## IMPLEMENTAÇÃO DE ELEMENTO DE COLOCAÇÃO NÃO NODAL PARA ANÁLISE TRIDIMENSIOANAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Walnório Graça Ferreira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D. (Presidente)



Prof. José Cláudio de Faria Telles, Ph.D.



RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 1990

FERREIRA, WALNÓRIO GRAÇA

Implementação de Elemento de Colocação Não Nodal para Análise Tridimensional pelo Método dos Elementos de Contorno [ Rio de Janeiro ] 1990 xi, 141 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1990 Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE 1. Elementos de contorno 2. Elasticidade Tridimensional I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

ii

- A meus pais Socorro e Walter
- A minha esposa Lourdes
- A meus filhos Augusto, Igor e Wagner

### AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Webe João Mansur amizade pela orientação e ensinamentos durante todo o desenvolvimenro deste trabalho.

Ao Prof. J. C. F. Telles pela atenção dispensada para a elucidação de dúvidas e pela orientação para elaboração de rotinas importantes.

Ao amigo Francisco Célio de Araujo pelos longos momentos de estudo em conjunto durante todo o curso.

A J.A.F. Santiago e Francisco C. Rodrigues pela valiosa ajuda para a elaboração de gráficos no *Lotus*, em um momento difícil. A Francisco de Assis das Neves, Paulo Régis, pelos momentos de amizade e descontração. A Célio Noia, Elizabeth Frauches, Rafael Palmier e Gilberto Luziê pela ajuda na preparação final da tese.

Ao Departamento de Estruturas e Edificações do CT/UFES pela oportunidade oferecida. Ao Prof. Pedro Sá que forneceu as condições iniciais para o desenvolvimento do presente trabalho.Aos Prof. Rogério S. Queiroz (diretor do CT/UFES) e Prof. J.A.S. Abizaid (ex-reitor da UFES) pelo apoio junto à Universidade Federal do Espírito Santo. Resumo da tese apresentada à COPEE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

## IMPLEMENTAÇÃO DE ELEMENTO DE COLOCAÇÃO NÃO NODAL PARA ANÁLISE TRIDIMENSIONAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Walnório Graça Ferreira Fevereiro de 1990

Orientador: Webe João Mansur Programa: Engenharia Civil/Estruturas

O presente trabalho tem como objetivo a implementação de um procedimento para tratar descontinuidades de forças de superfície, em domínio tridimensional, através do Método dos Elemntos de Contorno, utilizando a solução fundamental de Kelvin.

Dentre os procedimentos existentes optou-se pela técnica do Elemento de Colocação Não Nodal, no qual os nós funcionais permanecem nos cantos, porém, os pontos de colocação deslocam-se para dentro do elemento.

O programa elaborado trabalha com elemento triangular isoparamétrico linear. As integrais singulares são convertidas para coordenadas cilíndricas e calculadas r, e numericamente em analiticamente em Θ, utilizando-se integração de Gauss. As integrais regulares calculadas numericamente guasi-singulares são е utilizando-se integração de Gauss, porém, antes hs conversão de mapeamento triangular em mapeamento quadrangular e, em seguida, usa-se transformação polinomial de terceira ordem acompanhada de integração seletiva.

Finalmente o desempenho do programa é avaliado através de tres exemplos, a saber: cubo tracionado, tubo de parede grossa sob pressão interna e bloco tracionado. Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fullfillment of the requirements for the degrees of Master of Science (M. Sc.)

## IMPLEMENTATION OF NON-NODAL COLLOCATION ELEMENT FOR THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS BBY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Walnório Graça Ferreira February, 1990

Thesis Supervisor: Webe João Mansur Department: Civil Engineering

The present work aim is to study a non-nodal collocation procedure to consider traction discontinuities for Boundary Element Method analysis of three-dimensional elastic bodies.

In the procedure developed, functional nodes remain on the corners, but collocation points are dislocated towards the interior of boundary elements.

linear isoparametric boundary Triangular elements have been implemented in the computer code Polar coordinates were employed to perform developed. singular integrals; integration with respect to r were carried out analitically, and with respect to θ numerically by one-dimensional Gaussian quadrature. Regular integrations (including those which contained quasi-singular kernels) were computed numerically by employing selective two-dimensional Gaussian quadrature. In scheme employed, two successive coordenate the transformations were carried out, the first maps the triangular domain into a rectangular one, and the second makes use of a third degree polynomial transformation, in order to improve accuracy.

Finally the performance of the computer program developed is checked through the numerical analysis of three problems.

## ÍNDICE

.

CAPÍTULO	I INT	TRODUÇÃO	1
CAPÍTULO	II FOR MEN	RMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELE- NTOS DE CONTORNO	8
II.1.	Tópicos	da Teoria da Elasticidade	8
	II.1.1.	Notação Indicial	8
	II.1.2.	Convenção de Soma	9
	II.1.3.	Notação de Diferenciação	10
	II.1.4.	Delta de Kronecker	11
	II.1.5.	Tensor de Permutação	11
	II.1.6.	Equações de Equilibrio	12
	II.1.7.	Relações Deformação-Deslocamento .	14
	II.1.8.	Equações Tensão-Deformação	15
	II.1.9.	Equações Diferenciais Governantes	17
II.2.	Equação (Identio	Integral para Pontos Internos dade de Somigliana)	19
	II.2.1.	Dedução a Partir da Técnica dos Resíduos Ponderados	19
	II.2.2.	Dedução a Partir da Relação de Reciprocidade	26
II.3.	Solução	Fundamental	30
II.4.	Equação	Integral no Contorno	32
II.5.	Regiões	Infinitas	37
II.6.	Tensões	para Pontos Internos	40
II.7.	Tensões	no Contorno	43
II.8.	Consider	ração de Carga Concentrada	46

CAPÍTULO I	II IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	49
III.1.	Funções de Interpolação para a Geometria	49
	III.1.1. Discretização Linear em Ele- mentos Triangulares	50
	III.1.2. Discretização Quadrática em Elementos triangulares	53
	III.1.3. Valor do Jacobiano e Versor	
	Normal	54
III.2.	Funções de Interpolação para Deslo-	
	camentos e Forças de Superfície	59
	III.2.1. Elemento Constante	60
	III.2.2. Elemento Isoparamétrico Tri-	
	angular Linear (Elemento Linear)	62
	III.2.3. Elemento Quadrático	64
III.3.	Discretização da Equação Integral no	
	Contorno	70
III.4.	Formação do Sistema de Equações	74
III.5.	Elemento de Colocação Não Nodal (Ele-	
	mento Interpolado)	80
III.6.	Elemento Contínuo	101
,		
CAPITULO I	V APLICAÇÕES	105
IV.1.	Cubo Tracionado	105
IV.2.	Tubo de Parede Grossa sob Pressão Interna	109
IV.3.	Bloco Comprimido	118

CAPÍTULO V	CONCLUSÕES	123
APÊNDICE A	TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL DE TERCEI- RA ORDEM(Integrais Quasi-Singulares)	126
APÊNDICE B	MAPEAMENTO DO DOMÍNIO TRIANGULAR EM QUADRANGULAR	134
REFERÊNCIAS	, BIBLIOGRAFICAS	137

## CAPITULO I

## INTRODUÇÃO

Grande parte dos problemas de engenharia tem seu comportamento modelado por um sistema de equações diferenciais, em conjunto com as correspondentes condições de contorno. A Teoria da Elasticidade encontrou as soluções analíticas — ou exatas — para alguns desses problemas, porém, são casos muito particulares. Nos demais encontrar solução analítica é uma tarefa difícil, senão uma isso o engenheiro deve lançar mão impossível. Para de soluções aproximadas, substituindo o modelo contínuo, com infinitos graus de liberdade, por um discreto, com finitos graus de liberdade. Dentro desta ótica desenvolveram-se vários processos, dentre os quais destacam o Método das Diferencas Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O Método das Diferenças Finitas tem pouca utilização em engenharia porque seu campo aplicação fica restrito a problemas com geometria regular, em condições especiais. Para problemas com geometria complexa e condições de contorno arbitrárias é inadequado. Hoje ainda é usado com certa freqüência em problemas de escoamento de fluidos. O MDF efetua a discretização de todo o domínio do

analisar. O Método dos Elementos Finitos corpo é а intensamente utilizado em engenharia, em todos seus campos de conhecimentos, originou-se em meados da década 50 e foi rapidamente desenvolvido na década 60. O MEF também efetua discretização em todo domínio do а corpo em estudo. Finalmente o Método dos Elementos de Contorno é o mais recente, em termos computacionais, e encontra-se em um estágio de desenvolvimento aquém do MEF. O MEC quando não trabalha com forças de volume ou plasticidade, por exemplo, pode efetuar a discretização só do contorno do corpo em estudo. O presente trabalho optou por adotar o Método dos Elementos de Contorno para análise de problemas de elasticidade linear.

O MEC já era utilizado na década 50 por MIKHLIN [1] e MUSKHELISHVILLI [2]. RIZZO [3] em 1967 apresentou uma formulação em elasticidade bidimensional utilizando discretização linear para a geometria e considerando as incógnitas (deslocamentos e forças de superfície) constantes cada elemento. RICARDELLA em [4], também trabalhando em domínio bidimensional, foi o primeiro a usar elementos isoparamétricos lineares, para resolver problemas de elasticidade e plasticidade. CRUSE [5] apresentou a primeira formulação em domínio tridimensional utilizando discretização linear para a geometria e adotando incógnitas (deslocamentos e forças de superfície) constantes nos elementos. LACHAT [6] avançou mais e, em domínios bi e tridimensional, utilizou interpolação de ordem superior,

apresentando discretização de geometria com elementos curvos de segunda ordem, nos quais as incógnitas (deslocamentos e forças de superfície) poderiam ter variação linear, quadrática ou cúbica. Hoje o MEC tem se difundido amplamente em todos campos de conhecimentos da engenharia e vem experimentando um ritmo de desenvolvimento muito rápido.

É interessante ressaltar duas contribuições importantes para o estudo e entendimento do MEC que foram, em um primeiro momento, o livro de BREBBIA [7], de 1978, intitulado The Boundary Element Method for Engineers , e posteriormente, em uma versão mais aprimorada, o livro de BREBBIA, TELLES e WROBEL [8], de 1984, intitulado Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering.

É oportuno discorrer, neste momento, sobre as duas maneiras que há para se formular o Método dos Elementos de Contorno: o Método Indireto e o Método Direto. O primeiro método expressa as equações integrais em termos de densidades de fontes, que não possuem significado físico. Após o cálculo daquelas densidades determinam-se os deslocamentos e forças de superfície. No Método Direto as integrais são expressas em termos de deslocamentos e forças de superfície, formando um sistema cuja solução fornecerá diretamente os seus valores (SANTIAGO [9]).

No presente trabalho procurou-se implementar um

elemento que permitisse modelar as descontinuidades de forças de superfície, em domínio tridimensional. Existem diversas maneira de fazê-lo. Um procedimento rudimentar seria adotar somente um nó funcional por elemento (Elemento Constante), neste caso as incógnitas são consideradas constantes em cada elemento. Isto é inadequado pois em geral exige que se utilize um grande número de elementos para efetuar uma boa modelagem. Outros processos seriam o Nó Múltiplo (Nó Duplo, em elasticidade bidimensional) e a técnica do Elemento Não-Conforme.

O Nó Múltiplo consiste em ter-se vários nós do contorno — em um canto — com exatamente as mesmas coordenadas, porém, cada ponto do Nó Múltiplo só pertence a um determinado elemento. Também não é adequado porque, dependendo das condições de contorno, pode gerar a matriz , do sistema, singular. O Elemento Não-Conforme considera os pontos de colocação e funcional coincidentes e localizados internamente no elemento, a uma distância conveniente dos extremos. Ele foi implementado por SILVA [10] com sucesso, em elasticidade tridimensional.

Neste trabalho implementou-se a técnica do Elemento de Colocação Não Nodal (ou Elemento Interpolado), em domínio tridimensional, no qual os nós funcionais permanecem nos cantos, como tradicionalmente ocorre no MEC, porém os pontos de colocação são localizados internamente no elemento a uma distância conveniente dos extremos.

Depois exprimem-se os valores nodais em função daqueles valores internos. Esta técnica foi implementada e testada por MARQUES [11] e utilizada por NEVES [12], em domínio 2-D, ambos com sucesso. Quando o problema é tridimensional as dificuldades são maiores, porquanto, os elementos de contorno agora são bidimensionais. O Elemento Interpolado apresenta a vantagem de melhor se adequar quando deseja-se acoplar o MEC com o MEF.

O programa elaborado trabalha com elemento triangular isoparamétrico linear. As integrais singulares são convertidas para coordenadas cilíndricas e calculadas analiticamente em r e numericamente em θ , de Gauss. integrais utilizando-se integração As também calculadas numericamente, quasi-singulares, integração de Gauss acompanhadas utilizam-se de de transformação polinomial de terceira ordem (TELLES [13]) e de integração seletiva. Como este programa originou-se do programa de SÁ [14] que trabalha com integração de Hammer, em mapeamento triangular, lançou-se mão do trabalho de [15] para converter o mapeamento triangular TELLES em mapeamento quadrangular para permitir o uso de integração de Gauss. Isto é muito vantajoso, visto que, enquanto por Hammer chega-se ao máximo de 13 pontos de integração, por Gauss pode-se chegar a até 9216 pontos !.

A seguir é apresentado — de maneira sucinta o corpo da tese, que foi dividida em cinco capítulos. O

Capítulo I, como de praxe, é o introdutório. Ao Capítulo II foi reservada a tarefa de apresentar, no início, os tópicos básicos da Teoria da Elasticidade, e, em seguida, as expressões, devidamente deduzidas, pertinentes ao MEC. Apresenta-se a dedução da Identidade de Somigliana de duas maneiras distintas, a primeira pelo Método dos Resíduos Ponderados, e a segunda pelas relações de reciprocidade, que é um método exato para o tratamento matemático da questão. A seguir apresentam-se as soluções fundamentais (Kelvin) para o domínio tridimensional. O próximo tópico a equação integral de contorno, onde usa-se deduz 0 procedimento padrão de subtrair-se uma calota esférica em fonte no torno do ponto contorno.  ${\tt Em}$ sequida são apresentadas as condições de regularidade, tensões nos pontos internos e tensões no contorno — o cálculo destas implementado no programa. Finalmente é últimas não foi apresentada a consideração de carga concentrada. Esta, também, não foi implementada no programa, por falta de embora, fazê-lo necessita-se, tempo, para apenas de pequenas modificações nas rotinas elaboradas.

O Capítulo III discorre sobre a implementação numérica, apresentando em seu início as funções de interpolação para a geometria, onde são apresentados elementos triangulares lineares e gradráticos. A seguir apresentam-se as funções de interpolação para os deslocamentos e forças de superfície, com as opções de interpolação constante, linear e quadrática. Em seguida

aborda-se a discretização da equação integral de contorno onde enfoca-se o tratamento ao erro quando utiliza-se aproximados de deslocamentos valores е forças de superfície. Neste tópico trata-se o erro através do Método dos Resíduos Ponderados. O outro assunto abordado discorre formação do sistema sobre de equações, а е subsequentemente, é apresentado, em detalhe, o Elemento Interpolado. Finalmente mostra-se também o processo de integração do Elemento Contínuo.

O trabalho finaliza apresentando os Capítulos IV e V. No primeiro estão os resultados do programa, onde constam três exemplos, dos quais dois são clássicos, que são o cubo tracionado e o tubo de parede espessa. Nestes há comparação com a solução exata. O outro exemplo trata-se de um bloco submetido a uma carga concentrada, cujos resultados são comparados com aqueles apresentados por SILVA [10]. No Capítulo V estão as conclusões e algumas sugestões para futuras implementações do trabalho apresentado.

### CAPITULO II

## FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

# II.1. TÓPICOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE II.1.1. NOTAÇÃO INDICIAL

Neste trabalho é utilizada uma notação denominada notação indicial. Isto se justifica porque ela simplifica consideravelmente as expressões algébricas, e por causa disso, torna-se uma ferramenta muito útil nas derivações e manuseios daquelas expressões. Tal notação faz uso de subíndices para representar as componentes das grandezas, na Teoria da Elasticidade. Por exemplo, um vetor v é representado por suas componentes v<sub>i</sub>. Neste caso fica ~ implícito que o índice i varia de 1 a 3 (no espaço 3-D), isto é:

$$v = (v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3)$$
 (II.1.1)

onde os índices (x,y,z) são representados por (1,2,3)respectivamente. O índice i em na Eq.(II.1.1) tem escolha livre. Ou seja, é indiferente adotar v<sub>i</sub> ou v<sub>j</sub>. Por este motivo ele é chamado de *indice livre*.

### II.1.2. CONVENÇÃO DE SOMA

A convenção de soma é complementar à notação indicial e substitui com grande vantagem o símbolo tradicional da soma ( $\Sigma$ ). Tal convenção estabelece que deve-se efetuar a soma dos termos que possuem duas ocorrências do mesmo subíndice, isto é

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$
(II.1.2)

ficando subentendido que k = 1, 2, 3. E, se a análise é 3-D

$$a_{j}a_{j} = a_{1}^{2} + a_{2}^{2} + a_{3}^{2}$$
 (II.1.3)

O índice repetido da Eq.(II.1.3) é chamado de *indice mudo*. Outro exemplo:

$$\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_{j} = \mathbf{b}_{i} \tag{II.1.4a}$$

significa

$$a_{11}x_{1} + a_{12}x_{2} + a_{13}x_{3} = b_{1}$$
(II.1.4b)  

$$a_{21}x_{1} + a_{22}x_{2} + a_{23}x_{3} = b_{2}$$
(II.1.4c)  

$$a_{31}x_{1} + a_{32}x_{2} + a_{33}x_{3} = b_{3}$$
(II.1.4d)

Por este último exemplo pode-se perceber a forte

característica de compacidade daquela convenção.

### II.1.3. NOTAÇÃO DE DIFERENCIAÇÃO

A notação indicial é muito útil também para a diferenciação, neste caso usa-se a *virgula* para indicá-la. Por exemplo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_{1,1}$$
 (II.1.5)

$$\frac{\partial g_x}{\partial y} = g_{1,2}$$
(II.1.6)

onde o subíndice depois da vírgula indica a derivada parcial com respeito à coordenada correspondente ao respectivo índice.

O gradiente de  $\phi$  será escrito na forma  $\phi$ , i , isto é:

$$\nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{z}} \right) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{1}}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{2}}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{3}} \right) = \left( \phi, \right)$$
(II.1.7)

O divergente do vetor v ,  $\nabla\!\cdot\!v$  , é dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{1}}}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{1}}} + \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{2}}}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{2}}} + \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{3}}}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{3}}} = \mathbf{v}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$$
(II.1.8)

Finalmente o Laplaciano de  $\phi$  será denotado por  $\phi$ , i , ou seja:

$$\nabla^{2}\phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \phi_{,11} + \phi_{,22} + \phi_{,33} = \phi_{,11}$$
 (II.1.9)

### II.1.4. DELTA DE KRONECKER

O delta de Kronecker é uma matriz especial denotada, indicialmente, como  $\delta_{i,i}$ , isto é:

$$\begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(II.1.10a)

Portanto as componentes de δij são:

 $\delta_{ij} = 1$ , se i = j (II.1.10b)  $\delta_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$  (II.1.10c)

### II.1.5. TENSOR DE PERMUTAÇÃO

Em adição apresenta-se o tensor de permutação que é representado por  $e_{ijk}$  e tem 3<sup>3</sup> (tensor de 2<sup>a</sup> ordem) elementos e cujas componentes são:

= -1 quando i,j,k são uma permutação ímpar de 1,2,3

Por exemplo,  $e_{123}^{}=1$  porque o número de permutação para chegar a 1,2,3 é zero, par. Já  $e_{132}^{}=-1$ , porque o índice 1,3,2 pode ser permutado uma vez, trocando 3 com 2, para obter 1,2,3, portanto, ,permutação ímpar. E claramente percebe-se que  $e_{112}^{}=e_{331}^{}=e_{122}^{}=\ldots=0$ .

