# ANÁLISE LIMITE DE PROBLEMAS DE ESTADO PLANO

Raquel de Godoy Campos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por:

Prof. Luiz Eloy Vaz, Dr. - Ing.
( Presidente )

Prof. Luiz Landau, Dr. Sc.

Prof. Nelson F. F. Ebecken, Dr. Sc.

Rio de janeiro, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1990

CAMPOS, RAQUEL DE GODOY

Análise Limite de Problemas de Estado Plano [ Rio de Janeiro ], 1990.

vii, 120 p., 29.7 cm ( COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1990 )

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1 . Análise Limite

2 . Programação Linear

3 . Análise Limite de Problemas de Estado Plano.

I . COPPE/UFRJ II . Título ( série )

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências ( M. Sc. )

**ANÁLISE LIMITE DE PROBLEMAS DE ESTADO PLANO**

**Raquel de Godoy Campos**

Abril de 1990

Orientador: Luiz Eloy Vaz

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta uma metodologia para a determinação da carga de colapso em problemas de estado plano, baseada nos Teoremas Limites da Plasticidade.

Para transformar o problema de análise limite num problema de programação linear, foi necessária uma discretização das variáveis em elementos finitos isoparamétricos e a linearização seccional das superfícies de escoamento, que são baseadas nos critérios de resistência de Tresca e von Mises.

Para resolver o problema de programação linear foi utilizado um algorítmo Simplex revisado no programa computacional desenvolvido para testar a formulação.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science ( M. Sc.)

**LIMIT ANALYSIS OF PLANE STRAIN AND PLANE STRESS PROBLEMS**

**Raquel de Godoy Campos**

April de 1990

Thesis Supervisor: Luiz Eloy Vaz

Department: Engenharia Civil

This work presents a methodology for the determination of the collapse load in plane strain and plane stress problems, based on the Plasticity Limit Theorems.

For transforming the limit analysis problem into a linear programming problem, the discretization of the variables into isoparametric finite elements and the sectional linearization of the yield surfaces was required. The yield surfaces were based on the Tresca and von Mises resistence criteria.

For solving the linear programming problem a revised Simplex algorithm was used in the computer program developed for checking the formulation.

# ÍNDICE

I - Introdução .....1

II - Fundamentos da Análise Limite

.1 - Introdução .....4

.2 - Teoremas Fundamentais da Análise Limite .....9

.1 - Teorema do Limite Superior .....11

.2 - Teorema do Limite Inferior .....11

.3 - Teorema da Unicidade .....12

.4 - Corolários dos Teoremas Limites .....12

.3 - Superfícies de Escoamento .....13

.1 - Condição de Tensão Cisalhante Máxima ( Condição de Tresca-Saint Venant ) .....15

.2 - Condição de Intensidade de Tensão Cisalhante Constante ( Condição de von Mises ) .....17

III - Programação Linear

.1 - Introdução .....19

.2 - Formulação do Problema de Programação Linear .....20

.3 - Propriedades de uma Solução para um Problema de Programação Linear .....23

.4 - Interpretação Geométrica .....24

.5 - Teoria da Dualidade .....25

.6 - O Método Simplex .....28

IV - Formulação do Problema

.1 - Modelo Matemático .....32

.2 - Relações Fundamentais .....32

.1 - Relações de Equilíbrio e Compatibilidade .....32

.2 - Relações de Plasticidade .....39

.3 - Análise Limite de Problemas de Estado Plano como um Problema de PL .....43

.1 - Formulação Utilizada no Trabalho .....44

V - Aplicação ao Problema de Estado Plano de Deformações e de Tensões

.1 - Estado Plano de Deformação .....47

.2 - Estado Plano de Tensão .....50

.3 - Elementos Finitos Implementados .....51

.1 - Elemento Quadrilateral Isoparamétrico de 4 nós .....52

.2 - Elemento Quadrilateral Isoparamétrico de 8 nós .....61

.4 - Superfícies de Escoamento Adotadas .....65

.1 - Superfície de Escoamento de Tresca .....65

.2 - Superfície de Escoamento de von Mises ....69

VI - Implementação Computacianal

.1 - Programa Desenvolvido .....72

.2 - Entrada de Dados .....73

.3 - Organização Geral do Programa.....75

VII - Aplicações

.1 - Exemplo 1 .....78

.2 - Exemplo 2 .....82

.3 - Exemplo 3 .....86

.4 - Exemplo 4 .....91

VIII - Conclusões e Sugestões .....96

APÊNDICE A - Demonstração dos Teoremas Fundamentais .....98

APÊNDICE B - Plano Desviatórico .....114

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....117

# CAPÍTULO I

# INTRODUÇÃO

O dimensionamento de uma estrutura tem por objetivo garantir sua segurança ao colapso, através de um fator de segurança, sem sacrifício de sua funcionalidade para as cargas em serviço.

Os primeiros métodos a serem utilizados para este fim foram os baseados na " análise elástica " que só levam em conta o comportamento elástico dos materiais estruturais. Estes métodos, no entanto, não fornecem uma indicação precisa do fator de segurança à ruptura, uma vez que nesta condição, os materiais podem comportar-se plasticamente, violando a hipótese de comportamento elástico.

Esta falta de precisão no coeficiente de segurança à ruptura, bem como a necessidade de se construir econômicamente estruturas cada vez mais complexas, conduziram à busca de novos métodos.

Uma alternativa, quando os efeitos de não-linearidade geométrica são desprezíveis, é a " análise elasto-plástica " que leva em conta tanto a fase elástica quanto plástica do material. Contudo, a descrição das propriedades do material não-linear em termos matemáticos acarreta um enorme esforço computacional.

Uma segunda alternativa, surgida na década de 40, é a " análise plástica " que desenvolve os métodos de dimensionamento das estruturas baseados no comportamento plástico dos materiais. Estes métodos consistem em definir uma carga de trabalho (P) e majorá-la por um coeficiente ($\lambda_{maj}$) para se obter a carga de ruptura ($P_{rut}$).

Neste trabalho estudaremos o caso de estruturas submetidas à um estado plano de tensões ou de deformações verificadas através da análise plástica ou análise limite. Ele faz parte da linha de pesquisa em análise limite de estruturas com programação linear elaborada pela COPPE/UFRJ e PUC/RJ. Pertencem a esta mesma linha de pesquisa os seguintes trabalhos:

. " Análise Limite de Lajes via Programação Linear através do Método dos elementos Finitos " de Luís Fernando Nunes Mello, onde são utilizados elementos triangulares rígidos conectados por charneiras plásticas na discretização das lajes, e o algorítmo de Livesley na resolução do problema de programação linear.(COPPE/UFRJ-1987)

. " Análise Limite de Lajes de Concreto Armado " de Ivan Fábio Mota de Menezes, onde as lajes são discretizadas através de elementos de placa espessa (isoparamétricos quadrilaterais) e elementos de placa delgada (DKT e DKQ); e na resolução do problema de programação linear, utilizou-se o algorítmo Simplex e a superfície de Johansen para as restrições.(PUC/RJ-1990)

. " Análise Limite de Cascas de Revolução " de Silvia Almeida, onde utiliza-se também elementos finitos isoparamétricos, entretanto, o problema de PL é resolvido através do algorítmo Simplex com as superfícies de Tresca (aço) e Massonet (concreto) como restrições.(PUC/RJ- em desenvolvimento).

Este trabalho foi dividido em oito capítulos e dois apêndices da seguinte forma:

- CAPÍTULO II - Descreve os fundamentos da análise limite especificando as superfícies utilizadas no estudo do estado plano.

- CAPÍTULO III - Trata os conceitos básicos e teoremas fundamentais da programação linear. Ao final, é feita uma descrição sucinta do Método Simplex.

- CAPÍTULO IV - Apresenta a formulação matemática do problema expressando-o, a partir dos teoremas limites da plasticidade, na forma de programação linear.

- CAPÍTULO V - Apresenta a especificação da formulação proposta para o problema de estado plano, descrevendo os tipos de elementos finitos implementados e a superfície de escoamento utilizada.

- CAPÍTULO VI - Faz uma descrição sucinta sobre a implementação computacional construida a partir dos conceitos estudados neste trabalho.

- CAPÍTULO VII - Mostra alguns exemplos de aplicações, para o estado plano de tensões e de deformações.

- CAPÍTULO VIII - Tece algumas conclusões e críticas sobre os resultados encontrados e sugere alguns caminhos para novas pesquisas.

# CAPÍTULO II

# FUNDAMENTOS DA ANÁLISE LIMITE

## II.1 - INTRODUÇÃO

O critério de dimensionamento das estruturas pode ser governado por alguns tipos de colapso, tais como, a fadiga, a flambagem, etc; em alguns casos, a magnitude da deflexão (mesmo antes de haver grandes deflexões plásticas) é em si mesma um critério. O colapso plástico é, entretanto, a condição governante em tantas estruturas que o desenvolvimento de métodos eficientes para a estimativa da carga de colapso plástico, ou para o dimensionamento direto de uma estrutura baseado nesta forma de colapso, tem sido nos últimos anos de intenso interesse prático para engenheiros.

Os métodos da análise limite fornecem estimativas de uma carga crítica chamada *carga de colapso plástico*. Esta carga é aquela na qual o aumento da deflexão se torna muito alto devido à plastificação. Na idealização utilizada para a análise limite, a carga se torna constante, enquanto as deflexões assumem magnitudes crescentes. Este comportamento é causado pelo desenvolvimento de fluxos plásticos na estrutura em tal extensão que o material elástico restante não é suficiente para a sustentação da carga. Quando isto ocorre, dá-se lugar a um colapso real, ou seja, esta estrutura não pode mais atender a sua função.

A carga de colapso plástico pode ser usada como uma base mais realista no dimensionamento de estruturas; um dimensionamento estrutural eficiente será proporcionado de

tal forma que a carga de trabalho terá que ser acrescida de um fator específico (coeficiente de segurança) para ocorrer o colapso, enquanto na análise elástica, um coeficiente de segurança de minoração é aplicado na tensão de escoamento $\sigma_e$ para se obter uma tensão admissível $\sigma_{adm}$. Esta tensão admissível não deverá ser ultrapassada pelas tensões calculadas para as cargas atuantes.

$$\text{ANÁLISE PLÁSTICA} \begin{cases} P_{rut} = \lambda_{maj} \cdot P \\ P_{rut} \rightarrow \text{resistência do material e/ou dimensões da peça (análise plástica)} \end{cases}$$

$$\text{ANÁLISE ELÁSTICA} \begin{cases} \sigma_{adm} = \sigma_e / \lambda_{min} \\ \sigma \text{ (análise elástica)} \leq \sigma_{adm} \end{cases}$$

Mencionaremos alguns conceitos importantes da análise limite de vigas para uma boa compreensão da análise limite como um todo.

- MOMENTO LIMITE ( $M_{lim}$)

Seja uma distribuição de tensões numa seção transversal de material elasto-plástico submetida a ação de momento fletor crescente, como mostrado na figura (II.1)

Quando $\sigma$ atinge $\sigma_e$ (FIG.II.1-b), diz-se que o momento fletor atuante é $M_e$. Quando toda a altura da seção esta submetida à tensão de escoamento $\sigma_e$(FIG.II.1-e), diz-se que o momento atuante é o momento limite $M_{lim}$.

Logo, podemos dizer que, Mlim é o maior momento que a seção pode resistir.

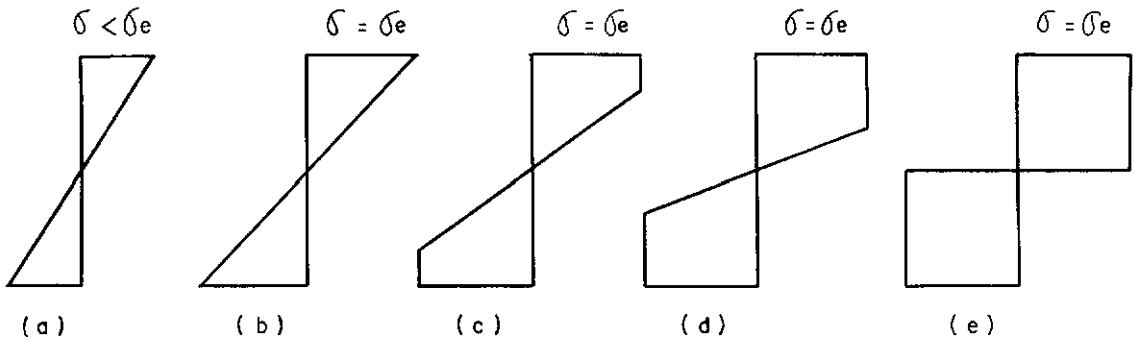



FIGURA II.1 - Tensões de flexão numa seção simétrica sob a ação de momento fletor crescente.

Para uma seção retangular, por exemplo, teremos:

$$M_e = \frac{b \cdot h^2}{6} \sigma_e \qquad M_{lim} = \frac{b \cdot h^2}{4} \sigma_e \qquad (II.1)$$

onde: b é a largura e h é a altura da seção transversal.

- RÓTULA PLÁSTICA

Seja uma viga bi-apoiada, sujeita à ação de uma carga P no meio do vão, como mostrado na figura (II.2) .

O diagrama de momentos fletores tem a forma triangular, onde $M_{max} = P\ L/4$ . Se o momento máximo atinge Mlim, os diagramas de momento e curvatura são os representados na figura (II.2) e a curvatura é indeterminada no meio do vão, onde ocorre um fluxo plástico ilimitado.

Neste instante não poderá haver nenhum aumento no

momento máximo e a carga na viga estará em seu valor máximo. A viga falha por rotações excessivas que ocorrem na seção transversal média, enquanto que as duas partes que a compõem permanecem relativamente rígidas, ligadas por uma articulação ou rótula à momento limite (*rótula plástica*), que permite as duas barras girarem, uma em relação à outra, sob a ação de um momento (Mlim) constante.

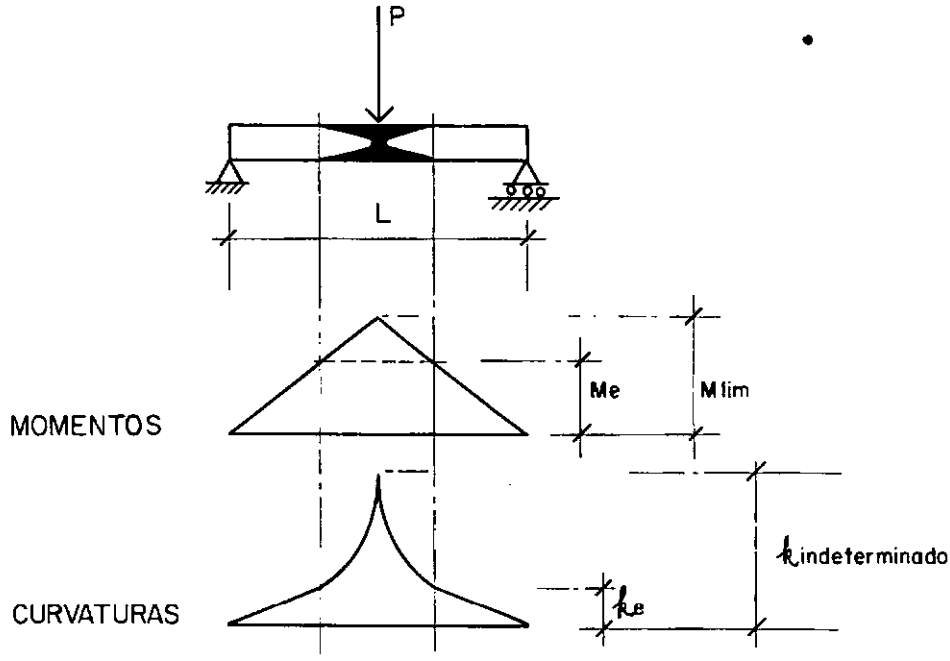



FIGURA II.2 - Viga bi-apoiada na ruptura.

- MECANISMO

Quando certas partes de uma estrutura alcançam o momento limite (FIG.II.1-e), os momentos se redistribuem, e outras seções começam a ter uma maior participação relativa no equilíbrio das cargas. O mecanismo configura-se quando a estrutura se torna hipostática.

Uma análise de acordo com os métodos plásticos deve

satisfazer três condições:

CONDIÇÃO DE MECANISMO - A carga última é alcançada quando o mecanismo se forma.

CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO - Os esforços internos estão em equilíbrio com as cargas externas.

CONDIÇÃO DE RESISTÊNCIA - Os momentos não poderão atingir valores maiores que Mlim.

A comparação entre as condições a serem satisfeitas nas análises é demonstrada na tabela (II.1).

| ANÁLISE PLÁSTICA | | ANÁLISE ELÁSTICA | |
|---|---|---|---|
| | Mecanismo | Continuidade | |
| | Equilíbrio | | |
| menor que Mlim | Momento Plástico | Momento Elástico | menor que Me |

TABELA II.1 - Comparação entre as condições necessárias para uma análise plástica ou elástica. BEEDLE [03]

Teoricamente, as rótulas plásticas interrompem a continuidade de rotação, que é uma condição necessária numa análise elástica, enquanto que na análise plástica, o

objetivo é que elas se formem em número suficiente para permitir que a estrutura ( ou parte dela) se deforme como um mecanismo. É importante ressaltar que na análise limite, se a estrutura se tornar um mecanismo, a análise começará deste ponto, o que simplifica consideravelmente , já que não é importante saber como os momentos se redistribuem, mas somente reconhecer que isto ocorreu.

## II.2 - TEOREMAS FUNDAMENTAIS DA ANÁLISE LIMITE

Usualmente, nas soluções oferecidas pela análise limite, não é possível satisfazer as três condições necessárias (mecanismo, equilíbrio e resistência) simultâneamente. A solução pode ser baseada no estabelecimento de um mecanismo ou no estabelecimento de um campo de tensões.

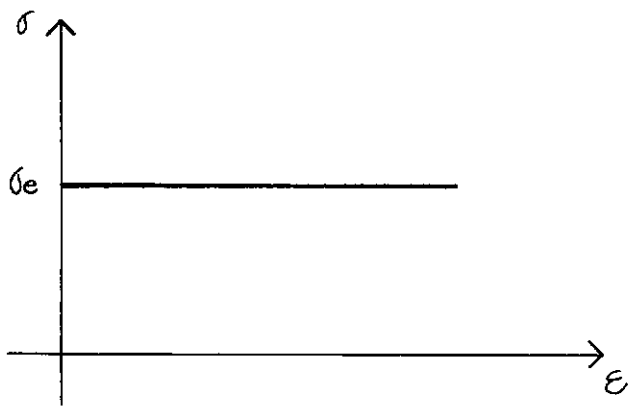



FIGURA II.3 - Material rígido-plástico perfeito.

Para a análise limite, consideramos as estruturas sujeitas a um sistema de cargas que aumentem quasi-estaticamente (o processo de carregamento é suficientemente lento de tal forma que os efeitos dinâmicos

sejam desprezados). Consideramos ainda, que o material seja rígido-plástico perfeito (FIG.II.3), ou seja, não há deformações quando as tensões estão abaixo do limite de escoamento ($\sigma_e$).

Partindo-se de um determinado nível de carga, ele será aumentado proporcionalmente. Denominaremos $\lambda$ a intensidade de carga no estado limite ou *fator de carga*.

O estado limite para um fluxo plástico será então caracterizado por dois fatos:

a) As tensões estão em equilíbrio interno, em equilíbrio com as cargas aplicadas, e todas as regiões obedecem a condição de resistência. Um campo de tensões deste tipo é chamado *estaticamente admissível*.

b) O mecanismo de escoamento satisfaz as condições cinemáticas de contorno do corpo e as condições de compatibilidade cinemática. Um mecanismo deste tipo é chamado *cinematicamente admissível*.

Para um dado carregamento, existe uma infinidade de campos de tensões estaticamente admissíveis. Cada um desses campos corresponde a uma certa intensidade do carregamento, que será chamada $\lambda_s$ ( fator de magnitude estático).

Similarmente, para um dado mecanismo admissível, uma intensidade de carregamento $\lambda_k$ ( fator de magnitude cinemático) pode ser definida de tal forma que o potencial das cargas nesta intensidade se iguala ao potencial de dissipação no mecanismo de escoamento.

Estabelecem-se então, os teoremas fundamentais da análise limite, introduzidos por GVOZDEV [05], HILL [06] e PRAGER [07], também conhecidos como "Princípios Extremos para Corpos Rígido-Plásticos".

## II.2.1 - TEOREMA DO LIMITE SUPERIOR

" Considere-se um campo de deslocamentos geometricamente compatível. Uma carga atuante, definida como proporcional a uma carga inicial dada, que realize trabalho externo igual ao trabalho plástico interno de deformação, para o campo de deslocamentos em questão, será maior ou igual à carga de colapso ."

Neste caso, todos os fatores de carga $\lambda_k$ correspondentes a um mecanismo cinematicamente admissível serão sempre maiores, ou no mínimo iguais ao fator de colapso $\lambda_c$.

Pelo fato das cargas encontradas serem maiores que a carga limite, este teorema é também conhecido como *"Unsafe Theorem"*.

## II.2.2 - TEOREMA DO LIMITE INFERIOR

" Se um campo de tensões pode ser encontrado a partir de uma carga atuante, definida como proporcional a uma carga inicial dada, satisfazendo as condições de equilíbrio e as condições estáticas do contorno, e em qualquer ponto do corpo estas tensões estejam satisfazendo um critério de resistência do material, então a carga atuante é menor ou no máximo igual a carga de colapso da estrutura. "

Ou seja, o fator ( $\lambda_s$ ) das cargas correspondentes a um campo de tensões estaticamente admissíveis, serão sempre menores ou no máximo iguais ao fator de carga limite $\lambda_c$ .

Este teorema é também conhecido como teorema estático ou *"Safe Theorem"* e é mais utilizado para o dimensionamento do que para análises, por fornecer um valor de carga menor do

que a de colapso real.

## II.2.3 - TEOREMA DA UNICIDADE

" Quando for possível associar um campo de tensões estaticamente admissível e um mecanismo cinematicamente admissível, o fator de carga $\lambda$ correspondente simultâneamente aos dois campos será o fator de colapso $\lambda_c$".

Ou seja, supondo que tenhamos encontrado um campo de tensões estaticamente admissível ( $\lambda_s \leq \lambda_c$ ) e um mecanismo cinematicamente admissível ( $\lambda_k \geq \lambda_c$ ) que corresponda a um mesmo fator, então:

$$\lambda_s = \lambda_k = \lambda_c \qquad \text{(II.2)}$$

e assim, teremos obtido a carga limite real.

## II.2.4 - COROLÁRIOS DOS TEOREMAS LIMITES

A) A carga limite encontrada é única.

B) Se as dimensões de uma estrutura perfeitamente plástica forem aumentadas sem mudança na natureza do material, e se o peso próprio do material adicionado for desprezível, o campo de tensões referente às tensões do material adicionado mais o campo de tensões no estado limite da estrutura original é estaticamente admissível para a estrutura modificada. De acordo com o Teorema do Limite Inferior poderemos então estabelecer que o aumento das dimensões de uma estrutura perfeitamente plástica não resulta numa carga limite menor.

Similarmente, o decréscimo das dimensões de uma estrutura perfeitamente plástica não resulta numa carga limite maior.

C) A possível presença de tensões residuais, nem a existência de uma pequena deformação inicial, interfere com a veracidade dos teoremas, com tanto que estas deformações não mudem significativamente a geometria da estrutura de tal forma que a condição de equilíbrio permaneça sem levar em conta estas pequenas deformações. Logo, podemos estabelecer que tensões e deformações iniciais desconhecidas não afetam a carga limite contanto que elas não alterem significativamente a geometria da estrutura.

D) Se todas as mudanças de geometria de um corpo perfeitamente plástico são desprezíveis, todas as tensões permanecerão constantes durante o fluxo plástico.

E) Um aumento na tensão de escoamento em partes do corpo não pode reduzir a carga limite.

As demonstrações dos teoremas fundamentais se encontram no APÊNDICE A .

## II.3 - SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO

É importante conhecer o comportamento de um material sob tensões combinadas. Em particular, é necessário se ter uma idéia das condições que caracterizam a transição do material do estado elástico para o estado de escoamento. Na tração simples, por exemplo, esta transição ocorre quando a tensão de tração ( $\sigma_1$ ) for igual a tensão de escoamento ( $\sigma_e$ ), ou seja:

$$\sigma_1 = \sigma_e = cte \qquad (II.3)$$

e no cisalhamento puro a tensão cisalhante ( $\tau$ ) for igual a tensão cisalhante de escoamento ( $\tau_e$ ).

$$\tau = \tau_e = cte \qquad (II.4)$$

A questão então será qual a possível forma da condição que caracterize a transição além do limite elástico sob tensões combinadas. Esta condição que é satisfeita no estado de escoamento, é chamada *condição de escoamento*. Para um corpo isotrópico e num caso tridimensional, esta função deve ser uma função simétrica das tensões principais.

$$f( \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 ) = K \qquad (II.5)$$

onde K é uma constante do material, que está relacionada com a tensão de escoamento.

