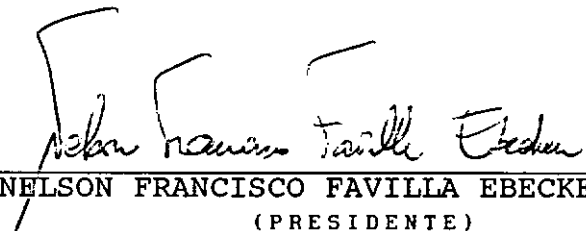


ANÁLISE LIMITE DE ESTRUTURAS ENRIJECIDAS
SOB TENSÕES INICIAIS

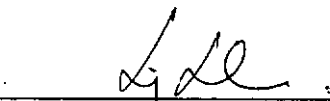
RAFAEL AVENCIO OCHOA LOPEZ

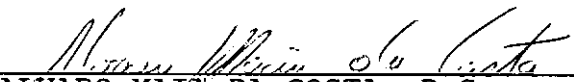
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:


NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN, D.Sc.
(PRESIDENTE)


EDISON CASTRO PRATES DE LIMA, D.Sc.


LUIZ LANDAU, D.Sc.


ALVARO MAIA DA COSTA, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 1990

OCHOA LOPEZ, RAFAEL AVENCIO

Análise Limite de Estruturas Enrijecidas sob
Tensões Iniciais [Rio de Janeiro] 1990.

x , p. 150 29,7 cm. (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 1990).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE.

1. Análise Não-Linear de Estruturas
2. Análise Limite de Estruturas
3. Estruturas Enrijecidas

I. COPPE/UFRJ

II. TÍTULO (Série)

AOS MEUS PAIS:

RAFAEL AVENCIO OCHOA FUNEZ E

VILMA ROSA LOPEZ DE OCHOA

AO MEU AMIGO NANCITO (in memorium)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais: RAFAEL AVENCIO OCHOA FUNEZ e VILMA ROSA LOPEZ DE OCHOA, por todos os sacrifícios que fizeram por mim, sem os quais não me teria sido possível chegar até aqui.

À minha tia DELIA ARMIDA LOPEZ DE MAZIER, pela força e incentivo para realizar esta etapa da minha vida.

Ao professor NELSON EBECKEN, pela orientação, ensinamentos, incentivos e dedicação, sem os quais este trabalho não teria sido realizado.

Ao PAULINHO, pela paciência que teve comigo durante todo este tempo, tomara que ele não tenha que agüentar outro hondurenho na sua vida.

Ao IVAN, pela sua amizade e pequena mas valiosa colaboração.

Aos amigos ASSIS, PAULO FERNANDO, AFONSO e RICARDO, pelos gratos momentos de convivência.

Aos amigos e colegas MOACIR, MARCÍLIO, GRAY, SERGIO, MARIA LÚCIA, LUIS PAULO e RICARDO DREIA, pelo companheirismo e amizade.

Aos amigos ADRIANA, JORGE, BETH, RAFA, ARLENE, SANCLÉR, SANDRO, ADEMIR, FERNANDO CARVALHO, BOGARIN e SAGRILLO.

Ao CÉLIO NOIA MIRANDA (VOVÔ), pelas atenções prestadas.

À BEATRIZ MARIA (BIA), pelas amostras de amizade sincera e verdadeira.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

ANÁLISE LIMITE DE ESTRUTURAS ENRIJECIDAS
SOB TENSÕES INICIAIS

RAFAEL AVENCIO OCHOA LOPEZ

NOVEMBRO DE 1990

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Programa: Engenharia Civil

Apresenta-se neste trabalho uma ferramenta numérica para a determinação da carga limite de estruturas enrijecidas sob tensões iniciais usando-se modelos simplificados. São considerados os efeitos de não linearidade dos materiais e das tensões iniciais em elementos de pórtico espacial e triangular de casca facetada.

Vários exemplos são analisados para demonstrar a viabilidade do uso destes modelos para a determinação da carga limite.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUERIMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER
OF SCIENCE (M.Sc.).

LIMIT ANALYSIS OF STIFFENED STRUCTURES
UNDER INITIAL STRESSES

RAFAEL AVENCIO OCHOA LOPEZ

NOVEMBER, 1990

Thesis Supervisor: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Department: Civil Engineering

A numerical tool for limit load determination in stiffened structures under initial stresses using simplified models is presented. Nonlinear material and initial stresses effects in spacial frame and triangular flat shell elements are considered.

Several examples are analised to demonstrate the viability of these models in limit load determination.

ÍNDICE

	página
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
 CAPÍTULO II - ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL	 4
II.1 - Elemento de Pórtico Elasto-Plástico	4
II.1.1 - Critério de Escoamento	5
II.1.2 - Matriz de Rigidez Elasto-Plástica do Elemento de Pórtico Espacial ...	8
II.1.3 - Forças Internas	12
II.2 - Matriz de Rigidez com Tensões Iniciais do Elemento de Pórtico Espacial	13
II.3 - Excentricidade no Elemento de Pórtico Espacial	16
 CAPÍTULO III - ELEMENTO TRIANGULAR DE CASCA FACETADA	 19
III.1 - Revisão do Elemento Triangular de Casca Elástico Linear	19
III.1.1 - Sistema de Referência	19
III.1.2 - Matriz de Rigidez Elástica	21
III.1.3 - Rotação da Matriz de Rigidez	26
III.2 - Critério e Superfície de Escoamento	27
III.2.1 - Critério de escoamento de Von Mises	27

III.2.2 - Superfície de Escoamento	
de Ilyushin	32
III.2.3 - Superfície de Escoamento	
de Crisfield	35
III.3 - Relações Elasto-Plásticas	40
III.4 - Forças Internas	46
III.5 - Matrizes Elasto-Plásticas	48
III.6 - Matriz de Rigidez com Tensões Iniciais ..	52

CAPÍTULO IV - ALGORITMOS DE ANÁLISE E

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	60
IV.1 - Algoritmos de Análise Não-Linear	60
IV.1.1 - Método Incremental-Iterativo	
de Newton-Raphson	61
IV.1.2 - Método Incremental-Iterativo	
de Newton-Raphson Modificado	63
IV.2 - Algoritmo para Controle de	
Deslocamentos	65
IV.3 - Critérios de Convergência	69
IV.3.1 - Critério de Convergência	
dos Deslocamentos	70
IV.3.2 - Critério de Convergência	
das Forças de Desequilíbrio	73
IV.4 - Integração Numérica	74
IV.5 - Implementação Computacional	75
IV.5.1 - Armazenamento da Matriz	
de Rigidez	77

IV.5.2 - Solução do Sistema de Equações	
Utilizando Memória Auxiliar	79
IV.5.3 - Análise Incremental-Iterativa	81
IV.5.4 - Implementação do Algoritmo para	
Controle de Deslocamentos	82

CAPÍTULO V - ANÁLISE DE RESULTADOS	85
---	-----------

V.1 - Plataforma Marítima Fixa	85
V.2 - Junta Tubular X	100
V.3 - Junta Tubular T	113
V.4 - Painei Enrijecido	127

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	142
---------------------------------------	------------

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	146
---	------------

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O surgimento de novos materiais e a evolução das tecnologias construtivas, tem possibilitado nos últimos anos a construção de estruturas com peças de menores dimensões, resultando numa economia significativa no custo das estruturas. Para se acompanhar estes avanços da engenharia estrutural e com o aparecimento de computadores de grande capacidade, tem sido necessário desenvolver novas teorias e métodos numéricos para o cálculo de estruturas. Em particular o Método dos Elementos Finitos [1], para a solução de problemas não lineares tem sido objeto de inúmeras pesquisas. Entre os elementos que mais têm sido usados com grande êxito na solução de problemas não lineares, destacam-se os elementos curvos [2], os elementos isoparamétricos [3] e os elementos degenerados de elementos tridimensionais [4]. Entretanto estes elementos geralmente precisam de um esforço computacional considerável.

A confiabilidade dos deslocamentos, esforços e/ou tensões calculados para uma determinada estrutura, dependem em grande parte da escolha de um modelo

estrutural adequado que represente da melhor maneira possível o comportamento da mesma sob as ações que a solicitam. Certos tipos de estruturas como as das pontes estaiadas, torres estaiadas, reservatórios, painéis enrijecidos, etc. não podem ser modeladas utilizando-se um só tipo de elemento estrutural. Daí o interesse em desenvolver programas e técnicas de análise que permitam o uso simultâneo de diversos tipos de elementos que possam trabalhar em conjunto e que representem de forma confiável o comportamento das estruturas sob diversas ações.

Neste trabalho é implementado um programa para a análise não linear de estruturas, usando-se um elemento de pórtico espacial e um elemento triangular de casca facetada, ambos com não linearidade física e levando-se em conta o efeito dos esforços internos na rigidez dos mesmos. Procura-se obter a carga limite através destes modelos simplificados com um custo computacional relativamente baixo.

No capítulo II apresenta-se o elemento de pórtico espacial. O elemento implementado foi desenvolvido com base na teoria plástica de vigas e utiliza um critério de escoamento nodal dependente dos esforços internos. O efeito dos esforços internos é considerado utilizando-se a matriz de rigidez com tensões iniciais. Estuda-se também o efeito das excentricidades dos extremos do elemento.

O elemento triangular de casca facetada é apresentado no capítulo III. Primeiramente faz-se uma revisão do elemento triangular linear elástico. Este elemento é obtido pela superposição do elemento de estado plano de tensões TRIM3 e o elemento de flexão de placas não conforme T9. Foi utilizado o critério de escoamento de Von Mises. A superfície de escoamento adotada foi desenvolvida originalmente por Ilyushin e posteriormente revisada por CRISFIELD [5]. Analogamente ao elemento de pórtico espacial, o efeito dos esforços internos é considerado por meio da matriz de rigidez com tensões iniciais.

No capítulo IV apresentam-se os algoritmos de análise não linear. Descreve-se o acelerador de convergência através do controle de deslocamentos. Apresentam-se também os critérios de convergência para estabelecer a precisão dos resultados. Descrevem-se por último os aspectos computacionais de maior interesse.

No capítulo V são analisados diversos exemplos que permitem avaliar o desempenho e a eficiência dos modelos implementados. São apresentadas tabelas e curvas que representam o comportamento das estruturas analisadas.

Finalmente no capítulo VI, são feitos alguns comentários e conclusões e apresentadas algumas sugestões que podem contribuir para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

Neste capítulo apresenta-se a descrição da implementação do elemento finito de pórtico espacial com não linearidade física sob tensões iniciais, levando-se em consideração a excentricidade dos extremos do elemento, sendo que as suas características permitem que o mesmo possa trabalhar em conjunto com o elemento triangular de casca facetada que também foi implementado e o qual será descrito no próximo capítulo, ou com outros elementos que possam ser implementados no futuro.

II.1 ELEMENTO DE PÓRTICO ELASTO-PLÁSTICO

A formulação do elemento de pórtico elasto-plástico [6] foi desenvolvida com base na teoria plástica de vigas e um critério de escoamento nodal dependente dos esforços internos.

As hipóteses adotadas são as seguintes:

- a) Não há cargas aplicadas entre os nós do elemento;

- b) Pode ocorrer plastificação apenas nas extremidades do elemento;
- c) As relações incrementais entre os esforços internos e os deslocamentos nodais do elemento podem ser obtidas tratando-se as rótulas plásticas como rótulas elásticas;
- d) O critério de escoamento da seção é função apenas dos momentos fletores e do esforço axial atuantes na seção.

II.1.1 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO

Adota-se uma função de escoamento inicial dos nós f_0 dependente dos esforços internos (esforço axial e momentos fletores) segundo a tabela II.1 mostrada a seguir,

Esforços não nulos atuantes na seção	f_0
N	0,99
M_y	$\frac{S_y}{Z_y}$
M_z	$\frac{S_z}{Z_z}$
N e M_y	$\frac{S_y}{Z_y}$
N e M_z	$\frac{S_z}{Z_z}$
M_y e M_z	$\frac{1}{2} \left(\frac{S_y}{Z_y} + \frac{S_z}{Z_z} \right)$
N, M_y e M_z	$\frac{1}{2} \left(\frac{S_y}{Z_y} + \frac{S_z}{Z_z} \right)$

Tabela II.1 Valores da Função de Escoamento Inicial f_0 .

sendo,

N - Esforço axial no elemento

M_y - Momento fletor em relação ao eixo y

M_z - Momento fletor em relação ao eixo z

S_y - Módulo elástico da seção em relação ao eixo y

S_z - Módulo elástico da seção em relação ao eixo z

Z_y - Módulo plástico da seção em relação ao eixo y

Z_z - Módulo plástico da seção em relação ao eixo z

Para a determinação da função de escoamento f_e , adota-se uma inequação análoga as conhecidas fórmulas de interação utilizadas no dimensionamento de estruturas metálicas:

$$f_{e_i} = \frac{|N|}{N_p} + \frac{|M_y|_i}{M_{py}} + \frac{|M_z|_i}{M_{pz}} \leq 1 \quad (\text{II.1})$$

$$f_{e_j} = \frac{|N|}{N_p} + \frac{|M_y|_j}{M_{py}} + \frac{|M_z|_j}{M_{pz}} \leq 1$$

onde,

f_{e_i} - Função de escoamento do nó inicial

f_{e_j} - Função de escoamento do nó final

N_p - Força axial de plastificação

M_{py} - Momento fletor de plastificação em relação ao eixo y

M_{pz} - Momento fletor de plastificação em relação ao eixo z

os sub-índices i e j indicam os nós inicial e final do

elemento respectivamente.

Os valores de N_p , M_{py} e M_{pz} são calculados por meio de:

$$\begin{aligned} N_p &= A_x \sigma_o \\ M_{py} &= Z_y \sigma_o \\ M_{pz} &= Z_z \sigma_o \end{aligned} \quad (II.2)$$

onde,

A_x - Área da seção transversal do elemento

σ_o - Tensão de escoamento do material

A função de escoamento f_e é um esforço adimensional a partir do qual se estabelece o grau de plastificação da seção, conforme é mostrado na tabela (II.2), a seção começa a sofrer plastificação a partir do instante em que a função de escoamento f_e torna-se maior que a função de escoamento inicial f_o .

Valores de f_e	Grau de Plastificação
$f_e < f_o$	seção totalmente elástica
$f_o \leq f_e < 1$	seção parcialmente plastificada
$f_e = 1$	seção totalmente plastificada

Tabela II.2 Grau de Plastificação da Seção

II.1.2 MATRIZ DE RIGIDEZ ELASTO-PLÁSTICA DO ELEMENTO DE PÓRICO ESPACIAL

A matriz de rigidez elasto-plástica do elemento de pórtico espacial é dada por:

[illegible]

sendo,

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= \frac{E\nu A_x}{L} ; & k_{1,7} &= -\frac{E\nu A_x}{L} \\ k_{2,2} &= \frac{12EI_z}{L^3} C_1 ; & k_{2,6} &= \frac{6EI_z}{L^2} C_2 \\ k_{2,8} &= -\frac{12EI_z}{L^3} C_1 ; & k_{2,12} &= \frac{6EI_z}{L^2} C_3 \\ k_{3,3} &= \frac{12EI_y}{L^3} C_1 ; & k_{3,5} &= -\frac{6EI_y}{L^2} C_2 \\ k_{3,9} &= -\frac{12EI_y}{L^3} C_1 ; & k_{3,11} &= -\frac{6EI_y}{L^2} C_3 \\ k_{4,4} &= \frac{GI_x}{L} ; & k_{4,10} &= -\frac{GI_x}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{5,5} &= \frac{4EI_y}{L} C_4 & ; & & k_{5,9} &= \frac{6EI_y}{L^2} C_2 \\
k_{5,11} &= \frac{2EI_y}{L} C_6 & ; & & k_{6,6} &= \frac{4EI_z}{L} C_4 \\
k_{6,8} &= -\frac{6EI_z}{L^2} C_2 & ; & & k_{6,12} &= \frac{2EI_z}{L} C_6 \\
k_{7,7} &= \frac{E_v A_x}{L} & ; & & k_{8,8} &= \frac{12EI_z}{L^3} C_1 \\
k_{8,12} &= -\frac{6EI_z}{L^2} C_3 & ; & & k_{9,9} &= \frac{12EI_y}{L^3} C_1 \\
k_{9,11} &= \frac{6EI_y}{L^2} C_3 & ; & & k_{10,10} &= \frac{GI_x}{L} \\
k_{11,11} &= \frac{4EI_y}{L} C_5 & ; & & k_{12,12} &= \frac{4EI_z}{L} C_5
\end{aligned}$$

onde:

A_x - Área da seção transversal

I_x - Constante de torção ($I_y + I_z$)

I_y - Momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y

I_z - Momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z

L - Comprimento do elemento

E - Módulo de elasticidade longitudinal

E_v - Módulo de elasticidade longitudinal variável

G - Módulo de elasticidade transversal ($\frac{E}{2(1+\nu)}$)

ν - Coeficiente de Poisson

A não linearidade física é representada por meio do módulo de elasticidade variável E_v e os parâmetros $C_i (i=1,\dots,6)$ definidos a seguir:

$$E_v = (1 - \alpha - \beta + \alpha\beta)^{1/2} E + (\alpha + \beta - \alpha\beta)^{1/2} E_T \quad (\text{II.4})$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{f_1}{f_7} & ; & & C_2 &= \frac{f_2}{f_7} & ; & & C_3 &= \frac{f_3}{f_7} \\ C_4 &= \frac{f_4}{f_5} & ; & & C_5 &= \frac{f_5}{f_6} & ; & & C_6 &= \frac{f_6}{f_7} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

sendo,

$$\begin{aligned} f_1 &= 2 (8 - 7\alpha - 7\beta + 6\alpha\beta) \\ f_2 &= 2 (8 - 8\alpha - 6\beta + 6\alpha\beta) \\ f_3 &= 2 (8 - 6\alpha - 8\beta + 6\alpha\beta) \\ f_4 &= 2 (8 - 8\alpha - 5\beta + 5\alpha\beta) \\ f_5 &= 2 (8 - 5\alpha - 8\beta + 5\alpha\beta) \\ f_6 &= 16 (1 - \alpha - \beta + \alpha\beta) \\ f_7 &= 16 - 8\alpha - 8\beta + 3\alpha\beta \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

E_T - Módulo de endurecimento

Os parâmetros α e β indicam o estado de plastificação da seção nas extremidades do elemento. Eles variam de acordo com as funções de escoamento f_o e f_e , que por sua vez são função dos esforços internos como mostrado anteriormente, podendo assumir valores entre 0 (seção elástica) e 1 (seção totalmente plastificada), estes parâmetros são calculados a partir de:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & f_{e_i} < f_{o_i} \\ \frac{(f_{e_i} - f_{o_i})}{(1 - f_{o_i})} & f_{o_i} \leq f_{e_i} \leq 1 \\ 1 & f_{e_i} > 1 \end{cases}, \quad (II.7.a)$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & f_{e_j} < f_{o_j} \\ \frac{(f_{e_j} - f_{o_j})}{(1 - f_{o_j})} & f_{o_j} \leq f_{e_j} \leq 1 \\ 1 & f_{e_j} > 1 \end{cases}, \quad (II.7.b)$$

Os valores $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ são mantidos até o instante em que a função de escoamento f_e do nó torna-se maior que a função de escoamento inicial f_o , indicando assim o início do escoamento das fibras da seção. Os valores $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ são alcançados quando a função de escoamento do nó f_e atinge o valor unitário indicando plastificação total da seção.

A obtenção da matriz de rigidez elasto-plástica do elemento de pórtico espacial pode ser resumida da seguinte maneira:

a) Determinação dos esforços internos atuantes nas extremidades do elemento (esforço axial e momentos

fletores);

- b) Determinação da função de escoamento inicial f_0 segundo a tabela (II.1);
- c) Determinação da função de escoamento das extremidades do elemento, expressões (II.1);
- d) Determinação dos parâmetros α e β , expressões (II.7);
- e) Determinação dos parâmetros $f_i (i=1, \dots, 7)$ em função de α e β , expressões (II.6);
- f) Determinação dos parâmetros $C_i (i=1, \dots, 6)$, expressões II.5);
- g) Determinação do módulo de elasticidade variável, expressão (II.4);
- h) Obtenção da matriz de rigidez elasto-plástica expressa por (II.3).

II.1.3 FORÇAS INTERNAS

Quando a função de escoamento do nó f_e (expressões (II.1)) atingir o valor de plastificação, o vetor de forças internas passa a ser controlado para que o critério de escoamento não seja violado. Isto quer dizer que o valor de f_e pode ser no máximo igual à unidade. Quando o valor de f_e ultrapassa a unidade o critério de escoamento é, portanto violado. Uma vez que os valores de N_p , M_{py} e M_{pz} são constantes, é preciso então corrigir os valores dos esforços internos de tal forma que o valor de f_e se

mantenha igual à unidade, divide-se então as expressões (II.1) pelo valor de f_e , com isto obtêm-se os valores dos esforços internos na superfície de escoamento;

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{N}{f_e} , \\ M_{yc} &= \frac{M_y}{f_e} , \\ M_{zc} &= \frac{M_z}{f_e} , \end{aligned} \tag{II.8}$$

feito isto passa-se a compatibilizar os esforços cortantes, desta forma obtêm-se o vetor de forças internas resistentes na superfície de escoamento.

II.2 MATRIZ DE RIGIDEZ COM TENSÕES INICIAIS DO ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

Quando não existe linearidade entre as cargas aplicadas e os deslocamentos resultantes desta ação, as equações de equilíbrio devem então ser formuladas em relação a configuração deformada da estrutura [7]. Precisa-se de uma formulação que possibilite a correção da geometria. Os efeitos destas mudanças geométricas podem ser simplificadamente avaliados através da Matriz de Rigidez Geométrica, a qual é função do esforço axial atuante no elemento, que por sua vez é função dos

deslocamentos.

Existem várias denominações para a matriz de rigidez que leva em consideração as mudanças na geometria de um elemento; Matriz de Rigidez Geométrica, Matriz de Rigidez Incremental, ou Matriz de Rigidez com Tensões Iniciais. Estas denominações resultam das próprias características da matriz [8]. Assim, o nome de Matriz de Rigidez Geométrica vem da possibilidade de correção da geometria que esta fornece dentro do processo não linear. A designação de Matriz de Rigidez Incremental resulta do fato de esta matriz ser somada à matriz de rigidez elástica ou elasto-plástica para a obtenção de novos deslocamentos incrementais. Matriz de Rigidez com Tensões Iniciais é devido à mesma ser dependente do estado de tensões (esforços) no elemento quando se inicia um novo incremento de carga.

No presente trabalho utiliza-se a matriz de rigidez com tensões iniciais para pequenos deslocamentos, formulando as equações de equilíbrio em relação à configuração indeformada da estrutura. A matriz de rigidez com tensões iniciais do elemento de pórtico espacial resulta de uma extensão direta do caso do pórtico plano [9], sendo expressa por:

$$\underline{K}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & b \\ & & a & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & -b & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & c & 0 & 0 & 0 & b & 0 & d & 0 \\ & & & & & c & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & d \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & a & 0 & 0 & 0 & -b \\ & \text{sim} & & & & & & & a & 0 & b & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & c & 0 \\ & & & & & & & & & & & c \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

onde,

$$a = \frac{6P}{5L} \quad ; \quad b = \frac{P}{10} \quad ; \quad c = \frac{2PL}{15} \quad ; \quad d = \frac{PL}{30} \quad ,$$

sendo P o esforço axial atuante no elemento.

Como visto, esta matriz é explícita, resultando por tanto um esforço computacional pouco oneroso.

A matriz de rigidez não linear tangente aproximada \underline{K}_t do elemento de pórtico espacial resulta da soma da matriz de rigidez elasto-plástica \underline{K}_p com a matriz de rigidez geométrica \underline{K}_g

$$\underline{K}_t = \underline{K}_p + \underline{K}_g \quad (\text{II.10})$$

II.3 EXCENTRICIDADE NO ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL [10]

É muito comum encontrar estruturas nas quais os eixos que definem um elemento de pórtico sejam excêntricos em relação aos eixos de um elemento plano ou até mesmo em relação aos eixos de outro elemento de pórtico. O erro que se comete quando tal excentricidade não é considerada, resulta freqüentemente em um dimensionamento inadequado das estruturas.

Na figura (II.1), considere-se a linha que une os dois extremos do elemento de pórtico espacial e defina-se a excentricidade do centro de gravidade da seção transversal do elemento deslocado em relação a essa linha.

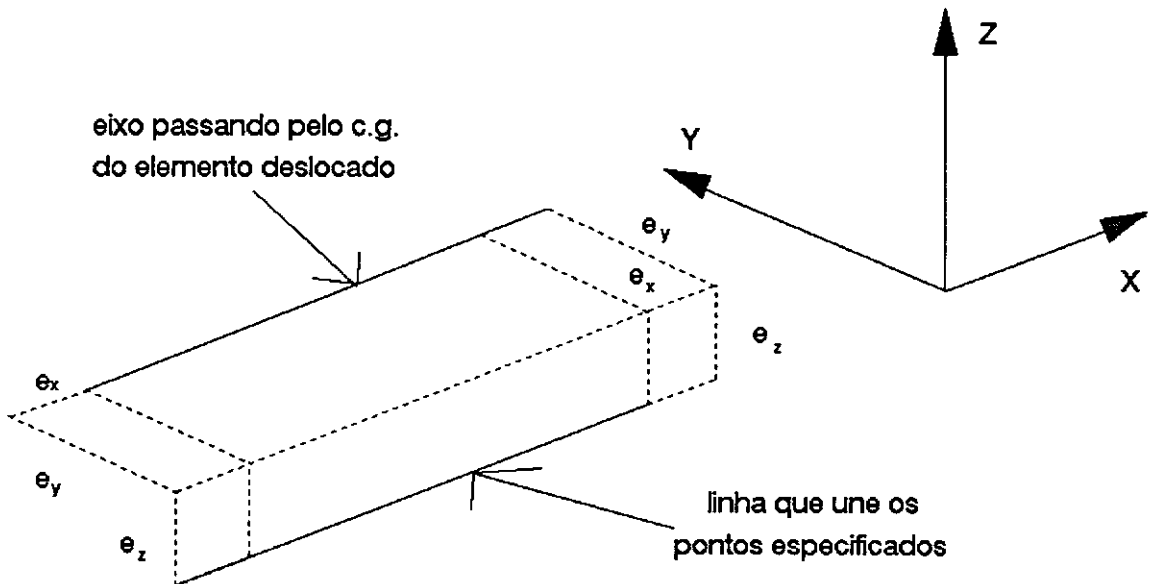


Figura II.1 Elemento deslocado em relação à
linha que define a sua geometria

Observa-se da figura (II.1) que :

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_g + \theta_{vg} e_z - \theta_{wg} e_y \\
 v_t &= v_g - \theta_{ug} e_z + \theta_{wg} e_x \\
 w_t &= w_g + \theta_{ug} e_y - \theta_{vg} e_x \\
 \theta_{ut} &= \theta_{ug} \\
 \theta_{vt} &= \theta_{vg} \\
 \theta_{wt} &= \theta_{wg}
 \end{aligned} \tag{II.11}$$

ou de outra forma ;

$$\begin{Bmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \\ \theta_{ut} \\ \theta_{vt} \\ \theta_{wt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & e_z & -e_y \\ 0 & 1 & 0 & -e_z & 0 & e_x \\ 0 & 0 & 1 & e_y & -e_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ v_g \\ w_g \\ \theta_{ug} \\ \theta_{vg} \\ \theta_{wg} \end{Bmatrix} \tag{II.12}$$

ou seja,

$$\underline{U}_t = \underline{T} \underline{U}_g \tag{II.13}$$

onde \underline{T} é a matriz de transformação que relaciona os deslocamentos do sistema global de coordenadas com os deslocamentos do sistema intermediário, e e_x , e_y e e_z são as excentricidades do elemento segundo os eixos x , y e z . O sistema de referência das excentricidades é global e devem ser iguais nos dois extremos.

Para a análise dos elementos de pórtico com excentricidade é necessário multiplicar a matriz de rotação do elemento dos eixos locais para os eixos globais pela matriz de transformação.

A matriz de rotação do elemento de pórtico espacial é dada por ;

$$\underline{R} = [\underline{l}_x] [\underline{l}_y] [\underline{l}_z] \quad (\text{II.14})$$

sendo, \underline{l}_x , \underline{l}_y e \underline{l}_z os co-senos diretores do elemento.

A matriz de rigidez K no sistema de referência global é dada através de :

$$\underline{K} = \underline{T}^t \underline{R}^t \underline{K}_t \underline{R} \underline{T} \quad (\text{II.15})$$

A relação entre os deslocamentos no sistema de referência local e os deslocamentos no sistema de referência global é expressa por :

$$\underline{U}_1 = \underline{R} \underline{T} \underline{U}_g \quad (\text{II.16})$$

Os esforços no referencial global são relacionados com os esforços no referencial local através de :

$$\underline{F}_g = \underline{T}^t \underline{R}^t \underline{F}_1 \quad (\text{II.17})$$

CAPITULO III

ELEMENTO TRIANGULAR DE CASCA FACETADA

Neste capítulo descreve-se a implementação do elemento de casca triangular facetado com não linearidade física sob tensões iniciais, formado pela associação do elemento para estado plano de tensões (TRIM3) e o elemento não conforme para flexão de placas (T9).

III.1 REVISÃO DO ELEMENTO TRIANGULAR DE CASCA
ELÁSTICO LINEAR

III.1.1 SISTEMA DE REFERÊNCIA [1]

O sistema de referência global de coordenadas é definido pelos eixos X , Y e Z como mostrado na figura (III.1). O sistema local de referência é formado pelos eixos x , y e z , com a origem no nó 1 do elemento, sendo o eixo x paralelo ao lado 2-3 do elemento com sentido de 2 para 3, o eixo z é normal ao plano

contido no elemento e tem o mesmo sentido do vetor rotação segundo a seqüência 1-2-3 , o triedro formado por x , y e z é direto.