II.1.6. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Considerando-se o corpo genérico mostrado na Fig. II.1.1, que ocupa um domínio  $\Omega$  e cujo contorno é  $\Gamma$ , onde atuam as forças de volume b<sub>j</sub> e forças de superfície p<sub>i</sub>, respectivamente



Fig. 11.1.i. Derivação das equações de equilíbrio

A condição de equilíbrio das forças atuantes estabelece que:

$$\int_{\Gamma} p_{j} d\Gamma + \int_{\Omega} b_{j} d\Omega = 0 \qquad (II.1.11)$$

Porém, as forças de superfície p<sub>i</sub> podem ser calculadas pela *Formula de Cauchy para tensões*, apresentada abaixo.

$$p_{j} = \sigma_{ij} n_{i} \qquad (II.1.12)$$

Assim

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_j d\Omega = 0 \qquad (II.1.13)$$

E usando-se o Teorema da Divergência (CHEN e SALEENB [16]), obtem-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,i} + b_j) d\Omega = 0 \qquad (II.1.14)$$

Para um volume arbitrário, obtem-se

$$\sigma_{ij,i} + b_{j} = 0$$
 (II.1.15)

A aplicação do equilíbrio dos momentos no corpo

da Fig. II.1.1 leva (CHEN e SALEEB [16]):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (II.1.16)$$

II.1.7. RELAÇÕES DEFORMAÇÕES - DESLOCAMENTOS

Após a aplicação do carregamento em um corpo, este se deforma, assumindo uma nova configuração (em relação àquela antes do carregamento). Portanto todos os seus pontos que possuem liberdade de deslocamento, deslocam-se  $u_i$ (componentes de deslocamento). Assim, pode-se calcular  $\varepsilon_{ij}$ , tensor de deformação de GREEN (expresso em função das coordenadas Lagrangeanas), por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$$
 (II.1.17)

Como adota-se neste trabalho a hipótese de pequenas deformações, então as derivadas dos deslocamentos são muito pequenas, consequentemente, os termos não lineares da Eq.(II.1.17) serão negligenciáveis, assim:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$
 (II.1.18)

Esta equação é conhecida como Equação de Cauchy.

Para deslocamentos conhecidos  $u_i$ , as componentes de deformação,  $\varepsilon_{ij}$ , podem ser determinadas diretamente da Eq.(II.1.18). Por outro lado, dadas as componentes de deformação  $\varepsilon_{ij}$ , a aplicação da Eq.(II.1.18) resultará num sistema de seis equações diferenciais parciais para três funções incógnitas dos deslocamentos  $u_i$ . Não pode-se esperar, em geral, que haverá solução quando as componentes de deformação possuem valores arbitrários. Elas devem obedecer a algumas condições adicionais. Estas condições são conhecidas como equações de compatibilidade e são dadas por

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} = 0 \qquad (II.1.19)$$

A aplicação da Eq.(II.1.19) resulta em seis equações independentes (conhecidas como equações de Saint-Venant) e são necessárias e suficientes para assegurar ao campo de deslocamento solução unívoca e contínua para campos simplesmente conectados. Para corpos com conexão múltipla, contudo, ela é necessária mas geralmente não suficiente.

### II.1.8. EQUAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO

De um modo geral, para um material elástico as relações tensão-deformação são dadas por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^{o} \qquad (II.1.20)$$

onde  $\sigma_{ij}^{\circ}$  são as componentes do tensor de tensão inicial e

C<sub>11k1</sub> é o tensor das constantes elásticas do material.

Se é assumido que o corpo está livre de tensões iniciais, a Eq.(II.2.20) se reduz a

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \qquad (II.1.21)$$

A Eq.(II.1.21) é conhecida como *Lei de Hooke generalizada*, por ser uma generalização da dependência linear entre tensão e deformação observado por Hooke em seu experimento de tração simples.

O tensor  $C_{ijkl}$ , por ser de quarta ordem, possui 3<sup>4</sup> ou 81 termos. Entretanto, levando-se em conta a simetria dos tensores,  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$ , a independência das propriedades elásticas com respeito às direções consideradas (material isótropo) e considerando-se um material elástico de GREEN (material hiperelástico) consegue-se reduzir as constantes para somente 2 termos independentes. Estes termos são  $\lambda$  e G, conhecidos como constantes de Lamé.

Desta forma C<sub>ijkl</sub> será explicitada da seguinte maneira:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$
(II.1.22)

Substituindo-se a Eq.(II.1.22) na Eq.(II.1.21), obtém-se

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{k1} \varepsilon_{k1} + G(\delta_{ik} \delta_{j1} + \delta_{i1} \delta_{jk}) \varepsilon_{k1}$$
(II.1.23)

Ou

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}$$
(II.1.24)

onde

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$$
 ou  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  (II.1.25)

sendo G o módulo de elasticidade transversal, E o módulo de elasticidade longitudinal e v é o *coeficiente de Poisson*. As constantes v, G e E não são independentes entre si, elas estão relacionadas por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$
(II.1.26)

### II.1.9. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GOVERNANTES

Diante das equações da Teoria da Elasticidade já apresentadas pode-se neste momento imaginar que teria-se condições de resolver os seus problemas clássicos. Com efeito, as equações (II.1.15), (II.1.18) e (II.1.23) fornecem 3 equações de equilíbrio, 6 equações deformações-deslocamento e 6 equações tensão-deformação, respectivamente, totalizando 15 equações, para encontrar os valores de 15 incógnitas, a saber: 6 deformações, 6 tensões e 3 deslocamentos. Certamente com este sistema encontrar-se-ão diversas maneiras de solucionar o problema. Porém, a literatura clássica apresenta uma alternativa mais direta para tratar da questão. Ela é encontrada substituindo-se a Eq.(II.1.18) na Eq.(II.1.23), para obter as tensões em termos do gradiente dos deslocamentos, e então, substituindo-se o resultado na Eq.(II.1.15), obtem-se uma equação diferencial de 2<sup>ª</sup> ordem para as três componentes do deslocamento. A equação final obtida com este procedimento será:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1 - 2\nu} u_{k,kj} + b_{j} = 0$$
 (II.1.27)

Esta equação é conhecida como Equação de Navier para deslocamento.

Como a Eq.(II.1.27) está explicitada em função dos deslocamentos, ela é mais convenientemente aplicável para problemas com condições de contorno em termos de deslocamentos. Então convém encontrar uma expressão que relaciona as incógnitas deslocamentos a nível de contorno. Isto é conseguido levando a Eq.(II.1.18) na Eq.(II.1.23), como antes, e substituindo-se o resultado na Eq.(II.1.12), obtendo-se:

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} n_{i} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) n_{j} = p_{i}$$
(II.1.28)

onde  $n_i$  são os cossenos diretores da normal ao contorno, apontada para fora do corpo, e  $p_i$  são as componentes das forças de superfícies prescritas.

Uma característica positiva da aplicabilidade das Eq.(II.1.27) e Eq.(II.1.28) é que no caso de incluir-se somente deslocamentos como incógnitas, então as condições de compatibilidade (Eq.II.1.19) não são necessárias. Em suma, calculam-se u<sub>i</sub> com asEqs.(II.1.27) e Eqs.(II.1.28), cujos valores são substituidos na Eq.(II.1.18) para o cálculo das componentes do tensor de deformação  $\varepsilon_{ij}$ , que por sua vez permitem o cálculo das componentes do tensor de tensões via Eqs.(II.1.23).

## II.2. EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS INTERNOS (IDENTIDADE DE SOMIGLIANA)

## II.2.1. DEDUÇÃO A PARTIR DA TÉCNICA DOS RESIDUOS PONDERADOS

A técnica dos resíduos ponderados pode ser aplicada para derivar uma equação integral que permite calcular deslocamento no interior de um corpo (com domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ ) que satisfaz a definição de região regular definida por KELLOG [17].

Este corpo deve satisfazer às equações de

equilíbrio, como também, às condições do problema a resolver. As condições de contorno naturais ou livres são:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j = \overline{p}_i$$
, em  $\Gamma_p$  (II.2.1)

O outro tipo de condição de contorno é aquele em termos das componentes dos deslocamentos prescritos, chamada de condição de contorno essencial ou forçada, qual seja:

$$u_i = \bar{u}_i$$
, em  $\Gamma_u$  (II.2.2)

Notar que os deslocamentos prescritos são definidos no contorno  $\Gamma_u$  e as forças de superfície prescritas são definidas no contorno  $\Gamma_p$ , com a condição de  $\Gamma_u + \Gamma_p = \Gamma$ , sendo  $\Gamma$  o contorno externo do domínio  $\Omega$ , ocupado pelo sólido.

A aplicação do método dos resíduos ponderados ao problema em questão, traduz-se na seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) v_k \, d\Omega = \int_{\Gamma_p} (p_k - \overline{p}_k) v_k \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\overline{u}_k - u_k) w_k \, d\Gamma$$
(II.2.3)

onde v<sub>k</sub> e w<sub>k</sub> são as funções de ponderação (ver WILLMERSDORF [18]). No Método dos Elementos de Contorno usam-se funções de ponderação especiais, quais sejam:

$$v_{k} = u_{k}^{*}$$
 (II.2.4a)

е

$$w_{k} = p_{k}^{*}, \quad com \quad p_{k}^{*} = n_{j}\sigma_{jk}^{*}$$
 (II.2.4b)

que são os deslocamentos e forças de superficie correspondentes a cargas concentradas em domínio infinito  $\Omega^*$ , com as mesmas propriedades físicas do problema a ser analisado. Assim, obtém-se

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_{k}) \cdot u_{k}^{*} d\Omega = \int_{\Gamma_{p}} (p_{k} - \overline{p}_{k}) \cdot u_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Gamma_{u}} (\overline{u}_{k} - u_{k}) \cdot p_{k}^{*} d\Gamma$$
(II.2.5)

Integrando-se por partes o primeiro termo da Eq.(II.2.5) e, subsequentemente, aplicando o Teorema da Divergência, obtem-se:

$$\int_{\Gamma} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{k,j}^{*} d\Omega + \int_{\Omega} b_{k} u_{k}^{*} d\Omega = \int_{\Gamma_{p}} (p_{k} - \overline{p}_{k}) u_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Gamma_{u}} (\overline{u}_{k} - u_{k}) p_{k}^{*} d\Gamma$$
(II.2.6)

ou

$$\int_{\Gamma_{p}} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Gamma_{u}} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{k,j}^{*} d\Omega + \int_{\Omega} b_{k} u_{k}^{*} d\Omega = \int_{\Gamma_{p}} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma - \int_{\Gamma_{p}} \overline{p}_{k} u_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Gamma_{u}} (\overline{u}_{k} - u_{k}) p_{k}^{*} d\Gamma \quad (II.2.7a)$$

Eliminando-se as integrais idênticas de cada lado, ter-se-á:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{k,j}^{*} d\Omega + \int_{\Omega} b_{k} u_{k}^{*} d\Omega = -\int_{\Gamma_{p}} \bar{p}_{k} u_{k}^{*} d\Gamma - \int_{\Gamma_{u}} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Gamma_{u}} (\bar{u}_{k} - u_{k}) p_{k}^{*} d\Gamma$$
(II.2.7b)

Porém, pode-se demonstrar que  $\int_{\Omega}^{\sigma} \sigma_{jk} u_{k,j}^{*} d\Omega = \int_{\Omega}^{\sigma} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{*} d\Omega$ (ver Apêndice A de NEVES [12]), então ter-se-á:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{*} d\Omega + \int_{\Omega} b_{k} u_{k}^{*} d\Omega = -\int_{\Gamma_{p}} \bar{p}_{k} u_{k}^{*} d\Gamma - \int_{\Gamma_{u}} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Gamma_{u}} (\bar{u}_{k} - u_{k}) p_{k}^{*} d\Gamma$$
(II.2.8a)

E devido à simetria de  $C_{ijkl}$  (ver SILVA [10]), obter-se-á:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk}^{*} \varepsilon_{jk} d\Omega + \int_{\Omega} b_{k} u_{k}^{*} d\Omega = -\int_{\Gamma_{p}} \overline{p}_{k} u_{k}^{*} d\Gamma - \int_{\Gamma_{u}} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Gamma_{u}} (\overline{u}_{k} - u_{k}) p_{k}^{*} d\Gamma$$
(II.2.8b)

Também pode-se demonstrar que

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk}^{\star} \varepsilon_{jk} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^{\star} u_{k} d\Omega - \int_{\Gamma} u_{k} p_{k}^{\star} d\Gamma \qquad (II.2.8c)$$

(ver Apêndice A de NEVES [12]). Então

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^{*} u_{k} d\Omega - \int_{\Gamma} u_{k} p_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Omega} b_{k} u_{k}^{*} d\Omega = -\int_{\Gamma_{P}} \bar{p}_{k} u_{k}^{*} d\Gamma - \int_{\Gamma_{U}} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Gamma_{U}} (\bar{u}_{k} - u_{k}) p_{k}^{*} d\Gamma$$

$$(II.2.8d)$$

ou

$$\int_{\Omega}^{\sigma_{jk,j}^{\star} u_{k}} d\Omega - \int_{\Gamma_{p}}^{u_{k}} u_{k}^{\star} d\Gamma - \int_{\Gamma_{u}}^{u_{k}} u_{k}^{\star} p_{k}^{\star} d\Gamma + \int_{\Omega}^{u_{k}} b_{k}^{\star} u_{k}^{\star} d\Omega = -\int_{\Gamma_{p}}^{u_{k}} \bar{p}_{k}^{\star} d\Gamma - \int_{\Gamma_{u}}^{u_{k}} p_{k}^{\star} d\Gamma + \int_{\Gamma_{u}}^{u_{k}} \bar{u}_{k}^{\star} p_{k}^{\star} d\Gamma - \int_{\Gamma_{u}}^{u_{k}} u_{k}^{\star} d\Gamma$$
(II.2.8e)

E eliminando-se as integrais idênticas de cada lado, obter-se-á:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk}^{*}, j) u_{k} d\Omega + \int_{\Omega} b_{k} u_{k}^{*} d\Omega = -\int_{\Gamma} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{k} p_{k}^{*} d\Gamma$$
(II.2.9)

Uma vez que as funções de ponderação satisfazem as condições de equilíbrio, pode-se escrever:

$$\sigma_{jk'j}^* + b_k^* = 0$$
 (II.2.10)

Ou

$$\sigma_{jk'j}^* = -b_k^*$$
 (II.2.11)

Admita-se  $b_k^*$  como cargas concentadas unitárias positivas aplicadas em  $\xi \in \Omega^*$  em cada uma das três direções ortogonais. Isto pode ser representado por

$$b_{i}^{*} = \Delta(\xi, X)p_{i}$$
 (II.2.12)

onde p<sub>k</sub> são as componentes daquelas cargas e  $\Delta(\xi, X)$  é a função delta de Dirac, definida por:

$$\Delta(\xi; X) = 0 \qquad \text{se} \qquad \xi \neq X \qquad (II.2.13a)$$
$$\int_{\Omega} \Delta(\xi; X) \ d\Omega = 1 \qquad (II.2.13b)$$

que possui a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega} f(X) \Delta(\xi; X) \ d\Omega(X) = f(\xi)$$
 (II.2.14)

Portanto a primeira integral do lado esquerdo da equação (II.2.9) pode ser representada por

$$-\int_{\Omega} b_i^* u_i \, d\Omega = - u_i(\xi) p_i \qquad (II.2.15)$$

Além do mais, considerando-se cada carga concentrada unitária atuando independentemente, os deslocamentos e forças de superfícies do domínio  $\Omega^*$  poderão

ser escritos na seguinte forma:

$$u_{j}^{*} = u_{ij}^{*}(\xi, X) p_{i}$$
(II.2.16a)  
$$p_{j}^{*} = p_{ij}^{*}(\xi, X) p_{i}$$
(II.2.16b)

onde  $u_{ij}^{*}(\xi,X)$  e  $p_{ij}^{*}(\xi,X)$  representam os deslocamentos e forças de superfície na direção j no ponto X correspondente a uma força unitária atuando na direção i aplicada em  $\xi$ . Na

literatura do Método dos Elementos de Contorno os pontos  $\xi$ e X são denominados, respectivamente, ponto fonte e ponto campo.

Do exposto anteriormente, pode-se reescrever a Eq.(II.3.9) da seguinte forma:

$$u_{i}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X) p_{j}(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\xi, X) u_{j}(X) d\Gamma(X) + \int_{\Omega} u_{ij}^{*}(\xi, X) b_{j}(X) d\Omega(X)$$
(II.2.17)

que representa as componentes dos deslocamentos em ξ. A equação (II.2.17) é conhecida como *Identidade de Somigliana* para deslocamentos e foi obtida por reciprocidade com a solução singular da equação de Navier, satisfazendo
$$G u_{j,kk}^{*} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj}^{*} + \Delta(\xi, X) p_{j} = 0 \quad (II.2.18)$$

As soluções da equação (II.2.18) são chamadas de soluções fundamentais.

Notar que na passagem da Eq.(II.2.9) para a Eq.(II.2.17) foi eliminada a única integral de domínio ---primeiro termo do do lado esquerdo do lado do sinal de igual da Eq.(II.2.9) — contendo incógnitas (deslocamentos), considerando-se que são conhecidas as forças de volume b<sub>i</sub>(X). As outras duas integrais da Eq.(II.2.17) possuem incógnitas porém atuam somente no contorno  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$ . Obtem-se assim deslocamentos do domínio em função, apenas, de variáveis (deslocamentos e forças de superfície) do contorno.

Portanto a Eq.(II.2.17) relaciona os deslocamentos do domínio com deslocamentos e forças de superfície no contorno. Esta característica é a origem do nome *Método dos Elementos de Contorno*. Notar que a última integral da Eq. (II.2.17) (integral de domínio) também pode ser levada ao contorno, via *vetores de Galerkin*.. Fica implícito que u(X) e p(X) assumem seus valores prescritos quando o ponto campo estiver em  $\Gamma_{u}$  e  $\Gamma_{o}$ , respectivamente.

#### II.2.2. DEDUÇÃO A PARTIR DA RELAÇÃO DE RECIPROCIDADE

Através da técnica dos resíduos ponderados e utilizando-se funções de ponderação especiais chegou-se,

26

na seção anterior, à expressão (II.2.17), conhecida como Identidade de Somigliana, para funções u e p que atendem exatamente às equações de Navier. Para corroborar esta afirmação apresenta-se a seguir uma dedução alternativa, baseada nas relações exatas de reciprocidade.

Imaginem-se dois estados distintos que satisfazem as condições de equilíbrio e obedecem às relações deformação-deslocamento e às equações constitutivas. O primeiro estado é definido por pelo dominio  $\Omega$  e seu contorno  $\Gamma$  e é representado por  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $p_i$ , e  $b_i$ . O outro é definido pelo domínio infinito  $\Omega^*$  e seu contorno  $\Gamma^*$ , sendo representado por  $\sigma_{ij}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $u_i^*$ ,  $p_i^*$ , e  $b_i^*$ .