A representação geométrica da função (II.5) será uma superfície chamada *superfície de escoamento*.

A interseção desta superfície com o plano desviatórico (APÊNDICE B) traduz uma curva simétrica em relação aos eixos das tensões principais 1, 2, 3 e é chamada *curva de escoamento*.

A curva de escoamento tem as seguintes propriedades:

a) Não passa pela origem O desde que o estado de escoamento seja alcançado sob tensões cisalhantes consideráveis.

b) É assumido que as propriedades do material na tração e na compressão sejam as mesmas. Logo, a curvatura de

escoamento deve ser simétrica.

c) A curvatura de escoamento é convexa. Esta condição segue a condição de não-negatividade do incremento de trabalho plástico (Postulado de Drucker).

## II.3.1 - CONDIÇÃO DE TENSÃO CISALHANTE MÁXIMA CONSTANTE (CONDIÇÃO DE TRESCA-SAINT VENANT)

Foi observado que as deformações plásticas consistem basicamente no deslizamento de cristais, que sempre acontecem num certo valor fixo de tensão máxima cisalhante.

O engenheiro frances Tresca sugeriu então em 1864, que no escoamento, a tensão máxima cisalhante em todos os pontos do meio teriam o mesmo valor para um dado material.

O valor da tensão máxima cisalhante pode ser obtido, por exemplo de um teste de tração, onde:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_e}{2} \qquad \text{(II.6)}$$

Mais tarde. a formulação matemática desta condição no caso de deformações planas, foi dada por Saint Venant.

Para o caso tridimensional, teremos:

$$\begin{aligned} 2\,|\,\tau_1\,| &= |\,\sigma_2 - \sigma_3\,| \leq \sigma_e \\ 2\,|\,\tau_2\,| &= |\,\sigma_3 - \sigma_1\,| \leq \sigma_e \\ 2\,|\,\tau_3\,| &= |\,\sigma_1 - \sigma_2\,| \leq \sigma_e \end{aligned} \qquad \text{(II.7)}$$

onde: $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \sigma_3$.

No escoamento será necessário a existência de um sinal de igualdade em uma ou duas dessas condições. Uma vez que $\sigma_e > 0$, as três tensões cisalhantes principais não poderão ser simultâneamente iguais à constante $\sigma_e$.

A seguinte relação pode ser obtida entre a tensão de escoamento $\sigma_e$ na tração e a tensão de escoamento $\tau_e$ no cisalhamento puro.

$$\sigma_e = 2\,\tau_e \qquad \text{(II.8)}$$

As condições mostradas em (II.7) definem um prisma hexaédrico regular (no espaço das tensões principais). O traçado do prisma no plano desviatórico é um hexágono regular (FIG.II.4). Fica então geometricamente claro que as três igualdades não podem ser simultâneamente satisfeitas.

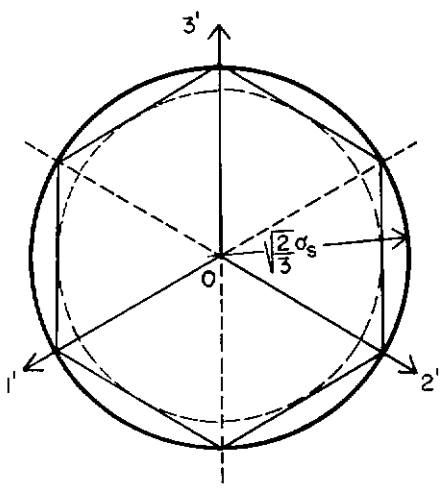



FIGURA II.4 - Interseção do prisma de escoamento com o plano desviatórico.

Hexaédro → Condição de Tresca-Saint Venant

Círculo circunscrito → Condição de von Mises

Outro ponto importante é que a tensão máxima cisalhante é igual a metade da diferença entre as tensões principais máxima e mínima; logo, a tensão principal intermediária não influencia no estado de escoamento.

## II.3.2 - CONDIÇÃO DE INTENSIDADE DE TENSÃO CISALHANTE CONSTANTE (CONDIÇÃO DE VON MISES)

O uso das condições de escoamento de Tresca-Saint Venant expressa por desigualdades envolve certas dificuldades matemáticas em problemas tridimensionais. As circunstâncias sugeriram a von Mises , em 1913, que o prisma hexaédrico poderia ser circusncrito por um cilindro circular.

A equação desta superfície é definida como:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\,\sigma_e^2 \qquad \text{(II.9)}$$

O lado esquerdo da equação (II.9) corresponde à energia elástica de distorção a menos de um fator constante. Logo, o estado de escoamento é alcançado numa certa energia elástica de distorção constante.

Logo, a seção transversal deste cilíndro no plano desviatórico é um círculo circunscrito ao hexágono(FIG.II.4)

A condição de von Mises pode ser escrita como:

$$T = \sigma_e / \sqrt{3} \qquad \text{(II.10)}$$

onde T é chamada *intensidade de tensão cisalhante* e é igual a:

$$T = \sqrt{{}^{1}/_{6}\left\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right\}} + \sqrt{(\tau_{xy}^{\ 2} + \tau_{yz}^{\ 2} + \tau_{xz}^{\ 2})} \qquad \text{(II.11)}$$

e no caso dos eixos coordenados x, y e z coincidirem com os eixos principais, vem:

$$T = \sqrt{{}^{1}/_{6}\,(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \qquad \text{(II.12)}$$

No caso de cisalhamento puro $T = \tau$ ( razão do nome intensidade de tensão cisalhante) e de (II.10) obtemos:

$$\tau_e = {}^{\sigma_e}/\sqrt{3} = 0.577\ \sigma_e \qquad \text{(II.13)}$$

As superfícies de escoamento de Tresca e von Mises foram analisadas tridimensionalmente e tendo como material o metal.

O problema que será tratado neste trabalho, é bidimensional e incluirá também o solo como material, No CAPÍTULO V estudaremos a particularização da superfície para os casos abordados.

# CAPÍTULO III

# PROGRAMAÇÃO LINEAR

## III.1 - INTRODUÇÃO

Os problemas de programação linear referem-se à distribuição eficiente de recursos limitados entre atividades competitivas, com a finalidade de atender a um determinado objetivo, por exemplo, maximização de lucros ou minimização de custos. Em se tratando de programação linear, este objetivo será expresso por uma função linear, à qual dá-se o nome de *função objetivo*.

É claro que é necessário dizer quais as atividades que consomem cada recurso, e em que proporção é feito este consumo. Essas informações serão fornecidas por equações ou inequações lineares, uma para cada recurso. Ao conjunto dessas equações ou inequações lineares dá-se o nome de *restrições do modelo*.

Geralmente existem inúmeras maneiras de distribuir os escassos recursos entre as diversas atividades, bastando para isso que essas distribuições sejam coerentes com as equações de consumo de cada recurso, ou seja, que elas satisfaçam as restrições do problema. Entretanto, deseja-se achar aquela distribuição que satisfaça as restrições do problema, e que alcance o objetivo desejado, isto é, que maximize o lucro ou minimize o custo. A esta solução dá-se o nome de *solução ótima*. PUCCINI [09]

## III.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

O problema geral de programação linear consiste em encontrar um vetor ( $x_1$, $x_2$, ..., $x_j$, ..., $x_n$ ) que minimize a função objetivo abaixo.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \qquad \text{(III.1)}$$

sujeita às restrições lineares:

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(III.2)}$$

e

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m
\end{array} \qquad \text{(III.3)}$$

onde $x_j$ são as variáveis desconhecidas, $a_{ij}$, $b_i$ e $c_j$ são as constantes dadas e $m \leq n$ . A função linear Z que queremos minimizar é chamada função objetivo, e as desigualdades (III.2) e (III.3) são chamadas restrições.

Escrevendo o problema na forma padrão, teremos:

Min.

$$Z = \sum_{1}^{n} c_j \; x_j \qquad \text{(III.4)}$$

sujeito à:

$$a_{ij}x_j \geq b_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad \text{(III.5)}$$

e

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad \text{(III.6)}$$

Algumas formulações são equivalentes a (III.4), (III.5) e (III.6) e poderão ser utilizadas mais convenientemente conforme o problema a ser transformado para a forma padrão:

a) Minimizar uma função é equivalente a maximixar o negativo desta função. Então poderemos reescrever (III.4) como:

$$\max Z' = -c_j x_j$$

b) Em (III.5) podemos introduzir uma nova variável $s_i$ ($s_i \geq 0$) chamada variável de folga "*slack variable*", e converter esta desigualdade numa igualdade.

$$a_{ij}x_j - s_i = b_i$$

para uma desigualdade $a_{ij} x_j \leq b_i$ podemos também introduzir $s_i \geq 0$ e trocar a desigualdade por:

$$a_{ij} x_j + s_i = b_i$$

c) Se houver uma igualdade $a_{ij} x_j = b_i$ nas restrições, poderemos sempre substituí-la por duas desigualdades:

$$a_{ij} x_j \geq b_i \qquad \text{e} \qquad a_{ij} x_j \leq b_i$$

d) Se uma variável $x_j$ for negativa, poderemos substituí-la por duas variáveis $x_j^+$ e $x_j^-$ (FIG.III.1), que devem ser não-negativas

$$x_j = x_j^+ + x_j^-$$

onde $x_j^+ \geq 0$ e $x_j^- \geq 0$

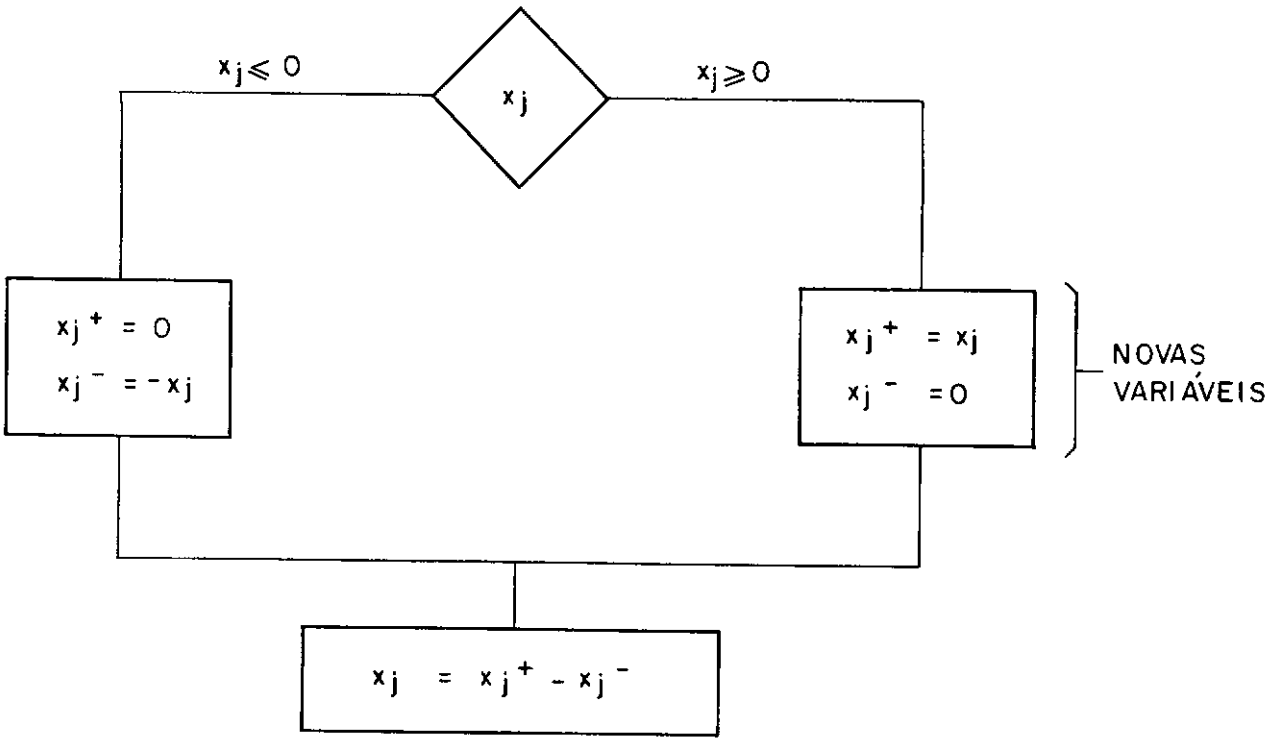



FIGURA III.1 - Algorítmo para transformação de variáveis sem restrição de sinal em não-negativa

Definimos então a programação linear, segundo DANTZIG [10], como um problema de minimização ou maximização de uma função linear sujeita à restrições lineares que podem incluir tanto desigualdades como igualdades e as variáveis desconhecidas podem incluir tanto variáveis não-negativas como variáveis sem restrição de sinal.

## III.3 - PROPRIEDADES DE UMA SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Neste ítem daremos algumas definições padrão que descrevem as características mais importantes de uma solução para um problema geral de programação linear.

DEFINIÇÃO 1 - Uma solução viável para um problema de programação linear é o vetor $X = ( x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaça as condições (III.5) e (III.6).

DEFINIÇÃO 2 - Uma solução básica para (III.5) é a solução obtida tornando ( m - n ) variáveis iguais a zero e solucionando para as m variáveis restantes, evitando que o determinante dos coeficientes dessas m variáveis seja não-nulo. As m variáveis são chamadas variáveis básicas.

DEFINIÇÃO 3 - Uma solução viável básica é uma solução básica que também satisfaça (III.6), ou seja, todas as variáveis básicas são não-negativas.

DEFINIÇÃO 4 - Uma solução viável básica não-degenerada é uma solução viável básica com exatamente m $x_i$ positivos; ou seja, todas as variáveis básicas são positivas.

DEFINIÇÃO 5 - Uma solução viável mínima é uma solução viável que também minimiza.

A seguir, enunciaremos alguns teoremas cujas demonstrações podem ser encontradas em GASS [11].

TEOREMA 1 - O conjunto de soluções para um problema de programação linear é um conjunto convexo.

TEOREMA 2 - A função objetivo assume seu mínimo num ponto extremo do conjunto convexo de soluções gerado pelo conjunto de soluções viáveis para um problema de programação linear. Se ela assumir seu mínimo em mais de um ponto extremo, então ela terá o mesmo valor para toda combinação linear desses dois pontos extremos.

Podemos então concluir que precisamos investigar somente soluções que são pontos extremos.

Para valores de n e m muito altos, fica impossível avaliar todas as soluções possíveis e selecionar uma que minimize a função objetivo. O uso de um esquema computacional torna-se, então, obrigatório. Utiliza-se, então, o *algorítmo Simplex* que encontra um ponto extremo e determina se ele é um mínimo. Se não for, o algorítmo encontrará um ponto extremo vizinho cujo valor correspondente da função objetivo será menor ou igual ao valor precedente.

## III.4 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A interpretação geométrica para os problemas de programação linear é muito importante para examinarmos o que pode ocorrer em casos simples envolvendo somente duas

variáveis. Tais casos nos darão elementos para imaginarmos as soluções de casos mais gerais com qualquer número de variáveis.

Seja achar a solução do problema:

$$\text{Max.} \quad Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a:} \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 15,$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Definindo um plano $x_1$, $x_2$, qualquer ponto que for uma solução viável deve se encontrar no primeiro quadrante (FIG.III.2-a) pois, $x_1$, $x_2 \geq 0$.

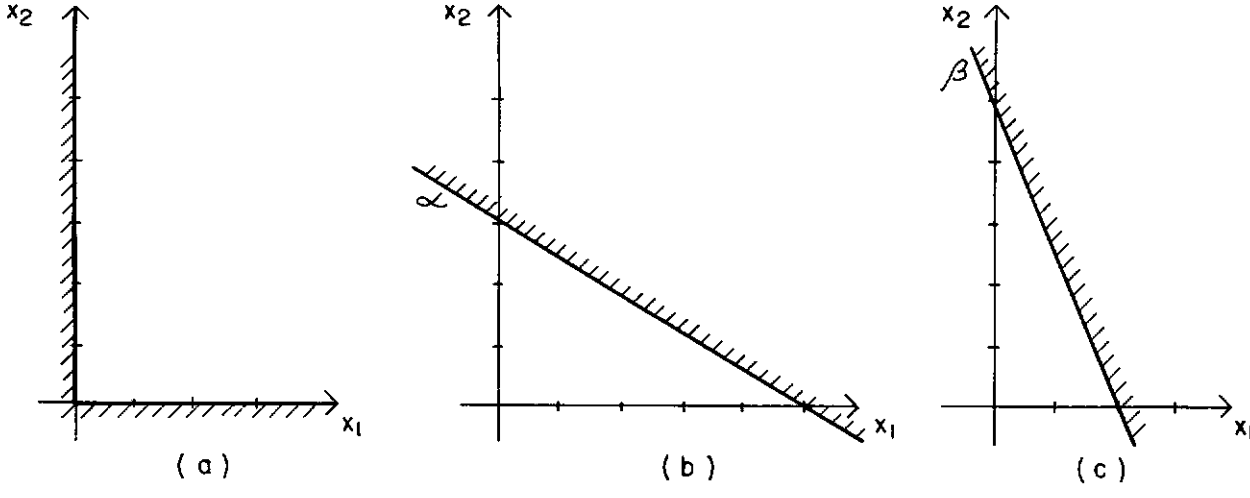



FIGURA III.2 - Representação geométrica das restrições.

O conjunto de pontos que satisfaz a inequação $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ consiste em todos os pontos no plano $x_1$ $x_2$ que se encontrem abaixo da linha $\alpha$ (FIG.III.2-b). Utilizando o mesmo raciocínio para $5x_1 + 2x_2 \leq 10$ (FIG.III.2-c), todos os pontos que estiverem abaixo da linha $\beta$ satisfazem a inequação.

Encontramos então, uma região de interseção das soluções que aparece em negrito na figura (III.3), chamada região de soluções viáveis.

Para resolver o problema de programação linear, devemos achar o ponto, ou pontos, na região de soluções viáveis que dêem o maior valor da função objetivo. As linhas paralelas na FIG.III.3 representam a função objetivo para três valores diferentes de Z.

Vemos assim, que $Z_2$ é o valor máximo de Z, e a solução viável que nos leva a este valor de Z é o ponto A da região de soluções viáveis.

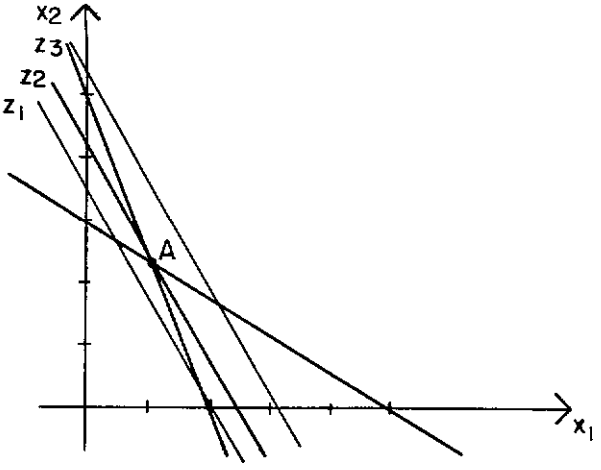



FIGURA III.3 - Representação geométrica das soluções

Para mais exemplos de interpretações geométricas não tão bem comportada como a anterior, podemos citar HADLEY [12].

## III.5 - TEORIA DA DUALIDADE

Para cada problema de programação linear existe um outro associado de maneira que os dois problemas tem muitas

relações interessantes.

Forma padrão da dualidade:

| PROBLEMA PRIMAL | PROBLEMA DUAL |
|---|---|
| $\text{Min. } Z = c\,x$ | $\text{Max. } W = y\,b$ |
| $A\,x \geq b$ | $A^t\,y \leq c$ |
| $x \geq 0$ | $y \geq 0$ |

Analisando a simetria entre os dois problemas, podemos concluir que:

a) A função objetiva do primal é de minimização, ao passo que a do dual é de maximização.

b) Os termos constantes das restrições do primal **b** são os coeficientes da função objetiva do dual.

c) Os coeficientes da função objetiva do primal c são os termos constantes das restrições do dual.

d) As restrições do primal são do tipo $\geq$ , ao passo que as do dual são do tipo $\leq$ .

e) O número de incógnitas do primal é igual ao número de restrições do problema dual.

f) O número de restrições do primal é igual ao número de incógnitas do dual.

g) A matriz dos coeficientes do primal é a transposta da matriz dos coeficientes do dual.

- TEOREMAS DA DUALIDADE

TEOREMA 1 - O dual é o dual do primal.

TEOREMA 2 - Se **x** e **y** são soluções viáveis para um par de problemas primal e dual, então $c\,x \geq y\,b$.

TEOREMA 3 - Se a restrição k do primal é de igualdade, então a variável $y_k$ do dual é sem restrição de sinal.

TEOREMA 4 - Se a variável $x_p$ do primal é sem restrição de sinal, então a restrição p do dual é uma igualdade.

TEOREMA 5 - Dado um par de problemas primal e dual, um e somente um dos seguintes casos será verdadeiro:

a) Os dois problemas tem soluções ótimas e seus valores são os mesmos; isto é, Min. c **x** = Máx. **y b**.

b) Um problema não tem uma solução viável, e o outro tem somente uma solução viável, mas uma solução não finita.

c) Nenhum dos dois problemas tem soluções viáveis.

## III.6 - O MÉTODO SIMPLEX

O algorítmo Simplex é utilizado para solucionar problemas de programação linear na forma padrão:

$$\text{Min. } Z = c_j x_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

sujeito à:

$$a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (m \leq n)$$

e

$$x_j \geq 0$$

Para obtermos a solução ótima, podemos escolher m colunas da matriz A e resolver m equações simultâneas para as m variáveis. Isto requer que resolvamos um número de equações que pode se tornar impraticável dependo do valor de n. O método mais prático é chamado método Simplex que

envolve um pequeno número de passos para a resolução do problema.

Introduziremos o método Simplex através de um exemplo numérico.

Seja o problema:

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + x_3 \qquad \text{(III.7)}$$

sujeito à:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \qquad \text{(III.8)}$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \qquad \text{(III.9)}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Reescreveremos (III.7), (III.8) e (III.9) como:

$$Z - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \qquad \text{(III.10)}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \qquad \text{(III.11)}$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \qquad \text{(III.12)}$$

o que nos trará quatro incógnitas, Z, $x_1$, $x_2$ e $x_3$ e três equações. Se utilizarmos o método de eliminação de Gauss para Z, $x_1$, e $x_2$, teremos o seguinte sistema de equações:

$$Z + 3x_3 = 8 \qquad \text{(III.13)}$$

$$x_1 + 3x_3 = 5 \qquad \text{(III.14)}$$

$$x_2 + x_3 = 3 \qquad \text{(III.15)}$$

Este sistema está na forma diagonal para Z, $x_1$ e $x_2$. Uma solução imediata aparece nesta forma; $Z = 8$, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$. As outras variáveis, neste caso $x_3$ , são consideradas iguais a zero e $x_1$ e $x_2$ serão as variáveis básicas do sistema, logo

$x_3$ será a variável não-básica. Como $x_1$ e $x_2$ são ambas não-negativas, diz-se que Z = 8 é uma solução viável.

De (III.13) podemos ver que se $x_3$ fosse qualquer número positivo, e não zero, o valor de Z seria menor. Como queremos minimizar Z, devemos fazer $x_3$ o maior possível. Mas em (III.14) e (III.15) vemos que se o valor de $x_3$ for tomado arbitrariamente alto, podemos tornar $x_1$ e $x_2$ negativas.

No nosso exemplo, $x_1 = 5 - 3x_3$ e $x_2 = 3 - x_3$. Logo, o valor máximo que $x_3$ pode ter, sem fazer com que $x_1$ ou $x_2$ seja negativo, é determinado por:

$$x_3 = \min(5/3,\ 3/1) = 5/3$$

Se $x_3 = 5/3$, então $x_1 = 5 - 3(5/3) = 0$.

Coloquemos o sistema na forma diagonal para Z, $x_2$ e $x_3$:

$$\begin{array}{rrrrl} Z - & x_1 & & & = 3 \\ & 1/3x_1 & & + x_3 & = 5/3 \\ & -1/3x_1 & + x_2 & & = 4/3 \end{array}$$

e a solução imediata será Z = 3, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 5/3$ e $x_1 = 0$. Agora, se aumentarmos o valor de $x_1$, o valor de Z também aumentará, então podemos dizer que Z = 3 é o valor mínimo de Z.

Neste ponto, é importante enunciarmos algumas definições que validam o método Simplex:

- Dado um sistema de equações, existe um espaço de soluções a ele associado. A solução é um conjunto de pontos que satisfazem o sistema de equações.

- Quando o número de variáveis é igual ao número de equações o determinante da matriz dos coeficientes será não singular.

