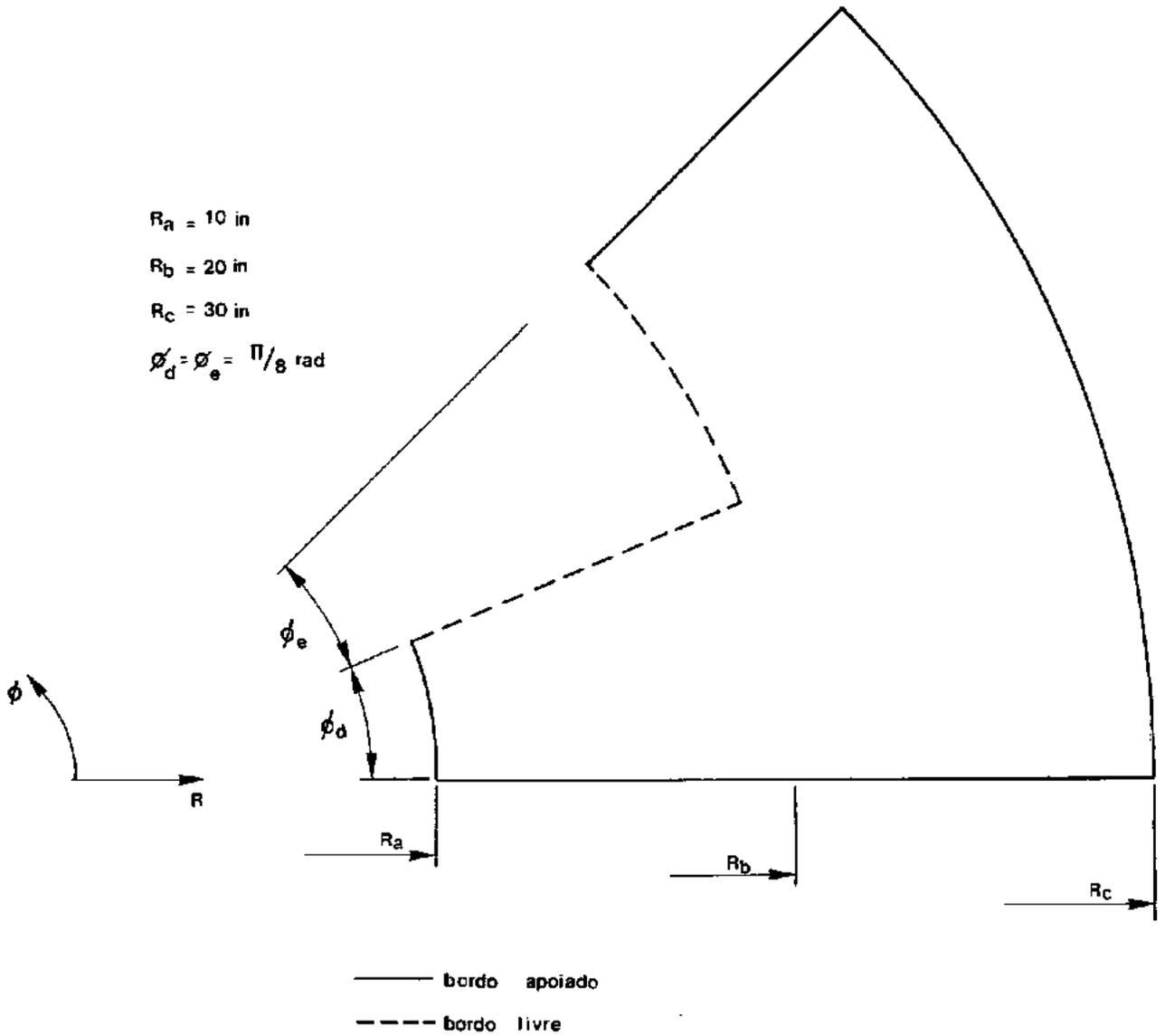


Figura V.17 - Geometria da Placa

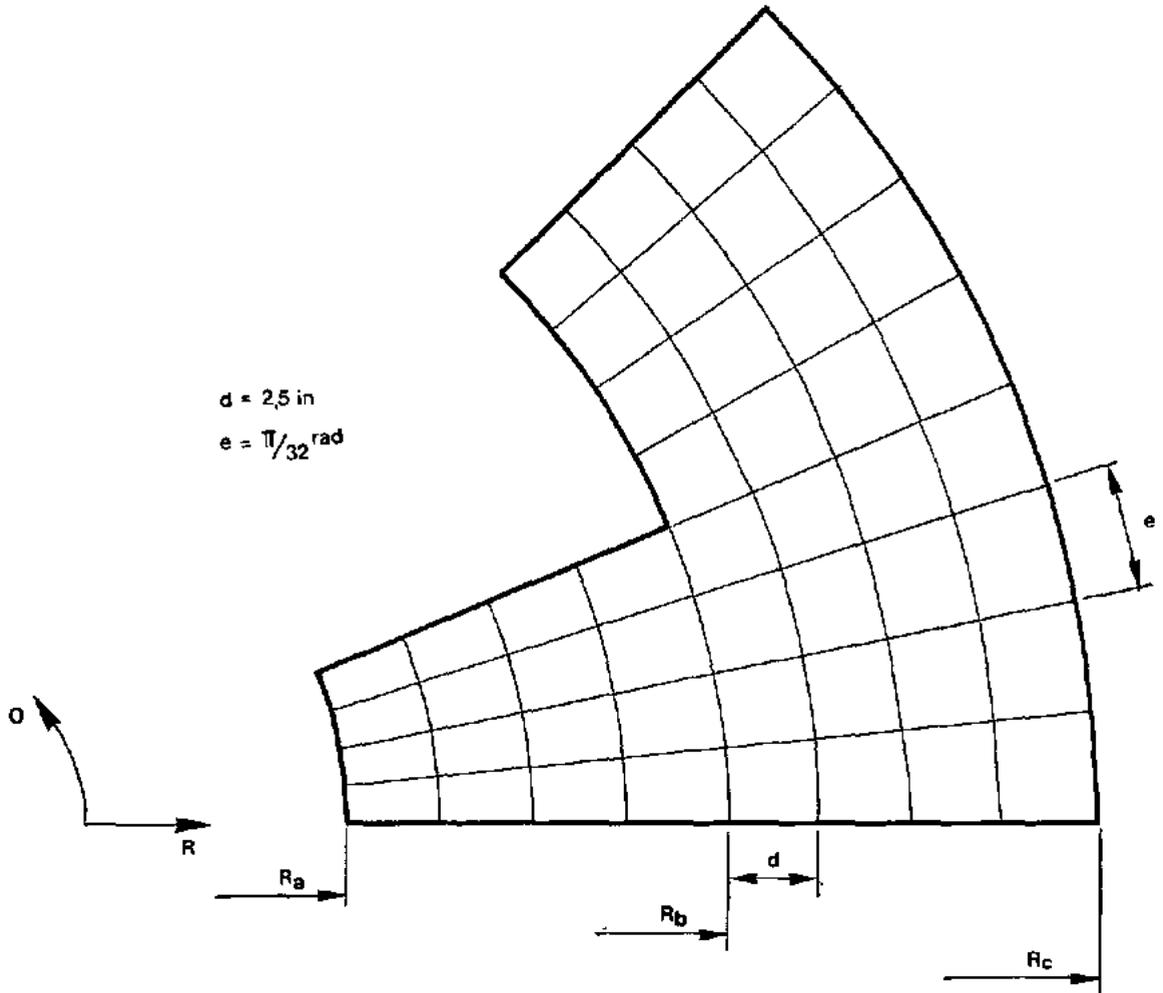


Figura V.18 - Malha M1

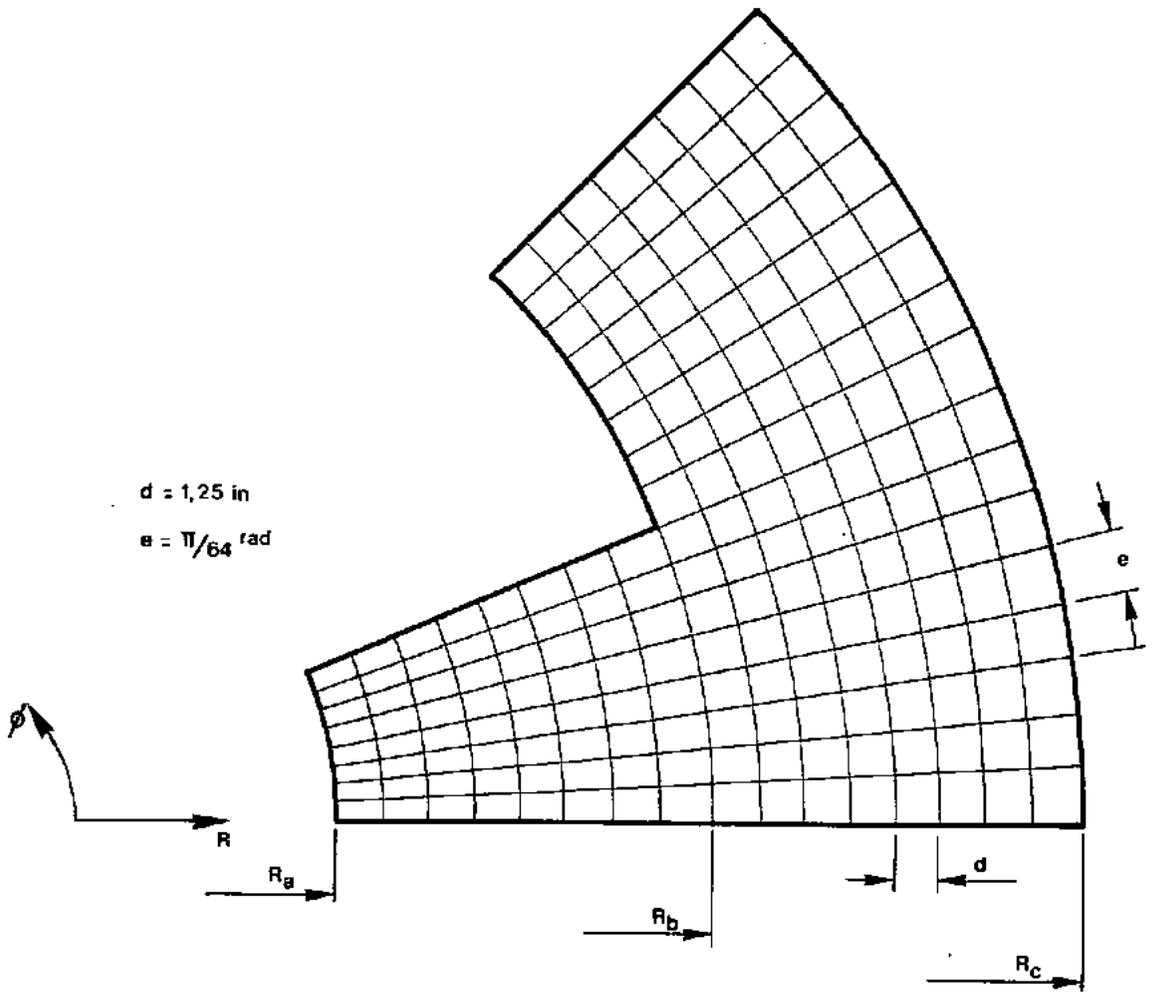


Figura V.19 - Malha M2

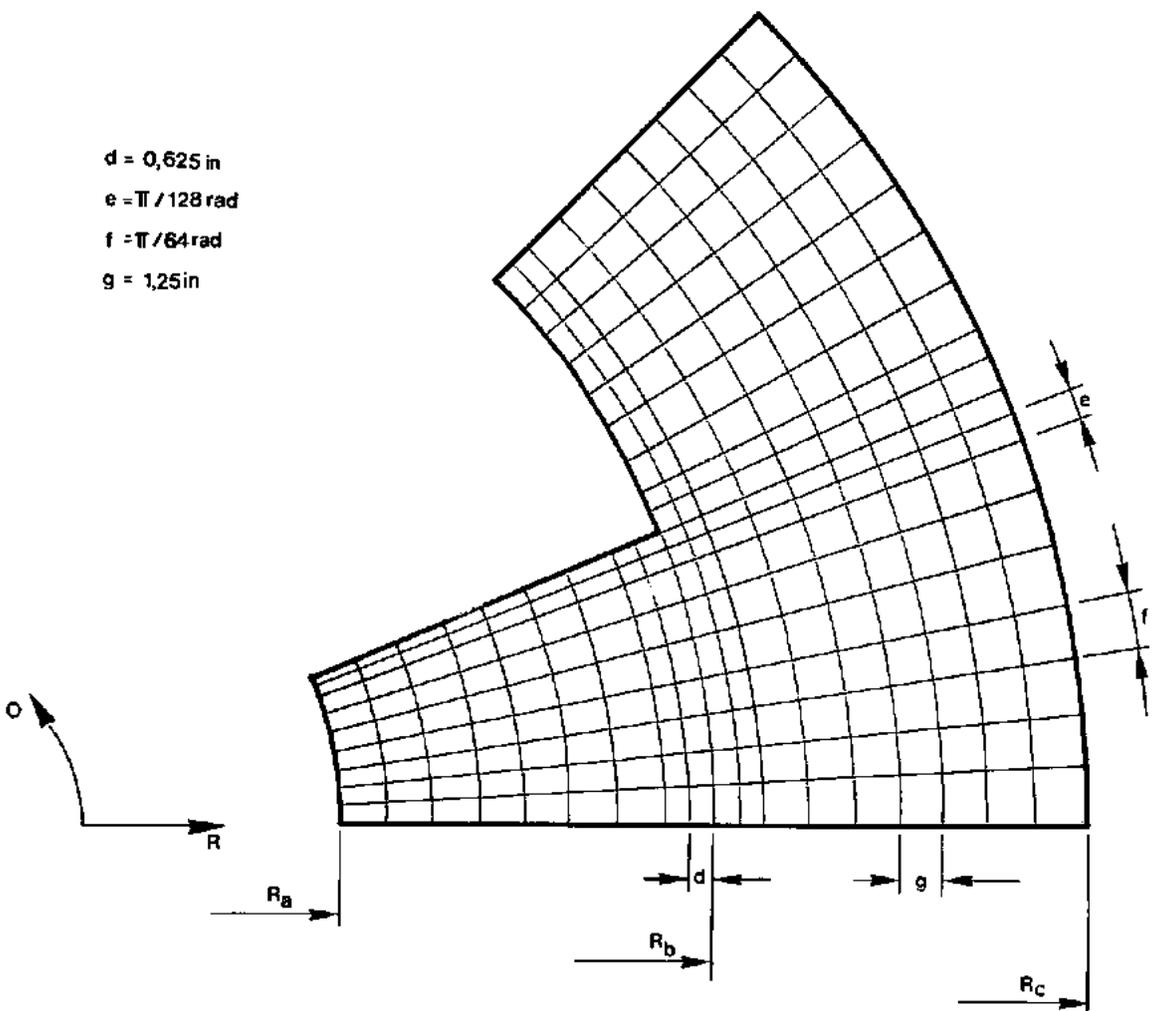


