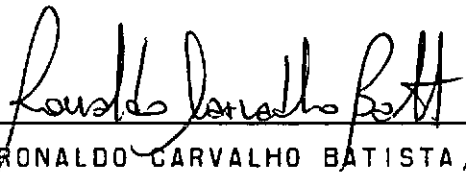


COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR
DE CASCAS CILÍNDRICAS ENRIJECIDAS

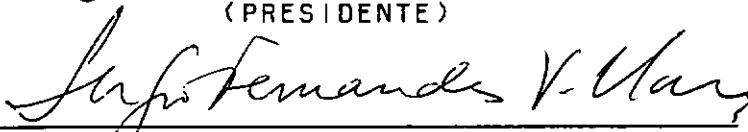
ZACARIAS MARTIN CHAMBERLAIN PRAVIA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR :



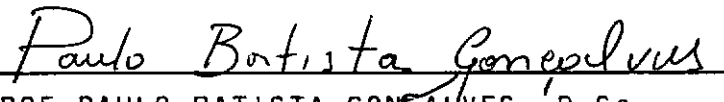
PROF. RONALDO CARVALHO BATISTA, PH.D.
(PRESIDENTE)



PROF. SERGIO FERNANDES VILLAÇA, D.Sc.



PROF. LUIZ FERNANDO TABORDA GARCIA, D.Sc.



PROF. PAULO BATISTA GONÇALVES, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1990

PRAVIA, ZACARIAS MARTIN CHAMBERLAIN

Comportamento Não-linear de Cascas Cilíndricas
Enrijecidas [Rio de Janeiro] 1990

ix, 81 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Civil, 1990

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE

1. Estabilidade estrutural I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Antes que nada al pueblo Brasileño por la oportunidad que me ofrecio para poder hacer este estudio.

Al profesor y guía Ronaldo C. batista, no solo por la orientación como por la ayuda y el impulso que me dio.

A todos los Profesores que se comportaron como excelentes guías y amigos en los nuevos conocimientos que me ofrecieron.

A todos los compañeros y amigos brasileños que en este tiempo compartimos momentos excelentes.

Finalmente a los que todos de una o otra manera pertenecen al Programa de Engenharia Civil de la COPPE, que me han ayudado en todo este tiempo transcurrido.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo primero a mi *Mar* y mi hijo *Zeus Zaky*, y a mis padres Dr. Zacarias Chamberlain Y Norma Pravia de Chamberlain, como a mis hermanos Oscar Rene (Kane) y Richard.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

**COMPORTAMENTO NAO-LINEAR
DE CASCAS CILINDRICAS ENRIJECIDAS**

Zacarias Martin Chamberlain Pravia

Abril, 1990

Orientador : Ronaldo Carvalho Batista

Programa : Engenharia Civil

Um modelo matemático é desenvolvido para análise estática não-linear de cascas enrijecidas longitudinalmente submetidas à compressão axial.

A formulação desse modelo é baseada numa combinação modal pertencente à solução geral das equações diferenciais de equilíbrio dinâmico de uma casca cilíndrica isotrópica. As equações não-lineares de equilíbrio do modelo são obtidas através de princípios variacionais e levam em conta pequenas imperfeições geométricas iniciais. Um critério de início de plastificação é adotado, possibilitando o cálculo de cargas de colapso além de cargas críticas clássicas.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

**NONLINEAR BEHAVIOR OF STRINGER
STIFFENED CYLINDRICAL SHELLS**

Zacarias Martin Chamberlain Pravia

April, 1990

Chairman : Ronaldo Carvalho Batista

Department : Civil Engineering

A mathematical model for nonlinear static analysis of axially compressed stringer stiffened cylindrical shells is presented.

This model is based on a modal combination from a general solution of the differential equations of dynamic equilibrium for an isotropic cylindrical shell. The nonlinear equilibrium equations are obtained through variational principles and small initial geometric imperfections are considered. An adopted yield criterion allows for failure loads estimates, besides classical critical loads.

INDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

I.1 Considerações iniciais e estudos anteriores sobre o assunto	1
I.2 Objetivos e procedimentos do presente trabalho ...	6

CAPÍTULO II - MODELO MATEMÁTICO

II.1 Modelo estrutural

II.1.1 Descrição	9
II.1.2 Geometria e sistemas de referência	12
II.1.3 Condições de simetria e compatibilidade de deslocamentos	13
II.1.4 Condições de contorno do modelo	15

II.2 Campo de Deslocamentos

II.2.1 Forma geral de solução para deslocamentos de uma casca cilíndrica	16
II.2.2 Solução para deslocamentos do enrijecedor	19
II.2.3 Condições de contorno para a solução adotada ..	20

CAPÍTULO III - EQUAÇÕES NÃO LINEARES DE EQUILÍBRIO

III.1 Funcional do modelo

III.1.1 Energia de deformação elástica do painel cilíndrico	22
III.1.2 Energia de deformação elástica do enrijecedor longitudinal	24
III.1.3 Energia potencial das cargas externas	26
III.1.4 Funcional de energia potencial total na forma incremental e critérios de estabilidade	28

III.2 Desenvolvimento algébrico do funcional discretizado	33
--	----

III.3 Desenvolvimento das equações não-lineares de equilíbrio	34
--	----

III.4 Equações não-lineares de equilíbrio com imperfeições geométricas iniciais	36
--	----

III.5 Critério de plasticidade	37
--------------------------------------	----

CAPÍTULO IV - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO

IV.1 Introdução	39
-----------------------	----

IV.2 Definição do algoritmo computacional	42
---	----

CAPÍTULO V RESULTADOS TEÓRICOS

V.1 Introdução	46
V.2 Comparação de resultados entre solução de 5 e 4 modos	49
V.3 Resultados da casca A1	52
V.4 Resultados da casca B2	58
V.5 Influência da excentricidade do enrijecedor	62
CAPÍTULO VI - COMENTÁRIOS FINAIS	64
BIBLIOGRAFIA	67
LISTA DE SÍMBOLOS	71
APÊNDICE A.- EQUAÇÕES NÃO LINEARES DE EQUILÍBRIO	73

CAPITULO I

INTRODUCAO

I.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS E ESTUDOS ANTERIORES SOBRE O ASSUNTO

Cascas cilíndricas enrijecidas são muito empregadas como elementos estruturais na indústria aeronáutica, marítima e de "offshore", já que resultam em soluções estruturais leves, econômicas e funcionais. Porém, pelo fato de serem esbeltas, têm perda acentuada de rigidez elástica antes de atingir a carga última de colapso plástico esperada, sob ação de pressões uniformes. Em outras palavras, essas estruturas -na prática geometricamente imperfeitas- podem atingir carga de colapso quando a tensão de escoamento (ou de ruptura) do material é alcançada, ao longo de uma resposta não-linear geométrica sob carregamento crescente e regime elástico do material.

Sabe-se [1], teórica e experimentalmente, que cascas cilíndricas isotrópicas sobre compressão axial tem comportamento instável e são muito sensíveis às imperfeições geométricas iniciais, de modo que as cargas de flambagem associadas a estas imperfeições são inferiores à carga crítica clássica da casca perfeita.

No caso de cascas cilíndricas com enrijecedores longitudinais ("stringers") pouco espaçados e esbeltas, sujeitas a compressão axial uniforme, comuns na indústria aeronáutica, tem-se comprovado que a consideração de um

modelo ortotrópico equivalente oferece estimativas teóricas que se comparam favoravelmente a resultados experimentais. Além disso esses resultados têm mostrado a pequena influência das imperfeições geométricas iniciais sobre os valores das cargas de flambagem experimentais ou cargas de colapso teóricas.

Mas nos casos em que a casca tem enrijecedores muito espaçados, como nas aplicações das indústrias mecânica (vasos de pressão), naval (submarinos) e de "offshore" (plataformas), o comportamento estrutural é essencialmente distinto do caso anterior (com enrijecedores pouco espaçados) apresentando características mecânicas que fazem com que as cargas críticas da casca enrijecida sob compressão axial sejam, por vezes, inferiores à carga crítica da casca isotrópica (i.e. sem enrijecedores). Nesses casos as imperfeições iniciais têm influência somente sobre a não-linearidade de seu comportamento, em geral estável globalmente.

Para este último tipo de cascas enrijecidas longitudinalmente, existem dois tipos de colapso, observados experimentalmente por WALKER e KEMP [2], os quais são relatados explicitamente por JUSTINO FILHO [3] de maneira clara :

- colapso por instabilidade local entre enrijecedores.
- colapso por instabilidade global da casca.

Muitos esforços tem sido realizados para obter um modelo matemático que represente bem o comportamento dessas cascas enrijecidas longitudinalmente, o qual permitiria o cálculo da carga de colapso ou a previsão da perda de rigidez em serviço, obtendo-se assim um valor limite para projeto.

Resultados experimentais deste tipo de casca apresentam flambagem localizada e conseqüente aparecimento de mecanismos plásticos nos painéis entre enrijecedores, antes que a carga de flambagem global seja atingida. Isso está intimamente ligado às propriedades torsionais dos enrijecedores e à interação não-linear entre modos de flambagem entre painel e enrijecedores.

O problema da estabilidade local em painéis enrijecidos foi estudado inicialmente por KOITER [4], que assumindo os enrijecedores como suportes simples dos painéis não considerou a rigidez torsional dos mesmos. Já em estudos posteriores [5,6,7,8] foram consideradas as propriedades dos enrijecedores distribuídas uniformemente ao longo de toda a casca, tratando a estrutura como uma casca simples de peso equivalente com propriedades ortotrópicas. A importância da inclusão da rigidez torsional e excentricidade dos enrijecedores [9,10] foi confirmada por resultados experimentais ; assim a flambagem local passou a ser estudada formalmente.

Dentro do Programa de Engenharia Civil da COPPE-UFRJ desenvolve-se uma linha de pesquisa bem definida para análise da estabilidade de cascas cilíndricas da qual pode-se citar segundo o tipo de cascas : isotrópicas desenvolvida por BATISTA [11,12] e ANTONINI [1]; incluindo enrijecedores anulares, por GONÇALVES [13] e enrijecedores longitudinais por JUSTINO [3] e FIGUEREIDO [14].

É importante se salientar que até agora têm-se obtido somente caminhos de equilíbrio pós-crítico estáveis, seja de modelos teóricos ou experimentais.

No trabalho de JUSTINO [3] foi usada uma formulação variacional em que o modelo é discretizado por uma solução modal. Esses modos foram escolhidos de maneira a representar, o melhor possível, o comportamento da casca de acordo com observações experimentais realizadas com cascas isotrópicas. Os resultados obtidos por JUSTINO [3] para as cascas analisadas foram em geral estáveis e com cargas de flambagem menores que a carga crítica associada à casca isotrópica, isto é sem enrijecedores.

Já no trabalho de FIGUEREIDO [14] a solução modal proposta é tomada de uma solução matemática geral obtida por GONÇALVES [15] para as equações que definem o comportamento da casca cilíndrica isotrópica ; e sobre essa solução, são aplicadas condições de contorno. Na referência [14] não se apresentam resultados numéricos. Isto é feito no presente trabalho onde o modelo matemático, resultante

do aperfeiçoamento do anterior, foi implementado computacionalmente. Observa-se que o modelo original, embora matematicamente correto, não forneceu nenhuma solução numérica fisicamente interpretável. Os problemas envolvidos no modelo anterior serão comentados posteriormente dentro do presente trabalho e alguns resultados numéricos de cascas típicas serão analisados.

I.2. OBJETIVOS E PROCEDIMENTOS DO PRESENTE TRABALHO

O objetivo deste trabalho é estabelecer um modelo matemático para análise a não-linear de cascas cilíndricas com enrijecedores longitudinais esbeltos e espaçados, sujeitas à compressão axial. São usados como referências básicas para o desenvolvimento do modelo os trabalhos de JUSTINO [3] e principalmente o de FIGUEREIDO [14]. A diferença mais relevante entre este último modelo e o presente é a de não se forçar as condições de contorno nos extremos da casca (satisfeitas aproximadamente por superposição modal), de modo a evitar ganhos excessivos de rigidez que impossibilitavam a obtenção de resultados numéricos.

A descrição do modelo é apresentada no CAPÍTULO II, assim como a solução modal discreta escolhida a partir da solução geral para casca isotrópicas [15] e as respectivas condições de compatibilidade e de contorno.

O CAPÍTULO III apresenta o desenvolvimento das equações não-lineares de equilíbrio do modelo a partir da extremização dos funcionais discretizados de energia potencial. Isto é feito usando o método de RAYLEIGH-RITZ e aproveitando o desenvolvimento explícito feito por FIGUEREIDO [14]. Neste mesmo capítulo define-se o critério de plasticidade em termos dos esforços internos da casca, usado para se obter a carga de início de plastificação local, ou seja, para se detectar o início de ocorrência de

mecanismo plástico que evidencia um limite de projeto para o modelo estrutural apresentado.

No CAPÍTULO IV é definida a implementação computacional (SOFTWARE) para a resolução das equações não-lineares de equilíbrio do modelo, com ou sem imperfeições geométricas iniciais, usando o método de NEWTON-RAPHSON. Também neste capítulo se faz referência à instabilidade numérica produzida no modelo computacional bem como a solução empregada para contornar este problema, a qual foi a de reduzir o número de funções na solução modal discreta escolhida.

Com a modificação feita na solução modal discreta são apresentados alguns resultados no CAPÍTULO V obtidos com o presente modelo matemático-numérico, os quais oferecem algumas indicações para a obtenção de cargas de projeto. Além disso são feitas comparações com outros resultados numéricos e experimentais, com a intenção de analisar criticamente os resultados aqui obtidos à luz de resultados anteriores.

Por último, no CAPÍTULO VI são feitos os comentários finais e são expostas algumas idéias que permitiriam desenvolver um modelo mais simples e que poderia ser usado para fazer estudos paramétricos do modelo estrutural aqui analisado.

Observe-se, finalmente, que o presente trabalho tentou

evitar ao máximo a repetição de descrições, critérios, hipóteses, procedimentos analíticos, e outros comentários, os quais podem ser encontrados nas referências listadas na Bibliografia do presente trabalho, onde se ressaltam principalmente aquelas oriundas do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ.

CAPITULO II

MODELO MATEMATICO

II.1 MODELO ESTRUTURAL

II.1.1. DESCRIÇÃO

O modelo consiste de uma casca cilíndrica esbelta com enrijecedores dispostos longitudinalmente, conforme mostrado na figura II.1, submetida à compressão axial; os enrijecedores podem ser centrados ou excêntricos em relação à superfície média da casca cilíndrica.

Consideram-se aqui os casos nos quais os enrijecedores são esbeltos e bastante espaçados, sendo portanto analisado o mecanismo de flambagem de um painel cilíndrico entre enrijecedores, levando em conta a interação modal entre painel e enrijecedor.

Assim, é assumida, como modo crítico da casca enrijecida, uma configuração deformada definida por um número n de semi-ondas na direção longitudinal e p ondas completas na direção circumferencial, tendo deslocamentos radiais nulos ao longo das geratrizes onde se localizam os enrijecedores (vide figura II.1).