Conforme mencionado na seção II.2.1, pela simetria de C<sub>ukl</sub> pode-se escrever a seguinte sentença:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{*} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^{*} \varepsilon_{jk} d\Omega \qquad (II.2.19)$$

Primeiramente se desenvolverá expressões derivadas da primeira integral da Eq.(II.2.19). O resultado para a outra integral será análogo. Deste modo, utilizando-se da Eq.(II.1.18), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{*} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{jk} (u_{j,k}^{*} + u_{k,j}^{*}) d\Omega \qquad (II.2.20)$$

ou

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{\star} d\Omega = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{j,k}^{\star} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{k,j}^{\star} d\Omega \right]$$
(II.2.21)
Integrando-se por partes as duas últimas

integrando-se por partes as duas ultimas integrais de (II.2.21), obter-se-á:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{\star} d\Omega =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} (\sigma_{jk} u_{j}^{\star})_{,k} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_{j}^{\star} d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_{jk} u_{j}^{\star})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{jk,j} u_{k}^{\star} d\Omega \right]$$

$$(II.2.22)$$

que com o uso do Teorema da Divergência, torna-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{*} d\Omega = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Gamma} \sigma_{jk} u_{j}^{*} n_{k} d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_{j}^{*} d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{jk} u_{k}^{*} n_{j} d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk,j} u_{k}^{*} d\Omega \right]$$
(II.2.23)

Ou, pela Eq.(II.1.12), obter-se-á:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{*} d\Omega = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Gamma} p_{j} u_{j}^{*} d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_{j}^{*} d\Omega + \int_{\Gamma} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk,j} u_{k}^{*} d\Omega \right] \qquad (II.2.24)$$

E, utilizando-se a Eq.(II.1.15), obter-se-á:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{*} d\Omega = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Gamma} p_{j} u_{j}^{*} d\Gamma - \int_{\Omega} b_{j} u_{j}^{*} d\Omega + \int_{\Gamma} p_{k} u_{k}^{*} d\Gamma - \int_{\Omega} b_{k} u_{k}^{*} d\Omega \right] \qquad (II.2.25)$$

Ou

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{*} d\Omega = \int_{\Gamma} p_{j} u_{j}^{*} d\Gamma + \int_{\Omega} b_{j} u_{j}^{*} d\Omega \qquad (II.2.26)$$

Analogamente obter-se-á:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}^{\star} \varepsilon_{jk} d\Omega = \int_{\Gamma} p_{jj}^{\star} d\Gamma + \int_{\Omega} b_{jj}^{\star} u_{j} d\Omega \qquad (II.2.27)$$

Deste modo chega-se ao seguinte resultado:

$$\int_{\Gamma} p_{j} u_{j}^{\star} d\Gamma + \int_{\Omega} b_{j} u_{j}^{\star} d\Omega = \int_{\Gamma} p_{j}^{\star} u_{j} d\Gamma + \int_{\Omega} b_{j}^{\star} u_{j} d\Omega \qquad (II.2.28)$$

que corresponde ao 2º Teorema dos Trabalhos Recíprocos de Betti.

Notar que a última integral da Eq.(II.2.28) é igual à primeira integral da Eq.(II.2.9) com sinal trocado, isto é:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}^{*}) u_{k} d\Omega = - \int_{\Omega} b_{k}^{*} u_{k} d\Omega \qquad (II.2.29)$$

Desta maneira as Eq.(II.2.20) e Eqs.(II.2.9) serão idênticas.

Adotando-se para  $b_j^*$  a mesma hipótese já apresentada e discutida na seção anterior, a saber:

$$b_j^* = \Delta(\xi, X) p_j \qquad (II.2.30)$$

E usando os mesmos artifícios da Eq.(II.2.16) chega-se à Identidade de Somigliana.

## II 3 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Conforme mencionado na seção II.2.1 as soluções fundamentais são definidas como soluções da equação particular de Navier dada pela Eq.(II.2.18). Para cada tipo de domínio  $\Omega^*$  obtém-se uma determinada solução fundamental. Para domínios infinitos ou finitos há a solução de Kelvin, e para domínios semi-infinitos há a solução de Mindlin.

Como no presente trabalho opera-se somente no domínio infinito ou finito, serão apresentadas apenas as soluções de Kelvin, que fornecem:. Deslocamento:

$$u_{ij}^{*}(\xi, X) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left\{ (3 - 4\nu) \delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right\}$$
 (II.3.1)

Força de superficie:

$$p_{ij}^{*}(\xi, X) = -\frac{1}{8\pi (1-\nu)r^{2}} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right] - (1-2\nu)(r_{,i}n_{j} - r_{,j}n_{i}) \right\}$$
(II.3.2)

Que podem ser representadas na seguinte forma matricial:

$$u_{ij}^{*} \rightarrow u_{ij}^{*} = \begin{bmatrix} u_{11}^{*} & u_{12}^{*} & u_{13}^{*} \\ u_{21}^{*} & u_{22}^{*} & u_{23}^{*} \\ u_{31}^{*} & u_{32}^{*} & u_{33}^{*} \end{bmatrix}$$
(II.3.3)

$$p_{ij}^{\star} \rightarrow p_{21}^{\star} = \begin{bmatrix} p_{11}^{\star} & p_{12}^{\star} & p_{13}^{\star} \\ p_{21}^{\star} & p_{22}^{\star} & p_{23}^{\star} \\ p_{31}^{\star} & P_{32}^{\star} & P_{33}^{\star} \end{bmatrix}$$
(II.3.4)

Cabe observar que nas Eq.(II.3.1) e Eq.(II.3.2):

 $\xi$  : ponto fonte, ponte onde aplica-se a carga unitária na direção i.

- X : ponto campo, ponte onde ocorre o deslocamento e força de superficie na direção j, devido a aplicação de carga unitária em ξ.
- r : distância entre  $\xi \in X$ ,  $r = | X \xi |$ , ou  $r = (r_k r_k)^{1/2}$   $r_i$  : componente de r na direção i  $r_i = x_i(X) - x_i(\xi)$   $r_{,k}$  : derivada de r em relação a  $x_k$  ou  $\partial r$   $r_k$

$$r_{k} = \frac{\partial r}{\partial x_{k}(X)} = \frac{r_{k}}{r}$$

Notar que, por tratar-se de domínio 3-D, todos os índices: i, j, k, variam de 1 a 3.

#### II.4. EQUAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO

A Identidadede Somigliana (Eq.II.2.17) fornece deslocamento no domínio em funções de valores de parâmetros no contorno. Para isso, é preciso que, a priori, estes valores sejam conhecidos. Há necessidade, então, de primeiramente resolver-se o problema a nível de contorno. É o que se refere a seguir.

Assumindo que o corpo pode ser representado como mostra Fig. II.4.1, isto é, o domínio é subtraído de um setor esférico, com o centro no ponto fonte  $\xi$  raio  $\rho$ 



Fig. II.4.1. Ponto singular ξ removido por um setor esférico

a Eq.(II.1.28) pode ser escrita:

$$\int_{\Gamma-\Gamma_{\rho}+\overline{\Gamma}_{\rho}} p_{i} u_{i}^{*} d\Gamma + \int_{\Omega_{\rho}} b_{i} u_{i}^{*} d\Omega = \int_{\Gamma-\Gamma_{\rho}+\overline{\Gamma}_{\rho}} p_{i}^{*} u_{i} d\Gamma \quad (II.4.1)$$

Notar que a última integral de Eq.(II.1.28) desaparece, pois o ponto fonte  $\xi$  não pertence ao domínio  $\Omega_{\rho}$  ( $\Delta(\xi, X) = 0$ , em todo domínio  $\Omega_{\rho}$ ).

Em vista da Eq.(II.2.16) a Eq.(II.4.1) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma-\Gamma_{\rho}+\overline{\Gamma}_{\rho}} u_{ij}^{*}(\xi, X) p_{j}(X) d\Gamma + \int_{\Omega_{\rho}} u_{ij}^{*}(\xi, X) b_{j} d\Omega = \int_{\Gamma-\Gamma_{\rho}+\Gamma_{\rho}} p_{ij}^{*}(\xi, X) u_{j}(X) d\Gamma \quad (II.4.2)$$

Pode-se, agora, estudar separadamente o limite quando  $\rho \rightarrow 0$  em cada integral da Eq.(II.4.2). A última integral pode ser escrita

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\rho} + \overline{\Gamma}_{\rho}} p_{ij}^{*}(\xi, X) u_{j}(X) d\Gamma(X) =$$

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\overline{\Gamma}_{\rho}} p_{ij}^{*}(\xi, X) u_{j}(X) d\Gamma(X) + \lim_{\rho \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\rho}} p_{ij}^{*}(\xi, X) u_{j}(X) d\Gamma(X) \quad (II.4.3)$$

A primeira integral à direita da Eq.(II.4.3) pode ser representada por

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\overline{\Gamma}_{\rho}} p_{ij}^{*}(\xi, X) u_{j}(X) d\Gamma(X) = \lim_{\rho \to 0} \int_{\overline{\Gamma}_{\rho}} p_{ij}^{*}(\xi, X) [u_{j}(X) - u_{j}(\xi)] d\Gamma(X) + \lim_{\rho \to 0} u_{j}(\xi) \int_{\Gamma_{\rho}} p_{ij}^{*}(\xi, X) d\Gamma(X) \quad (II.4.4)$$

A primeira integral à direita da Eq.(II.4.4) desaparece devido a condição de continuidade (ou Holder continuidade) de u(x) e a segunda integral fornece

$$\lim_{\rho \to 0} u_{j}(\xi) \int_{\Gamma_{\rho}} p_{ij}^{*}(\xi, X) d\Gamma(X) = c_{ij}(\xi) u_{j}(\xi)$$
(II.4.5)

Voltando à Eq.(II.4.3), a segunda integral à direita deve ser interpretada no sentido de Valor Principal de Cauchy, cuja existência pode ser comprovada se  $u_j(x)$ satisfizer a condição de Hölder, ou seja:

$$|u_{j}(X) - u_{j}(\xi)| \leq Br^{\alpha}$$
 (II.4.6)

onde B e  $\alpha$  ( com 0 <  $\alpha \le 1$  ) são constantes positivos.

Um procedimento semelhante mostra que

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\rho} + \overline{\Gamma}_{\rho}} u_{ij}^{*}(\xi, X) p_{j}(X) d\Gamma = VP \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X) p_{j}(X) d\Gamma$$

Finalmente obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X) p_{j}(X) d\Gamma(X) + \int_{\Omega} u_{ij}^{*}(\xi, X) b_{j}(X) d\Omega(X) = c_{ij}(\xi) u_{j}(\zeta) + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\xi, X) u_{j}(X) d\Gamma(X)$$
(II.4.7)

ou reordenando, obter-se-á:

$$c_{ij}(\xi)u_{j}(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\xi, X)u_{j}(X)d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X)p_{j}(X)d\Gamma(X) + \int_{\Omega} u_{ij}^{*}(\xi, X)b_{j}(X)d\Omega(X)$$
(II.4.8a)

que sem a consideração das forças de volume, tornar-se-á:

$$c_{ij}(\xi)u_{j}(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\xi, X)u_{j}(X)d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X)p_{j}(X)d\Gamma(X) \quad (II.4.8b)$$

0 coeficiente 
$$c_{ij}(\xi) = \lim_{\rho \to 0} \int_{\overline{\Gamma}_{\rho}}^{p} f_{ij}(\xi, X) d\Gamma(X)$$
é

igual a  $\delta_{ij}/2$  se  $\xi$  pertence a um contorno suave, caso contrário, o seu cálculo torna-se mais trabalhoso. Nestes casos, usualmente, lança-se mão de um procedimento alternativo que é obter seu valor via movimento de corpo rígido. Para pontos no interior do domínio  $\Omega$ ,  $c_{ij} = 1$ , e para pontos externos no domínio  $\Omega$ ,  $c_{ij} = 0$ .

Expressão matricial de c<sub>ij</sub> para problemas 3-D, e contornos suaves:

$$c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$
(II.4.9)

Com a Eq.(II.4.8) e mais a condições de contorno, calculam-se as incógnitas--- deslocamentos e

forças de superfície — do contorno, permitindo a aplicação imediata de Identidade de Somigliana, para o conhecimento dos deslocamentos internos.

### II.5 - REGIÕES INFINITAS

Equações integrais para pontos no interior ao domínio  $\Omega$  e para pontos no seu contorno  $\Gamma$  foram derivados nas seções anteriores. A extensão para regiões infinitas contendo uma ou mais cavidades requer uma análise do comportamento das funções envolvidas sobre o contorno infinitamente distante das cavidades.



Fig. II.5.1. Região infinita com cavidade

Seja  $\Gamma_{0}$  o contorno da esfera de raio  $\rho_{0}$ , centrado em  $\xi$ , que cerca a cavidade (Fig. II.5.1). A

Eq.(II.4.8) por ser reescrita para o domínio  $\Omega_{0}$  entre  $\Gamma$  e  $\Gamma_{0}$ , como:

$$c_{ij}(\xi)u_{j}(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\xi, X)u_{j}(X)d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X)p_{j}(X)d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\xi, X)u_{j}(X)d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X)p_{j}(X)d\Gamma(X)$$
(II.5.1)

onde foram desconsideradas as forças de volume, por questão de comodidade.

Aplicando-se o limite quando  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , as integrais da Eq.(II.5.1) podem ser expressas só em função do contorno  $\Gamma$  quando é atendida a seguinte *condição de regularidade*:

$$\lim_{\rho_{0} \to \infty} \int_{\Gamma_{o}} \left[ p_{ij}^{*}(\xi, X) u_{j}(X) - u_{ij}^{*}(\xi, X) p_{j}(X) \right] d\Gamma(X) = 0$$
(II.5.2)

Para problemas 3-D, as funções envolvidas possuem as seguintes características:

$$O[u_{ij}^{*}(\xi, X)] = r^{-1}$$
(II.5.3a)  
$$O[p_{ij}^{*}(\xi, X)] = r^{-2}$$
(II.5.3b)

onde O[ ] representa a ordem da função dentro do

colchete. E considerando-se coordenadas esféricas, obter-se-á:

 $d\Gamma(X) = |J| d\varphi d\Theta , \quad X \in \Gamma$  (II.5.4)

com

$$O[|J|] = r^2$$
 (II.5.5)

Se a carga aplicada sobre a superfície  $\Gamma$  não for auto-equilibrada, o princípio de Saint Venant mostra que  $u_j(X) = p_j(X)$ , em  $\Gamma_o$ , terão o mesmo comportamento da solução fundamental correspondente a uma carga concentrada na direção da resultante. Portanto, neste caso,  $O[u_j(X)] =$  $r^{-1} = O[p_j(X)] = r^{-2}$ , são obtidos e cada termo da Eq.(II6.2) se anula separadamente.

Deste modo, pode-se afirmar que a condição de regularidade é sempre satisfeita se  $u_j(X)$  e  $p_j(X)$  se comportam no infinito, na pior das hipóteses, como a solução fundamental

Assim, visto que, a condição de regularidade é satisfeita o problema de cavidades em meios infinitos pode ser representado por:

$$c_{ij}(\xi)u_{j}(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\xi, X)u_{j}(X)d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X)p_{j}(X)d\Gamma(X)$$
(II.5.6)





(a) Domínio infinito
 (b) Domínio finito
 Fig. II.5.2. Definição da normal:
 (a) Domínio infinito;
 (b) Domínio finito

Como pode-se ver a equação integral para domínio finito ou infinito é a mesma, sendo ilustrativo observar que a distinção entre um e outro é feita pela normal (Fig.(II.5.2)).

#### II.6 - TENSÕES PARA PONTOS INTERNOS

Quando os valores do contorno são conhecidos podem ser calculados não só os deslocamentos nos pontos internos, via Identidade de Somigliana (Eq.II.2.17), assim como, as tensões nestes pontos.

40

Para um meio isotrópico estas tensões podem ser computadas por:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$
(II.6.1)

Substituindo-se a Eq.(II.2.17) na equação acima (Eq.II.7.1), obtém-se

$$\sigma_{1j}(\xi) = \int_{\Gamma} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \,\delta_{1j} \,\frac{\partial u_{1k}^{\star}}{\partial x_{1}} + G \left( \frac{\partial u_{ik}^{\star}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{jk}^{\star}}{\partial x_{i}} \right) \,p_{k} d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2G\nu}{1-2\nu} \,\delta_{1j} \,\frac{\partial p_{1k}^{\star}}{\partial x_{1}} + G \left( \frac{\partial p_{ik}^{\star}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial p_{jk}^{\star}}{\partial x_{i}} \right) \right\} \,u_{k} d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega} \left\{ \frac{2G\nu}{1-2\nu} \,\delta_{1j} \,\frac{\partial u_{1k}^{\star}}{\partial x_{1}} + G \left( \frac{\partial u_{ik}^{\star}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{jk}^{\star}}{\partial x_{i}} \right) \right\} \,b_{k} d\Omega \qquad (II.6.2)$$

Todas estas derivadas são efetuadas em pontos internos. Substituindo-se  $u_{ij}^{*}(\xi, X)$  e  $p_{ij}^{*}(\xi, X)$  pelas suas expressões (Eqs. (II.3.1) e (II.3.2)) e levando-se em conta que:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}(\xi)} = -\mathbf{r}_{,i} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_{,i}(X)}$$
(II.6.3)

obtém-se a seguinte expressão:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^{*}(\xi, X) p_{k}(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^{*}(\xi, X) u_{k}(X) d\Gamma(X) + \int_{\Omega} u_{ijk}^{*}(\xi, X) b_{k}(X) d\Omega(X) \quad (II.6.4)$$

onde

$$u_{ijk}^{*} = \frac{1}{8\pi (1-\nu)r^{2}} \left\{ (1-2\nu) (r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij}) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\}$$
(II.6.5)

$$p_{i\,jk}^{\star} = \frac{G}{4\pi (1-\nu) r^{3}} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 5 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + 3\nu (n_{i} r_{,j} r_{,k} + n_{j} r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (3n_{k} r_{,i} r_{,j} + n_{j} \delta_{ik} + n_{i} \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_{k} \delta_{ij} \right\}$$
(II.6.6)

É oportuno abservar que as derivadas foram aplicadas diretamente dentro das integrais. Isto não representa problema para as integrais do contorno porém, para as integrais de volume, que possuem singularidade no ponto  $\xi$ , isto nem sempre é possível, e necessita de uma demonstração própria (SILVA [10]).

Finalizando esta seção, precisa-se explicitar, neste instante, que nas expressões apresentadas, somente a solução fundamental foi derivada. Desta forma a tensão não sofre perda de precisão. Ao contrário, em Elementos Finitos uma funcão de interpolação é atribuida ao deslocamento, e por derivação obtém-se as tensões.

II.7 - TENSÕES NO CONTORNO

Embora o programa desenvolvido neste trabalho não tenha implementado o cálculo nas tensões no contorno, este tópico é abordado aqui, por ter aplicabilidade em diversos trabalhos já apresentados por outros pesquisadores e ser de relativa facilidade de implementação.

Esta facilidade advém do fato de utilizar-se o artificio de trabalhar-se com um sistema de referência local (Fig. II.7.1), e calcularem-se deformações através de deslocamentos interpolados, em função dos deslocamentos nodais do respectivo elemento.