- Quando o número de variáveis for maior que o número de equações, o espaço das soluções será geralmente uma linha, um plano ou um espaço de dimensão maior.

- Dois sistemas de equações são ditos equivalentes se tiverem o mesmo espaço de soluções.

TEOREMA - A eliminação de Gauss não altera o espaço das soluções de um sistema de equações.

O método Simplex dá um tratamento ao problema de programação linear semelhante ao exemplo anterior, mas de uma forma mais sistemática. Compreenderá, portanto, os seguintes passos:

1 - Achar uma solução compatível básica inicial.

2 - Verificar se a solução atual é ótima. Se for, para. Caso contrário, segue para o passo 3

3 - Determinar a variável não básica que deve entrar na base.

4 - Determinar a variável básica que deve sair da base.

5 - Achar a nova solução compatível básica, e voltar ao passo 2.

# CAPÍTULO IV

# FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

## IV.1 - MODELO MATEMÁTICO

As formulações matemáticas dos problemas de cálculo estrutural tomam como relações fundamentais:

- CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO - ligadas à um campo de tensões caracterizado por variáveis ditas estáticas que relacionam-se entre si e com as cargas aplicadas (expressões de equilíbrio).
- CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE - ligadas à um campo de deformações caracterizado por variáveis ditas cinemáticas que relacionam-se entre si ( expressões de compatibilidade).
- RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DO MATERIAL - relacionam os campos de tensões e deformações.

O modelo matemático utilizado neste trabalho, baseia-se na discretização da estrutura através do método dos elementos finitos. Este método numérico é necessário na resolução das equações diferenciais que expressam as relações de equilíbrio e compatibilidade.

## IV.2 - RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

### IV.2.1 - RELAÇÕES DE EQUILÍBRIO E COMPATIBILIDADE

Em plasticidade perfeita não existe uma relação biunívoca entre as grandezas estáticas e as grandezas cinemáticas.

Por este motivo, ao se utilizar a metodologia dos elementos finitos, para se obter a descrição nodal da estrutura discretizada, o campo de tensões e o campo de deslocamentos devem ser variáveis independentes do problema, tendo-se que admitir para cada uma delas, uma lei de distribuição dentro de cada elemento finito, em função dos respectivos valores nodais. FONSECA [14]

Para o campo de deslocamentos $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x})$, em cada elemento finito, temos:

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u}_A \qquad \text{(IV.1)}$$

onde: $\underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x})$ são as funções de interpolação dos deslocamentos.

$\underset{\sim}{u}_A$ são os deslocamentos em "A" pontos nodais.

Para o campo de tensões $\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x})$, temos:

$$\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{N}_\sigma(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{\sigma}_c \qquad \text{(IV.2)}$$

onde: $\underset{\sim}{N}_\sigma(\underset{\sim}{x})$ são as funções de interpolação das tensões.

$\underset{\sim}{\sigma}_c$ são as tensões em "C" pontos nodais.

As relações de deformações X deslocamentos, que exprimem as expressões de compatibilidade, são:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}) \qquad \text{(IV.3)}$$

onde: $\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x})$ é o estado de deformações num ponto genérico $(x)$.

$\underset{\sim}{\nabla}$ é uma matriz composta por operadores diferenciais.

No equilíbrio, teremos:

$$\underset{\sim}{\nabla}^{t} \cdot \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0} \qquad \text{(IV.4)}$$

onde: $\underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x})$ são as forças de massa por unidade de volume do elemento.

ou ainda:

$$-\underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla}^{t} \cdot \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) \qquad \text{(IV.5)}$$

Na expressão (IV.3) a matriz $\underset{\sim}{\nabla}$ relaciona deformações com deslocamentos e sua transposta $\underset{\sim}{\nabla}^{t}$, relaciona forças com tensões em (IV.5). Logo, essas relações representam uma dualidade chamada estático-cinemática ( *Static-Kinematic Duality - SKD*).

Substituido-se (IV.1) em (IV.3) e (IV.2) em (IV.5), temos:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla}\, \underset{\sim}{N}_{u}(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{u}_{A} \qquad \text{(IV.6)}$$

$$-\underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla}^{t}\, \underset{\sim}{N}_{\sigma}(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{\sigma}_{c} \qquad \text{(IV.7)}$$

Para se recuperar a dualidade estático-cinemática, a qual surge como critério de consistência da formulação do método dos elementos finitos, temos que:

a) pré-multiplicar a expressão (IV.6) por $\underset{\sim}{N}^t \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x})$ e integrar a relação resultante no volume do elemento finito

$$\int \underset{\sim}{N}^t \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x})\, dV = \int \underset{\sim}{N}^t \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x})\, dV \cdot \underset{\sim}{u}_A \qquad \text{(IV.8)}$$

denominando $\underset{\sim}{\varepsilon}_c$ de vetor das deformações generalizadas;

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_c = \int_V \underset{\sim}{N}^t \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x})\, dV \qquad \text{(IV.9)}$$

e, representando ainda:

$$\underset{\sim}{C} = \int_V \underset{\sim}{N}^t \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x})\, dV \qquad \text{(IV.10)}$$

sendo, $\underset{\sim}{C}$ um operador não-diferencial que relaciona os deslocamentos nos pontos nodais "A" com as deformações generalizadas nos pontos nodais "C".

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_c = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{u}_A \qquad \text{(IV.11)}$$

b) transformar a equação (IV.4), que representa uma equação diferencial, numa equação integral via método dos resíduos ponderados com peso $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x})$: MENEZES [15]

$$\underset{\sim}{\nabla}^t \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0} \quad \Rightarrow \qquad \text{(IV.12)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_V \left[ \underset{\sim}{\nabla}^t \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x}) \right]^t \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x})\, dV = 0$$

Utilizando-se a notação indicial, tem-se:

$$\int_V \left[ \sigma_{ij,j} + b_i \right] u_i \, dV = 0 \qquad \text{(IV.13)}$$

Integrando-se por partes a expressão (IV.13), chega-se a:

$$\int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} \, dV - \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} \, dV + \int_V b_i u_i \, dV = 0 \qquad \text{(IV.14)}$$

Aplicando-se a identidade de Green na expressão (IV.14), obtém-se:

$$\int_S \sigma_{ij} \eta_j u_i \, dS + \int_V b_i u_i \, dV = \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} \, dV \qquad \text{(IV.15)}$$

onde $\eta_j$ representa as direções normais à superfície do corpo

Sabe-se que:

$\sigma_{ij}\eta_j = p_i$ ⇒ são as fórmulas de Cauchy, que representam as forças de superfície.

$u_{i,j} = \varepsilon_{ij}$ ⇒ são as deformações num ponto genérico.

Então, a expressão (IV.15) transforma-se em:

$$\int_S p_i u_i \, dS + \int_V b_i u_i \, dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, dV \qquad \text{(IV.16)}$$

Voltando-se à notação matricial, a expressão (IV.16) pode ser escrita como:

$$\int_S \underset{\sim}{u}^t(x) \, \underset{\sim}{p}(x) \, dS + \int_V \underset{\sim}{u}^t(x) \, \underset{\sim}{b}(x) \, dV = \int_V \underset{\sim}{\varepsilon}^t(x) \, \underset{\sim}{\sigma}(x) \, dV \qquad \text{(IV.17)}$$

Substituindo-se as expressões (IV.1), (IV.2) e (IV.6) em (IV.17), chega-se à:

$$(\underset{\sim}{u}_A)^t \int_S \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{p}(\underset{\sim}{x})\, dS + (\underset{\sim}{u}_A)^t \int_V \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x})\, dV =$$

$$= (\underset{\sim}{u}_A)^t \int_V \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{\nabla}^t\, \underset{\sim}{N}_\sigma(\underset{\sim}{x})\, dV\, \underset{\sim}{\sigma}_c \qquad \text{(IV.18)}$$

Como a expressão (IV.18) é válida para qualquer vetor de deslocamentos nodais $\underset{\sim}{u}_A$, então os mesmos podem ser eliminados, resultando-se na seguinte expressão:

$$\int_S \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{p}(\underset{\sim}{x})\, dS + \int_V \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x})\, dV = \int_V \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{\nabla}^t\, \underset{\sim}{N}_\sigma(\underset{\sim}{x})\, dV\, \underset{\sim}{\sigma}_c \qquad \text{(IV.19)}$$

Substituindo-se a expressão (IV.10) em (IV.19), chega-se a:

$$\underset{\sim}{f}_A = \underset{\sim}{C}^t\, \underset{\sim}{\sigma}_c \qquad \text{(IV.20)}$$

onde:

$$\underset{\sim}{f}_A = \int_S \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{p}(\underset{\sim}{x})\, dS + \int_V \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x})\, dV \qquad \text{(IV.21)}$$

representa o vetor das forças nodais equivalentes.

Reescrevendo-se as equações (IV.11) e (IV.20), tem-se:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\varepsilon}_c = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{u}_A \\ \underset{\sim}{f}_A = \underset{\sim}{C}^t \cdot \underset{\sim}{\sigma}_c \end{cases} \qquad \text{(IV.22)}$$

Portanto, fica restabelecida a dualidade estático-cinematica (SKD), a nível de deslocamentos e tensões em pontos nodais.

Se recorrermos à integração numérica da Gauss para calcularmos as integrais mostradas anteriormente, resultará:

$$\underset{\sim}{f}_A = \sum_{i=1}^{NG} \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x}_i)\ \underset{\sim}{p}(\underset{\sim}{x}_i)\ w_i \ +$$

$$+ \sum_{i=1}^{NG} \underset{\sim}{N}_u^t(\underset{\sim}{x}_i)\ \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x}_i)\ w_i \qquad \text{(IV.23)}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_c = \sum_{i=1}^{NG} \underset{\sim}{N}_\sigma^t(\underset{\sim}{x}_i) \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x}_i)\ w_i \qquad \text{(IV.24)}$$

$$\underset{\sim}{C} = \sum_{i=1}^{NG} \underset{\sim}{N}_\sigma^t(\underset{\sim}{x}_i) \cdot \underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{x}_i)\ w_i \qquad \text{(IV.25)}$$

onde: NG é o número de pontos de Gauss.

$\underset{\sim}{x}_i$ são as coordenadas dos pontos de Gauss.

$w_i$ são os fatores de peso.

$\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{x}_i) = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x}_i)$ é a matriz deformação X deslocamento

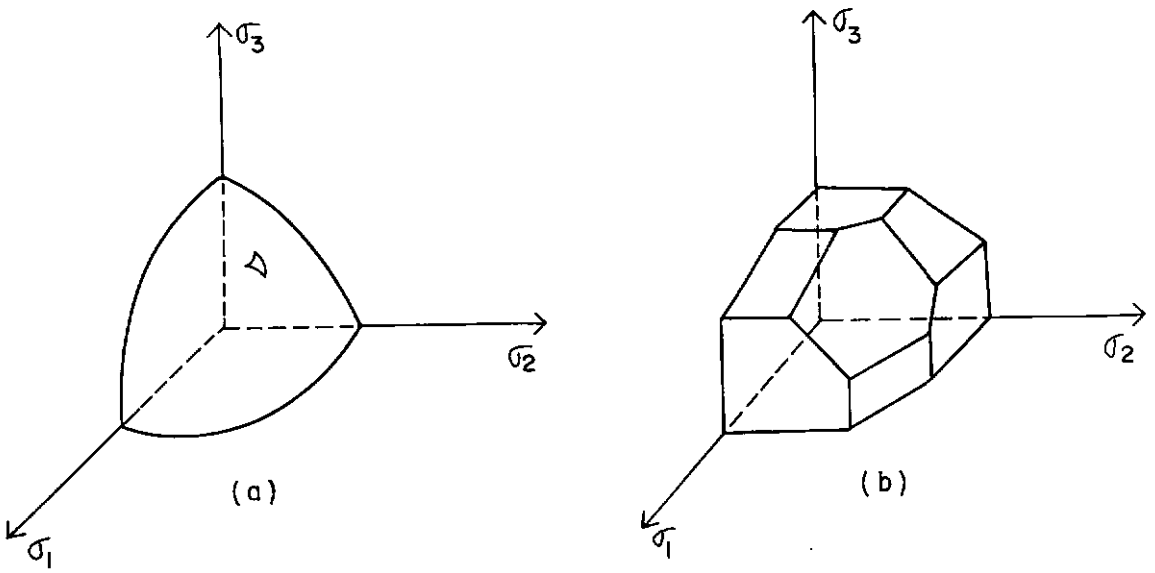
As relações cinemática e estática (IV.22) de elementos individuais que compõem a estrutura geram as relações, à nível global, de compatibilidade e de equilíbrio para o sistema estrutural por simples " espalhamento ", após referidas a um sistema global único de coordenadas.

## IV.2.2 - RELAÇÕES DE PLASTICIDADE

O comportamento plástico perfeito do material estrutural é geometricamennte caracterizado pela *superfície de escoamento*, que é o lugar geométrico das combinações independentes das componentes do tensor das tensões num ponto que provocam a plastificação do material, e pelo vetor normal àquela superfície.

A superfície de escoamento é contínua e convexa.(FIG.IV.1-a)

Utilizando-se um " conjunto de linearizações ", ela pode ser transformada num poliedro chamado *poliedro de escoamento*. (FIG.IV.1-b)




$\sigma_i$ = COMPONENTES DO VETOR DAS TENSÕES

FIGURA IV.1 - Representação tridimensional da superfície de escoamento: (a) real,(b) seccionalmente linearizada

O poliedro de escoamento resultante é constituído por hiperplanos (FIG.IV.2) definidos por dois parâmetros:

$\underset{\sim}{\sigma}_{*i}$ → distância do hiperplano " i " à origem do sistema de eixos.

$\underset{\sim}{n}_{i}$ → vetor normal unitário que orienta a direção do hiperplano " i ".

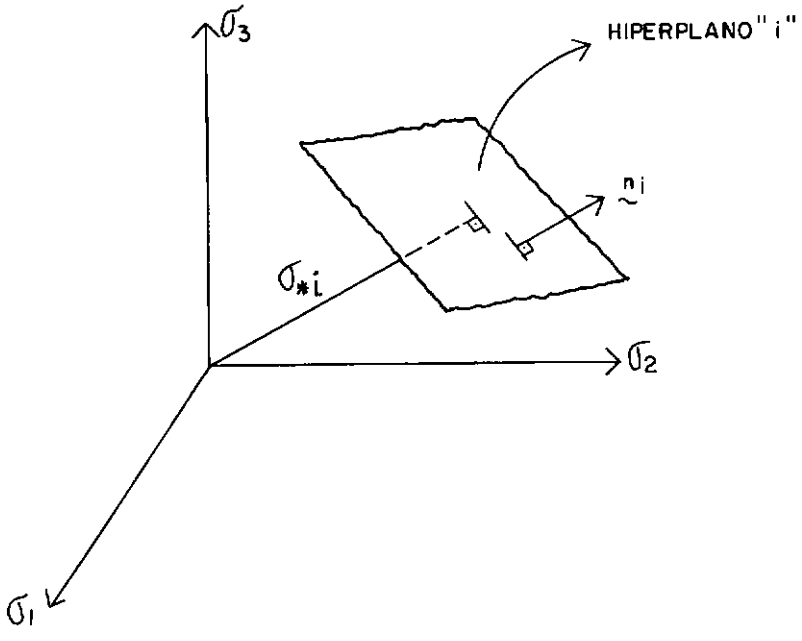



FIGURA IV.2 - Representação tridimensional dos hiperplanos que constituem a superfície de escoamento seccionalmente linearizada.

Portanto, matricialmente, a superfície de escoamento seccionalmente linearizada é representada por:

$$\underset{\sim}{\sigma}_{*}^{t} = \langle \sigma_{1*} , \sigma_{2*} , \ldots , \sigma_{*NH} \rangle \qquad \text{(IV.26)}$$

e

$$\underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{2x} & \ldots & n_{NHx} \\ n_{1y} & n_{2y} & \ldots & n_{NHy} \\ n_{1z} & n_{2z} & \ldots & n_{NHz} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.27)}$$

onde: NH é o número de hiperplanos que definem a superfície de escoamento.

$\sigma_*$ é o vetor que contém as distâncias de cada hiperplano à origem.

Q é a matriz que contém os componentes dos vetores unitários normais à cada hiperplano.

Matematicamente, um material que apresente uma fase final de comportamento plástico perfeito é caracterizado pelo critério de resistência, lei de fluência e condição de complementaridade, respectivamente:

$$\underset{\sim}{\Pi}_* = \underset{\sim}{Q}^t \cdot \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{\sigma}_* \leq 0 \qquad \text{(IV.28)}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{Q} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}_* \quad , \text{ com } \underset{\sim}{\varepsilon}_* \geq 0 \qquad \text{(IV.29)}$$

$$\underset{\sim}{\Pi}_*^t \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}_* = 0 \qquad \text{(IV.30)}$$

onde: $\underset{\sim}{\Pi}_*$ são os potenciais plásticos.

$\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x})$ é o tensor das deformações plásticas.

$\underset{\sim}{\varepsilon}_*$ são parâmetros plásticos que definem a grandeza da deformação plástica ocorrida.

É interessante observar que, de acordo com (IV.29), as deformações plásticas $\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x})$ ocorrem em direções normais à superfície de escoamento (FIG.IV.3), representando a condição de normalidade.

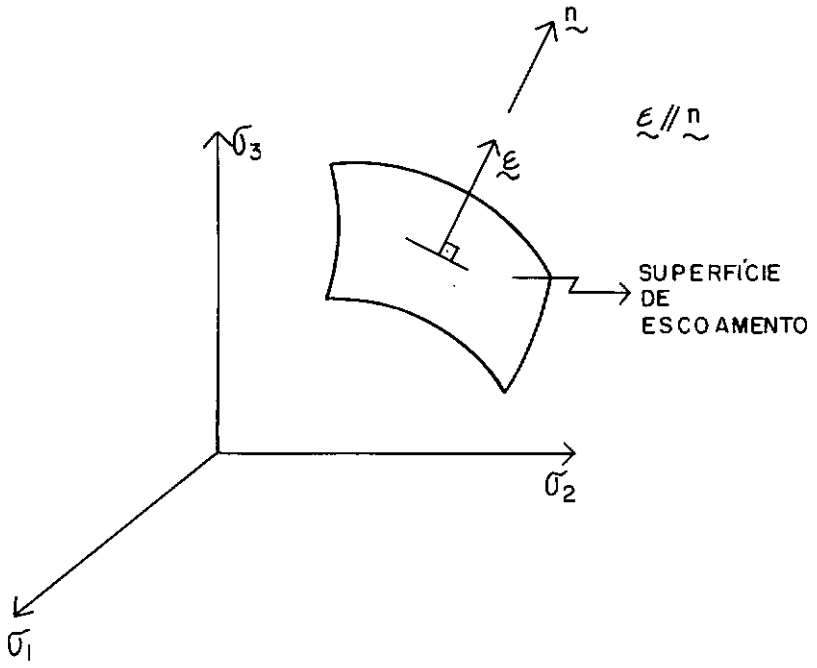



FIGURA IV.3 - Direção das deformações plásticas.

( Condição de Normalidade)

Se considerarmos as relações extendidas à nível global, para toda a estrutura discretizada, considerando-as em todos os pontos nodais " c ", as relações de plasticidade tomam a forma:

$$\underset{\sim}{\Pi}_{*c} = \underset{\sim}{Q}^{t}_{c} \cdot \underset{\sim}{\sigma}_{c} - \underset{\sim}{\sigma}_{*c} \leq 0 \qquad \text{(IV.31)}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{c} = \underset{\sim}{Q}_{c} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} \;, \text{ com } \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} \geq 0 \qquad \text{(IV.32)}$$

$$\underset{\sim}{\Pi}^{t}_{*c} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} = 0 \qquad \text{(IV.33)}$$

## IV.3 - ANÁLISE LIMITE DE PROBLEMAS DE ESTADO PLANO COMO UM PROBLEMA DE PL.

Como ja foi visto, a análise plástica limite é fundamentalmente a procura de um fator de colapso ( $\lambda$ ) e, como esta análise é aplicada somente a cargas proporcionais, a variação das cargas é dada por um parâmetro de carga que será o fator de colapso.

Se $\underset{\sim}{f}_{Ap}$ forem as cargas nodais permanentes, e se $\underset{\sim}{f}_{Av}$ forem as cargas nodais variáveis, cujos valores relativos no instante de colapso são $\underset{\sim}{f}_{AO}$, as cargas totais aplicadas $\underset{\sim}{f}_{A}$ serão dadas por:

$$\underset{\sim}{f}_{A} = \underset{\sim}{f}_{Ap} + \underset{\sim}{f}_{Av} = \underset{\sim}{f}_{Ap} + \lambda \cdot \underset{\sim}{f}_{AO} \qquad \text{(IV.34)}$$

Atingindo-se o colapso, desenvolvem-se deformações plásticas de pós-colapso, crescendo proporcionalmente nas zonas plastificadas. Uma vez no " estado de mecanismo ", o estado de tensões mantém-se constante, mas a indeterminação existente nas deformações plásticas é eliminado pela identidade:

$$\underset{\sim}{f}^{t}_{AO} \cdot \underset{\sim}{u}_{A} = 1 \qquad \text{(IV.35)}$$

Juntando as igualdades (IV.34) e (IV.35) às relações de equilíbrio (IV.20), plasticidade (IV.31),(IV.32) e (IV.33), constitui-se o sistema governativo do problema da análise plástica limite.

$$\begin{cases} \underset{\sim}{f}_{AO}^{t} \cdot \underset{\sim}{u}_{A} = 1 & \text{(IV.36)} \\ \text{- equação que elimina a indeterminação} & \\ \underset{\sim}{f}_{Ap} + \lambda \cdot \underset{\sim}{f}_{AO} = \underset{\sim}{C}^{t} \cdot \underset{\sim}{\sigma}_{c} = \underset{\sim}{f}_{A} & \text{(IV.37)} \\ \text{- equação que será a função objetivo} & \\ \underset{\sim}{Q}_{c} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{u}_{A} = \underset{\sim}{\varepsilon}_{c} & \text{(IV.38)} \\ \text{- equação que estabelece as condições de compatibilidade.} & \end{cases}$$

com:
$$\begin{cases} \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} \geq 0 \\ \underset{\sim}{\Pi}_{*c} \leq 0 \\ \underset{\sim}{\Pi}_{*c} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} = 0 \end{cases}$$

## IV.3.1 - FORMULAÇÃO UTILIZADA NO TRABALHO

Utilizaremos neste trabalho de análise limite o Teorema do Limite Superior para materiais rígido-plásticos enunciado no CAPÍTULO II.

Logo, o problema a ser solucionado será:

- Minimizar o fator de carga $\lambda_k$.
- Satisfazer as condições de compatibilidade(IV.38).
- Satisfazer a equação (IV.36)

Formulando o problema matricialmente, teremos:

$$\text{Min. } Z = \langle \underset{\sim}{\sigma}_{*c} \; -\underset{\sim}{f}_{Ap} \rangle \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} \\ \underset{\sim}{u}_{A} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.39)}$$

$$\text{Sujeito à: } \begin{bmatrix} \underset{\sim}{Q}_{c}^{t} & -\underset{\sim}{C} \\ \underset{\sim}{0}^{t} & (\underset{\sim}{f}_{AO})^{t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} \\ \underset{\sim}{u}_{A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Como foi dito no CAPÍTULO III, é necessário garantir a condição de não-negatividade das variáveis que pode ser feita através da seguinte substituição:

$$\underset{\sim}{u}_A = \underset{\sim}{u}_A^+ - \underset{\sim}{u}_A^- \qquad \text{com: } \underset{\sim}{u}_A^+ , \underset{\sim}{u}_A^- \geq 0 \qquad \text{(IV.40)}$$

É necessário também, transformar as restrições em desigualdades, o que resultará num problema de PL na forma padrão para resolução do algorítmo SIMPLEX:

$$\text{Min.} \quad Z = \langle \underset{\sim}{\sigma}_{*c} \; -\underset{\sim}{f}_{Ap} \; -\underset{\sim}{f}_{Ap} \rangle \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} \\ \underset{\sim}{u}_A^+ \\ \underset{\sim}{u}_A^- \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.41)}$$

Sujeito à:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{Q}_c & -\underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{C} \\ -\underset{\sim}{Q}_c & \underset{\sim}{C} & -\underset{\sim}{C} \\ \underset{\sim}{0}^t & (\underset{\sim}{f}_{AO})^t & -(\underset{\sim}{f}_{AO})^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} \\ \underset{\sim}{u}_A^+ \\ \underset{\sim}{u}_A^- \end{Bmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \geq \\ \geq \end{matrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{com } \underset{\sim}{\varepsilon}_{*c} , \underset{\sim}{u}_A^+ , \underset{\sim}{u}_A^- \geq 0$$

O tipo de substituição acima apresentado, acarreta uma grande desvantagem, que consiste num aumento considerável na " dimensão " do problema. Por esse motivo, optou-se por uma forma alternativa de contornar o problema da não-negatividade das variáveis através de uma " translação " no conjunto das variáveis de um valor constante e igual ao

máximo limite inferior das mesmas, mantendo-se assim, o número de variáveis do problema.