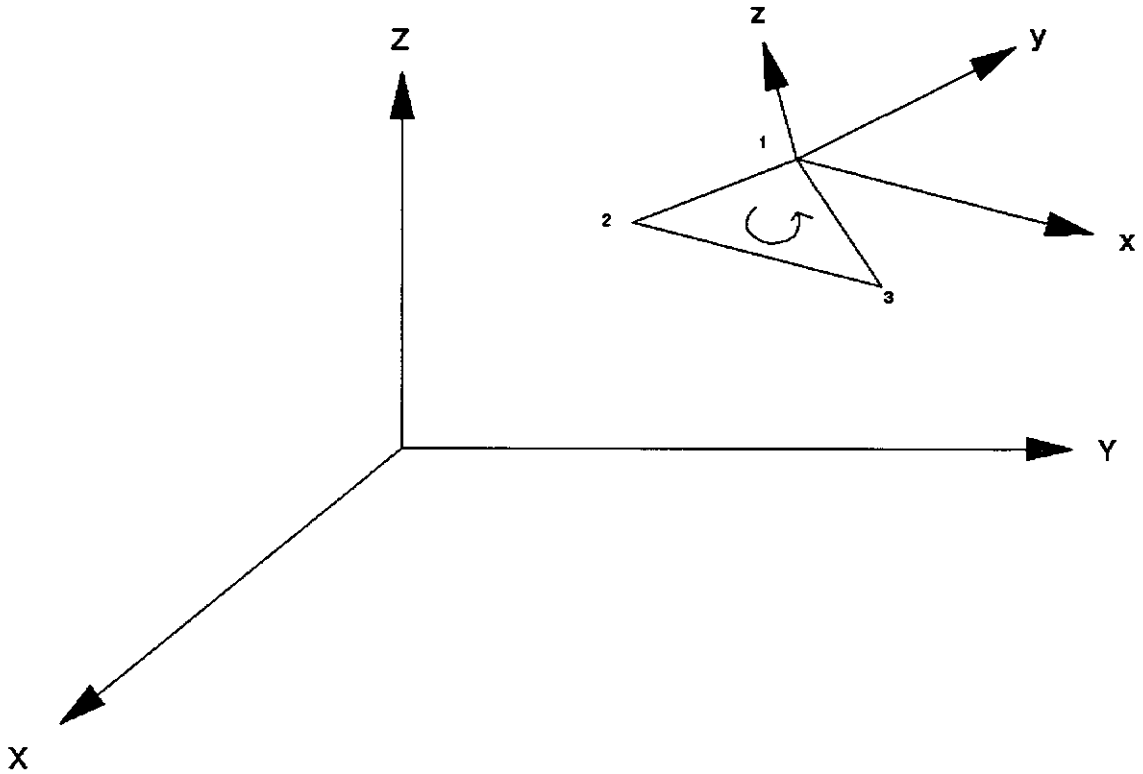


Figura (III.1) Sistemas de referência global e local

A matriz de transformação \underline{L} é expressa por:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Introduzindo-se a notação $X_{i,j} = X_i - X_j$,
 $Y_{i,j} = Y_i - Y_j$ e $Z_{i,j} = Z_i - Z_j$, com $i = 1,2,3$, e
 $j = 1,2,3$, tem-se que;

$$l_{11} = \frac{X_{32}}{d_{23}}$$

$$l_{21} = \frac{Y_{32}}{d_{23}}$$

$$l_{31} = \frac{Z_{32}}{d_{23}}$$

$$l_{12} = \frac{(Y_{32}^2 X_{12} + Z_{32}^2 X_{12} - X_{32} Y_{12} Y_{32} - X_{32} Z_{12} Z_{32})}{2 A d_{23}}$$

$$l_{22} = \frac{(X_{32}^2 Y_{12} + Z_{32}^2 Y_{12} - X_{12} X_{32} Y_{32} - Y_{32} Z_{12} Z_{32})}{2 A d_{23}}$$

$$l_{32} = \frac{(X_{32}^2 Z_{12} + X_{32}^2 Z_{12} - X_{12} X_{32} Z_{32} - Y_{12} Y_{32} Z_{32})}{2 A d_{23}}$$

$$l_{13} = \frac{(Y_{32} Z_{12} - Z_{32} Y_{12})}{2 A}$$

$$l_{23} = \frac{(Z_{32} X_{12} - X_{32} Z_{12})}{2 A}$$

$$l_{33} = \frac{(X_{32} Y_{12} - Y_{32} X_{12})}{2 A}$$

(III.2)

sendo , d_{23} o comprimento do lado 2-3 do elemento e A a área do elemento.

III.1.2 MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA [11]

A matriz de rigidez elástica do elemento de casca

triangular facetado, como já foi mencionado anteriormente é formada pela associação do elemento de estado plano de tensões (TRIM3) e o elemento de flexão de placas (T9) , os quais são desacoplados entre si, e onde as leis constitutivas dos materiais permanecem constantes.

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ESTADO PLANO DE TENSÕES

A matriz de rigidez para o estado plano de tensões \underline{K}^m é dada através de:

$$\underline{K}^m = \int_A \underline{B}_1^t \underline{DM} \underline{B}_1 dA \quad (\text{III.3})$$

sendo;

$$\underline{B}_1 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} Y_{23} & 0 & Y_{31} & 0 & Y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & Y_{23} & x_{13} & Y_{31} & x_{21} & Y_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

$$\underline{DM} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

onde x , y e z são as coordenadas dos nós no sistema local de referência e t é a espessura do elemento.

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA FLEXÃO DE PLACAS [11]

A matriz de rigidez para flexão de placas \underline{K}^f é dada através de:

$$\underline{K}^f = \int_A \underline{B}_2^t \underline{D} \underline{B}_2 dA \quad (\text{III.6})$$

sendo;

$$\underline{D} = \frac{t^2}{12} \underline{D}^M, \quad (\text{III.7})$$

e a matriz \underline{B}_2 é dada por;

$$\underline{B}_2 = \underline{T}_b \underline{F}_b \underline{U}_b \quad (\text{III.8})$$

onde;

$$\underline{T}_b = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} Y_{23}^2 & Y_{31}^2 & 2 Y_{31} Y_{23} \\ X_{32}^2 & X_{13}^2 & 2 X_{13} X_{32} \\ 2 X_{32} Y_{23} & 2 X_{13} Y_{31} & 2 (X_{13} Y_{23} + X_{32} Y_{31}) \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

$$\underline{F}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2\xi_2 & -2\xi_2 & 6(\xi_1 - \xi_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2\xi_1 & -6(\xi_2 - \xi_3) & 2\xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2(\xi_1 - \xi_2) & -2(2\xi_2 - \xi_3) & 2(2\xi_1 - \xi_3) \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

$$\underline{U}_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & y_{21} & x_{12} & 0 & y_{12} & x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{23} & x_{23} & 0 & y_{23} & -x_{23} \\ 0 & -y_{13} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{13} & -x_{13} \\ -2 & y_{12} & x_{21} & 2 & y_{12} & x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & y_{23} & -x_{23} & 2 & y_{23} & -x_{23} \\ 2 & -y_{13} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & -2 & -y_{13} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

sendo que na expressão (III.10) ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 são as coordenadas naturais para qualquer ponto P definido pelas áreas A_1 , A_2 e A_3 como mostra a figura (III.2),

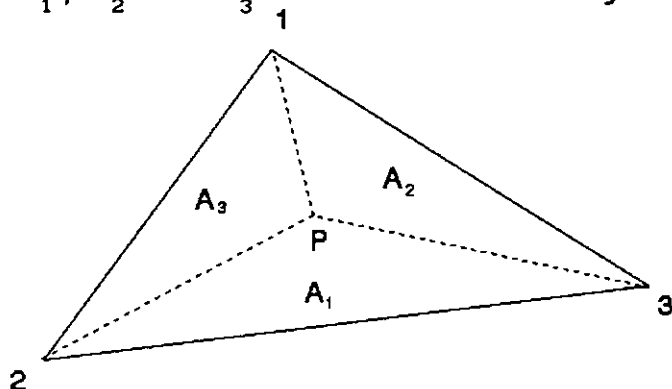


Figura (III.2) Coordenadas naturais do ponto P

e cujos valores são dados por;

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad ; \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad ; \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \quad (\text{III.12})$$

Com as expressões (III.3) e (III.6), obtém-se a matriz de rigidez elástica para o elemento de casca triangular facetado dada por:

$$\underline{K} = \int_A \begin{bmatrix} \underline{B}_1^t & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{DM} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{DB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_2 \end{bmatrix} dA \quad (\text{III.13})$$

Considerando o termo da rigidez relativa à rotação θ_z igual a zero dentro da matriz de rigidez do elemento, tem-se:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^m & \underline{0} & & \underline{K}_{12}^m & \underline{0} & & \underline{K}_{13}^m & \underline{0} & \\ \underline{0} & \underline{K}_{11}^f & & \underline{0} & \underline{K}_{12}^f & & \underline{0} & \underline{K}_{13}^f & \\ & & 0 & & & 0 & & & 0 \\ \underline{K}_{21}^m & \underline{0} & & \underline{K}_{22}^m & \underline{0} & & \underline{K}_{23}^m & \underline{0} & \\ \underline{0} & \underline{K}_{21}^f & & \underline{0} & \underline{K}_{22}^f & & \underline{0} & \underline{K}_{23}^f & \\ & & 0 & & & 0 & & & 0 \\ \underline{K}_{31}^m & \underline{0} & & \underline{K}_{32}^m & \underline{0} & & \underline{K}_{33}^m & \underline{0} & \\ \underline{0} & \underline{K}_{31}^f & & \underline{0} & \underline{K}_{32}^f & & \underline{0} & \underline{K}_{33}^f & \\ & & 0 & & & 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

III.1.3 ROTAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

A relação entre os deslocamentos de um nó, no sistema global, com os mesmos deslocamentos no sistema local é dada através da matriz de rotação \underline{R} por meio de;

$$\underline{\tilde{U}}_i = \underline{R} \underline{U}_i , \quad (\text{III.15})$$

onde $\underline{\tilde{U}}_i$ e \underline{U}_i são os vetores deslocamentos nos respectivos sistemas de referência para o nó i ($i=1,2,3$) e sendo,

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{L} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L} \end{bmatrix} , \quad (\text{III.16})$$

na qual, \underline{L} é a matriz de transformação dada por (III.1), segue-se então que para os três nós do elemento;

$$\underline{\tilde{U}} = \underline{MR} \underline{U} , \quad \text{e} \quad (\text{III.17})$$

$$\underline{MR} = \begin{bmatrix} \underline{R} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{R} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{R} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Sendo \underline{MR} uma matriz de rotação e portanto ortogonal, tem-se que $\underline{MR}^{-1} = \underline{MR}^t$.

A matriz de rigidez do elemento no sistema global é relacionada com a matriz de rigidez no sistema local através de:

$$\underline{K}_G = \underline{MR} \underline{K} \underline{MR}^t \quad (\text{III.19})$$

Observa-se em (III.14) que a matriz de rigidez do elemento no sistema local é singular, já que os termos correspondentes à rotação θ_z são nulos, na matriz de rigidez no sistema global obtida através de (III.19), essa singularidade é eliminada, a não ser que na discretização da estrutura exista algum nó planar, nesse caso, atribui-se valor unitário ao termo da diagonal da matriz dada por (III.14) equivalente à rotação θ_z do nó planar respectivo.

III.2 CRITÉRIO E SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO

III.2.1 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES

O critério de escoamento [12] determina o nível de tensões para o qual começam as deformações plásticas. Fisicamente o critério de escoamento deve ser independente da orientação do sistema de coordenadas utilizado, e por

tanto deve ser função dos três invariantes de tensões (J_1 , J_2 , J_3) somente.

Vários critérios de escoamento têm sido estudados, entre os quais destacam-se os de Tresca e Von Mises por sua simplicidade e boa concordância com resultados experimentais.

Neste trabalho, utiliza-se o critério de escoamento de Von Mises, que sugere que as deformações plásticas começam quando o segundo invariante das tensões desviatórias J_2 atinge um valor crítico, define-se então a tensão efetiva em função de J_2 por meio de;

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{3} J_2^{1/2} , \quad (\text{III.20})$$

que quando atinge a tensão de escoamento do material σ_0 indica o início do escoamento.

O segundo invariante das tensões desviatórias, pode ser explicitamente escrito como:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] , \quad (\text{III.21})$$

ou,

$$J_2 = \frac{1}{2} [\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 , \quad (\text{III.22})$$

sendo;

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \sigma_x - \sigma_m \\ \sigma'_y &= \sigma_y - \sigma_m \\ \sigma'_z &= \sigma_z - \sigma_m\end{aligned}, \quad (\text{III.23})$$

onde;

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (\text{III.24})$$

Existem duas interpretações físicas do critério de escoamento de Von Mises. Nadai em 1937 introduziu o conceito da tensão cisalhante octaédrica τ_{oct} , a qual é a tensão cisalhante no plano de um octaedro regular, cuja direção normal é igualmente inclinada em relação aos eixos principais das tensões. O valor de τ_{oct} em função de J_2 é dado por:

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}, \quad (\text{III.25})$$

assim, o escoamento começa quando τ_{oct} alcança um valor crítico.

Hencky em 1924, concluiu que o critério de Von Mises indica que o escoamento começa quando a energia elástica de distorção alcança um valor crítico.

Considere-se a curva do ensaio uni-axial de um material elasto-plástico mostrada na figura (III.3). O comportamento inicialmente elástico é caracterizado pelo módulo de elasticidade E até alcançar a tensão de escoamento uni-axial σ_0 , depois disso a resposta do material tem um comportamento elasto-plástico, com a tangente à curva variando continuamente, e chamada de módulo tangente elasto-plástico ou módulo de endurecimento E_T .

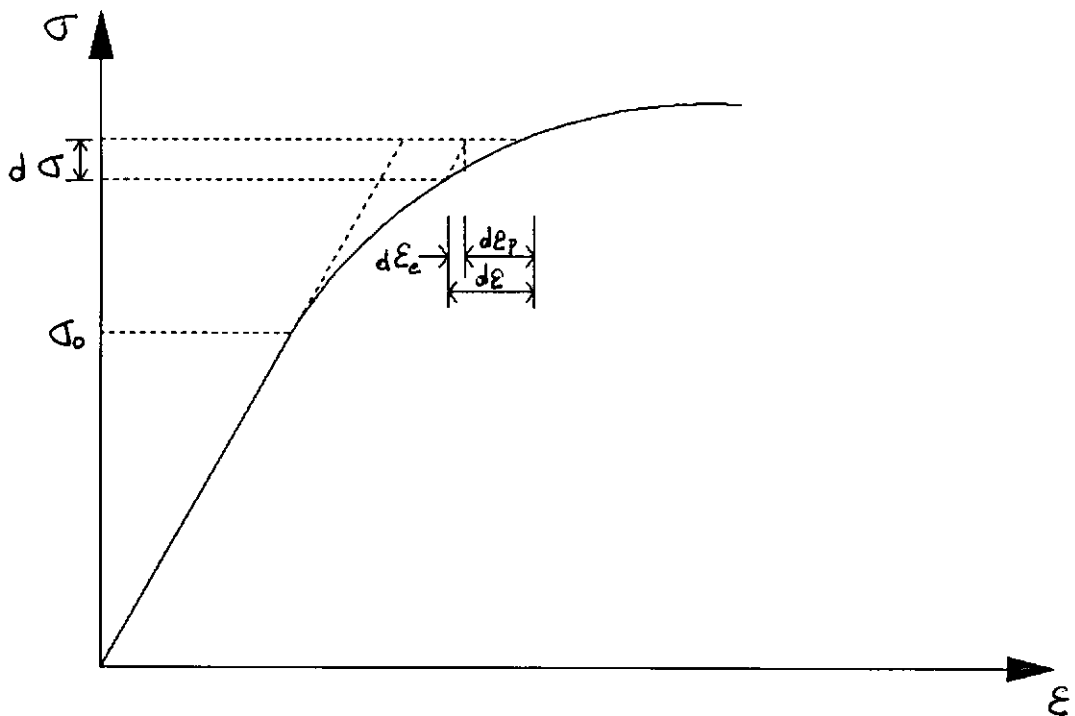


Figura (III.3) Curva de ensaio uni-axial de um material elasto-plástico

A lei de endurecimento do material pode ser expressa em termos da tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ e da deformação plástica

equivalente, por meio de:

$$\tilde{\sigma} = H(\tilde{\epsilon}_p) \quad (\text{III.26})$$

Para o caso uni-axial, tem-se que $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, logo a tensão efetiva é igual a σ_1 e a deformação plástica equivalente igual à respectiva deformação plástica ϵ_p .

Diferenciando a expressão (III.26), tem-se:

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{\epsilon}_p} = H'(\tilde{\epsilon}_p) = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} \quad (\text{III.27})$$

A deformação plástica é dada por:

$$d\epsilon_p = d\epsilon_t - d\epsilon_e \quad (\text{III.28})$$

sendo $d\epsilon_t$ e $d\epsilon_e$ as deformações total e elástica respectivamente.

Levando (III.20) em (III.27), resulta

$$H'(\tilde{\epsilon}_p) = \frac{d\sigma}{d\epsilon_t - d\epsilon_e} = \frac{1}{\frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{d\epsilon_e}{d\sigma}} \quad (\text{III.29})$$

Sendo que o módulo elástico E e o módulo de

endurecimento E_T , são dados por;

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon_e} \quad e \quad (III.30)$$

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$$

levando (III.30) em (III.29), resulta:

$$H' = \frac{1}{\frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{d\epsilon_e}{d\sigma}} = \frac{E - E_T}{E - E_T} \quad (III.31)$$

assim, a função H' pode ser determinada a partir do ensaio uni-axial do material, posteriormente sera visto que se necessita de H' e não de H na formulação matricial.

III.2.2 SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE ILYUSHIN

Para cascas de pequena espessura, quando se adotam as hipóteses de Kirchhoff-Love , são introduzidas algumas simplificações. As tensões de cisalhamento transversais τ_{zx} e τ_{yz} bem como a tensão normal σ_z são desprezadas, nesse caso o critério de escoamento de Von Mises (III.20) é dado por:

$$\frac{1}{\sigma_0^2} = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2) = 1 \quad (\text{III.32})$$

Quando se utilizam elementos planos, é conveniente escrever o critério de escoamento em função dos esforços resultantes da integração das tensões ao longo da espessura, dados por:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \, dz ; N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \, dz ; N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \, dz \\ M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \, dz ; M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \, dz ; M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

Usando a teoria das deformações, Ilyushin desenvolveu uma superfície de escoamento com base no critério de Von Mises, em função das " Intensidades Quadráticas das Tensões " [5,13] , dadas por:

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y + 3 N_{xy}^2 \\ \tilde{M} &= M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2 \\ \tilde{MN} &= M_x N_x + M_y N_y - \frac{1}{2} M_x N_y - \frac{1}{2} M_y N_x + 3 M_{xy} N_{xy} \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Para isso utilizou as três " Intensidades Quadráticas das Tensões Não Dimensionais " ;

$$\begin{aligned}
 Q_t &= \frac{\tilde{N}}{N_o^2} \\
 Q_m &= \frac{\tilde{M}}{M_o^2} \\
 Q_{tm} &= \frac{\tilde{MN}}{M_o N_o}
 \end{aligned}
 \tag{III.35}$$

onde;

$$\begin{aligned}
 N_o &= \sigma_o t \quad e \\
 M_o &= \frac{\sigma_o t^2}{4}
 \end{aligned}
 \tag{III.36}$$

Para situações de predominância da flexão, e partindo de que toda a seção atingiu o escoamento Ilyushin obteve a superfície aproximada

$$F_I = Q_t + Q_m + \frac{1}{\sqrt{3}} | Q_{tm} | = 1 \quad , \tag{III.37}$$

levando (III.35) e (III.36) em (III.37), resulta

$$F_I = \frac{\tilde{N}}{\sigma_o^2 t^2} + \frac{16 \tilde{M}}{\sigma_o^2 t^4} + \frac{4 s \tilde{MN}}{\sqrt{3} \sigma_o^2 t^3} = 1 \tag{III.38}$$

sendo;

$$s = \frac{\tilde{M}N}{|\tilde{M}N|} \quad (\text{III.39})$$

III.2.3 SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE CRISFIELD

A superfície de escoamento de Ilyushin representa uma boa aproximação quando o efeito de flexão é predominante, já que em tais condições a curvatura plástica equivalente χ_{ps} é grande, e é definida por:

$$\chi_{ps} = \int d\chi_{ps} \quad (\text{III.40})$$

Isto indica que a superfície de Ilyushin apresenta um bom comportamento em seções totalmente plastificadas, onde o momento tende para M_0 enquanto a curvatura plástica equivalente tende para valores infinitos.

Por outro lado quando uma das fibras extremas alcança o escoamento, a deformação plástica equivalente é nula ($\chi_{ps} = 0$), pode-se definir então uma superfície inicial de escoamento. Sendo assim, as tensões ao longo da espessura da seção permanecem ainda no regime elástico, e são calculadas por;

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{N_x}{t} \pm \frac{6M_x}{t^2} \\
 \sigma_y &= \frac{N_y}{t} \pm \frac{6M_y}{t^2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{t} \pm \frac{6M_{xy}}{t^2} ,
 \end{aligned}
 \tag{III.41}$$

sendo assim, o valor do momento é dado por:

$$M_1 = \frac{\sigma_o t^2}{6} \tag{III.42}$$

resultando na superfície de escoamento inicial dada por;

$$F_1 = Q_t + \frac{9}{4} Q_m + 3 | Q_{tm} | = 1 , \tag{III.43}$$

CRISFIELD [5] , sugeriu uma modificação na superfície de escoamento de Ilyushin, para obter uma melhor aproximação da superfície de escoamento para valores pequenos de χ_{ps} , e desenvolveu a superfície de escoamento dada por;

$$F_c (Q_t , Q_m , Q_{tm} , \chi_{ps}) = 1 \tag{III.44}$$

na qual χ_{ps} é um parâmetro de pseudo-endurecimento tal que a superfície inicial F_c seja igual à superfície inicial F_1 para $\chi_{ps} = 0$, e igual à superfície F_1

para χ_{ps} tendendo a infinito.

Para atender as condições anteriores, Crisfield propôs a substituição do momento M_o pelo momento M_c , sendo que o valor de M_c varia de M_1 dado por (III.42) correspondente ao escoamento da primeira fibra ($\chi_{ps} = 0$), até o valor de M_o quando toda a seção atinge o escoamento ($\chi_{ps} \rightarrow \infty$).

O momento M_c é relacionado a M_o através de:

$$M_c = \alpha_c(\chi_{ps}) M_o \quad (\text{III.45})$$

onde a função α_c dependente da curvatura plástica equivalente χ_{ps} é obtida a partir da curva uni-axial "momento-curvatura", o valor de α_c é dado por:

$$\alpha_c = 1 - \frac{1}{3} e^{\left(-\frac{4}{3} \frac{Et}{\sigma_o} \chi_{ps}\right)} \quad (\text{III.46})$$

Substituindo-se M_o por M_c nas expressões (III.35) e (III.37), obtém-se a superfície de escoamento de Crisfield dada por;

$$F_c = Q_t + \frac{Q_m}{\alpha^2} + \frac{1}{\sqrt{3} \alpha} |Q_{tm}| = 1, \quad (\text{III.47})$$

ou seja,

$$F_c = \frac{\tilde{N}}{\sigma_o^2 t^2} + \frac{16 \tilde{M}}{\alpha_c^2 \sigma_o^2 t^4} + \frac{4 s \tilde{MN}}{\alpha_c \sqrt{3} \sigma_o^2 t^3} = 1 \quad (\text{III.48})$$

Observa-se, que para valores de χ_{ps} tendendo para infinito, o valor de α_c é igual à unidade, e a superfície dada por (III.48) coincide com a superfície inicial F_I dada por (III.38), porém quando $\chi_{ps} = 0$, tem-se que $\alpha_c = \frac{2}{3}$ e a superfície F_c assume o valor

$$F_1 = Q_t + \frac{9}{4} Q_m + \frac{\sqrt{3}}{2} |Q_{tm}| = 1 \quad , \quad (\text{III.49})$$

esta expressão é semelhante à superfície F_I , com um coeficiente menor para o termo $|Q_{tm}|$, resultando em um retardamento no início do escoamento das fibras extremas, porém consegue-se uma melhor aproximação da superfície de escoamento para valores intermediários de χ_{ps} .

Neste trabalho, adota-se a superfície de escoamento de Crisfield para materiais que apresentam a curva "tensão-deformação" da figura (III.4). Sendo que o módulo tangente elasto-plástico é constante, a função H' dada por (III.31) também é constante, nesse caso, após ser atingida a tensão de escoamento σ_o , a tensão efetiva sera dada por;

$$\tilde{\sigma}_o = \sigma_o + H' \tilde{\epsilon}_p \quad (\text{III.50})$$

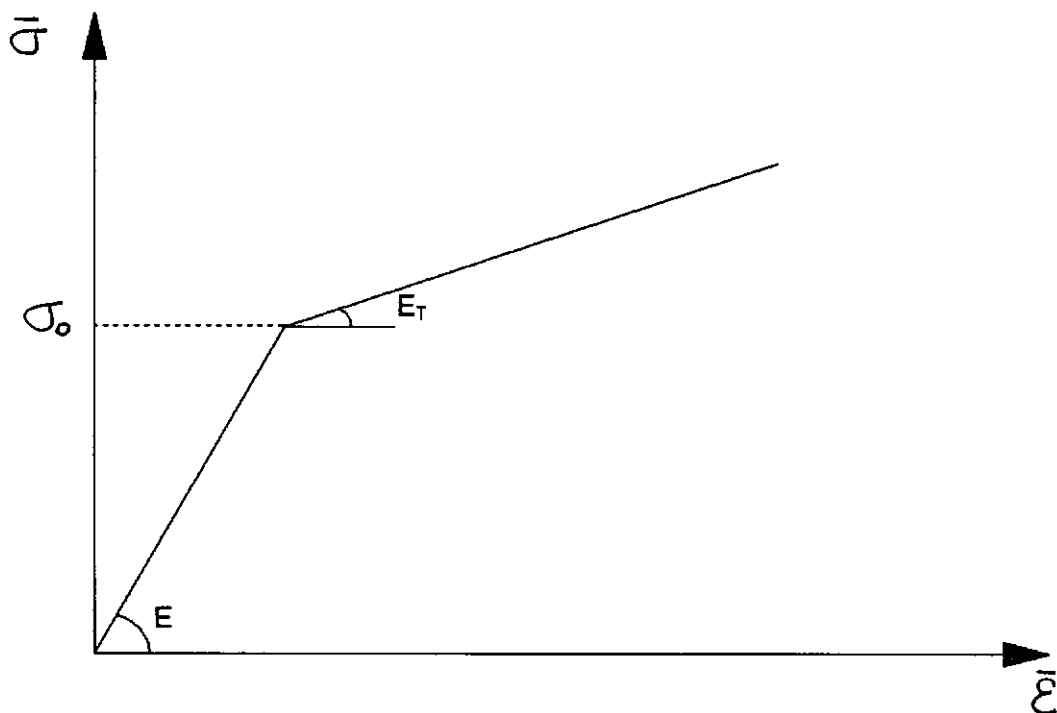


Figura (III.4) Curva tensão-deformação

sendo que para materiais elasto-plásticos perfeitos a função H' será nula.