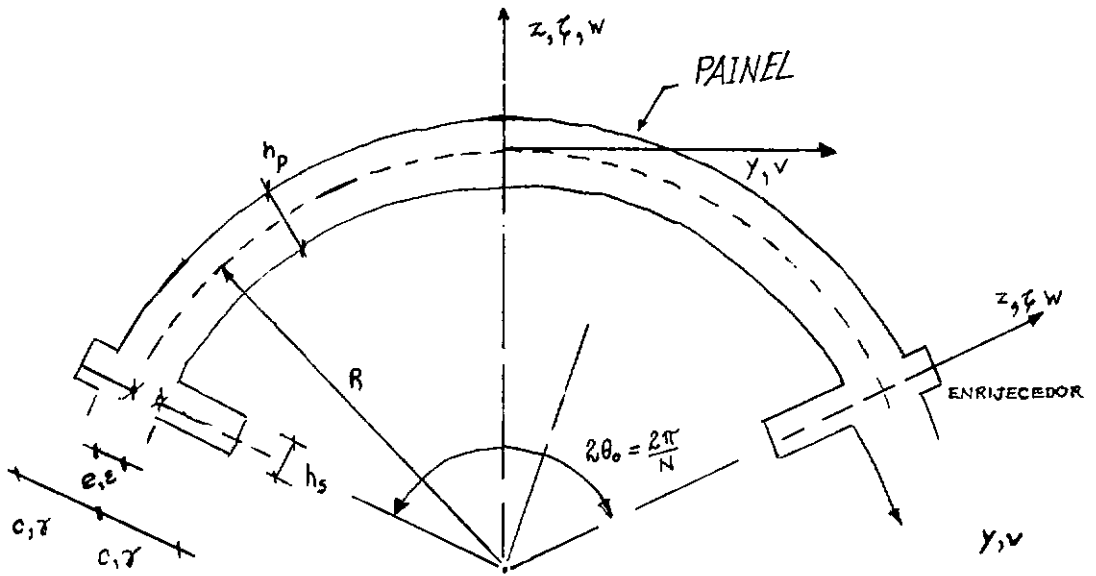
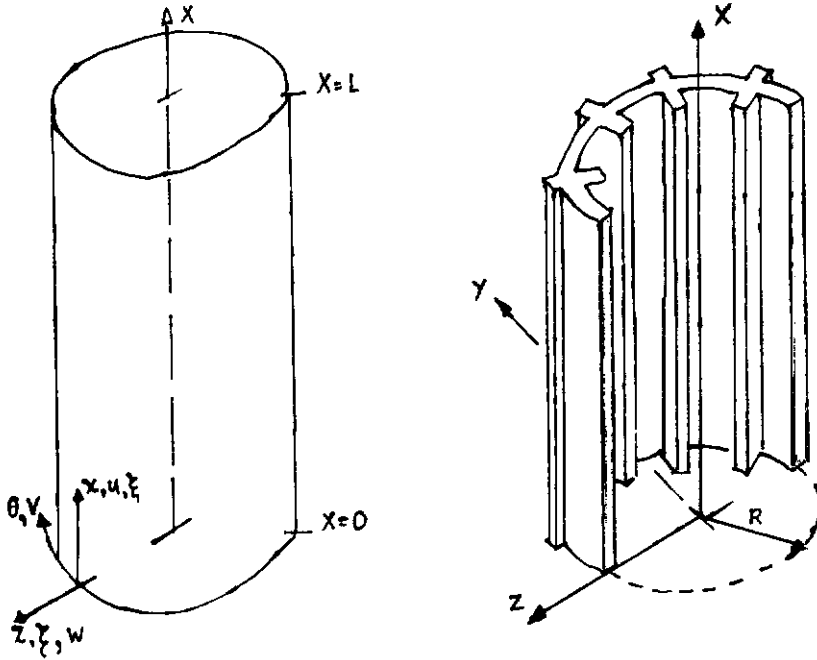


FIGURA II.1 ASPECTO GERAL DA CASCA CILINDRICA ENRIJECIDA

Definindo como um painel o trecho de casca entre dois enrijecedores consecutivos, o número N de painéis cilíndricos ou número N de enrijecedores define o número de ondas no sentido circumferencial

$$p = \frac{N}{2} \quad (\text{II.1})$$

Pela simetria de deslocamentos é possível representar a estrutura por um modelo básico constituído por um único painel e um único enrijecedor (vide figura II.1); tanto para fins de montagem do funcional de energia potencial total, quanto para o estabelecimento do campo de deslocamentos.

O material que constitui a estrutura é considerado isótropo e elástico linear; o painel cilíndrico é tratado através da teoria não-linear de DONNELL para cascas delgadas e o enrijecedor é tratado como placa delgada através da teoria não-linear de VON KARMAN.

O comportamento do enrijecedor como placa alongada, com um bordo livre, outro engastado elasticamente e extremos apoiados fica caracterizado a partir dos deslocamentos transversais provocados pela rotação da sua junção rígida com o painel e pelo modo de flambagem torsional sob ação do carregamento axial.

II.1.2. GEOMETRIA E SISTEMAS DE REFERÊNCIA

São usados e definidos aqui os seguintes parâmetros geométricos apresentados na figura II.1

- L comprimento da casca e do enrijecedor
 h_p espessura do painel cilíndrico
 h_s espessura do enrijecedor
R raio da superfície média do painel cilíndrico
C semi-profundidade do enrijecedor
e excentricidade do enrijecedor em relação ao painel
 θ_0 semi-ângulo entre os enrijecedores
 $\lambda = L / R$ comprimento adimensional do enrijecedor
 $\gamma = C / R$ semi-profundidade adimensional do enrijecedor
 $\epsilon = e / R$ excentricidade adimensional entre enrijecedor e o painel

Os sistemas de referência usados são :

Global - eixos X,Y e Z conforme figura II.1.

Local - eixos x,y e z , este sistema estabelece as coordenadas de um ponto qualquer da superfície cilíndrica através de :

- x coordenadas longitudinais
- y coordenadas circunferenciais
- z coordenadas radiais

Local - eixos ξ e ζ coincidentes com x e z , respectivamente, estabelecendo com θ um sistema de referências adimensionais dadas por :

$$\begin{aligned}\xi &= x / R && \text{coordenadas longitudinais} \\ \theta &= y / R && \text{coordenadas circunferenciais} \\ \zeta &= z / R && \text{coordenadas radiais}\end{aligned}$$

Os campos de deslocamentos são dados pelas notações :

$u(u, v, w)$ campo de deslocamentos segundo o referencial x, y e z .

$U(U, V, W)$ campo de deslocamentos adimensionais segundo o referencial ξ, θ e ζ .

II.1.3. CONDIÇÕES DE SIMETRIA E COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS

O campo de deslocamentos adimensionais do painel cilíndrico

$$\tilde{U}_p = (U_p, V_p, W_p) \quad (\text{II.2.a})$$

apresenta simetria em relação ao plano $\xi\zeta$ em $\theta = 0$. Estas condições de simetria podem ser expressas segundo :

$$U_p(\xi, \theta) = U_p(\xi, -\theta)$$

$$V_p(\xi, \theta) = -V_p(\xi, -\theta) \quad (\text{II.2.b})$$

$$W_p(\xi, \theta) = W_p(\xi, -\theta)$$

O campo de deslocamentos adimensionais do enrijecedor

$$U_s = (U_s, V_s, W_s) \quad (\text{II.3})$$

é estabelecido a partir dos deslocamentos U_p e atendendo às relações de compatibilidade de deslocamentos na junção painel-enrijecedor ($\theta = \theta_0$). Este campo de deslocamentos pode ser descrito na forma :

$$U_s(\xi, \zeta) = U_p(\xi, \theta_0) - (\zeta - \varepsilon) W_{p, \xi}(\xi, \theta_0)$$

$$V_s(\xi, \zeta) = V_p(\xi, \theta_0) - (\zeta - \varepsilon) W_{p, \theta}(\xi, \theta_0) \quad (\text{II.4})$$

$$W_s(\xi, \zeta) = W_p(\xi, \theta_0) (1 + \zeta - \varepsilon)$$

II.1.4. CONDIÇÕES DE CONTORNO DO MODELO

A casca é considerada simplesmente apoiada em suas extremidades, $\xi=0$ e $\xi=1$, onde as condições de contorno lineares são dadas por

$$U_{p,\xi} + \nu(V_{p,\theta} + W_p) = 0$$

$$V_p = 0$$

(II.5)

$$W_p = 0$$

$$W_{p,\xi\xi} + \nu W_{p,\theta\theta} = 0$$

e, em $\theta = \theta_0$, por

$$V_p = 0$$

$$W_{p,\theta} = 0$$

(II.6)

$$W_{p,\xi\xi} = 0$$

$$V_{p,\xi\xi\theta} = 0$$

Estas condições de contorno são atendidas de modo que as geratrizes do cilindro, ao longo da junção com os enrijecedores, permaneçam retilíneas durante o processo de flambagem.

II.2. CAMPO DE DESLOCAMENTOS

II.2.1. FORMA GERAL DE SOLUÇÃO PARA DESLOCAMENTOS DE UMA CASCA CILÍNDRICA.

O sistema de equações diferenciais que define o comportamento de casca cilíndrica isotrópica, segundo o referencial mostrado na figura (II.1), fornece como solução para o campo de deslocamentos (U_p, V_p, W_p) as expressões definidas assim [15]

$$\begin{aligned}
 W_p &= \sum_{i=1,3,5..} \sum_{j=1,3,5..} W_{ij} \sin(i Q \xi) \cos(j P \theta) \\
 &+ \sum_{i=0,2,4..} \sum_{j=0,2,4..} W_{ij} \cos(i Q \xi) \cos(j P \theta) \\
 V_p &= \sum_{i=1,3,5..} \sum_{j=1,3,5..} V_{ij} \sin(i Q \xi) \sin(j P \theta) \\
 &+ \sum_{i=0,2,4..} \sum_{j=0,2,4..} V_{ij} \cos(i Q \xi) \sin(j P \theta) \\
 U_p &= \sum_{i=1,3,5..} \sum_{j=1,3,5..} U_{ij} \cos(i Q \xi) \cos(j P \theta) \\
 &+ \sum_{i=0,2,4..} \sum_{j=0,2,4..} U_{ij} \sin(i Q \xi) \cos(j P \theta)
 \end{aligned}$$

(II.7)

Sendo

$$Q = \frac{n \pi R}{L} \quad (\text{II.8})$$

um parâmetro adimensional, onde n é o número de semi-ondas longitudinais e p o número de ondas circunferenciais.

Pode-se observar que as expressões (II.7) definem duas séries duplas para cada um dos deslocamentos. A primeira das séries, em cada caso, representa os modos críticos, e a segunda é composta pelos modos secundários ou pós-críticos.

Em trabalhos passados [1, 3, 18] foram adotadas combinações as quais envolviam um único modo crítico e vários modos secundários, alguns deles não fazendo parte da forma geral da solução matemática. A referência [14] apresenta uma comparação entre as diversas formas de soluções modais adotadas em trabalhos anteriores.

Neste trabalho, seguindo a linha convencional de se usar um único modo crítico, utiliza-se apenas o primeiro termo da série de modos críticos. No caso dos modos secundários, utilizam-se os primeiros quatro termos da série dos modos secundários, o que leva á seguinte solução modal discreta :

$$U_p = U_{1,1} \cos(Q \xi) \cos(P \theta) + U_{2,0} \sin(2 Q \xi) \\ + U_{2,2} \sin(2 Q \xi) \cos(2 P \theta) \quad (\text{II.9.1})$$

$$V_p = V_{1,1} \sin(Q \xi) \sin(P \theta) + V_{0,2} \sin(2 P \theta) \\ + V_{2,2} \cos(2 Q \xi) \sin(2 P \theta) \quad (\text{II.9.2})$$

$$W_p = W_{1,1} \sin(Q \xi) \cos(P \theta) + W_{0,0} + W_{0,2} \cos(2 P \theta) \\ + W_{2,0} \cos(2 Q \xi) + W_{2,2} \cos(2 Q \xi) \cos(2 P \theta) \quad (\text{II.9.3})$$

Para que exista completa compatibilidade dos deslocamentos fundamentais e incrementais, é colocado um termo a mais no deslocamento U_p que compatibilize a expansão radial $W_{0,0}$. Levando em conta esta consideração podemos reescrever a solução de maneira a identificar as amplitudes com um único sub-índice, como descrito a seguir

$$U_p = U_1 \xi + U_2 \cos(Q \xi) \cos(P \theta) + U_4 \sin(2 Q \xi) \\ + U_5 \sin(2 Q \xi) \cos(2 P \theta)$$

$$V_p = V_2 \sin(Q \xi) \sin(P \theta) + V_3 \sin(2 P \theta) \\ + V_5 \cos(2 Q \xi) \sin(2 P \theta) \quad (\text{II.10})$$

$$W_p = W_1 + W_2 \sin(2 Q \xi) \cos(P \theta) + W_3 \cos(2 P \theta) \\ + W_4 \cos(Q \xi) + W_5 \cos(2 P \theta) \cos(2 Q \xi)$$

Os termos associados aos modos críticos tem sub-índice "2" e os demais são os modos secundários.

A solução de deslocamentos proposto atende de maneira aproximada a compatibilidade entre deslocamentos, constituindo-se numa forma truncada da solução geral da casca cilíndrica isotrópica. No que diz respeito à análise de estabilidade, esta solução contém os principais modos que permitem observar a perda de rigidez numa casca isotrópica : um modo crítico assimétrico combinado com um modo axissimétrico com duas vezes o número de ondas longitudinais do modo crítico.

II.2.2 SOLUÇÃO PARA DESLOCAMENTOS DO ENRIJECEDOR

Os modos de deslocamentos para o enrijecedor são definidos como funções do campo de deslocamentos do painel cilíndrico pela aplicação dos modos(II.10), em $\theta = \theta_0$ nas equações (II.4). Fazendo-se as substituições devidas, os deslocamentos do enrijecedor são escritos como :

$$U_s = U_1 \xi + [U_4 - U_5 + 2 Q (\zeta - \varepsilon) (W_4 - W_5)] \text{sen}(2 Q \xi)$$

$$V_s = [V_2 + W_2 P(\zeta - \varepsilon)] \text{sen}(Q \xi) \quad (\text{II.12})$$

$$W_s = (1 + \zeta - \varepsilon) [W_1 - W_3 + (W_4 - W_5) \cos(2 Q \xi)]$$

II.2.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A SOLUÇÃO ADOTADA

O campo de deslocamentos que é definido pela solução geral da casca isotrópica atende, para um número infinito de termos, às condições de contorno nos extremos da casca bi-apoiada. No entanto uma solução discreta, obtida a partir do truncamento da solução geral, atenderá aproximadamente às condições de contorno do modelo proposto, nos extremos.

No caso de uma casca isotrópica pode-se mostrar numericamente [16] que forçar as condições de contorno dentro de uma solução modal, que atenda apenas aproximadamente a estas, produz um grande ganho de rigidez incompatível com a comprovada perda de rigidez do sistema.

Na implementação computacional do modelo proposto na referência [14], os resultados obtidos apresentam o mesmo comportamento de ganho exagerado de rigidez do painel enrijecido. Somando os efeitos descritos anteriormente a um comportamento de instabilidade numérica do modelo computacional, foi impossível se obter qualquer resultado que permitisse analisar o comportamento pós-crítico do painel enrijecido.

Dadas as experiências numéricas anteriores [16], e as desenvolvidas dentro do presente trabalho supõe-se aqui que a solução modal proposta atende aproximadamente às condições de contorno de uma casca simplesmente apoiada nos

seus extremos, isto é, não é forçada nenhuma das condições de apoio simples sobre os modos secundários, o que é válido para cascas suficientemente longas com $L/R \geq 1.00$.

CAPITULO III

EQUACOES NAO LINEARES DE EQUILIBRIO

III.1. FUNCIONAL DO MODELO

III.1.1. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DO PAINEL
CILÍNDRICO.