# CAPÍTULO V

# APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES E DE TENSÕES

## V.1 - ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

No estado plano de deformação os deslocamentos das partículas de um corpo são paralelos ao plano xy e independentes de z.

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0 \qquad (V.1)$$

É suposto que o corpo seja isotrópico e homogêneo. Para qualquer região do corpo onde z for uma constante, o estado de tensão e de deformação é o mesmo; logo, as componentes de tensão dependem somente de x e y, sendo $\tau_{xz}$ e $\tau_{yz}$ iguais a zero.

Para encontrarmos as cargas limites no problema de estado plano de deformação, utilizaremos o conceito de corpo rígido-plástico (definido no CAPÍTULO II), o que introduzirá um erro que é difícil de ser estimado. Uma análise mais consistente do problema de estado plano consideraria a região elástica adotando o corpo como elástico-plástico; pois, quando o estado limite é alcançado, algumas regiões do corpo estão ainda no estado elástico. Entretanto, as soluções obtidas com uso da hipótese de corpo elástico-plástico envolve maiores dificuldades.

Para encontrarmos a carga limite utilizaremos então, o modelo rígido-plástico que tem provado ser uma aproximação adequada. KACHANOV [01]

É necessário ressaltar, entretanto, que para corpos rígido-plásticos deveríamos nos referir somente à velocidade de deformação, uma vez que atingida a carga limite, avaliar a deformação propriamente dita torna-se inviável. Todavia, para efeito de simplificação, as equações terão como base as deformações.

- EQUAÇÕES BÁSICAS

De (V.1) tiramos que $\varepsilon_z = 0$. Usando esta condição, podemos deduzir das equações da teoria de defomação, e das equações da teoria do fluxo que devido à omissão das deformações elásticas:

$$\sigma_z - \sigma = 0 \qquad \text{(V.2)}$$

onde: $\sigma$ é chamada tensão hidrostática, ou seja:

$$\sigma = 1/3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad \text{(V.3)}$$

Substituindo (V.3) em (V.2), teremos:

$$\sigma_z - 1/3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

ou:

$$\sigma_z = 1/2\,(\sigma_x + \sigma_y) \qquad \text{(V.4)}$$

Sendo $\sigma_z$ uma das tensões principais ( $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ), as outras tensões principais $\sigma_i$ devem satisfazer a equação:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(V.5)}$$

ou:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{máx}\\ \sigma_{mín}\end{matrix}\right\} = 1/2\,(\sigma_x + \sigma_y) \pm 1/2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \qquad (V.6)$$

Sendo $\sigma_z$ a tensão principal intermediária,

$$\tau_{máx} = 1/2\,(\sigma_{máx} - \sigma_{mín}) = 1/2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \equiv \tau \qquad (V.7)$$

Logo, as tensões principais serão:

$$\sigma_1 = \sigma + \tau, \qquad \sigma_z = \sigma, \qquad \sigma_2 = \sigma - \tau \qquad (V.8)$$

isto é, o estado de tensão em cada ponto será determinado pela superposição de uma pressão hidrostática $\sigma$ e uma tensão de cisalhamento puro $\tau$. (FIG.V.1)

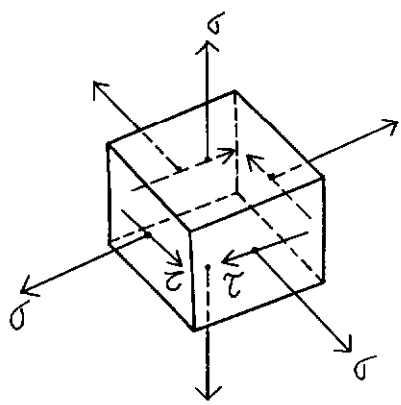



FIGURA V.1 - Estado de tensões em cada ponto

## V.2 - ESTADO PLANO DE TENSÃO

Neste caso, as componentes de tensão $\sigma_z$, $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ ( no sistema de coordenadas x, y e z) são iguais a zero e as componentes $\sigma_x$, $\sigma_y$ e $\tau_{xy}$ são independentes de z.

Um estado plano de tensões seria, por exemplo, uma chapa fina carregada com forças aplicadas no contorno, paralelas ao plano da chapa e distribuídas uniformemente ao longo da espessura (FIG.V.2), as componentes de tensão $\sigma_z$, $\tau_{xz}$ e $\tau_{yz}$ são nulas em ambas as faces da chapa, e pode-se admitir, em princípio, que são nulas também no interior da chapa. Pode ser admitido também por uma aproximação que estas três componentes são independentes de z, isto é, elas não variam ao longo da espessura.

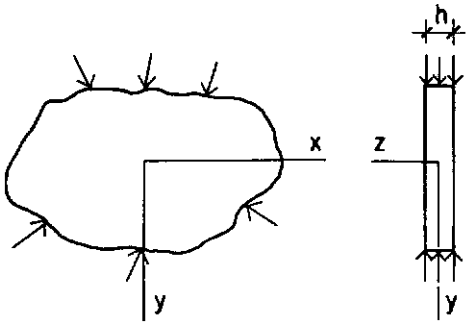



FIGURA V.2 - Estado plano de tensão

Nestas condições, as equações diferenciais de equilíbrio de um elemento da chapa $h\ dx\ dy$ (FIG.V.2), se a espessura $h$ for constante, são:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 , \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad \text{(V.9)}$$

A seguir especificaremos os tipos de elementos finitos implementados e, em seguida, a superfície de escoamento utilizada na definição do critério de resistência do material.

## V.3 - ELEMENTOS FINITOS IMPLEMENTADOS

Foram implementados, neste trabalho, dois tipos de elementos finitos: elemento quadrilateral isoparamétrico de 4 e de 8 nós.

De acordo com a formulação apresentada no CAPÍTULO IV, para cada tipo de elemento determinaremos a matriz $\underset{\sim}{C}$, que relaciona os deslocamentos nodais ( $\underset{\sim}{u}_A$ ) com as deformações generalizadas ( $\underset{\sim}{\varepsilon}_c$ ), ou seja:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_c = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{u}_A \qquad (V.10)$$

onde:

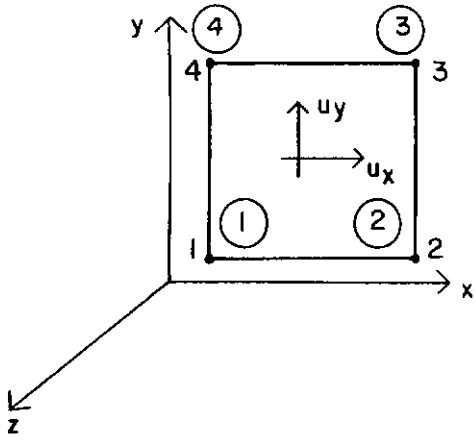
$$\underset{\sim}{C} = \int \underset{\sim}{N}_\sigma^t \cdot \underset{\sim}{B} \, dV \qquad (V.11)$$

Portanto, para cada tipo de elemento finito, mostraremos como obter a matriz $\underset{\sim}{B}$, que relaciona as deformações num ponto genérico com os deslocamentos nodais, e a matriz $\underset{\sim}{N}_\sigma$, que contém as funções de interpolação das tensões.

## V.3.1 - ELEMENTO QUADRILATERAL ISOPARAMÉTRICO DE 4 NÓS

O procedimento básico na formulação de um elemento finito isoparamétrico é expressar as coordenadas e os deslocamentos de um elemento com as mesmas fórmulas de interpolação.

Um elemento quadrilateral plano, de lados retos e com quatro pontos nodais " A " para interpolação dos deslocamentos, apresenta dois graus de liberdade por nó (para o caso de estado plano); um deslocamento paralelo ao eixo " x " ( $u_x$ )e um deslocamento paralelo ao eixo " y " ( $u_y$ ).(FIG.V.3)




DESLOCAMENTOS NODAIS:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}_i \quad i = 1, \ldots, 4$$

1 , 2 , 3 , 4 ⟹ Pontos Nodais "A"

(1),(2),(3),(4) ⟹ Pontos Nodais "C"

FIGURA V.3 - Elemento quadrilateral isoparamétrico de 4 nós. (bi-dimensional)

A TAB.V.1 apresenta as variáveis correspondentes aos estados planos de deformação e tensão.

| PROBLEMA | COMPONENTES DE DESLOCAMENTO | VETOR DE DEFORMAÇÕES $\varepsilon(x)$ | VETOR DE TENSÕES $\sigma(x)$ |
|---|---|---|---|
| Estado Plano de Tensões | $u_x, u_y$ | $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ <br> $\varepsilon_z \neq 0$ | $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ <br> $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ |
| Estado Plano de Deformações | $u_x, u_y$ | $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ <br> $\varepsilon_z = 0$ | $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ <br> $\sigma_z \neq 0$ |

TABELA V.1 - Variáveis estáticas e cinemáticas correspondentes ao estado plano.

O campo de deslocamentos é especificado por variações independentes dos deslocamentos $u_x$ e $u_y$, mas a continuidade é requerida para cada um desses campos de deslocamentos independentes, o que garante a compatibilidade de deslocamentos nas interfaces dos elementos, ou seja, não deve haver nenhuma descontinuidade de deslocamentos na interface dos elementos quando eles forem carregados.

A seguir, definiremos as matrizes e vetores equivalentes às expressões apresentadas no CAPÍTULO IV:

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x}) = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{x}) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

- DEFINIÇÃO DA MATRIZ $\underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x})$

Conforme a formulação estabelecida no CAPÍTULO IV, $\underset{\sim}{N}_u(x)$ é a matriz de funções de interpolação que relaciona os deslocamentos num ponto genérico $(\underset{\sim}{x})$ com os deslocamentos nos pontos nodais " A ".

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u}_A \qquad (V.12)$$

Para o elemento em questão, teremos:

$$\underset{\sim}{u}_A = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \vdots \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{Bmatrix} \quad e \quad \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x}) = \{ N_{u1} \; N_{u2} \; N_{u3} \; N_{u4} \}$$

$$(2 \times 8)$$

$$(V.13)$$

onde :

$$\underset{\sim}{N}_{ui} = N_{ui} \cdot \underset{\sim}{I}_2 \quad , \quad \text{com} \quad \underset{\sim}{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definiremos um sistema de coordenadas naturais ( $\xi$ $\eta$ ) para definição das funções de interpolação ( $\underset{\sim}{N}_{ui}$ ).(FIG. V.4)

As funções de interpolação dos deslocamentos serão dadas por:

$$N_{u1}(\xi,\eta) = 0{,}25(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_{u2}(\xi,\eta) = 0{,}25(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_{u3}(\xi,\eta) = 0{,}25(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_{u4}(\xi,\eta) = 0{,}25(1-\xi)(1+\eta) \qquad (V.14)$$

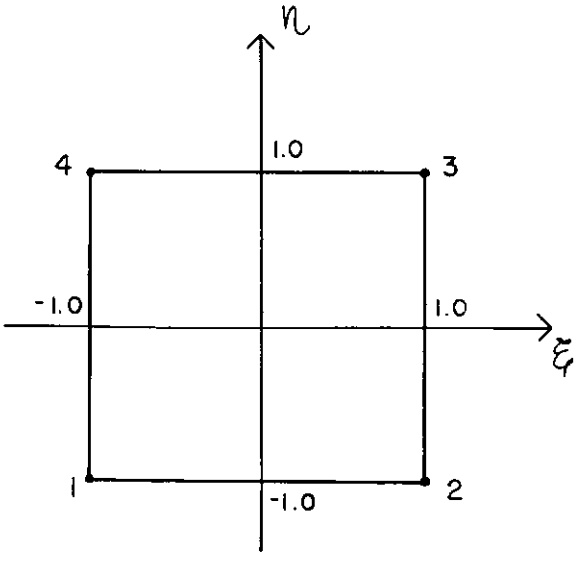



FIGURA V.4 - Sistema natural de coordenadas para o elemento isoparamétrico de 4 nós (bi-dimensional).

- DEFINIÇÃO DA MATRIZ $\underset{\sim}{B}$

Partindo-se da relação deformação x deslocamentos já mencionada, temos:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}) \qquad (V.15)$$

e substituindo-se (V.12) em (V.15), vem:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u}_A \qquad (V.16)$$

se:

$$\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x}) \qquad (V.17)$$

logo;

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u}_A \qquad (V.18)$$

Então, a matriz $\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{x})$ é aquela que relaciona as deformações num ponto genérico com os deslocamentos nodais, ou ainda:

$$\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{x})_{(3x8)} = \begin{bmatrix} \partial N_{u1}/\partial x & 0 & \partial N_{u2}/\partial x & 0 & \dots & \partial N_{u4}/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_{u1}/\partial y & 0 & \partial N_{u2}/\partial y & \dots & 0 & \partial N_{u4}/\partial y \\ \partial N_{u1}/\partial x & \partial N_{u1}/\partial y & \partial N_{u2}/\partial x & \partial N_{u2}/\partial y & \dots & \partial N_{u4}/\partial x & \partial N_{u4}/\partial y \end{bmatrix} \qquad (V.19)$$

Considerando um elemento isoparamétrico com 4 nós, as interpolações das coordenadas serão:

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_{ui} \; x_i$$
$$y = \sum_{i=1}^{4} N_{ui} \; y_i \qquad (V.20)$$

onde: $x$ e $y$ são as coordenadas em qualquer ponto do elemento.

$x_i$ e $y_i$ são as coordenadas dos 4 pontos nodais no elemento.

Pelo fato do elemento ser isoparamétrico, utilizaremos as mesmas funções de interpolação para os deslocamentos:

$$u_x = \sum_{i=1}^{4} N_{ui} \quad u_{xi}$$
$$u_y = \sum_{i=1}^{4} N_{ui} \quad u_{yi} \qquad (V.21)$$

onde: $u_x$ e $u_y$ são os deslocamentos em qualquer ponto do elemento.

$u_{xi}$ e $u_{yi}$ são os deslocamentos correspondentes a cada nó do elemento.

As deformações são obtidas através da derivação dos deslocamentos.

$$\varepsilon_x = \partial u_x/\partial x \quad , \quad \varepsilon_y = \partial u_y/\partial y \quad , \quad \gamma_{xy} = \partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x \qquad (V.22)$$

Como os deslocamentos foram definidos em função das coordenadas naturais $\xi$ e $\eta$, precisaremos relacionar as derivadas em x e y com as derivadas em $\xi$ e $\eta$.

Estando x e y relacionados com $\xi$ e $\eta$, ou seja;

$$x = f_1 ( \xi , \eta ) \quad e \quad y = f_2 ( \xi , \eta ) \qquad (V.23)$$

e inversamente:

$$\xi = f_3 ( x , y ) \quad e \quad \eta = f_4 ( x , y ) \qquad (V.24)$$

utilizaremos a regra da cadeia para encontrarmos as derivadas de $\partial N_{ui}/\partial x$ , $\partial N_{ui}/\partial y$ , da seguinte forma:

$$\frac{\partial N_{ui}}{\partial x} = \frac{\partial N_{ui}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_{ui}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_{ui}}{\partial y} = \frac{\partial N_{ui}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_{ui}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (V.25)$$

As derivadas $\partial N_{ui}/\partial \xi$ e $\partial N_{ui}/\partial \eta$ são facilmente encontradas à partir das expressões (V.24), ou seja:

$$\begin{aligned}
\partial N_{u1}/\partial \xi &= -0,25\,(1-\eta)\\
\partial N_{u2}/\partial \xi &= 0,25\,(1-\eta)\\
\partial N_{u3}/\partial \xi &= 0,25\,(1+\eta)\\
\partial N_{u4}/\partial \xi &= -0,25\,(1+\eta)\\
\partial N_{u1}/\partial \eta &= -0,25\,(1-\xi)\\
\partial N_{u2}/\partial \eta &= -0,25\,(1+\xi)\\
\partial N_{u3}/\partial \eta &= 0,25\,(1+\xi)\\
\partial N_{u4}/\partial \eta &= 0,25\,(1-\xi)
\end{aligned} \qquad (V.26)$$

Precisaremos agora, obter os termos $\partial\xi/\partial x$, $\partial\xi/\partial y$, $\partial\eta/\partial x$ e $\partial\eta/\partial y$, o que significa, avaliarmos a relação inversa (V.24). Utilizando ainda a regra da cadeia, temos:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (V.27)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (V.28)$$

onde J é o operador Jacobiano que relaciona as derivadas das coordenadas naturais com as derivadas das coordenadas x e y.

Logo, utilizando as equações (V.26), teremos:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -0{,}25(1-\eta)x_1 + 0{,}25(1-\eta)x_2 + 0{,}25(1+\eta)x_3 - 0{,}25(1+\eta)x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -0{,}25(1-\xi)x_1 - 0{,}25(1+\xi)x_2 + 0{,}25(1+\xi)x_3 + 0{,}25(1-\xi)x_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -0{,}25(1-\eta)y_1 + 0{,}25(1-\eta)y_2 + 0{,}25(1+\eta)y_3 - 0{,}25(1+\eta)y_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = -0{,}25(1-\xi)y_1 - 0{,}25(1+\xi)y_2 + 0{,}25(1+\xi)y_3 + 0{,}25(1-\xi)y_4$$

(V.29)

Utilizando a matriz Jacobiana inversa, num ponto qualquer $\xi = \xi_i$ e $\eta = \eta_i$ , temos:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (V.30)$$

e avaliando os elementos de deformação:

$$\frac{\partial u_x}{\partial \xi} = -0{,}25(1-\eta)u_{x1} + 0{,}25(1-\eta)u_{x2} + 0{,}25(1+\eta)u_{x3} \ldots$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \eta} = -0{,}25(1-\xi)u_{x1} - 0{,}25(1+\xi)u_{x2} + 0{,}25(1+\xi)u_{x3} \ldots$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial \xi} = -0{,}25(1-\eta)u_{y1} + 0{,}25(1-\eta)u_{y2} + 0{,}25(1+\eta)u_{y3} \ldots$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial \eta} = -0{,}25(1-\xi)u_{y1} - 0{,}25(1+\xi)u_{y2} + 0{,}25(1+\xi)u_{y3} \ldots$$

(V.31)

teremos, então:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}_{\substack{\text{em } \xi=\xi_i \\ \eta=\eta_j}} = 0{,}25 J_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} -(1-\eta_j) & 0 & (1-\eta_j) & 0 & (1+\eta_j) & 0 & -(1+\eta_j) & 0 \\ -(1-\xi_i) & 0 & -(1+\xi_i) & 0 & (1+\xi_i) & 0 & (1+\xi_i) & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{u}_x \qquad \text{(V.32)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}_{\substack{\text{em } \xi=\xi_i \\ \eta=\eta_j}} = 0{,}25 J_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -(1-\eta_j) & 0 & (1-\eta_j) & 0 & (1+\eta_j) & 0 & -(1+\eta_j) \\ 0 & -(1-\xi_i) & 0 & -(1+\xi_i) & 0 & (1+\xi_i) & 0 & (1+\xi_i) \end{bmatrix} \underset{\sim}{u}_y \qquad \text{(V.33)}$$

Assim, podemos montar a matriz $\underset{\sim}{B}_{ij}$:

$$\underset{\sim}{B}_{ij} = \begin{bmatrix} -(1-\eta_j) & 0 & (1-\eta_j) & 0 & (1+\eta_j) & \ldots \\ 0 & -(1-\xi_i) & 0 & -(1+\xi_i) & 0 & \ldots \\ -(1-\xi_i) & -(1-\eta_j) & -(1+\xi_i) & (1-\eta_j) & (1+\xi_i) & \ldots \end{bmatrix} \qquad \text{(V.34)}$$

Avaliando $\underset{\sim}{B}$ em função de $\underset{\sim}{N}_{ui}$, chegaremos a matriz (V.19).

- DEFINIÇÃO DA MATRIZ $\underset{\sim}{N}_{\sigma}$

Para interpolação das tensões, foram utilizados os 4 pontos nodais " C ", coincidentes com os pontos nodais " A " (FIG. V.3) logo, as funções de interpolação das tensões serão as mesmas funções utilizadas para os deslocamentos, ou seja:

$$
\begin{aligned}
N_{\sigma 1}(\xi, \eta) &= 0{,}25\,(1-\xi)(1-\eta) \\
N_{\sigma 2}(\xi, \eta) &= 0{,}25\,(1+\xi)(1-\eta) \\
N_{\sigma 3}(\xi, \eta) &= 0{,}25\,(1+\xi)(1+\eta) \\
N_{\sigma 4}(\xi, \eta) &= 0{,}25\,(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned}
\qquad (V.35)
$$

A matriz $\underset{\sim}{N}_{\sigma}(\xi, \eta)$, que contém as funções de interpolação das tensões será:

$$
\underset{\sim}{N}_{\sigma}(\xi, \eta) = \left\{ N_{\sigma 1} \quad N_{\sigma 2} \quad N_{\sigma 3} \quad N_{\sigma 4} \right\} \qquad (V.36)
$$

onde :

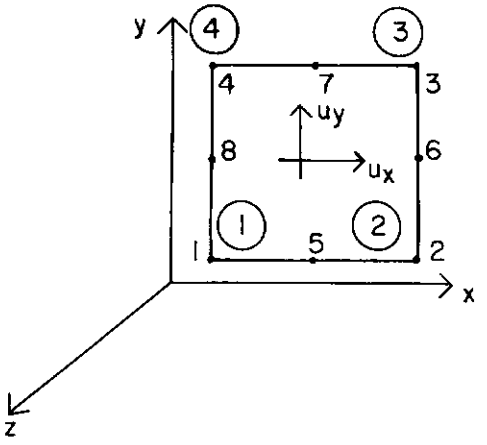
$$
\underset{\sim}{N}_{\sigma i} = N_{\sigma i} \cdot \underset{\sim}{I}_{3} \quad , \quad \text{com} \quad \underset{\sim}{I}_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

V.3.2 - ELEMENTO QUADRILATERAL ISOPARAMÉTRICO DE 8 NÓS

É um elemento quadrilateral plano (bi-dimensional), com oito pontos nodais " A " para interpolação dos deslocamentos, que podem ter lados curvos (FIG. V.5).

Considerando a geometria do elemento isoparamétrico bi-dimensional de 8 nós em relação ao de 4 nós, podemos

notar que em termos de interpolação das coordenadas (e consequentemente dos deslocamentos), o de 8 nós é mais versátil na representação de contornos curvos.




DESLOCAMENTOS NODAIS:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}_i \quad i = 1, \ldots, 8$$

1,2,3,4,5,6,7,8 $\Longrightarrow$ Pontos Nodais "A"

(1),(2),(3),(4) $\Longrightarrow$ Pontos Nodais "C"

FIGURA V.5 - Elemento quadrilateral isoparamétrico de 8 nós.

O elemento quadrilateral isoparamétrico de 8 nós também apresenta total compatibilidade de deslocamentos, ou seja, os deslocamentos nas interfaces devem ser contínuos.

As características do elemento quadrilateral de 8 nós são semelhantes ao de 4 nós exceto no que diz respeito ao campo de deslocamentos.

- DEFINIÇÃO DA MATRIZ $\underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x})$

Da mesma forma anterior, partiremos de:

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u}_A$$

sendo que para o elemento em questão, teremos:

$$\underset{\sim}{u}_a = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \vdots \\ u_{x8} \\ u_{y8} \end{Bmatrix} \quad e \quad \underset{\sim}{N}_u(\underset{\sim}{x}) = \begin{Bmatrix} N_{u1} & N_{u2} & N_{u3} & N_{u4} \end{Bmatrix}$$

(2x16)

(V.37)

onde :

$$\underset{\sim}{N}_{ui} = N_{ui} \cdot \underset{\sim}{I}_2 \quad , \quad \text{com} \quad \underset{\sim}{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

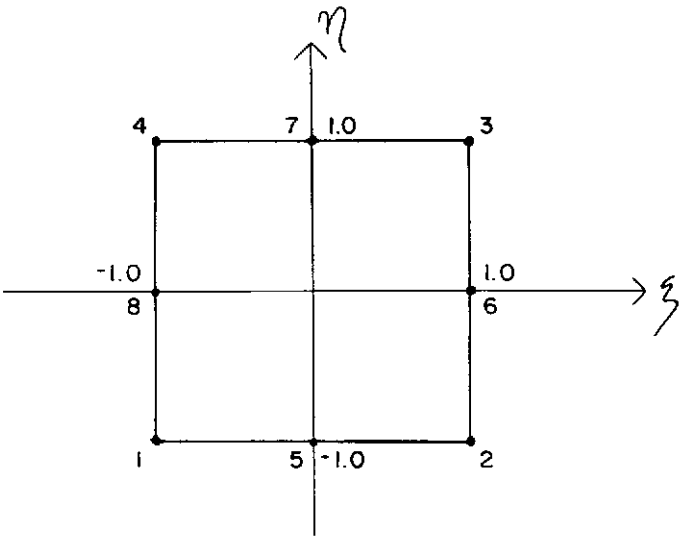



FIGURA V.6 - Sistema natural de coordenadas para o elemento isoparamétrico de 8 nós.