Figura V.20 - Malha M3

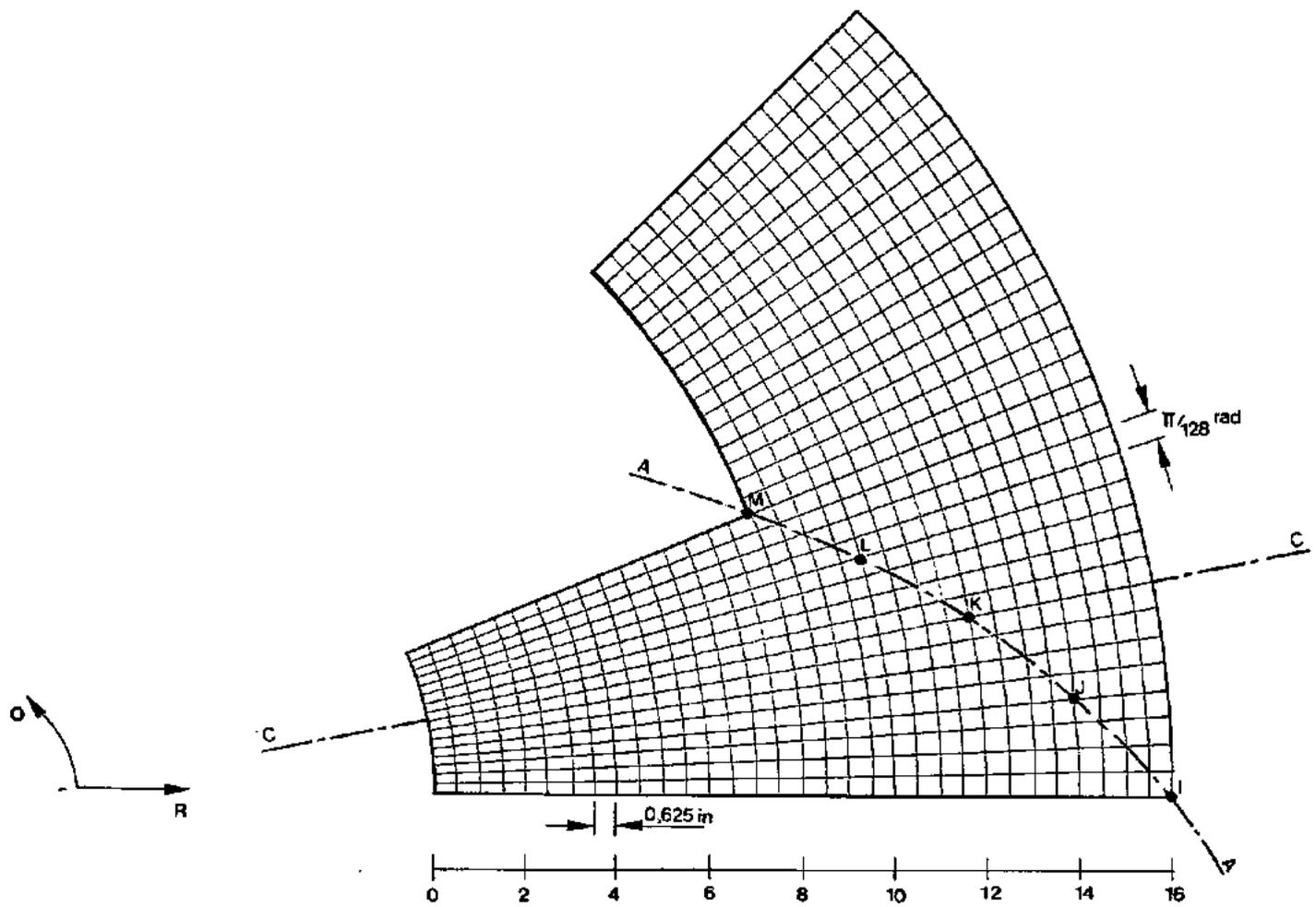


Figura V.21 - Malha para análise através do M.E.F.

MALHA	K	DIF (%)
M1	0,00840	-24,6
M2	0,00741	-9,9
M3	0,00701	-4,0
M.E.F.	0,00674	—————

Tabela V.10 - Coeficientes  $K_5$  para o canto reentrante

Na Tabela V.11 e na Figura V.23 são apresentados os valores dos coeficientes  $K_5$  para a seção C-C, enquanto que na Tabela V.12 e Figura V.24 são apresentados os valores do coeficiente  $K_6$  para a mesma seção.