A energia potencial elástica do painel cilíndrico é definida através das simplificações da teoria clássica de cascas de LOVE-KIRCHOFF e pela utilização das relações cinemáticas da teoria não-linear de DONNELL-MUSHTARI-VLASOV para cascas esbeltas abatidas, pela expressão

$$U_p = \frac{R}{2} \int_0^L \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left[(N_x \varepsilon_x + N_\theta \varepsilon_\theta + 2 N_{x\theta} \varepsilon_{x\theta}) \right. \\ \left. + (M_x \chi_x + M_\theta \chi_\theta + 2 M_{x\theta} \chi_{x\theta}) \right] d\theta dx \quad (III.1)$$

na qual as deformações específicas da superfície média da casca são definidas por :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= U_{p,x} + \frac{1}{2} (-W_{p,x})^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \left[V_{p,\theta} + W_p + \frac{1}{2R} (-W_{p,\theta})^2 \right] \\ \varepsilon_{x\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R} U_{p,\theta} + V_{p,x} + \frac{1}{R} W_{p,x} W_{p,\theta} \right]\end{aligned}\quad (\text{III.2})$$

e as mudanças de curvatura, por :

$$\begin{aligned}\chi_x &= -W_{p,xx} \\ \chi_\theta &= -\frac{1}{R^2} W_{p,\theta\theta} \\ \chi_{x\theta} &= -\frac{1}{R} W_{p,x\theta}\end{aligned}\quad (\text{III.3})$$

sendo as respectivas relações constitutivas

$$\begin{aligned}N_x &= K (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) \\ N_\theta &= K (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \\ N_{x\theta} &= K (1 - \nu) \varepsilon_{x\theta} \\ M_x &= D (\chi_x + \nu \chi_\theta) \\ M_\theta &= D (\chi_\theta + \nu \chi_x) \\ M_{x\theta} &= D (1 - \nu) \chi_{x\theta}\end{aligned}\quad (\text{III.4})$$

onde K e D são respectivamente a rigidez extensional e a rigidez a flexão do painel

$$K = \frac{E h_p}{(1 - \nu^2)}$$

(III.5)

$$D = \frac{E h_p^3}{12(1 - \nu^2)}$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e ν o seu coeficiente de Poisson respectivo.

III.1.2. ENERGÍA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DO ENRIJECEDOR LONGITUDINAL.

O enrijecedor é analisado como placa e seu funcional de energia potencial elástica, referido à sua superfície média, é estabelecido pela teoria não-linear de VON KARMAN

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-c}^c \left[(N_z \epsilon_z + N_x \epsilon_x + 2 N_{zx} \epsilon_{zx}) \right. \\ \left. + (M_z \chi_z + M_x \chi_x + 2 M_{zx} \chi_{zx}) \right] dz dx$$

(III.6)

no qual as deformações específicas são dadas por

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= W_{s,z} + \frac{1}{2} (V_{s,x})^2 \\ \varepsilon_x &= U_{s,x} + \frac{1}{2} (V_{s,x})^2 \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} (W_{s,x} + U_{s,z} + V_{s,z} V_{s,x})\end{aligned}\tag{III.7}$$

e as mudanças de curvatura por

$$\begin{aligned}\chi_z &= -V_{s,zz} \\ \chi_x &= -V_{s,xx} \\ \chi_{zx} &= -V_{s,zx}\end{aligned}\tag{III.8}$$

sendo as respectivas relações constitutivas

$$\begin{aligned}N_z &= \eta K (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x) \\ N_x &= \eta K (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z) \\ N_{zx} &= \eta K (1 - \nu) \varepsilon_{zx} \\ M_z &= \eta^3 D (\chi_z + \nu \chi_x) \\ M_x &= \eta^3 D (\chi_x + \nu \chi_z) \\ M_{zx} &= \eta^3 D (1 - \nu) \chi_{zx}\end{aligned}\tag{III.9}$$

onde

$$\eta = \frac{h_s}{h_p} \quad (\text{III.10})$$

é um parametro adimensional que relaciona tanto a rigidez extensional, quanto a rigidez flexional do enrijecedor, com aquelas correspondentes do painel cilíndrico.

III.1.3. ENERGÍA POTENCIAL DAS CARGAS EXTERNAS.

Considera-se uma distribuição uniforme de tensões normais compressivas σ nos bordos extremos da casca (tanto ao longo dos painéis cilíndricos, quanto ao longo dos enrijecedores); geradas pelo carregamento axial P imposto à estrutura.

Sendo N_p e N_s as resultantes por unidade de comprimento de tensão axial ao longo, respectivamente, dos bordos extremos de um painel cilíndrico e de um enrijecedor e P_p e P_s as parcelas de P atuantes em cada um destes elementos, tem-se

$$N_p = - \sigma h_p$$

$$N_s = - \sigma h_s$$

$$P = N (P_p + P_s) = N_p 2 \pi R + N_s 2 C N$$

$$P_p = N_p 2 R \theta_0$$

$$P_s = N_s 2 C$$

(III.11)

onde N é o número de painéis ou enrijecedores, sendo então definida a parcela de energia potencial associada à carga externa do painel cilíndrico como

$$\Omega_p = - p_p \int_0^1 U_{p,x} dx = \sigma h_p R \int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} U_{p,x} d\theta dx$$

(III.12)

e a parcela devida ao enrijecedor

$$\Omega_s = - p_s \int_0^1 U_{s,x} dx = \sigma h_s R \int_0^1 \int_{-C}^C U_{s,x} dz dx$$

(III.13)

Pela introdução do parâmetro adimensional η definido na expressão III.10, e o parâmetro de carga adimensional definido por

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} (1 - \nu^2) \quad (III.14)$$

a energia potencial da carga externa para o painel cilíndrico fica

$$\Omega_p = K R \lambda \int_0^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} U_{p,x} d\theta dx \quad (\text{III.15})$$

e para o enrijecedor

$$\Omega_s = \eta K \lambda \int_0^1 \int_{-C}^C U_{s,x} dz dx \quad (\text{III.16})$$

III.1.4. FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA FORMA INCREMENTAL E CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE.

A energia potencial total do modelo é dada pela soma dos potenciais do painel e o enrijecedor, cada um tendo integrado o seu respectivo potencial de carga externa

$$V = (U_p + \Omega_p) + (U_s + \Omega_s) \quad (\text{III.17})$$

Agora, para permitir a parametrização da solução do problema as amplitudes modais são adimensionalizadas em relação ao raio R da superfície media da casca. Definindo então as novas coordenadas locais como

$$\xi = x / R \quad \theta = y / R \quad \zeta = z / R \quad (\text{III.18.a})$$

todos os demais componentes de deslocamentos são também adimensionalizados em relação ao raio.

$$u = U / R \quad v = V / R \quad w = W / R \quad (\text{III.18.b})$$

Para analisar a estabilidade da estrutura numa dada configuração deformada fundamental consideram-se deslocamentos incrementais que levam a estrutura a uma outra configuração deformada, vizinha à configuração fundamental. Assim, fazendo

$$\underline{U}_p = \underline{U}_p^F + \underline{U}_p^I \quad (\text{III.19})$$

são definidos os deslocamentos totais (soma dos fundamentais e incrementais) associados à configuração deformada vizinha. Nas suas formas discretas os três deslocamentos são assim expresos por

$$\begin{aligned} \underline{U}_p &= \underline{U}_p^F + \underline{U}_p^I \\ \underline{V}_p &= \underline{V}_p^F + \underline{V}_p^I \\ \underline{W}_p &= \underline{W}_p^F + \underline{W}_p^I \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Sustituindo-os nos funcionais totais do painel e enrijecedor e considerando o estado fundamental como um de membrana

$$U_p^F = - \frac{\sigma}{E} \xi \quad (\text{III.21})$$

$$W_p^F = -\nu U_p^F, \xi = \nu \frac{\sigma}{E}$$

obtém-se o potencial incremental do enrijecedor definido no trabalho de FIGUEREIDO [14], o qual foi reagrupado de maneira a representar a energia potencial total do estado fundamental e as primeira, segunda, terceira e quarta variações do potencial total, que contêm termos lineares, quadráticos, cúbicos, e quárticos respectivamente, podendo-se escrever que

$$V = V^F + V^1 + V^2 + V^3 + V^4 \quad (\text{III.22})$$

Sendo o estado fundamental, de energia constante, conhecido e sendo a primeira variação do incremento de energia, nula, pode-se definir para a análise não-linear pós-crítica da casca enrijecida o seguinte potencial

$$V = V^F + V^2 + V^3 + V^4 \quad (\text{III.23})$$

De acordo com o critério de energia de LAGRANGE, para que uma configuração fundamental de equilíbrio seja estável, a sua energia potencial total tem que ser um mínimo relativo e completo com respeito às energias potenciais totais associadas a todos os estados vizinhos

cinematicamente admissíveis. Isto é, para que a configuração fundamental seja estável a energia potencial total associada a um estado de deformação \tilde{u} tem que ser maior que aquela associada ao estado de deformação \tilde{u}^F fundamental

$$V(\tilde{u}) > V(\tilde{u}^F) \quad (\text{III.24})$$

Para o equilíbrio estático de uma estrutura sob carregamento λ fixado é necessário e suficiente que a energia potencial total do sistema $V(u, \lambda)$, seja estacionária com respeito ao campo de deslocamentos \tilde{u} , que caracteriza uma configuração de equilíbrio cinematicamente admissível. Pelo princípio de estacionariedade da energia, tem-se que o estado é de equilíbrio estático quando

$$\delta V(u, \lambda) = 0 \quad (\text{III.25})$$

para todas as variações admissíveis $\delta \tilde{u}$ do campo de deslocamentos.

Como a configuração original é um estado de equilíbrio a primeira variação V^1 do potencial é nula. Com isto, sendo \tilde{u}^F constante a equação (III.25) pode ser aplicada diretamente sobre a variação da energia na forma

$$\Delta V = V - V^F = V^2 + V^3 + V^4 \quad (\text{III.26})$$

Isto na realidade é uma transformação linear ou

isto na realidade é uma transformação linear ou mapeamento do caminho de equilíbrio pós-crítico sobre o fundamental, de modo a representar a variação de energia somente em termos dos deslocamentos incrementais :

$$\text{de } U^T = U^F + U^I \quad \text{para} \quad \Delta u = u - u^F = u^I$$

o que pode ser observado mais claramente na figura III.1

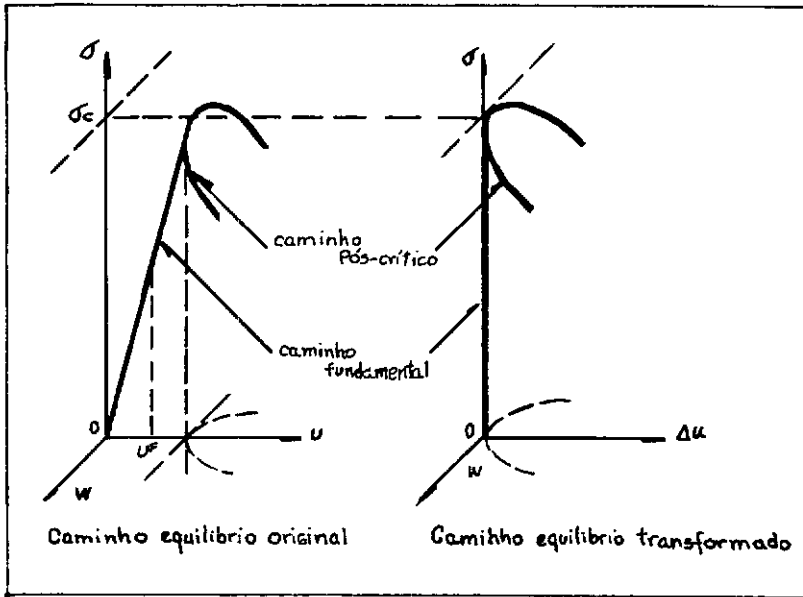


FIGURA III.1 TRANSFORMAÇÃO DO CAMINHO PÓS-CRÍTICO

Tendo já o funcional de energia total definido pode-se discretizá-lo pela simples substituição de u^I no campo de deslocamentos apresentados como solução discreta nas expressões II.10 para o painel e as II.12 para o enrijecedor. Pode-se então expressar, de maneira simbólica, a discretização do funcional incremental total do modelo como

$$\Delta V^* = \Delta V_p^* + \Delta V_e^* \quad (\text{III.27})$$

sub-conjunto de funções pertencentes à solução da equação diferencial do problema, dada pelas funções II.7. Em resumo, tem-se a expressão final dos funcionais discretizados de energia, já normalizados em relação ao raio, idênticos aos apresentados nas páginas 76 e 90 do trabalho de FIGUEREIDO [14], respectivamente para o painel ΔV_p^* e para o enrijecedor ΔV_s^* .

III.2. DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO DO FUNCIONAL DISCRETIZADO

Tendo definido o funcional total incremental discretizado de acordo com o item II.1.2, a forma de solução discreta, proposta neste trabalho pelas expressões II.10 e II.12, respectivamente para o painel e enrijecedor, pode ser substituída no funcional chegando-se a sua expressão explícita.

Essa tarefa foi desenvolvida através de ferramentas computacionais de álgebra simbólica, com a capacidade de fazer derivações, integrações definidas e outras operações algébricas [16], aproveitando a forma decomposta dos funcionais desenvolvida por FIGUEREIDO [14].

Devido a sua extensão o funcional total discretizado do modelo não é apresentado neste trabalho mas ficará disponível por meios magnéticos de gravação (Diskette de 5³/₄ ") devidamente compactados e com possibilidade de descompressão automática para seu uso dentro do sistema de "software" de álgebra computacional usado nesse trabalho: DERIVE [17].

III.3. DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES EQUILIBRIO

Definido o funcional discretizado do modelo, já integrado e somado em todas suas partes, pode-se aplicar à expressão III.27 o princípio de estacionaridade

$$\delta V^* = \delta \Delta V_p^* + \delta \Delta V_s^* = 0 \quad (\text{III.28})$$

onde o vetor de deslocamentos tem como elementos as amplitudes modais

$$\underline{u} = \underline{u} (u_1, u_2, u_4, u_5, v_2, v_3, v_5, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \quad (\text{III.29.1})$$

ou de forma generica

$$\underline{u} = \underline{u} (u_i) \quad (\text{III.29.2})$$

Associando a cada uma das componentes de \underline{u} às amplitudes u_i , a extremização de V^* , na sua forma discreta, conduz a

$$\frac{\partial V^* (\underline{u}, \lambda)}{\partial u_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 12 \quad (\text{III.30})$$

o qual gera um sistema de equações não-lineares de equilíbrio que representam o comportamento pós-crítico para

o painel enrijecido sem imperfeições iniciais. Cada equação é associada a uma amplitude de cada modo.

A inclusão de imperfeições iniciais nas equações é feita por substituição direta das amplitudes dos modos de imperfeições de mesma forma que os modos incrementais; isto será explicitado em III.4.

Da mesma maneira que o funcional as equações também foram obtidas através do uso de álgebra computacional e são apresentadas no APÊNDICE A deste trabalho.

É importante comentar que nas integrações definidas, aparecendo no funcional total do modelo, foram levados em conta os termos associados a um numero par ou ímpar de semi-ondas longitudinais, podendo-se obter desta maneira um modelo discretizado mais geral e menos restrito a condições tais como os apresentados em [3,14]. Deve-se enfatizar que este refinamento foi possibilitado pelas facilidades oferecidas pela álgebra computacional.