Reescrevendo a expressão (III.48) como:

$$\sqrt{\frac{\tilde{N}}{t^2} + \frac{16 \tilde{M}}{\alpha_c^2 t^4} + \frac{4 s \tilde{MN}}{\alpha_c \sqrt{3} t^3}} = \sigma_0 \quad (\text{III.51})$$

é possível introduzir o conceito de tensão efetiva definido pelo lado esquerdo da expressão (III.51), resultando em:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\tilde{N}}{t^2} + \frac{16 \tilde{M}}{\alpha_c^2 t^4} + \frac{4 s \tilde{MN}}{\alpha_c \sqrt{3} t^3}} \quad (\text{III.52})$$

III.3 RELAÇÕES ELASTO-PLÁSTICAS

A superfície de escoamento é expressa em função de $\tilde{\sigma}$ e H que no caso será dependente das deformações plásticas, esta superfície de escoamento é dada por:

$$F_y = \tilde{\sigma} (\underline{n} , \underline{m} , \chi_{ps}) - H (\underline{\varepsilon}_p , \chi_p) \quad (\text{III.53})$$

sendo que \underline{n} e \underline{m} , são os vetores que contêm os esforços por unidade de comprimento

$$\underline{n} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} ; \quad \underline{m} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.54})$$

A partir de (III.53), pode-se escrever que $dF_y = 0$, ou seja

$$d\tilde{\sigma} = dH \quad (\text{III.55})$$

tem-se então, que;

$$\underline{\mathbf{F}}_n^t d\underline{n} + \underline{\mathbf{F}}_m^t d\underline{m} + VA VC d\chi_{ps} = \frac{\partial H}{\partial \underline{\varepsilon}_p} d\underline{\varepsilon}_p + \frac{\partial H}{\partial \underline{\chi}_p} d\underline{\chi}_p \quad (\text{III.56})$$

onde;

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_n &= \frac{1}{t^2} \left\{ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \underline{n}} \right\} + \frac{2 s}{\alpha \sqrt{3} t^3} \left\{ \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \underline{m}} \right\} \\ \underline{\mathbf{F}}_m &= \frac{2 s}{\alpha \sqrt{3} t^2} \left\{ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \underline{n}} \right\} + \frac{16}{\alpha^2 t^4} \left\{ \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \underline{m}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

sendo;

$$\tilde{a} = \frac{1}{t^2} \quad ; \quad \tilde{b} = \frac{2 s}{\alpha \sqrt{3} t^3} \quad ; \quad \tilde{c} = \frac{16}{\alpha^2 t^4} \quad (\text{III.58})$$

com a substituição de (III.58) e (III.34) dentro de (III.57), obtém-se:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_n &= \begin{cases} \tilde{a} (2N_x - N_y) & + \tilde{b} (2M_x - M_y) \\ \tilde{a} (2N_y - N_x) & + \tilde{b} (2M_y - M_x) \\ \tilde{a} (6N_{xy}) & + \tilde{b} (6M_{xy}) \end{cases} \\ \underline{\mathbf{F}}_m &= \begin{cases} \tilde{b} (2N_x - N_y) & + \tilde{c} (2M_x - M_y) \\ \tilde{b} (2N_y - N_x) & + \tilde{c} (2M_y - M_x) \\ \tilde{b} (6N_{xy}) & + \tilde{c} (6M_{xy}) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

VA e VC são dados por:

$$VA = - \frac{4 s \tilde{M}N}{\alpha^2 \sqrt{3} t^3} - \frac{32 \tilde{M}}{\alpha^3 t^4} \quad (\text{III.60})$$

$$VC = \frac{4}{9} \frac{Et}{\sigma_o} e^{(-\frac{4}{3} \frac{Et}{\sigma_o} \chi_{ps})} \quad (\text{III.61})$$

A curvatura plástica equivalente pode ser calculada pela somatória dos incremento de curvatura

$$\chi_{ps} = \sum d\chi_{ps} \quad (\text{III.62})$$

onde;

$$\Delta\chi_{ps} = \frac{4}{3} \left(\Delta\chi_{px}^2 + \Delta\chi_{py}^2 + \Delta\chi_{px} \Delta\chi_{py} + \frac{\Delta\chi_{pxy}^2}{4} \right) \quad (\text{III.63})$$

Partindo da condição de normalidade [12], pode-se escrever:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_p &= d\tilde{\lambda} \underline{F}_n \\ d\chi_p &= d\tilde{\lambda} \underline{F}_m \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

onde $d\tilde{\lambda}$ é um parâmetro a ser determinado, logo com a utilização de (III.59) e (III.63), resulta que:

$$d\chi_{ps} = VB \, d\tilde{\lambda} \quad (\text{III.65})$$

sendo;

$$VB = 2 \sqrt{\tilde{b}^2 \tilde{N} + \tilde{c}^2 \tilde{M} + 2 \tilde{b} \tilde{c} \tilde{MN}} \quad (\text{III.66})$$

logo, a expressão (III.56), pode ser escrita como:

$$\underline{F}_n^t \, d\underline{n} + \underline{F}_m^t \, d\underline{m} + VA \, VB \, VC \, d\tilde{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \underline{\varepsilon}_p} \, d\tilde{\lambda} \, \underline{F}_n + \frac{\partial H}{\partial \chi_p} \, d\tilde{\lambda} \, \underline{F}_m \quad (\text{III.67})$$

Os incrementos $d\underline{n}$ e $d\underline{m}$, são dados por:

$$\begin{aligned} d\underline{n} &= \underline{DM} \left\{ d\underline{\varepsilon}_t - d\underline{\varepsilon}_p \right\} \\ d\underline{m} &= \underline{DB} \left\{ d\chi_t - d\chi_p \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

utilizando (III.64), tem-se:

$$\begin{aligned} d\underline{n} &= \underline{DM} \left\{ d\underline{\varepsilon}_t - d\tilde{\lambda} \, \underline{F}_n \right\} \\ d\underline{m} &= \underline{DB} \left\{ d\chi_t - d\tilde{\lambda} \, \underline{F}_m \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

Substituindo-se (III.69) dentro de (III.67), chega-se a expressão:

$$\underline{F}_n^t \underline{DM} d\underline{\varepsilon}_t + \underline{F}_m^t \underline{DB} d\underline{\chi}_t - [\tilde{j} + \tilde{k} - V_A V_B V_C] d\tilde{\lambda} = [H_1 + H_2] d\tilde{\lambda} \quad (\text{III.70})$$

onde:

$$\begin{aligned} \tilde{j} &= \underline{F}_n^t \underline{DM} \underline{F}_n \\ \tilde{k} &= \underline{F}_m^t \underline{DB} \underline{F}_m \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial \underline{\varepsilon}_p} \underline{F}_n \quad ; \quad H_2 = \frac{\partial H}{\partial \underline{\chi}_p} \underline{F}_m \quad (\text{III.72})$$

Para a determinação de H_1 e H_2 , utiliza-se o conceito de trabalho plástico, dado por:

$$dW_p = t \tilde{\sigma} d\tilde{\varepsilon}_p = \underline{n}^t d\underline{\varepsilon}_p + \underline{m}^t d\underline{\chi}_p \quad (\text{III.73})$$

desta forma, o incremento de deformação plástica equivalente, $d\tilde{\varepsilon}_p$, é dado por:

$$d\tilde{\varepsilon}_p = \frac{1}{t \tilde{\sigma}} \left\{ \underline{n}^t d\underline{\varepsilon}_p + \underline{m}^t d\underline{\chi}_p \right\} \quad (\text{III.74})$$

ou, tendo em vista (III.64), por;

$$d\tilde{\varepsilon}_p = \frac{d\tilde{\lambda}}{t \tilde{\sigma}} \left\{ \underline{n}^t \underline{F}_n + \underline{m}^t \underline{F}_m \right\} \quad (\text{III.75})$$

É possível escrever as derivadas da função H em relação às deformações plásticas:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{\varepsilon}_p} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\varepsilon}_p} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_p}{\partial W_p} \frac{\partial W_p}{\partial \underline{\varepsilon}_p} = H' \frac{1}{t \tilde{\sigma}} \underline{n}^t \quad (\text{III.76})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{\chi}_p} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\varepsilon}_p} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_p}{\partial W_p} \frac{\partial W_p}{\partial \underline{\chi}_p} = H' \frac{1}{t \tilde{\sigma}} \underline{m}^t$$

sendo que H' é dada pela expressão (III.31).

Substituindo-se as expressões (III.76) em (III.72), obtém-se:

$$H_1 = \frac{H'}{t \tilde{\sigma}} \underline{n}^t \underline{F}_n \quad ; \quad H_2 = \frac{H'}{t \tilde{\sigma}} \underline{m}^t \underline{F}_m \quad (\text{III.77})$$

O parâmetro $d\tilde{\lambda}$ é obtido a partir de (III.70);

$$d\tilde{\lambda} = \frac{1}{\tilde{J} + \tilde{k} - V_A V_B V_C + H_1 + H_2} \left\{ \underline{F}_n^t \underline{DM} d\underline{\varepsilon}_t + \underline{F}_m^t \underline{DB} d\underline{\chi}_t \right\} \quad (\text{III.78})$$

III.4 FORÇAS INTERNAS

As forças internas [12] são calculadas a partir de:

$$\underline{F} = \int_v \underline{B}^t \underline{\sigma} dv \quad (\text{III.79})$$

Note-se que, as tensões podem estar no regime plástico, e portanto as forças internas são calculadas a partir das relações elasto-plásticas.

O procedimento para a obtenção das tensões com base nas relações elasto-plásticas é resumido da seguinte maneira:

- a) Cálculo do incremento de tensões, assumindo-se um comportamento elástico ($\Delta \underline{\sigma}_e^r$);
- b) Atualização das tensões acumuladas para cada ponto de integração

$$\underline{\sigma}^r = \underline{\sigma}^{r-1} + \Delta \underline{\sigma}_e^r \quad (\text{III.80})$$

onde $\underline{\sigma}^{r-1}$ são as tensões da iteração $r-1$;

- c) Se a tensão efetiva $\tilde{\sigma}^r < \tilde{\sigma}_0$ (expressão(III.50)), ou, se $\tilde{\sigma}^r < \tilde{\sigma}^{r-1}$, o incremento de tensões é realmente elástico, e vá para o item 1);

d) Cálculo do fator de redução de tensões R_f para retornar as tensões à superfície de escoamento

$$R_f = \begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}^r - \tilde{\sigma}_o}{\tilde{\sigma}^r - \tilde{\sigma}^{r-1}} & , \quad \tilde{\sigma}_o < \tilde{\sigma}^r \\ 1 & , \quad \tilde{\sigma}_o \geq \tilde{\sigma}^r \end{cases} ; \quad (\text{III.81})$$

e) Cálculo das tensões na superfície de escoamento

$$\underline{\sigma}^r = \underline{\sigma}^{r-1} + (1-R_f) \Delta \underline{\sigma}_e^r ; \quad (\text{III.82})$$

f) A parcela restante de tensões $R_f \Delta \underline{\sigma}_e^r$ deve ser efetivamente eliminada, para isto divide-se esta parcela em m_o intervalos, sendo m_o o menor inteiro mais próximo de

$$m_o = \left\lceil \left\lfloor \left(\frac{\tilde{\sigma}^r - \tilde{\sigma}_o}{\sigma_o} \right) 8 + 1 \right\rfloor \right\rceil \quad (\text{III.83})$$

tem-se então, que;

$$R_m \Delta \underline{\sigma}_e^r = \frac{R_f \Delta \underline{\sigma}_e^r}{m_o} ; \quad (\text{III.84})$$

g) Para $I = 1$, m_o ;

h) Cálculo do parâmetro $d\tilde{\lambda}$ através de (III.78);

i) Atualização das tensões, por meio de

$$\underline{\sigma}^r = \underline{\sigma}^r + R_m \Delta \underline{\sigma}_e^r - d\tilde{\lambda} \begin{Bmatrix} \underline{DM} \underline{F}_n \\ \underline{DB} \underline{F}_m \end{Bmatrix} ; \quad (\text{III.85})$$

j) Fim do loop em I ;

k) Correção das tensões por meio de

$$\underline{\sigma}^r = \frac{\tilde{\sigma}_o}{\tilde{\sigma}_r} \underline{\sigma}^r \quad (\text{III.86})$$

e vá para o item m);

l) As tensões estão ainda no regime elástico e são calculadas através da expressão (III.80);

m) Fim do cálculo das tensões.

Uma vez que as tensões têm sido calculadas, procede-se ao cálculo das forças internas resistentes usando a expressão (III.79).

III.5 MATRIZES ELASTO-PLÁSTICAS [14]

Recorrendo-se à condição de normalidade e ao parâmetro $d\tilde{\lambda}$ dado por (III.78), as expressões (III.64) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_p &= \frac{1}{\tilde{j} + \tilde{k} - \frac{VA}{VB} \frac{VC}{+H_1 + H_2}} \left\{ \underline{F}_n^t \underline{DM} d\varepsilon_t + \underline{F}_m^t \underline{DB} d\chi_t \right\} \underline{F}_n \\
d\chi_p &= \frac{1}{\tilde{j} + \tilde{k} - \frac{VA}{VB} \frac{VC}{+H_1 + H_2}} \left\{ \underline{F}_n^t \underline{DM} d\varepsilon_t + \underline{F}_m^t \underline{DB} d\chi_t \right\} \underline{F}_m
\end{aligned}
\tag{III.87}$$

usando a notação

$$\begin{aligned}
\underline{L}_n &= \underline{F}_n \underline{F}_n^t \\
\underline{L}_m &= \underline{F}_m \underline{F}_m^t \\
\underline{L}_{nm} &= \underline{F}_n \underline{F}_m^t
\end{aligned}
\tag{III.88}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_p &= \frac{1}{\tilde{j} + \tilde{k} - \frac{VA}{VB} \frac{VC}{+H_1 + H_2}} \left\{ \underline{L}_n \underline{DM} d\varepsilon_t + \underline{L}_{nm} \underline{DB} d\chi_t \right\} \\
d\chi_p &= \frac{1}{\tilde{j} + \tilde{k} - \frac{VA}{VB} \frac{VC}{+H_1 + H_2}} \left\{ \underline{L}_{nm}^t \underline{DM} d\varepsilon_t + \underline{L}_m \underline{DB} d\chi_t \right\}
\end{aligned}
\tag{III.89}$$

Levando (III.89) dentro de (III.68), obtém-se as relações entre os incrementos dos esforços e os incrementos das deformações, por meio de:

$$\begin{aligned}
d\underline{n} &= \underline{DM} \left\{ d\underline{\varepsilon}_t - \frac{1}{\tilde{j} + \tilde{k} - \frac{1}{V_A V_B V_C + H_1 + H_2}} \left\{ \underline{L}_n \underline{DM} d\underline{\varepsilon}_t + \underline{L}_{nm} \underline{DB} d\underline{\chi}_t \right\} \right\} \\
d\underline{m} &= \underline{DB} \left\{ d\underline{\chi}_t - \frac{1}{\tilde{j} + \tilde{k} - \frac{1}{V_A V_B V_C + H_1 + H_2}} \left\{ \underline{L}_{nm}^t \underline{DM} d\underline{\varepsilon}_t + \underline{L}_m \underline{DB} d\underline{\chi}_t \right\} \right\}
\end{aligned}
\tag{III.90}$$

ou, de outra forma;

$$\begin{aligned}
d\underline{n} &= \underline{DE} d\underline{\varepsilon}_t + \underline{DEF} d\underline{\chi}_t \\
d\underline{m} &= \underline{DEF}^t d\underline{\varepsilon}_t + \underline{DF} d\underline{\chi}_t
\end{aligned}
\tag{III.91}$$

onde, \underline{DE} , \underline{DF} e \underline{DEF} são as matrizes que definem as relações elasto-plásticas entre os esforços e as deformações, e são dadas por:

$$\begin{aligned}
\underline{DE} &= \underline{DM} \left[\underline{I} - \frac{1}{\tilde{j} + \tilde{k} - \frac{1}{V_A V_B V_C + H_1 + H_2}} \underline{L}_n \underline{DM} \right] \\
\underline{DF} &= \underline{DB} \left[\underline{I} - \frac{1}{\tilde{j} + \tilde{k} - \frac{1}{V_A V_B V_C + H_1 + H_2}} \underline{L}_m \underline{DB} \right]
\end{aligned}
\tag{III.92}$$

$$\underline{DEF} = - \frac{1}{\tilde{j} + \tilde{k} - \frac{1}{V_A V_B V_C + H_1 + H_2}} \underline{DM} \underline{L}_n \underline{DB}$$

sendo \underline{I} , a matriz identidade 3×3 .

Usando as expressões (III.92) no lugar de \underline{DM} e \underline{DB} em (III.13), resulta a matriz de rigidez elasto-plástica para o elemento de casca triangular facetado, dada por:

$$\underline{Kp} = \int_A \begin{bmatrix} \underline{B}_1^t & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{DE} & \underline{DEF} \\ \underline{DEF}^t & \underline{DF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_2 \end{bmatrix} dA \quad (\text{III.93})$$

A obtenção da matriz de rigidez elasto-plástica do elemento de casca triangular facetado, pode ser resumida da seguinte maneira:

- a) Cálculo das matrizes \underline{DM} e \underline{DB} , expressões (III.5) e (III.7);
- b) Cálculo dos esforços por unidade de comprimento dados por (III.33), e das intensidades quadráticas das tensões através de (III.34);
- c) Cálculo do valor de α_c por meio de (III.46);
- d) Cálculo dos coeficientes \tilde{a} , \tilde{b} e \tilde{c} , expressões (III.58);
- e) Cálculo dos vetores \underline{F}_n e \underline{F}_m por meio de (III.59) e com a utilização de (III.58);
- f) Cálculo dos valores de \tilde{j} e \tilde{k} , expressões (III.71);
- g) Cálculo dos valores de VA , VB e VC dados por (III.60), (III.66) e (III.61) respectivamente;
- h) Cálculo de H_1 e H_2 com a utilização de (III.72);
- i) Obtenção das matrizes \underline{L}_n , \underline{L}_m e \underline{L}_{nm} usando as

expressões (III.88);

- j) Obtenção das matrizes que estabelecem as relações elasto-plásticas entre os esforços e as deformações por meio das expressões (III.92);
- k) Obtenção da matriz de rigidez elasto-plásticas através da expressão (III.93).

III.6 MATRIZ DE RIGIDEZ COM TENSÕES INICIAIS [9,14]

No método dos elementos finitos os deslocamentos $\bar{\underline{U}}$ de um ponto no interior do elemento, podem ser obtidos a partir dos deslocamentos nodais \underline{U} , pelas funções de interpolação representadas na matriz \underline{N} , ou seja:

$$\bar{\underline{U}} = \underline{N} \underline{U} \quad (\text{III.94})$$

Os deslocamentos u e v variam linearmente no interior do elemento, produzindo, conseqüentemente, deformações e esforços de membrana constantes.

As deformações do elemento podem ser descritas em termos dos deslocamentos da superfície média do elemento. Assim, fazendo o plano xy coincidir com esta superfície média, é possível escrever:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{III.95}$$

sendo que, $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

ou,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - z \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\
\varepsilon_y &= \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} \right\} - z \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\
\gamma_{xy} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} - 2z \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}
\end{aligned} \tag{III.96}$$

ou de outra forma

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_0 - z \underline{\chi} + \underline{\varepsilon}_q \tag{III.97}$$

sendo que, $\underline{\varepsilon}_0$ contém as parcelas infinitesimais das deformações provenientes do estado plano de tensões, $\underline{\chi}$ contém as deformações devidas à flexão expressas pelas

curvaturas da superfície média, e $\underline{\varepsilon}_g$ contém as parcelas não lineares das deformações provenientes do estado plano de tensões.

É possível escrever $\underline{\varepsilon}_g$ sob a forma:

$$\underline{\varepsilon}_g = \frac{1}{2} \underline{A}_g \underline{\theta}_g \quad (\text{III.98})$$

onde

$$\underline{A}_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\theta}_g = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.99})$$

As derivadas dos deslocamentos que aparecem no vetor $\underline{\theta}_g$, podem ser relacionadas aos deslocamentos nodais \underline{U} , derivando convenientemente (III.94), ou seja;

$$\underline{\theta}_g = \underline{G} \underline{U} \quad (\text{III.100})$$

onde \underline{G} contém as derivadas de \underline{N} em relação a x e y .

Derivando (III.98), resulta

$$d\underline{\varepsilon}_g = \frac{1}{2} d\underline{A}_g \underline{\theta}_g + \frac{1}{2} \underline{A}_g d\underline{\theta}_g \quad (\text{III.101})$$

De (III.99), pode-se facilmente mostrar que

$$d\mathbf{A}_g \mathbf{\theta}_g = \mathbf{A}_g d\mathbf{\theta}_g \quad (\text{III.102})$$

logo, levando (III.100) e (III.102) em (III.101), obtém-se:

$$d\mathbf{\varepsilon}_g = \mathbf{A}_g d\mathbf{\theta}_g = \mathbf{A}_g \mathbf{G} d\mathbf{U} = \hat{\mathbf{B}} d\mathbf{U} \quad (\text{III.103})$$

onde

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A}_g \mathbf{G} \quad (\text{III.104})$$

O variação do vetor de forças internas pode ser escrito como:

$$d\mathbf{F} = \int_V d\hat{\mathbf{B}} \mathbf{\sigma} dv = \int_V \mathbf{G}^t d\mathbf{A}^t \mathbf{\sigma} dv \quad (\text{III.105})$$

É possível verificar por simples substituição a relação:

$$d\mathbf{A}^t \mathbf{\sigma} = \mathbf{H}_{\sigma} \mathbf{G} d\mathbf{U} \quad (\text{III.106})$$

sendo;

$$\mathbf{H}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (\text{III.107})$$

levando (III.106) em (III.105), resulta:

$$d\underline{F} = \int_V \underline{G}^t \underline{H}_\sigma \underline{G} d\underline{U} dv \quad (\text{III.108})$$

ou,

$$\underline{F} = \int_V \underline{G}^t \underline{H}_\sigma \underline{G} \underline{U} dv \quad (\text{III.109})$$

sendo que

$$\underline{K}g = \int_V \underline{G}^t \underline{H}_\sigma \underline{G} dv \quad (\text{III.110})$$

é a matriz de rigidez com tensões iniciais do elemento de casca triangular facetado.

Levando em consideração (III.33), vem que:

$$\underline{K}g = \int_A \underline{G}^t \hat{\underline{H}}_\sigma \underline{G} dA \quad (\text{III.111})$$

sendo

$$\hat{\underline{H}}_{\sigma} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (\text{III.112})$$

A matriz \underline{K}_g foi explicitada por HOLLAND e BELL [15] sob a forma:

$$\underline{K}_g = \underline{K}_{g_x} + \underline{K}_{g_y} + \underline{K}_{g_{xy}} \quad (\text{III.113})$$

onde;

$$\begin{aligned} \underline{K}_{g_x} &= \frac{1}{2A} N_x [y_{23}^2 \underline{K}^a + y_{23} y_{31} \underline{K}^b + y_{31}^2 \underline{K}^c] \\ \underline{K}_{g_y} &= \frac{1}{2A} N_y [x_{32}^2 \underline{K}^a + x_{32} x_{13} \underline{K}^b + x_{13}^2 \underline{K}^c] \quad (\text{III.114}) \\ \underline{K}_{g_{xy}} &= \frac{1}{2A} N_{xy} [2 y_{23} x_{32} \underline{K}^a + (y_{31} x_{32} + y_{23} x_{13}) \underline{K}^b + \\ &\quad 2 y_{31} x_{13} \underline{K}^c] \end{aligned}$$

A matriz tangente aproximada \underline{K}_t do elemento triangular de casca facetada, é dada pela soma da matriz de rigidez elasto-plástica \underline{K}_p e a matriz de rigidez com tensões iniciais \underline{K}_g

$$\underline{K}_t = \underline{K}_p + \underline{K}_g \quad (\text{III.115})$$

sendo que, os termos da matriz de rigidez com tensões iniciais, relativos às translações e à rotação no plano

são nulos.

As matrizes \underline{K}^a , \underline{K}^b e \underline{K}^c da expressão (III.114) são dadas por;

$$\underline{K}^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & 0 \\ & & & & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{60} & -\frac{1}{60} & 0 \\ & \text{sim} & & & & \frac{1}{12} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{60} & 0 \\ & & & & & & \frac{1}{45} & \frac{1}{90} & 0 \\ & & & & & & & \frac{1}{45} & 0 \\ & & & & & & & & \frac{1}{30} \end{bmatrix} \quad (\text{III.116})$$

$$\underline{K}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{30} & 0 \\ & \text{sim} & & & & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{30} \\ & & & & & & \frac{1}{90} & \frac{1}{90} & \frac{1}{90} \\ & & & & & & & \frac{1}{30} & -\frac{1}{90} \\ & & & & & & & & \frac{1}{30} \end{bmatrix} \quad (\text{III.117})$$

$$\underline{\underline{K}}^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{60} & 0 & -\frac{1}{60} \\ & & & & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{60} & 0 & \frac{1}{60} \\ & \text{sim} & & & & \frac{1}{12} & \frac{1}{60} & 0 & \frac{1}{60} \\ & & & & & & \frac{1}{45} & 0 & \frac{1}{90} \\ & & & & & & & \frac{1}{30} & 0 \\ & & & & & & & & \frac{1}{45} \end{bmatrix}$$

(III.118)

CAPITULO IV

ALGORITMOS DE ANÁLISE E
IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

IV.1 ALGORITMOS DE ANÁLISE NÃO-LINEAR

O estudo de um problema elasto-plástico sob tensões iniciais implica na solução de um sistema de equações do tipo;

$$\underline{K}(U) \quad \underline{U} = \underline{R} \quad (IV.1)$$

onde $\underline{K}(U)$ é a matriz de rigidez elasto-plástica com tensões iniciais, a qual por sua vez é função direta ou indireta dos deslocamentos \underline{U} , e \underline{R} é o vetor de forças externas.

É possível solucionar este tipo de problemas de forma simples, obtendo soluções lineares por meio de processos incrementais-iterativos, de tal forma que no final sejam satisfeitas as leis do comportamento do problema em questão.

IV.1.1 MÉTODO INCREMENTAL-ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON

A equação (IV.1) escrita em forma incremental é dada por:

$$\underline{K}(U)_{t+\Delta t} \Delta \underline{U}_{t+\Delta t} = \Delta \underline{R}_{t+\Delta t} \quad (\text{IV.2})$$

onde;

- $\underline{K}(U)_{t+\Delta t}$ - Matriz de rigidez tangente (função dos deslocamentos) da etapa de carga $t+\Delta t$
- $\Delta \underline{U}_{t+\Delta t}$ - Incremento dos deslocamentos da etapa de carga $t+\Delta t$
- $\Delta \underline{R}_{t+\Delta t}$ - Vetor das forças de desequilíbrio (ou seja a diferença entre as forças externas aplicadas e as forças internas resistentes) da etapa de carga $t+\Delta t$

Resolvendo a equação (IV.2) obtém-se um incremento de deslocamentos, no equilíbrio $\Delta \underline{R}_{t+\Delta t}$ deve ser zero, se isto não acontecer, haverá então uma força de desequilíbrio e precisara-se resolver novamente a equação (IV.2) com esta nova força de desequilíbrio, o que provocara um novo incremento de deslocamentos. Os deslocamentos totais serão iguais ao somatório do incremento de deslocamentos anterior e o novo. Para se

fazer isto, precisa-se de um algoritmo incremental-iterativo da forma:

$$\underline{K}_{t+\Delta t}^i \Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \underline{R}_{t+\Delta t} - \underline{F}_{t+\Delta t}^i \quad (\text{IV.3})$$

sendo;

$\underline{K}_{t+\Delta t}^i$ - Matriz de rigidez tangente da etapa de carga $t+\Delta t$ e da iteração i (função dos deslocamentos da iteração i da mesma etapa de carga)

$\Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^{i+1}$ - Incremento de deslocamentos da iteração $i+1$ na etapa de carga $t+\Delta t$

$\underline{R}_{t+\Delta t}$ - Força externa total aplicada na etapa de carga $t+\Delta t$

$\underline{F}_{t+\Delta t}^i$ - Força interna resistente na iteração i da etapa de carga $t+\Delta t$ (função dos deslocamentos da iteração i da mesma etapa de carga)

O processo que envolve a resolução da equação (IV.3) é esquematizado na figura (IV.1) e é conhecido como Método Incremental-Iterativo de Newton-Raphson. Onde o equilíbrio sera alcançado para cada etapa de carga, e em caso da estrutura apresentar uma resposta não linear, serão feitas iterações dentro de cada etapa de carga até alcançar o equilíbrio.

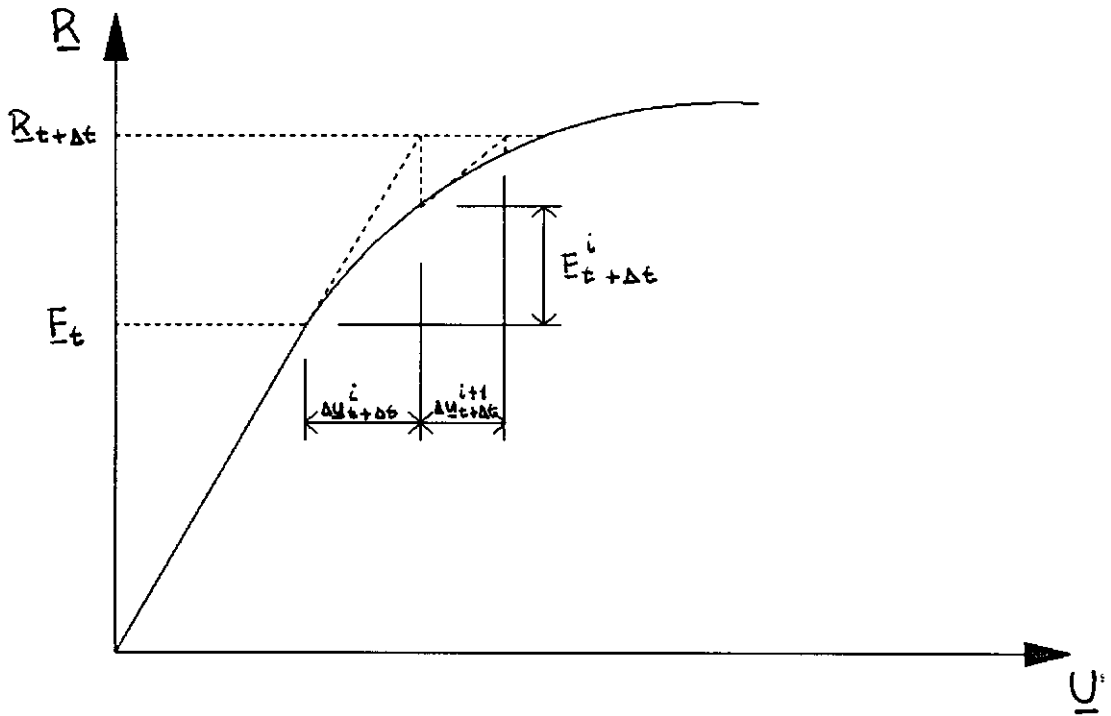


Figura (IV.1) Método Incremental-Iterativo de
Newton-Raphson

IV.1.2 MÉTODO INCREMENTAL-ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO

Pode-se observar que a solução da equação (IV.3) implica na atualização da matriz de rigidez tangente ($K_{t+\Delta t}^i$) a cada iteração, isto pode resultar num esforço computacional muito grande, principalmente na montagem das matrizes de rigidez dos elementos de casca, as quais são obtidas via integração numerica.

Esta situação pose ser melhorada se a matriz

$(\underline{K}_{t+\Delta t}^i)$, é reavaliada só a cada certo número de iterações, ou no início de cada etapa de carga, ou alternativamente usando-se a matriz de rigidez tangente da primeira iteração que freqüentemente é a matriz de rigidez elástica da estrutura (este último processo é conhecido como método das tensões iniciais).