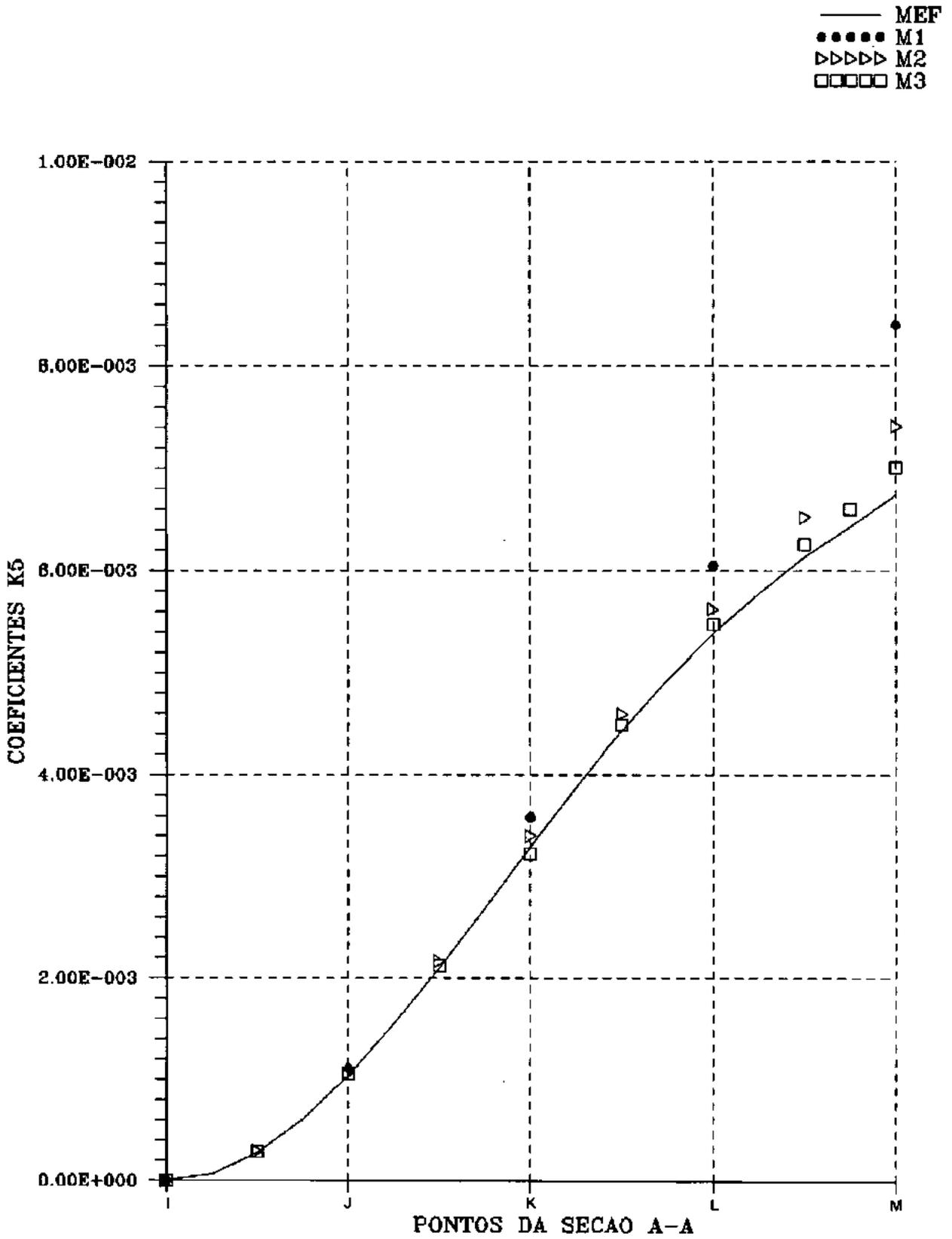


Figura V.22 - Deslocamentos ao longo da seção A-A

MALHA PONTO	M.E.F	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)
C0	0	0	0	0	0	0	0
C2	0,270	0,300	-11,1	0,285	-5,6	0,278	-3,0
C4	0,503	0,567	-12,7	0,533	-6,0	0,519	-3,2
C6	0,649	0,754	-16,2	0,696	-7,2	0,674	-3,9
C8	0,685	0,840	-22,6	0,741	-8,2	0,701	-2,3
C10	0,591	0,683	-15,6	0,626	-5,9	0,607	-2,7
C12	0,461	0,513	-11,3	0,481	-4,3	0,470	-2,0
C14	0,257	0,282	-9,7	0,266	-3,5	0,261	-1,6
C16	0	0	0	0	0	0	0

Tabela V.11 - Coeficientes  $K_s$  para a seção C-C ( $\cdot 10^{-2}$ )