III.4. EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE EQUILÍBRIO COM IMPERFEIÇÕES GEOMETRICAS INICIAIS.

As imperfeições consideradas aqui são as associadas as amplitudes dos modos crítico w_2 e a do modo w_4 , que representa o duplo número de semi-ondas longitudinais, na expressão dos deslocamentos radiais W . As imperfeições geométricas iniciais, para a estrutura livre de tensões, são então tomadas na forma

$$\bar{w} = \bar{w}_2 \sin (q \xi) \cos (p \theta) + \bar{w}_4 \cos (2q \xi) \quad (\text{III.31})$$

Essas imperfeições são diretamente consideradas nas equações do modelo substituindo-se w_2 por w_{x2} , de modo que

$$w_{x2} = (w_2 + \bar{w}_2) \quad (\text{III.32})$$

e de maneira similar, w_4 substituindo-se por w_{y4} , sendo

$$w_{y4} = (w_4 + \bar{w}_4) \quad (\text{III.33})$$

Dessa forma o modelo passa a considerar as imperfeições geométricas iniciais, sendo que para o modelo perfeito deve-se anular os valores das imperfeições \bar{w}_2 e \bar{w}_4 .

III.5. CRITERIO DE PLASTICIDADE.

Para se detectar a ocorrência de início de plastificação local ao longo dos caminhos não-lineares pós-crítico ou imperfeito da estrutura sob comportamento elástico, é definido a seguir o critério de plasticidade que será empregado nesse trabalho.

O critério a ser empregado é o de ILYUSHIN [16] que, além de ser o critério mais empregado para definir a carga de plastificação em cascas, fornece para uma lei constitutiva elasto-plástica, resultados com as seguintes probabilidades : 6 % do lado da segurança e apenas 3^{1/2} % contra a segurança.

O critério é estabelecido definindo-se os seguintes parâmetros, a partir dos esforços internos do painel,

$$N_e = N_\xi^2 + N_\theta^2 - N_\xi N_\theta + 3 N_{\xi\theta}^2$$

$$M_e = M_\xi^2 + M_\theta^2 - M_\xi M_\theta + 3 M_{\xi\theta}^2$$

$$MN_e = M_\xi N_\xi + M_\theta N_\theta - 1/2 M_\xi N_\theta - 1/2 M_\theta N_\xi + 3 M_{\xi\theta} N_{\xi\theta}$$

$$N_o = \sigma_Y h_p$$

$$M_o = (\sigma_Y h_p^2) / 4$$

$$S = \frac{MN_e}{|MN_e|}$$

e definindo-se uma quantidade adimensional f

$$f = \frac{N_e}{N_o^2} + \frac{M_e}{M_o^2} + \frac{S MN_e}{\sqrt{3} M_o N_o} \geq 1$$

onde σ_y é a tensão de escoamento do material obtida no laboratório .

A detecção de início de plastificação, se faz sobre o ponto do painel onde acontece a combinação mais desfavorável de esforços internos. No modelo em questão pode-se definir este ponto em $\theta = 0$ no sentido transversal e onde tiver um pico de onda no sentido ξ longitudinal; ponto onde os deslocamentos críticos radiais serão máximos e a combinação com outros deslocamentos produzirá um máximo de esforços.

O fator f de plastificação é totalmente adimensional e denota a ocorrência da carga de plastificação para valores próximos a unidade. Este pode ser de fato, no caso de comportamento pós-crítico estável, o valor limite de resistência para uso seguro de um elemento estrutural, já que após ter-se alcançado este limite poderão ser iniciados mecanismos plásticos de colapso localizado com consequente perda de capacidade portante da estrutura.

CAPITULO IV

IMPLEMENTACAO COMPUTACIONAL DO MODELO

IV.1. INTRODUÇÃO

Com a solução numérica do sistema de equações não-lineares de equilíbrio, definidas no capítulo anterior, podem-se obter diversos pontos de equilíbrio e assim se traçar o caminho pós-crítico e o imperfeito. Para isto será usado o método de NEWTON-RAPHSON.

O algoritmo numérico parte de uma solução aproximada qualquer e, a partir daí, é feito o controle de um parâmetro que pode ser o de carregamento ou uma das amplitudes de deslocamento. Para cada ponto de equilíbrio a convergência numérica é alcançada, dentro de certa tolerância, após um certo número de iterações, sendo utilizada no teste de convergência a norma euclidiana calculada como vetor de amplitudes de deslocamentos.

De acordo com a expressão III.30, as equações são dadas por

$$EQ(x) = \frac{\partial V^*}{\partial u_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 12 \quad (IV.1)$$

onde

$$X = \{ u_i \} ; i = 1, 12 \quad (\text{IV.2.1})$$

ou ainda, por extenso, segundo a notação empregada nas expressões II.10 e II.12

$$X = \{ u_1, u_2, u_4, u_5, v_2, v_3, v_5, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \}^T \quad (\text{IV.2.2})$$

Para controlar a resolução do sistema emprega-se um parâmetro de controle (α) que pode ser o carregamento

$$\alpha = \bar{\lambda} \quad (\text{IV.3})$$

ou uma amplitude de deslocamento

$$\alpha = \bar{w}_2 \quad (\text{IV.4})$$

A n -ésima aproximação da solução é fornecida pelo algoritmo através da minimização do erro ε , definido por

$$\underline{\varepsilon}^m = \underline{x}^m - \underline{x} = - \underline{J}^{-1}(\underline{x}^m) \cdot \underline{EQ}(\underline{x}^m) \quad (\text{IV.5})$$

onde \underline{J} é o jacobiano do sistema de equações com a seguinte forma

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \underline{J} \\ \sim \\ \underline{X}^n \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_1^2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_1 \partial u_2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_1 \partial u_3} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_1 \partial w_2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_1 \partial w_5} \\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_1 \partial u_2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2^2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2 \partial u_3} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2 \partial w_2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2 \partial w_5} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2 \partial u_1} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2 \partial u_2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2 \partial u_3} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2^2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2 \partial w_5} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial u_1} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial u_2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial u_3} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial w_2} \quad \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5^2} \end{array} \\ \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{coluna do} \\ \text{modo } W_2 \end{array} \\
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (12 \times 12)
 \quad (IV.6)$$

e que define a direção da solução desejada de acordo a uma tolerância de cálculo pré-estabelecida, definida pela norma euclidiana do vetor de amplitudes dos deslocamentos $X(u_1)$, a ser comparada com o erro ϵ .

O jacobiano definido na expressão IV.6 será usado quando o parâmetro de controle é o carregamento, ou seja para $\alpha = \bar{\lambda}$; para o caso em que o parâmetro de controle é o deslocamento (no presente caso o deslocamento mais notório é w_2 , associado ao modo crítico) o jacobiano tem sua coluna

correspondente ao modo w_2 (assinalada na expressão IV.6) substituída pelo seguinte vetor coluna

$$\left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial u_1} & , & \frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial u_2} & , & \frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial u_3} & , & \dots & , & \frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial w_4} & , & \frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial w_5} \end{array} \right]^T$$

(VI.7)

IV.2. DEFINIÇÃO DO ALGORITMO COMPUTACIONAL

O algoritmo completo para o cálculo dos caminhos de equilíbrio da casca enrijecida é definido na figura IV.1. De forma geral o algoritmo calcula, para uma série de pontos, a solução das equações do modelo, seja pelo controle de deslocamentos ou de carga, calculando também o coeficiente de plasticidade para definir a carga de plastificação.

O programa desenvolvido no presente trabalho foi feito em linguagem FORTRAN 77, num computador de grande porte, o VAX 8810 do Núcleo de Computação eletrônica da URFJ. O programa é composto por várias subrotinas que são descritas na seguir :

Subrotina Datos

Esta subrotina lê os dados geométricos e elásticos da casca a ser analisada, assim como é definido o tipo de parâmetro de controle a ser empregado. Depois de fazer a leitura de dados calcula parâmetros necessários aos cálculos a serem feitos nas outras subrotinas.

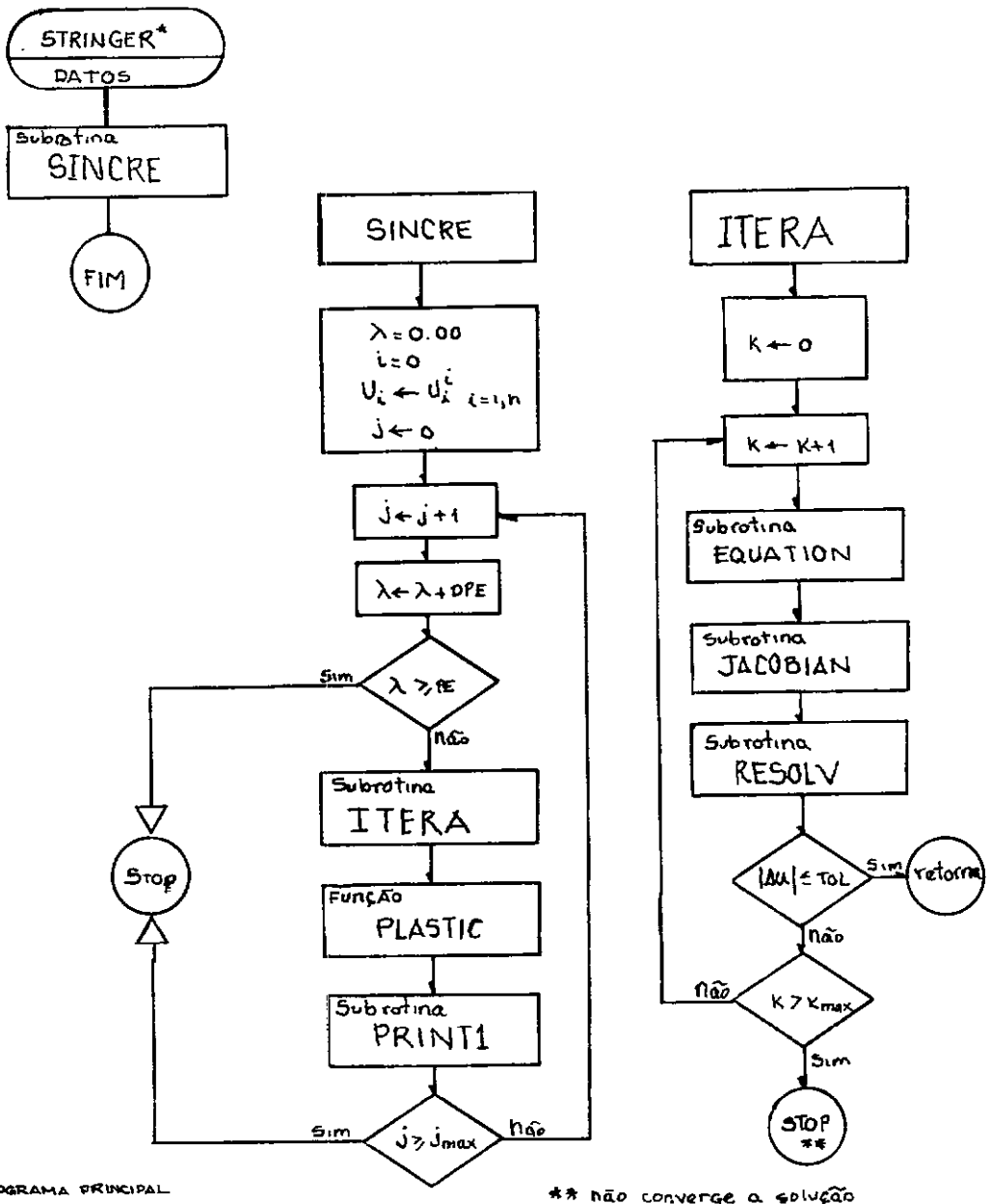


FIGURA IV.1

Subrotina Sincra

Esta unidade do programa faz o controle e gerenciamento do processo incremental de acordo com controle definido na Subrotina Datos; o funcionamento pode ser melhor entendido observando o algoritmo na figura IV.1.

Subrotina Itera

O controle do processo iterativo é feito nesta subrotina, a qual pertence a Subrotina Sincra e tem como subrotinas próprias : Equation , Jacobian e Resolv.

Subrotina Equation

Calcula o valor do vetor de equações EQ(X) a partir de um vetor de amplitudes de deslocamento e dos dados geométricos e elásticos da estrutura.

Subrotina Jacobian

Calcula o valor dos coeficientes da matriz jacobiana definida pela expressão IV.6 se o controle for carga ou pela expressão modificada IV.7 se controle de deslocamento.

Subrotina Resolv

Esta rotina faz a resolução do sistema definido por

$$\underset{\sim}{EQ} (\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{J} (\underset{\sim}{X}) \cdot \underset{\sim}{\epsilon}^m$$

através do uso de algoritmo de GAUSS , sendo feita uma reordenação das linhas do Jacobiano para evitar instabilidade numérica.

Subrotina Print1

Faz a impressão dos dados e dos resultados após a convergência de cada ponto de equilíbrio.

Function Plasti

Calcula para cada ponto de equilíbrio de acordo aos deslocamentos, os esforços internos e o fator de plasticidade adimensional segundo foi definido em III.5.

O programa em resumo calcula caminhos de equilíbrio pós-crítico de modelos perfeitos ou caminhos imperfeitos de equilíbrio para modelos com imperfeições geométricas iniciais, detectando a ocorrência de início de plastificação local.

CAPITULO V

RESULTADOS TEORICOS

V.1. INTRODUÇÃO

Apresentam-se a seguir alguns resultados numéricos obtidos com o modelo matemático proposto com o simples propósito de avaliar o comportamento estrutural não-linear pós-crítico, descrito por esse modelo de casca cilíndrica enrijecida longitudinalmente sob ação de compressão axial uniforme.

Como a intenção aqui não é a de se fazer um estudo paramétrico, são usados apenas os dados de duas cascas típicas que foram analisadas teoricamente e experimentalmente em trabalhos anteriores [2,3,18]. Diferentes modelos e soluções propostas são usadas na análise de cada uma delas, considerando-se tanto a situação geométrica perfeita quanto algumas combinações de imperfeições geométricas associadas ao modo crítico e ao modo axissimétrico com o dobro do número de ondas do modo crítico.

Adicionalmente foi feito uma análise para correlacionar a carga de flambagem com a excentricidade do enrijecedor.

O modelo implementado com 5 modos, pertencentes a solução em séries duplas dada por GONÇALVES [15], mostrou-se bastante instável numericamente para pequenas variações de parâmetros feitas num mesmo exemplo: na maioria dos casos ocorrem divergência numérica, em outros os resultados obtidos não tinham nenhum sentido físico.

Este modelo com 5 modos só ofereceu resultados numéricos para as duas geometrias de cascas aqui usadas e somente no caso de enrijecedores centrados em relação à superfície média da casca. Em função do comportamento numérico exibido pode-se concluir que esse modelo com 5 modos é muito sensível e uma solução para reduzir essa sensibilidade seria eliminar alguns modos da solução discreta.

A escolha definitiva nesse trabalho foi reduzir à 4 modos a solução modal discreta dos deslocamentos, a qual, já implementada, ofereceu resultados para variações geométricas de qualquer componente das cascas investigadas.