Esta variação do método incremental-iterativo de Newton-Raphson é esquematizada na figura (IV.2) e é conhecido como Método Incremental-Iterativo de Newton-Raphson Modificado.

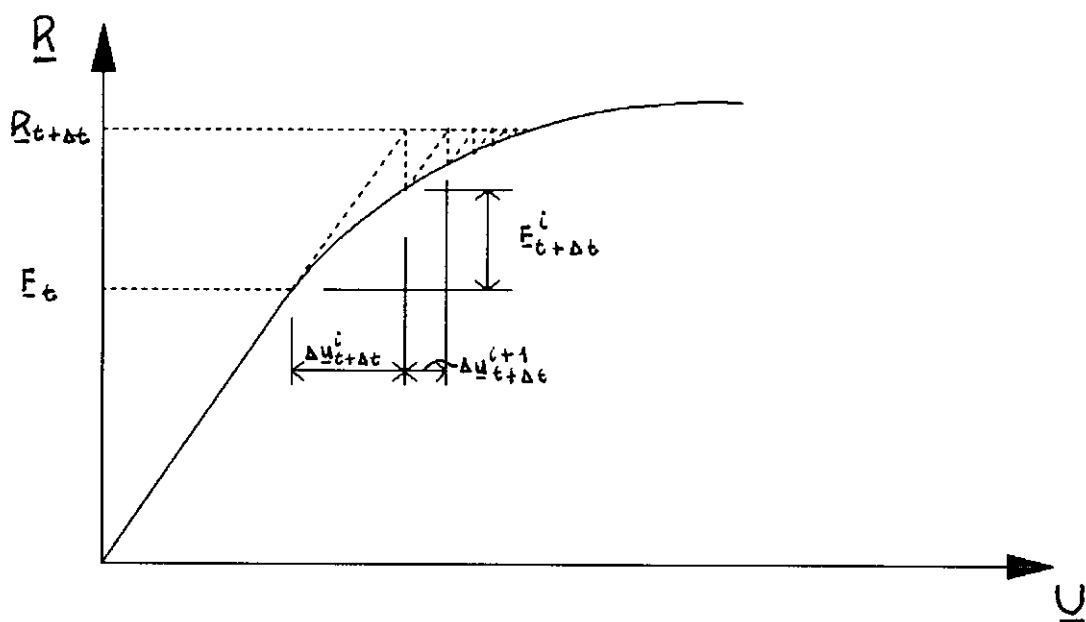


Figura IV.2 Método Incremental-Iterativo de
Newton-Raphson Modificado

O uso deste método resulta numa convergência mais

lenta na resolução da equação (IV.3), porém o gasto computacional requerido quando se utiliza este processo é geralmente inferior ao requerido quando se utiliza o processo convencional.

IV.2 ALGORITMO PARA CONTROLE DE DESLOCAMENTOS [16]

Na análise de problemas não lineares, com freqüência encontram-se dificuldades de convergência nos processos iterativos quando ocorre perda subita de rigidez durante um incremento de carga.

Têm sido sugeridos diversos algoritmos para acelerar a convergência dos processos iterativos. Entretanto, próximo à carga crítica, os algoritmos de controle de deslocamentos são mais recomendáveis. Devido às suas características de implementação e pela sua generalidade, optou-se pelo algoritmo de controle de deslocamentos sugerido por HAISLER e STRICKLIN [17]. Este algoritmo é resumido a seguir.

Considere o sistema de equações incrementais dado em (IV.3) na forma;

$$\underline{K} \Delta \underline{U} = \underline{R} - \underline{F} \quad (\text{IV.4})$$

se a relação entre as cargas é fixada, e apenas seus valores desconhecidos, tem-se:

$$\underline{\mathbf{R}} = \lambda \tilde{\underline{\mathbf{R}}} \quad (\text{IV.5})$$

onde;

$\tilde{\underline{\mathbf{R}}}$ - Vetor com a relação entre as cargas

λ - Parâmetro de carga a ser aplicado

de (IV.4) e (IV.5) segue-se que:

$$\underline{\mathbf{K}} \Delta \underline{\mathbf{U}} = \lambda \tilde{\underline{\mathbf{R}}} - \underline{\mathbf{F}} \quad (\text{IV.6})$$

Quando a matriz $\underline{\mathbf{K}}$ se torna quase singular, a equação (IV.6) não pode mais ser resolvida. Esta dificuldade pode ser superada incrementando-se uma das componentes de deslocamentos, com o qual se calcula então o parâmetro λ a ser aplicado para que se produza este deslocamento.

Supondo que o deslocamento Δu_1 seja especificado, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{11} & \underline{\mathbf{K}}_{12} \\ \underline{\mathbf{K}}_{21} & \underline{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{U}}_1 \\ \Delta u_1 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{R}}}_1 \\ \tilde{\underline{\mathbf{R}}}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_1 \\ \underline{\mathbf{F}}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

sendo;

$\underline{\mathbf{K}}_{11}$ - Matriz $\underline{\mathbf{K}}$ com a linha e a coluna 1 removidas

\underline{K}_{12} - Coluna 1 da matriz \underline{K} sem a linha 1

\underline{K}_{21} - Linha 1 da matriz \underline{K} sem a coluna 1

K_{22} - Elemento k_{11} da matriz \underline{K}

$\Delta \underline{U}_1$ - Vetor de deslocamentos não especificados

$\tilde{\underline{R}}_1$ - Vetor com a relação das cargas na estrutura sem a linha 1

\tilde{R}_2 - Elemento \tilde{R}_1 do vetor $\tilde{\underline{R}}$

\underline{F}_1 - Vetor das forças internas resistentes sem a linha 1

F_2 - Elemento F_1 do vetor \underline{F}

Da equação (IV.7) vem que:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & -\tilde{\underline{R}}_1 \\ \underline{K}_{21} & -\tilde{R}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{U}_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \underline{F}_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} - \Delta u_1 \begin{Bmatrix} \underline{K}_{12} \\ K_{22} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

A expressão (IV.8) é um sistema de n equações com n incógnitas, incluindo λ . Para resolver este, expande-se (IV.8) e obtém-se:

$$\underline{K}_{11} \Delta \underline{U}_1 = \lambda \tilde{\underline{R}}_1 - \underline{F}_1 - \Delta u_1 \underline{K}_{12} \quad (\text{IV.9})$$

$$\underline{K}_{21} \Delta \underline{U}_1 - \lambda \tilde{R}_2 = -F_2 - \Delta u_1 K_{22} \quad (\text{IV.10})$$

Na equação (IV.9) $\Delta \underline{U}_1$ pode ser expresso por;

$$\Delta \underline{U}_1 = \underline{A} + \underline{B} \lambda \quad (\text{IV.11})$$

onde \underline{A} e \underline{B} são as soluções das equações

$$\underline{K}_{11} \underline{A} = -\underline{F}_1 - \Delta u_1 \underline{K}_{12} \quad (\text{IV.12})$$

$$\underline{K}_{11} \underline{B} = \tilde{\underline{R}}_1 \quad (\text{IV.13})$$

Substituindo-se (IV.11) em (IV.10), obtém-se;

$$\lambda = - \frac{\underline{F}_2 + \underline{K}_{21} \underline{A} + \underline{K}_{22} \Delta u_1}{\underline{K}_{21} \underline{B} - \tilde{\underline{R}}_2} \quad (\text{IV.14})$$

conhecido o valor de λ , e levando-o dentro de (IV.11), é determinado o vetor $\Delta \underline{U}_1$.

Considere-se agora a equação de recorrência (IV.3) para o processo de iteração de Newton-Raphson como;

$$\underline{K}_{t+\Delta t}^i \Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \lambda \tilde{\underline{R}}_{t+\Delta t} - \underline{F}_{t+\Delta t}^i \quad (\text{IV.15})$$

Os valores dos deslocamentos e o parâmetro de carga λ no início do processo iterativo em cada etapa de carga são calculados usando um incremento de deslocamento fixado (Δu_1^{i+1}) . Este valor permanece nulo durante as iterações posteriores de cada etapa de carga, o que significa que a cada uma destas iterações dentro do mesmo incremento de carga o sistema de equações a ser resolvido sera do tipo:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & -\underline{\tilde{R}}_1 \\ \underline{K}_{21} & -\underline{\tilde{R}}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{U}_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

O valor de λ em cada iteração é calculado por:

$$\lambda_a^i = \lambda^{i+1} \cdot \lambda^i \quad (\text{IV.17})$$

Observa-se em (IV.16) que quando o equilíbrio é alcançado o valor de λ é igual a 1.

IV.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Quando se utilizam métodos incrementais-iterativos para a solução de problemas não lineares, é de muita importância o uso de critérios de convergência para indicar o término das iterações.

No final de cada iteração a solução obtida deve ser avaliada a fim de estabelecer a convergência da mesma. Se a tolerância para esta é muito pobre, a solução será inadequada, por outro lado, se a tolerância for muito rígida, precisara-se de um esforço computacional muito

grande para obter uma precisão desnecessária da solução.

Entre os diversos critérios de convergência mais utilizados, podem ser citados os seguintes:

- Critério dos Deslocamentos
- Critério das Forças de Desequilíbrio
- Critério de Energia Incremental Interna

No presente trabalho foram empregados os dois primeiros, os quais são descritos a seguir.

IV.3.1 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DOS DESLOCAMENTOS [18]

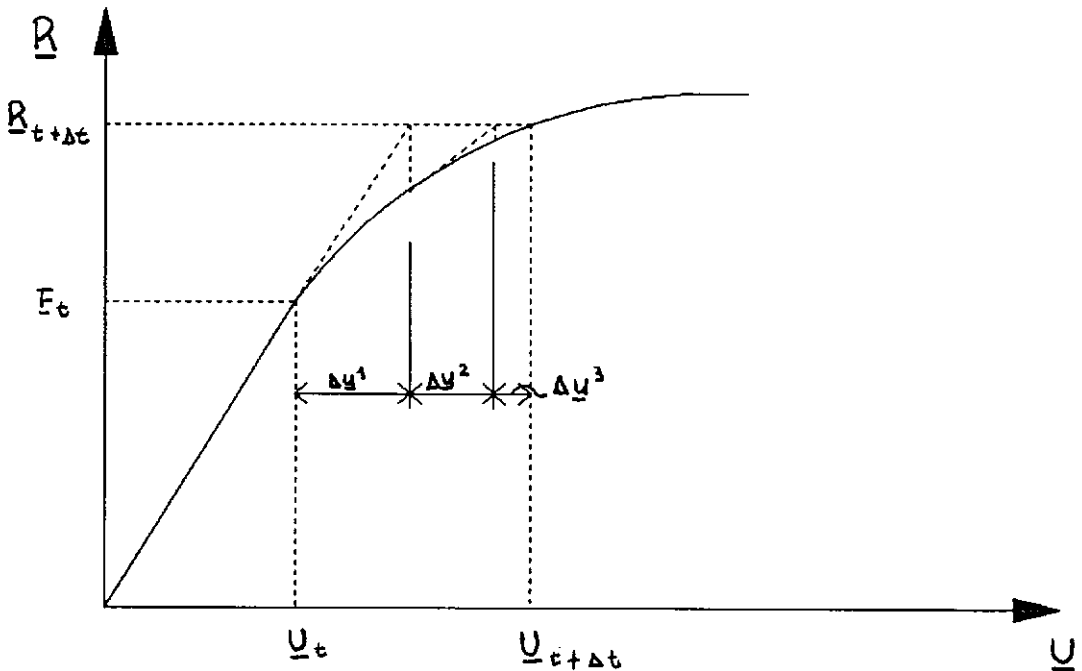


Figura (IV.3) Critérios de Convergência

Observa-se na figura (IV.3) a configuração de deslocamentos para o tempo $(t+\Delta t)$. No final desta etapa de carga os deslocamentos obtidos devem ser iguais aos deslocamentos da solução real. Numericamente isto é impossível, e portanto é preciso avaliar a solução ao final de cada iteração para estabelecer a precisão da mesma. Pode considerarse que a Solução é satisfatória quando os deslocamentos obtidos permanecem dentro de uma tolerância pre-estabelecida em relação aos deslocamentos reais.

Um critério realístico é dado pela Norma Euclidiana dos Deslocamentos, expressa por:

$$\frac{\Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^i}{\underline{U}_{t+\Delta t}} \leq \epsilon_D \quad (\text{IV.18})$$

onde;

$\Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^i$ - Norma euclidiana do incremento de deslocamentos na iteração i da etapa de carga $t+\Delta t$

$\underline{U}_{t+\Delta t}$ - Norma euclidiana dos deslocamentos acumulados da etapa de carga $t+\Delta t$

ϵ_D - Tolerância dos deslocamentos

o termo $\underline{U}_{t+\Delta t}$ não é conhecido a priori, e deve ser aproximado.

Uma maneira de aproximar $\underline{U}_{t+\Delta t}$, é usar o fator de convergência [19]

$$q = \frac{\Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^i}{\Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^{i-1}} \quad (IV.19)$$

sendo;

$\Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^{i-1}$ - Norma euclidiana do incremento de deslocamentos da iteração $i-1$ e da etapa de carga $t+\Delta t$

se a iteração estiver convergindo o fator de convergência devesse ser menor que a unidade ($q \leq 1$), e o mesmo não devesse exceder o fator corrente nas iterações posteriores nesta etapa de carga, tem-se então que;

$$\underline{U}_{t+\Delta t} - \underline{U}_{t+\Delta t}^{i-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^k \Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^i \quad (IV.20)$$

onde $\underline{U}_{t+\Delta t}$ é o vetor de equilíbrio dos deslocamentos, se q for menor que a unidade, tem-se que;

$$\underline{U}_{t+\Delta t} - \underline{U}_{t+\Delta t}^{i-1} \leq \frac{q}{1-q} \Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^i \quad (IV.21)$$

Se o fator de convergência é usado como uma projeção anterior à solução correta, o critério de convergência dos deslocamentos aparece como:

$$\frac{q}{1-q} \Delta \underline{U}^1_{t-2} \leq \epsilon_D \underline{U}_{t-2} \quad (\text{IV.22})$$

onde \underline{U}_{t-2} é a norma de deslocamentos previamente calculada, usualmente a Norma euclidiana dos deslocamentos da etapa de carga anterior \underline{U}_t .

IV.3.2 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DAS FORÇAS DE DESEQUILÍBRIO [18]

Um critério de convergência mais rigoroso é baseado nas forças de desequilíbrio. Este critério requer que a norma do vetor de cargas de desequilíbrio esteja dentro de uma certa tolerância em relação ao incremento de carga original, ou seja:

$$\underline{R}_{t+\Delta t}^1 - \underline{F}_{t+\Delta t}^1 \leq \epsilon_F \underline{R}_{t+\Delta t} - \underline{F}_t \quad (\text{IV.23})$$

A fim de que o critério de convergência das forças não seja muito rigoroso para pequenos incrementos de carga, é preferível usar o máximo incremento de carga inicial $\underline{R}_{t+\Delta t} - \underline{F}_t^{(\text{máx})}$ na equação (IV.23) no lugar de $\underline{R}_{t+\Delta t} - \underline{F}_t$, onde o símbolo (máx) indica o máximo valor calculado durante a solução.

O uso dos critérios de convergência deve ser feito com muito cuidado devido às inconsistências das unidades nos vetores de deslocamentos e forças.

IV.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento triangular de casca facetada, é preciso avaliar expressões que envolvem integrais do tipo (III.13) e (III.93). A precisão da avaliação destas integrais depende do método escolhido para se obter as mesmas.

Neste trabalho estas integrais são avaliadas de forma numerica, utilizando o método desenvolvido por HAMMER para elementos triangulares em coordenadas naturais [20], o processo pode ser realizado com um, três ou quatro pontos de integração como é mostrado na figura (IV.4), cujas coordenadas e pesos são mostrados na tabela (IV.1).

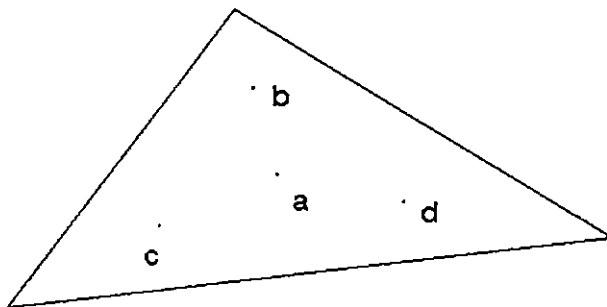


Figura (IV.4) Pontos de Integração do elemento triangular

NPI *	Ponto	Coordenadas	Peso
1	a	$\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}$	1
3	b	$\frac{2}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	c	$\frac{1}{6} ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	d	$\frac{1}{6} ; \frac{1}{6} ; \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
4	a	$\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
	b	$\frac{3}{5} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$
	c	$\frac{1}{5} ; \frac{3}{5} ; \frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$
	d	$\frac{1}{5} ; \frac{1}{5} ; \frac{3}{5}$	$\frac{25}{48}$

* Número de Pontos de Integração

Tabela (IV.1) Pontos de integração do elemento triangular

IV.5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O programa COPAE (Colapso de Paineis Enrijecidos) implementado neste trabalho, foi desenvolvido tomando como base o programa STAP [21], tendo sido aproveitada a sua estrutura de armazenamento e resolução do sistema de equações algébricas. Foram introduzidas algumas modificações e acrescentadas rotinas para efetuar a análise limite de estruturas enrijecidas sob tensões iniciais.

Entre as principais características do programa podem ser citadas as seguintes:

- O programa utiliza armazenamento em disco para reduzir o uso de memória central;
- O armazenamento da matriz de rigidez pode ser feito em blocos dependendo do espaço disponível em memória central;
- O programa permite a solução de estruturas com diversos tipos de carregamento;
- O programa utiliza uma formulação incremental-iterativa.
- A solução do problema não linear pode ser feita utilizando-se o algoritmo de controle de carga ou o algoritmo de controle de deslocamentos descritos anteriormente;
- A solução do problema não linear pode ser feita usando o Método Incremental-Iterativo de Newton-Raphson (atualização da matriz de rigidez a cada iteração), ou alternativamente utilizando o Método Incremental-Iterativo de Newton Raphson-Modificado. Caso seja escolhido este último, são possíveis as seguintes opções;
 - * Atualização da matriz de rigidez, só no início de cada etapa de carga;
 - * Atualização da matriz de rigidez, a cada certo número de iterações, especificadas pelo usuário;
 - * Não atualização da matriz de rigidez, ou seja, a

solução é feita usando-se a matriz de rigidez elástica;

A seguir são descritos alguns dos aspectos antes mencionados e feitos alguns comentários sobre a implementação computacional dos mesmos.

IV.5.1 ARMAZENAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

O programa utiliza um esquema de armazenamento em perfil, por meio das alturas efetivas de colunas. Este esquema é muito eficiente, pois armazena num só vetor de trabalho \underline{VAT} os elementos de cada coluna, desde o elemento da diagonal principal até o último elemento não nulo da coluna como é esquematizado na figura (IV.5)

ou seja, o vetor \underline{VAT} é dado por:

$$\underline{VAT}^t = \{ k_{11} \ k_{22} \ k_{12} \ k_{33} \ k_{23} \ k_{44} \ k_{34} \ k_{24} \ k_{14} \ k_{55} \ k_{45} \ \dots \\ \dots \ k_{66} \ k_{56} \ k_{46} \ k_{36} \ k_{77} \ k_{67} \ k_{88} \ 0 \ 0 \ k_{58} \ }$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{33} & k_{34} & 0 & k_{36} & 0 & 0 \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & 0 & 0 \\ & & & & k_{55} & k_{56} & 0 & k_{58} \\ & & & & & k_{66} & k_{67} & 0 \\ & & & & & & k_{77} & 0 \\ & & & & & & & k_{88} \end{bmatrix}$$

Figura (IV.5) Matriz de Rigidez da Estrutura

Para a localização dos termos da diagonal principal dentro do vetor \underline{VAT} , é montado o vetor auxiliar \underline{MAXA} , de modo que para a matriz \underline{K} , tem-se:

$$\underline{MAXA}^t = \{ 1 \ 2 \ 4 \ 6 \ 10 \ 12 \ 16 \ 18 \}$$

O calculo deste vetor depende da determinação prévia das alturas efetivas das colunas, para o qual é calculado o número da equação correspondente a cada grau de liberdade para todos os elementos da estrutura.

Devido à limitação de memória central, as vezes é necessário particionar a matriz global da estrutura em grupos de colunas, tais grupos são denominados blocos. Para armazenar a matriz de rigidez desta maneira, é preciso definir os seguintes parâmetros:

- Tamanho de cada bloco, ou seja o número de elementos contidos dentro de cada bloco;
- A numeração do primeiro elemento de cada bloco, relacionado com a numeração de um armazenamento não particionado;
- Numero de colunas contidas dentro de cada bloco.

O armazenamento da matriz global particionada em blocos é esquematizado na figura (IV.6).

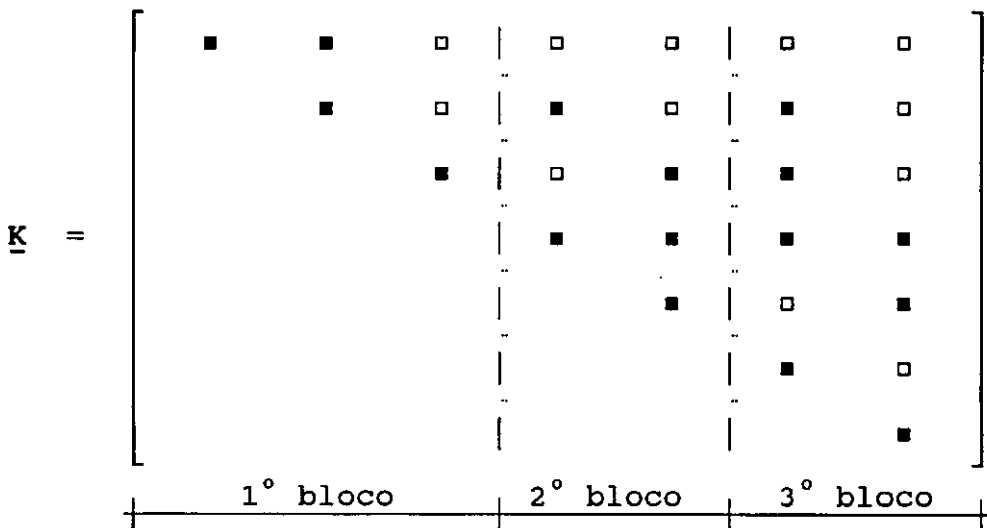


Figura (IV.6) Esquema de armazenamento em blocos

IV.5.2 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES UTILIZANDO MEMÓRIA AUXILIAR

A solução do sistema de equações utilizando memória auxiliar, pode-se resumir da seguinte maneira:

TRIANGULARIZAÇÃO

- a) Para $I = 1$, N° de blocos;
- b) Leitura em arquivo de memória auxiliar do bloco I ;
- c) Triangularização do sub-bloco principal $S_{I,I}$;
- d) Se $I = N^\circ$ de blocos ,vá para o item l);
- e) Para $I1 = (I+1)$, N° de blocos;
- f) Se não existe acoplamento entre os blocos I e $I1$,
vá para o item j);
- g) Leitura em arquivo de memória auxiliar do bloco $I1$ se
o N° de blocos for maior que dois;
- h) Triangularização do sub-bloco secundário $S_{I,I1}$;
- i) Gravação em arquivo de memória auxiliar do bloco $I1$
se existir mais do que um sub-bloco secundário acoplado
a I e se o N° de blocos for maior que dois;
- j) Fim do loop $I1$;
- k) Gravação em arquivo de memória auxiliar do bloco I ;
- l) Modificação do vetor de desequilíbrio;
- m) Fim do loop I .

RETRO-SUBSTITUIÇÃO

- a) Para $I = N^\circ$ de blocos , 1 (decrementos de 1);
- b) Leitura em arquivo de memória auxiliar do bloco I , se
 I for diferente do N° de blocos;
- c) Cálculo da retro-substituição, relativamente às colunas
do bloco I ;

d) Fim do loop I .

IV.5.3 ANÁLISE INCREMENTAL-ITERATIVA

A solução do problema não linear com base na formulação incremental-iterativa descrita anteriormente, pode ser resumida da seguinte maneira:

- a) Para $IT = 1$, NT (N° de etapas de carga);
- b) Cálculo das matrizes de rigidez dos elementos e do vetor de forças internas resistentes;
- c) Montagem da matriz de rigidez global da estrutura.
- d) Triangularização da matriz de rigidez global da estrutura;
- e) Cálculo do vetor de forças de desequilíbrio;
- f) Análise da convergência, usando o critério das forças de desequilíbrio;
- g) Retro-substituição da matriz de rigidez global da estrutura e redução do vetor de cargas para a obtenção do incremento de deslocamentos;
- h) Atualização dos deslocamentos acumulados;
- i) Análise da convergência, utilizando o critério dos deslocamentos;
- j) Se a convergência em f) e i) não foi alcançada volta para o item b);

- k) Convergência alcançada, impressão dos deslocamentos, esforços e/ou tensões nos elementos;
- l) Fim do loop IT .

IV.5.4 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO PARA CONTROLE DE DESLOCAMENTOS

Quando o problema não linear é solucionado utilizando o algoritmo para controle de deslocamentos, a matriz de rigidez global da estrutura é montada primeiramente da mesma maneira que quando se utiliza o algoritmo para controle de carga (matriz \underline{K} da equação (IV.7)).

Para a solução do problema é necessário resolver os sistemas de equações das expressões (IV.12) e (IV.13), é preciso então efetuar certas modificações na matriz de rigidez global da estrutura, já que a ordem da matriz \underline{K}_{11} destas equações é igual à ordem da matriz \underline{K} da equação (IV.7) menos um.

Estas modificações são feitas pela rotina de montagem da matriz de rigidez global da estrutura **MONGLO** e com auxílio da rotina **SERROT** da seguinte maneira:

- a) Para $I = 1$, N° de blocos;

- b) Espalha as matrizes dos elementos dentro da matriz de rigidez global da estrutura;
- c) Se o bloco I é menor que o bloco que contém a diagonal da equação controlada, vá para o item e);
- d) Chamada da rotina `SERROT` para efetuar as modificações no bloco I ;
- e) Fim do loop I .

A rotina `SERROT` é resumida assim:

- a) Se o bloco em questão for maior que o bloco que contém a diagonal da equação controlada, só serão feitas modificações na linha desta equação, já que os termos da coluna encontram-se dentro do bloco com a diagonal desta equação como é mostrado na figura (IV.7), vá para o item e);
- b) Copia os termos da coluna da equação controlada dentro do vetor `COLD` e logo depois zera estes termos dentro da matriz global;
- c) Salva o termo da diagonal da equação controlada dentro da variável AK_{22} e faz este termo dentro da matriz global igual à unidade;
- d) Copia os termos da linha da equação controlada contidos no bloco em questão dentro do vetor `COLD` , e zera os mesmos dentro da matriz global, vá para o item f);

$$\underline{K} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} \square & \square & \square & \square & \blacksquare & \square & \square & \square \\ & \square & \square & \square & \blacksquare & \square & \square & \square \\ & & \square & \square & \blacksquare & \square & \square & \square \\ & & & \square & \blacksquare & \square & \square & \square \\ & & & & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ & & & & & \square & \square & \square \\ & & & & & & \square & \square \\ & & & & & & & \square \end{array} \right]$$

1° bloco
2° bloco
3° bloco

Figura (IV.7) Equação controlada dentro da matriz global da estrutura

- e) O bloco em questão só contém termos da linha da equação controlada, copia estes dentro do vetor `COLD` e zera os mesmos dentro da matriz global;
- f) Volta à rotina `MONGLO` e continua o loop dentro dos blocos.

Após estas modificações os termos da coluna e linha da equação controlada têm sido desacoplados da matriz global da estrutura, chama-se então à rotina `CNTDSL` para obter a solução das equações (IV.12) e (IV.13) e calcular o parâmetro λ da expressão (IV.14).

CAPÍTULO V

ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, são analisados alguns exemplos, os quais têm sido amplamente estudados por diversos autores [22-26] , etc., e refletem situações práticas do comportamento não linear das estruturas. Pretende-se com isto mostrar a eficiência dos modelos simplificados implementados neste trabalho para a determinação da carga limite. Os resultados teóricos extraídos das referências acima citadas, serviram de base para uma avaliação do desempenho e a confiabilidade do programa implementado no presente trabalho.

V.1 PLATAFORMA MARÍTIMA FIXA

Este estudo tem como objetivo, mostrar a aplicabilidade do elemento de pórtico espacial elasto-plástico sob tensões iniciais. A estrutura analisada é uma plataforma fixa, hipotética de quatro pernas, a altura da estrutura é de 75 metros, com uma lâmina d'água de 65 metros. As dimensões da seção

transversal variam de uma seção quadrada de 50 metros no topo a uma seção quadrada de 58 metros na base da estrutura. As figuras (V.1), (V.2) e (V.3) mostram a planta, elevação e perspectiva, respectivamente.

As propriedades geométricas da estrutura, bem como as dimensões das seções transversais das barras e o sistema de disposição das mesmas, foram ajustadas a modo de se obter as seguintes condições:

- Uma alta rigidez global com o objetivo de obter um comportamento essencialmente estático;
- As dimensões globais são semelhantes às de uma plataforma real;
- Suficiente ductibilidade para se ter uma grande reserva de capacidade de resistência após acontecer o primeiro escoamento.

Ductibilidade é a capacidade que a estrutura possui de continuar absorvendo incrementos de carga após a tensão de escoamento ter sido alcançada em uma ou mais seções transversais. Em uma estrutura dúctil, as deformações inelásticas e a redistribuição de carga, ocorre antes de se alcançar o colapso total.