——— MEF  
 □□□□ M1  
 ▽▽▽▽ M2  
 ○○○○ M3

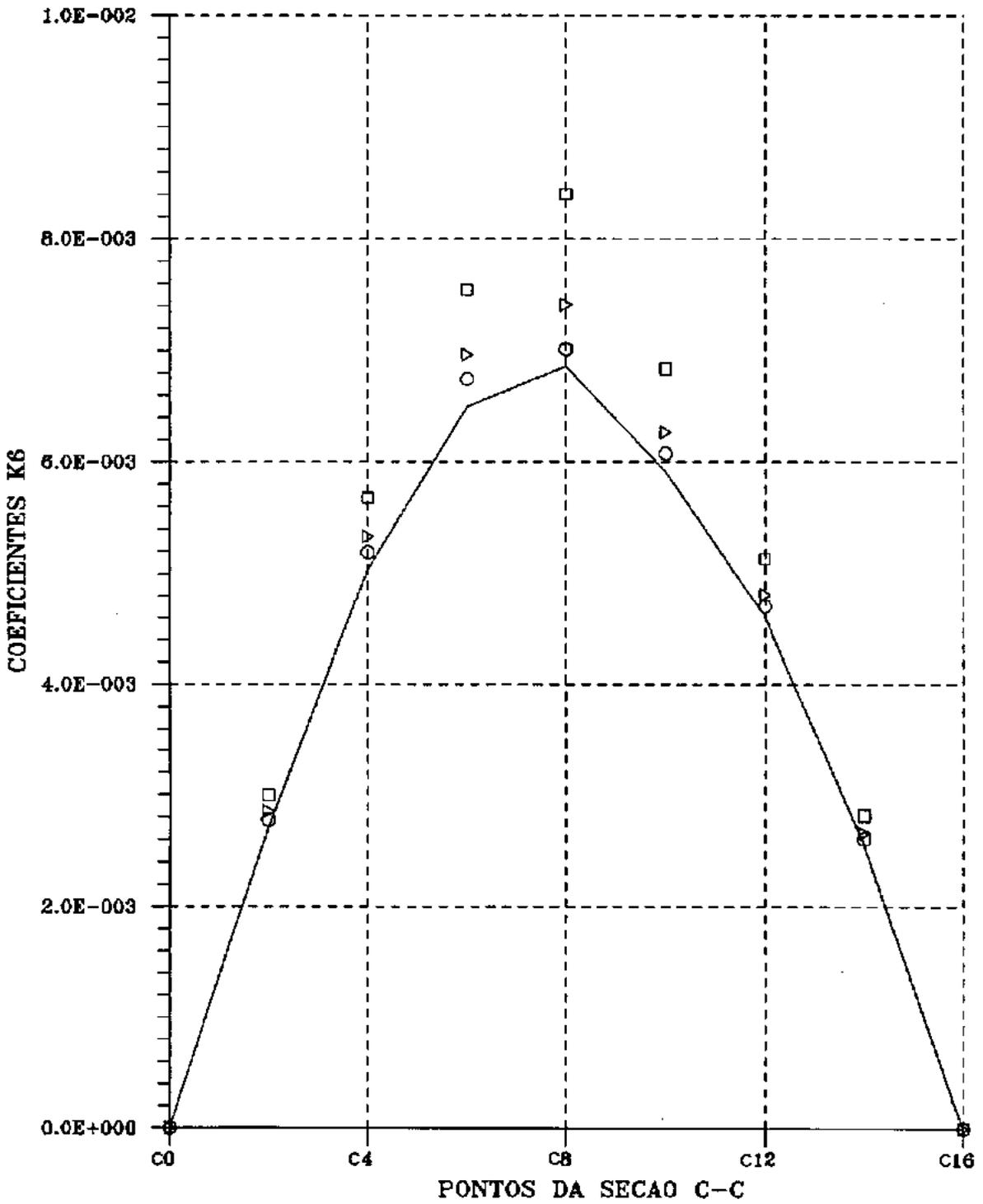


Figura V.23 - Deslocamentos ao longo da seção C-C

MALHA PONTO	M.E.F	M1	Dif (%)	M2	Dif (%)	M3	Dif (%)
C0	0	0	0	0	0	0	0
C2	0,790	0,733	7,2	0,775	1,9	0,775	1,9
C4	1,398	1,363	2,5	1,395	0,2	1,400	-0,1
C6	1,928	1,968	-2,1	1,950	-1,1	1,925	0,2
C8	2,395	2,763	-15,4	2,508	-4,7	2,400	-0,2
C10	2,638	2,690	-2,0	2,665	-1,0	2,628	0,4
C12	2,515	2,493	0,9	2,510	0,2	2,500	0,6
C14	1,703	1,728	-1,5	1,750	-2,8	1,750	-2,8
C16	0	0	0	0	0	0	0