43

Seja o elemento mostrado na Fig. II.7.1, com seu respectivo sistema de referência local:



Fig. II.7.1. Sistema de coordenada local tangente ao elemento no ponto de interesse

Utilizando-se a equação de Cauchy (Eq.(II.2.12)) para o sistema local, obtém-se

$$\overline{p}_{1} = \overline{\sigma}_{21}$$
(II.7.1a)  

$$\overline{p}_{2} = \overline{\sigma}_{22}$$
(II.7.1b)  

$$\overline{p}_{3} = \overline{\sigma}_{23}$$
(II.7.1c)

O tensor de tensões é dado por

$$\begin{bmatrix} \overline{\sigma}_{11} & \sin n \\ (\overline{\sigma}_{21}) & (\overline{\sigma}_{22}) \\ \overline{\sigma}_{31} & (\overline{\sigma}_{22}) & \overline{\sigma}_{33} \end{bmatrix}$$
(II.7.2)

Portanto, os valores cercados por retângulo são conhecidos. Resta calcularem-se os outros três valores, a saber,  $\overline{\sigma}_{11}$ ,  $\overline{\sigma}_{33}$  e  $\overline{\sigma}_{31}$ .

Estes valores poderão ser fornecidos pelas Eqs.(II.7.3) e Eq.(II.7.4), abaixo, que foram obtidas através de manipulações algébricas sobre a Lei de Hooke generalizada (Eq.II.1.23):

$$\overline{\sigma}_{11} = \frac{1}{1-\nu} \left[ \nu \overline{\sigma}_{22} + 2G(\overline{\epsilon}_{11} + \nu \overline{\epsilon}_{33}) \right]$$
(II.7.3)  
$$\overline{\sigma}_{33} = \frac{1}{1-\nu} \left[ \nu \overline{\sigma}_{22} + 2G(\overline{\epsilon}_{33} + \nu \overline{\epsilon}_{11}) \right]$$
(II.7.4)

e por (obtida pela aplicação direta de Lei de Hooke generalizada):

$$\overline{\sigma}_{31} = 2G\overline{\varepsilon}_{31} \tag{II.7.5}$$

onde os componentes do tensor de deformação são calculados em função dos deslocamentos interpolados em termos dos deslocamentos nos pontos funcionais do elemento:

$$\overline{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{j,i})$$
(II.7.6)

Portanto, as Eq.(II.7.3), Eq.(II.7.4) e Eq.(II.7.5) fornecem as tensões para um ponto qualquer no elemento, segundo os eixos de referência local. Para obterem-se os valores segundo os eixos de referência global é suficiente rotacioná-lo, via a transformação do tensor de  $2^{\frac{a}{2}}$  ordem, qual seja:

$$\sigma = \mathbf{R} \sigma \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$$
(II.7.7)  
$$\sim \sim \sim \sim$$

sendo R a matriz de rotação.

## II.8. CONSIDERAÇÃO DE CARGA CONCENTRADA

Seja considerado um corpo genérico submetido ao carregamento indicado ilustrado pela Fig. II.8.1, abaixo:



Fig. II.8.1 Consideração de carga concentrada

A Eq.(II.4.8) pode ser aplicada da seguinte forma (abstraindo-se das forças de volume):

$$c_{ij}(\xi)u_{j}(\xi) + \int p_{ij}^{*}(\xi, X)u_{j}(X)d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X)p_{j}(X)d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X)b_{j}(X)d\Gamma(X)$$
(II.8.1)

onde

$$b_{j}(X) = F_{j}\Delta(\xi_{0}, X)$$
 (II.8.2)

sendo F<sub>j</sub> o valor da carga concentrada,  $\Delta(\xi o, x)$  é a função Delta de Dirac e  $\xi_0$  é o ponto de aplicação de F.

Chamando-se a última integral à direita da Eq.(II.8.1) de I, obter-se-á

$$I_{i} = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X) b_{j}(X) d\Gamma(X)$$
 (II.8.3)

Ou seja, pelas definições anteriores ela valerá  $I_{i} = \int_{\Gamma} u_{ij}^{\star}(\xi, X) F_{j} \Delta(\xi_{0}, X) d\Gamma(X) \qquad (II.8.4)$  Utilizando-se a propriedade da função Delta de Dirac apresentada na Eq.(II.2.14) chega-se que

$$I_{i} = u_{ij}^{*}(\xi, \xi_{0}) F_{j}$$
 (II.8.5)

Assim a Eq. (II.8.1) ficará reduzida a

$$c_{ij}(\xi)u_{j}(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\xi, X)\mu_{j}(X)d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X)p_{j}(X)d\Gamma(X) + u_{ij}^{*}(\xi, \xi_{0})F_{j} \qquad (II.8.6)$$

Para o caso de NCC cargas a Eq.(II.8.6) generaliza-se para

$$c_{ij}(\xi)u_{j}(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^{*}(\xi, X)u_{j}(X)d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} u_{ij}^{*}(\xi, X)p_{j}(X)d\Gamma(X) + \sum_{k=1}^{NCC} u_{ij}^{*}(\xi, \xi_{0}^{k})F_{j}^{k} \qquad (II.8.7)$$

com k variando de l a NCC, sendo NCC o número de cargas concentradas. Cabe observar, no entanto, que o ponto  $\xi_0^k$  não deverá coincidir com o ponto  $\xi$  para evitar singularidade.

# CAPÍTULO III

# IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

# III.1. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PARA A GEOMETRIA

Na análise pelo Método de Elementos de Contorno a geometria é aproximada, correntemente, por elementos lineares ou quadráticos. Nos dois casos as coordenadas cartesianas  $x_i$  de um ponto arbitrário em um elemento unidimensional são dadas por:

$$\mathbf{x}_{i}^{e \times} \cong \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{i}(\eta) = \sum_{n = 1}^{N_{g}} \psi^{n}(\eta) \mathbf{x}_{i}^{n} \\ \mathbf{x}_{i}(\eta) = \sum_{n = 1}^{N_{g}} \psi^{n}(\eta) \mathbf{x}_{i}^{n} \end{vmatrix}$$
(III.1.1)

onde  $x_i^{ex}$  são os valores exatos das coordenadas de um ponto qualquer do elemento,  $x_i(\eta)$  são os seus valores aproximados,  $\psi^n(\eta)$  são as funções de interpolação (ou funções de forma, BATHE [19]),  $\eta$  é a *coordenada natural* (BATHE [19]), com - 1  $\leq \eta \leq 1$ , em geral, N<sub>g</sub> é o número de pontos nodais geométricos do elemento, e  $x_i^n$  são as elemento.

Matricialmente a Eq.(III.1.1) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{array}{c} x^{ex} \cong \\ \sim \\ \end{array} \begin{array}{c} x = \psi \\ \sim \\ \end{array} \begin{array}{c} x^{n} \\ \sim \\ \end{array} \end{array}$$
 (III.1.2)

# III.1.1. DISCRETIZAÇÃO LINEAR EM ELEMENTOS TRIANGULARES

Neste caso o número de pontos nodais é igual a 3  $(N_a = 3)$  e a Eq.(III.1.1) torna-se

$$x_{i} = \sum_{n=1}^{3} \psi^{n} x_{i}^{n}$$
 (III.1.3)

onde x<sup>n</sup> é a coordenada cartesiana x<sub>i</sub> do nó n. Por exemplo:

$$\mathbf{x}_{1} = \psi^{1} \mathbf{x}_{1}^{1} + \psi^{2} \mathbf{x}_{1}^{2} + \psi^{3} \mathbf{x}_{1}^{3}$$
(III.1.4)



Fig.III.1.1. Coordenadas globais e locais para o elemento linear.

# onde

 $\psi^{1} = \eta_{1}$ (III.1.5a)  $\psi^{2} = \eta_{2}$ (III.1.5b)  $\psi^{3} = \eta_{3} , \quad \operatorname{com} \eta_{3} = 1 - \eta_{1} - \eta_{2}$ (III.1.5c)

sendo  $0 \leq \eta_i \leq 1$ .

Para maior clareza as expressões a seguir são apresentadas matricialmente:



Notar que a discretização linear da geometria é usada tanto do Elemento Constante quanto do Elemento Linear.

# III.1.2. DISCRETIZAÇÃO QUADRÁTICA EM ELEMENTOS TRIANGULARES

Agora o número de pontos nodais é igual a 6  $(N_q=6)$  e a Eq.(III.1.1) fica

$$x_{i} = \sum_{n = 1}^{6} \psi^{n} x_{i}^{n}$$
 (III.1.9)

Por exemplo:



Fig.III.1.2. Elemento triangular quadrático

onde

$$\begin{split} \psi^{1} &= \eta_{1} (2\eta_{1} - 1) , & \psi^{4} &= 4\eta_{1}\eta_{2} & (\text{III.1.11a}) \\ \psi^{2} &= \eta_{2} (2\eta_{2} - 1) , & \psi^{5} &= 4\eta_{2}\eta_{3} & (\text{III.1.11b}) \\ \psi^{3} &= \eta_{3} (2\eta_{3} - 1) , & \psi^{6} &= 4\eta_{3}\eta_{1} & (\text{III.1.11c}) \end{split}$$

 $\operatorname{com} \eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$ 

Em apresentação matricial a Eq.(III.1.9) toma a seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{x}_{3} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{\mathrm{I}} & \psi^{\mathrm{I}} \mathrm{I} & \psi^{\mathrm{I}} \mathrm{I} & \psi^{\mathrm{I}} \\ \mathbf{x} & \psi^{\mathrm{V}} & \psi^{\mathrm{V}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}^{1} \\ \mathbf{x}^{2} \\ \mathbf{x}^{3} \\ \mathbf{x}^{4} \\ \mathbf{x}^{5} \\ \mathbf{x}^{6} \\ \mathbf{x}^{6} \\ \mathbf{x}^{6} \end{array} \right\}$$

(III.1.12)

 $\operatorname{com} \psi^{1_{rom}}$  dado pela Eq.(III.1.8), e  $\psi^{i}$  fornecido pela  $\overset{\sim}{}$ Eq.(III.1.11). A Eq.(III.1.12) está na forma da Eq.(III.1.2).

# III1.3 VALOR DO JACOBIANO E VERSOR NORMAL

As integrais do MEC são definidas, originalmente, em termos de coordenadas cartesianas. Como são usadas aproximações em termos de *coordenadas naturais,* tanto para a geometria quanto para as variáveis pertinentes (deslocamentos e forças de superfície), há necessidade de relacionarem-se as expressões de  $x_i$  com aquelas em função de  $\eta_i$ 



Fig.III.1.3. Sistemas de coordenadas

Usando-se a regra da cadeia do cálculo diferencial pode-se escrever a seguinte relação para as diferenciações:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{i}} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}_{i}}^{1} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}_{i}}^{2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}_{i}}^{3}$$
(III.1.13)

com i= 1, 2, 3 . Como, no MEC, as coordenadas cartesianas são explicitadas em função das coordenadas naturais, o cálculo de  $\partial \eta_1 / \partial x_1$ ,  $\partial \eta_2 / \partial x_1$ ,  $\partial \eta_3 / \partial x_1$ , para a definição de  $\partial / \partial x_1$ , não pode ser feita diretamente, adotando-se, usualmente, o procedimento exposto a seguir.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_3} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$
(III.1.14)

ou

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_3} \end{cases} = \int_{-\infty}^{-\infty} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$
(III.1.15)

onde J é o Jacobiano (ou operador Jacobiano (BATHE ~ [19])) que relaciona a diferenciação em coordenadas naturais com a diferenciação em coordenadas cartesianas. Portanto para o cálculo de  $\partial/\partial x_1$ ,  $\partial/\partial x_2$ ,  $\partial/\partial x_3$  usa-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{1}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{2}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{3}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{3}} \end{cases} = \mathbf{J}^{-1} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta_{1}} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_{2}} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_{3}} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_{3}} \end{cases}$$
(III.1.16)

A seguir apresenta-se a relação entre os diferenciais de volume d $\Omega$  e de área d $\Gamma$ , em coordenadas cartesianas, com aqueles em coordenadas naturais. A relação para o diferencial de volume será dado por:

$$d\Omega = \left| \left( \begin{array}{ccc} \partial \mathbf{r} & \partial \mathbf{r} & \partial \mathbf{r} \\ \frac{\tilde{\partial} \eta}{2} \mathbf{x} & \frac{\tilde{\partial} \eta}{2} \mathbf{x} & \frac{\tilde{\partial} \eta}{3} \end{array} \right) \right| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \left| \mathbf{J} \right| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3$$
(III.1.17)

onde |J| é o módulo do Jacobiano J . E

an

$$\tilde{\frac{\partial 1}{\partial \eta_1}} = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_1^3} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_1^3} \end{array} \right)$$
(III.1.18a)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_2} \end{pmatrix}$$
(III.1.18b)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overline{\eta}_{3}} = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \overline{\eta}_{3}}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \overline{\eta}_{3}}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \overline{\eta}_{3}}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \overline{\eta}_{3}} \end{array} \right)$$
 (III.1.18c)

Para o diferencial de área, obter-se-á:

$$d\Gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \mathbf{x} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \end{vmatrix} d\eta_1 d\eta_2 = |\mathbf{G}| d\eta_1 d\eta_2 \qquad (III.1.19)$$

e |G| é, portanto, o módulo do vetor normal, dado por ~

$$n = \frac{\partial r}{\partial \eta_1} x \frac{\partial r}{\partial \eta_2} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3}, \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3}, \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \right) = (q_1, q_2, q_3)$$
(III.1.20)

#### onde

$$g_{1} = \frac{\partial x_{2}}{\partial \eta_{1}} \frac{\partial x_{3}}{\partial \eta_{2}} - \frac{\partial x_{2}}{\partial \eta_{2}} \frac{\partial x_{3}}{\partial \eta_{1}}$$
(III.1.21a)

- $g_{2} = \frac{\partial x_{3}}{\partial \eta_{1}^{3}} \frac{\partial x_{1}}{\partial \eta_{2}^{1}} \frac{\partial x_{1}}{\partial \eta_{1}^{1}} \frac{\partial x_{3}}{\partial \eta_{2}^{3}}$ (III.1.21b)
- $g_{3} = \frac{\partial x_{1}}{\partial \eta_{1}} \frac{\partial x_{2}}{\partial \eta_{2}} \frac{\partial x_{2}}{\partial \eta_{1}} \frac{\partial x_{1}}{\partial \eta_{2}}$ (III.1.21c)

assim o valor de |G| será:

 $|G| = (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^{1/2}$  (III.1.22)

O versor normal, n , será dado por  $a^{\alpha}$ 

$$n_{\sim}^{u} = \frac{n}{|n|}$$
(III.1.23)

Para o elemento triangular linear |G| = 2A, onde A é a área do elemento. O vetor normal pode ser calculado através do produto vetorial entre dois vetores quaisquer tomados dos lados do elemento triangular. Este produto deve ser calculado usando-se a regra da mão direita, de forma que a normal fique sempre apontada para fora do domínio.

# III.2. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PARA DESLOCAMENTOS E FORÇAS DE SUPERFÍCIE

Analogamente à geometria, os deslocamentos e forças de superfície também são aproximadas em termos de valores nodais funcionais, utilizando funções de interpolação que podem ser constantes (Elemento Constante), lineares (Elemento Linear) e quadráticas (Elemento Quadrático), dentre os mais utilizados. Para um elemento unidimensional (PARREIRA [20]), obter-se-á:

$$u_{i}^{e \times} \simeq \begin{bmatrix} u_{i}(\eta) = \sum_{n=1}^{N_{f}} \mathscr{O}^{n}(\eta) u_{i}^{n} \\ & n = 1 \end{bmatrix}$$
(III.2.1)

onde  $u_i^{ex}$  são os valores exatos dos deslocamentos em um ponto qualquer,  $u_i(\eta)$  são os seus valores aproximados,  $o^n(\eta)$  são as funções de interpolação,  $N_f$  é o número de pontos nodais funcionais do elemento,  $\eta$  é a coordenada natural, com  $-1 \le \eta \le 1$ , em geral, e  $u_i^n$  são as coordenadas dos deslocamentos nos pontos nodais funcionais do elemento. Analogamente, para as forças de superfície, obter-se-á:

$$p_{i}^{e \times} = p_{i}(\eta) = \sum_{n=1}^{N_{f}} \mathscr{O}^{n}(\eta) p_{i}^{n}$$
 (III.2.2)

com definições para  $p_i^{ex}$ ,  $p_i(\eta)$  e  $p_i^n$ , equivalentes àquelas adotadas para os deslocamentos.

Matricialmente as Eqs.(III.2.1) e (III.2.2) podem ser reescritas na forma:

$$\begin{array}{cccc} u^{e^{x}} \cong & u^{e^{x}} \\ \sim & & u^{n} \\ \sim & & \sim & \sim \end{array}$$
(III.2.3a)

$$p^{e_{x}} \cong \begin{bmatrix} p = \emptyset p^{n} \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$
(III.2.3b)

# III.2.1 - ELEMENTO CONSTANTE

Para o Elemento Constante somente um nó funcional é considerado no centróide do elemento, assim, o número de pontos funcionais é igual a 1 ( $N_f = 1$ ) e as equações (III.2.1) e (III.2.2) tornam-se

$$u_i(X) = g^1 u_i^1$$
 onde  $g^1 = 1$  (III.2.4)



Fig.III.2.1. Elemento constante

Matricialmente obter-se-á

ou

# onde

# E analogamente
$$p_{i}(X) = g^{1} P_{i}^{1}$$
 (III.2.8)

ou

$$p = \left\{ \begin{array}{c} p \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \right\} = \sigma^{I} p^{I}$$
 (III.2.9)

com ø<sup>I</sup> dado pela Eq.(III.2.7). As Eqs.(III.2.6) e ~ (III.2.9) estão na forma da Eq.(III.2.3).

# III.2.2 - ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO TRIANGULAR LINEAR (ELEMENTO LINEAR)

Neste caso o número de pontos nodais funcionais é igual a 3 ( $N_f = 3$ ), obtem-se agora as seguintes expressões

$$u_{i}(\eta) = \sum_{\substack{n = 1}}^{3} \mathscr{O}^{n} u_{i}^{n}$$
 (III.2.10)

$$p_{i}(\eta) = \sum_{n = 1}^{\infty} \mathscr{O}^{n} p_{i}^{n} \qquad (III2.11)$$

onde  $u_i^n$  é o deslocamento do nó n na direção i. Por exemplo:

 $u_{1}(\eta) = \wp^{1}(\eta) u_{1}^{1} + \wp^{2}(\eta) u_{1}^{2} + \wp^{3}(\eta) u_{1}^{3}$  (III.2.12)



Fig.III.2.2. Elemento triangular linear As funções de interpolação serão dadas por

$$\begin{split} \wp^{1} &= \eta_{1} & (III.2.13a) \\ \wp^{2} &= \eta_{2} & (III.2.13b) \\ \wp^{3} &= \eta_{3} & , & \operatorname{com} \eta_{3} = 1 - \eta_{1} - \eta_{2} & (III.2.13c) \end{split}$$

Matricialmente obter-se-á

(III.2.14)

ou

onde

$$\overset{i}{\varphi}^{r \circ m} = \begin{bmatrix} \varphi^{i} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^{i} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^{i} \end{bmatrix}$$
 (III.2.16a)

e

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 u^{i} = \left\{ \begin{array}{c}
 u^{i}_{1} \\
 u^{i}_{2} \\
 u^{i}_{3}
 \end{array} \right\}$$
(III.2.16b)

 $com_{rom} = I$ , II, III  $e_{i} = 1, 2, 3$ .