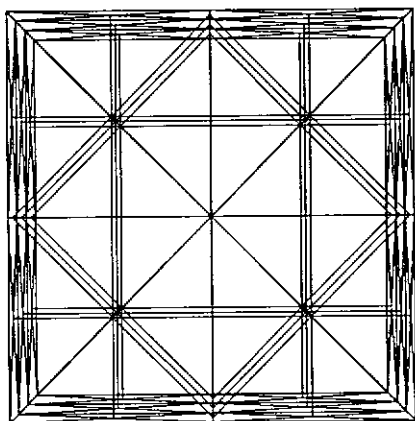


Figura (V.1) Planta

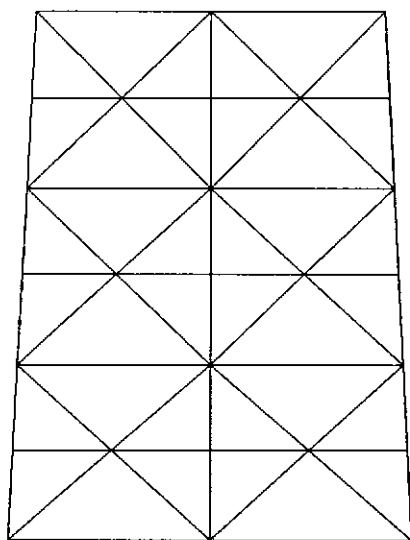


Figura (V.2) Elevação

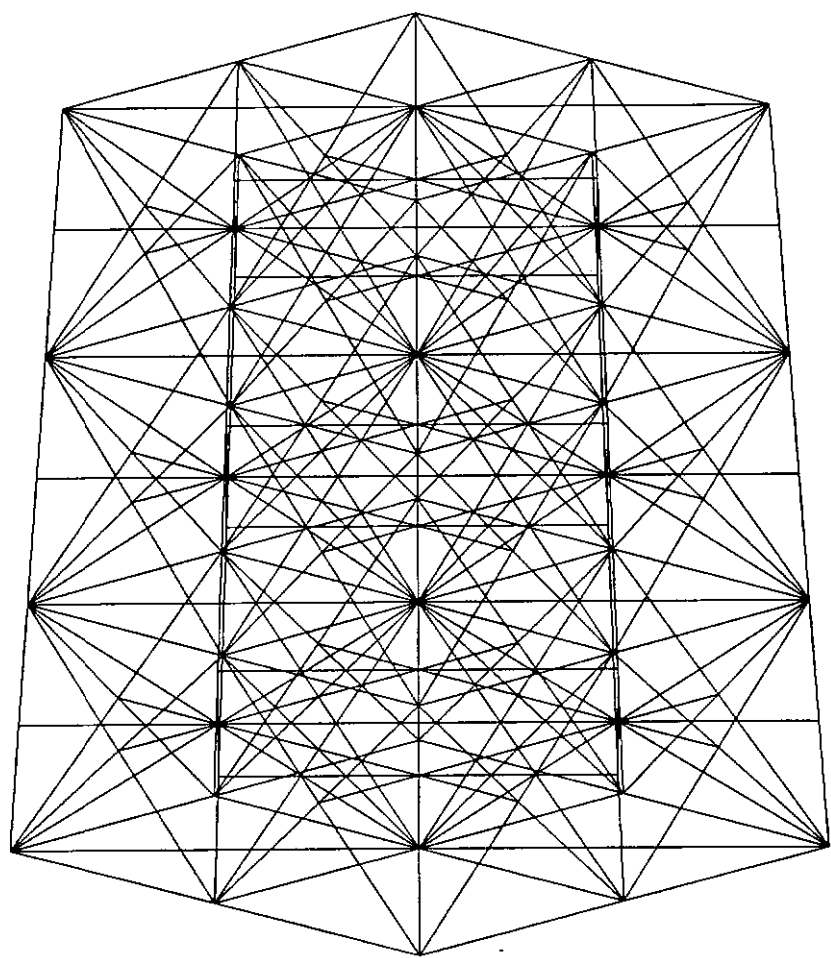


Figura (V.3) Perspectiva

A versão final do modelo estrutural, resultou numa malha composta por 111 nós e 406 elementos de barra. Devido a que as estacas de fundação não foram incluídas no modelo estrutural, as condições de suporte da plataforma foram simuladas usando-se modelos de molas lineares. O sistema global de coordenadas tem o eixo Z normal ao plano definido pelo fundo do mar, e os eixos X e Y paralelos a este e aos lados da plataforma.

O valor total das cargas verticais atuando no convés é de 112.000 KN. As cargas de tormenta são devidas a uma onda de 10 metros de altura com um período de 11 segundos e uma correnteza que varia linearmente desde 1,5 m/s na superfície do mar até 0.09 m/s no fundo, a velocidade do vento é de 37,3 m/s na altura de referência. Na análise, as cargas ambientais atuam na direção do eixo X do sistema global de coordenadas.

Esta estrutura foi analisada anteriormente por BENJAMIN e EBECKEN [22], através de uma formulação lagrangeana. Neste trabalho pretende-se avaliar a aproximação que se obtém para a carga limite desta estrutura utilizando-se procedimentos mais simples. A estrutura foi analisada primeiramente levando em consideração só a não linearidade física e posteriormente a não linearidade física junto com os efeitos dos esforços internos utilizando a matriz de tensões iniciais.

Investiga-se a viabilidade deste modelo simplificado para a obtenção da carga limite.

As cargas atuantes sobre a plataforma foram divididas em três grupos, compostos das cargas de peso próprio, as cargas do convés e as cargas ambientais, e a cada um destes grupos foram associadas funções de aplicação de carga diferentes, λ_1 , λ_2 e λ_3 respectivamente. As cargas dos dois primeiros grupos foram aplicadas incrementalmente até alcançar os valores de $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$, logo após mantiveram-se constantes durante o resto da análise. As cargas ambientais foram gradualmente incrementadas depois de serem aplicadas as cargas dos dois primeiros grupos até se alcançar a carga limite da estrutura.

Neste exemplo em particular não é possível realizar a análise utilizando o algoritmo para controle de deslocamentos, devido ao número de funções de carga superior a um, e as quais por sua vez seguem direções de aplicação diferentes para as respectivas cargas. Embora o algoritmo de Newton-Raphson Modificado dispense a montagem e triangularização da matriz de rigidez global da estrutura, optou-se pelo algoritmo convencional, já que as matrizes de rigidez dos elementos de pórtico são obtidas de forma explícita e os esforços internos são obtidos a partir da relação destas matrizes com os deslocamentos,

sendo necessário portanto o calculo das mesmas a cada iteração. A curva de resposta do deslocamento horizontal do convés é mostrada na figura (V.4), os dados utilizados para traçar esta curva encontram-se nas tabelas (V.1) e (V.2) para as análises elasto-plástica e elasto-plástica sob tensões iniciais respectivamente. A curvas de resposta do esforço axial nos elementos 113 e 116 são mostradas nas figuras (V.5) e (V.6) respectivamente, e os valores utilizados encontram-se nas tabelas (V.3) e (V.4) para a análise elasto-plástica , e nas tabelas (V.5) e (V.6) para a análise elasto-plástica sob-tensões iniciais.

A carga limite corresponde ao parâmetro de carga $\lambda_3 = 4,11$ para a análise elasto-plástica sob tensões iniciais, o critério adotado para a determinação desta carga limite foi a singularidade na matriz de rigidez global da estrutura. Esta singularidade é devida ao fato de que os esforços internos tornam a matriz de rigidez não positiva definida. Isto pode interpretar-se como a formação de rótulas que transformam a estrutura num mecanismo, utilizando-se o método de Gauss para a solução do sistema de equações, foi possível continuar a análise após a primeira singularidade. Já na análise elasto-plástica encontrou-se que a carga limite corresponde ao parâmetro de carga $\lambda_3 = 4,24$, sendo que o critério adotado nesta análise para a determinação da carga de colapso foi a obtenção de um deslocamento horizontal do convés

significativo . A carga limite encontrada por BENJAMIN e EBECKEN corresponde ao parâmetro de carga $\lambda_3 = 4,04$,sendo que o critério adotado por estes para a determinação da carga de colapso foi a não convergência após 15 iterações dentro de uma etapa de carga.

Deslocamento (m)	λ_3	Deslocamento (m)	λ_3
0,019352	0,25	0,404247	4,22
0,038703	0,50	0,410955	4,24
0,058055	0,75	0,418569	4,26
0,077406	1,00	0,427441	4,28
0,096757	1,25	0,438083	4,30
0,116111	1,50	0,451035	4,32
0,135751	1,75	0,466616	4,34
0,155637	2,00	0,484883	4,36
0,175734	2,25	0,505406	4,38
0,196077	2,50	0,527977	4,40
0,217147	2,75	0,553106	4,42
0,239040	3,00	0,581769	4,44
0,257378	3,20	0,615459	4,46
0,277330	3,40	0,654002	4,48
0,299625	3,60	0,698084	4,50
0,325551	3,80	0,721029	4,51
0,332238	3,85	0,744492	4,52
0,339338	3,90	0,768293	4,53
0,346954	3,95	0,792364	4,54
0,355211	4,00	0,816670	4,55
0,362168	4,04	0,841180	4,56
0,369750	4,08	0,865882	4,57
0,378121	4,12	0,890779	4,58
0,387490	4,16	0,915886	4,59
0,398203	4,20	0,941233	4,60

Tabela (V.1) Deslocamento horizontal do convés
análise elasto-plástica

Deslocamento (m)	λ_3	Deslocamento (m)	λ_3
0,019431	0,25	0,380688	4,10
0,038861	0,50	0,383135	4,11
0,058292	0,75	0,385668	4,12
0,077725	1,00	0,388297	4,13
0,097158	1,25	0,391037	4,14
0,116600	1,50	0,393902	4,15
0,136340	1,75	0,396911	4,16
0,156330	2,00	0,400126	4,17
0,176535	2,25	0,403334	4,18
0,197020	2,50	0,406828	4,19
0,218259	2,75	0,410600	4,20
0,240352	3,00	0,414698	4,21
0,258956	3,20	0,419203	4,22
0,279293	3,40	0,424226	4,23
0,302186	3,60	0,429927	4,24
0,329196	3,80	0,436522	4,25
0,333250	3,83	0,444284	4,26
0,337487	3,86	0,453493	4,27
0,341838	3,89	0,464286	4,28
0,346412	3,92	0,476547	4,29
0,351220	3,95	0,490071	4,30
0,356304	3,98	0,504714	4,31
0,361715	4,01	0,520439	4,32
0,367523	4,04	0,537366	4,33
0,373810	4,07	0,555935	4,34

Tabela (V.2) Deslocamento horizontal do convés
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

λ_3	Força (KN)	λ_3	Força (KN)
0,25	-121,64	4,22	590,27
0,50	-75,10	4,24	591,10
0,75	-28,56	4,26	591,81
1,00	17,99	4,28	592,36
1,25	64,53	4,30	592,76
1,50	111,08	4,32	593,09
1,75	158,94	4,34	593,34
2,00	207,91	4,36	593,53
2,25	257,83	4,38	593,71
2,50	308,59	4,40	593,90
2,75	361,76	4,42	594,12
3,00	417,72	4,44	594,38
3,20	460,28	4,46	594,67
3,40	495,40	4,48	595,01
3,60	525,64	4,50	595,38
3,80	550,59	4,51	595,56
3,85	556,89	4,52	595,75
3,90	562,82	4,53	595,93
3,95	568,34	4,54	596,11
4,00	573,44	4,55	596,29
4,04	577,34	4,56	596,46
4,08	580,93	4,57	596,63
4,12	584,16	4,58	596,79
4,16	586,96	4,59	596,94
4,20	589,30	4,60	597,07

Tabela (V.3) Força axial no elemento 113
análise elasto-plástica

λ_3	Força (KN)	λ_3	Força (KN)
0,25	-121,40	4,10	585,76
0,50	-74,61	4,11	586,50
0,75	-27,82	4,12	587,20
1,00	18,96	4,13	587,86
1,25	65,75	4,14	588,49
1,50	112,56	4,15	589,09
1,75	160,73	4,16	589,66
2,00	210,02	4,17	590,27
2,25	260,29	4,18	590,56
2,50	311,50	4,19	590,92
2,75	365,22	4,20	591,25
3,00	421,87	4,21	591,52
3,20	463,94	4,22	591,72
3,40	498,97	4,23	591,86
3,60	529,03	4,24	591,92
3,80	553,74	4,25	591,89
3,83	557,67	4,26	591,82
3,86	561,49	4,27	591,64
3,89	565,08	4,28	591,36
3,92	568,55	4,29	591,07
3,95	571,86	4,30	590,71
3,98	575,01	4,31	590,32
4,01	578,00	4,32	589,90
4,04	580,81	4,33	589,47
4,07	583,41	4,34	588,13

Tabela (V.4) Força axial no elemento 113
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

λ_3	Força (KN)	λ_3	Força (KN)
0,25	-214,64	4,22	-597,49
0,50	-261,10	4,24	-597,49
0,75	-307,55	4,26	-597,49
1,00	-354,01	4,28	-597,50
1,25	-400,46	4,30	-597,50
1,50	-446,85	4,32	-597,50
1,75	-484,04	4,34	-597,50
2,00	-513,36	4,36	-597,50
2,25	-535,91	4,38	-597,50
2,50	-553,08	4,40	-597,50
2,75	-567,21	4,42	-597,50
3,00	-577,62	4,44	-597,50
3,20	-584,41	4,46	-597,50
3,40	-589,44	4,48	-597,50
3,60	-592,93	4,50	-597,50
3,80	-596,14	4,51	-597,50
3,85	-596,52	4,52	-597,50
3,90	-596,81	4,53	-597,50
3,95	-597,02	4,54	-597,50
4,00	-597,17	4,55	-597,50
4,04	-597,29	4,56	-597,50
4,08	-597,38	4,57	-597,50
4,12	-597,43	4,58	-597,50
4,16	-597,46	4,59	-597,50
4,20	-597,48	4,60	-597,50

Tabela (V.5) Força axial no elemento 116
análise elasto-plástica

λ_3	Força (KN)	λ_3	Força (KN)
0,25	-214,89	4,10	-597,48
0,50	-261,60	4,11	-597,48
0,75	-308,31	4,12	-597,49
1,00	-355,03	4,13	-597,49
1,25	-401,75	4,14	-597,49
1,50	-448,25	4,15	-597,49
1,75	-485,32	4,16	-597,49
2,00	-514,49	4,17	-597,49
2,25	-536,87	4,18	-597,49
2,50	-553,97	4,19	-597,49
2,75	-567,96	4,20	-597,49
3,00	-578,22	4,21	-597,50
3,20	-584,93	4,22	-597,50
3,40	-589,87	4,23	-597,50
3,60	-593,33	4,24	-597,50
3,80	-596,72	4,25	-597,50
3,83	-596,90	4,26	-597,50
3,86	-597,05	4,27	-597,50
3,89	-597,17	4,28	-597,50
3,92	-597,26	4,29	-597,50
3,95	-597,33	4,30	-597,50
3,98	-597,39	4,31	-597,50
4,01	-597,42	4,32	-597,50
4,04	-597,45	4,33	-597,50
4,07	-597,47	4,34	-597,50

Tabela (V.6) Força axial no elemento 116
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

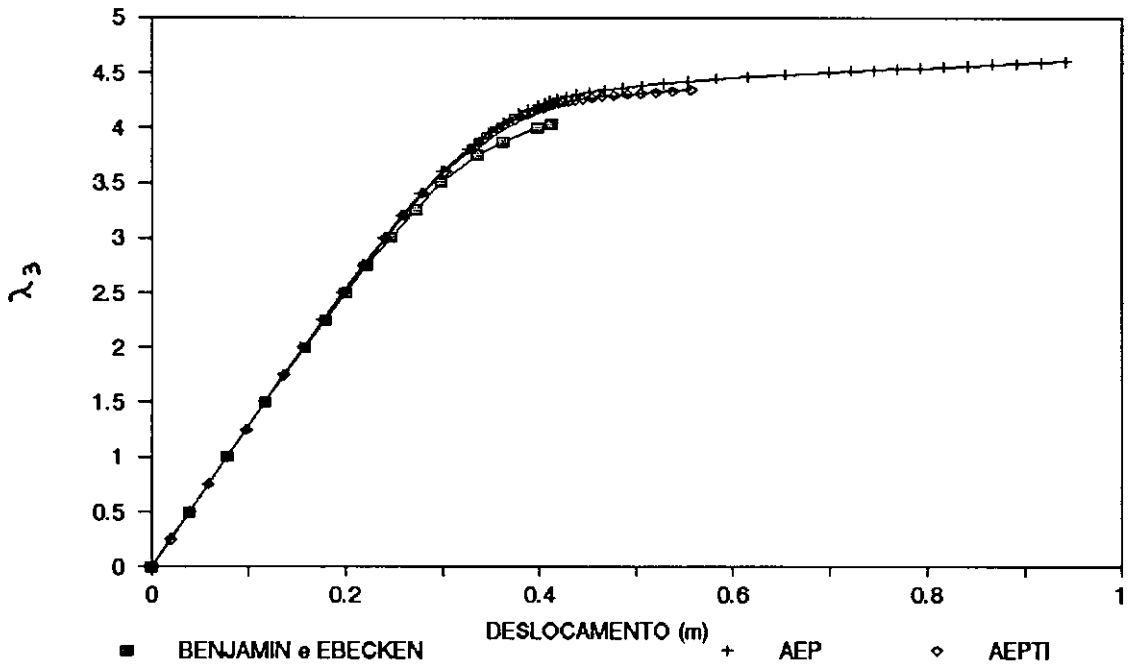


Figura (V.4) Curva λ_3 - deslocamento

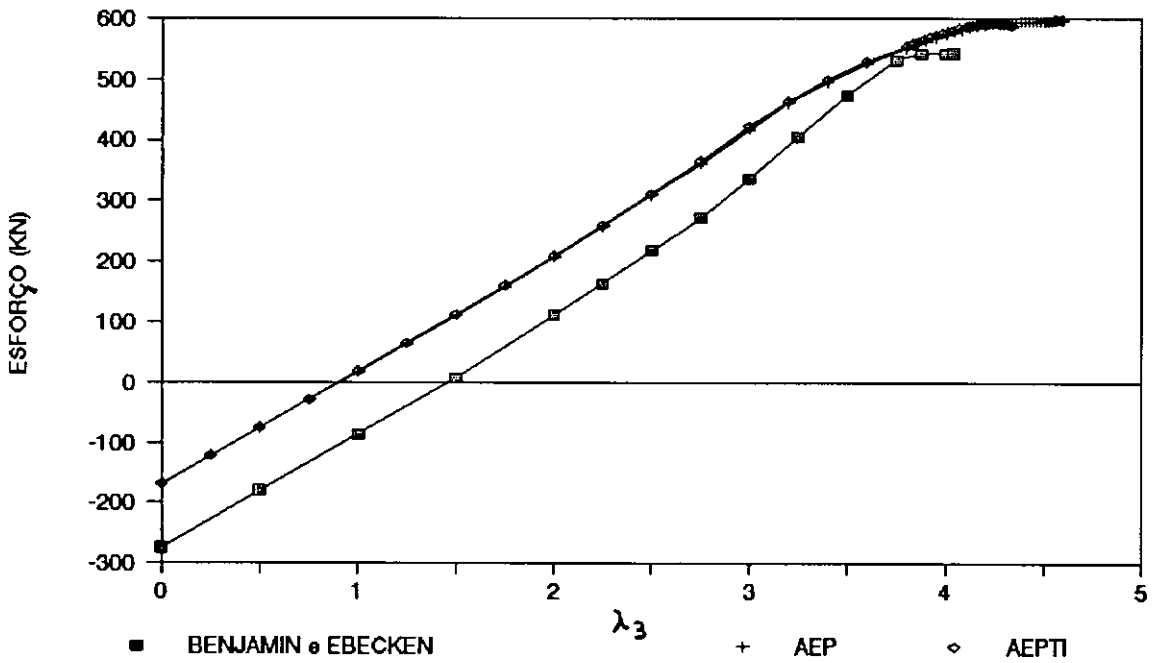


Figura (V.5) Curva Esforço - λ_3 para o elemento 113

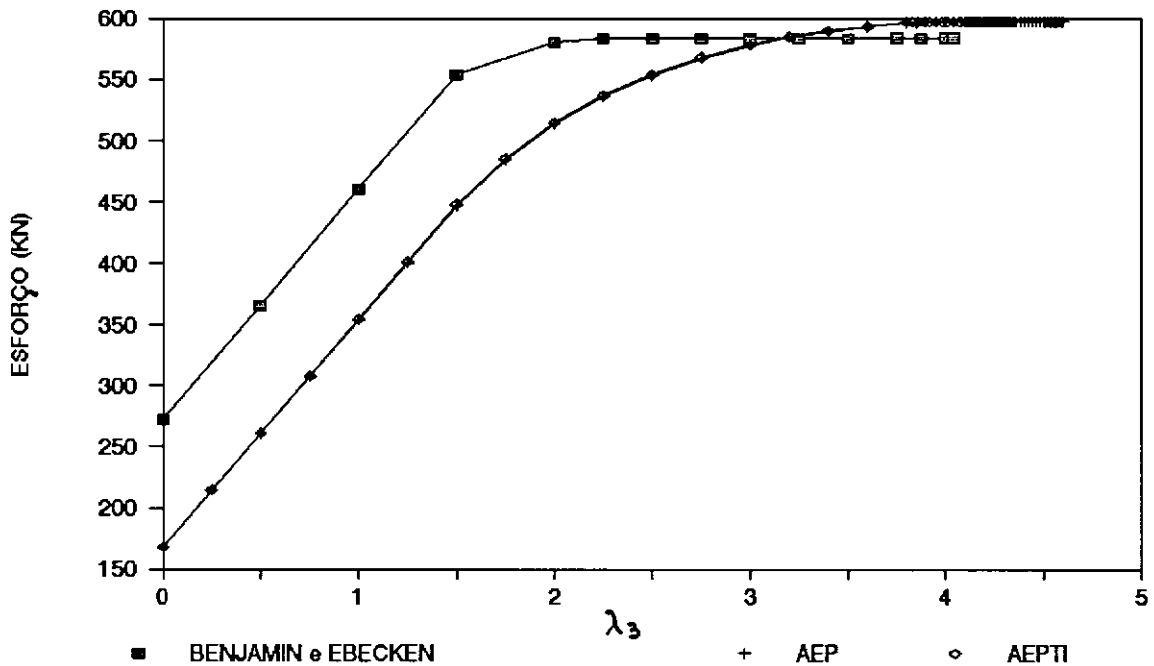


Figura (V.6) Curva Esforço - λ_3 para o elemento 116

Deve-se ter muito cuidado com o critério adotado para a determinação da carga limite. No caso, não se pode afirmar que a não convergência da solução indique que a carga limite foi alcançada, pois a mesma depende da tolerância admitida, assim como do número máximo de iterações permitido. Se estes últimos são muito rigorosos, é muito possível que não se consiga a convergência, e que a carga obtida ao final do processo não seja a carga limite.

V.2 JUNTA TUBULAR X

O objetivo desta análise é mostrar a aplicabilidade e desempenho do elemento triangular de casca elasto-plástico sob tensões iniciais. A estrutura analisada é uma junta tubular X . Este tipo de juntas são encontradas freqüentemente nas estruturas offshore como as de tipo jaqueta e as plataformas semi-submersíveis. O estudo da integridade destas estruturas tem ganho muita importância nos últimos anos, já que estas são construídas em profundidades marinhas e nos mais variados ambientes hostis.

As juntas tubulares são estruturas de casca com configuração geométrica complexa, formada pela interseção de membros tubulares. Na análise de juntas tubulares com o método dos elementos finitos, têm sido usados uma grande variedade de elementos, sendo que para isto são necessários computadores de grande capacidade de processamento e geralmente o custo computacional é elevado. Portanto é importante, sempre que for possível aproveitar as condições de simetria da configuração geométrica da estrutura bem como a simetria das condições do carregamento a fim de produzir malhas de elementos finitos simples, visando com isto reduzir o custo computacional.

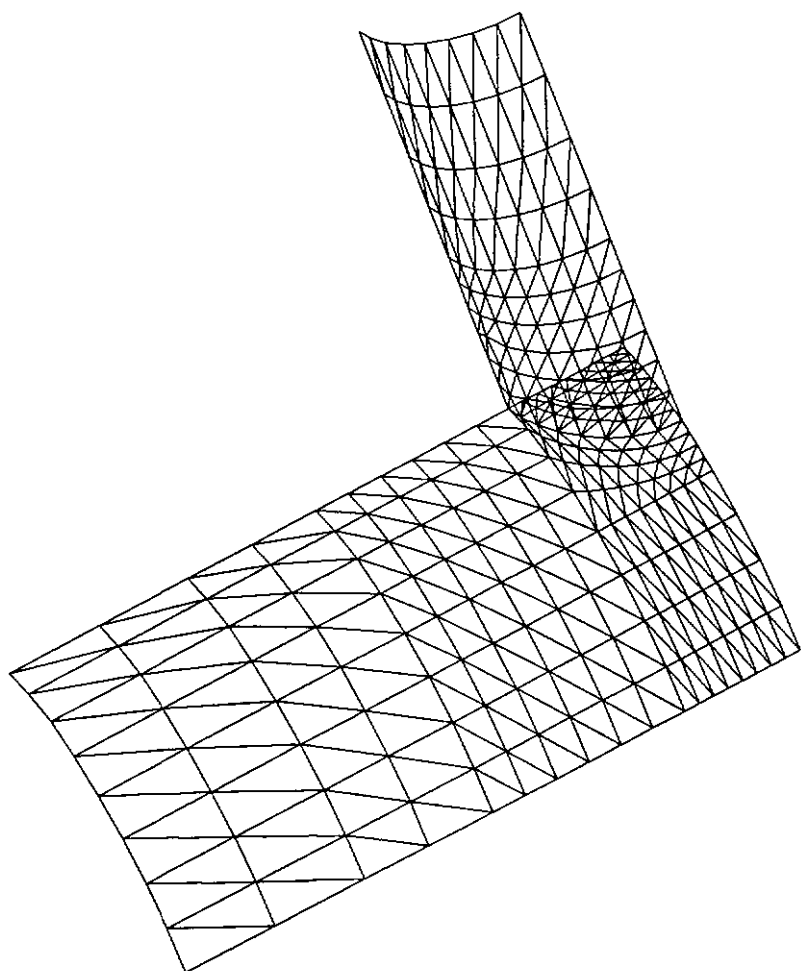


Figura (V.7) Junta Tubular x

A figura (V.7) mostra a malha utilizada para um oitavo da estrutura e suas dimensões. Corresponde a um tubo principal com raio de 175 mm, comprimento de 480 mm e espessura de 10mm; o tubo secundário tem comprimento de 475 mm, raio de 90 mm e espessura de 8 mm. Esta estrutura foi analisada anteriormente por EBECKEN, LIMA, etc. [23] através de uma formulação de elementos isoparamétricos de oito nós, sendo que estes levaram em conta apenas a não linearidade física dos materiais. Pretende-se com este exemplo determinar a resistência estática da junta tubular X usando um modelo simples. Primeiramente a estrutura foi analisada considerando-se apenas a não linearidade física. Foram feitas três análises com um, três e quatro pontos de integração para a obtenção das matrizes de rigidez dos elementos, usando-se o algoritmo para controle de deslocamentos e o algoritmo de Newton-Raphson Modificado. As cargas limite obtidas foram 128,10 Kgf/mm , 130,65 Kgf/mm e 130,68 Kgf/mm para as três análises respectivamente. As curvas correspondentes à evolução do deslocamento no topo do tubo secundário são mostradas na figura (V.8). Os valores usados para o traçado destas curvas aparecem na tabela (V.7). As curvas da evolução dos esforços unitários N_x dos elementos 239 e 248 da interseção da junta são mostradas na figura (V.9) e (V.10) respectivamente. Os valores usados para o traçado destas curvas encontram-se nas tabelas (V.8) , (V.9) e (V.10).