Tabela V.12 - Coeficientes  $K_6$  para a seção C-C ( $\times 10^{-2}$ )

— MEF  
 □□□□ M1  
 ▷▷▷▷ M2  
 ○○○○○ M3

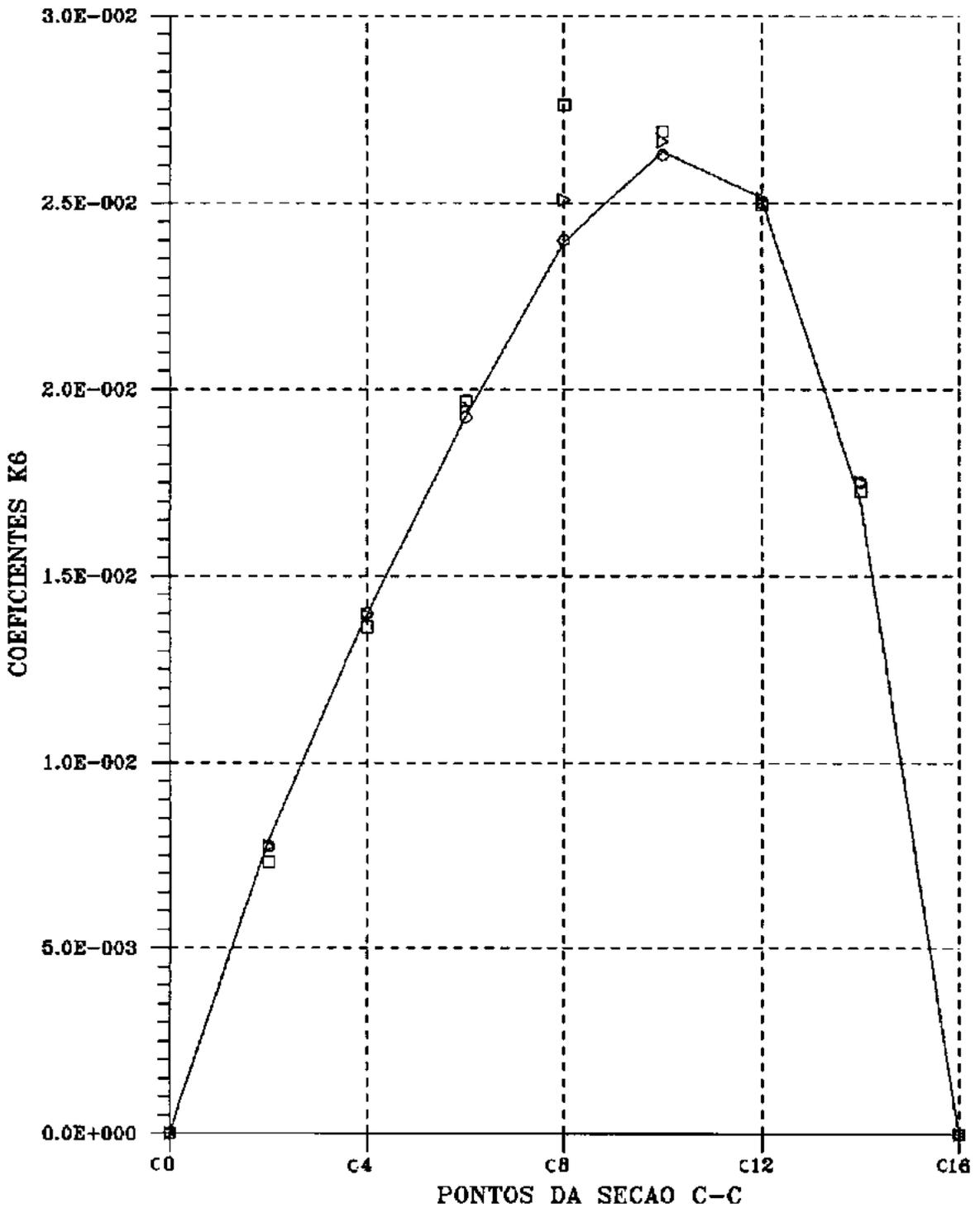


Figura V.24 - Momentos Fletores Radiais para a seção C-C

### V.3 - Análise dos Resultados

#### V.3.1 - Exemplo 1: Placa quadrada com furo concêntrico quadrado apoiada nos bordos interno e externo e carregada uniformemente

Neste tipo de placa, com os bordos externos e internos simplesmente apoiados, os resultados obtidos para os deslocamentos ao longo da diagonal (seção A-A) foram bastante satisfatórios, ressalvando-se que a malha M1 não permite detectar o deslocamento no ponto onde aparentemente ocorre o máximo. A avaliação do deslocamento neste ponto só pode ser feita com o uso das malhas M2, M3 e M4. Com estas, observou-se uma boa convergência nos resultados, sendo que com a malha M4 a diferença computada, relativamente ao M.E.F., é de apenas 1,6%. Convém ressaltar que a adoção das malhas M2 e M3, onde foi refinada a região do canto externo, não produziu grandes alterações nos resultados, enquanto que da malha M3 para M4, onde foi refinada a região do canto reentrante, conforme esperado, houve modificação bastante sensível dos resultados, tornando-os mais próximos dos obtidos pelo M.E.F..

Para a seção B-B, os valores dos deslocamentos são bastante satisfatórios (Tabela V.2), mesmo para a malha M1, que apresenta uma diferença máxima de 8,0%, a qual reduz-se a 2,3% com a utilização da malha M4. O comportamento global da seção pode ser avaliado na Figura V.8. Para o caso dos momentos fletores (Tabela V.3), a malha M1 conduziu a valores bastante discrepantes para os momentos negativos na região do canto, apresentando uma diferença de 65,6%; entretanto, a utilização da malha M4 reduziu esta diferença a 11,9%. A Figura V.9 mostra o comportamento dos momentos fletores na seção em estudo.