As expressões para  $p_i(\eta)$  são análogas. As Eqs.(III.2.14) e (III.2.15) estão na forma da Eq.(III.2.3).

### III.2.3 - ELEMENTO QUADRÁTICO

Para o elemento quadrático o número de pontos nodais funcionais é igual a 6 ( $N_f = 6$ ), fornecendo

$$u_{i} = \sum_{n=1}^{6} \omega^{n} u_{i}^{n}$$
 (III.2.17)

 $p_{i} = \sum_{n = 1}^{n} \mathscr{O}^{n} p_{i}^{n}$  (III.2.18)



Fig.III.2.3. Elemento quadrático

Por exemplo:

$$u_{1} = \sigma^{1}u_{1} + \sigma^{2}u_{1}^{2} + \sigma^{3}u_{1}^{3} + \sigma^{4}u_{1}^{4} + \sigma^{5}u_{1}^{5} + \sigma^{6}u_{1}^{6}$$
(III.2.19)

onde

com  $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$ . Matricialmente a Eq.(III.2.17)

$$\begin{array}{c}
 u = \left\{ \begin{array}{c}
 u_{1} \\
 u_{2} \\
 u_{3}
\end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c}
 \phi^{I} & \phi^{III} & \phi^{III} & \phi^{IV} & \phi^{V} & \phi^{VI} \\
 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c}
 u^{1} \\
 \vdots \\
 u^{2} \\
 \vdots \\
 u^{3} \\
 \vdots \\
 u^{4} \\
 \vdots \\
 u^{6} \\
 \end{array} \right\} \quad (III.2.21)$$

com ø<sup>'rom</sup> e u<sup>i</sup> dado pela Eq.(III.2.16). A ~ ~ ~ Eq.(III.2.21) está na forma da Eq.(III.2.3).

As integrais presentes no MEC-3D agora ficarão:

$$\int_{\Gamma}^{p} u \, d\Gamma = \left[ \int_{\Gamma}^{p} v \, d\Gamma \right] u^{n} \qquad (III.2.22)$$
$$\int_{\Gamma}^{u} u^{n} \, d\Gamma = \left[ \int_{\Gamma}^{u} v \, e \, d\Gamma \right] p^{n} \qquad (III.2.23)$$

Notar que adotou-se para a interpolação da geometria um número de pontos nodais igual a  $N_g$ (Eq.III.1.2) e para a interpolação de deslocamentos e forças de superfície um número de pontos nodais igual a  $N_f$ (Eq. III.2.3). Isto justifica-se tendo em vista que eles podem ser eventualmente diferentes. É o caso do elemento constante que possui a geometria interpolada linearmente e os deslocamentos e as forças de superfície são consideradas constantes no elemento. Outro exemplo seria usar interpolação geométrica quadrática e interpolação de deslocamentos e forças de superfície linear e vice-versa.

Finalmente com o que se viu em III.1 e III.2, pode-se apresentar as integrais do MEC-3D, quando implementa-se simultaneamente a interpolação de geometria e dos deslocamentos e das forças de superfície, quais sejam

$$\int_{\Gamma} \overset{\mathbf{p}^{*} \mathbf{u}}{\Gamma} d\Gamma = \left[ \int_{\eta_{2}} \int_{\eta_{1}} \overset{\mathbf{p}^{*} \boldsymbol{\varphi}}{\Gamma} \overset{\mathbf{q}^{*} \boldsymbol{\varphi}}{\Gamma} \left| \mathbf{G} \right| d\eta_{1} d\eta_{2} \right] \overset{\mathbf{u}^{n}}{\Gamma}$$
(III.2.24a)

$$\int_{\Gamma} \frac{u^* p}{r} d\Gamma = \left[ \int_{\eta_2} \int_{\eta_1} \frac{u^* \varphi}{\eta_1} \left[ G \right] d\eta_1 d\eta_2 \right] p^n \qquad (III.2.24b)$$

Para o elemento triangular linear as expressões acima tomarão a seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} \overset{*}{\overset{}}_{r} \overset{*}{\overset{}}_{r} d\Gamma = 2A \left[ \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\eta_{2}} [\overset{*}{\overset{}}_{p} \overset{*}{\overset{}}_{\sigma}]_{\eta_{1},\eta_{2}} d\eta_{1} d\eta_{2} \right] \overset{u^{n}}{\overset{}}_{r} (III.2.25a)$$

$$\int_{\Gamma} u^{*} p \, d\Gamma = 2A \left[ \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\eta_{2}} \left[ u^{*} \phi \right]_{\eta_{1},\eta_{2}} d\eta_{1} d\eta_{2} \right] p^{n} \qquad (III.2.25b)$$

haja visto que |G| = 2A (ver seção III.1.3). As integrais

acima estão definidas em coordenadas triangulares (ver Fig. III.1.1).

Desde que, correntemente, estas integrais apresentam dificuldades de serem integradas analiticamente, principalmente quando consideradas funções de maior ordem, recorre-se ao auxílio de integração numérica. A seguir apresenta-se o processo proposto por HAMMER, MARLOVE e STROUD [21]:

$$\int_{\Gamma} p^{*} u \, d\Gamma = 2A \left[ \sum_{l=1}^{L} \left[ p^{*} \varphi \right]_{l} \omega_{l} \right] u^{n} \qquad (III.2.26a)$$
$$\int_{\Gamma} u^{*} p \, d\Gamma = 2A \left[ \sum_{l=1}^{L} \left[ u^{*} \varphi \right]_{l} \omega_{l} \right] p^{n} \qquad (III.2.26b)$$

onde l são os pontos pontos de integração e  $\omega_1$  os pesos associados. Este processo integra exatamente funções polinomiais do sexto grau com 12 pontos de integração (SÁ [14]).

No caso de adotar-se a transformação para mapeamento em domínio quadrangular (ver Apêndice B) a Eq.(III.2.25) tomará a forma abaixo:

$$\int_{\Gamma} \overset{\mathbf{p}^{*}\mathbf{u}}{\mathbf{r}} d\Gamma = 2\mathbf{A} \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p}^{*}\mathbf{\theta} \\ \mathbf{r}^{*} \end{array} \right]_{\theta_{1}} \theta_{2} |\overline{\mathbf{G}}|_{\theta_{1}} \theta_{2}^{*} d\theta_{1}^{*} d\theta_{2} \right] \overset{\mathbf{u}^{n}}{\mathbf{r}}$$
(III.2.27a)

$$\int_{\Gamma} u^{*} p \ d\Gamma = 2A \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ u^{*} \varphi \right]_{\theta_{1}, \theta_{2}} |\overline{G}|_{\theta_{1}, \theta_{2}} d\theta_{1} d\theta_{2} \right] p^{n}$$
(III.2.27b)

definidas em coordenadas retangulares.

Aplicando-se agora a Transformação de Coordenada de Terceira Ordem (TELLES [13], ver Apêndice A), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \overset{*}{\overset{*}{\sim}} d\Gamma = 2A \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ \begin{array}{c} p^{*} \sigma \\ \gamma_{1}, \gamma_{2} \end{array} \right] \overrightarrow{\sigma}_{1} (\overrightarrow{\sigma}_{1}, \gamma_{2}, \overrightarrow{\sigma}_{1}, \overrightarrow{\sigma}_{2}, \overrightarrow{\sigma}_{$$

Usando-se a quadratura de Gauss resulta:

$$\int_{\Gamma} \overset{p}{\overset{*}{\sim}} u \ d\Gamma = 2A \left[ \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{L} \left[ \begin{array}{c} p^{\ast} \varphi \\ \varphi \end{array} \right]_{\gamma_{l}, \gamma_{m}} |\overline{G}|_{\gamma_{l}, \gamma_{m}} J_{l} J_{m} \omega_{l} \omega_{m} \right] \underbrace{u^{n}}_{\sim} (III.2.29a)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u}^{*} \mathbf{p} \ d\Gamma = 2\mathbf{A} \left[ \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{L} \left[ \mathbf{u}^{*} \mathbf{\omega} \right]_{\gamma_{l}, \gamma_{m}} |\overline{\mathbf{G}}|_{\gamma_{l}, \gamma_{m}} \mathbf{J}_{l} \mathbf{J}_{m} \mathbf{\omega}_{l} \mathbf{\omega}_{m} \right] \mathbf{p}^{n}$$
(III.2.29b)

onde  $\gamma_1$ ,  $\gamma_m$  são as abcissas de Gauss e  $W_1$ ,  $W_m$  os pesos associados.

III.3 - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO

A equação integral de contorno representada pela Eq.(II.5.8b), pode ser colocada na seguinte forma matricial:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} p^{*}(\xi, X)u(X)d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} u^{*}(\xi, X)p(X)d\Gamma(X)$$
(III.3.1)

ou

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} p^{*}(\xi, X)u(X)d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} u^{*}(\xi, X)p(X)d\Gamma(X) = 0 \quad (III.3.2)$$

Obviamente que quando utiliza-se u(X) e p(X) exatos a Eq.(III.3.2) será identicamente satisfeita em qualquer ponto х. Porém, o método dos elementos de contorno ser analisado e discretiza 0 corpo a aproxima os deslocamentos e forças de superfície pelas expressões apresentadas nas Eqs.(III.2.3). Substituindo estes valores aproximados na Eq.(III.3.2), esta não será mais nula, e sim, apresentará um resíduo, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \left[ \int_{\Gamma_{j}} p^{*}(\xi, X) \phi(X) d\Gamma(X) \right]_{i} u^{n} - \sum_{j=1}^{N} \left[ \int_{\Gamma_{j}} u^{*}(\xi, X) \phi(X) d\Gamma(X) \right]_{i} p^{n} = r(\xi)$$
(III.3.3)

onde agora u e p são valores aproximados de  $\tilde{\phantom{a}}$   $\tilde{\phantom{a}}$ deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, e  $r(\xi)$  é o resíduo. N<sub>e</sub> é o número de elementos do contorno dicretizado.

As soluções aproximadas da Eq.(III.3.3) podem ser obtidas através do Método dos Resíduos Ponderados. Neste método um conjunto de funções  $\psi_i$  é utilizado para anular de forma ponderada a integral dos resíduos em  $\Gamma$ , conforme a seguinte sentença:

$$\int_{\Gamma} r(\xi) \psi_i d\Gamma(\xi) = 0 \qquad (III.3.4)$$

sendo  $\psi_i$  funções linearmente independentes, denominadas de funções de ponderação. Para cada tipo de  $\psi_i$  tem-se um tipo de método de resíduo ponderado diferente. Este trabalho optou pela utilização do Método da Colocação que consiste em adotar as funções Delta de Dirac para as funções de ponderação  $\psi_i$ , isto é:

$$\psi_{i} = \Delta(\xi_{i}, X) = \Delta_{i}$$
(III.3.5)

que como foi visto na Eq.(II.3.14) possui a seguinte propriedade

$$\int_{-co}^{co} f(X) \Delta(\xi_i, X) dX = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f(r) \Delta(\xi_i, X) dX = f(\xi_i) \quad (III.3.6)$$

Assim, de acordo com o Método de Colocação, ter-se-á:

$$\int_{\Gamma} r(\xi) \Delta(\xi, \xi) d\Gamma(\xi) = 0 \qquad (III.3.7)$$

$$\int \left[ c(\xi) u(\xi) \right] \Delta(\xi, \xi) d\Gamma(\xi) +$$

$$\sum_{j=1}^{N_{e}} \left[ \int_{\Gamma_{j}} p^{*}(\xi, X) \phi(X) d\Gamma(X) \right] \Delta(\xi, \xi) d\Gamma(\xi) \right] u^{n}$$

$$- \sum_{j=1}^{N_{e}} \left[ \int_{\Gamma_{j}} \left[ \int_{\Gamma_{j}} u^{*}(\xi, X) \phi(X) d\Gamma(X) \right] \Delta(\xi, \xi) d\Gamma(\xi) \right] p^{n} = 0 \quad (III.3.8)$$

Portanto da propriedade apresentada pela Eq.(III.3.6) obter-se-á:

$$\sum_{n=1}^{n} \sum_{n=1}^{n} \left[ \int_{\Gamma_{j}} p^{*}(\xi', X) \phi(X) d\Gamma(X) \right]_{n}^{n} - \sum_{j=1}^{n} \left[ \int_{\Gamma_{j}} u^{*}(\xi', X) \phi(X) d\Gamma(X) \right]_{n}^{n} = 0$$
(III.3.9)

ou

$$\sum_{n=1}^{n} \sum_{n=1}^{n} \left[ \int_{\Gamma_{n}} p^{*}(\xi', X) \phi(X) d\Gamma(X) \right]_{n}^{n} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[ \int_{\Gamma_{j}} u^{*}(\xi', X) \phi(X) d\Gamma(X) \right]_{n}^{n}$$
(III.3.10)

ou, como é indiferente usar-se  $\xi'$  ou  $\xi$ , obter-se-á:

$$\begin{split} \underset{\sim}{\overset{c}{\sim}} (\xi) \underbrace{u}_{\sim} (\xi) + \sum_{j=1}^{N_{e}} \left[ \int_{\Gamma_{j}} \underbrace{p^{*}(\xi, X) \phi(X) d\Gamma(X)}_{\sim} \right]_{\sim}^{u^{n}} = \\ & \sum_{j=1}^{N_{e}} \left[ \int_{\Gamma_{j}} \underbrace{u^{*}(\xi, X) \phi(X) d\Gamma(X)}_{\sim} \right]_{\sim}^{p^{n}} \qquad (III.3.11) \end{split}$$

Esta é a expressão final da equação integral contorno, na qual o resíduo foi zerado, num sentido médio, nos pontos de colocação  $\xi$ . Correntemente, tomam-se os pontos de colocação coincidentes com os nós funcionais, porém, há excessões, como é o caso do Elemento Interpolado (Ver seção III.5). A seguir a Eq.(III.3.11) é apresentada com a inclusão da interpolação da geometria, e integração mumérica, com elemento triangular linear e integração de Hammer (ver Eqs.(III.26), ou seja:

$$\sum_{n=1}^{C} (\xi) \underbrace{u}_{n} (\xi) + \sum_{j=1}^{N} \left[ \sum_{l=1}^{L} (p^{*} \emptyset)_{l} \cdot w_{l} |G|_{l} \right] \underbrace{u^{n}}_{n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left[ \sum_{l=1}^{L} (u^{*} \emptyset)_{l} \cdot w_{l} |G|_{l} \right] \underbrace{p^{n}}_{n}$$
(III.3.12)

onde  $|G|_1 = 2A$ .

### III.4 - FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A Eq.(III.3.12) fornece uma equação com seguinte

forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} c^{1}u^{1} + \left[ \hat{h}_{i1} \quad \hat{h}_{i2} \cdots \hat{h}_{ii} \quad \cdots \quad \hat{h}_{iN} \right] \left\{ \begin{array}{c} u^{1} \\ \tilde{u}^{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{i} \\ \vdots \\ u^{N} \\ \end{array} \right\} = \\ \left[ \begin{array}{c} g_{i1} \quad g_{i2} \cdots g_{iN} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} p^{1} \\ \tilde{p}^{2} \\ \vdots \\ p^{n} \end{array} \right\} \quad (III.4.1) \end{array} \right.$$

onde i é o nó onde está o *ponto fonte*  $(\xi)$ ,  $\hat{h}_{ij}$  e  $g_{ij}$  são os coeficientes de interação relacionando o ponto fonte  $\xi$  em i com os nós funcionais na superfície do corpo discretizado. No caso em estudo (3-D) as submatrizes têm ordem 3 x 3. Obviamente que, com exceção dos elementos constante, mais de um elemento pode contribuir para a formação daqueles coeficientes. As incógnitas estarão presentes dentro do campo de vetores u<sup>i</sup> e p<sup>i</sup>. Para contornos suaves c<sup>i</sup> é dada

$$\hat{h}_{ij} = \sum_{l=1}^{L} \left( p^{*} \phi \right)_{l} W_{l} |G|_{l}$$
(III.4.2)  
e  
$$g_{ij} = \sum_{l=1}^{L} \left( p^{*} \phi \right)_{l} W_{l} |G|_{l}$$
(III.4.3)

que são formados pela contribuições de todos os elementos que contêm o nó j (ponto nodal funcional).

Quando promove-se a varredura em todos pontos fontes definidos no corpo descretizado encontra-se o seguinte sistema de equações (isto equivale a usar-se o Método de Colocação em todos os nós funcionais).

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{11} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{21} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & & & & & & \\ h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{11} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & & & & & & \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{N1} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{1} \\ u^{2} \\ \vdots \\ u^{1} \\ \vdots \\ u^{n} \\ u^{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{21} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & & & & & \\ g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{11} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & & & & & \\ g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & & & & & \\ g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & & & & & \\ g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & & & & & \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{1} \\ p^{2} \\ \vdots \\ p^{1} \\ \vdots \\ p^{n} \\ p^{n} \\ \end{bmatrix}$$

(III.4.4)

onde as submetrizes na diagonal são dadas por

$$\mathbf{h}_{\tilde{\mathbf{z}}^{i}i} = \hat{\mathbf{h}}_{ii} + \mathbf{c}$$
(III.4.5)

A Eq.(III.4.4) pode ser colocada na forma:

$$H U = G P \qquad (III.4.6)$$

Com a aplicação das condições de contorno dadas pelas Eq.(II.3.1) e Eq.(II.3.2) o sistema dado pela Eq.(III.4.6) pode ser reordenado, armazenando-se as incógnitas no vetor U que doravante será designado por Y e os valores prescritos no vetor P, que após multiplicação com G, se tornará o vetor designado por F. Lembrar que as r trocas de vetores são acompanhadas de trocas apropriadas de colunas entre as matrizes H e G. A nova matriz H será designada de A. Desta forma obter-se-á:

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} \ \mathbf{Y} = \mathbf{F} \\ \mathbf{z} \ \mathbf{z} \end{array} \tag{III.4.7}$$

Resolvido este sistema tornam-se conhecidos os deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno do corpo. Pode-se agora computar os deslocamentos e tensões nos pontos internos. Notar que A é uma matriz cheia e não ~ simétrica de ordem 3N x 3N.

Para resolver a Eq.(III.4.7) usualmente é empregado o Processo de Eliminação de Gauss, porém, para grandes sistemas é interessante usar-se Processos Iterativos, como o Processo do Gradiente Bi-Conjugado Acelerado, dentre outros, cuja eficiência já foi devidamente comprovada por ARAUJO [23]. Em um teste ARAUJO conseguiu resolver a Eq.(III4.7), usando a técnica iterativa, em um tempo sete vezes menor comparado com o Processo Clássico de Gauss. Neste instante é oportuno tecer considerações sobre os termos de diagonal principal de H. Estes coeficientes são dados pela Eq.(III.4.5), onde c, para contornos suaves, é dado pela Eq.(II.5.9). Quando isto não ocorre, ou mesmo, quando há dificuldades para a determinação completa de  $\hat{h}_{ii}$ , corretamente, o valor dos coeficientes de  $h_{ii}$  é obtido indiretamente via movimento e corpo rígido.

Isto é possível tendo-se em vista que no movimento de corpo rígido as forças de superfícies são nulas. Além do mais adotam-se deslocamentos unitários de corpo rígido em cada direção, separadamente. Com isto obtém-se o seguinte sistema dado pela Eq.(III.4.6).

$$\begin{bmatrix} h_{11} & \hat{h}_{12} & \dots & \hat{h}_{2N} \\ \hat{h}_{21} & h_{22} & \dots & \hat{h}_{2N} \\ \vdots & & & & \\ \hat{h}_{N1} & \hat{h}_{N} & \dots & h_{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \\ \vdots \\ I \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$
 (III.4.8)

onde I é a matriz identidade de 3 x 3.