Deslocamento (mm)	Carga (Kgf/mm)		
	1 P.I.	3 P.I.	4 P.I.
0,50	22,29	22,64	22,64
1,00	43,99	45,03	45,03
1,50	64,71	66,41	66,42
2,00	83,99	86,24	86,24
2,50	100,94	103,40	103,40
3,00	113,10	115,62	115,62
3,50	120,42	122,89	122,89
4,00	124,59	126,99	127,00
4,50	126,85	129,29	129,29
5,00	128,10	130,65	130,68
5,50	128,79	131,49	131,47
6,00	129,24	132,01	132,03
6,50	129,55	132,42	132,44
7,00	129,77	132,72	132,71
7,50	129,94	132,93	132,97
8,00	130,11	133,13	133,15
8,50	130,20	133,29	133,34
9,00	130,29	133,43	133,44
9,50	130,39	133,57	133,57
10,00	130,46	133,67	133,66

Tabela (V.7) Deslocamento no topo do tubo secundário
análise elasto-plástica

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 239	Elemento 248
22,29	44,23	40,91
43,99	76,77	78,65
64,71	82,88	102,79
83,99	75,49	119,63
100,94	73,48	131,74
113,10	75,09	141,27
120,42	76,70	147,90
124,59	77,81	152,38
126,85	78,38	155,11
128,10	78,92	156,41
128,79	79,31	157,22
129,24	79,59	157,72
129,55	79,84	158,31
129,77	80,26	158,23
129,94	80,21	158,51
130,11	80,73	158,48
130,20	80,72	158,80
130,29	81,07	158,78
130,39	80,95	158,97
130,46	81,16	158,94

Tabela (V.8) Esforços unitários N_x 1 P.I.
análise elasto-plástica

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 239	Elemento 248
22,64	44,23	40,91
45,03	77,32	80,67
66,41	85,93	108,24
86,24	81,12	126,47
103,40	80,62	140,90
115,62	83,42	151,83
122,89	85,77	157,78
126,99	87,13	160,32
129,29	87,84	161,31
130,65	88,30	161,36
131,49	88,51	161,08
132,01	88,87	160,76
132,42	89,09	160,41
132,72	89,11	160,04
132,93	89,35	159,67
133,13	89,32	159,41
133,29	89,55	159,27
133,43	89,62	159,03
133,57	89,71	158,89
133,67	89,91	158,77

Tabela (V.9) Esforços unitários N₃ P.I.
análise elasto-plástica^x

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 239	Elemento 248
22,64	44,23	40,91
45,03	77,41	81,22
66,42	85,85	109,31
86,24	80,28	128,31
103,40	79,15	143,31
115,62	81,30	154,34
122,89	83,07	161,06
127,00	84,33	164,93
129,29	85,03	167,19
130,68	85,26	168,02
131,47	85,59	168,65
132,03	85,66	168,92
132,44	85,84	169,05
132,71	85,84	169,04
132,97	85,88	169,03
133,15	86,18	169,16
133,34	86,21	169,21
133,44	86,29	169,15
133,57	86,42	169,08
133,66	86,51	169,15

Tabela (V.10) Esforços unitários N_x 4 P.I.
análise elasto-plástica ^x

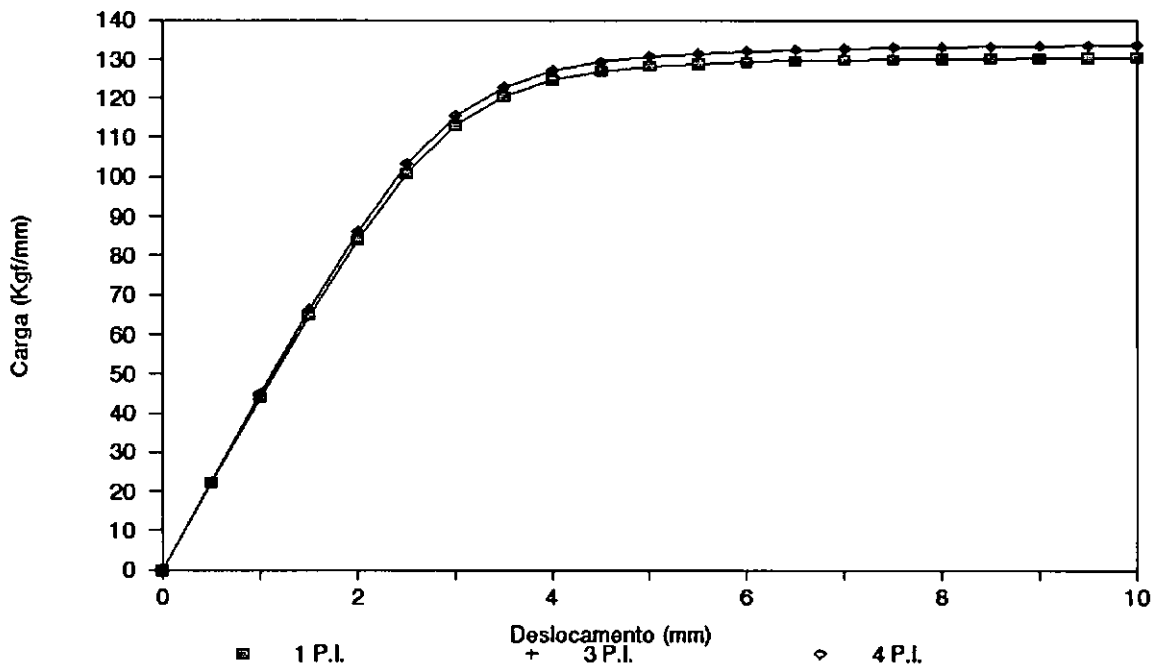


Figura (V.8) Curva Deslocamento - Carga

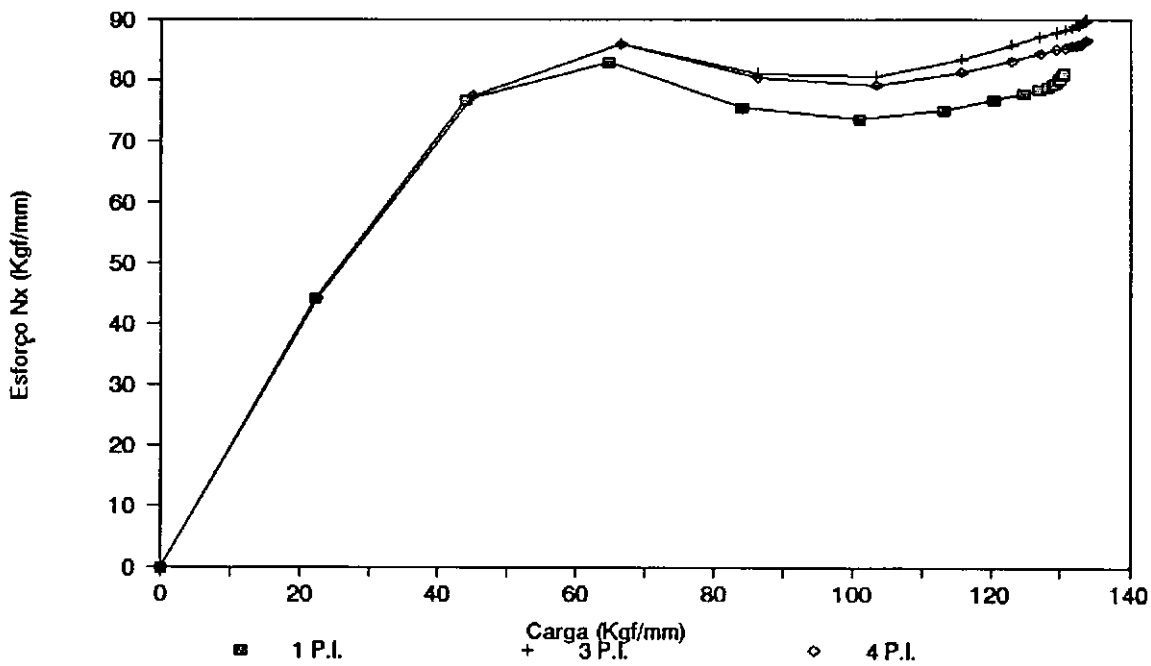


Figura (V.9) Curva Carga - Esforço para o Elemento 239

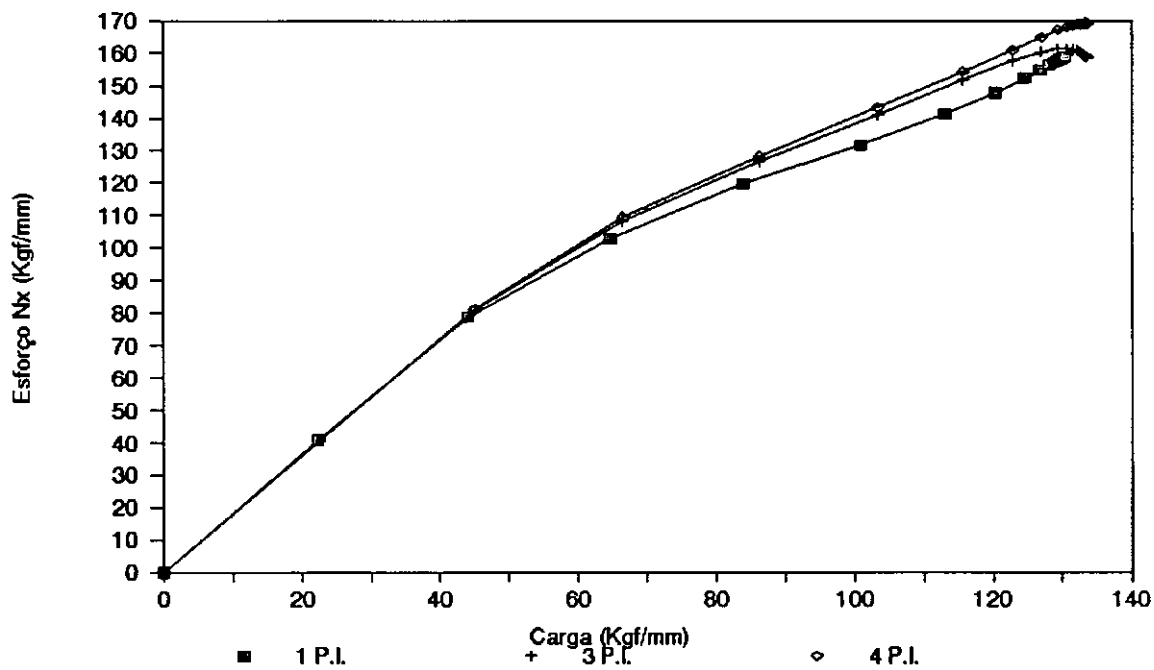


Figura (V.10) Curva Carga - Esforço para o Elemento 248

Para a análise elasto-plástica sob tensões iniciais, utilizou-se também o algoritmo para controle de deslocamentos e o algoritmo de Newton-Raphson convencional para se evitar problemas de convergência na vizinhança da carga limite. As cargas limite encontradas foram 106,35 Kgf/mm, 118,17 Kgf/mm e 117,82 Kgf/mm para as análises com um, três e quatro pontos de integração respectivamente. As curvas de evolução do deslocamento no topo do tubo secundário são mostradas na figura (V.11) e o seus valores correspondentes aparecem na tabela (V.11). As

curvas da evolução dos esforços unitários N_x dos elementos 239 e 248 estão indicadas nas figuras (V.12) e (V.13) respectivamente e os seus valores correspondentes encontram-se nas tabelas (V.12) e (V.13) e (V.14).

Deslocamento (mm)	Carga (Kgf/mm)		
	1 P.I.	3 P.I.	4 P.I.
0,50	19,88	22,52	22,40
1,00	39,34	44,63	44,41
1,50	56,08	64,03	63,74
2,00	71,53	80,87	80,49
2,50	83,76	94,92	94,60
3,00	92,63	104,97	104,75
3,50	98,78	110,93	110,83
4,00	102,54	114,42	114,44
4,50	105,49	116,55	116,57
5,00	106,35	118,17	117,82
5,50	103,67	114,97	115,42

Tabela (V.11) Deslocamento no topo do tubo secundário
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 239	Elemento 248
19,88	40,56	31,34
39,34	69,08	62,68
56,08	18,32	81,10
71,53	14,21	100,48
83,76	20,16	111,38
92,63	25,61	115,65
98,78	24,04	114,06
102,54	24,22	127,08
105,49	19,72	122,86
106,35	20,11	123,79
103,67	17,01	122,66

Tabela (V.12) Esforços unitários N° 1 P.I.
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 239	Elemento 248
22,52	42,30	40,47
44,63	75,40	79,64
64,03	73,53	102,76
80,87	75,59	120,00
94,92	91,72	135,96
104,97	99,66	144,55
110,93	104,33	149,08
114,42	107,85	152,10
116,55	108,53	155,20
118,17	104,46	155,41
114,97	93,52	144,22

Tabela (V.13) Esforços unitários N° 3 P.I.
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 239	Elemento 248
22,40	41,85	40,48
44,41	76,25	79,97
63,74	73,61	103,82
80,49	69,94	120,80
94,60	84,04	137,20
104,75	90,06	145,35
110,83	97,13	150,27
114,44	100,75	152,92
116,57	100,67	154,42
117,82	97,89	155,89
115,42	81,94	136,12

Tabela (V.14) Esforços unitários N 4 P.I.
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

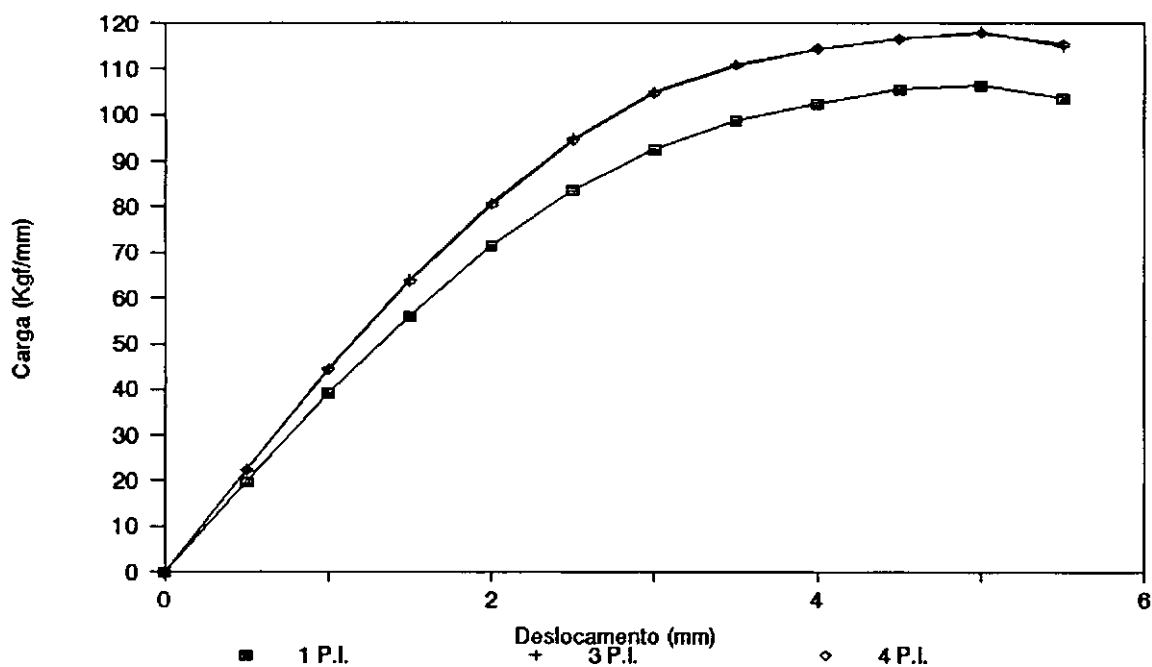


Figura (V.11) Curva Deslocamento - Carga

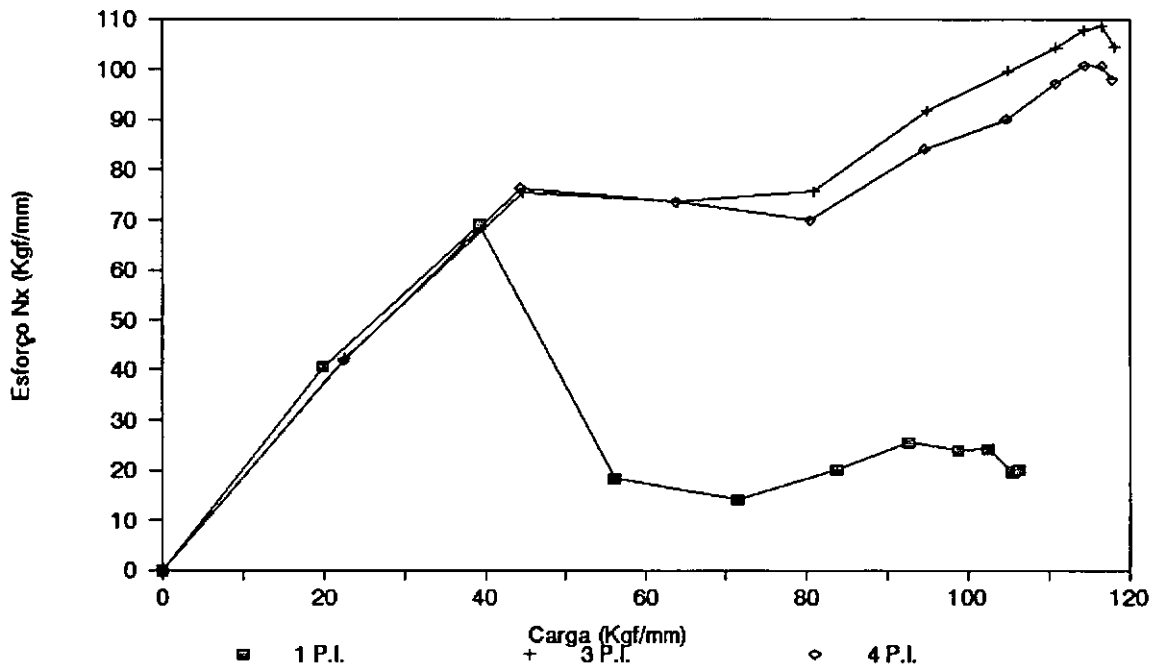


Figura (V.12) Curva Carga - Esforço para o Elemento 239

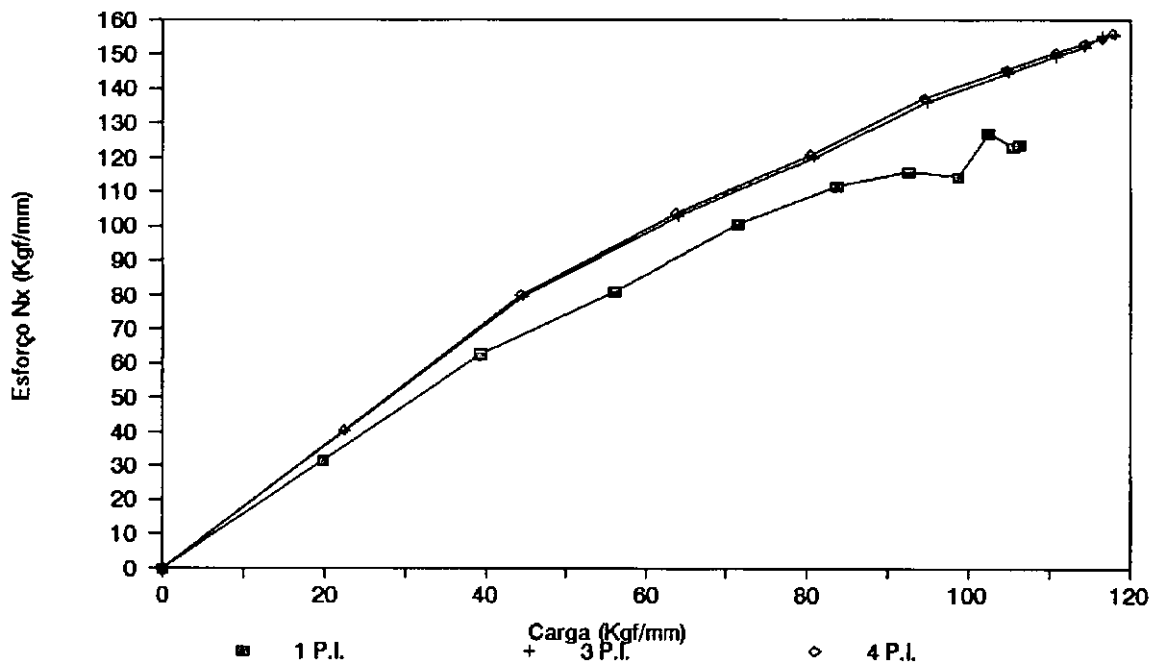


Figura (V.13) Curva Carga - Esforço para o Elemento 248

Observa-se a diferença obtida da análise com um ponto de integração em relação as outras duas análises. Esta diferença resulta mais acentuada na análise que considera o efeito dos esforços internos, onde as matrizes de tensões iniciais são calculadas de forma explícita e portanto iguais para as três análises, resultando maior a influência destas nas matrizes tangentes já que as matrizes elasto-plásticas com um ponto de integração são menos exatas que as obtidas com três e quatro pontos.

A carga limite obtida na referência [23] foi de 129,79 Kgf/mm. Isto mostra que os resultados obtidos usando-se os modelos simplificados implementados neste trabalho conduzem a resultados satisfatórios. Justifica-se assim o uso de modelos simples para a obtenção da carga limite.

V.3 JUNTA TUBULAR T

Pretende-se com este exemplo estabelecer uma comparação da resistência estática de uma junta tubular T com a resistência estática de uma junta tubular X. Para isto escolheu-se uma junta tubular T com as propriedades geométricas e dos materiais dos tubos principal e secundário iguais as da junta tubular x analisada no

exemplo V.2. A malha utilizada e as dimensões da estrutura são mostradas na figura (V.14).

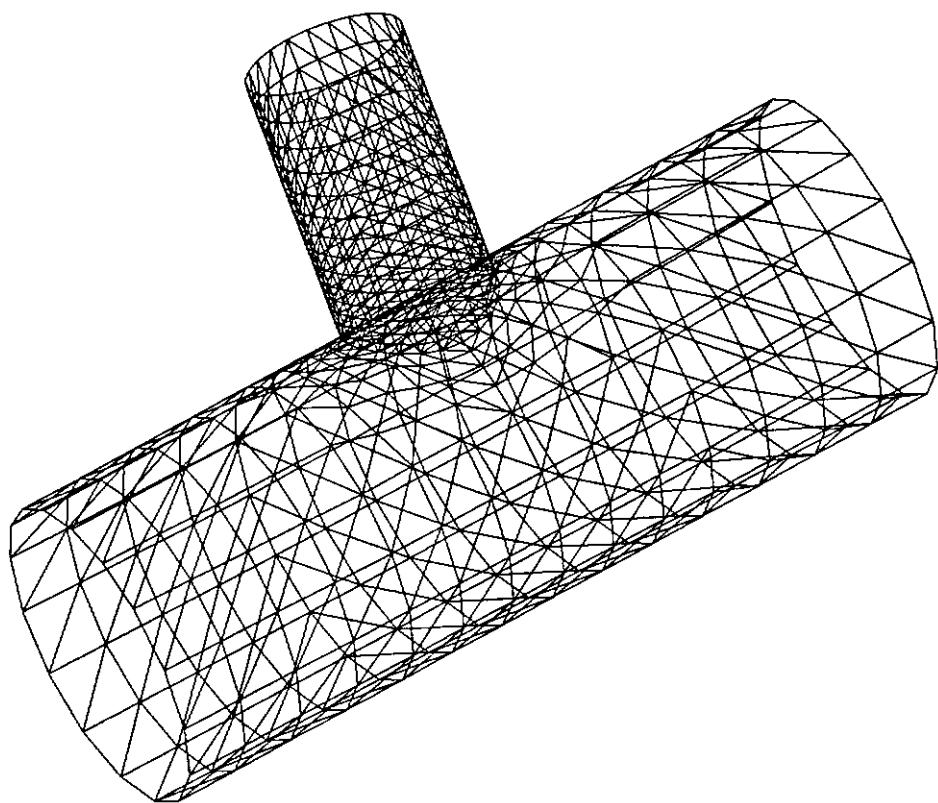


Figura (V.14) Junta Tubular T

Realizou-se inicialmente uma análise levando em consideração apenas a não linearidade física da estrutura, usando-se o algoritmo para controle de deslocamentos e o algoritmo de Newton-Raphson Modificado com um três e quatro pontos de integração. As cargas limite encontradas foram 139,34 Kgf/mm , 147,49 Kgf/mm e 147,47 Kgf/mm para as três análises respectivamente. Na figura (V.15) aparecem as curvas de evolução do deslocamento do topo do tubo secundário e os seus valores correspondentes encontram-se na tabela (V.15). As curvas de evolução dos esforços unitários N_x para os elementos 36 e 809 da interseção da junta são mostradas nas figuras (V.16) e (V.17), os valores usados para o traçado destas curvas aparecem nas tabelas (V.16), (V.17) e (V.18) para as três análises respectivamente.

Deslocamento (mm)	Carga (Kgf/mm)		
	1 P.I.	3 P.I.	4 P.I.
0,50	25,86	26,86	26,86
1,00	50,16	53,13	53,14
1,50	72,77	77,80	77,82
2,00	92,73	99,39	99,42
2,50	109,20	116,88	116,88
3,00	121,22	129,40	129,43
3,50	129,14	137,25	137,26
4,00	134,32	142,20	142,21
4,50	137,47	145,40	145,41
5,00	139,34	147,49	147,47
5,50	140,70	148,90	148,88
6,00	141,64	149,86	149,90
6,50	142,27	150,66	150,66
7,00	142,80	151,29	151,31
7,50	143,19	151,85	151,87
8,00	143,58	152,34	152,33
8,50	143,87	152,80	152,77
9,00	144,20	153,16	153,14
9,50	144,48	153,51	153,53
10,00	144,74	153,85	153,86

Tabela (V.15) Deslocamento no topo do tubo secundário
análise elasto-plástica

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 36	Elemento 809
25,86	57,37	43,91
50,16	96,84	79,86
72,77	111,39	101,50
92,73	121,45	113,38
109,20	135,23	118,55
121,22	145,92	120,68
129,14	153,33	121,34
134,32	157,52	121,41
137,47	159,94	121,18
139,34	161,32	121,24
140,70	162,21	121,37
141,64	162,95	121,40
142,27	163,67	121,33
142,80	164,10	121,14
143,19	164,63	120,98
143,58	165,21	120,97
143,87	165,52	120,62
144,20	166,08	120,97
144,48	166,42	120,95
144,74	166,78	121,01

Tabela (V.16) Esforços unitários N^o 1 P.I.
análise elasto-plástica

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 36	Elemento 809
26,86	57,13	43,91
53,13	96,83	81,33
77,80	114,62	102,43
99,39	132,15	115,27
116,88	148,57	122,89
129,40	159,66	126,54
137,25	165,81	127,63
142,20	168,98	127,04
145,40	170,74	126,09
147,49	171,82	125,84
148,90	172,72	125,84
149,86	173,28	125,47
150,66	174,04	125,72
151,29	174,62	125,45
151,85	175,23	125,77
152,34	175,67	125,79
152,80	176,17	125,57
153,16	177,17	125,81
153,51	177,49	125,77
153,85	177,55	125,78

Tabela (V.17) Esforços unitários N_x 3 P.I.
análise elasto-plástica

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 36	Elemento 809
26,86	57,37	43,91
53,14	99,37	82,07
77,82	117,89	103,90
99,42	131,06	115,66
116,88	144,67	121,82
129,43	155,68	124,51
137,26	162,39	125,08
142,21	166,05	124,18
145,41	168,64	123,28
147,47	169,95	122,52
148,88	171,57	122,96
149,90	172,37	122,55
150,66	173,16	122,50
151,31	173,95	122,48
151,87	175,08	122,91
152,33	175,56	122,66
152,77	176,26	122,59
153,14	177,00	122,60
153,53	177,33	122,94
153,86	178,11	122,84