Por tanto os resultados apresentados aqui são baseados no modelo com uma solução discreta com 4 modos descrita assim :

$$U_p = u_1 \xi + u_2 \cos(q\xi) \cos(p\theta) + u_4 \sin(2q\xi)$$

$$V_p = v_2 \sin(q\xi) \sin(p\theta) + v_3 \sin(2p\theta) \quad (v.1)$$

$$W_p = w_1 + w_2 \sin(q\xi) \cos(p\theta) + w_3 \cos(2p\theta) + w_4 \cos(2q\xi)$$

Esta solução substitue a apresentada nas equações II.9, o que não modifica de maneira alguma o desenvolvimento algébrico do funcional total incremental, chegando-se a um novo sistema de 9 equações com seu respectivo jacobiano.

A estratégia para poder utilizar todo o desenvolvimento feito para a solução com 5 modos foi a de eliminar as equações relacionadas aos modos retirados e zerar, nas equações restantes, os valores associados às suas respectivas amplitudes.

Inicialmente apresentam-se as diferenças existentes entre a solução com 5 e 4 modos, e em seguida são apresentados os resultados para duas geometrias de cascas, as quais são definidas na tabela V.I.

TABELA V.1 Geometria e características das cascas cilíndricas analisadas.

CASCA	R/h_p	L/R	C/h_s	$\frac{h_p}{h_s}$	N	h_p (mm)	$\frac{E}{\text{mm}^2}$ $\frac{KN}{mm^2}$	ν	σ_y N/mm^2
A1	112.0	3.5	9.4	0.6	10	0.62	3.0	0.4	115
B2	280.0	1.6	8.1	1.0	20	0.81	210	0.3	324

V.2. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS PARA SOLUÇÕES DE 4 E 5 MODOS

Esta comparação é feita com a geometria da casca A1 e pode ser observada no gráfico V.1. Como pode ser visto nesse gráfico ambas as respostas pós-críticas são estáveis, sendo que a solução de 5 modos apresenta um grau de estabilidade ligeiramente menor do que à de 4 modos. Por outro lado é imperceptível a diferença entre as cargas críticas obtidas para cada uma das soluções.

O mesmo comportamento foi observado para a casca B2, ou seja, uma bifurcação simétrica de configuração estável, sem grandes diferenças entre as respostas pós-críticas obtidas com as soluções de 5 ou 4 modos, isto pode ser visto no gráfico V.2..

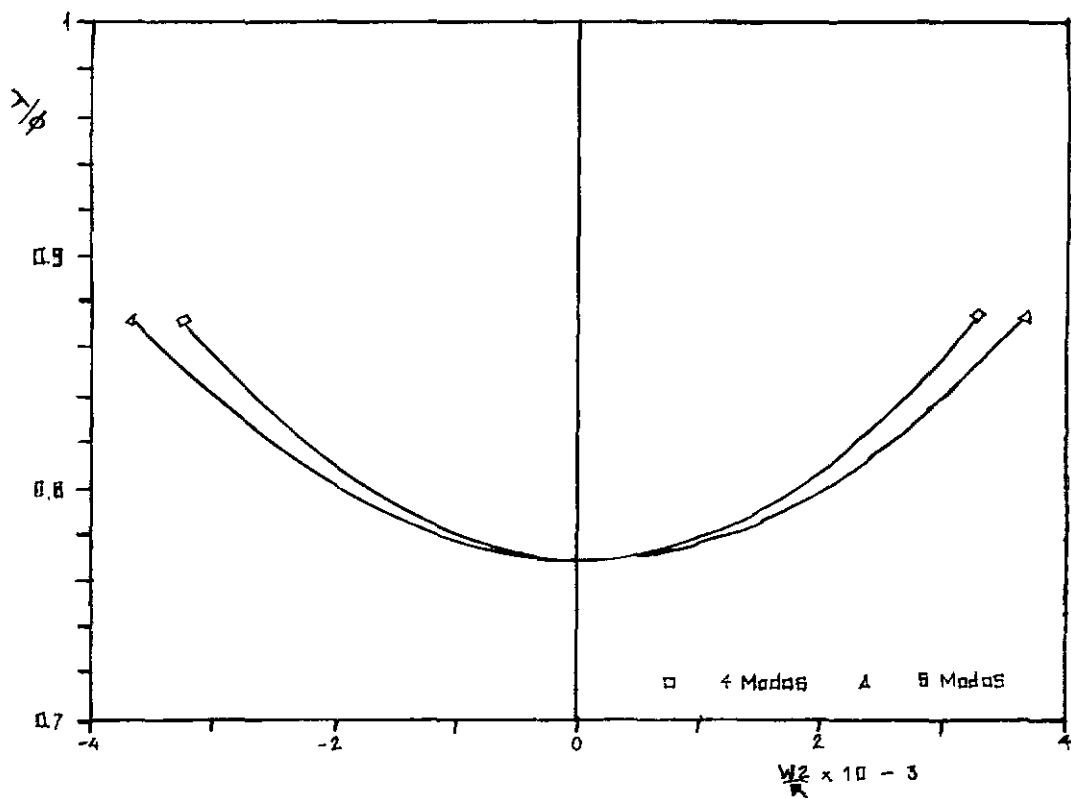


GRÁFICO V.1. COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES PARA 5 E 4 MODOS

(CASCA A1)

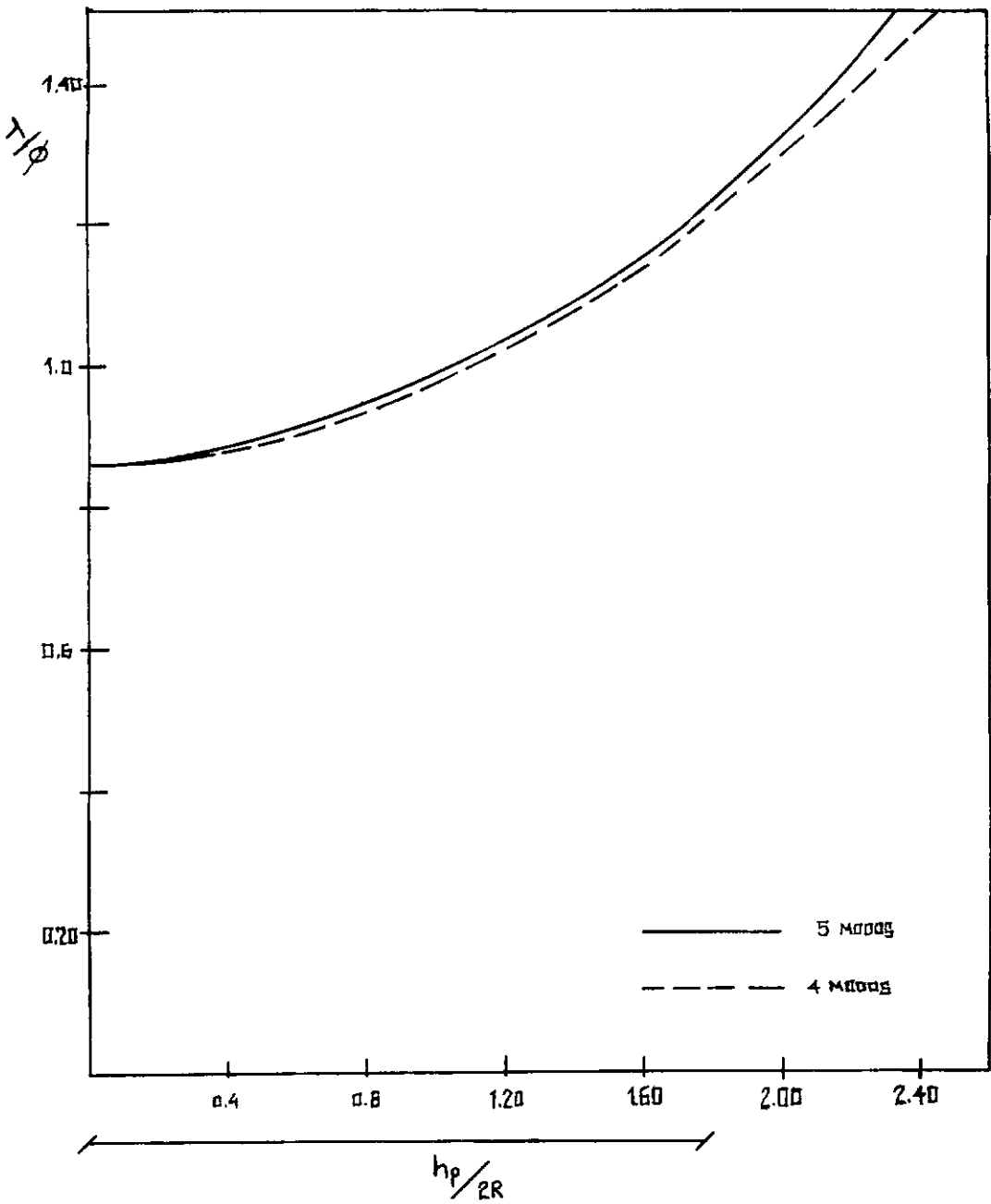


GRÁFICO V.2. COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES PARA 5 E 4 MODOS
(CASCA B2)

V.3. RESULTADOS DA CASCA A1

Esta casca é de Araldite e, por serem disponíveis resultados referidos a outras soluções modais e experimentais, torna-se um exemplo que permite se fazer um análise comparativa dos resultados obtidos com a presente solução.

Primeiro apresenta-se no Gráfico V.3 a comparação entre a solução modal dada por JUSTINO [3] e a obtida no presente trabalho; ambas soluções perfeitas. Embora sendo ambas as respostas estáveis e aproximadamente paralelas, as cargas críticas das duas soluções diferem muito, sendo de $\lambda/\phi = 0.50$ (sendo λ/ϕ o fator adimensional que relaciona carga crítica da casca enrijecida em relação a carga crítica da casca isotrópica sem enrijecedores) para a solução de JUSTINO [3] e de $\lambda/\phi = 0.77$ para a solução atual.

Fazendo-se uma análise numérica da casca A1 com imperfeições geométricas, observa-se no gráfico V.4 a pequena influência das imperfeições na obtenção da carga de colapso (carga de inicio de plastificação) assim como na obtenção dos caminhos pós-críticos de equilíbrio. Observa-se também no mesmo gráfico que o valor da carga de plastificação é de 2.90 vezes o valor da carga crítica clássica($\lambda/\phi = 1.0$). Este valor é alto devido à magnitude da tensão de escoamento utilizada nos cálculos.