78

O sistema (III.4.8) permite o cálculo das diagonais principais h<sub>ii</sub>, dadas por

$$h_{\tilde{i}_{i}} = -\sum_{j=1}^{N} \hat{h}_{i_{j}}, \quad \text{para } i \neq j \quad (III.4.9)$$

Expressão válida para regiões finitas. Para regiões infinitas o deslocamento de corpo rígido viola as condições de regularidade, tendo em vista que  $p_j(X)=0$  e que  $O[u_j(X)]=1$ . Neste caso a Eq.(II.5.1), após a aplicação do limite quando  $\rho_0 \longrightarrow \infty$ , fica com a seguinte forma:

$$\mathbf{c}_{ij}(\xi) + \mathbf{u}_{j} \int_{\Gamma} \mathbf{p}_{ij}^{\star}(\xi, \mathbf{X}) d\Gamma + \lim_{\rho_{0} \to \infty} \mathbf{u}_{j} \int_{\Gamma_{0}} \mathbf{p}_{ij}^{\star}(\xi, \mathbf{X}) d\Gamma = 0$$
(III.4.10)

Como na integral com o limite, na Eq.(III.4.10),  $p_{ij}^{*}(\xi,X)$  representam forças de superfície na direção j, em X, para cargas unitárias positivas na direção i, em  $\xi$ , então a condição de equilíbrio impõe que

$$\lim_{\rho_{0} \to \infty} u_{j} \int_{\Gamma_{0}} p_{ij}^{*}(\xi, X) d\Gamma = -\delta_{ij} \qquad (III.4.11)$$

Deste modo, substituindo-se a Eq.(III.4.11) na Eq.(III.4.10) e efetuando-se a discretização, obtém-se:

## III.5 - ELEMENTO DE COLOCAÇÃO NÃO NODAL (ELEMENTO INTERPOLADO)

Quando se usou o Método da Colocação para а obtenção do sistema de equações Eq.(III.4.4) escolheu-se colocação os nós funcionais. ponto de como Este procedimento é usual para os elementos de uso corrente no MEC. Porém há que se destacar uma diferença entre 0 Elemento Constante e elementos de ordem superior. Nestes a escolha natural dos nós extremos dos elementos como pontos de colocação obriga a imposição da continuidade dos deslocamentos e forças de superfície, nas soluções aproximadas do sistema (III.4.7). Por causa disso eles recebem o nome de Elementos Continuos.

No Elemento Constante as soluções aproximadas dos deslocamentos e força de superfície apresentam descontinuidades nas interfaces dos elementos. Elementos que possuem esta característica são designados como Elementos Descontinuos (PARREIRA [20])

Em Elasticidade, a continuidade dos deslocamentos é uma condição natural, o mesmo não ocorre com as forças de superfície que, com frequência, apresentam descontinuidades. Embora o Elemento Constante interprete bem estas descontinuidades ele apresenta a desvantagem de exigir um grande número de elementos quando deseja-se uma boa modelagem do campo de forças de superfícies.

Para vencer estas dificuldades foram desenvolvidas diversas técnicas para modelar as descontinuidades, em elementos de ordem superior, como o Nó Múltiplo (Nó Duplo para o caso 2-D), Elemento Não-Conforme (Elemento Descontinuo) e o Elemento de Colocação Não Nodal (Elemento Interpolado).

O Nó Múltiplo (SÁ [14]) consiste em ter-se vários nós do contorno com exatamente as mesmas coordenadas (Fig. III.5.1a), porém cada ponto do Nó Múltiplo só pertence a um determinado elemento (Fig. III5.1b). Esta técnica apresenta um inconveniente de não permitir que no nó múltiplo seja prescrito deslocamento numa mesma direção, caso contrário a matriz A do sistema (Eq.(III.4.7)) fica ~



(a) Canto de um sólido (b) Conetividade

# Fig. III.5.1 Conceito de Nó múltiplo para elementos lineares

O Elemento Não Conforme (Fig. III.5.2) considera o ponto de colocação e nó funcional coincidentes, porém, localizadas no interior do domínio, em uma distância conveniente de sua extremidade (ver MARQUES e MANSUR [24]). Notar que no Elemento Contínuo, linear e de ordem superior, as funções de interpolação são 0 e 1, nos nós dos extremos do elemento. No Elemento Não Conforme isto não ocorre mais, aquelas funções, agora, são modificadas, assumindo valores 0 e 1, dentro do elemento, nos nós



(a) Canto de um sólido(b) Canto do sólido ao lado(só um ponto entra no elemento)



(c) Caso geral (os tres pontos entram no elemento)

Fig. III.5.2 Elemento Não Conforme e Elemento Interpolado, lineares.

83

O Elemento de Colocação Não Nodal consiste de um elemento em que os nós funcionais são mantidos nos extremos, e desloca-se apenas o ponto de colocação para o seu interior. Após o processo de integração os deslocamntos no ponto de colocação são interpolados em função dos valores nodais funcionais, nos extremos, através das funções de interpolação. Por este motivo o elemento que sofre este procedimento é frequentemente chamado de *Elemento Interpolado* (MARQUES e MANSUR [23] e ANDRÉ [12]).

Uma facilidade adicional do Elemento Interpolado (e também Elemento Não Conforme) ressalta-se quando seu uso é feito em elementos de canto — de ocorrência mais frequente — pois em virtude do ponto fonte deslizar para a superfície interna do elemento, ficará em um contorno suave, consequentemente, os coeficientes não nulos de c valerão 0,5. Caso contrário as submatrizes diagonais principais de H ( $\hat{h}_{ii}$  + c) deverão ser calculadas por movimento de corpo rígido.

A Fig. III.5.3a mostra a posição do ponto fonte para efeito de executar-se a integração regular. A Fig. III5.3b mostra o detalhe de integração singular, em que se está integrando o elemento que contém o ponto fonte. Neste caso usam-se coordenadas cilíndricas para o cálculo dos coeficientes de G e H.

84



(a) Elemento regular(b) Elemento singularFig.III.5.3 Detalhe da Integração

Notar que o ponto de colocação desliza na mediana, situando-se a uma distância conveniente entre o nó funcional e o centróide. Encontrou-se uma faixa ótima de posicionamento daquele ponto, que situou-se entre 0,5 a 0,75 desta distância, medida a partir do nó funcional.

As expressões das soluções fundamentais para a integração singular agora são (comparar com as Eq.(II4.1) e Eq.(II4.2):

$$u_{ij}^{*} = \frac{1}{16\pi (1-\nu) Gr} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\}$$
(III.5.1)

$$p_{ij}^{*} = \frac{1}{8\pi (1-\nu)r^{2}} (1-2\nu) (r_{,i}n_{j} - r_{,j}n_{i})$$
(III.5.2)

A expressão de  $p_{ij}^*$  fica simplificada em virtude de ter-se  $\frac{\partial r}{\partial n} = 0$ , visto que, o elemento utilizado para mapear a geometria é plano (Elemento Linear).

De acordo com as Eq.(III.2.22) e Eq.(III.2.23) as integrais serão:

$$H \Rightarrow \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} p_{11}^{*} & p_{12}^{*} & p_{13}^{*} \\ p_{21}^{*} & p_{22}^{*} & p_{23}^{*} \\ p_{31}^{*} & p_{32}^{*} & p_{33}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset^{I} & \emptyset^{II} & \emptyset^{III} \\ & & & & & & \\ \end{bmatrix} d\Gamma$$
 (III.5.3)

$$G \Rightarrow \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{11}^{*} & u_{12}^{*} & u_{13}^{*} \\ u_{21}^{*} & u_{22}^{*} & u_{23}^{*} \\ u_{31}^{*} & u_{32}^{*} & u_{33}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset^{I} & \emptyset^{III} \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} d\Gamma$$
 (III.5.4)

que possuirão os seguintes termos

intl(i,l) = 
$$\int_{\Gamma} \frac{r_{,i}}{r^2} \phi^{i} d\Gamma \quad de \quad H \qquad (III.5.5)$$

$$int2(1) = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} o^{1} d\Gamma$$

$$int3(i,j,1) = \int_{\Gamma} \frac{r, r, j}{r} o^{1} d\Gamma$$

$$(III.5.6)$$

$$de G$$

$$(III.5.7)$$

Notar que os termos constantes não estão incluidos nas integrais — incluindo as normais n<sub>i</sub>, que também são constantes,em virtude de ter-se implementado no programa o elemento linear. Eles serão incluidos na montagem de G e H.



Fig. III.5.4 Detalhe de integração singular do Elemento Interpolado

Como pode-se visualizar na Fig. III.5.4 são adotados os seguintes procedimentos para a realização de integração singular:

(a) O ponto do qual o ponto de colocação se deslocou recebe sempre, por convenção o número 3, em seguida, vêm 1 e 2, no sentido anti-horário (para um observador olhando para o elemento, conforme está indicado na Fig. III.5.4).

(b) Adota-se um sistema de eixos, local,  $xx_1$ , com origem no ponto 4, coincidente com o ponto de colocação deslocado. O eixo  $xx_1$  será definido pela reta  $\overline{41}$ . O plano  $xx_1/xx_2$  contém o elemento e o eixo  $xx_3$  está na direção da normal. As integrais serão efetuadas no plano  $xx_3 = 0$ .

Agora as coordenadas cilíndricas, no plano  $xx_3^{=0}$ serão definidas por:

 $xx_1 = r \cos \theta \qquad (III.5.8)$ 

$$xx_2 = r \sin \theta$$
 (III.5.9)

Cada lado do triângulo (12, 23 e 31) será definido pela equação

$$R_{i}(\theta) = \frac{\gamma_{i}}{\alpha_{i} \operatorname{sen}\theta - \beta_{i} \cos\theta}$$
(III.5.10)

onde

$$\alpha_{i} = xx_{1}(j) - xx_{1}(k)$$
(III.5.11)  
$$\beta_{i} = xx_{2}(j) - xx_{2}(k)$$
(III.5.12)

е

$$\gamma_{i} = XX_{1}(j) XX_{2}(k) - XX_{1}(k)XX_{2}(j)$$
 (III.5.13)

com i, j e k, assumindo valores de acordo com a tabela abaixo (ver SÁ [14]):

i	j	k
1	2	3
2	3	1
3	1	2

Tabela III.5.1. Fórmula de recorrência para  $\propto$ ,

$$\beta_i \in \gamma_i$$

Para um dado ponto pertencente a um lado do triângulo,  $R_i(\theta)$  é o comprimento do raio entre este ponto até a origem 4.

As integrais mostradas nas Eq.(III.5.5), Eq.(III.5.6) e Eq.(III.5.7) agora ficarão:

intl(i,l) = 
$$\int_{\Theta} \int_{\Gamma} \frac{r_{,i}}{r^2} \phi^{1} r dr d\theta = \int_{\Theta} \int_{\Gamma} \frac{r_{,i}}{r} \phi^{1} dr d\theta$$
$$de H \qquad (III.5.14)$$

$$int2(1) = \int_{\theta} \int_{r} \frac{1}{r} e^{i} r dr d\theta = \int_{\theta} \int_{r} e^{i} dr d\theta$$
$$de G \qquad (III.5.15a)$$
$$\tilde{}$$

de G

(III.5.15b)

obviamente que

$$r_{1,i} = l_{1,i} \cos\theta + l_{1,i} \sin\theta$$
 (III.5.16)

onde l é o cosseno diretor de xx em relação a x

Notar que a passagem para coordenadas cilíndricas traz um benefício imediato que é a eliminação de singularidades nas integrais que calculam os coeficientes da matriz G e a redução da ordem da ~ singularidade nas integrais que calculam os coeficientes da matriz H, isto é, neste caso a singularidade 1/r<sup>2</sup> é ~ reduzida para 1/r.

Conforme apresentado na seção II.2.2 as funções de interpolação para o Elemento Linear valem:

onde  $\eta_1$  são as coordenadas triangulares



Fig. III.5.5 Procedimento para cálculo de  $\eta_1$ 

Para o cálculo de  $\eta_1$ , por facilidade, lança-se mão de um sistema de eixos locais temporário, yy<sub>1</sub>, mostrado na Fig. III.5.5. O plano yy<sub>1</sub>/yy<sub>2</sub> contém o elemento, e yy<sub>3</sub> é normal ao elemento. Daí obtem-se que

$$\eta_{1} = \frac{Ar_{1}}{Ar_{T}} = \left(\frac{1}{d_{13}}\right)yy_{1} - \frac{a_{2}}{b_{2}d_{13}}yy_{2} = Ayy_{1} - Byy_{2} \quad (III.5.18)$$

$$\eta_2 = \frac{Ar_2}{Ar_T} = \frac{1}{b_2} yy_2 = C yy_2$$
 (III.5.19)

$$\eta_{3} = \frac{AI_{3}}{Ar_{T}} = 1 - \frac{1}{d_{13}} YY_{1} + \left(\frac{a_{2}}{b_{2}d_{13}} - \frac{1}{b_{2}}\right) YY_{2} =$$
  
= 1 - AYY\_{1} + DYY\_{2} (III.5.20)

com

$$A = \frac{a_2}{b_2 d_{13}}$$
,  $B = \frac{a_2}{b_2 d_{13}}$ ,  $C = \frac{1}{b_2}$  e  $D = B-C$  (III.5.21)

onede  $a_2$ ,  $b_2$ , e  $d_{13}$  são definidas na Fig. III.5.5,  $Ar_T$  é a área total do elemento e e  $Ar_i$  são as áreas mostradas na Fig. III.5.5.

Com os valores de  $\eta_1$  definidos acima passa-se facilmente para o sistema  $xx_1$  e  $xx_2$  através de uma translação e rotação, qual seja

$$\eta_{1} = A_{1} + A_{2}xx_{1} + A_{3}xx_{2}$$
(III.5.22a)  

$$\eta_{2} = A_{4} + A_{5}xx_{1} + A_{6}xx_{2}$$
(III.5.22b)  

$$\eta_{3} = A_{7} + A_{8}xx_{1} + A_{9}xx_{2}$$
(III.5.22c)

onde A<sub>1</sub> são funções de A, B, C, D, do ângulo entre  $xx_1 e$ yy<sub>1</sub> e da translação definida por  $(yy_1^0, yy_2^0)$ . As integrais de G são facilmente integrados analiticamente em r. Feito isto, todos os termos estarão expressos em função de  $\theta$  e a integral resultante, em  $\theta$ , será calculada mumericamente utilizando o processo de Gauss.

int2(1) = 
$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\theta_{j}}^{\theta_{k}} g_{1}(\theta) d\theta = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_{j} - \theta_{k}}{2} \int_{-1}^{1} g_{1}(\beta) d\beta =$$

$$= -\sum \left[ \frac{\theta_{j} - \theta_{k}}{2} \sum_{p=1}^{n} g_{1}(\beta_{p}) w_{p} \right] \qquad (III.5.23)$$

$$int3(i,j,l) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\theta_{j}}^{\theta_{k}} g_{ijl}(\theta) d\theta = -\sum_{j=1}^{n} \left[ \frac{\theta_{j} - \theta_{k}}{2} \sum_{p=1}^{n} g_{ijl}(\theta_{p}) w_{p} \right]$$
(III.5.24)

onde  $g_1 e g_{ij1}$  são resultantes da integração analítica de Eq.(III.5.15) e Eq.(III.5.16), em r, e p e o número de pontos de integração. As abcissas e pesos de Gauss são respectivamente  $\beta_p e w_p$ . O somatório mais externo refere-se à soma das integrais nos subtriângulos  $T_3$  ( $\theta$  entre  $0^0$  e  $\theta_2$ ),  $T_1$  ( $\theta$  entre  $\theta_2 e \theta_3$ ) e  $T_2$  ( $\theta$  entre  $\theta_3 e 2\pi$ ).

Quanto às integrais de H —— que são feitas no ~ sentido de valor principal de Cauchy —— apresentam um limite que deve receber atenção especial, conforme ver-se-á a seguuir. Substituindo-se (III.5.22) e (III.5.17) em (III.5.14) e observando-se (III.5.17), obter-se-á:

$$intl(i,1) = \int_{\theta} \int_{r} \left( \frac{l_{i1} \cos\theta + l_{i2} \sin\theta}{r} \right) (A_{k} + A_{k+1} x x_{1} + A_{k+2} x x_{2}) drd\theta$$
(III.5.25)

E com a aplicação de (III.5.8) e (III.5.9):

$$intl(i,l) = \int_{\theta} \int_{0}^{R_{m}(\theta)} \frac{(A_{k})}{AUX01} \left(\frac{A_{k}}{r} + A_{k+1}\cos\theta + A_{k+2}\sin\theta\right) drd\theta$$
(III.5.26)

onde  $R_{m}(\theta)$  está dada na Eq.(III.5.10) e AUX01 =  $l_{i1}\cos\theta$  +  $l_{i2}\sin\theta$ , para facilitar a redação.

#### Então:

$$\int_{\Theta} AUX01 \begin{bmatrix} A_{k} & \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{R_{m}(\Theta)} \frac{1}{r} dr + (A_{k+1}\cos\Theta + A_{k+2}\sin\Theta)R_{m}(\Theta) \end{bmatrix} d\Theta$$
(III.5.27)

ou

$$intl(i,l) = \int_{\Theta} AUX01 \left[ A_{k} \left( ln(R_{m}(\theta)) - lim_{\varepsilon \to o} ln\varepsilon \right) + \left( A_{k+1} cos\theta + A_{k+2} sen\theta \right) R_{m}(\theta) \right] d\theta$$
(III.5.28)

Isolando-se o termo com o limite e aplicando-se

a integral aos três subtriângulos (T1, T2 e T3) obter-se-á:

$$intl(i,1) = \sum_{\substack{j \\ \theta_{j}}} \left\{ AUX01 \left\{ A_{k}^{1}n[R_{m}(\theta)] + (A_{k+1}^{2}\cos\theta + A_{k+2}^{2}\sin\theta)R_{m}(\theta) \right\} d\theta - A_{k} \lim_{\epsilon \to 0} \left[ \left( \int_{0}^{2\pi} AUX01 \ d\theta \right) ln\epsilon \right]$$
(III.5.29)

A segunda integral (entre parênteses) do lado direito da Eq.(III.5.29) é nula, consequentemente todo o segundo termo do lado direito da Eq.(III.5.29) também o será. Deste modo a integral intl(i,l) será dada agora por

$$intl(i,l) =$$

$$\sum_{\theta_{j}}^{\theta_{k}} AUX01 \left\{ A_{k} ln[R_{m}(\theta)] + A_{k+1} cos\theta + A_{k+2} sen\theta \right\} R_{m}(\theta) \right\} d\theta$$
(III.5.30)

que com o processo de Gauss assumirá a seguinte forma:

$$intl(i,l) = -\sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{\theta_{j} - \theta_{k}}{2} \sum_{p=1}^{n} g_{i1}(\beta_{p}) w_{p} \right]$$
(III.5.31)

obviamente que  $g_{i1}(\beta_p)$  é o integrando da Eq.(III.5.30) (adotado como  $g_{i1}(\theta)$ ) em função das obcissas de Gauss, e o que foi dito da para a Eq.(III.5.24) também é válido para Eq.(III.5.31). Finalmente resta explicar a interpolação do deslocamento  $u^i = u^i(\xi)$  da Eq.(III.4.1) quando  $\xi$  é deslocado para a posição mostrada na Fig. III5.3b. Para este ponto  $u^i(\xi) = u^d_{0}(\xi) = u^d_{0}$  e  $c^i(\xi) = c^i(\xi) = c^i_{0}(\xi) = c^d_{0}$ , assim a Eq.(III.4.1) ficará:

$$\begin{array}{c} c_{\circ}^{d} & u_{\circ}^{d} + \left[ \hat{h}_{d1} & \hat{h}_{d2} & \dots & \hat{h}_{dN} \right] \left\{ \begin{array}{c} u^{1} \\ \vdots \\ u^{2} \\ \vdots \\ u^{N} \\ \end{array} \right\} = \\ \begin{bmatrix} g_{d1} & g_{d2} & \dots & g_{dN} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} p^{1} \\ \tilde{p}^{2} \\ \vdots \\ p^{n} \\ \end{array} \right\}$$
(III.5.32)

Agora adota-se a *idéia* do Elemento Interpolado que é a extrapolação de u<sup>d</sup> para os nós funcionais dos ~° extremos do elemento, usando-se as próprias funções definidas em (III.2.1). Assim para o elemento linear (seção III.2.2) obter-se-á:

onde  $u^d$ ,  $u^e$  e  $u^f$  são os deslocamentos dos nós funcionais do elemento que contém o ponto de colocação deslocado. Notar que  $u^d$  está em um nó funcional (em 3, na extremidade,Fig. III.5.4) e  $u^d_{\circ}$  está dentro do elemento (em 4, Fig. III.5.4).