Tabela (V.18) Esforços unitários N_x 4 P.I.
análise elasto-plástica

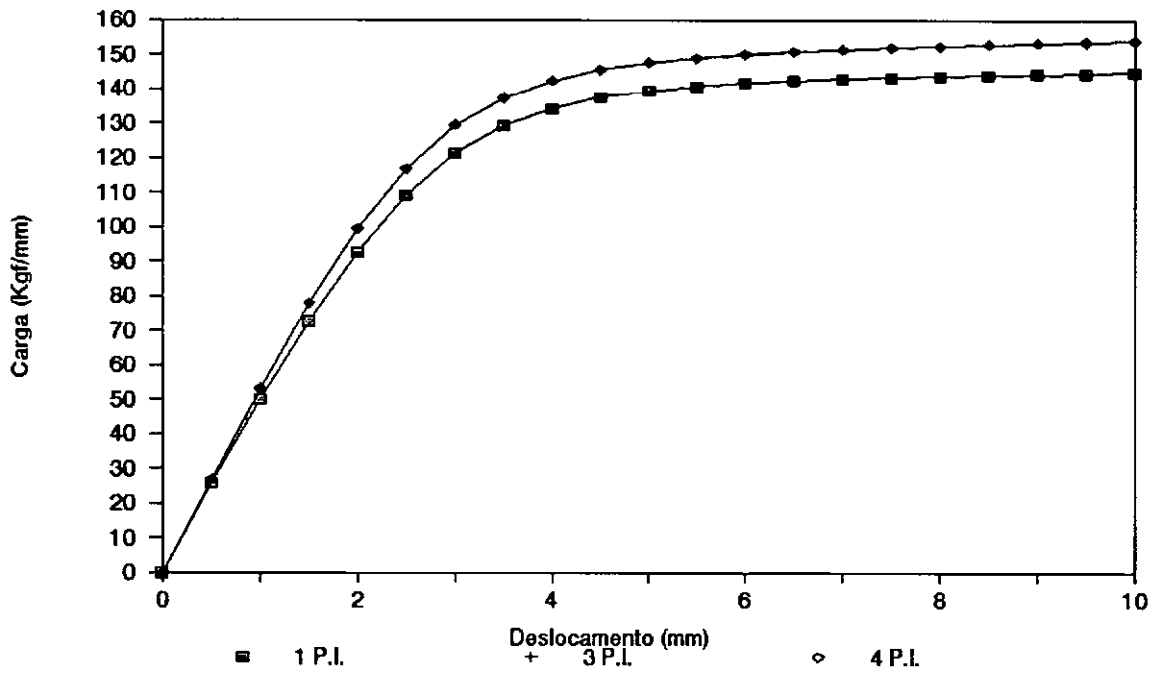


Figura (V.15) Curva Deslocamento - Carga

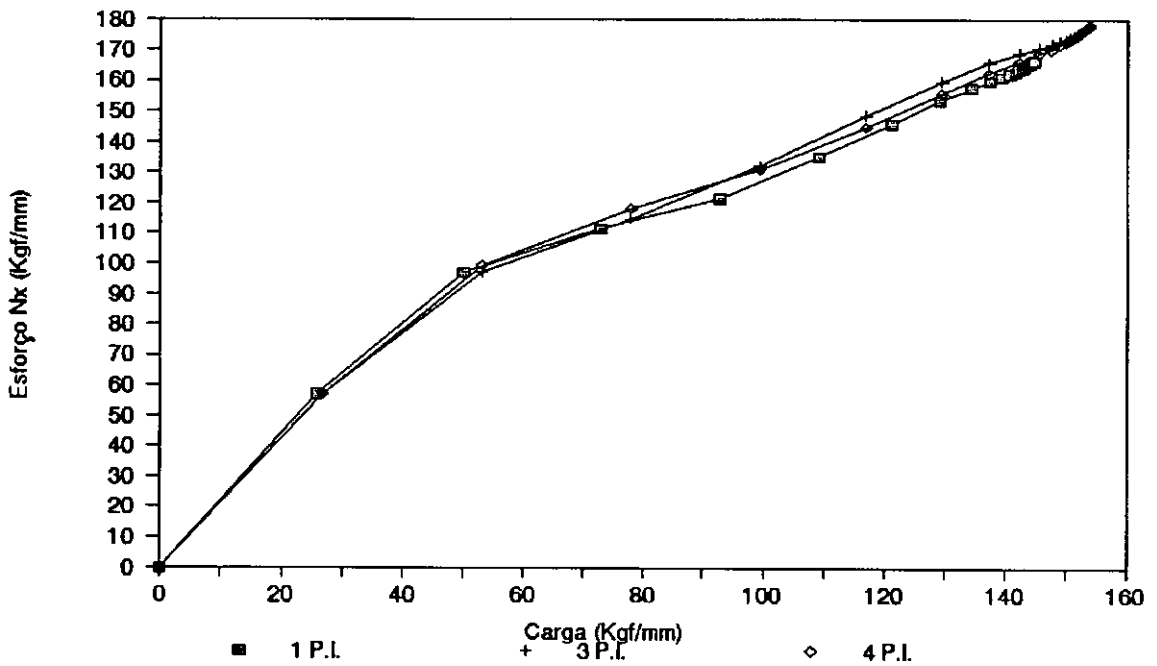


Figura (V.16) Curva Carga - Esforço para o Elemento 36

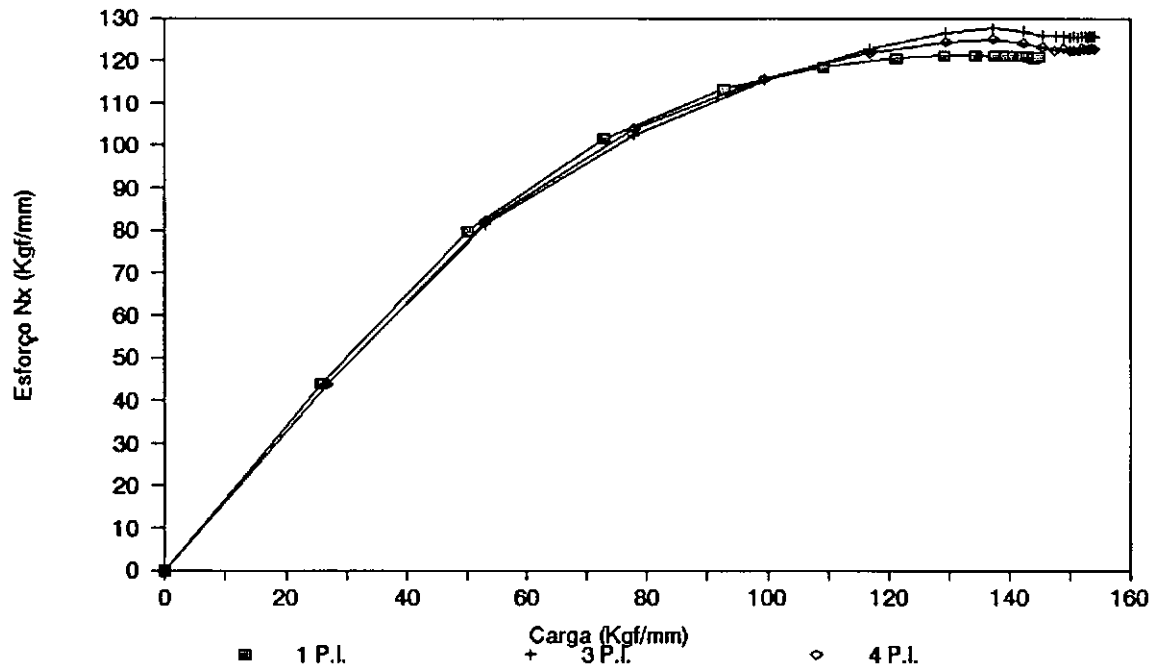


Figura (V.17) Curva Carga - Esforço para o Elemento 809

Para a análise elasto-plástica sob tensões iniciais utilizou-se também o algoritmo para controle de deslocamentos e o algoritmo de Newton-Raphson convencional para se evitar problemas de convergência na vizinhança da carga limite com um três e quatro pontos de integração. As cargas limite obtidas foram 96,22 Kgf/mm , 123,52 Kgf/mm e 124,09 Kgf/mm respectivamente. As curvas de evolução do deslocamento do topo do tubo secundário são mostradas na figura (V.18), os valores utilizados para a construção desta curva estão na tabela (V.19). As curvas de evolução dos esforços unitários N_x para os elementos 36 e 809 da

interseção da junta são mostradas nas figuras (V.19) e (V.20) e os seus valores correspondentes encontram-se nas tabelas (V.20), (V.21) e (V.22).

Deslocamento (mm)	Carga (Kgf/mm)		
	1 P.I.	3 P.I.	4 P.I.
0,50	19,97	26,70	26,53
1,00	39,09	52,42	52,14
1,50	56,26	74,84	74,44
2,00	69,61	92,74	92,38
2,50	79,33	105,44	105,27
3,00	86,44	112,97	112,95
3,50	91,16	117,94	117,99
4,00	93,57	120,22	119,82
4,50	96,22	123,52	124,09

Tabela (V.19) Deslocamento no topo do tubo secundário
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 36	Elemento 809
19,97	32,38	27,99
39,09	38,11	58,58
56,26	35,09	70,54
69,61	24,61	93,37
79,33	30,91	135,66
86,44	39,71	118,86
91,16	33,91	134,73
93,57	20,01	134,75
96,22	49,74	136,17

Tabela (V.20) Esforços unitários N. 1 P.I.
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 36	Elemento 809
26,70	51,32	43,44
52,42	90,42	80,65
74,84	115,12	97,34
92,74	131,15	115,49
105,44	143,44	121,86
112,97	144,77	112,98
117,94	147,23	125,05
120,22	161,39	123,12
123,52	160,56	107,77

Tabela (V.21) Esforços unitários N. 3 P.I.
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

Carga (Kgf/mm)	Esforços nos Elementos (Kgf/mm)	
	Elemento 36	Elemento 809
26,53	49,77	43,41
52,14	96,88	80,81
74,44	118,42	99,97
92,48	128,48	114,26
105,27	144,53	120,09
112,95	146,69	120,58
117,99	150,47	127,07
119,82	153,79	124,31
124,09	177,65	102,23

Tabela (V.22) Esforços unitários N 4 P.I.
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

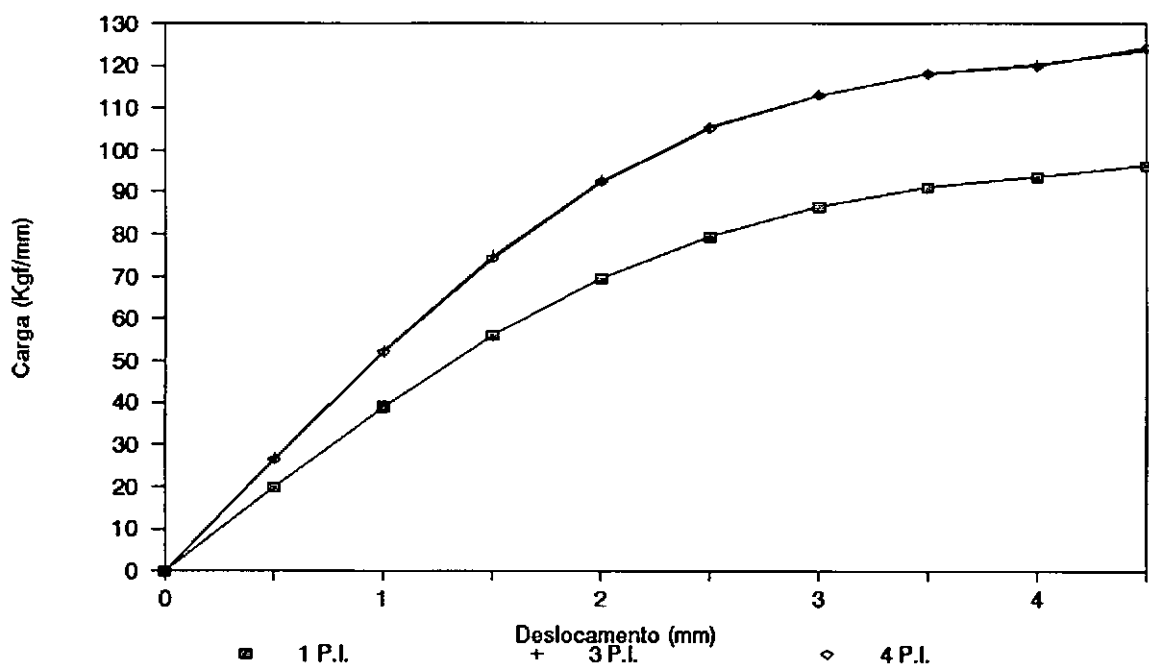


Figura (V.18) Curva Deslocamento - Carga

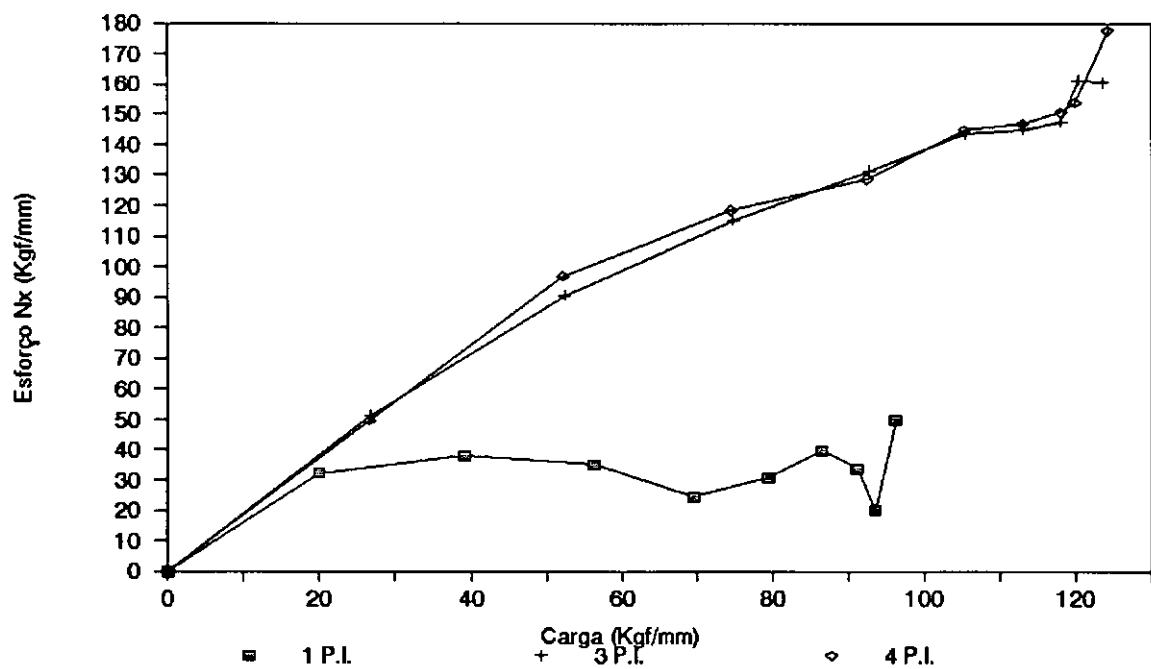


Figura (V.19) Curva Carga - Esforço para o Elemento 36

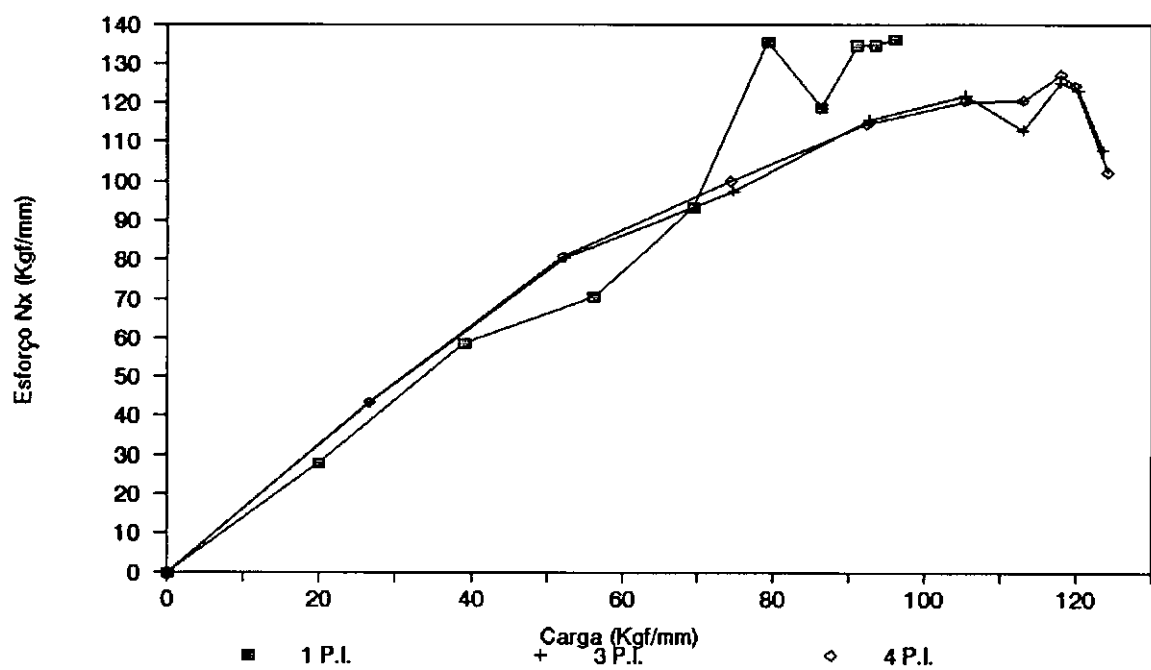


Figura (V.20) Curva Carga - Esforço para o Elemento 809

Na figura (V.21) são mostradas as curvas de evolução do deslocamento do topo do tubo secundário da junta tubular X do exemplo (V.2) e da junta tubular T deste exemplo correspondentes à análise com quatro pontos de integração, levando em consideração apenas a não linearidade física da estrutura. As curvas correspondentes à análise elasto-plástica sob tensões iniciais com quatro pontos de integração da evolução do deslocamento do topo do tubo secundário das respectivas juntas são esquematizadas na figura (V.22).

Observa-se que a resistência da junta T resulta superior que a resistência da junta X.

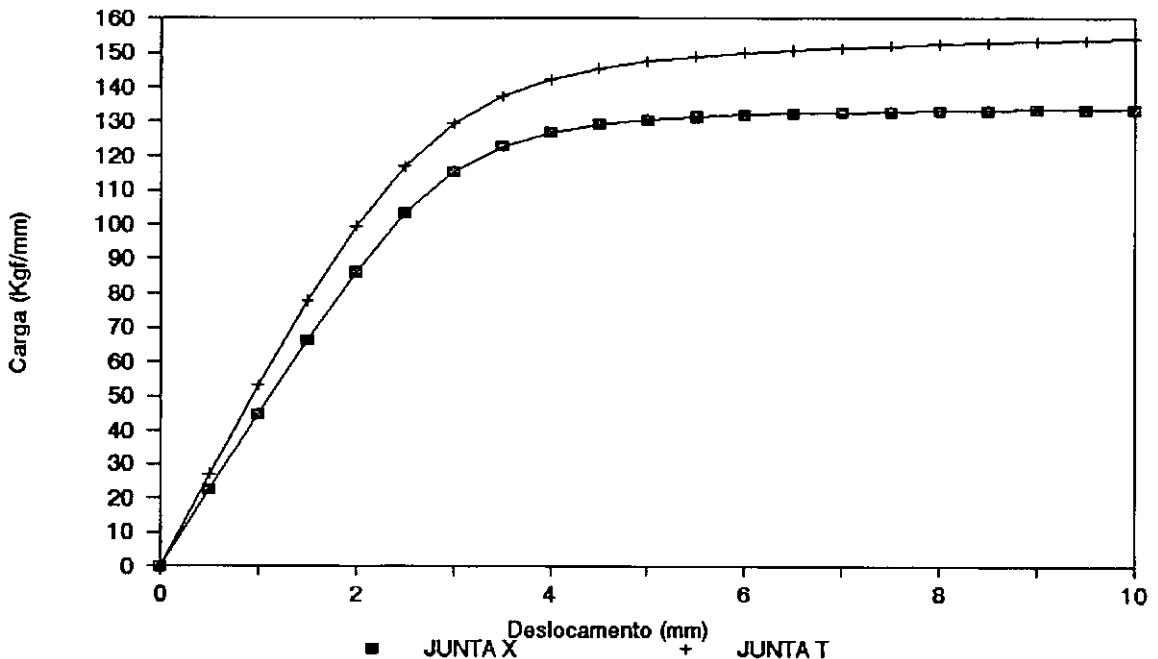


Figura (V.21) Curva Deslocamento - Carga Juntas X e T
análise elasto-plástica

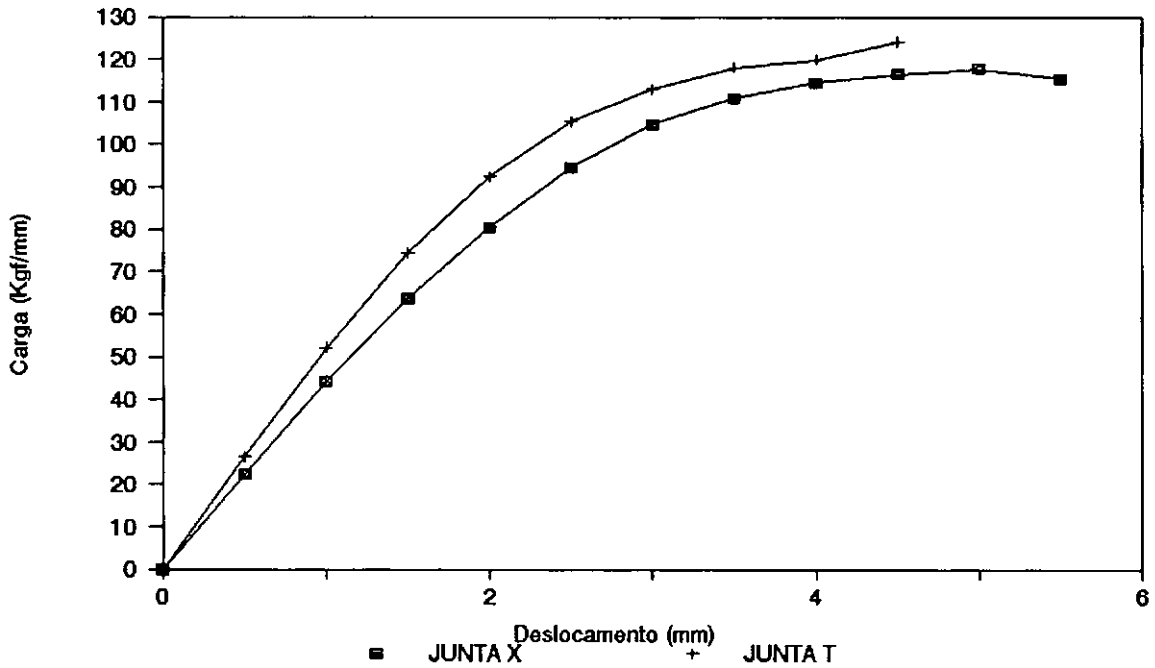


Figura (V.22) Curva Deslocamento - Carga Juntas X e T
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

V.4 PAINEL ENRIJECIDO

Muitas estruturas são impossíveis de serem modeladas utilizando-se um só tipo de elemento estrutural. Pretende-se através deste exemplo mostrar a viabilidade da análise não linear de estruturas usando-se diversos tipos de elementos de formulação simples. No caso analisa-se um painel enrijecido de aço sob compressão longitudinal. Este

tipo de estruturas são freqüentemente encontradas nos tabuleiros das superestruturas de pontes.

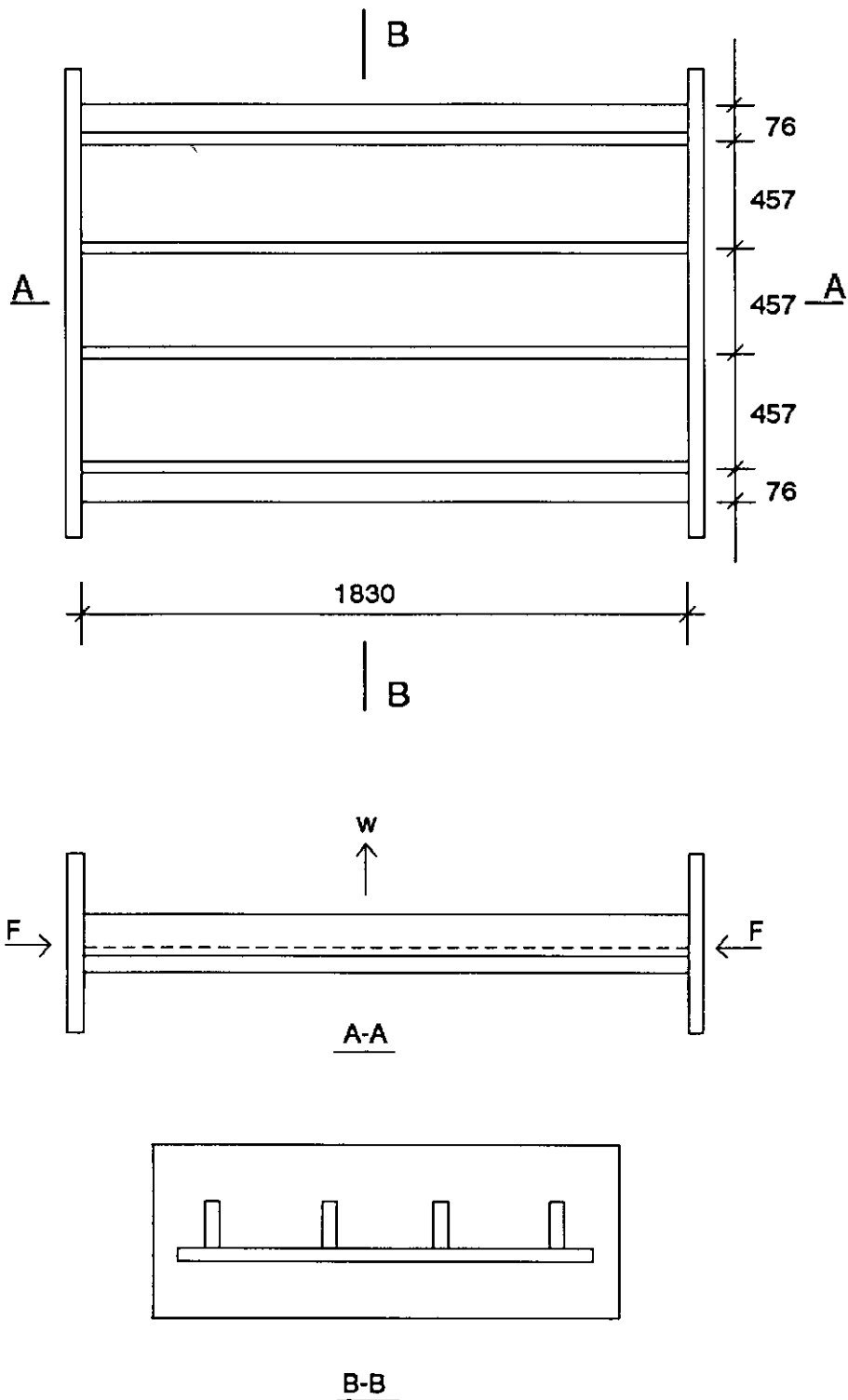


Figura (V.23) Painel Enrijecido
(cotas em mm)

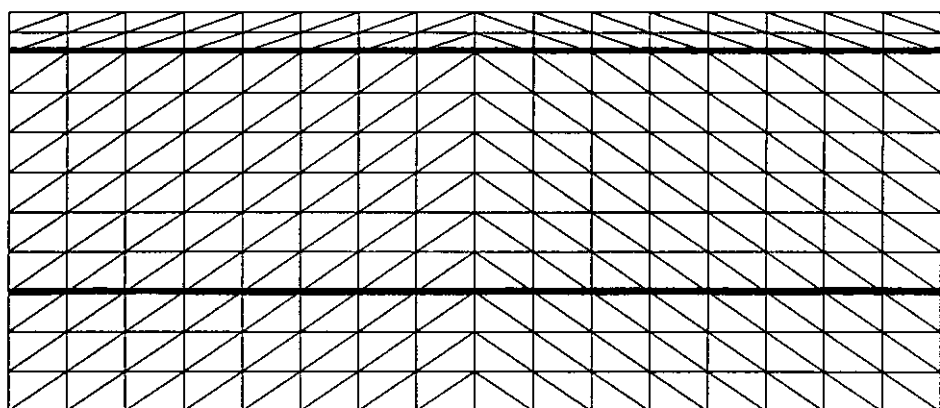


Figura (V.24) Malha do Painel Enrijecido

As dimensões e os detalhes da estrutura são mostrados na figura (V.23), a malha utilizada aparece na figura (V.24). O painel foi modelado usando elementos triangulares de casca e os enrijecedores longitudinais foram modelados por meio de elementos de pórtico espacial. Os enrijecedores soldados introduzem altas imperfeições geométricas e dos materiais. Neste exemplo foram consideradas duas imperfeições geométricas: a primeira chamada imperfeição cilíndrica nominal é representada por uma semi-onda senoidal simples de 1,4 mm de amplitude; a segunda é superposta sobre a primeira e consiste de ondas senoidais longitudinais (uma semi-onda sobre um quarto do vão) e ondas senoidais transversais (uma semi-onda sobre um terço do vão entre os enrijecedores externos) de 5,4 mm de amplitude. O material é elasto-plástico perfeito. A simetria longitudinal da estrutura possibilita a discretização da metade do painel.

Na análise não linear física foi usado o algoritmo para controle de deslocamentos e o algoritmo de Newton-Raphson Modificado com um três e quatro pontos de integração para a obtenção das matrizes de rigidez dos elementos que discretizam o painel. As cargas limite encontradas foram 3310,07 KN , 3503,89 KN e 3505,40 KN para as três análises respectivamente. As curvas de evolução do deslocamento vertical do centro do painel são mostradas na figura (V.25), os valores utilizados para

traçar estas curvas encontram-se na tabela (V.23). A evolução do esforço unitário N_x do elemento 155 do painel é esquematizada na curva da figura (V.26) e do esforço axial no elemento 360 do enrijecedor interno é mostrada na curva da figura (V.27). Os valores correspondentes encontram-se nas tabelas (V.24) , (V.25) e (V.26).