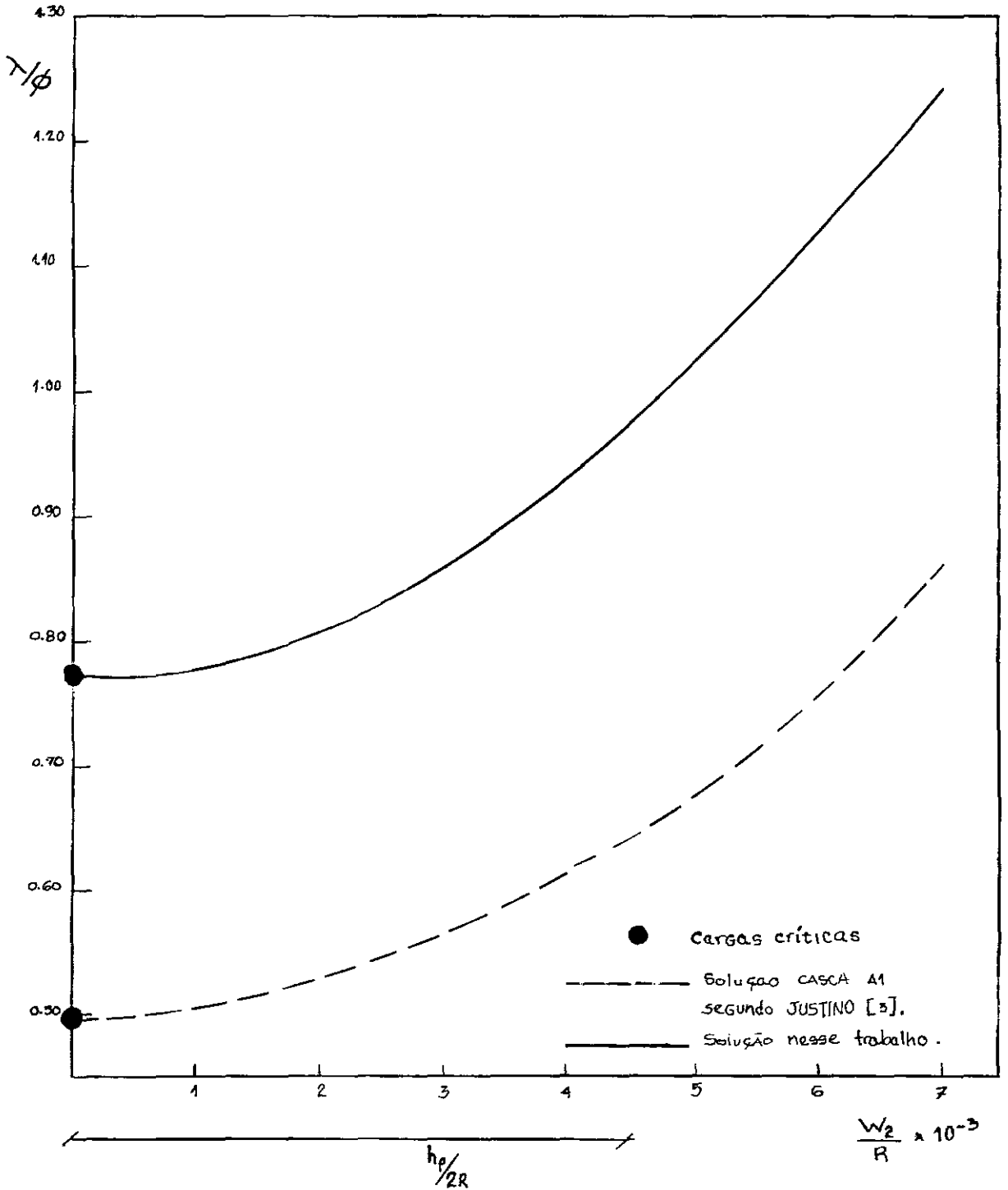


GRÁFICO V.3 CAMINHO PERFEITO DA CASCA A1

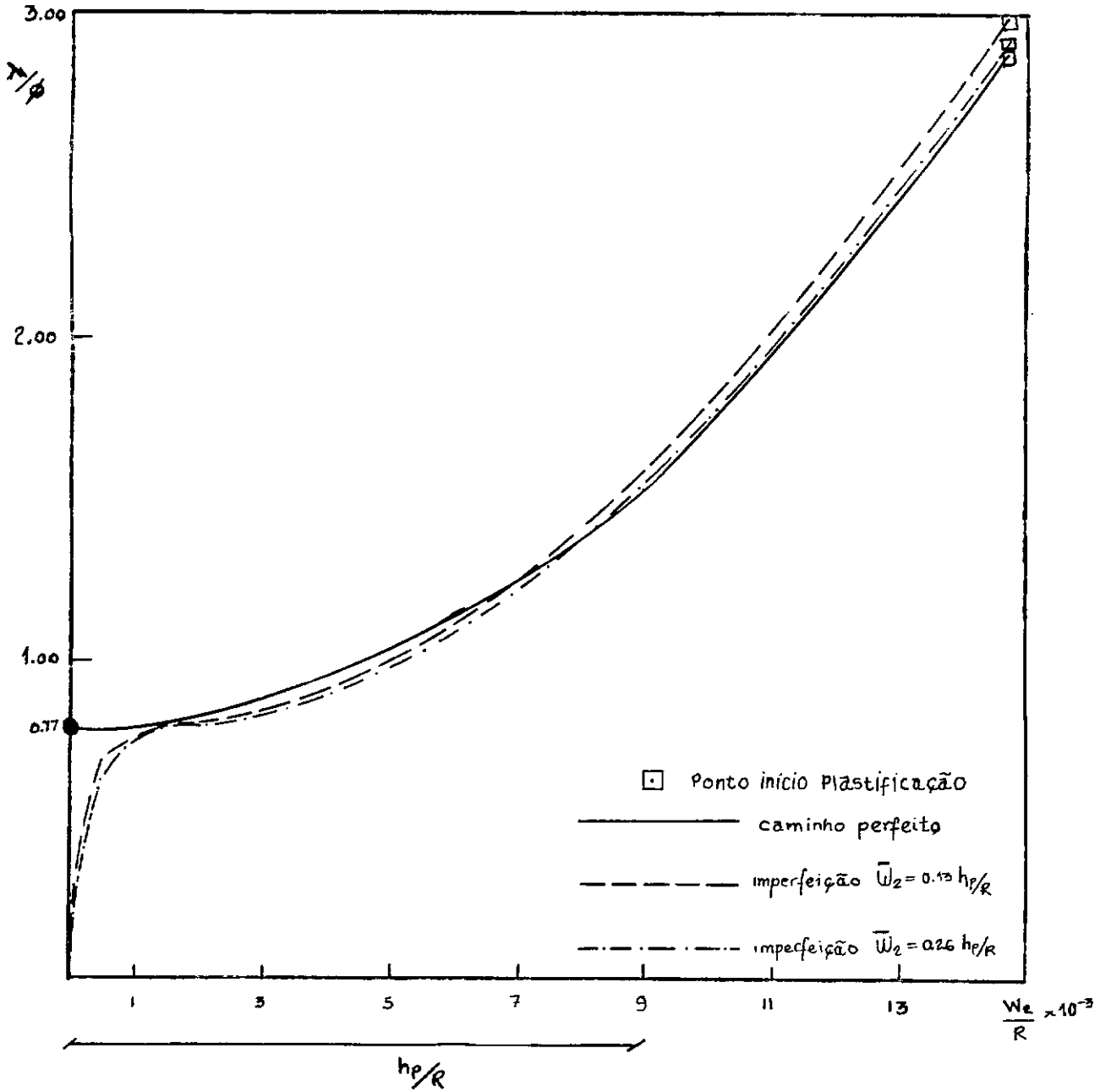


GRÁFICO V.4. CAMINHOS IMPERFEITOS DE EQUILÍBRIO CASCA A1

Por último, para a casca A1, apresenta-se no Gráfico V.5 a comparação de resultados teórico e experimental. A carga crítica obtida por Syngellakis & Walker [18] foi de 3.21 KN, sendo que carga para o aparecimento de flambagem num painel observada foi de 2.8 KN e a de colapso do modelo de aproximadamente 3.74 KN. Já no atual trabalho, a carga crítica calculada é de 5.63 KN e para o colapso aproximadamente de 5.90 KN.

Embora a atual estimativa teórica da carga de colapso seja bastante superior aquela medida experimentalmente, as respostas não-lineares se comparam, qualitativamente, de forma favorável. Além disso, devido a instabilidade numérica do modelo teórico, a amplitude de imperfeição imposta é muito menor do que aquelas estimadas para o modelo experimental.

Os valores de P e Δ definidos nesse Gráfico comparativo foram obtidos da maneira que se segue. A partir do parametro λ é obtida a tensão uniforme aplicada nos bordos da casca, expressa em Kn/mm^2

$$\sigma = \frac{\lambda E}{(1-\nu^2)}$$

Tendo-se o esforço σ pode-se calcular a carga P em KN através da soma das resultantes dos esforços internos nos extremos da casca e dos enrijecedores,

$$N_p = \sigma h_p$$

$$N_s = \sigma h_s$$

$$P = N_p^2 \pi R + N_s^2 C N$$

Para o cálculo do encurtamento axial basta substituir as amplitudes correspondentes ao parametro de carga λ e obter o deslocamento adimensional u , o qual será o deslocamento Δ multiplicado pelo raio R da casca.

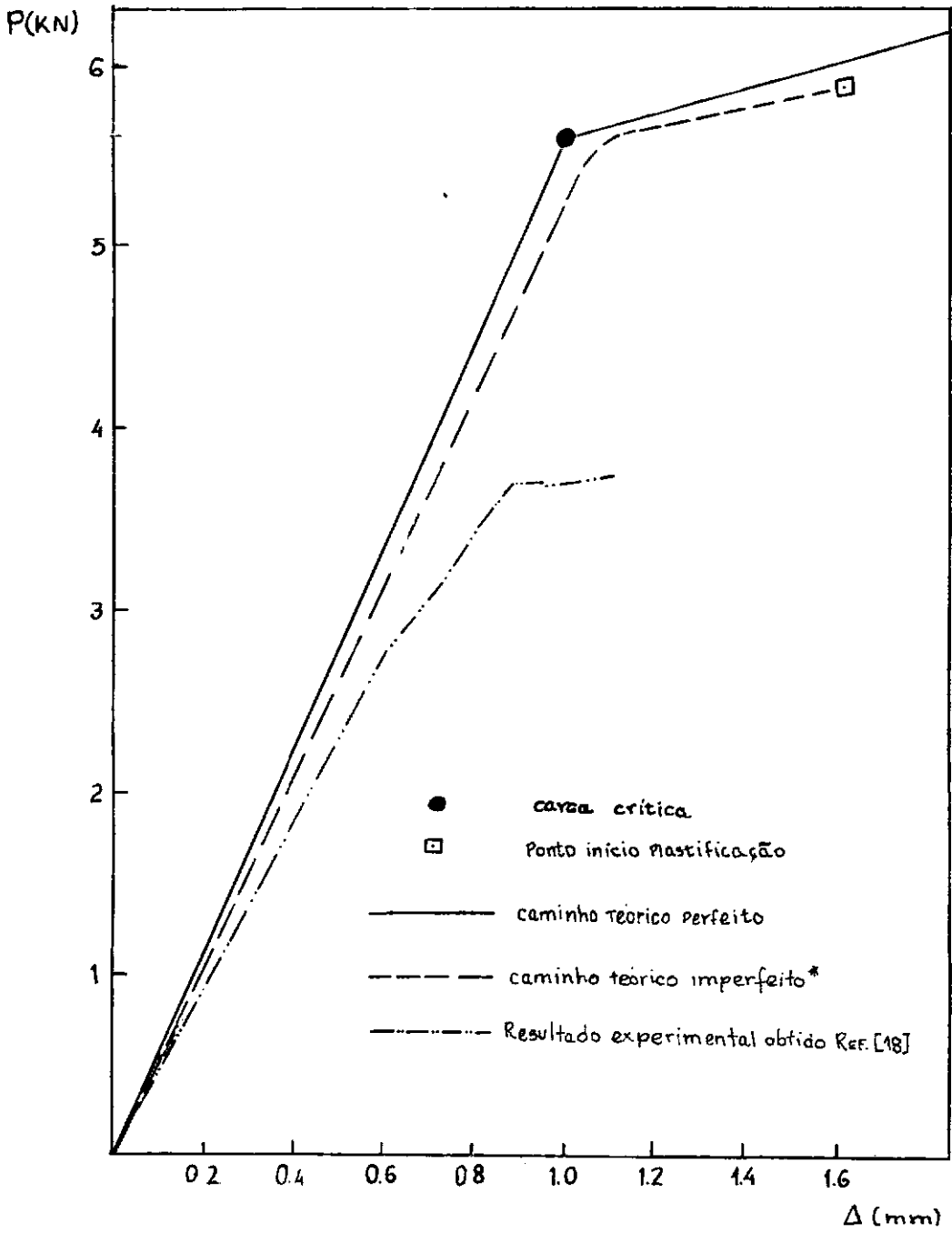


GRÁFICO V.5 COMPARAÇÃO TEORICA-EXPERIMENTAL CASCA A1

V.4. RESULTADOS DA CASCA B2.

Esta casca é de aço (material de uso comum em estruturas "offshore", marítimas e industriais) e no Gráfico V.6 apresenta-se a solução obtida aqui comparada com a de JUSTINO [3] .

A carga crítica aqui obtida $\lambda/\phi = 0.87$ é menor que a de JUSTINO $\lambda/\phi = 0.96$ e ambas são menores, que a carga crítica clássica $\lambda/\phi = 1.0$ correspondente a casca isotrópica. Similarmente aos resultados da casca anterior observa-se a pouca influência das imperfeições no cálculo da carga de início de plastificação $\lambda/\phi = 1.30$, já que esta última ocorre ao longo do ramo assintótico ao caminho perfeito.

O Gráfico V.7 mostra uma comparação entre a resposta teórica imperfeita aqui obtida e a resposta experimental Ref. [2]. A primeira observação que pode ser feita em relação a essas respostas é a grande diferença entre a estimativa teórica de colapso e a carga experimental correspondente. Entretanto, tal diferença parece decorrer, além das aproximações do modelo matemático adotado, dos seguintes fatos :

a) as imperfeições geométricas observadas na casca [2] alcançavam 2 vezes a sua espessura e eram localizados nos painéis; vide ponto 1 da curva experimental

b) essas imperfeições localizadas induziram um colapso precoce dos painéis; vide ponto 2 da curva experimental

c) a amplitude de imperfeição imposta no modelo teórico é cerca de 20 vezes menor que as medidas experimentalmente, já que imperfeições de maiores magnitudes provocam, no presente modelo, instabilidade numérica.

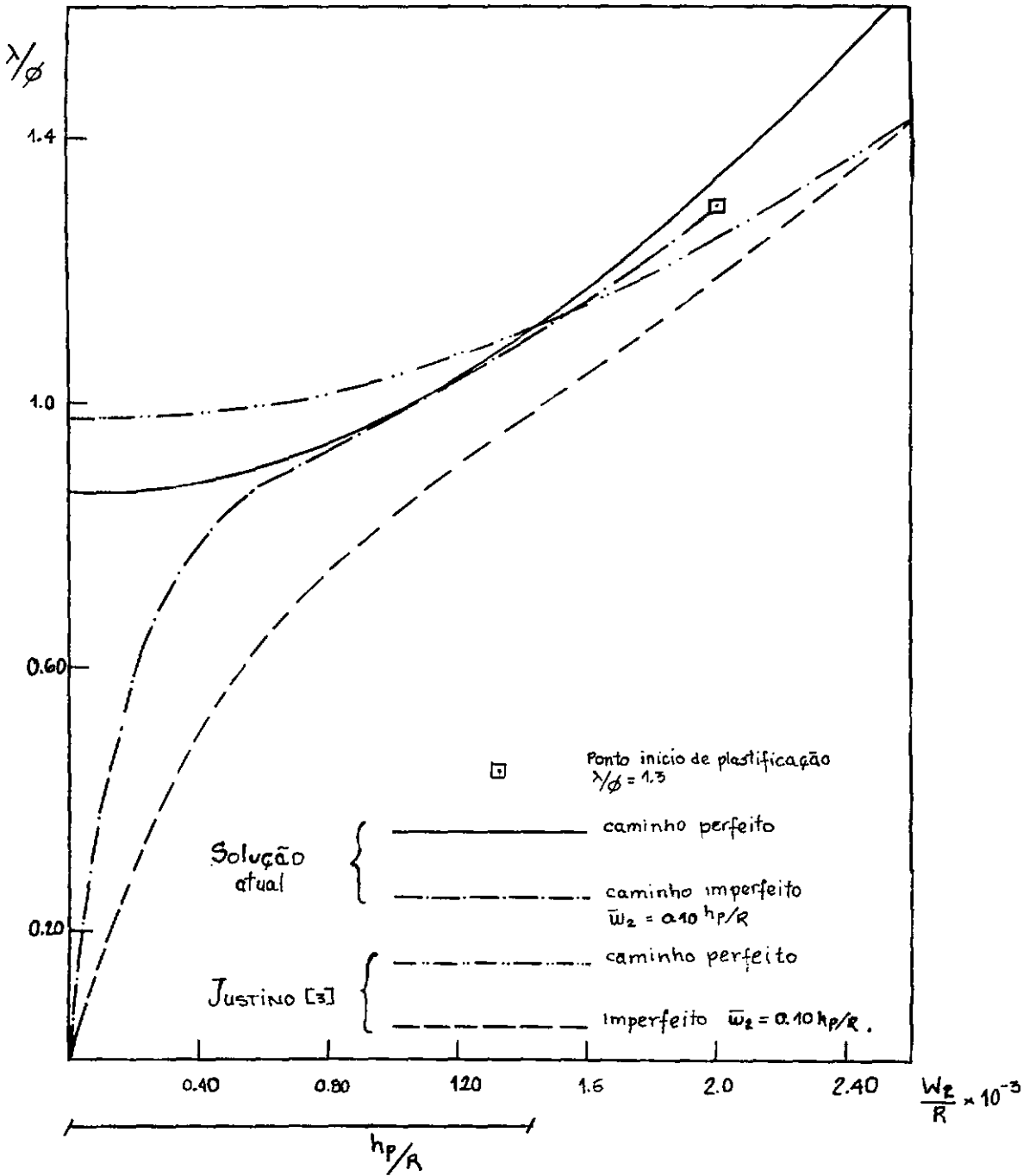


GRÁFICO V.6 CAMINHOS DE EQUILÍBRIO CASCA B2

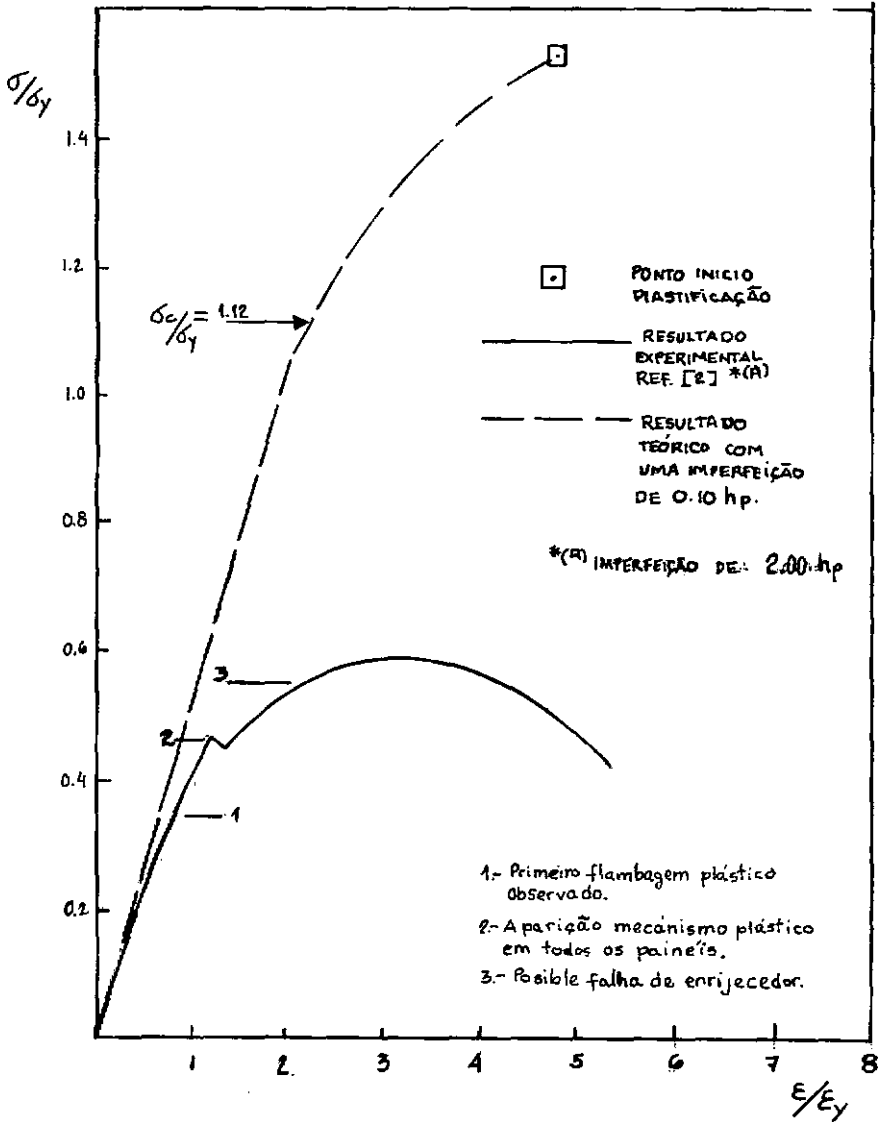


GRÁFICO V.7 COMPARAÇÃO TEORICA-EXPERIMENTAL CASCA B2

V.5. INFLUENCIA DA EXCENTRICIDADE DO ENRIJECEDOR.