Assim, explicitando-se u<sup>d</sup>, u<sup>e</sup> e u<sup>f</sup> em (III.5.32) ~ ~ ~ ~

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} c^{d} & u^{d} \\ \sim \end{array}^{o} & u^{d} \\ \sim \end{array}^{o} & \begin{array}{c} \hat{h}_{d1} \\ & \hat{h}_{d2} \\ \end{array}^{o} & \begin{array}{c} \hat{h}_{d1} \\ & \hat{h}_{d2} \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} & \begin{array}{c} \hat{h}_{d2} \\ & \hat{h}_{d2} \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} & \begin{array}{c} \hat{h}_{d2} \\ & \hat{h}_{d2} \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} & \begin{array}{c} \hat{h}_{d2} \\ & \hat{h}_{d2} \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} & \begin{array}{c} \hat{h}_{d2} \\ & \hat{h}_{d2} \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} & \begin{array}{c} \hat{h}_{d2} \\ & \hat{h}_{d2} \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \end{array}^{o} \\ \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\ \\ \end{array}^{o} \\ \\$$

Substituindo-se a Eq.(III.5.33) na Eq.(III.5.34) será obtido:
$$\begin{bmatrix} c_{n}^{d} & g_{1}^{T} & c_{n}^{d} & g_{1}^{TI} & c_{n}^{d} & g_{n}^{TI} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{n}^{d} \\ \tilde{u}_{n}^{e} \\ \tilde{u}_{n}^{f} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \hat{h}_{d1} & h_{d2} & \cdots & \hat{h}_{dd} & \cdots & \hat{h}_{de} & \cdots & \hat{h}_{df} & \cdots & \hat{h}_{dN} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{n}^{1} \\ \tilde{u}_{n}^{2} \\ \vdots \\ u_{n}^{d} \\ \vdots \\ u_{n}^{e} \\ \vdots \\ u_{n}^{e} \\ \vdots \\ u_{n}^{e} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} g_{d1} & g_{d2} & \cdots & g_{dN} \end{bmatrix} \begin{cases} p_{n}^{1} \\ \tilde{p}_{n}^{2} \\ \vdots \\ p_{n}^{e} \\ \vdots \\ u_{n}^{e} \\ \vdots \\ u_{n}^{e} \\ \vdots \\ u_{n}^{e} \end{bmatrix}$$
(III.5.35)

E o sistema (III.4.4) tomará a forma

$$\begin{bmatrix} h & \hat{h} & \dots & \hat{h} & \dots & \hat{h} \\ \hat{h}_{21} & h_{22} & \dots & & & & \\ \hat{h}_{d1} & \hat{h}_{d2} & \dots & h_{d} & \dots & h_{d} & \dots & h_{d} & \dots & \hat{h} \\ \hat{h}_{d1} & \hat{h}_{d2} & \dots & h_{d} & \dots & h_{d} & \dots & h_{d} & \dots & \hat{h} \\ \hat{h}_{N1} & \hat{h}_{N2} & \dots & & & & & NN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{1} \\ \vdots \\ u^{e} \\ \vdots \\ u^{e} \\ \vdots \\ u^{i} \\ u^{i} \\ u^{i} \\ \vdots \\ u^{i} \\$$

(III.5.36)

Onde  $h_{r_{ii}}$  continua sendo dado por (III.4.5), para todas as linhas, menos uma, a linha d. Nesta aparecerá  $h_{r_{dd}}$ , e mais  $h_{r_{de}}$  e  $h_{r_{df}}$  que agora valerão

Conforme foi explicado anteriormente a submatriz  $c^{d}_{\sim^{0}}$  será dada por  $\sim^{0}_{\sim^{0}}$ 

$$c_{\circ}^{d} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$
(III.5.38)

Os coeficientes das submatrizes  $\varphi_{2}^{I}$ ,  $\varphi_{2}^{II}$  e  $\varphi_{2}^{III}$ (ver seção III.2.2) são  $\varphi_{1} = \eta_{1}^{d}$ ,  $\varphi_{2} = \eta_{2}^{d}$  e  $\varphi_{3} = \eta_{3}^{d}$ , que são as coordenadas triangulares do ponto 4, de acordo com a Fig. III.5.4, assim

$$\eta_1^d = \frac{Ar_{T1}}{Ar_T}$$
(III.5.39a)

$$\eta_2^d = \frac{Ar_{T2}}{Ar_T}$$
(III.5.39b)

$$\eta_3^d = \frac{Ar_{T3}}{Ar_T}$$
(III.5.39c)

onde  $Ar_{T}$  é a área total do elemento e  $Ar_{Ti}$  são as áreas dos subtriângulos mostrados na Fig. III.5.4. Estas áreas são facilmente calculadas através do produto vetorial de  $\overline{41}, \overline{42}$ e  $\overline{43}$ .

Assim, finalmente, monta-se o sistema dado pela Eq.(III4.6). O sistema terá tantas linhas análogas à d quanto forem os pontos de colocação deslocados para dentro do elemento.

#### III.6 - ELEMENTO CONTÍNUO



Fig. III.6.1 Detalhe de integração singular do elemento contínuo.

A integração no elemento contínuo segue o mesmo procedimento utilizado para o *Elemento Interpolado*. Agora, porém, o ponto de colocação fica coincidente com o nó funcional (3=4), e por convenção, recebe sempre o número 1, em seguida, virão no sentido anti-horário 2 e 3 (para um observador olhando para o elemento, conforme está indicado na figura).

O sistema de eixos, local, estará agora com a origem centrada em 3, conforme pode-se ver na Fig. III.6.1. O plano xx<sub>1</sub>/xx<sub>2</sub> contém o elemento e o eixo xx<sub>3</sub> está na

101

direção da normal. As integrais serão efetuadas no plano xx3 = 0.

As coordenadas cilíndricas são dadas por (III.5.8) e (III.5.9) e o lado  $\overline{12}$  será definido por:

$$R_{3}(\theta) = \frac{\vartheta_{3}}{\alpha_{3} \sin \theta - \beta_{3} \cos \theta}$$
(III.6.1)

onde

$$\alpha_{3} = xx_{1}(1) - xx_{1}(2)$$
(III.6.2)  

$$\beta_{3} = xx_{2}(1) - xx_{2}(2)$$
(III.6.3)  
e  

$$\gamma_{3} = xx_{1}(1)xx_{2}(2) - xx_{1}(2)xx_{2}(1)$$
(III.6.4)

Para o cálculo das integrais (III.5.14), (III.5.15) e (III.5.16) usam-se os valores das funções de interpolação apresentados em (III.5.18), (III.5.19) e (III.5.20), agora em função de xx<sub>1</sub> e xx<sub>2</sub>, isto é:

$$\eta_{1} = Axx_{1} - Bxx_{2}$$
(III.6.5a)  

$$\eta_{2} = Cxx_{2}$$
(III.6.5b)  

$$\eta_{3} = 1 - Axx_{1} + Dxx_{2}$$
(III.6.5c)

com A, B, C e D dados pela Eq.(III.5.21).

Desta forma as integrais de G serão

int2(1) = 
$$\int_{0^{\circ}}^{\theta_{2}} g_{1}(\theta) d\theta = -\frac{0^{\circ} - \theta_{2}}{2} \int_{-1}^{1} g_{1}(\beta) d\beta =$$
$$= \frac{-\theta_{2}}{2} \sum_{p=1}^{n} g_{1}(\beta_{p}) w_{p} \qquad (III.6.6)$$

е

int3(i,j,1) = 
$$\int_{0}^{\theta_{2}} g_{ij1}(\theta) d\theta = \frac{\theta_{2}}{2} \sum_{p=1}^{n} g_{ij1}(\beta_{p}) W_{p} \quad (III.6.7)$$

Notar que agora, diferentemente de (III.5.23) e (III.5.24), não há mais o somatório mais externo, porque a integral  $\int_{0}^{\theta_{2}}$  consegue varrer todos pontos do elemento.

Para o cálculo das integrais de H convém notar a  $\tilde{}$ diferença entre as expressões em (III.5.22) e (III.6.5). Em (III.5.22), as três expressões de  $\eta_1$  possuem termos independentes, quais sejam,  $A_1$ ,  $A_4$  e  $A_7$ , que são a causa do aparecimento da singularidade de 1/r (ver de (III.5.25) a (III.5.27)). Porém o problema é contornado porque a integral envolvendo o limite em (III.5.29) é efetuada de 0° a  $2\pi$ , anulando-se todo o termo que contem o limite.

Agora somente  $\eta_3$  possui o termo independente, assim a expressão equivalente a (III.5.27) será:

intl(i,3) = 
$$\int_{\Theta} AUX01 \left[ \int_{0}^{\frac{R}{3}} \frac{1}{r} dr - (A\cos\theta - D\sin\theta)R_{3}(\theta) \right] d\theta$$
(III.6.8)

Como a integração em  $\theta$  é efetuada somente entre 0° e  $\theta_2$ , ela não fica resolvida. Neste caso, para a avaliação dos termos de H, envolvendo  $\eta_3$ , utilizou-se o artifício de  $\tilde{-}$  movimento de corpo rígido.

Os termos de H envolvendo  $\eta_1 e \eta_2$ , analogamente aos termos de G, terão a singularidade eliminada, e serão facilmente avaliadas, ou seja

intl(i,2) = 
$$\int_{0}^{\theta_{2}} g_{12}(\theta) d\theta = -\frac{0^{\circ} - \theta_{2}}{2} \int_{-1}^{1} g_{12}(\eta) d\eta = \frac{\theta_{2}}{2} \sum_{p=1}^{n} g_{12}(\eta_{p}) w_{p} \quad (\text{III.6.8})$$

е

intl(i,1) = 
$$\int_{0}^{\theta_{2}} g_{i1}(\theta) d\theta = \frac{\theta_{2}}{2} \sum_{p=1}^{n} g_{i1}(\eta_{p}) W_{p}$$
(III.6.9)

# CAPÍTULO IV

105

#### APLICAÇÕES

Este capítulo apresenta três exemplos nos quais técnica foram testados а do Elemento de Colocação Não-Nodal. todos utilizou-se Em os casos elemento triangular isoparamétrico linear.

Também todos os exemplos foram rodados no sistema A9 do Burroughs (NCE/UFRJ). Há comparações com soluções exatas ou resultados de outros pesquisadores com o intuito de dar uma idéia da eficiência da técnica adotada.

Aproveita-se a oportunidade para fazer testes, em problemas tridimensionais, com o "solver" iterativo implementado por ARAUJO [23]. No caso examina-se o desempenho do processo do Gradiente Bi-Conjugado, porém, apenas para o exemplo do cubo tracionado.

#### IV. CUBO TRACIONADO

O exemplo do cubo tracionado por ser clássico, e ainda, por tornar extremamente rápida a tarefa de preparar o arquivo de dados, foi o primeiro a ser testado.

Para as condições de contorno adotaram-se as seguintes restrições:

 $\bar{u}_{i} = 0$  no plano  $x_{i} = 0$  (i = 1,2,3)  $\bar{p}_{2} = \bar{p}_{3} = 0$  no plano  $x_{1} = 0$   $\bar{p}_{1} = \bar{p}_{2} = 0$  no plano  $x_{3} = 0$  $\bar{p}_{1} = \bar{p}_{3} = 0$ ;  $\bar{p}_{2} = 1000$  no plano  $x_{2} = 1$ 

Adotou-se para o módulo de elasticidade o valor E =  $2 \times 10^5$  e para o coeficiente de Poisson o valor v = 0.3.

Neste exemplo as fórmulas da Teoria da Elasticidade degeneram-se em expressões extremamente simples. Em qualquer ponto a única componente de tensão não nula é  $\sigma_{22} = \bar{p}_2$  (TIMOSHENKO e GOODIER [25]). A componente de deslocamento  $x_2$  varia linearmente de 0 até  $0.5 \times 10^{-2}$  (ou seja  $u_2 = (\sigma_{22} / E) \times 1$ ).

A Fig. IV.1a mostra o sólido e seu carregamento. Na verdade ela representa um oitavo de um cubo com lado igual a 2 e carregamento uniformemente distribuido igual a 1000, de tração, na direção  $x_2$ , nas faces  $x_2 = 1$ e  $x_2 = -1$ . As condições de simetria permitiram a simplificação adotada. As Figs. IV.1b e IV.2 procuram mostrar os detalhes da discretização. Como pode-se ver foram usados 12 elementos e 36 pontos-fonte.



Ta) Dimensões e carronomo e retização
 Fig. IV.1. Cubo tra



Fig. IV.2. Discretização do cubo

A Tabela IV.1 mostra os resultados obtidos com o MEC, utilizando-se o Elemento de Colocação Não-Nodal, comparando-os com os valores exatos. Nesta tabela pode-se perceber a eficiência do procedimento adotado.

v	u <sub>2</sub> (x10 <sup>-2</sup> )		$\sigma_{22}^{(\times 10^{3})}$	
<b>^</b> 2	EXATO	BEM	EXATO	BEM
0.125	0.0625	0.06251	1.0	0.996
0.25	0.125	0.125	1.0	0.9998
0.375	0.1875	0.1875	1.0	1.000
0.5	0.2500	0.2500	1.0	1.000
0.625	0.3125	0.3125	1.0	1.000
0.75	0.375	0.3749	1.0	0.9963
0.875	0.4375	0.4401	1.0	1.193
1.0	0.5	0.5000	1.0	

Tabela IV.1. Comparação entre valores obtidos pelo MEC e valores exatos para o cubo tracionado.

A seguir apresentam-se as Tabela IV.2 e Tabela IV.3 que mostram o tempo de execução para a resolução do sistema de equações com o uso do processo de Gauss e o processo iterativo do Gradiente Bi-Conjugado implementado por ARAUJO [23]. Cabe obervar que não é apresentado neste texto a figura com a discretização correspondente ao cubo com 48 elementos.

Cubo com 36 pontos-fonte (108 equações) e 12 elementos			
Processo de resolução	Tempo de processamento (seg.)		
Gauss (T1)	9.50		
Gradiente Bi-Conjugado (T2)	10.25 /iter. = 25		
Relação T2/T1	1.08		

Tabela IV.2. Comparação entre o processo de Gauss e o do Gradiente Bi-Conjugado. Cubo com 36 elementos.

Cubo com 109 pontos fonte (327 equações) e 48 elementos			
Processo de resolução	Tempo de processamento (min.)		
Gauss (T1)	4.42		
Gradiente Bi-Conjugado (T2)	1.57 /iter. = 26		
Relação T2/T1	0.36		

Tabela IV.2. Comparação entre o processo de Gauss e o do Gradiente Bi-Conjugado. Cubo com 48 elementos.

IV.2. TUBO DE PAREDE GROSSA SOB PRESSÃO INTERNA

O tubo de parede grossa analisado, mostrado na Fig. IV.3, tem raio interno  $r_i = 10$ , raio externo  $r_e = 20$ , carga radial uniformemente distribuida, interna,  $p_r = 10$ . O comprimento do tubo é igual a 10. Devido às condições de simetria somente um oitavo do tubo foi analisado. Este é o mesmo exemplo testado por SÁ [14] e NAKAGUMA [26].



Fig. IV.3. Tubo de parede grossa sob pressão interna

Para as propriedades mecânicas do material adotou-se: módulo de elasticiadade  $E = 2 \times 10^5$  e coeficiente de Poisson v = 0.3.

As condições de contorno aplicadas ao sólido em questão, são: restrição da componente de deslocamento  $\bar{u}_1 = 0$  na face  $x_1 = 0$ ; restrição da componente de deslocamento  $\bar{u}_3 = 0$  na face  $x_3 = 0$ ; restrição da componente de deslocamento  $\bar{u}_2 = 0$  na face  $x_2 = 0$ , para evitar movimento de corpo rígido; e carga radial interna  $\bar{p}_r = 10$ . As Fig. IV.4 e Fig. IV.5 procuram mostrar os detalhes da discretização. Neste caso foram usados 137 pontos fonte e 56 elementos.



Fig. IV.5. Discretização do tubo de parede grossa



face X<sub>2</sub> = 0



126 33 132 131 130 136 \127 125 124 (izi 120 137 (41) (40) 129 ④ (37 (36) (33) U Ю (34 (43) (42 (39) (38) ιiο ព្រម 117 116 115 112 111 104 10

face r=10



Fig. IV. Discretização do tubo de parede grossa

112

A seguir são apresentadas as soluções analíticas apresentadas por FEODOSIEV [27]. Ele afirma que o problema de determinação das tensões e deslocamentos de um cilindro de parede espessa, conforme mostrado no livro, denomina-se problema de Lamé, em homenagem ao renomado cientista do século passado que propôs a solução deste problema.

Deslocamento radial:

$$u_{r} = \frac{1 - \nu}{E} \frac{p_{r}r_{i}^{2}}{r_{e}^{2} - r_{i}^{2}}r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{r_{i}^{2}r_{e}^{2}}{r} \frac{p_{r}}{r_{e}^{2} - r_{i}^{2}}$$
(IV.1)

Tensões radial e tangencial:

$$\sigma_{r} = \frac{p_{r}r_{i}^{2}}{r_{e}^{2} - r_{i}^{2}} \left( \begin{array}{cc} 1 & - & \frac{r_{e}^{2}}{r} \\ 1 & + & \frac{r_{e}^{2}}{r^{2}} \end{array} \right)$$
(IV.2)

As variáveis são as mesmas definidas no início da seção e r é um raio genérico entre  $r_i e r_e$ . A Fig. IV.6 apresenta a variação de  $\sigma_r e \sigma_r$  com respeito a r.



Fig. VI.6. Variação das tensões circunferencial e radial

As Fig. IV.7, Fig. IV.8 e Fig. IV.9 mostram os resultados obtidos com o MEC, com o uso do Elemento de Colocação Não Nodal, e compara-os com os valores obtidos pelas Eqs. (IV.1) e (IV.2). Os valores do MEC foram retirados para raios inclinados a 45°.