Para a seção C-C, pode-se observar pela Tabela V.2 que os resultados para os deslocamentos obtidos com a malha M3 já são bastante satisfatórios, com a diferença máxima em torno de 3%. Já para o caso da avaliação dos momentos fletores, como seria de esperar, a análise dos resultados mostra divergências bem mais acentuadas do que

para os deslocamentos, conforme mostra a Tabela V.5. Assim, por exemplo, verificando a convergência do ponto 24 (que também pode ser aferida no gráfico da Figura V.11), bastante afetado pelo comportamento do canto, observa-se, com a utilização da malha M3, uma diferença de 22,5% com respeito aos resultados de elementos finitos. Para a malha M4, onde se promove uma discretização mais refinada no canto (ver Figuras V.4 e V.5), tal diferença, embora caia consideravelmente, atingindo 11,5%, ainda se mostra bastante acentuada.

### V.3.2 - Exemplo 2: Placa quadrada com furo concêntrico quadrado apoiada nos cantos externos e carregada uniformemente

Para o caso da placa com apoios discretos nos cantos, pode ser feita a seguinte avaliação: na seção A-A, diagonal, a malha M4 conduziu a uma diferença de apenas 0,67% em relação ao valor de deslocamento obtido pelo M.E.F., podendo-se já observar entre os resultados das malhas M1 e M2 uma redução significativa da diferença, apesar de uma discretização ainda grosseira na região do canto. Note-se que em M2 os resultados já podem ser considerados satisfatórios. Novamente o refinamento do canto externo, que acontece da malha M2 para M3, não produz alterações sensíveis nos valores dos deslocamentos.

Comentários análogos valem também, para os deslocamentos das seções B-B e C-C.

Para os momentos fletores radiais na seção C-C, a malha M1, apesar de ter produzido resultados considerados razoáveis para os deslocamentos (diferença de 4,5%), conduziu agora a diferenças bastante acentuadas, notadamente no ponto 24, próximo ao canto reentrante, onde atingiu 16,9% (Tabela V.9), o que também pode ser observado na Figura V.16. Nos outros pontos, entretanto, a influência do canto fica atenuada. Note-se que para o ponto 24 foi necessário um maior refinamento para a obtenção de

resultados aceitáveis, o que se conseguiu com a malha M4, onde a diferença alcança 1,7%. O comportamento global da seção C-C pode ser verificado no gráfico da Figura V.16.

V.3.3 - Exemplo 3: Placa em forma de setor circular de  $45^\circ$  com os lados adjacentes ao canto reentrante livres e demais apoiados, com carregamento uniformemente distribuído.

Na Tabela V.10, onde é apresentado o deslocamento do canto reentrante, a utilização de uma malha grosseira (M1) não produziu bons resultados (25% de diferença com o M.E.F.). Neste caso, foi necessária a utilização de malhas mais refinadas no canto para atingir um percentual aceitável de diferença. Para este tipo de placa, os resultados obtidos com as malhas M2 e M3 foram bem distintos, com o percentual de diferença passando de 10% para 2,3% (note-se que de M2 para M3 houve o refino de 2 subdivisões em cada direção na região do canto). O comportamento global da seção A-A pode ser visto na Figura V.22.

Para a seção B-B, indicada na Figura V.21, foram avaliados deslocamentos e momentos fletores radiais. Para os deslocamentos, ocorreu a convergência por valores superiores, com a malha M3 produzindo resultados cuja diferença atingiu no máximo 3,9%. Já para o caso dos momentos fletores a convergência nos resultados se deu por valores inferiores e, ao contrário do ocorreu para o exemplo 2, uma malha relativamente grosseira (M1) produziu agora diferenças menos acentuadas (15% para o ponto 8, que fica na região do canto reentrante). Neste caso, o refinamento da região do canto com a utilização da malha M3 conduziu a resultados com diferença de no máximo 2,8%.

## CAPÍTULO VI

## CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização do Método Energético das Diferenças Finitas é vantajosa quando comparada ao método convencional de diferenças finitas, uma vez que são geradas por aquele método matrizes de coeficientes simétricas e necessitam ser prescritas apenas condições de contorno geométricas. O Método da Energia Discretizada, por sua vez, facilita a aplicação do Método Energético das Diferenças Finitas através de um procedimento especial, no qual são incluídos graus de liberdade adicionais correspondentes às rotações nos pontos nodais situados no contorno. Este procedimento particular permite, assim, a eliminação de pontos fictícios fora do domínio, tornando esta abordagem mais atrativa em relação à técnica usual de diferenças finitas.

A utilização do Método da Energia Discretizada na análise linear de placas com cantos reentrantes demonstrou que, em geral, os resultados obtidos para o deslocamento transversal e o momento fletor atingiram uma boa concordância com os fornecidos pelo Método dos Elementos Finitos, mesmo com malhas não muito refinadas.

Devido às semelhanças entre as formulações do Método da Energia Discretizada e o Método dos Elementos Finitos, o programa elaborado com base no procedimento apresentado neste trabalho possui as mesmas etapas de análise estrutural do Método dos Elementos Finitos. Não se buscou aqui elaborar um programa para comparar tempos de execução com outros sistemas. Procurou-se minimizar o consumo de memória, com a utilização de armazenamento da matriz de rigidez da estrutura, esparsa, numa matriz retangular que tem por dimensão (número de graus de liberdade sem restrições)  $\times$  (semi-largura de banda).