Uma análise numérica feita para correlacionar o parâmetro de carga crítica λ/ϕ com a excentricidade do enrijecedor em relação a superfície média da casca, ofereceu os resultados que são apresentados no Gráfico V.8. Esse Gráfico mostra que ,em geral, o melhor é a colocação de enrijecedores na parte interior da casca, i.e. excentricidade negativa na direcção radial. Pode-se observar que a excentricidade ótima é igual aproximadamente a 0.30 - 0.40 do valor da semi-largura, C, do enrijecedor.

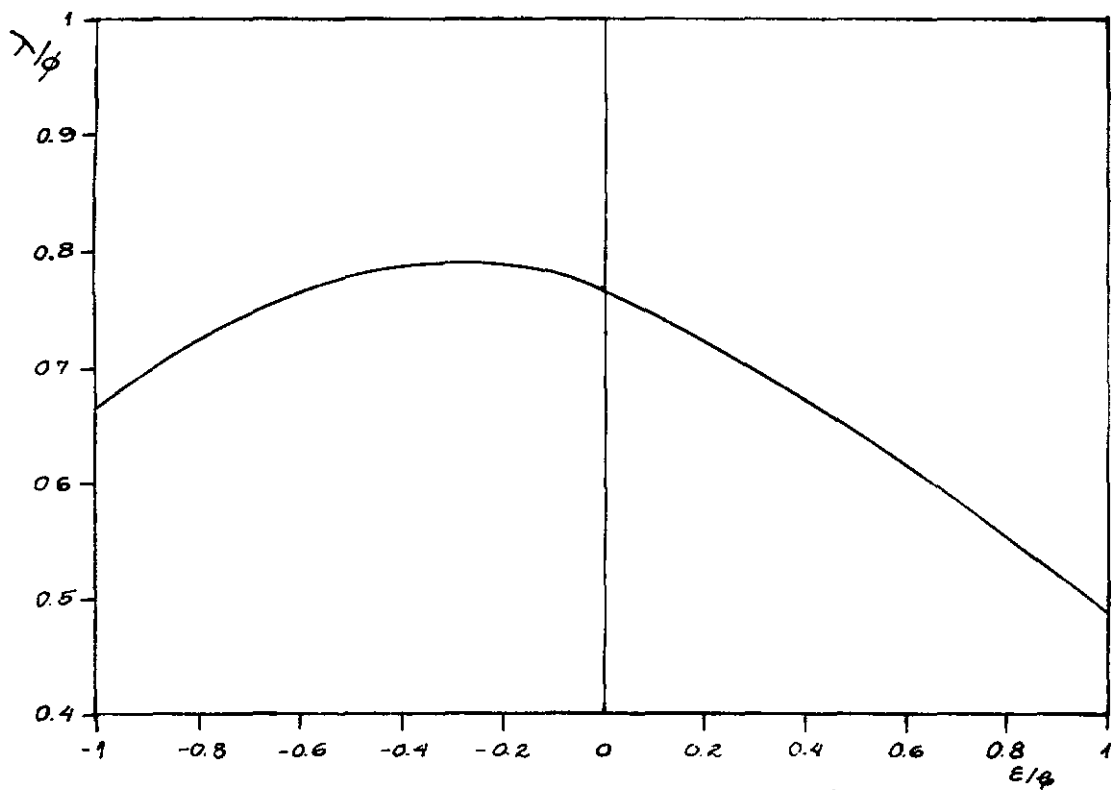


GRÁFICO V.8 EXCENTRICIDADE DO ENRIJECEDOR vs. CARGA CRÍTICA

CAPITULO VI
COMENTARIOS FINAIS

Foi realizado no presente trabalho uma análise não-linear sobre a estabilidade elástica em cilindros enrijecidos longitudinalmente sob compressão axial. Considerando-se imperfeições geométricas iniciais nos modos principais da solução e a carga de início de pastificação é obtida ao longo do caminho não-linear de equilíbrio.

Para as geometrias aqui analisadas as respostas não-lineares foram sempre simétricas estáveis, as quais parecem depender do número par ou ímpar de semi-ondas longitudinais adotado. Observa-se que, na maioria dos casos analisados, um número par de semi-ondas é que permitiu resultados numéricos mais confiáveis.

As imperfeições geométricas iniciais têm pequena influência nas respostas não-lineares, assim como na obtenção da carga de colapso referida ao início de plastificação.

As diferenças entre as cargas de colapso obtidas com o presente modelo e as respectivas experimentais, parecem devidas, principalmente, ao fato do modelo ser numericamente instável para imperfeições maiores que 0.50 da espessura da casca.

A utilização de 4 ou 5 modos, ou de mais modos, não altera o comportamento pós-crítico sempre estável das cascas enrijecidas. Pelo contrario, a adoção de mais modos só cria problemas numéricos para a obtenção de respostas.

As condições de contorno nos extremos da casca foram aproximadamente atendidas pela solução discreta utilizada. Quando as condições de apoio simples são embutidas, ou forçadas, na solução discreta escolhida só se produzem ganhos de rigidez, além de problemas numéricos.

Para poder evitar o problema numérico de solução para maiores imperfeições, e na intenção de se fazer um estudo paramétrico que defina valores de projeto, é recomendável adotar uma solução discreta com apenas 3 modos, a qual não traria mudanças no comportamento estável das cascas enrijecidas e não causaria instabilidade numérica.

Uma outra possibilidade para estudar os comportamentos local e global, das cascas enrijecidas longitudinalmente, seria através do método dos Elementos Finitos usando a formulação oferecida por Antonini [22].

Mas, observando as discrepâncias entre as respostas experimentais e teóricas e , além disso, as dificuldades inerentes à modelagem em elementos finitos para uma análise não-linear, seria preferível a busca da solução deste problema através de modelos analíticos simplificados :

a) modelo elástico com apenas 3 modos combinados e energia potencial reduzida, i.e. desprezando-se as parcelas de energia que são minadas pela interação entre modos no processo de flambagem da casca imperfeita (vide, por exemplo resultados para cascas isotrópicas apresentadas por BATISTA [11,12] e ANTONINI [1]).

b) modelo elasto-plástico de painéis largos de pequena curvatura, os quais têm comportamento similar aos de uma placa (vide, por exemplo, resultados apresentados por WALKER [19]).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] - ANTONINI, R.C. Influência da interação entre modos e Imperfeições na Flambagem de Cascas Cilíndricas Axialmente Comprimidas; Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, 1981.
- [2] - WALKER, A.C.; KEMP, P. Buckling of Stringer Stiffened Welded Steel Cylinders, Discussion Of BOSS Conference, Norwegian Inst. Of Technology, 1976.
- [3] - JUSTINO FILHO, M.R. Estabilidade Local de Painéis Cilíndricos Enrijecidos; Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, 1982.
- [4] - KOITER, W.T. Buckling and Post-Buckling Behaviour of a Cylindrical Panel Under Axial compression; NLR Rep. 5476, Rep. Trans., Aero Res. Int., 20, 1956. 56.
- [5] - SINGER, J.; ARBOCZ, J.; BABOCK, C.D. Buckling of Imperfect Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression; AIAA Journal, vol. 9, number 1, pp. 68-75, June, 1970.
- [6] - HUTCHINSON, J.W.; AMAZIGO, J.C. Imperfection Sensivity of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells; AIAA Journal, Vol. 5, pp. 392-401, 1967.
- [7] - ARBOCZ, J.; SCHELLER, E.E. On the Buckling of stiffened Imperfect Shells; AIAA Journal, 14, pp. 1611-1617, Nov., 1976.

- [8] - ARBOCZ, J.; WILLIAMS, J.G. Imperfections Surveys on a 10 tf - diameter Shells Structures; AIAA Journal, 15, number 1, pp. 949-956, July, 1977.
- [9] - SINGER, J.; HAFTKA, R. Buckling of Discretely Stringer Stiffened Cylindrical Shells and Elastically Restrained Panels; TAE report Number 91, Technion, Haifa, 1974.
- [10] - WANG, J.T.; LIN, Y. Stability of Discretely Stringer Stiffened Cylindrical Shells; AIAA Journal, vol. 11, No. 1, pp. 810-814, June, 1973.
- [11] - BATISTA, R.C. Lower Bound Estimates for Cylindrical Shell Buckling; Ph.D. Thesis, University College, London, 1979.
- [12] - BATISTA, R.C.; ELLINAS, C.P.; CROLL, G.A. Overall Buckling of stringer Stiffened Cylinders; Proc. Instn.Civ. Engrs, Part 2,71, pp. 479-512, June, 1981.
- [13] - GONÇALVES, P.B. Instabilidade e Sensibilidade de Cascas Cilíndricas Circunferencialmente Enrijecidas; Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, 1983.

- [14] - FIGUEIREDO, C.C. Um Modelo Matemático para Estabilidade Elástica de Cascas Cilíndricas Enrijecidas; Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, 1988.
- [15] - GONÇALVES, P.B. Interação Dinâmica Não-Linear entre Fluido e Casca Delgadas; Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, 1987.
- [16] - SANTEE, D.M. Estudo de Acoplamento Modal, da Quebra de Simetria e das Distribuições de Energia na Perda de Estabilidade de Cascas Cilíndricas Sob a Ação de Cargas Combinadas; Tese M.Sc., Dpto. Eng. Civil/ PUC ,R.J. , 1988.
- [17] - DERIVE, A Mathematical Assistant Version 1.20, SOFTWARE WAREHOUSE, Hawaii, 1988, USA.
- [18] - SYNGELLAKIS, S.; WALKER, A.C. Elastic Buckling of Stiffened Cylindrical Shells; Int. Symp. on the Integrity of Offshore Structures, Glasgow, 1978.
- [19] - WALKER, A.C.; SRIDHRAN, S. Analysis of the Behaviour of Axially Compressed Stringer-stiffened Cylindrical Shells, Proc. Inst. Civ. Eng., Part 2, pp. 447-472, June, 1980.

[20] - WALKER, A.C.; ANDRONICOU,A.; SRIDHRAN, S.
Experimental Investigation Of the Buckling of stiffened
Shells using Small Scale Models; Buckling of shells in
offshore structures - An International Conference, Imperial
College of Science & Technology, London, April, 1981.

[21] - TIMOSHENKO, S.P.; GERE J.M. Theory of Elastic
Stability, McGraw-Hill, 2nd Edition, 17th printing, 1985.

[22] - ANTONINI, RICARDO COSCARELLI Uma formulação
discretizada da teoria da estabilidade elástica para
análise estrutural via elementos finitos; Tese D.Sc.,
COPPE/UFRJ.

LISTA DE SIMBOLOS

C.....semi-profundidade do enrijecedor.

e_sexcentricidade do enrijecedor.

E.....Módulo de Young.

h_pespessura da casca ou painel cilíndrico.

h_sespessura do enrijecedor.

$\lambda = \frac{\sigma (1-\nu^2)}{E}$ parâmetro de carga adimensional.

$\sigma_c = \frac{E h_p}{R [3(1-\nu^2)]^{1/2}}$ Tensão crítica clássica do cilindro isotrópico.

σ_ytensão de escoamento do material à compressão.

R.....raio da superfície média da casca.

N.....número de enrijecedores.

p.....número de ondas no sentido circunferencial

θ_0semi-ângulo entre enrijecedores.

$\gamma = C/R$semi-profundidade adimensional do enrijecedor.

$\epsilon = e_s/R$excentricidade adimensional do enrijecedor

u_p, v_p, w_pdeslocamentos do painel.

u_s, v_s, w_sdeslocamentos do enrijecedor.

u_i, v_i, w_i ($i=1,5$) amplitudes dos deslocamentos.

$\phi = \frac{\sigma_c (1 - \nu^2)}{E}$...parâmetro adimensional de carga crítica

U_p, U_s Energia potencial total do painel e do enrijecedor, respectivamente

Δ Encurtamento longitudinal da casca

Ω_p, Ω_s Energia potencial de cargas externas do painel e do enrijecedor

APENDICE A

Aqui é explicado como foram desenvolvidas as equações não-lineares de equilíbrio definidas nesse trabalho. O funcional discretizado, já integrado e simplificado, assim como as equações e o jacobiano correspondente, todos eles nas suas formas explícitas, encontram-se armazenados num mesmo disco magnético de 5 1/4 " de Dupla Densidade de maneira compactada. Para acessar esta informação precisa-se apenas de ter o disco correspondente no qual encontram-se os arquivos

Integaux.exe

Equation.exe

Jacobian.exe

todos eles descompactáveis de maneira automática, executada dentro de um disco magnético de capacidade mínima de 5 MegaBytes. Para esses arquivos na hora de serem executados serão criados, arquivos expandidos correspondentes: ao funcional discreto total, às equações, e aos termos que compõem o Jacobiano. No total eles geram 251 arquivos expandidos para serem usados dentro do "software" DERIVE numa área de memória aproximada de 421 KBytes.

Como exemplo mostraremos os arquivos correspondentes às equações definidas como $EQ1 = \partial V^* / \partial u_1$ e $EQ2 = \partial V^* / \partial u_2$,

os quais estão compreendidos no arquivo EQUATION.EXE, como nas páginas 75 a 81.

Ditos arquivos já descompactados podem ser vistos dentro do Programa DERIVE e podem ser impressos com poucas instruções necessárias que podem ser obtidas no manual do Usuario do DERIVE.

As outras dez equações não-lineares de equilíbrio (de um total de doze) não são apresentadas pois ocupariam mais de 35 páginas. Estando essas equações disponíveis em disco magnético torna-se, portanto desnecessário reproduzi-las aqui por extenso.