Definindo as funções de interpolação ($N_{ui}$) em relação a um sistema natunal de coordenadas( $\xi$ , $\eta$ )(FIG.V.6),teremos:

$$N_{u1}(\xi, \eta) = -0{,}25(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_{u2}(\xi, \eta) = 0{,}25(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_{u3}(\xi,\eta) = 0{,}25(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_{u4}(\xi,\eta) = 0{,}25(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_{u5}(\xi,\eta) = 0{,}50(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_{u6}(\xi,\eta) = 0{,}50(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_{u7}(\xi,\eta) = 0{,}50(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_{u8}(\xi,\eta) = 0{,}50(1-\xi)(1-\eta^2)$$

(V.38)

- DEFINIÇÃO DA MATRIZ $\underset{\sim}{B}$

As etapas para determinação da matriz $\underset{\sim}{B}$ são as mesmas utilizadas no ítem anterior na obtenção da matriz $\underset{\sim}{B}$ do elemento quadrilateral de 4 nós.

Seguindo estas etapas, teremos:

$$\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{x}) = \begin{bmatrix} \partial N_{u1}/\partial x & 0 & \partial N_{u2}/\partial x & 0 & \dots & \partial N_{u8}/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_{u1}/\partial y & 0 & \partial N_{u2}/\partial y & \dots & 0 & \partial N_{u8}/\partial y \\ \partial N_{u1}/\partial x & \partial N_{u1}/\partial y & \partial N_{u2}/\partial x & \partial N_{u2}/\partial y & \dots & \partial N_{u8}/\partial x & \partial N_{u8}/\partial y \end{bmatrix}_{(3\times16)}$$

(V.39)

- DEFINIÇÃO DA MATRIZ $\underset{\sim}{N}_{\sigma}$

Para a interpolação das tensões, foram adotadas neste elemento, as mesmas funções de interpolação das tensões utilizadas para o elemento de 4 nós, uma vez que, utilizaremos os pontos nodais " C " indicados na figura (V.5).

## V.4 - SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO ADOTADAS

Utilizaremos para definição do critério de resistência as superfícies de escoamento citadas no CAPÍTULO II, a saber:

- Superfície de Tresca ou Superfície baseada na Condição de Tensão Cisalhante Máxima.
- Superfície de von Mises ou Superfície baseada na Condição de Intensidade de Tensão Cisalhante Constante.

### V.4.1 - SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE TRESCA

Considerando um corpo submetido a um estado plano de deformações, que se encontra no estado de plasticidade ideal, a seguinte condição de escoamento deve ser satisfeita:

$$T = \tau_{máx} = \tau_e \qquad (V.40)$$

ou

$$\sigma_{máx} - \sigma_{mín} = 2\tau_e \qquad (V.41)$$

Se definirmos $\tau_e$ como um parâmetro K ( constante do material), obteremos da equação (V.7):

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2 \qquad (V.42)$$

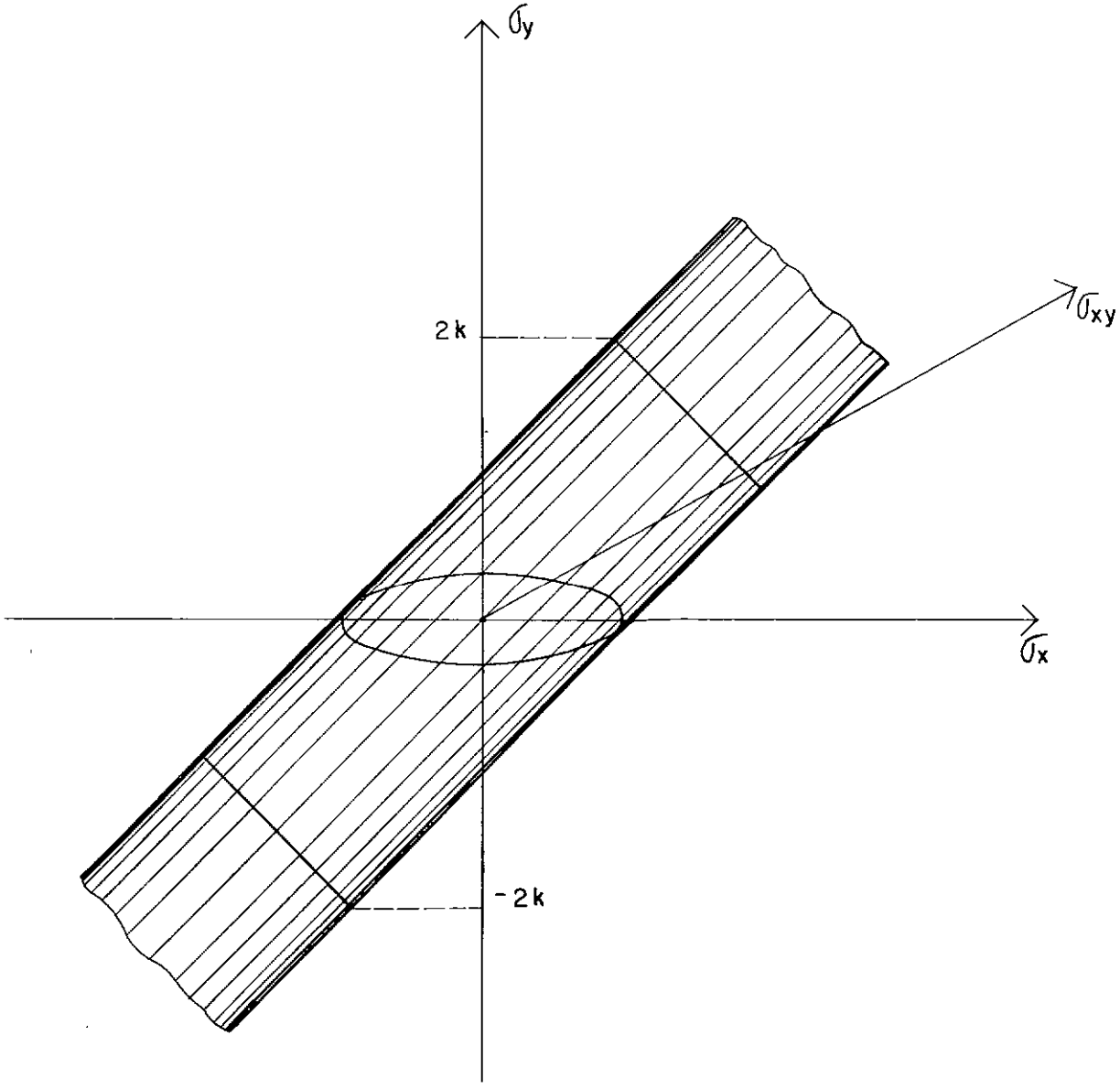



FIGURA V.7 - Superfície de Escoamento de Tresca.

A representação geométrica da superfície definida pela equação (V.42), segundo os eixos $\sigma_x$ , $\sigma_y$ e $\tau_{xy}$ é ilustrada na figura (V.7). Para esta representação utilizou-se K = 1.

O efeito da pressão hidrostática não é considerado na superfície de escoamento, o que é fácil de ser visto através da figura (V.7), onde o eixo gerador da superfície é

paralelo ao eixo hidrostático (APÊNDICE B).

Para utilizarmos a formulação apresentada no CAPÍTULO IV, é necessário linearizarmos seccionalmente a superfície de escoamento, para que ela seja o critério de resistência que origina as inequações lineares de restrições do problema de PL.

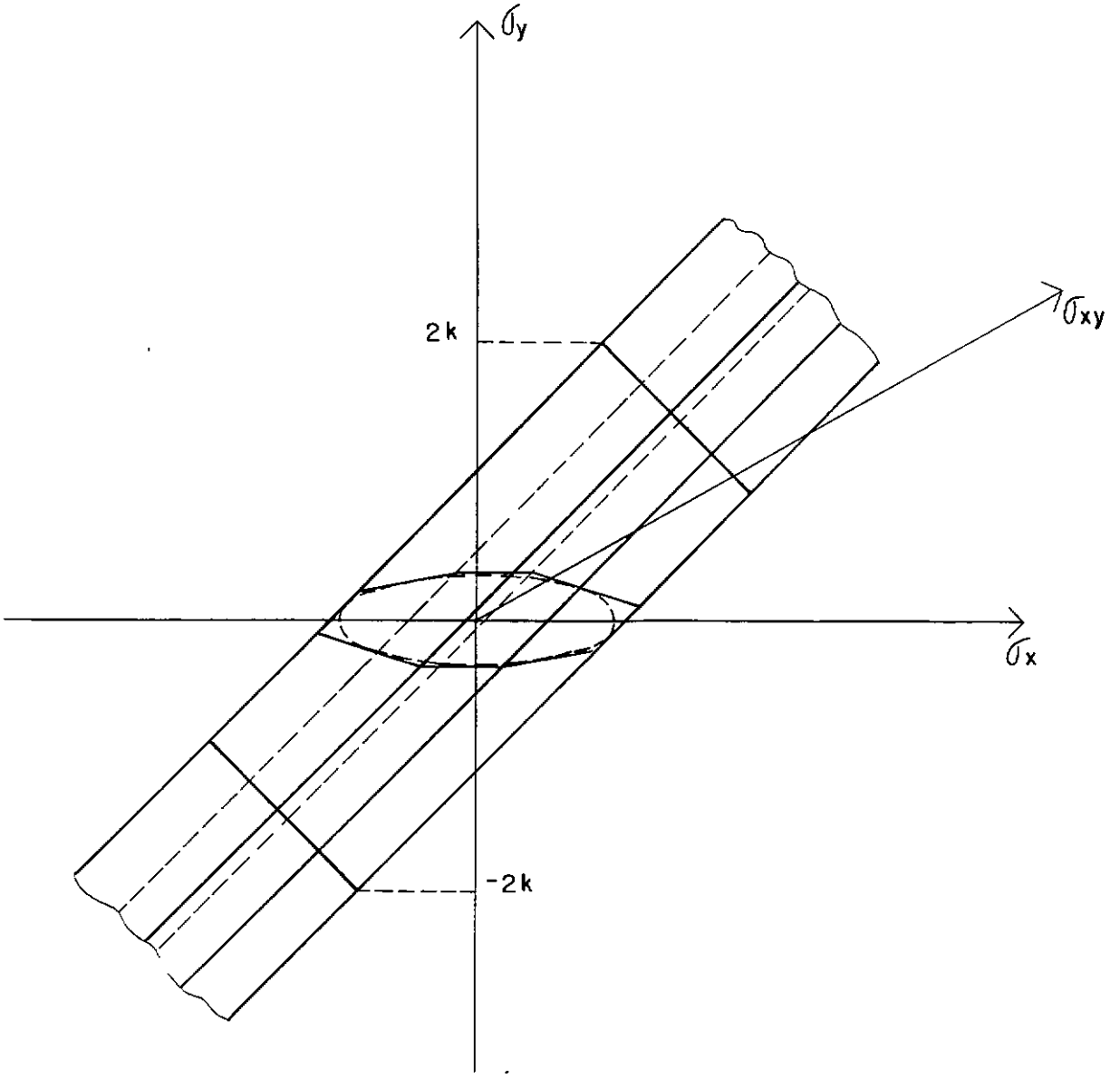



FIGURA V.8 - Superfície de Escoamento de Tresca seccionalmente linearizada.

Como a formulação proposta é baseada num modelo de deslocamentos cinematicamente admissíveis, e por conseguinte a solução é do tipo "limite superior", deve-se por questões de coerência, adotar uma superfície seccionalmente linearizada circunscrita à superfície de escoamento real, de forma a manter a solução encontrada como um limite superior para a verdadeira carga de colapso da estrutura.

Adotou-se uma linearização seccional da superfície de Tresca através de 8 hiperlanos limitados por duas superfícies, perpendiculares ao eixo $\sigma_x = \sigma_y$ , para as quais $\sigma_y = 2K$. (FIG. V.8)

O cálculo dos vetores normais à cada hiperplano ( $\underset{\sim}{Q}$ ) e das distâncias de cada hiperplano à origem ( $\underset{\sim}{\sigma}_*$ ) é feito automaticamente, a partir das coordenadas de 16 pontos de controle ($P_1$, $P_2$, $P_3$,...,$P_{16}$) que ocupam os vértices de um polígono circunscrito à superfície real. (FIG. V.9)

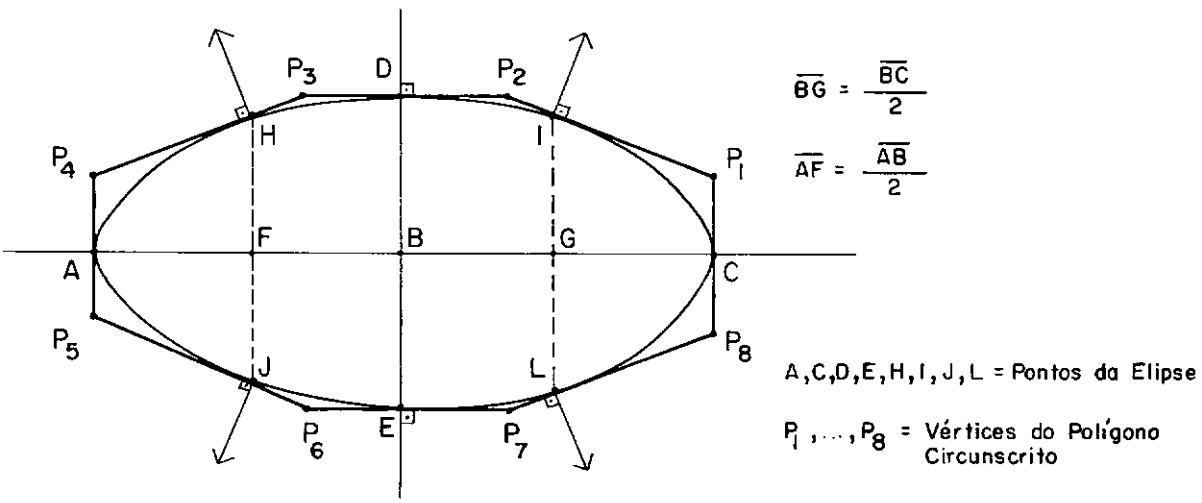



FIGURA V.9 - Polígono circunscrito à elipse obtida pela equação da superfície de Tresca.

Como a formulação proposta é baseada num modelo de deslocamentos cinematicamente admissíveis, e por conseguinte a solução é do tipo "limite superior", deve-se por questões de coerência, adotar uma superfície seccionalmente linearizada circunscrita à superfície de escoamento real, de forma a manter a solução encontrada como um limite superior para a verdadeira carga de colapso da estrutura.

Adotou-se uma linearização seccional da superfície de Tresca através de 8 hiperlanos limitados por duas superfícies, perpendiculares ao eixo $\sigma_x = \sigma_y$ , para as quais $\sigma_y = 2K$.(FIG.V.8)

O cálculo dos vetores normais à cada hiperplano ( $\underset{\sim}{Q}$ ) e das distâncias de cada hiperplano à origem ( $\underset{\sim}{\sigma}_*$ ) é feito automaticamente pelo programa computacional, a partir das coordenadas de 16 pontos de controle ($P_1$, $P_2$, $P_3$,...,$P_{16}$) que ocupam os vértices de um polígono circunscrito à superfície real.(FIG.V.9)

FIGURA V.9 - Polígono circunscrito à elipse obtida pela equação da superfície de Tresca.

A partir dos pontos " F e G " (FIG.V.9), situados nos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, determinam-se os pontos A, C, D, E, H, I, J e L através da equação da elipse deinida pela equação (V.42), fazendo $\sigma_y$=0.

$$( \sigma_x - \sigma_y )^2 + 4 \tau_{xy}^2 = 4 K^2$$

para $\sigma_y = 0$ e $K = 1$, vem:

$$\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy} = 1 \qquad (V.43)$$

Pelos pontos A, C, D, E, H, I, J e L traçam-se retas tangentes à elipse. As interseções dessas retas determinam os vértices do polígono circunscrito.

V.4.2 - SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE VON MISES

A superfície de von Mises para o estado plano é definida pela equação (II.13), ou seja:

$$\tau_e = 0.577 \sigma_e$$

ou

$$\sigma_e = 1.732 \tau_e \qquad (V.44)$$

que difere do critério de Tresca ($\sigma_e = 2\tau_e$). Logo, a diferença máxima entre os dois critérios não poderá exceder 15 % .

Deduzindo a equação da superfície de von Mises para o estado plano de tensões ( $\sigma_z = 0$ ) a partir de (II.10) e

(II.11), temos:

$$\sqrt{1/6\,(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_e / \sqrt{3} \qquad \text{(V.45)}$$

ou:

$$\frac{1}{3}\left\{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x\,\sigma_y) + \tau_{xy}^2\right\}^{1/2} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \qquad \text{(V.46)}$$

A função (V.46) delimita um elipsóide no espaço de tensões.(FIG.V.10)

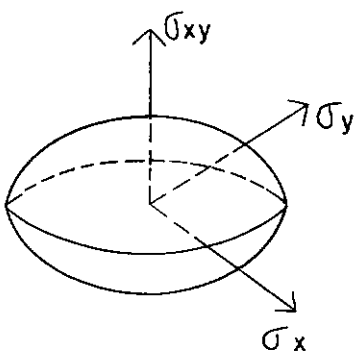



FIGURA V.10 - Superfície de Escoamento de von Mises

A linearização seccional para esta superfície foi feita através de 14 hiperplanos (FIG.V.11), de tal forma que :

$$\underset{\sim}{\sigma}_* = \left\{ A \quad A \quad A \quad A \quad A \quad A \quad A \quad A \quad C \quad C \quad C \quad C \quad \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \frac{\sqrt{2}}{3} \right\} \qquad \text{(V.47)}$$

e

$$\underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} A & A & -A & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & C & C & -C & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & A & -A & -A & -C & -C & C & C & 0 & 0 \\ B & -B & B & -B & B & -B & B & -B & D & -D & D & -D & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{V.48}$$

onde: $A \cong 0.435692$ ;

$B \cong 0.390630$ ;

$C \cong 0.597204$ e

$D \cong 0.535439$

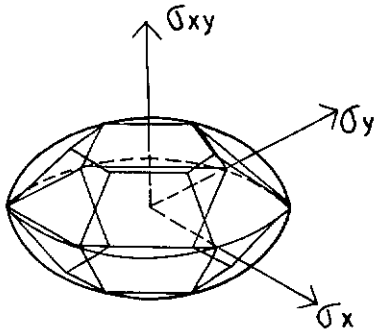



FIGURA V.11 - Superfície de von Mises Seccionalmente Linearizada em 14 hiperplanos.

# CAPÍTULO VI

# IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

## VI.1 - PROGRAMA DESENVOLVIDO

Com o objetivo de comprovar a validade da formulação proposta, foi adaptado um programa computacional para micro-computadores compatíveis com o IBM-PC XT/AT, com o sistema operacional DOS versões 3.0 e 4.0. O programa foi originalmente elaborado para o trabalho de mestrado de Ivan Fábio Mota de Menezes, " Análise Limite de Lajes de Concreto Armado "[15]. É utilizado no programa a linguagem C e o compilador TURBO C da Borland International,Inc. , versão 2.0.

O objetivo atual do programa consiste principalmente no cálculo do fator de colapso de estruturas com geometria e condições de contorno quaisquer, submetidas ao Estado Plano de Deformações ou de Tensões, proveniente de um carregamento proporcional aleatório, obedecendo-se um dado critério de resistência do material.

A entrada de dados para o programa poderá ser:

- "ON LINE" ou interativa, que contém mensagens auto-explicativas e opções de alteração de dados antes e/ou depois de processada a análise da estrutura.

- "BATCH" ou entrada de um arquivo, ou seja, o usuário deve preparar um arquivo em separado, com a extensão ".DAT", contendo todas as informações, em formato livre, necessárias à execução do programa.

## VI.2 - ENTRADA DE DADOS

A organização da entrada de dados para o programa obedece a seguinte seqüência:

| | |
|---|---|
| TÍTULO | (máx. 80 caracteres) |
| * Dimensões do problema | |
| NNOA NNOC NEL NRES NROT NCC NCD | |
| * Variáveis de controle | |
| NTIPO NCRIT NPROB NGAUSS | |
| * Coordenadas dos nós | |
| NO X [ ] Y [ ] | (NO = 1,...,NNOA) |
| * Conectividade dos elementos | |
| EL INC [1][EL] ... INC [NNEL][EL] | (EL = 1,...,NEL) |
| * Deslocabilidade dos nós | |
| NO DUX DUY | (NO = 1,...NRES) |
| * Nós com carga concentrada | |
| NO FCUX FCUY | (NO = 1,...,NCC) |
| * Elementos com carga distribuída | |
| EL FDUX FDUY | (EL = 1,...,NCD) |
| * Constante do material | |
| K | |

FIGURA VI.1 - Modelo de arquivo de dados.

Explicaremos a seguir o significado de cada variável utilizada para a montagem do arquivo de dados.

| VARIÁVEL | TIPO | DESCRIÇÃO |
|---|---|---|
| NNOA | INT | Número total de pontos nodais "A". |
| NNOC | INT | Número total de pontos nodais "C". |
| NEL | INT | Número total de elementos. |
| NRES | INT | Número total de nós com restrições. |
| NROT | INT | Número total de nós com o sistema local não coincidente com o sistema global. |
| NCC | INT | Número total de nós com carga concentrada. |
| NCD | INT | Número total de elementos com carga distribuída. |
| NTIPO | INT | Tipo de elemento finito:<br>1 - Isoparamétrico de 4 nós.<br>2 - Isoparamêtrico de 8 nós. |
| NCRIT | INT | Critério de resistência:<br>1 - Crit. de Tresca.(deform.).<br>2 - Crit. de Tresca(tensão).<br>3 - Crit. de von Mises(tensão). |
| NPROB | INT | Tipo de problema de PL:<br>1 - Primal.<br>2 - Dual. |

| | | |
|---|---|---|
| NGAUSS | INT | Ordem de integração numérica de Gauss: $\begin{cases} 1 - (1x1) \text{ pontos de Gauss} \\ 2 - (2x2) \text{ pontos de Gauss} \\ 3 - (3x3) \text{ pontos de Gauss} \end{cases}$ |
| NNEL | INT | Número de nós por elemento (obtido a partir de NTIPO). |
| X[], Y[] | REAL | Coordenadas cartesianas dos pontos nodais "A". |
| INC [] [] | INT | Matriz de conectividade dos elementos. |
| DUX, DUY | INT | Deslocabilidades ($u_x$, $u_y$) dos nós que apresentam deslocamentos prescritos: $\begin{cases} 1 - \text{Fixo.} \\ 2 - \text{Livre.} \end{cases}$ |
| FCUX, FCUY | REAL | Valores das cargas concentradas nas direções $u_x$ e $u_y$. |
| FDUX, FDUY | REAL | Valores das cargas distribuídas nas direções $u_x$ e $u_y$. |
| K | REAL | Constante do material. |

## VI.3 - ORGANIZAÇÃO GERAL DO PROGRAMA

A organização geral do programa é feita em módulos e obedece a seguinte seqüência lógica:

1 - INPUT1 - corresponde à entrada dos dados que fornecerão as dimensões do problema.

2 - ALOC1 - módulo de alocação dinâmica de memória. Caso a memória disponível seja inferior à memória requerida, o programa fornecerá uma mensagem explicativa.

3 - INPUT2 - corresponde à segunda e última parte de entrada de dados do programa.

4 - CONSIST - módulo de análise de consistência dos dados.

5 - GRLIB - módulo para numeração dos graus de liberdade globais da estrutura.

6 - ALOC2 - corresponde ao segundo e último módulo de alocação de memória de dados obtidos em GRLIB.

7 - MCGLOB - corresponde à montagem da matriz $\underset{\sim}{C}$ global.

8 - CARNOD - corresponde à montagem do vetor de cargas nodais equivalentes $\underset{\sim}{f}_a$.

9 - SUPER - este módulo consiste no tratamento da superfície de escoamento, obtida em função do critério de resistência escolhido.

10 - SIMPLX - corresponde ao algorítmo para resolução do problema de PL.

11 - OUTPUT - nesse módulo são apresentados os resultados do programa num arquivo de saída com extensão ".OUT ".

# CAPÍTULO VII

# APLICAÇÕES

Neste capítulo analisamos alguns exemplos extraídos de referências bibliográficas citadas no trabalho. Todos exemplos apresentam soluções analíticas que permitem uma comparação direta com os resultados numéricos, comprovando assim, a validade da formulação proposta.