Nos casos estudados, cada uma das estruturas analisadas teve seu domínio discretizado por nós com apenas um grau de liberdade, enquanto que os nós situados em bordos

retos ou curvos possuem um grau de liberdade adicional correspondente à rotação, ao passo que os nós localizados no encontro de dois bordos possuem dois graus de liberdade adicionais, correspondentes às rotações nas direções radial e circunferencial. Note-se que com a consideração de apenas uma incógnita nodal em cada ponto do domínio, fica caracterizada, para o tipo de estrutura focalizado, a virtude principal do método utilizado, relativamente ao enfoque de elementos finitos, onde seriam sempre considerados três graus de liberdade por nó (uma translação e duas rotações).

Não se deve deixar de ressaltar, no entanto, as limitações da formulação aqui apresentada, principalmente a de que o método não possui a mesma versatilidade do Método dos Elementos Finitos no tratamento de problemas com contornos geométricos irregulares. Assim, do ponto de vista prático e comercial, o Método dos Elementos Finitos apresenta vantagens que justificam sua maior difusão na área de análise e projeto de estruturas.

Como sugestões para o prosseguimento da presente pesquisa, apresentam-se os seguintes tópicos:

- Consideração da não-linearidade geométrica, através da hipótese de rotações moderadas, tal como no trabalho de PLETZ<sup>[8]</sup>, para domínios com cantos reentrantes.
- Extensão do estudo à análise dinâmica.
- Estudo comparativo da eficiência de outros operadores em diferenças finitas, especialmente nos elementos de canto reentrante, onde as rotações podem ser relacionadas aos deslocamentos transversais dos nós por mais de um procedimento. Também o uso de operadores melhorados (ver, e.g. GARCIA<sup>[31]</sup>), pode aumentar a eficiência global da abordagem utilizada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C., *"The Finite Element Method"*, London, McGraw Hill, 3 ed., 1982.
- [2] SALVADORI, M. e REGGINI, H., "Simply Supported Corner Plate", *Journal of the Structural Division, ASCE*, vol. 86, no. ST11, Proc. Paper 2654, pp. 141-154, Nov., 1960.
- [3] JANNONE, J.F., FISCHER, R.B., "Finite Difference Operator used for a Free or Elastically Supported Reentrant Corner", *Computer and Structures*, vol. 8, pp. 269-273, 1978.
- [4] KARAVESIROGLOU, M. e PENELIS, G., "Analysis of Plates with Right Angled Boundaries", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, vol. 110, no. 4, Paper 18753, Apr., 1984.
- [5] WOOD, R.H., *"Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates"*, London, Thames & Hudson, 1961.
- [6] BOWLES, J.E., *"Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering"*, New York, McGraw-Hill, 1974.
- [7] BURAGOHAİN, D.N., "Discrete Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decks", *International*

*Association for Bridge and Structural Engineering Publications*, vol. 32, part I, pp. 37-47, 1972.

- [8] PLETZ, E., *Análise de Estruturas Laminares pelo Método da Energia Discretizada*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Maio, 1983.
- [9] CHUGH, A., e GESUND, H., "On the Boundary Condition at Supported Reentrant Corners of Transversely Loaded Plates", *Computers and Structures*, Great Britain, vol. 5, no. 2, pp. 203-205, Apr., 1974.
- [10] SEGEDIN, C. e BRICKELL, D., "Integral Equation Method for a Corner Plate", *Journal of the Structural Division*, ASCE, vol. 94, no. ST1, Proc. Paper 5711, pp. 41-52, Jan., 1968.
- [11] PERRONE, N. e KAO, R., "A General Finite Difference Method for Arbitrary Meshes", *Computers and Structures*, vol. 5, pp. 45-48, 1975.
- [12] TIMOSHENKO, S.P. e WOINOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*, Tokyo, McGraw Hill Kogakusha, 2 ed., 1981.
- [13] SZILARD, R., *Theory and Analysis of Plates - Classical and Numerical Methods*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1974.

- [14] UGURAL, A.C., "Stresses in Plates and Shells", McGraw-Hill, United States of America, 1981.
- [15] TIMOSHENKO, S.P. e GOODIER, J.N., "Theory of Elasticity", Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1970.
- [16] LOVE, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", New York, Dover Publications, 4 ed., 1944.
- [17] PRZEMIENIECKI, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", New York, Dover Publications, 1985.
- [18] COLLATZ, L., "The Numerical Treatment of Differential Equations", Berlin, Springer-Verlag, 3 ed., 1960.
- [19] SALVADORI, M. e BARON, M.L., "Numerical Methods in Engineering", Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 2 ed., 1961.
- [20] LANGHAAR, H.L., "Energy Methods in Applied Mechanics", New York, John Wiley & Sons, 1962.
- [21] DYM, C.L. e SHAMES, J.H., "Solid Mechanics: A Variational Approach", United States of America, McGraw Hill, 1973.
- [22] FREY, W.H., "Flexible Finite Difference Stencils from Isoparametric Finite Elements", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 1653-1665, 1977.

- [23] BARVE, V.D. e DEY, S.S., "Isoparametric Finite Difference Energy Method for Plate Bending Problems", *Computers and Structures*, vol. 17, pp. 459-465, 1983.
- [24] LAPIDUS, L. e PINDER, G.F., "Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering", United States of America, John Wiley & Sons, 1982.
- [25] BATHE, K.J. e WILSON, E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976.
- [26] BATHE, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", United States of America, John Wiley & Sons, 1982.
- [27] ZIENKIEWICZ, O.C. e MORGAN, K. "Finite Elements and Approximations", Singapore, John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- [28] HINTON, E. e OWEN, D. R. J., "Finite Element Programming", London, Academic, 1977.
- [29] COSMOS/M Finite Element System User Guide - Structural Research and Analysis Corporation, Release Version 1.61, April, 1990.
- [30] SORIANO, H.L. e PRATES, C.L.M., "Armazenamento Computacional de Matrizes em Análise Estrutural", *Publicacoes COPPE/UFRJ*, 1978.

- [31] GARCIA, L. F. T., *Uma Contribuicao ao Estudo da Flexao de Barras com Forte Nao-Linearidade Geometrica*, Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, 1987.