Deslocamento (mm)	Carga (KN)		
	1 P.I.	3 P.I.	4 P.I.
1,00	377,38	383,67	383,67
2,00	747,90	767,36	767,36
3,00	1114,99	1151,04	1151,04
4,00	1480,19	1534,73	1534,73
5,00	1844,28	1918,42	1918,42
6,00	2207,68	2302,09	2302,09
7,00	2566,06	2685,69	2685,78
8,00	2891,92	3059,25	3059,77
9,00	3149,00	3351,00	3351,06
10,00	3310,07	3503,89	3505,40
11,00	3409,34	3592,21	3592,91
12,00	3476,81	3649,44	3652,93
13,00	3523,92	3689,45	3687,46
14,00	3554,62	3715,39	3716,44
15,00	3576,74	3733,25	3730,18
16,00	3591,84	3746,95	3742,57
17,00	3601,27	3757,68	3755,09
18,00	3607,71	3762,40	3762,72
19,00	3610,65	3768,74	3767,75
20,00	3615,62	3767,92	3767,72

Tabela (V.23) Deslocameto vertical do centro do painel
análise elasto-plástica

Carga (KN)	Esforços nos Elementos	
	Elemento 155 (N/mm)	Elemento 360 (N)
377,38	211,70	5409,96
747,90	407,91	10670,95
1114,99	596,67	15848,16
1480,19	781,34	20976,19
1844,28	963,60	26072,92
2207,68	1144,39	31148,45
2566,06	1324,04	36191,18
2891,92	1493,47	40657,44
3149,00	1641,90	44912,81
3310,07	1752,74	48040,27
3409,34	1835,25	50602,05
3476,81	1903,26	52853,04
3523,92	1954,81	54966,65
3554,62	1988,52	56855,12
3576,74	2018,14	58427,12
3591,84	2041,36	59733,35
3601,27	2063,62	60831,30
3607,71	2081,88	61531,47
3610,65	2098,96	61879,13
3615,62	2114,34	62068,15

Tabela (V.24) Esforços nos Elementos 1 P.I.
análise elasto-plástica

Carga (KN)	Esforços nos Elementos	
	Elemento 155 (N/mm)	Elemento 360 (N)
383,67	217,49	5456,55
767,36	434,99	10913,10
1151,04	652,48	16369,65
1534,73	869,98	21826,20
1918,42	1087,47	27282,75
2302,09	1304,96	32739,30
2685,69	1522,47	38195,85
3059,25	1738,86	43577,50
3351,00	1933,09	48202,01
3503,89	2063,41	51533,60
3592,21	2161,51	54008,95
3649,44	2248,37	56294,31
3689,45	2314,92	58432,43
3715,39	2351,69	60270,61
3733,25	2377,84	61823,80
3746,95	2399,03	62983,93
3757,68	2413,75	63819,93
3762,40	2415,52	64219,68
3768,74	2424,29	64470,93
3767,92	2432,09	64755,07

Tabela (V.25) Esforços nos Elementos 3 P.I.
análise elasto-plástica

Carga (KN)	Esforços nos Elementos	
	Elemento 155 (N/mm)	Elemento 360 (N)
383,67	217,49	5456,55
767,36	434,99	10913,10
1151,04	652,48	16369,65
1534,73	869,98	21826,20
1918,42	1087,47	27282,75
2302,09	1304,96	32739,30
2685,78	1522,46	38195,85
3059,77	1738,93	43575,76
3351,06	1933,73	48211,10
3505,40	2063,76	51523,99
3592,91	2161,92	54000,92
3652,93	2248,91	56270,40
3687,46	2325,54	58430,06
3716,44	2360,36	60316,38
3730,18	2387,08	61821,72
3742,57	2408,94	63024,36
3755,09	2426,09	63809,90
3762,72	2432,04	64206,13
3767,75	2439,83	64440,21
3767,72	2441,92	64704,35

Tabela (V.26) Esforços nos Elementos 4 P.I.
análise elasto-plástica

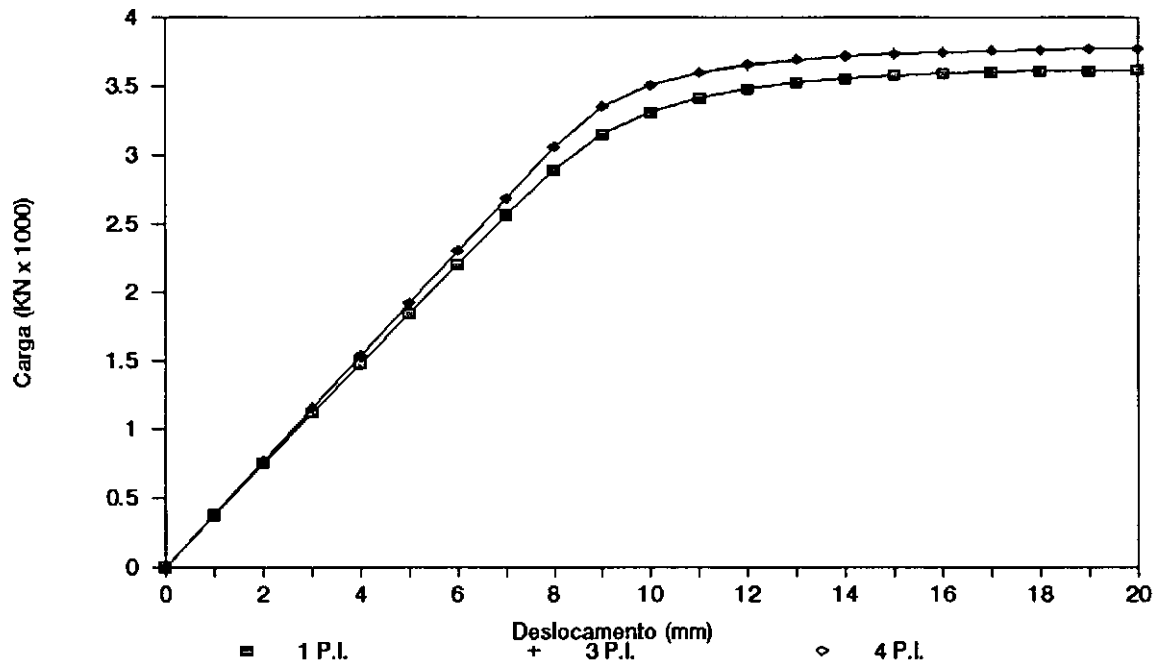


Figura (V.25) Curva Deslocamento - Carga

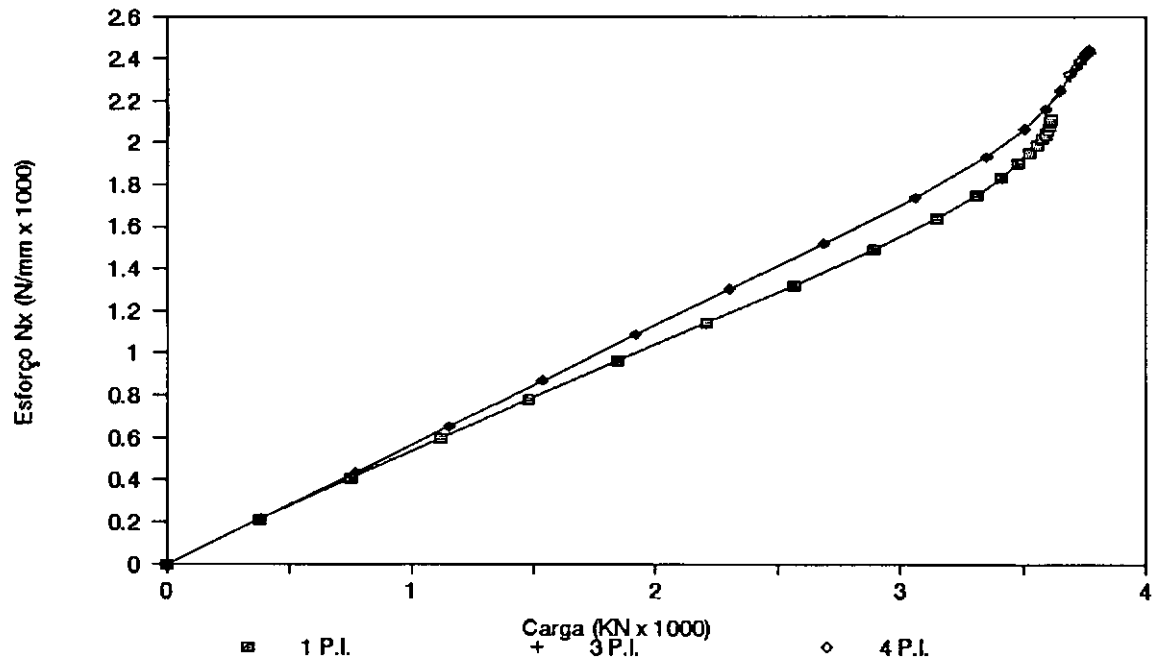


Figura (V.26) Curva Carga - Esforço para o Elemento 155

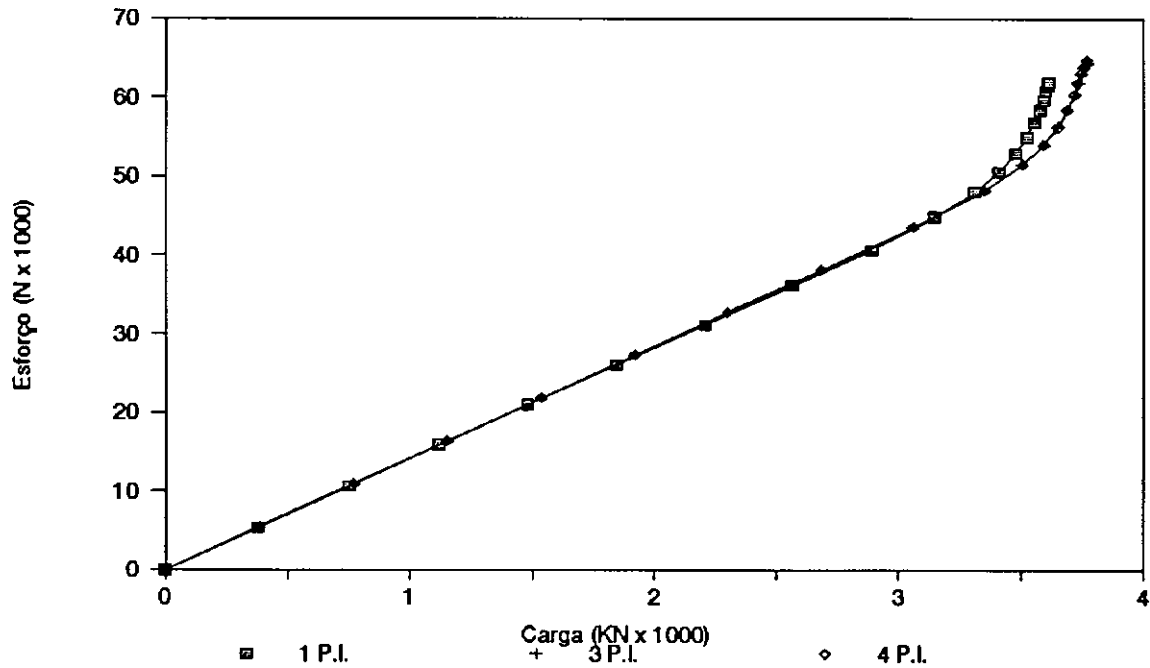


Figura (V.27) Curva Carga - Esforço para o Elemento 360

Para a análise elasto-plástica sob tensões iniciais utilizou-se também o algoritmo de controle de deslocamentos e o algoritmo de Newton-Raphson convencional. As cargas limite encontradas foram 3086,36 KN , 3284,40 KN e 3275,91 KN para as três análises respectivamente. As curvas de evolução do deslocamento vertical do centro do painel aparecem na figura (V.28) e o seus valores correspondentes encontram-se na tabela (V.27). As curvas de evolução do esforço unitário N_x do elemento 155 do painel são mostradas na figura (V.29) e as do esforço axial no elemento 360 do

enrijecedor interno estão na figura (V.30). Os valores usados para o traçado destas curvas encontram-se nas tabelas (V.28) , (V.29) e (V.30).

Deslocamento (mm)	Carga (KN)		
	1 P.I.	3 P.I.	4 P.I.
1,00	375,11	380,63	379,09
2,00	741,38	759,12	756,11
3,00	1102,32	1137,54	1133,22
4,00	1459,46	1513,66	1508,01
5,00	1813,65	1888,38	1881,44
6,00	2165,33	2261,76	2253,57
7,00	2511,52	2633,95	2624,46
8,00	2828,18	2990,50	2980,21
9,00	3086,36	3284,40	3275,91

Tabela (V.27) Deslocamento vertical do centro do painel análise elasto-plástica sob tensões iniciais

Carga (KN)	Esforços nos Elementos	
	Elemento 155 (N/mm)	Elemento 360 (N)
375,11	210,48	5376,97
741,38	404,78	10485,46
1102,32	590,84	15396,56
1459,46	772,03	20146,81
1813,65	950,06	24755,85
2165,33	1125,87	29235,49
2511,52	1299,96	33585,11
2828,18	1465,00	37310,77
3086,36	1611,63	40732,07

Tabela (V.28) Esforços nos Elementos 1 P.I.
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

Carga (KN)	Esforços nos Elementos	
	Elemento 155 (N/mm)	Elemento 360 (N)
380,63	209,33	4747,99
759,12	412,43	8739,78
1137,54	642,96	15687,27
1513,66	854,90	20659,69
1888,38	1065,49	25492,89
2261,76	1274,61	30179,63
2633,95	1482,14	34711,44
2990,50	1700,77	40241,80
3284,40	1869,12	43628,69

Tabela (V.29) Esforços nos Elementos 3 P.I.
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

Carga (KN)	Esforços nos Elementos	
	Elemento 155 (N/mm)	Elemento 360 (N)
379,09	209,14	4732,35
756,11	412,42	8694,78
1133,22	643,55	15632,71
1508,01	855,39	20853,17
1881,44	1065,73	25391,49
2253,57	1274,46	30049,80
2624,46	1481,44	34548,76
2980,21	1700,83	40109,10
3275,91	1870,54	43533,39

Tabela (V.30) Esforços nos Elementos 4 P.I.
análise elasto-plástica sob tensões iniciais

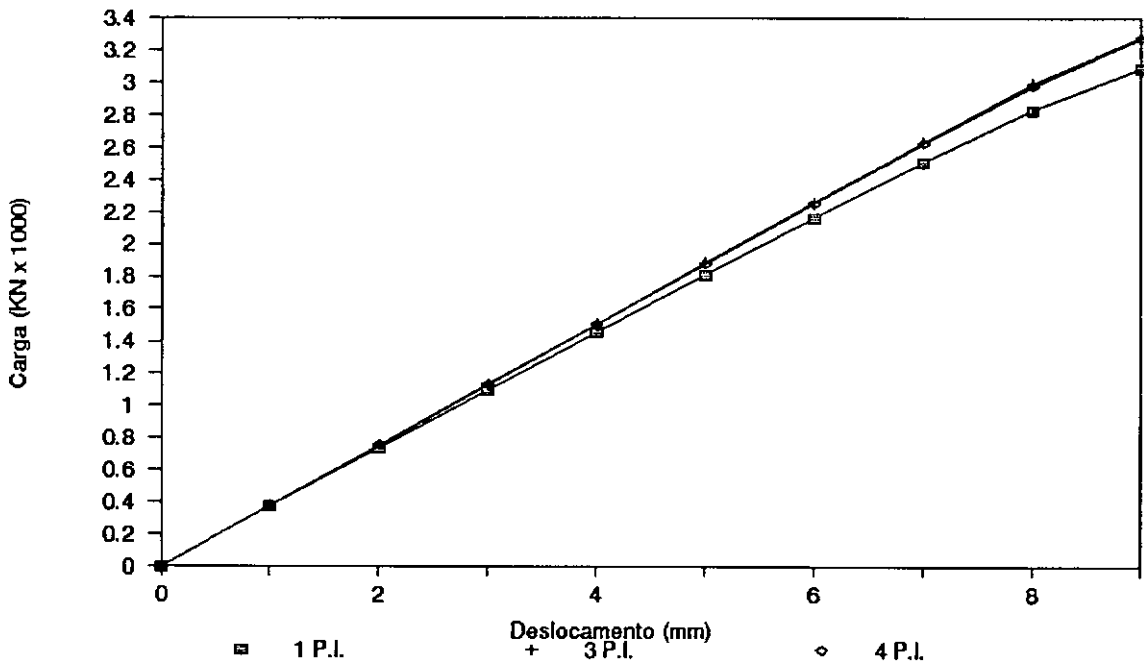


Figura (V.28) Curva Deslocamento - Carga

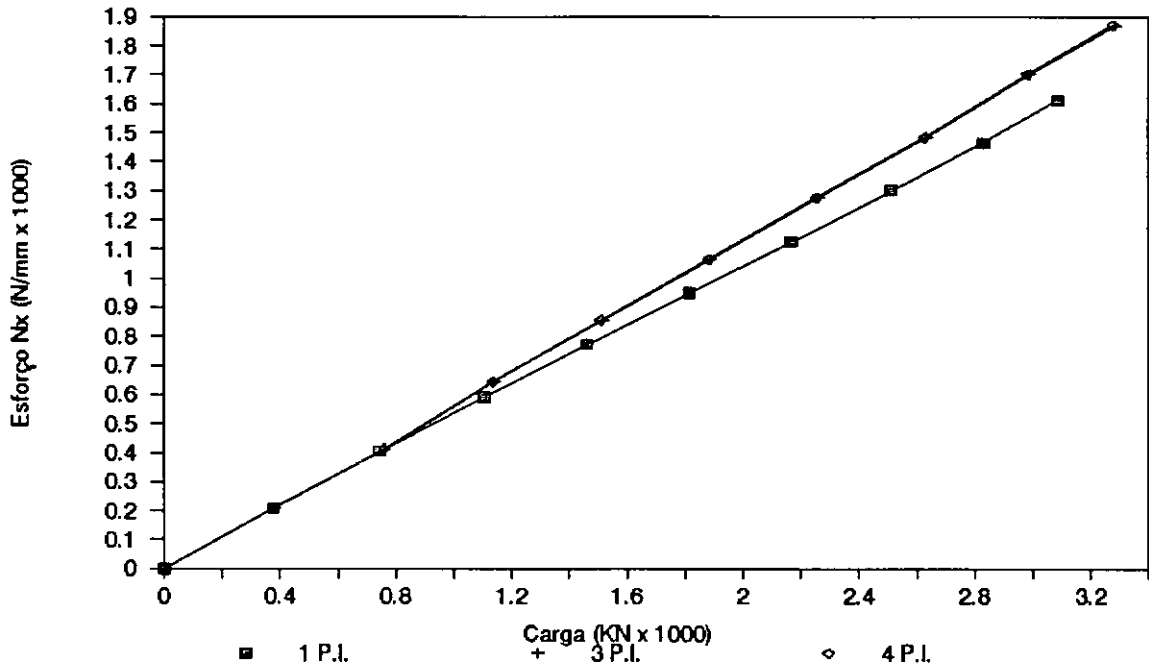


Figura (V.29) Curva Carga - Esforço para o Elemento 155

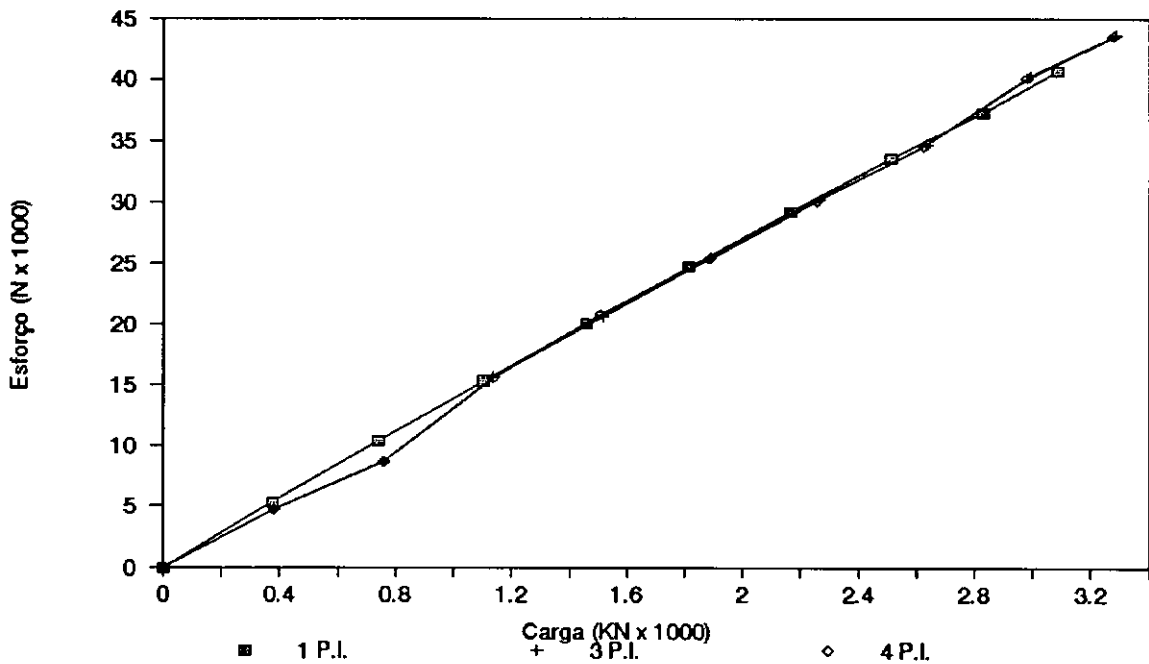


Figura (V.30) Curva Carga - Esforço para o Elemento 360

Esta estrutura foi analisada por JAAMEI, FREY e JETTEUR [24] usando elementos quadrilaterais curvos com base na teoria de Marguerre , tanto para os elementos do painel como para os elementos dos enrijecedores longitudinais, e encontraram a carga limite de 2681 KN, próximo do valor 2686 KN encontrado experimentalmente por HORNE e NARAYAMAN [25]. PUTHLI [26] obteve uma carga limite de 2802 KN. A diferença nas cargas de colapso encontradas neste trabalho e as encontradas nas referências acima citadas, provém do uso dos elementos de pórtico para a discretização dos enrijecedores longitudinais e a consideração da excentricidade dos mesmos, assim como da contribuição da rigidez à flexão na direção y local que substitui a rigidez nula à flexão na direção z do elemento de casca, o que resulta numa estrutura mais rígida.

Observa-se a diferença entre os valores do esforço axial no elemento 360 para as análises com diferentes pontos de integração. Esta é devida à influência das matrizes de rigidez dos elementos do painel o que provoca que os deslocamentos das respectivas análises sejam diferentes, e portanto resultando diferentes os esforços.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Neste trabalho procurou-se determinar a carga limite de estruturas enrijecidas usando modelos de elementos finitos simplificados com um custo computacional relativamente baixo.

Estudou-se problemas de não linearidade física considerando o efeito dos enforços interno na rigidez dos elementos, utilizando-se conjuntamente elementos de pórtico espacial e elementos triangulares de casca. O desempenho do elemento de pórtico espacial mostrou-se altamente satisfatório, esta eficiência resulta do fato das matrizes elasto-plástica e de tensões iniciais serem explícitas, mesmo sendo aproximadas, o que reduz significativamente os problemas de convergência, isto observou-se no exemplo V.1 da plataforma marítima fixa, onde foi obtida uma convergência rápida para as duas análises feitas, a não linear física e a não linear física sob tensões iniciais.

No caso do elemento triangular de casca, estudou-se o desempenho do modelo usando-se diferentes números de

pontos de integração. Os resultados com três e quatro pontos dos exemplos V.2 V.3 e V.4 das juntas tubulares X e T e do painel enrijecido, mostraram a boa performance do elemento implementado. CHUEIRI [14], encontrou que a análise com três pontos em alguns casos converge para uma solução incorreta. Nas análises feitas nos exemplos acima citados utilizaram-se malhas bastante regulares, o que ocasionou que as análises feitas com três pontos resultassem muito próximas das análises feitas com quatro pontos, sendo que nestes casos a primeira parece a escolha mais adequada. Já nas análises feitas com um ponto de integração, obteve-se uma precisão menos exata dos resultados em relação as outras duas análises. Esta diferença foi mais significativa ainda nas análises feitas considerando a influência dos esforços internos na rigidez dos elementos, onde as matrizes de tensões iniciais são obtidas de forma explícita e portanto iguais para as três análises, resultando daí maior a influência destas nas matrizes tangentes dos elementos, já que as matrizes elasto-plásticas com um ponto são menos exatas que as obtidas através das outras duas análises. É possível a análise com um ponto de integração, desde que as malhas utilizadas sejam bastante regulares e muito refinadas.

Na análise da plataforma marítima do exemplo V.1 optou-se por usar o método de Newton-Raphson convencional, já que as matrizes de rigidez são obtidas de forma

explícita e os esforços internos são calculados usando a relação destas matrizes com os deslocamentos, e portanto, é necessário calcular as mesmas a cada iteração, embora não se faça a montagem da matriz global da estrutura, nem a triangularização da mesma quando se utiliza o método de Newton-Raphson Modificado. Nos últimos três exemplos, para as análises de não linearidade física utilizou-se o método de Newton-Raphson Modificado; observou-se o bom desempenho deste algoritmo em problemas regidos pela não linearidade física. Já em problemas regidos pela influência das tensões iniciais, como a análise elasto-plástica sob tensões iniciais destes exemplos, o algoritmo apresenta dificuldades de convergência na vizinhança da carga limite; nestes casos optou-se pelo método convencional.

O uso do acelerador de convergência de controle de deslocamentos, revelou-se uma poderosa ferramenta para a obtenção da carga limite, em geral consegue-se a convergência de uma etapa de carga com um número menor de iterações que quando se usam algoritmos para controle de carga. A grande desvantagem do algoritmo para controle de deslocamentos é a impossibilidade de se efetuar análises com mais de uma função de carga como foi apontado na plataforma fixa do exemplo V.1. O uso deste acelerador de convergência junto com o método de Newton-Raphson Modificado sempre que este último possa ser usado para a obtenção da carga limite parece a escolha ideal para a

solução de problemas não lineares.

O uso do critério de convergência com base nas forças de desequilíbrio reduz significativamente as diferenças entre as forças internas resistentes e as forças externas aplicadas, porém em alguns casos, como nos pequenos incrementos de carga este critério resulta muito rigoroso o que pode ocasionar a não convergência da solução, principalmente quando os esforços internos são obtidos a partir da integração das tensões de forma numérica.

Na solução de problemas envolvendo um grande número de equações como a junta T do exemplo V.3, o esquema de armazenamento em perfil resulta muito eficiente, já que a área de memória central não é suficiente para alocar todos os elementos da matriz de rigidez global da estrutura, faz-se necessário então o armazenamento desta em blocos, tendo a desvantagem de aumentar as operações de transferência de dados e elevando portanto o custo computacional.

O uso destes modelos simplificados para a avaliação da carga última mostra-se eficiente quando comparado com outras formulações completas, as quais precisam de um esforço computacional muito superior ao efetuado pelos modelos implementados neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - ZIENKIEWICZ, O. C. , The Finit Element Method, McGraw-Hill, London, 1977.

- [2] - Editado por ASHWELL, D. G. e GALLAGHER, R. H. , Finite Elements for Thin Shells and Curved Members, John Wiley & Sons, Great Britain, 1976.

- [3] - NAYAK, G. C. e ZIENKIEWICZ, O. C. , " A General Approach to Problems of Plasticity and Large Deformation Using Isoparametric Elements ", Proc. Air Force Third Conf. Matrix Meth. Struc. Mech., Wright-Patterson A.F.B., Ohio, 1971.

- [4] - LANDAU, L. e EBECKEN, N. F. F. , " Análise Não-Linear de Estruturas de Superfície por Meio de Elementos Finitos Tridimensionais Degenerados ", Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Civil, Caracas, 1975.

- [5] - Crisfield, M. A. , " On An Aproximate Yield Criterion for Thin Steel Shells ", TRRL Report LR 658, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, 1974

- [6] - BENJAMIN, A. C. e EBECKEN, N. F. F. , " Formulação de Um Elemento Finito de Pórtico Elasto-Plástico Não-Linear com Matriz de Rigidez Determinada Explicitamente ", Revista Brasileira de Engenharia (RBE), Cadernos de Engenharia Estrutural, Vol. 4, N. 2, pp. 45-73, 1986.

- [7] - PRZEMIENIECKI, J. S. , Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, New York, 1968.

- [8] - NEVES, F. de A. das , " Vibrações de Estruturas Aporticadas Espaciais Estaiadas ", Tese de Mestrado, COPPE-UFRJ, 1990.

- [9] - , " Modificações nas Freqüências Naturais Devido à Presença de um Estado de Tensões Iniciais, Relatório COPPETEC Programa de Engenharia Civil, COPPE-UFRJ, 1987.

- [10] - GOMES, M. del P. A. M. R. C. , " Análise de Paineis Enrijecidos Considerando a Excentricidade dos Reforçadores ", Seminário de Doutorado, COPPE-UFRJ, 1989.

- [11] - LIMA, S. R. F. da F. , " O Método dos Elementos Finitos Aplicado a Problemas de Cascas e Estruturas Laminares Utilizando-se Elementos Triangulares

Planos ", Tese de Mestrado, COPPE-UFRJ, 1972.

- [12] - OWEN, D. R. J. e HINTON, E. , Finite Elements in Plasticity Theory and Practice, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.

- [13] - CRISFIELD, M. A. , " Large Deflection Elasto-Plastic Buckling of Plates Using Finite Elements " , TRRL Report LR 593, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, 1973.

- [14] - CHUEIRI, L. H. M. , " Um Modelo Simples para a Representação do Comportamento Não-Linear de Estruturas de Superfície ", Tese de Mestrado, COPPE-UFRJ, 1985.

- [15] - HOLAND, I. e BELL, K. , Finite Element Methods in Stress Analysis, Trondheim, Norway, 1970.

- [16] - , " Relatório sobre a Implementação de Controle de Deslocamento para Análise Estática Não-Linear ", Relatório COPPETEC Programa de Engenharia Civil, COPPE-UFRJ, 1988.

- [17] - HAISLER, W. E. e STRICKLIN, J. A. , " Displacement Incrementation in Nonlinear Structural Analysis by the Selfcorrecting Method ", Int. J. Num. Meth.

Eng., Vol 11, pp. 3-10, 1977.

- [18] - BATHE, K. J. e CIMENTO, A. P. , " Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations ", Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol 22, pp. 59-85, 1980.

- [19] - DAHLQUIJT, G. e BJORCK, A. , Numerical Methods, Prentice-Hall, 1974.

- [20] - COOK, R. D. , MALKUS, D. S. e PLESHA, M. E. , Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Madision, 1989.

- [21] - BATHE, K. J. - Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.

- [22] - BENJAMIN, A. C. e EBECKEN, N. F. F. , " Nonlinear Analysis of a Fixed Offshore Platform with Damaged Members ", Offshore Engineering, Procedures of the 6th. International Symposium on Offshore Engineering held at COPPE, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, Pentech, London, 1987.

- [23] - EBECKEN, N. F. F. , LIMA, E. C. P. , LANDAU, L. , CHUEIRI, L. H. M. e BENJAMIN, A. C. , " Computational Techniques for the Elastic-Plastic

Analysis of Tubular Joints ", Engineering Computations, Vol 4, N. 2, pp. 126-130, 1987.

- [24] - JAAMEI, S. , FREY, F. e JETTEUR, P. , " Nonlinear Thin Shell Finite Element with Six Degrees of Freedom per Node ", Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol 75, pp. 251-266, 1989.

- [25] - HORNE, M. R. e NARAYAN, R. , " Further Tests on the Ultimate Load Capacity of Longitudinally Stiffened Panels ", Simon Eng. Lab., Univ. of Manchester, 1974.

- [26] - PUTHLI, R. S., BIJLAARD, F. S. K. e STOL, H. G. A., " Theoretical Background to the Solution of Highly Nonlinear Inelastic Buckling and Collapse Problems in Stiffened Panels ", Report Nr. BI-83-42/63.6.0829, IBBC-TNO, Delft., 1983.