Para cada exemplo são fornecidas as características geométricas, as condições de contorno, o carregamento e o tipo de elemento finito utilizado na discretização da estrutura.

Os dois primeiros exemplos referem-se ao estado plano de tensão e os dois últimos ao estado plano de deformação. Em cada um deles, são apresentadas algumas formas de discretização, e para cada uma delas, o fator de colapso da estrutura, o erro relativo percentual entre o valor analítico e o valor numérico obtido e o tempo de CPU consumido.

Para maior facilidade de comparação, será representado um sistema adimensional de grandezas.

## VII.1 - EXEMPLO 1 - " VIGA TRACIONADA "

Este exemplo tem como objetivo calcular o fator de colapso ($\lambda_c$) de uma viga engastada-livre submetida a uma carga de tração P = 1 .(FIG.VII.1)

A carga de ruptura será dada por:

$$P_{rut} = \lambda_c \, . \, P = A \, . \, \sigma_e = A \, . \, 2K \qquad \text{(VII.1)}$$

onde: A = b . h = 1 - área da seção transversal.

K = 10 - fator relativo à tensão de escoamento do material.

P = 1 - carga aplicada.

Logo:

$$P_{rut} = 1 \, . \, ( 2 \, . \, 10 ) = 20 \qquad \text{(VII.2)}$$

De (VII.2), podemos concluir que o resultado analítico a ser comparado com o resultado numérico será:

$$\lambda_c = 20 \qquad \text{(VII.3)}$$

FIGURA VII.1 - Representação da viga tracionada.

Para analisar a viga tracionada (FIG. VII.1), foi utilizado o elemento isoparamétrico quadrilateral de 4 nós, com as seguintes malhas de elementos finitos:

- MALHA A

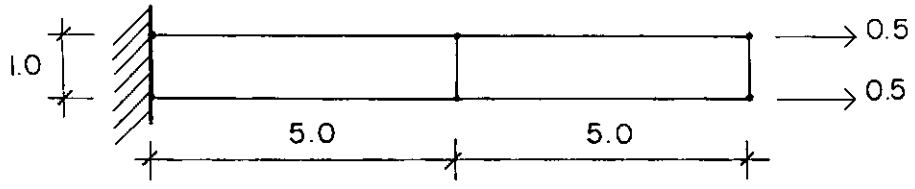



FIGURA VII.2 - Representação da MALHA A.

Valor numérico - $\lambda k$ = 20.055

Erro - $\varepsilon$ = 0.28%

Tempo de CPU - t = 7.41s

- MALHA B

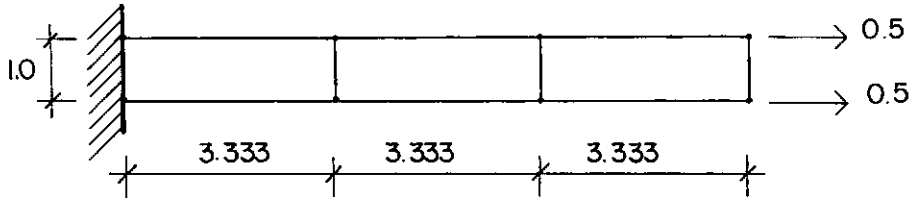



FIGURA VII.3 - Representação da MALHA B.

Valor numérico - $\lambda k$ = 20.047

Erro - $\varepsilon$ = 0.24%

Tempo de CPU - t = 16.42s

- MALHA C

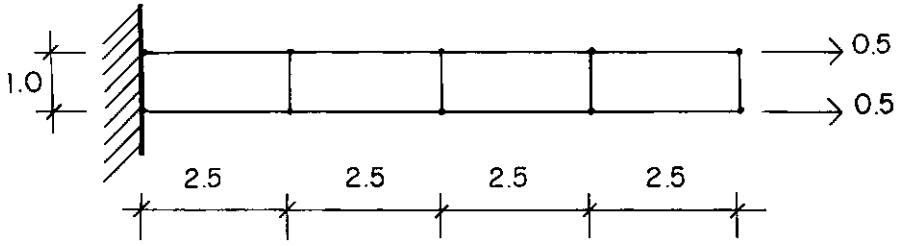



FIGURA VII.4 - Representação da MALHA C.

Valor numérico - $\lambda k$ = 20.044

Erro - $\varepsilon$ = 0.22%

Tempo de CPU - t = 36.04s

- MALHA D

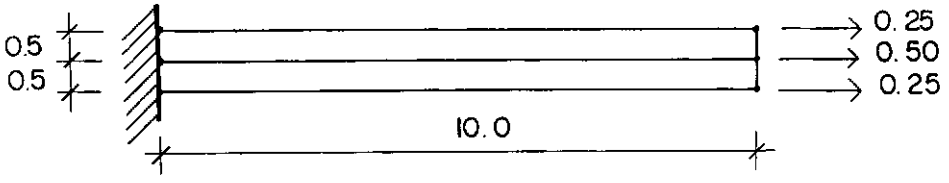



FIGURA VII.5 - Representação da MALHA D.

Valor numérico - $\lambda k$ = 20.027

Erro - $\varepsilon$ = 0.14%

Tempo de CPU - t = 6.92s

- MALHA E

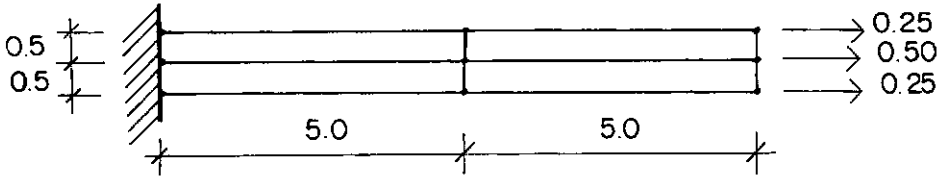



FIGURA VII.6 - Representação da MALHA E.

Valor numérico - $\lambda k$ = 20.000

Erro - $\varepsilon$ = 0.00%

Tempo de CPU - t = 25.49s

Na MALHA E, é apresentada uma discretização composta por 4 elementos isoparamétricos, assim como na MALHA C. Diante dos resultados obtidos, podemos observar que a disposição dos elementos influencia os resultados.

Neste esxemplo foi utilizado a superfície baseada no critério de Tresca.

## VII.2 - EXEMPLO 2 - " VIGA COM MOMENTO APLICADO "

Neste exemplo foi aplicado um momento fletor M = Mlim na extremidade de uma viga engastada-livre.(FIG.VII.7)

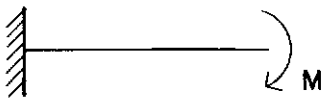



FIGURA VII.7 - Representação da viga com momento aplicado na extremidade.

Como sabemos de (II.1):

$$M_{lim} = \frac{b.h^2}{4}\sigma_e = \frac{b.h^2}{4}.2K = \frac{b.h^2}{2}.K \qquad (VII.4)$$

Transformando o momento aplicado (M) em duas forças (P) iguais e de sentidos opostos (FIG.VII.8):

$$M_{lim} = \lambda_c . P . h \therefore P_{rut} = \frac{M_{lim}}{h} = \frac{b.h}{2}.K \qquad (VII.5)$$

Fazendo: A = b . h = 1 , K = 10 e P = 1, teremos como resultado analítico:

$$\lambda_c = 5 \qquad (VII.6)$$

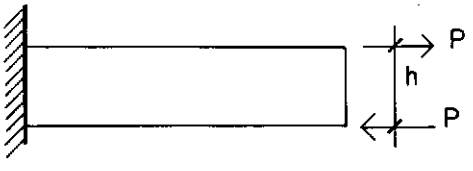



FIGURA VII.8 - Representação do modelo utilizado.

Foi utilizado neste exemplo o elemento isoparamétrico quadrilateral de 4 nós e as seguintes malhas:

- MALHA A

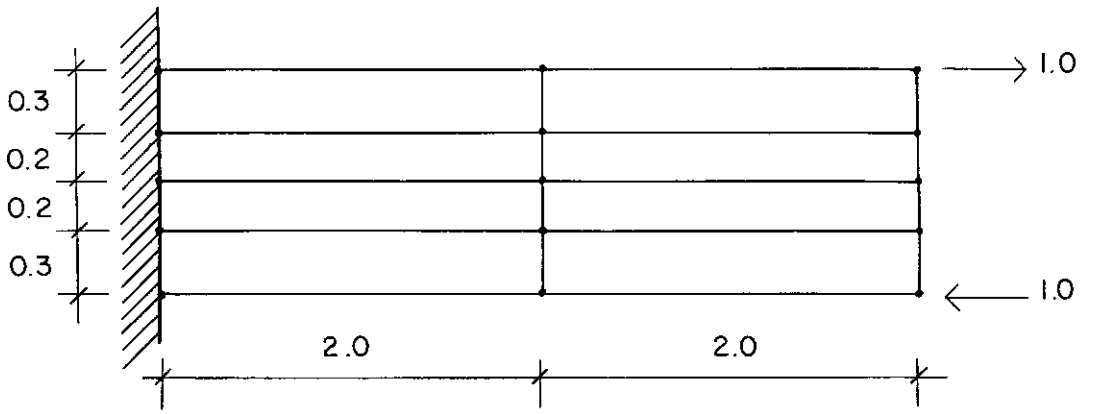



FIGURA VII.9 - Representação da MALHA A.

Valor numérico - $\lambda_k$ = 7.031

Erro - $\varepsilon$ = 40.62%

Tempo de CPU - t = 121.62s

- MALHA B

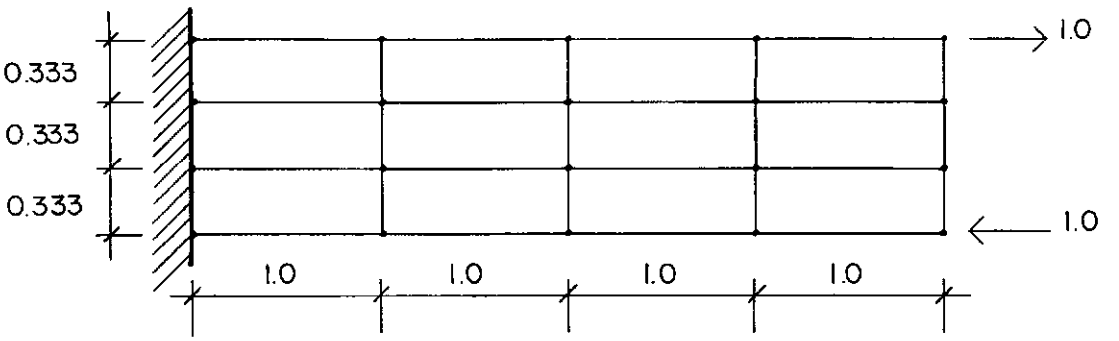



FIGURA VII.10 - Representação da MALHA B.

Valor numérico - $\lambda_k$ = 5.557

Erro - $\varepsilon$ = 11.14%

Tempo de CPU - t = 635.43s

- MALHA C

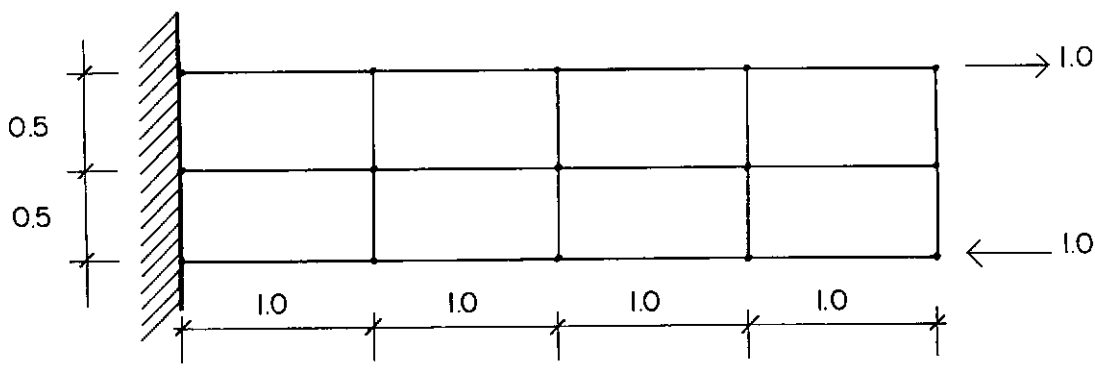



FIGURA VII.11 - Representação da MALHA C.

Valor numérico - $\lambda_k$ = 5.717

Erro - $\varepsilon$ = 14.34%

Tempo de CPU - t = 218.82s

- MALHA D

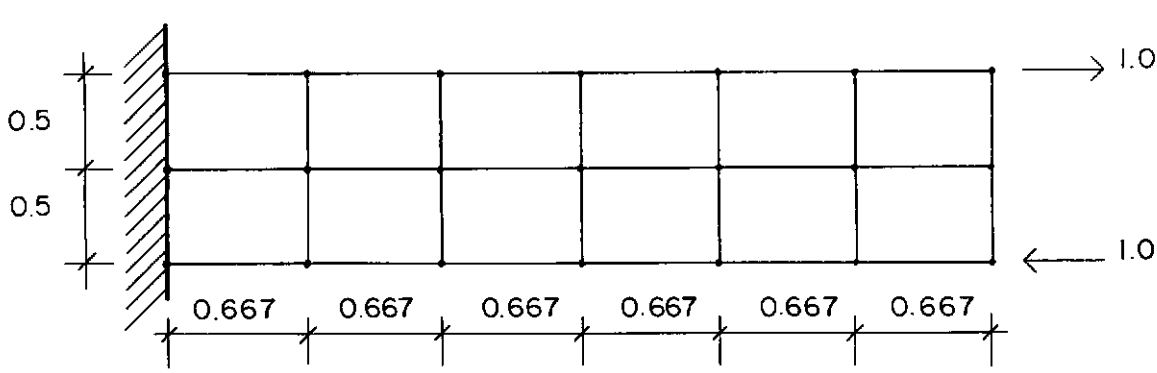



FIGURA VII.12 - Representação da MALHA D.

Valor numérico - $\lambda_k$ = 5.112

Erro - $\varepsilon$ = 2.24%

Tempo de CPU - t = 776.27s

Já neste exemplo, a malha que contém os elementos mais próximos da forma quadrangular, apresenta melhores resultados, o que reforça a conclusão do exemplo anterior; a disposição dos elementos na discretização é de grande importância.

Pelos resultados encontrados, conclui-se que a disposição dos elementos é mais importante que o número de elementos para a discretização da malha que mais se aproxime da carga de colapso. Isto pode ser verificado se compararmos o resultado da MALHA B com o resultado da MALHA C, ambas com 12 elementos, mas a disposição mostrada em D fornece um resultado mais correto.

Utilizou-se a superfície de colapso baseada no critério de resistência de Tresca.

## VII.3 - EXEMPLO 3 - " ESTREITAMENTO DE UMA SEÇÃO SUBMETIDA À TRAÇÃO "

**Referência:** KACHANOV [08], pág.320, ítem 66.3

Será analisado neste exemplo o problema de uma seção transversal com um estreitamento circular simétrico submetida a um esfoço de tração conforme ilustrado na figura (VII.13). O comprimento do corpo ao qual esta seção transversal se refere é de tal ordem que a análise se torne um estado plano de deformações.

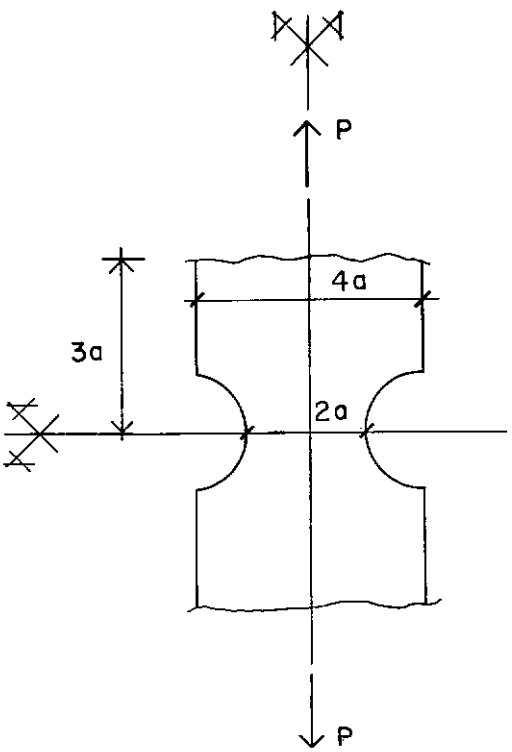



FIGURA VII.13 - Representação do estreitamento de seção transversal.

O resultado analítico a ser encontrado será:

$$P_{rut} = \lambda_c \cdot P = 5.33 \cdot a \cdot K \qquad (VII.7)$$

Fazendo-se a = K = 1, teremos o seguinte valor analítico para compararmos com os resultados numéricos:

$$\lambda_c = 5.33 \qquad \text{(VII.8)}$$

Como é mostrado na figura (VII.13), utilizaremos, para simplificação, o fato da seção transversal ser simétrica.

- MALHA A

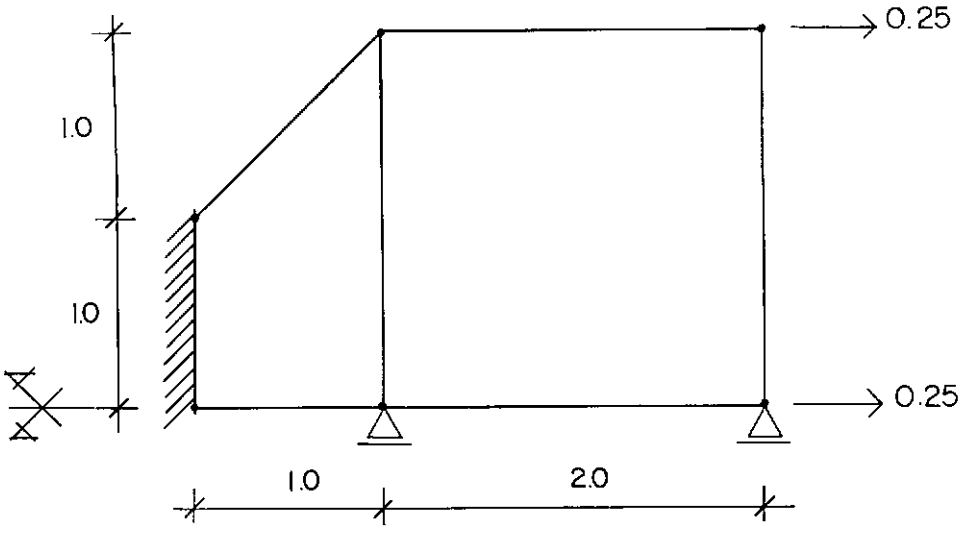



FIGURA VII.14 - Representação da MALHA A.

Valor numérico - $\lambda_k$ = 7.234

Erro - $\varepsilon$ = 35.72%

Tempo de CPU - t = 8.13s

- MALHA B

Valor numérico - $\lambda_k$ = 7.000

Erro - $\varepsilon$ = 31.33%

Tempo de CPU - t = 20.93s

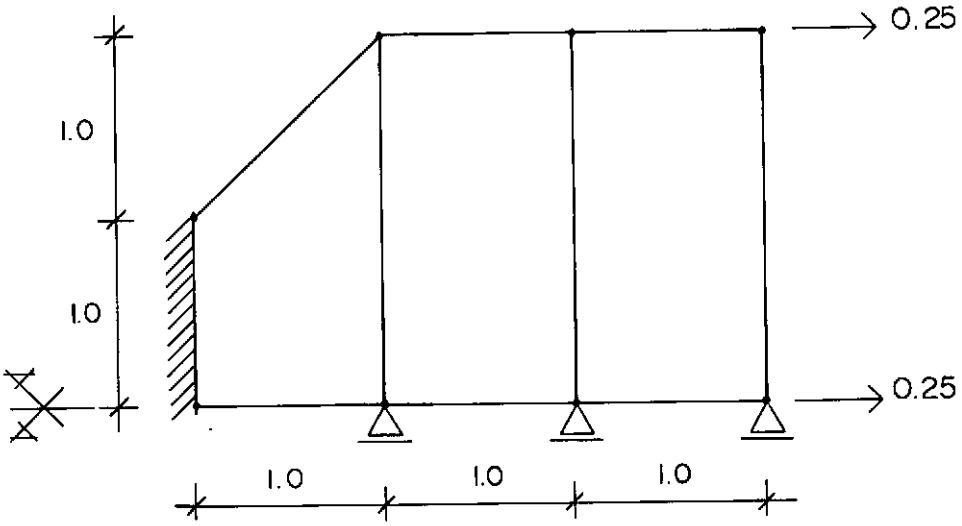



FIGURA VII.15 - Representação da MALHA B.

- MALHA C

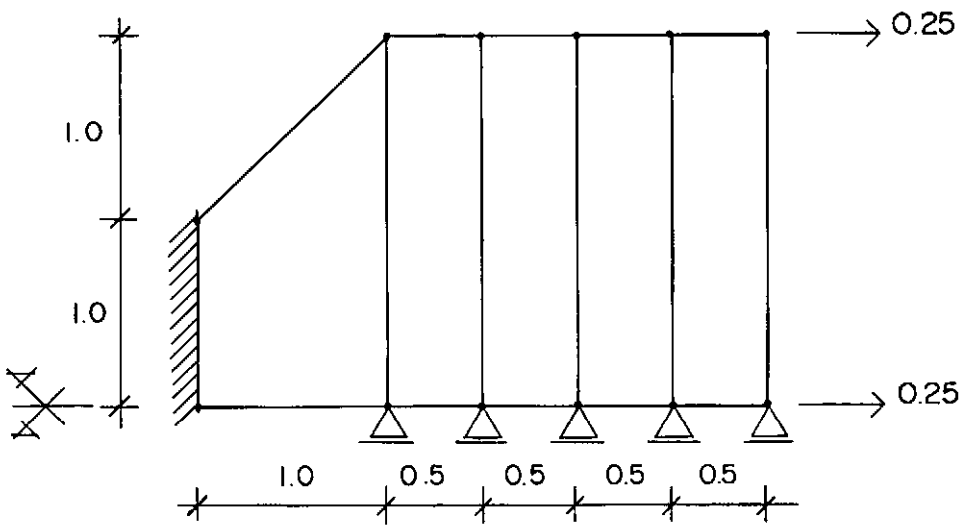



FIGURA VII.16 - Representação da MALHA C.

Valor numérico - $\lambda_k$ = 6.940

Erro - $\varepsilon$ = 30.21%

Tempo de CPU - t = 85.63s

- MALHA D

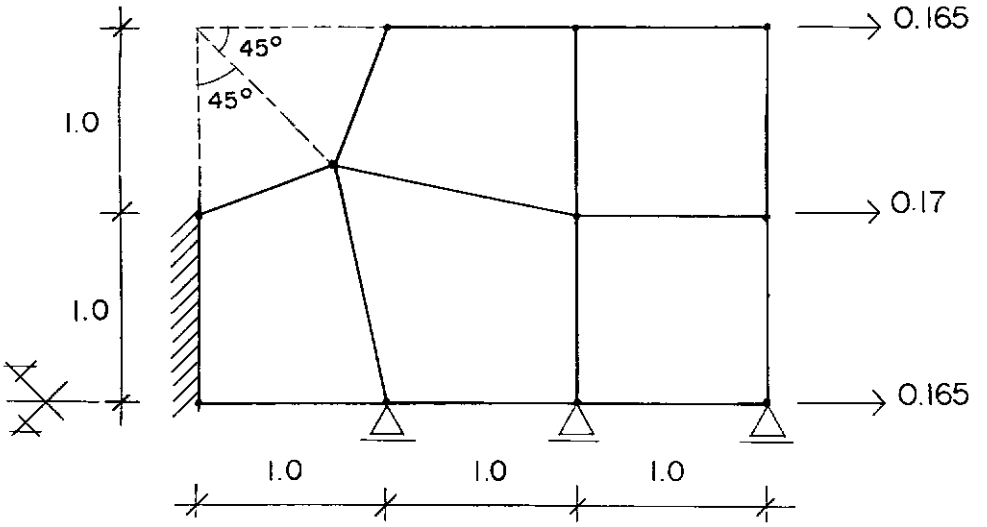



FIGURA VII.17 - Representação da MALHA D.