EQUAÇÃO ASSOCIADA A AMPLITUDE U_1 (EQ1)

$$1: \text{eq1} = \text{DIF}(vp + vs, u1)$$

$$2: \frac{2 \text{ ep } p \text{ w2 } w5 \text{ COS}(3 \text{ l } q) \text{ SIN}(3 \text{ b0 } p)}{9 \text{ q}} + \frac{2 \text{ q } w2 \text{ w5 } \text{ COS}(3 \text{ l } q) \text{ SIN}(3 \text{ b0 } p)}{9 \text{ p}} + \frac{4 \text{ ep } p \text{ w2 } w3 \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(3 \text{ b0 } p)}{3 \text{ q}}$$

$$- \frac{2 \text{ ep } p \text{ w2 } w5 \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(3 \text{ b0 } p)}{3 \text{ q}} + \frac{2 \text{ q } w2 \text{ w5 } \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(3 \text{ b0 } p)}{3 \text{ p}} - \frac{4 \text{ ep } p \text{ w2 } w3 \text{ SIN}(3 \text{ b0 } p)}{3 \text{ q}} + \frac{4 \text{ e}}{3 \text{ q}}$$

$$- \frac{p \text{ p } w2 \text{ w5 } \text{ SIN}(3 \text{ b0 } p)}{9 \text{ q}} - \frac{8 \text{ q } w2 \text{ w5 } \text{ SIN}(3 \text{ b0 } p)}{9 \text{ p}} - 2 \text{ ep } l \text{ p } w3^2 \text{ SIN}(2 \text{ b0 } p) \text{ COS}(2 \text{ b0 } p) - \text{ ep } l \text{ p } w5^2 \text{ SIN}(2 \text{ b0 } p)$$

$$\text{COS}(2 \text{ b0 } p) + \frac{l \text{ q } w5^2 \text{ SIN}(2 \text{ b0 } p) \text{ COS}(2 \text{ b0 } p)}{p} + \frac{2 \text{ ep } l \text{ w3 } \text{ SIN}(2 \text{ b0 } p)}{p} + 4 \text{ ep } l \text{ v3 } \text{ SIN}(2 \text{ b0 } p) + \frac{4 \text{ l } q^2}{3 \text{ q}}$$

$$- \frac{w4 \text{ w5 } \text{ SIN}(2 \text{ b0 } p)}{p} - \frac{\text{ ep } l \text{ p } w2^2 \text{ SIN}(b0 \text{ p}) \text{ COS}(b0 \text{ p})}{2} + \frac{l \text{ q } w2^2 \text{ SIN}(b0 \text{ p}) \text{ COS}(b0 \text{ p})}{2 \text{ p}} - \frac{2 \text{ ep } p \text{ w2 } w5 \text{ COS}(3 \text{ l } q) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{3 \text{ q}}$$

$$+ \frac{4 \text{ q } w2 \text{ w4 } \text{ COS}(3 \text{ l } q) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{3 \text{ p}} + \frac{2 \text{ q } w2 \text{ w5 } \text{ COS}(3 \text{ l } q) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{3 \text{ p}} - \frac{4 \text{ ep } p \text{ w2 } w3 \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{q}$$

$$- \frac{\text{SIN}(b0 \text{ p})}{q} - \frac{2 \text{ ep } p \text{ w2 } w5 \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{q} - \frac{4 \text{ ep } w2 \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{p \text{ q}} - \frac{4 \text{ ep } v2 \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{q}$$

$$+ \frac{4 \text{ q } w2 \text{ w4 } \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{p} + \frac{2 \text{ q } w2 \text{ w5 } \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{p} + \frac{4 \text{ u2 } \text{ COS}(1 \text{ q}) \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{p} + \frac{4 \text{ ep } p \text{ w2 } w3}{q}$$

$$- \frac{\text{SIN}(b0 \text{ p})}{3 \text{ q}} - \frac{4 \text{ ep } p \text{ w2 } w5 \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{3 \text{ q}} + \frac{4 \text{ ep } w2 \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{p \text{ q}} + \frac{4 \text{ ep } v2 \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{q} - \frac{16 \text{ q } w2 \text{ w4 } \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{3 \text{ p}} - \frac{8}{3 \text{ p}}$$

$$- \frac{q \text{ w2 } w5 \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{3 \text{ p}} - \frac{4 \text{ u2 } \text{ SIN}(b0 \text{ p})}{p} + \frac{b0 \text{ ep } l \text{ p } w2^2}{2} + 4 \text{ b0 } \text{ ep } l \text{ p } w3^2 + 2 \text{ b0 } \text{ ep } l \text{ p } w5^2 + 4 \text{ b0 } \text{ ep } l \text{ w1} +$$

$$- \frac{b0 \text{ l } q^2 \text{ w2}^2}{2} + 4 \text{ b0 } l \text{ q } w4^2 + 2 \text{ b0 } l \text{ q } w5^2 + 4 \text{ b0 } l \text{ u1} + \text{ ep } g \text{ l } p \text{ w2}^2 + 4 \text{ ep } g \text{ l } w1 - 4 \text{ ep } g \text{ l } w3 + \text{ esr } g \text{ l } p \text{ q}^2$$

$$- \text{w2}^2 - 2 \text{ esr } g \text{ l } p \text{ q}^2 \text{ v2 } w2 + \frac{3 \text{ l } p \text{ q}^2 \text{ w2}^2}{3} + g \text{ l } q \text{ v2}^2 + 4 \text{ g } l \text{ u1}$$

EQUAÇÃO ASSOCIADA A AMPLITUDE U2 (EQ2)

1: E02 := DIF (vp + vs, u2)

$$\begin{aligned}
 2: & - \frac{q^2 w^2 \cos(5 l q) \sin(5 b \theta p)}{5 \theta p} + \frac{q^2 w^2 \cos(3 l q) \sin(5 b \theta p)}{3 \theta p} + \frac{q^2 w^2 \cos(l q) \sin(5 b \theta p)}{5 p} - \frac{16 q^2 w^2}{p} \\
 & - \frac{5^2 \sin(5 b \theta p)}{75 p} + \frac{1 q^3 w^2 w^5 \sin(4 b \theta p)}{8 p} - \frac{2 q^2 w^4 w^5 \cos(5 l q) \sin(3 b \theta p)}{15 p} - \frac{q^2 w^5 \cos(5 l q) \sin(3 b \theta p)}{3 \theta p} \\
 & - \frac{2 e p p u^5 \cos(3 l q) \sin(3 b \theta p)}{9 q} + \frac{e p w^5 \cos(3 l q) \sin(3 b \theta p)}{9 p} + \frac{2 p u^5 \cos(3 l q) \sin(3 b \theta p)}{9 q} \\
 & - \frac{2 q^2 w^4 w^5 \cos(3 l q) \sin(3 b \theta p)}{9 p} + \frac{q^2 w^5 \cos(3 l q) \sin(3 b \theta p)}{18 p} + \frac{2 q u^5 \cos(3 l q) \sin(3 b \theta p)}{9 p} + \frac{2^2}{p} \\
 & - \frac{v^5 \cos(3 l q) \sin(3 b \theta p)}{9} - \frac{2 e p p u^5 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3 q} + \frac{2 e p w^3 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3 p} - \frac{e p w^5 \cos(l q)}{p} \\
 & - \frac{q \sin(3 b \theta p)}{3 p} + \frac{4 e p v^3 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3} - \frac{4 e p v^5 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3} + \frac{2 p u^5 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3 q} \\
 & - \frac{v^5 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3} + \frac{4 q^2 w^4 w^5 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3 p} + \frac{q^2 w^5 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3 p} - \frac{2 q u^5 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3 p} + \frac{2^2}{p} \\
 & - \frac{v^5 \cos(l q) \sin(3 b \theta p)}{3} + \frac{8 e p p u^5 \sin(3 b \theta p)}{9 q} - \frac{2 e p w^3 \sin(3 b \theta p)}{3 p} + \frac{2 e p w^5 \sin(3 b \theta p)}{9 p} - \frac{4 e p v^3}{p} \\
 & - \frac{\sin(3 b \theta p)}{3} + \frac{4 e p v^5 \sin(3 b \theta p)}{3} - \frac{8 p u^5 \sin(3 b \theta p)}{9 q} - \frac{64 q^2 w^4 w^5 \sin(3 b \theta p)}{45 p} - \frac{16 q^2 w^5 \sin(3 b \theta p)}{45 p} \\
 & - \frac{4 q u^5 \sin(3 b \theta p)}{9 p} - \frac{8 v^5 \sin(3 b \theta p)}{9} + \frac{1 q^3 w^2 w^5 \sin(2 b \theta p)}{2 p} + \frac{2 q^2 w^2 \cos(l q)^3 \sin(b \theta p) \cos(b \theta p)}{9 p} \\
 & - \frac{b \theta p^2}{p} - \frac{2 q^2 w^2 \sin(b \theta p) \cos(b \theta p)^2}{9 p} + e p l p u^2 \sin(b \theta p) \cos(b \theta p) - \frac{e p l q w^2 \sin(b \theta p) \cos(b \theta p)}{p} \\
 & - \frac{2 e p l q v^2 \sin(b \theta p) \cos(b \theta p) - 1 p u^2 \sin(b \theta p) \cos(b \theta p)}{p} + \frac{1 q^3 w^2 w^4 \sin(b \theta p) \cos(b \theta p)}{p} + \frac{1 q^2 u^2 \sin(b \theta p) \cos(b \theta p)}{p} \\
 & - \frac{(b \theta p) \cos(b \theta p)}{p} + \frac{1 q v^2 \sin(b \theta p) \cos(b \theta p)}{p} - \frac{2 q^2 w^4 \cos(5 l q) \sin(b \theta p)}{5 p} - \frac{2 q^2 w^4 w^5 \cos(5 l q) \sin(b \theta p)}{5 p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(b_0 p)^2}{q w_5^2 \cos(5 l q) \sin(b_0 p)} + \frac{2 e p p u_5 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 q} + \frac{2 e p w_4 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 p} \\
& \frac{e p w_5 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 p} + \frac{4 e p v_5 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3} - \frac{2 p u_5 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 q} + \frac{2 q w_4^2 \cos^2(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 p} \\
& \frac{(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 p} + \frac{2 q w_4 w_5 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 p} + \frac{2 q w_5^2 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 p} + \frac{4 q u_4 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 p} \\
& \frac{\sin(b_0 p)}{3 p} + \frac{2 q u_5 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3 p} - \frac{2 v_5 \cos(3 l q) \sin(b_0 p)}{3} + \frac{4 q w_2^2 \cos^2(1 q) \sin(b_0 p)}{9 p} + \frac{2 q w_4^2 \cos^2(1 q) \sin(b_0 p)}{9 p} \\
& \frac{e p p u_5 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{q} + \frac{4 e p w_1 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{p} + \frac{2 e p w_3 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{p} - \frac{2 e p w_4 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{p} \\
& \frac{e p w_5 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{p} + 4 e p v_3 \cos(1 q) \sin(b_0 p) - \frac{2 p u_5 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{q} + \frac{4 q w_4^2 \cos^2(1 q) \sin(b_0 p)}{p} \\
& \frac{w_4^2 \cos^2(1 q) \sin(b_0 p)}{p} + \frac{4 q w_4 w_5 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{p} + \frac{2 q w_5^2 \cos^2(1 q) \sin(b_0 p)}{p} + \frac{4 q u_4 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{p} \\
& \frac{\sin(b_0 p)}{p} + \frac{2 q u_5 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{p} + \frac{4 u_1 \cos(1 q) \sin(b_0 p)}{p} - 2 v_5 \cos(1 q) \sin(b_0 p) - \frac{8 e p p u_5 \sin(b_0 p)}{3 q} \\
& \frac{\sin(b_0 p)}{p} + \frac{4 e p w_1 \sin(b_0 p)}{p} + \frac{2 e p w_3 \sin(b_0 p)}{p} + \frac{4 e p w_4 \sin(b_0 p)}{3 p} + \frac{2 e p w_5 \sin(b_0 p)}{3 p} - 4 e p v_3 \sin(b_0 p) \\
& (b_0 p) - \frac{4 e p v_5 \sin(b_0 p)}{3} + \frac{8 p u_5 \sin(b_0 p)}{3 q} + \frac{4 q w_2^2 \sin(b_0 p)}{9 p} + \frac{64 q w_4^2 \sin(b_0 p)}{15 p} + \frac{64 q w_4 w_5^2 \sin(b_0 p)}{15 p} \\
& \frac{\sin(b_0 p)}{p} - \frac{32 q w_5^2 \sin(b_0 p)}{15 p} + \frac{8 q u_4 \sin(b_0 p)}{3 p} + \frac{4 q u_5 \sin(b_0 p)}{3 p} - \frac{4 u_1 \sin(b_0 p)}{p} + \frac{8 v_5 \sin(b_0 p)}{3} \\
& (b_0 p) - b_0 e p l^2 u^2 - b_0 e p l q w^2 + b_0 l^2 p u^2 - b_0 l p q v^2 + b_0 l q w^2 w_4 + \frac{b_0 l q w^2 w_5^3}{2} + b_0 l q u^2
\end{aligned}$$

$$\frac{2 l q \sin (4 b_0 p)}{16} - \frac{p w_2 w_3 \sin (l q) \cos (l q) \sin (4 b_0 p)}{8} - \frac{l p q w_2 w_3 \sin (4 b_0 p)}{8} - \frac{p w_4 w_5 \cos (5 l q)}{15}$$

$$\frac{\sin (3 b_0 p)}{30} + \frac{p w_5^2 \cos (5 l q) \sin (3 b_0 p)}{30} - \frac{2 p w_3 w_4 \cos (3 l q) \sin (3 b_0 p)}{9} + \frac{p w_3 w_5 \cos (3 l q) \sin (3 b_0 p)}{9}$$

$$\frac{3 b_0 p}{9} - \frac{p w_4 w_5 \cos (3 l q) \sin (3 b_0 p)}{9} + \frac{p w_5^2 \cos (3 l q) \sin (3 b_0 p)}{18} - \frac{2 p w_3 w_4 \cos (l q) \sin (3 b_0 p)}{3}$$

$$+ \frac{p w_3 w_5 \cos (l q) \sin (3 b_0 p)}{3} + \frac{8 p w_3 w_4 \sin (3 b_0 p)}{9} - \frac{4 p w_3 w_5 \sin (3 b_0 p)}{9} + \frac{8 p w_4 w_5 \sin (3 b_0 p)}{45}$$

$$- \frac{4 p w_5^2 \sin (3 b_0 p)}{45} + \frac{p w_2 w_5 \sin (4 l q) \sin (2 b_0 p)}{16} - \frac{l p q w_2 w_5 \sin (2 b_0 p)}{4} - \frac{p w_2 w_4 \sin (4 l q) \sin (2 b_0 p)}{8}$$

$$\frac{w (b_0 p) \cos (b_0 p)}{2} + \frac{l p q w_2 w_4 \sin (b_0 p) \cos (b_0 p)}{2} - \frac{2 p w_2^2 \cos (l q)^3 \sin (b_0 p)^3}{9} + \frac{2 p w_2^2 \sin (b_0 p)^3}{9}$$

$$+ \frac{p w_4 w_5 \cos (5 l q) \sin (b_0 p)}{5} + \frac{2 p w_3 w_4 \cos (3 l q) \sin (b_0 p)}{3} + \frac{p w_4 w_5 \cos (3 l q) \sin (b_0 p)}{3} + 2 p w_2^2$$

$$3 w_4 \cos (l q) \sin (b_0 p) - \frac{8 p w_3 w_4 \sin (b_0 p)}{3} - \frac{8 p w_4 w_5 \sin (b_0 p)}{15} + \frac{b_0 p^2 w_2 w_4 \sin (4 l q)}{8} + \frac{b_0 p^2 w_2 w_5 \sin (4 l q)}{8}$$

$$\frac{5 \sin (2 l q)}{4} + \frac{b_0 p^2 w_2 w_3 \sin (l q) \cos (l q)}{2} + \frac{b_0 l p^2 q w_2 w_3}{2} - \frac{b_0 l p^2 q w_2 w_4}{2} + \frac{b_0 l p^2 q w_2 w_5}{2} \Big| (1 - \varepsilon)$$

p)