Valor numérico - $\lambda k$ = 6.641

Erro - $\varepsilon$ = 24.60%

Tempo de CPU - t = 61.73s

- MALHA E

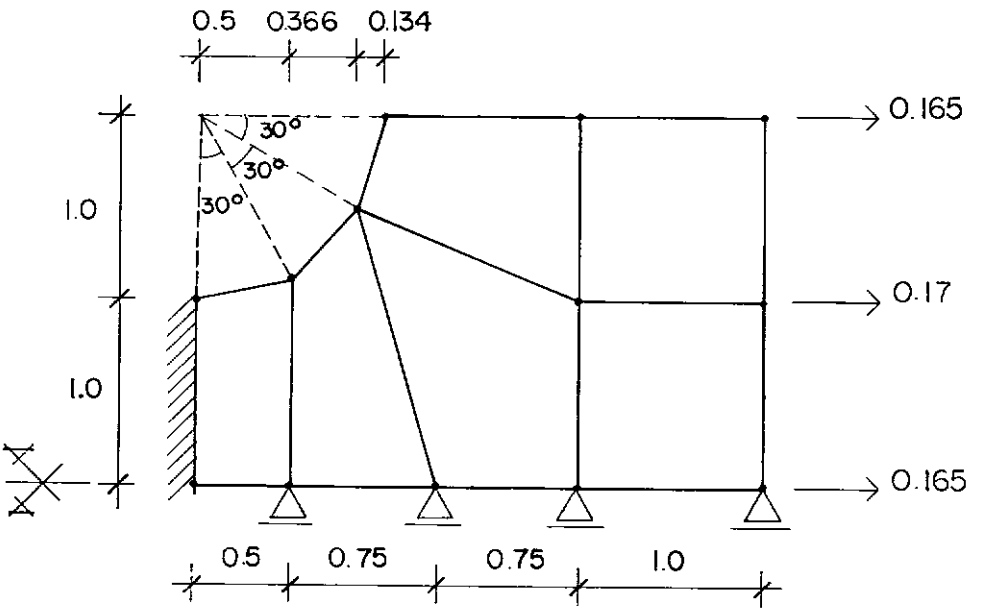



FIGURA VII.18 - Representação da MALHA E.

Valor numérico - $\lambda k$ = 5.253

Erro - $\varepsilon$ = -1.44%

Tempo de CPU - t = 97.21s

Neste exemplo foi utilizada a superfície de escoamento de Tresca.

Na MALHA E o fator de colapso encontrado foi menor que o esperado em 1.44% . Esta diferença negativa poderia dever-se ao fato de que a geometria utilizada na discretização não reproduz perfeitamente a geometria do modelo. Todavia, os corolários dos teoremas limites invalidam esta hipótese. Uma explicação mais válida seria que segundo o efeito de Sait-Venant, para a carga ser aplicada pontualmente, reproduzindo uma carga distribuída, o comprimento total do modelo deveria ser maior.

## VII.4 - EXEMPLO 4 - " PUNÇÃO DE UM SEMI-ESPAÇO "

**Referência:** KACHANOV [08], pág.208, ítem 45.

Definiremos o semi-espaço como uma fatia de espessura unitária na direção Oz (FIG.VII.19), tal que:

$$-\infty < x < +\infty, \quad y \leq 0 \quad e \quad -1 \leq z \leq 0 \qquad \text{(VII.9)}$$

A fatia é mantida sem atrito entre dois parâmetros indeformáveis paralelos a Oxy (z = -1 e z = 0). E está submetida à ação de punção de largura B e comprimento unitário paralelamente à Oz, com movimentos paralelos ao plano Oxy. A superfície (y = 0), não submetida à ação de punção é livre e as velocidades no infinito são nulas.

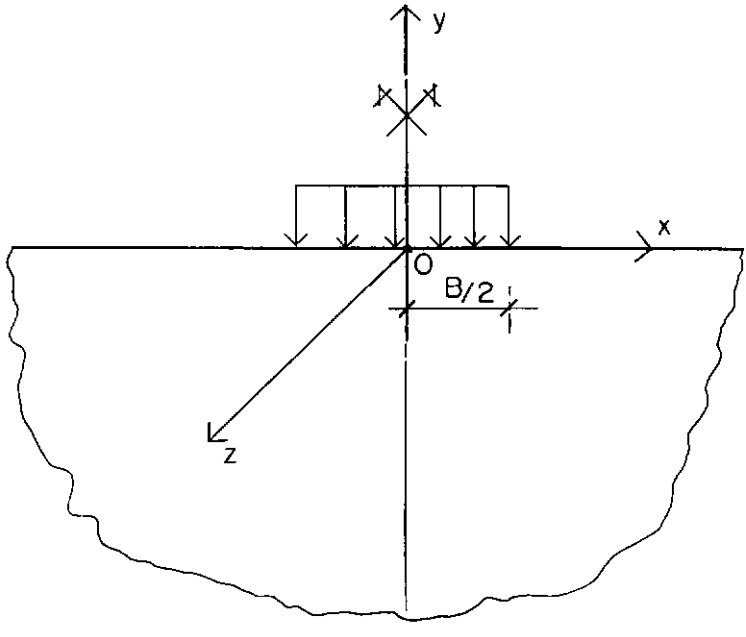



FIGURA VII.20 - Representação do semi-espaço

O resultado analítico a ser encontrado será:

$$P_{rut} = \lambda_c \cdot P = 5.14 \cdot B \cdot K \qquad \text{(VII.10)}$$

Fazendo-se B = K = P = 1, teremos o seguinte valor analítico como base de comparação com os valores numéricos:

$$\lambda_c = 5.14 \qquad \text{(VII.11)}$$

- MALHA A

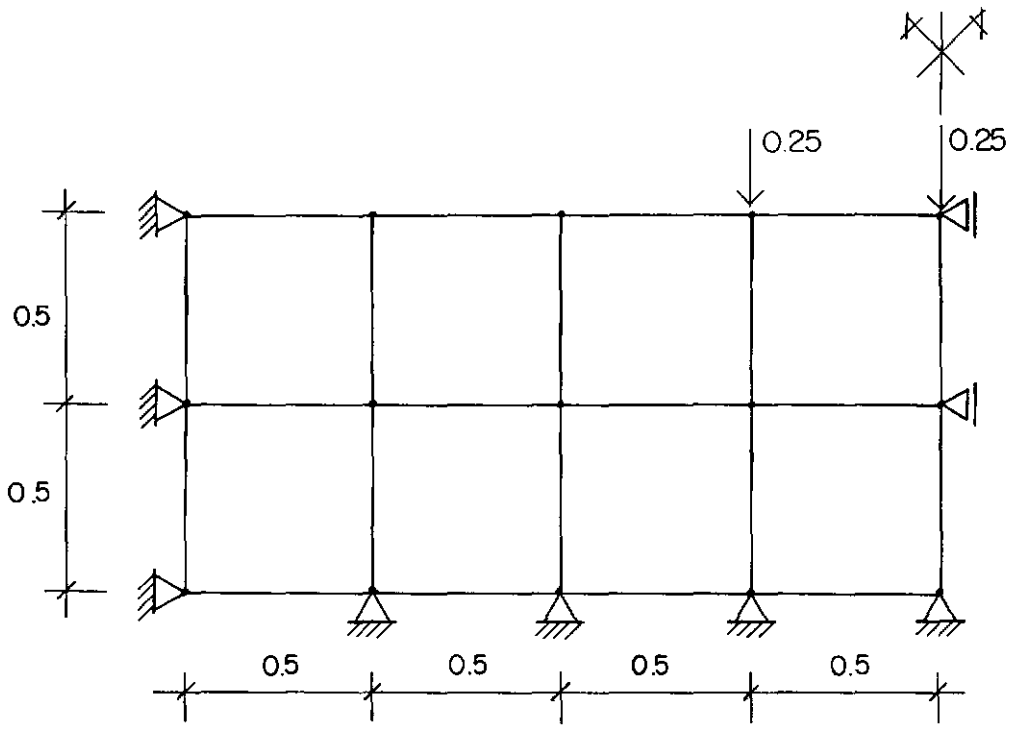



FIGURA VII.21 - Representação da MALHA A.

Valor numérico - $\lambda_k$ = 5.417

Erro - $\varepsilon$ = 5.39%

Tempo de CPU - t = 140.55s

- MALHA B

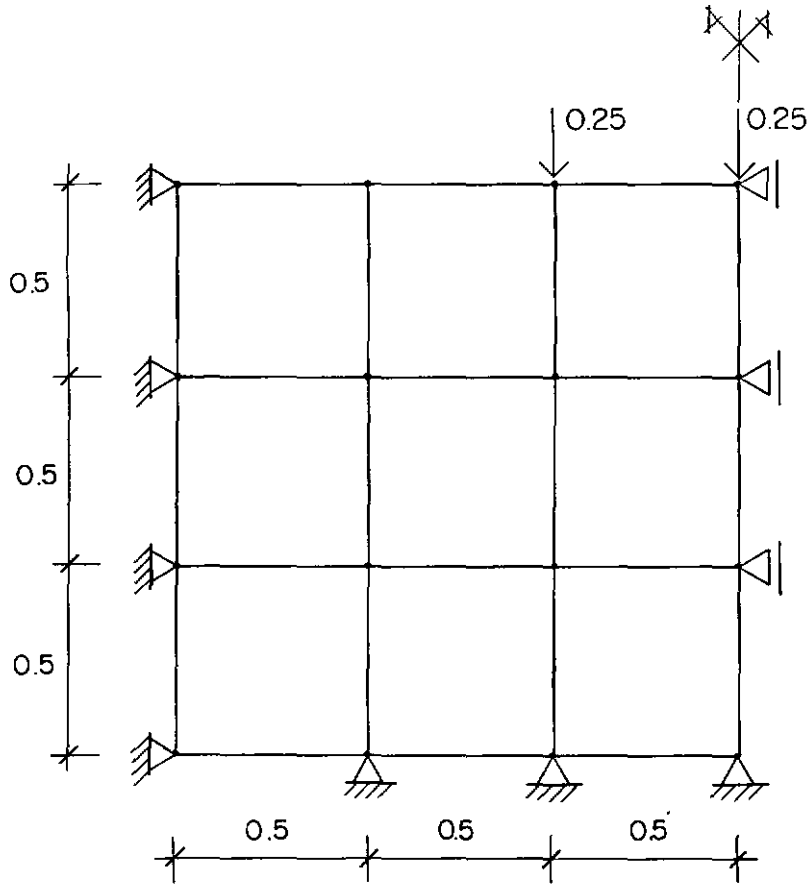



FIGURA VII.22 - Representação da MALHA B.

Valor numérico - $\lambda k$ = 5.417

Erro - $\varepsilon$ = 5.39%

Tempo de CPU - t = 134.57s

- MALHA C

Valor numérico - $\lambda k$ = 5.417

Erro - $\varepsilon$ = 5.39%

Tempo de CPU - t = 744.51s

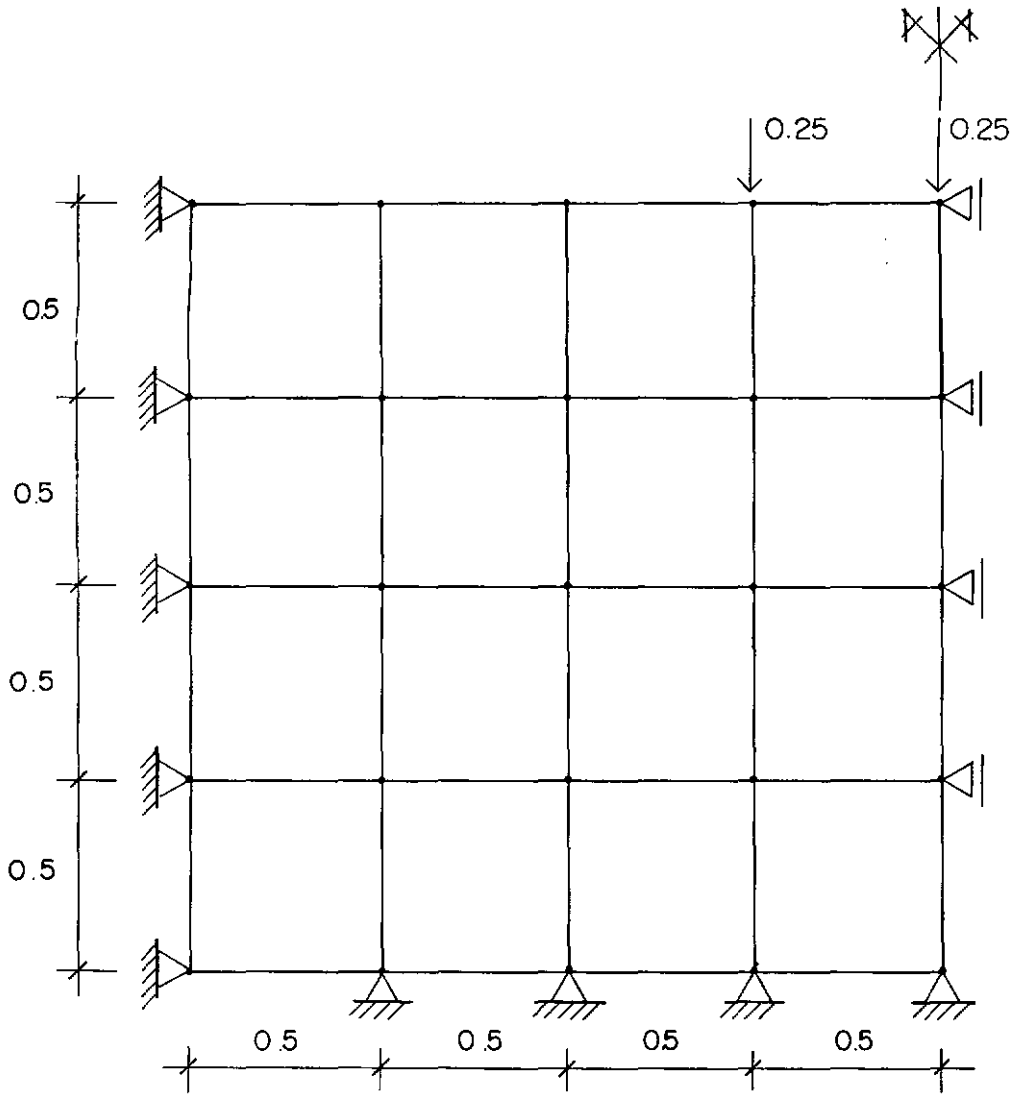



FIGURA VII.23 - Representação da MALHA C.

Neste exemplo a solução exata do problema poderia ser obtida com o campo de velocidades indicado na figura (VII.24).

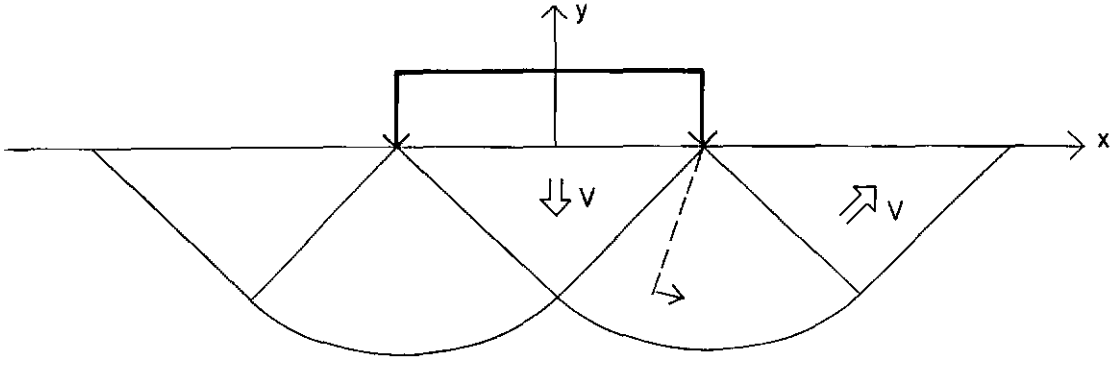



FIGURA VII.24 - Campo de velocidades para solução exata.

Com uma malha de elementos quadrilaterais, esta configuração somente seria alcançada se dispuséssemos os elementos de forma a delinearmos as linhas de ruptura, o que aumentaria o número de elementos, e consequentemente o tempo de CPU aumentaria de forma exponencial. Todavia, neste exemplo não houve uma preocupação com o refinamento da malha, mas sim o demonstrar que , num problema semi-infinito, a região representada nos modelos é suficiente, ou seja, se a aumentarmos ainda mais, os resultados não se alterarão.

A precisão dos resultados pode ter sido afetada pelo efeito de Saint-Venant, uma vez que também foi utilizada a substituição de carga distribuída por cargas pontuais.

Neste exemplo foi utilizada a superfície de escoamento de Tresca

# CAPÍTULO VIII

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A formulação proposta, ou seja, determinação da carga de colapso de estruturas planas como um problema de programação linear, foi testada (através dos exemplos mostrados no CAPÍTULO VII) para ambos os casos; tanto para o estado plano de tensões quanto de deformações, mostrando-se válida quando comparada com os resultados analíticos.

As superfícies poliédricas de escoamento adotadas no trabalho forneceram resultados aceitáveis, mas o algorítimo de PL implementado, apesar de ter conduzido a resultados satisfatórios, apresenta a desvantagem do tempo de execução. Ele aumenta exponencialmente com o "dimensão" do problema.

Para uma melhor aplicação desta formulação em solos poderíamos sugerir a incorporação da superfície de Drucher-Prager que se trata de uma extensão da superfície de von Mises para materiais nos quais não se pode desprezar a influência da pressão hidrostática no colapso; tais como o solo e o concreto.

Esta mesma formulação poderia se extender ao problema do concreto submetido à um estado plano, seja para o concreto massa (barragens), seja para o concreto armado (viga-parede).

Uma outra sugestão, seria estudar uma formulação baseada na plasticidade não-associada, proposta por TAMURA [19], para materiais com ângulo de atrito interno relativamente alto.

Uma quarta sugestão, seria um trabalho com uma formulação

para uma análise limite em corpos rígido-plásticos que possuissem decontinuidades. Segundo TAMURA [20], seria adotado o critério de Drucker-Prager para descrever o escoamento do material, e a lei de Mohr-Coulomb para a modelação das interfaces dos campos de velocidades descontínuos.

# APÊNDICE A

# DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS FUNDAMENTAIS

## A.1 - INTRODUÇÃO

Os Teoremas Fundamentais ou Princípios Extremos são essenciais para uma rigorosa justificativa da consistência das equações básicas da análise limite. Eles podem nos conduzir à eficientes caminhos para o cálculo direto da carga limite através de sucessivas estimativas inferiores ou superiores.

Nas relações da Teoria da Plasticidade de Saint-Venant/von Mises, as componentes de deformação elástica são desprezadas e o incremento de deformação plástica é dado em função das tensões desviatóricas (APÊNDIBE B), ou seja:

$$\frac{\xi_{ij}}{H} = \frac{s_{ij}}{2\tau_e} \qquad (A.1)$$

onde: $\xi_{ij}$ - são as componentes de velocidade de deformação.

$s_{ij}$ - são as componentes do tensor desviatórico.

i,j - são os índices da notação matricial que correspondem a x, y ou z.

H - intensidade de velocidade de deformação cisalhante, ou ainda:

$$H = \sqrt{2\,\xi_{ij}\xi_{ij}} \qquad (A.2)$$

$\tau_e$ - tensão de escoamento ao cisalhamento.

Logo, somente pequenas deformações de um corpo rígido-plástico são estudadas quando as mudanças na

configuração do corpo puderem ser desprezadas.

## A.2 - EQUAÇÃO BÁSICA DE ENERGIA

Consideremos um corpo de volume V limitado por uma superfície $S = S_F + S_V$. (FIG. A.1)

Sobre a parte $S_F$ da superfície são prescritas forças $\underset{\sim}{F}_n$ cujas componentes ao longo dos eixos $x_i$ ( $i = 1,2,3$) são denominadas $X_{ni}$ .

Sobre a parte $S_v$ é prescrita a velocidade $v_o$ com componentes $v_{oi}$ .

Para efeito de simplificação, supomos que não há forças de volume.

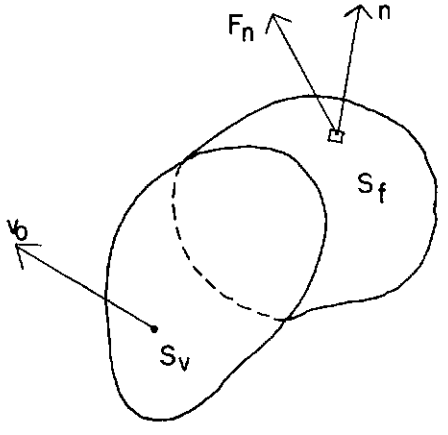



FIGURA A.1 - Corpo rígido-plástico de volume V

Seja $\sigma_{ij}$ um campo de tensões que satisfaça a equação diferencial de equilíbrio no interior do corpo:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(A.3)}$$

e que está em equilíbrio com as forças prescritas $X_{ni}$ na superfície $S_F$ de acordo com as fórmulas de Cauchy.

$$\sigma_{ij}\, n_j = X_{ni} \qquad \text{em} \quad S_F \tag{A.4}$$

onde: $n_j$ são os cossenos diretores da normal $\underset{\sim}{n}$ .

Por outro lado, introduzimos um certo campo de velocidade contínuo $v_i$ que satisfaz as condições prescritas sobre $S_v$ .

$$v_i = v_{oi} \qquad \text{em} \quad S_v \tag{A.5}$$

Ao campo de velocidade corresponde as componentes de velocidade de deformação, ou seja:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} \tag{A.6}$$

O campo de tensões $\sigma_{ij}$ e o campo de velocidades $v_i$ são arbitrários e não estão relacionados.

Para qualquer meio contínuo a seguinte equação fundamental é válida:

$$\int_V \sigma_{ij}\ \xi_{ij}\ dV = \int_S X_{ni}\ v_i\ dS \tag{A.7}$$

onde: V - representa o volume do corpo.

S - representa a superície do corpo.

A equação (A.7) nada mais é do que uma generalização do

"Princípio dos Deslocamentos Virtuais".

Esta equação deve ser generalizada primeiramente para o caso de um corpo tendo *regiões rígidas* e, em segundo lugar, para o caso de *campos de tensões e deslocamentos descontínuos*.

A primeira generalização é óbvia. Realmente, se um corpo contém uma região deformável ( $V_d$ ) e uma região rígida ($V_r$) separadas por uma superfície $\Sigma$ , sobre a qual as velocidades e tensões são contínuas, então para cada região nós temos de acordo com (A.7):

$$\int \sigma_{ij} \; \xi_{ij} \; dV_d = \int X_{ni} \; v_i \; dS_d + \int X_{ni} \; v_i \; d\Sigma \qquad (A.8)$$

$$0 = \int X_{ni} \; v_i \; dS_r - \int X_{ni} \; v_i \; d\Sigma \qquad (A.9)$$

Somando as duas regiões nós recuperamos a equação (A.7) já que $S = S_r + S_d$.

Sendo assim, a equação básica pode ser escrita para o corpo todo, incluindo regiões rígidas.

## A.2.1 - GENERALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES BÁSICAS DE ENERGIA PARA CAMPOS DESCONTÍNUOS

Os resultados precedentes são baseados na hipótese de continuidade do campo de tensão e velocidade. Entretanto, exemplos simples mostram que no estado limite são encontradas freqüentemente descontinuidades de tensão.

O modelo de corpo rígido-plástico envolve também, necessariamente, descontinuidade de velocidades.

- DESCONTINUIDADES DE TENSÃO

Consideremos inicialmente o caso de descontinuidade de tensão em determinadas superfícies $S_k$ ( $k = 1,2,3,...$ ). As superfícies $S_k$ dividem o corpo em um número finito de partes, em cada uma das quais as tensões variam continuamente e para as quais as equações acima são válidas; as integrais de superfícies correspondentes se extendem sobre as superfícies de cada uma das partes separadas.

Suponhamos que a força de superfície $X_{ni}^{+}$ age sobre um lado de $S_k$ e $X_{ni}^{-}$ sobre o outro lado de $S_k$.

A condição de equilíbrio de um elemento de qualquer das superfícies é de tal forma que:

$$X_{ni}^{+} + X_{ni}^{-} = 0 \qquad ( i = 1,2,3 ) \qquad (A.10)$$

Consequentemente, quando as equações escritas para cada parte do corpo são somadas, todas as integrais sobre as superfícies de descontinuidade $S_k$ se cancelam, ou seja, *a forma da equação básica de energia não é afetada pela presença de descontinuidade de tensão.*

- DESCONTINUIDADE DE VELOCIDADE

Vejamos agora, a descontinuidade no campo de velocidade.

Em primeiro lugar, deve-se observar que só é possível ter descontinuidade na componente de velocidade que se situa no plano tangente à superfície $S_l$ ( $l = 1,2,3,...$ ), ou seja, na componente tangencial de velocidade, pois caso contrário o corpo desenvolve fissuras.

Suporemos então, que a componente normal de velocidade é contínua sobre $S_l$.

Vamos colocar um sistema de coordenadas local (x, y e z) num determinado ponto da superfície de descontinuidade $S_l$ de modo que o eixo z esteja dirigido ao longo da normal à superfície (FIG. A.2). As componentes tangenciais de velocidade são $v_t^+$ e $v_t^-$ respectivamente nos lados positivo e negativo da superfície $S_l$. O vetor da velocidade relativa será $v_r$ ( $v_r = v_t^+ - v_t^-$ ) e x será o eixo dirigido ao longo desse vetor.

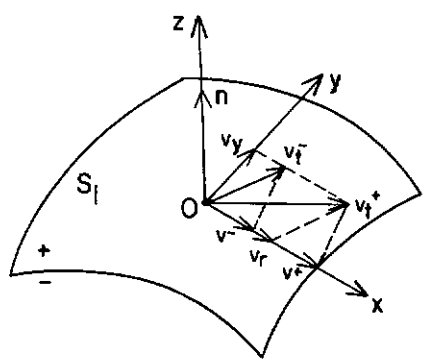



FIGURA A.2 - Componentes de Velocidade.

A superfície de descontinuidade deve ser considerada como a posição limite de uma camada delgada com uma mudança contínua, mas brusca, da velocidade ao longo da espessura da camada. (FIG. A.3-a)

A mudança brusca ocorre somente na correspondente $v_x$, enquanto que $v_y$ e $v_z$ são praticamente constantes ao longo da espessura. É claro que a componente de velocidade de deformação cisalhante $\xi_{xz}$ é consideravelmente maior do que as outras componentes de velocidade de deformação. Quando a espessura da camada tende a zero, $\xi_{xz} \to \infty$ , enquanto que as

outras componentes permanecem limitadas.

Denominaremos $\tau$ a componente tangencial de tensão na superfície $S_l$ na direção x.

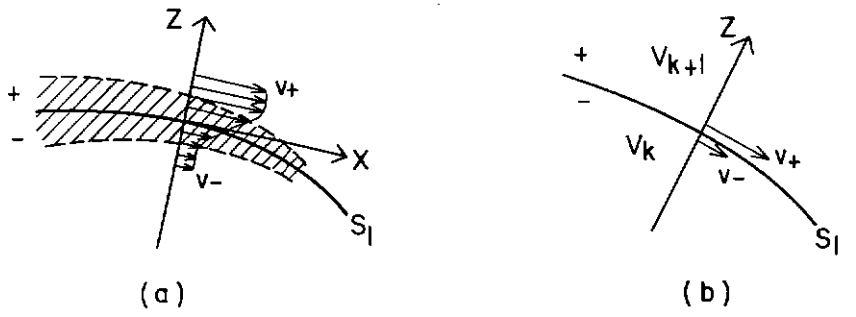



FIGURA A.3 - Superfície de descontinuidade de velocidade.

As superfícies de descontinuidade $S_l$ dividem o corpo em regiões $V_1$, $V_2$, ... , em cada uma das quais as tensões e velocidades possuem as propriedades de continuidade. Sendo assim, a equação básica vale para cada uma dessas regiões. Esta equação inclui o potencial das forças de superfície. Quando as equações escritas para cada parte do corpo são agrupadas, sempre haverá duas integrais sobre cada superfície de descontinuidade, sobre o lado positivo e negativo da superfície. (FIG. A.3-b)

Consideremos um elemento de superfície $dS_l$ . Suponhamos que a região $V_k$ se situa no lado negativo de $dS_l$ e a região $V_{k+1}$ no lado positivo. O potencial das tensões para a região $V_k$ é:

$$( \sigma_n \; v_n + \tau_y \; v_y + \tau \; v_- ) \; dS_l \qquad (A.11)$$

Para a região $V_{k+1}$ será:

$$- ( \sigma_n \; v_n + \tau_y \; v_y + \tau \; v_+ ) \; dS_l \qquad (A.12)$$

Consequentemente, a soma dos potenciais vale:

$$- \tau \; [ \; v \; ] \; dS_l \qquad (A.13)$$

onde: [ v ] representa o salto na velocidade $v_+ - v_- = | \; v_r |$.

A equação básica de energia deve então, incluir o potencial das forças nas superfícies de descontinuidade, ou seja:

$$\int X_{ni} \; v_i \; dS = \int \sigma_{ij} \; \xi_{ij} \; dV + \int \tau \; [ \; v \; ] \; dS_p \qquad (A.14)$$

onde a integração se extende por todas as superfícies de descontinuidades $S_p$ ( $S_p = S_1 + S_2 + \ldots$ ).

O lado esquerdo da equação (A.14) é denominado *potencial das forças de superfície* e o lado direio é chamado *dissipação*.

## A.3 - PROPRIEDADES DE MÍNIMO DO CAMPO DE VELOCIDADE REAL

Vamos aplicar a equação (A.14) para um corpo rígido-plástico. Suponhamos que $\sigma_{ij}$ , $\xi_{ij}$ e $v_i$ sejam a solução real do problema. As tensões e velocidades de deformação estão relacionadas pela equação de Saint-Venant/von Mises (A.1) e satifazem as condições de

equilíbrio e continuidade. A equação (A.14) é obviamente válida para este estado.

Paralelamente ao estado real, vamos considerar um outro, nomeadamente, um *campo de velocidades cinematicamente admissível* $v_i'$ que satisfaz a condição de incompressibilidade e as condições de contorno prescritas sobre $S_v$ .

À $v_i'$ vai corresponder $\xi_{ij}'$ ao qual corresponderá $s_{ij}^*$ . O tensor $s_{ij}^*$ não deverá satisfazer necessariamente a equação de equilíbrio. Ao tensor $s_{ij}^*$ vai corresponder ainda, as forças de superfície $X_{ni}^*$ que podem ser obtidas com o uso da expressão de Cauchy, e independem da pressão hidrostática. Finalmente, vamos supor que o campo cinematicamente possível $v_i'$ é descontínuo sobre as superfícies $S_l'$ ( $l = 1,2,...$ ).

Vamos agora, comparar o campo real de velocidade $v_i$ com o campo de velocidade cinematicamente possível $v_i'$ .

Para este último, a equação (A.14) é mantida e pode ser escrita como:

$$\int \sigma_{ij}\, \xi_{ij}'\, dV - \int X_{ni}\, v_i'\, dS + \int \tau\, [\, v' \,]\, dS_p' = 0 \quad (A.15)$$

onde [ v' ] representa o salto $v_+' - v_-'$ em $S_p'$ .

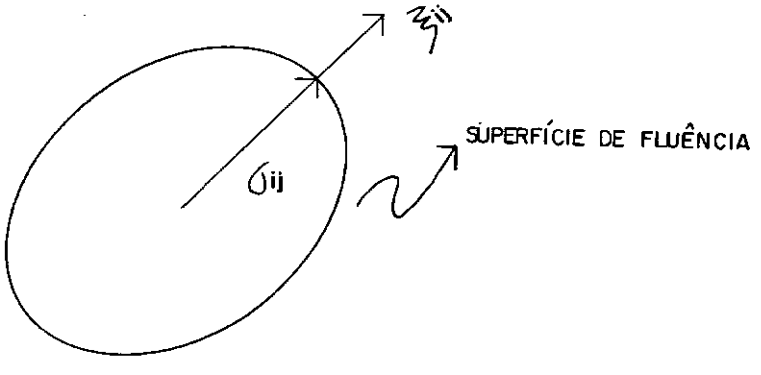



FIGURA A.4 - Representação dos vetores $\sigma_{ij}$ e $\xi_{ij}$.

Os vetores $\sigma_{ij}$ e $\xi_{ij}$ são paralelos devido à relação Saint- Venant/von Mises (A.1). (FIG.A.4)

A expressão $\sigma_{ij}\ \xi_{ij}$ , que é um produto escalar de vetores paralelos, é igual ao produto dos seus módulos.

$$\sigma_{ij}\ \xi_{ij} = T\ .\ H = \tau_e\ .\ H \qquad (A.16)$$

A expressão $\sigma_{ij}\ \xi'_{ij}$ é o produto escalar de vetores geralmente não paralelos, logo:

$$\sigma_{ij}\ \xi'_{ij} = s_{ij}\ \xi_{ij} \leq T\ .\ H' \leq \tau_e\ .\ H' \qquad (A.17)$$

A igualdae só vale para $\xi'_{ij} = c\ \xi_{ij}$ , onde c é um escalar. Neste caso, $s^*_{ij} = s_{ij}$ , ou seja, o estado de tensões $\sigma^*_{ij}$ correspondente ao campo cinematicamente possível difere do estado de tensões real $\sigma_{ij}$ da pressão hidrostática.

Com o uso da equação (A.17) e a condição de fluência de von Mises, chega-se à:

$$\tau_e \int H'\ dV - \int X_{ni}\ v_i'\ dS_F + \tau_e \int [v']\ dS_P \geq 0 \qquad (A.18)$$

$$\tau_e \int H'\ dV - \int X_{ni}\ v_i'\ dS_F + \tau_e \int [v']\ dS_P \geq$$
$$\geq \int X_{ni}\ v_{\alpha i}\ dS_v \qquad (A.19)$$

Nesta equação $\tau$ é desconhecido, mas como $|\ \tau\ | \leq \tau_e$, a substituição de $\tau$ por $\tau_e$ em (A.19) só reforça a desigualdade. Para o campo de velocidade real vale uma expressão similar à (A.15), que é igual a zero,

consequentemente;

$$\tau e \int H \, dV - \int X_{ni} \, v_i \, dS_F + \tau e \int [v] \, dS_p' \leq$$
$$\leq \tau e \int H' \, dV - \int X_{ni} \, v_i' \, dS_F + \tau e \int [v'] \, dS_p'$$

(A.20)

A igualdade só se dá quando o campo virtual $v_i'$ se iguala ao campo real $v_i$ . A expressão do lado direito da inequação é chamada comumente de *potencial total*.

Sendo assim, *o potencial total é um mínimo absoluto para o campo de velocidades real.*

## A.4 - PROPRIEDADES DE MÁXIMO DO CAMPO DE TENSÕES REAIS

Seja $\sigma_{ij}$ , $\xi_{ij}$ e $v_i$ a solução real de um problema. Como anteriormente, as tensões e velocidades de deformação estão relacionadas pela equação de Saint-Venant/von Mises e satisfazem as condições de equilíbrio e continuidade.

Nós agora introduzimos um conceito de *campo de tensões limites estaticamente admissível* $\sigma_{ij}'$ . Tal campo de tensões será qualquer campo $\sigma_{ij}'$ que satisfaça as equações diferenciais de equilíbrio no interior do corpo:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(A.21)}$$

e as condições de contorno prescritas sobre a parte $S_F$ da superfície.

$$\sigma'_{ij}\, n_j = X_{ni} \qquad \text{sobre } S_F \qquad (A.22)$$

e que também não exceda a tensão de escoamento:

$$T' = \left[ \frac{1}{2}\, s'_{ij}\, s'_{ij} \right]^{1/2} \leq \tau_e \qquad (A.23)$$

O campo de tensões $\sigma'_{ij}$ pode ser descontínuo.

Para o campo real de tensões vale a equação (A.14), onde $v_i$ é o campo real de velocidade.

Por outro lado, como $\sigma'_{ij}$ é um estado de tensões em equilíbrio, vale:

$$\int X'_{ni}\, v_i \; dS = \int \sigma'_{ij}\, \xi_{ij}\, dV + \int \tau' [v]\, dS_p \qquad (A.24)$$

onde: $X'_{ni} = X_{ni}$ sobre $S_F$ e as forças $X'_{ni}$ sobre $S_v$ são determinadas pela fórmula de Cauchy.

$\tau'$ é a componente tangencial do estado de tensões admissível $\sigma'_{ij}$ na direção x da superfície de descontinuidade $S_p$.

Subtraindo a equação (A.14) da equação (A.24) nós chegamos a:

$$\int (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij})\, \xi_{ij}\, dV = \int (X'_{ni} - X_{ni})\, v_{oi}\, dS_v + \int (\tau_e - \tau')\, [v]\, dS_p \qquad (A.25)$$

O vetor $\xi_{ij}$ é normal à superfície de fluência $\Sigma$ e o vetor $\sigma_{ij}$ é paralelo ao vetor $\xi_{ij}$ e alcança a superfície de fluência como representado na (FIG. A.5).

O vetor que representa $\sigma'_{ij}$ se situa geralmente no interior de $\Sigma$ e o vetor ( $\sigma'_{ij}$ - $\sigma_{ij}$ ) está representado pela linha tracejada na figura (A.5). Devido à convexidade da superfície de escoamento $\Sigma$ , os vetores $\xi_{ij}$ e ( $\sigma'_{ij}$ - $\sigma_{ij}$) fazem um angulo obtuso, logo, o produto escalar deles é negativo.

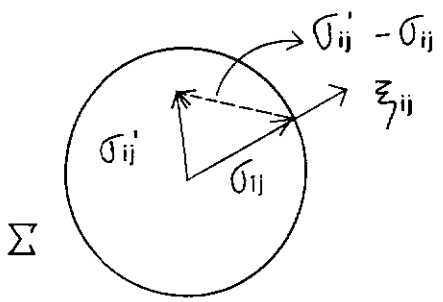



FIGURA A.5 - Relação entre os vetores $\sigma_{ij}$ , $\sigma'_{ij}$ e $\xi_{ij}$ .

$$( \sigma'_{ij} - \sigma_{ij} ) \xi_{ij} \leq 0 \qquad (A.26)$$

A igualdade na equação (A.26) só acontece quando os vetores $\sigma'_{ij}$ e $\sigma_{ij}$ diferem apenas de uma pressão hidrostática, já que a última não afeta a condição de escoamento, e lembrando que $\sigma_{ij} \xi_{ij} = s_{ij} \xi_{ij}$ .

Considerando a equação (A.26), o lado direito da equação (A.25) é negativo, assim:

$$\int X_{ni} v_{oi} \, dS_V \geq \int X'_{ni} v_{oi} \, dS_V + \int (\tau_e - \tau')[v] \, dS_p \qquad (A.27)$$

A "quantidade" de descontinuidade [v] é desconhecida mas como $\tau_e \geq \tau'$ e $\tau_e$ [v] > 0, o segundo termo do lado direito de inequação (A.27) é não-negativo. Reforçando a inequação,

podemos escrever:

$$\int X_{ni}\ v_{oi}\ dS_V \geq \int X_{ni}'\ v_{oi}\ dS_V \qquad (A.28)$$

sendo os termos $X_{ni}'$ obtidos de $\sigma_{ij}'$ por Cauchy.

A equação (A.28) nos permite enunciar que:

" O potencial das forças de superfície reais sobre as velocidades é maior que o potencial desenvolvido por quaisquer outras forças de superfície correspondente a um campo de tensões estaticamente admissível".

Das inequações (A.19) e (A.28) segue uma estimativa dos limites superior e inferior para o potencial das forças de superfície reais nas velocidades prescritas

$$\tau_e \int H'\ dV - \int X_{ni}\ v_i'\ dS_F + \tau_e \int [v']\ dS_p' \geq$$
$$\geq \int X_{ni}\ v_{oi}\ dS_V \geq \int X_{ni}'\ v_{oi}\ dS_V \qquad (A.29)$$

Para calcular o lado esquerdo de (A.29) é necessário tomar um campo de velocidades cinematicamente admissível e para o lado direito, um campo estaticamente admissível.

## A.5 - TEOREMAS DOS FATORES DE CARGA LIMITE

Consideremos que as forças de superfície aumentem proporcionalmente a um parâmetro $\lambda > 0$ . Neste caso, é fácil obter os limites da carga de colapso.

$$X_{ni} = \lambda\ X_{ni}^{\circ} \qquad \text{sobre } S_F \qquad (A.30)$$

onde $X_{ni}^{\circ}$ é uma certa distribuição fixa de forças sobre $S_F$.

Além disso, nós supomos que as velocidades sobre a parte $S_V$ da superfície são nulas.

$$v_{oi} = 0 \quad \text{(suportes fixos)} \tag{A.31}$$

O colapso do corpo é atingido para um certo valor do parâmetro $\lambda = \lambda_c$ (fator de carga de colapso).

A.5.1 - O LIMITE SUPERIOR DA CARGA LIMITE

Escrevendo a equação (A.18) para as condições acima definidas, vem:

$$\int \lambda_c \, X_{ni}^{\circ} \, v_i' \, dS_F \leq \tau e \int H' \, dV + \tau e \int [v'] \, dS_P' \tag{A.32}$$

logo,

$$\lambda c = \tau e \frac{\int H' \, dV + \int [v'] \, dS_P'}{\int X_{ni}^{\circ} \, v_i' \, dS_F} \equiv \lambda_k \tag{A.33}$$

A igualdade em (A.33) só é possível quando $v_i' \equiv v_i$ e sendo $\lambda_k$ denominado fator cinemático, logo:

$$\lambda_c \leq \lambda_k \tag{A.34}$$

Da equação (A.33) conclui-se que $\lambda_k$ é obtido igualando-se o potencial das cargas nas velocidades

cinematicamente admissíveis ao potencial de deformação.

## A.5.2 - O LIMITE INFERIOR DA CARGA LIMITE

Consideremos um estado limite de tensões estaticamente admissível $\sigma'_{ij}$ que satisfaça de alguma forma as condições de contorno em $S_F$ .

$$X'_{ni} = \lambda_s \; X^{\circ}_{ni} \qquad \text{sobre } S_F \tag{A.35}$$

Aplicando a equação (A.25) chega-se a:

$$\int (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}) \, \xi_{ij} \, dV = (\lambda_s - \lambda_c) \int X^{\circ}_{ni} \; v_i \, dS_F + \\ + \int (\tau e - \tau') \, [v] \, dS_p \tag{A.36}$$

De acordo com (A.26) o lado esquerdo de (A.36) é em geral negativo, logo:

$$\lambda_c - \lambda_s \geq \frac{\int (\tau e - \tau') \, [v] \, dS_p}{\int X^{\circ}_{ni} \; v_i \, dS_F} \tag{A.37}$$

A igualdade só vale se $\sigma_{ij}$ e $\sigma'_{ij}$ diferirem de uma pressão uniforme (hidrostática). Como o numerador é não-negativo e o denominador é positivo,

$$\lambda_s \leq \lambda_c \tag{A.38}$$

# APÊNDICE B

## PLANO DESVIATÓRICO

Para que haja maior clareza na visão do plano desviatórico, o definiremos utilizando sua interpretação geométrica.

Estabeleceremos um espaço das tensões principais $\sigma_1$, $\sigma_2$ e $\sigma_3$. Neste espaço, o estado de tensões num ponto qualquer pode ser representado por um vetor $\overline{OP}$, que tem como componentes $\sigma_1$, $\sigma_2$ e $\sigma_3$.(FIG.B.1)

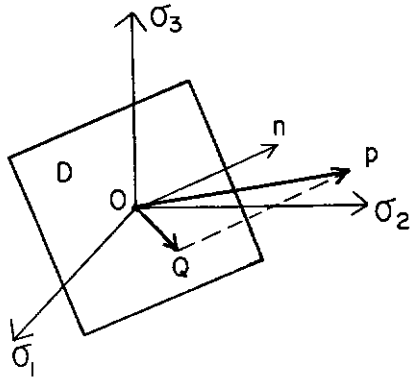



FIGURA B.1 - Representação do espaço das tensões principais

Seja um plano D (FIG.B.1) definido por:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \qquad \text{(B.1)}$$

Este plano passará pela origem e terá inclinações iguais em relação aos três eixos.

O vetor unitário normal a este plano, será:

$$\underset{\sim}{\bar{n}} = {}^{1}/\sqrt{3}\,(\underset{\sim}{i}_1 + \underset{\sim}{i}_2 + \underset{\sim}{i}_3) \qquad (B.2)$$

onde: $\underset{\sim}{i}_1$, $\underset{\sim}{i}_2$ e $\underset{\sim}{i}_3$ são os vetores unitários ao longo dos eixos $\sigma_1$, $\sigma_2$ e $\sigma_3$.

A linha definida por:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \qquad (B.3)$$

passará pela origem e será perpendicular a este plano. Os pontos desta linha, chamada *eixo hidrostático*, correspondem aos *estados de tensão hidrostáticos*.

Seja um vetor $\underset{\sim}{\overline{OP}}$ dado por:

$$\underset{\sim}{\overline{OP}} = \sigma_1 \underset{\sim}{i}_1 + \sigma_2 \underset{\sim}{i}_2 + \sigma_3 \underset{\sim}{i}_3 \qquad (B.4)$$

A projeção de $\underset{\sim}{\overline{OP}}$ na normal $\underset{\sim}{\bar{n}}$ será proporcional ao tensor hidrostático.

$$(\underset{\sim}{\overline{OP}}, \underset{\sim}{\bar{n}}) = \sqrt{3}\,\sigma \qquad (B.5)$$

Introduzindo agora, um vetor $\underset{\sim}{\overline{OQ}}$ representado por:

$$\underset{\sim}{\overline{OQ}} = s_1 \underset{\sim}{i}_1 + s_2 \underset{\sim}{i}_2 + s_3 \underset{\sim}{i}_3 \qquad (B.6)$$

Este vetor é chamado *tensor desviatórico*, de tal forma que:

$$\underset{\sim}{\overline{OP}} = \underset{\sim}{\overline{OQ}} + \sqrt{3}\ \sigma\ \underset{\sim}{\overline{n}} \qquad (B.7)$$

e

$$\cos\left( \underset{\sim}{\overline{OP}}\ ,\ \underset{\sim}{\overline{n}} \right) = 0 \qquad (B.8)$$

Logo, o vetor $\underset{\sim}{\overline{OQ}}$ está sobre o plano representado em (FIG.B.1), que é chamado *plano desviatórico.*

O comprimento do vetor $\underset{\sim}{\overline{OQ}}$ será proporcional à intensidade de tensão cisalhante ( T ).

$$\left| \underset{\sim}{\overline{OQ}} \right| = \sqrt{2}\ T \qquad (B.9)$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[01] TIMOSHENKO, S. P. e GERE, J. E.,
*Mecânica dos Sólidos*,
Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, vol. 2, 1984.

[02] SYMONDS, P. S.,
*"Limit Analysis" do Handbook of Engeneering Mechanics*,
Nova Iorque, editado por W. Flügge, Mc Graw-Hill Book Company, cap. 49, 1962.

[03] BEEDLE, L. S.,
*Plastic Design of Steel Frames*,
Nova Iorque, John Wiley and Sons, Inc., 1958.

[04] MASSONET, C. E. e SAVE, M. A.,
*Plastic Analyses and Design of Plates Shells and Disks*,
Londres, North-Holland Publishing Company, 1972.

[05] GVOZDEV, A. A.,
*The Determination of the Value of the Colapse Load for Statically Indeterminate Systems Undergoing Plastic Deformation*,
Int. J. of Mech. Sci., Vol 1, pp 322-333, (1960), tradução original de 1938.

[06] HILL, R.,

*On the State of Stress in a Plastic-Rigid Body at the Yield Point*,

Phil. Mag., 1951.

[07] PRAGER, W.,

*Théorie Générale des États Limites d'Equilibre*,

Paris, J. de Mathématiques Pures et Appliquées,1955.

[08] KACHANOV, L. M.,

*Fundamentals of the Theory of Plasticity*,

Moscou, MIR, 1974.

[09] PUCCINI, A. L.,

*Introdução à Programação Linear*,

Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico,1972.

[10] DANTZIG, G. B.,

*Linear Programming and Extensions*,

Nova Jersey, Princeton University Press, 1962.

[11] GASS, S. I.,

*Linear Programming - Methods and Applications*,

Nova Iorque, Mc Graw-Hill Book Company,Inc., 1969.

[12] HADLEY, G.,

*Programação Linear*,

Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois, 1982.

[13] HU, T. C.,

*Integer programming and Network Flows*,

Readings, *Massachusetts*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

[14] FONSECA, A. M. A. e NEVES, A. A. S.,

*"Análise Plástica Limite de Lajes"*,

São Paulo, São Carlos, In: VII Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 1986.

[15] MENEZES, I. F. M.,

*"Análise Limite de Lajes de Concreto Armado"*,

Rio de Janeiro, PUC/RJ, Tese M.Sc., 1990.

[16] BATHE, K. J.,

*Finite Element Procedures in Engeneering Analysis*,

Nova Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1982.

[17] CHEN, W. F.,

*Plasticity in Reinforced Concrete*,

Nova Iorque, Mc Graw-Hill Book Company,1982.

[18] HECKE, M. B. e PEREIRA N. Z.,

*"Formulações Cinemática, de Equilíbrio e Mista para Elasto-Plasticidade em Tensões Planas"*,

Brasil, Rio de Janeiro, PUC, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, vol. X, n° 2, pp. 103-132, Maio, 1988.

[19] TAMURA, T., KOBAYASHY, S. e SUMI, T.,
*"Rigid-Plastic Finit Element Method for Frictional Materials"*,
Soils and Foundations, vol. 27, n° 3, pp. 1-12, Setembro, 1987.

[20] TAMURA, T. e PAK, R. Y. S.,
*"Rigid-Plastic Limit Analysis of Discontinuous Media by a Finite Element Method"*,
Canadian Geotecnical Journal, vol.26, pp. 369-374, Fevereiro, 1989.