Fig. IV.7. Deslocamento radial



Fig. IV.8. Tensão circunferencial



Fig. IV.9 Tensão radial

IV. BLOCO COMPRIMIDO

Uma terceira aplicação é o exemplo do bloco comprimido. Este é exatamente o mesmo exemplo testado por SILVA [10] que faz comparação com os resultados obtidos pelo programa SAP80, por não encontrar solução exata na literatura. Os resultados de SILVA [10] e do SAP80 são usados como referência neste trabalho.

O bloco prismático tem base quadrada com lado de comprimento igual a 6, e altura igual a 18. A carga compressiva vale 4 tf (ver Fig. IV.10a).



Fig. IV.10. Bloco comprimido

Neste caso adotou-se para o módulo de elasticidade o valor E =  $21 \times 10^5$  e para o coeficiente de Poisson o valor  $\nu$  = 0.15.

Para as condições de contorno foram adotadas restrições semelhantes àquelas impostas ao cubo tracionada, isto é:

 $\bar{u}_i = 0$  no plano  $x_i = 0$  (i = 1,2,3)  $\bar{p}_2 = \bar{p}_3 = 0$  no plano  $x_1 = 0$   $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 0$  no plano  $x_3 = 0$ carga vertical compressiva de 4 tf em  $x_2 = 18$ 

As Fig. IV.10b e Fig. IV.11 procuram mostrar os detalhes da discretização. Como pode-se ver foram usados 22 elementos e 47 pontos-fonte.





Fig IV.11. Discretização do bloco comprimido

As Fig. IV.12 e Fig. 13 mostram os resultados obtidos neste trabaho (MEC), com o uso do Elemento de Colocação Não Nodal, e compara-os com aqueles fornecidos por SILVA [10] (MEC3D e SAP80). Vale observar que o programa MEC3D usa Elemento Não-Conforme.



TENSAO Txx NOS PONTOS SOB A CARGA

Fig. IV.12. Tensão  $\sigma_{_{\rm XX}}$  nos pontos sob a carga



Fig. IV.13. Deslocamentos nos pontos sob a carga

### CAPÍTULO V

#### CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo principal a implementação de um procedimento de colocação não-nodal (isto é, não há coincidência entre o nó funcional e o ponto de colocação), em elasticidade linear tridimensional. Ao elemento que sofre este procedimento deu-se o nome de Elemento de Colocação Não-Nodal ou Elemento Interpolado.

Os resultados conseguidos indicam o sucesso da utilização deste procedimento. Ele apresenta uma grande vantagem sobre a técnica do Nó Múltiplo (Nó Duplo, em domínio 2-D), pois não há mais a preocupação de se gerar a matriz, do sistema, singular. Apresenta, também, vantagem com respeito ao Elemento Não-Conforme, implementado com sucesso por SILVA [10], quando deseja-se fazer uma análise conjunta de MEC e MEF, pois, ao contrário do Elemento Não-Conforme, no Elemento de Colocação Não-Nodal o nó funcional continua no canto.

No programa desenvolvido utilizou-se elemento isoparamétrico linear. Para o cálculo das integrais singulares, em primeiro lugar passa-se de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, em seguida integra-se

123

analicamente, em r, e numericamente, em  $\theta$ , através do processo de Gauss.

Para o cálculo das integrais quasi-singulares adotaram-se dois procedimentos. Primeiro converteu-se o mapeamento triangular em quadrangular, e, em seguida adotou-se a transformação polinomial de terceira ordem, acompanhada de integração seletiva. Isto foi crucial para o andamento da pesquisa porque provocou uma enorme redução do tempo de execução do programa, permitindo que os programas rodassem sempre nas classes 1 (2 min.), 2 (5 min.), 3 (10 min.) ou 4 (20 min.), adotadas para o Burroughs, sistema A9, do NCE/UFRJ. As outras classes são 5 e 7. A classe 5 (60 min.) só roda à noite e a classe 7 (acima de 60 min.) só no final de semana.

Foram analisados três exemplos, a saber: cubo tracionado, tubo de parede espessa e pilar sob carga concentrada. Os resuLtados apresentaram uma performance semelhante àqueles encontrados na literatura. Vale dizer que utilizou-se precisão simples em todos os exemplos rodados.

Sugere-se para a continuidade do trabalho aqui apresentado a implementação de elemento isoparamétrico quadrático, assim como outras implementações importantes como procedimentos para tratar problemas com simetria e aceitação de tratamento por subregiões. A extensão para problemas de dinâmica e plasticidade tornaria mais abragente o campo de aplicação do programa, e mais ainda, a implementação de uma análise conjunta de MEC e MEF, com a adoção do Elemento de Colocação Não-Nodal, para domínio 3-D. Finalmente a implementação de um gerador de malha seria extremamente valioso, principalmente em se tratando de domínio tridimensional.

### 126 APÊNDICE A

## TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL DE TERCEIRA ORDEM (INTEGRAIS QUASI-SINGULARES)

Quando o ponto fonte está localizado dentro do elemento as integrais de G e H tornam-se singulares e devem avaliadas no sentido de Valor Principal de Cauchy ser (Estas integrais são denominadas integrais singulares). Em virtude disto elas recebem atenção especial no Método dos Elementos de Contorno. As seções (III.5)е (III.6)apresentam suas soluções, utilizando coordenadas polares. Porém quando o ponto fonte se localiza nas vizinhanças do elemento aquelas integrais tornar-se-ão quasi-singulares, e também, devem merecer a devida atenção. Isto porque, para a sua correta avalização, eles requererão um grande número de pontos de integração — pois, em geral, são avaliadas numericamente.

Para a determinação das integrais quasi-singulares existem basicamente dois procedimentos. O primeiro, de uso corrente na literatura, baseia-se em integração seletiva acompanhada de subdivisão do elemento. Isto é, quanto menor a distância entre o ponto fonte  $\xi$  e o elemento, maior o número de pontos de integração e a partir de um certo  $D_{min}$  (menor distância entre  $\xi$  e o elemento) inicia-se a subdivisão do elemento em um certo número de subelementos.

Este procedimento apresenta a vantagem de aumentar a concentração dos pontos de integração nos subelementos que estão mais próximos do ponto fonte. Porém apresenta uma desvantagem que é imediatamente aparente, se o número total de pontos de integração é usado no elemento sem a subdivisão o grau do polinômio que pode ser integrado exatamente é consideravelmente maior. Por exemplo, se em integração numérica unidimensional o elemento é uma subdividido em 3 subelementos e são usados 2, 3 e 4 pontos de Gauss, a integração é exata para integrandos polinomiais de graus 3, 5 e 7, respectivamente. Se não há subdivisão, integrar-se-á todo o elemento com 9 pontos de integração, que será exata até polinômios de grau 17 (TELLES [13]).

O segundo procedimento, desenvolvido mais recentemente por TELLES [13], veio para substituir a subdivisão e melhorar a integração em elementos que mesmo não requerendo originalmente o particionamento, necessitam de muitos pontos de Gauss (isto é, elementos com valores intermediários de D<sub>min</sub>). Trata-se de transformarem-se as coordenadas  $\theta_i$ (ver Eqs.(III.2.27)) em funções polinomiais de  $\gamma_i$  dadas pela seguinte relação:

$$\theta_{i} = a_{i} \gamma_{i}^{3} + b_{i} \gamma_{i}^{2} + c_{i} \gamma_{i} + d_{i}$$
(A.1)

onde  $\gamma_i$  são as abcissas dos pontos de integração. Os valores de  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  são obtidos impondo-se a (A.1) as seguintes prescrições:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\gamma} = \overline{r} \tag{A.2a}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d \gamma^2} \bigg|_{\overline{\Theta}} = 0$$
 (A.2b)

$$\Theta(1) = 1 \tag{A.2c}$$

$$\theta(-1) = -1 \tag{A.2d}$$

A condição (A.2a) — onde foi abolido o índice i por comodidade — estabelece que o Jacobiano da transformação, no ponto  $\overline{\theta}$  (ponto onde ocorre a singularidade), deve ser igual a um parâmetro  $\overline{r}$ , tomado, na prática, como função de D<sub>min</sub>. (Para integração Singular TELLES [13] recomenda tomar-se o Jacobiano igual a zero, em  $\overline{\theta}$ ). A condição (A.2b) determina que o Jacobiano deve ter um valor extremo em  $\overline{\theta}$ .

Das prescrições (A.2) obtém-se:

$$a_{i} = (1 - \overline{r}_{i})/Q_{i}$$
 (A.3a)

$$b_{i} = -3(1 - \overline{r}_{i})\overline{\gamma}_{i}/Q_{i}$$
 (A.3b)

$$c_{i} = (\overline{r}_{i} + 3 \overline{\gamma}_{i}^{2})/Q_{i}$$

$$d_{i} = -b_{i}$$
(A.3c)
(A.3d)

Obviamente que o Jacobiano valerá

$$J_{i} = 3a_{i}\gamma_{i}^{2} + 2b_{i}\gamma_{i} + c_{i}$$
(A.4)

onde

е

$$Q_i = 1 + 3\overline{\gamma}_i^2 \qquad (A.5a)$$

$$\overline{\gamma}_{i}^{2} = \sqrt[3]{-q_{i}} + \sqrt{(q_{i}^{2} + p_{i}^{3})} + \sqrt[3]{-q_{i}} - \sqrt{(q_{i}^{2} + p_{i}^{3})} + \frac{\overline{\theta}_{i}}{1 + 2\overline{r}_{i}} + \frac{\overline{\theta}_{i}}{1 + 2\overline{r}_{i}}$$
(A.5b)

$$q_{i} = \frac{1}{2(1+2\overline{r}_{i})} \left\{ \left[ \overline{\Theta}_{i}(3-2\overline{r}_{q}) - \frac{2\overline{\Theta}_{i}^{3}}{1+2\overline{r}_{i}} \right] \frac{1}{1+2\overline{r}_{i}} - \overline{\Theta}_{i} \right\}$$
(A.5c)

$$p_{i} = \frac{1}{3(1 + 2\bar{r}_{i})^{2}} \left\{ 4\bar{r}_{i} (1 - \bar{r}_{i}) + 3 (1 - \bar{\theta}_{i}^{2}) \right\}$$
(A.5d)

A relação entre  $\overline{r}$  e  $D_{min}$  — obolindo-se o índice i — foi encontrada por TELLES [13], através da minimização do erro de integração no sentido do mínimo quadrado, que forneceu, para cada coordenada os seguintes valores:

$$\overline{r}_{i} = 0$$
 para  $D_{i} \le 0.05$  (A.6a)  
 $\overline{r}_{i} = 0.85 \pm 0.24 \ln(D_{i})$  para  $0.05 \le D_{i} \le 1.30$   
(A.6b)  
 $\overline{r}_{i} = 0.893 \pm 0.0832 \ln(D_{i})$  para  $1.30 \le D_{i} \le 3.618$   
(A.6c)  
 $\overline{r}_{i} = 1$  para  $3.618 \le D_{i}$  (A.6d)

onde deve-se tomar

$$D_{1} = 2 D_{\min} / |x(1,\overline{\theta}_{2}) - x(-1,\overline{\theta}_{2})|$$
(A.7a)

$$D_2 = 2 D_{\min} / |x(\overline{\theta}_1, 1) - x(\overline{\theta}_1, -1)|$$
(A.7b)

Os valores  $D_1$  e  $D_2$  são os valores de  $D_{min}$  corrigidos devido a mudança de escala, tendo em vista que aqui o comprimento médio de lado é qualquer e TELLES [13] usou comprimento de lado igual a 2.

Para o cálculo de D<sub>min</sub> a Fig. A.1 mostra o procedimento adotado.



Fig. A.1 Cálculo de  $D_{min}$ 

Como pode-se ver o cálculo de  $D_{min}$  é feito por tentativas, e para cada tentativa descartada subdivide-se o elemento, tomando o ponto médio entre os lados e construindo-se um subelemento a partir do último ponto mais próximo ( $P_{prox}$ ) de  $\xi$ . O processo é repetido até o limite definido pelo quociente abaixo:

$$quoc_1 = l_{mator}/D_{min} = 0.1$$
 (III7.8)

onde l é o maior lado do subelemento. Isto é, o processo pára quando quoc $_1 \leq 0.1$ . Obtém-se assim um D<sub>min</sub>

aproximado.

Analogamente ao processo da subdivisão do elemento, a Transformação Polinomial de Terceira Ordem também faz uso de integração seletiva, mencionada no início desta seção. Isto é extremamente importante tendo em vista que a eficiência de um programa computacional que utiliza o Método dos Elementos de Contorno é fortemente influenciada pelo número de pontos de integração empregado para integrais quasi-singulares. O presente trabalho adotou o seguinte critério:

 $quoc_{2} \le 13.52$  (III7.9a) p = 5para  $4.805 < quoc_{2} \le 13.52$ p = 6para (III7.9b)  $0.3613 < quoc_{2} \le 4.805$ p = 8para (III7.9c)  $0.1301 < quoc_2 \le 0.3613$ p = 11para (III7.9d)  $0.0481 < quoc_{2} \le 0.1301$ p = 14para (III7.9e)  $0.0136 < quoc_2 \le 0.0481$ p = 16para (III7.9f) quoc₂ ≤ 0.0136 p = 20(III7.9g) para

com quoc<sub>2</sub> =  $L_{maior}/D_{min}$ , e p é o número de pontos de integração, sendo  $L_{maior}$  o maior lado do elemento.

Os valores nas inequações de quoc<sub>2</sub> foram fornecidos por J. J. Rêgo Filho e os valores de p foram encontrados neste trabalho de maneira aproximada, analisando-se a resposta do exemplo do cubo para diversos valores de p. RÊGO FILHO [10] e NEVES [12] conseguiram valores menores de p, porém, o primeiro utilizou precisão dupla e NEVES fez uma análise de erro mais acurada em seu trabalho no domínio 2-D.

Encerrando convém notar que a Transformação de Terceira Ordem também produz uma concentração de pontos de integração na região do elemento mais próximo do ponto fonte, conforme mostrou TELLES [13], sem a necessidade de se subdividir o elemento.
# 134 APÊNDICE B

### MAPEAMENTO DO DOMÍNIO TRIANGULAR EM QUADRANGULAR

O processo de integração numérica proposto por HAMMER et alli [21], já foi muito testado (por exemplo, ver SÁ [14]), apresentando bons resultados, porém, possui o inconveniente de aceitar no máximo 13 pontos de integração. Se para obterem-se resultados melhores depende-se de número de pontos de integração maior do que 13, esse processo já não pode mais ser utilizado. Para vencer esta dificuldade alguns pesquisadores (LAGUE e BALDUR [28], TELLES [15] e outros) sugeriram uma transformação de coordenadas que consiste em mapear o domínio triangular em um quadrangular. Feito isto, pode-se recorrer à quadratura de Gauss para a integração numérica, podendo-se utilizar, quando necessário, números muito elevados de pontos de integração (por exemplo: 96 x 96 ou 9216 pontos). A seguir são apresentadas as Eqs.(III.2.24) com a transformação proposta por TELLES [15]:

$$\int_{-1}^{\infty} \int_{-1}^{\infty} d\Gamma = 2A \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ p^{*} \phi \right]_{\theta_{1},\theta_{2}} (\overline{G}) d\theta_{1} d\theta_{2} \right]$$
(B.1)

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{d\Gamma}{dr} = 2A \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ u \frac{\partial}{\partial r} \right]_{\theta_1, \theta_2} (\overline{G}) d\theta_1 d\theta_2$$
(B.2)

com

$$\eta_{1} = \frac{1}{4} (1 - \theta_{2}) (\theta_{1} + 1)$$
(B.3a)  

$$\eta_{2} = \frac{1}{4} (\theta_{2} + 1) (\theta_{1} + 1)$$
(B.3b)

e 
$$(\overline{G}) = \frac{\left(\frac{\theta_1 + 1}{8}\right)}{8}$$
 (B.4)

é o Jacobiano da transformação. Obviamente que  $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$ . Inversamente obter-se-á:

$$\theta_{1} = 2 (\eta_{1} + \eta_{2}) - 1$$
(B.5a)
$$\theta_{2} = \frac{\eta_{2} - \eta_{1}}{\eta_{2} + \eta_{1}}$$
(B.5b)



# Fig. B.1. Mapeamento do domínio triangular em quadrangular

Uma característica interessante de transformação apresentada é que se o ponto mais próximo do ponto fonte no elemento é o nó 1, a integração em  $\theta_2$  fica com domínio indefinido e a Transformação de Coordenadas de Terceira Ordem (Apêndice B) é desativada nesta direção. Contudo, desde que a transformação para o mapeamento quadrangular produz um Jacobiano que é zero neste ponto, a precisão da integração não é perturbada.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MIKHLIN, S.G., <u>Integral Equations</u>, Pergamon Press, London, 1957.
- [2] MUSKHELISHVILLI, N.I., <u>Some Basic Problems of the</u> <u>Mathematical Theory of Elasticity</u>, Noordhoff, Holand, 1953.
- [3] RIZZO, F.J., "An Integral Equation Approach to Value Problems of Classical Elastostatics", <u>Quart</u>. <u>Appl. Math.</u>, vol. 25, pp. 83-95, 1967
- [4] RICARDELLA, P.C., "An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems in Elasticity and Elastoplasticity", Report n<sup>o</sup> SM-73-10, Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon Univ., Pittsburg.
- [5] CRUSE, T.A., "Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics", <u>Int. J. of Solids Structures</u>, vol. 5, n<sup>2</sup> 12, pp. 1259-1274, 1969.
- [6] LACHAT, J.A., <u>A Further Development of the Boundary</u> <u>Integral Technique for Elastostatics</u>, tese de <u>Ph.D.</u>, University of Southampton, UK, 1975.

#### 137

- [7] BREBBIA, C.A., <u>The Boundary Element Method for</u> Engineers, Pentech Press, London, 1978.
- [8] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., e WROBEL, L.C., <u>Boun-dary Element Techniques</u>, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [9] SANTIAGO, J.A.F., <u>Implementação do Método dos Elemen-</u> <u>tos de Contorno para Elasticidade Bidimensional com</u> <u>o Uso de Microcomputadores</u>, tese de M.Sc., COPPE/ UFRJ, 1987.
- [10] SILVA, J.J.R., <u>MEC3DE Um</u> <u>Programa</u> <u>para</u> <u>análise</u> <u>Elástica Tridimensional com o Método dos Elemen-</u> <u>tos de Contorno</u>, tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1989.
- [11] MARQUES, E., <u>Combinação dos Métodos dos Elementos de</u> <u>Contorno e dos Elementos Finitos: Aplicação a Pro-</u> <u>blemas de Potencial</u>, tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1986.
- [12] NEVES, A.C., <u>Resolução de Problemas Viscoelásticos</u> <u>utilizando o Método dos Elementos de Contorno</u>, tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1988.

- [13] TELLES, J.C.F., "A Self-adaptative Coordenate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals", <u>International</u> <u>Journal for Numerical Methods in engineering</u>, vol. 24, pp. 959-973, 1987.
- [14] SÁ, P. A. O., "Elasticidade Linear Tridimensional pelo Método dos Elementos de Contorno - Soluções de Kelvin e de Mindlin", seminário de classificação para doutorado, COOPE/UFRJ.
- [15] TELLES, J.C.F., "Implementation of Triangular Elements into the Beasy System", internal report, <u>Computational Mechanics Institute</u>, Southampton, UK, 1986.
- [16] CHEN, W., SALEEG, A.T., <u>Constitutive Equations for</u> <u>Engineering Materials</u>, vol. 1, John Wiley & Sons, 1982.
- [17] KELLOG, O.D., Foundation of Potencial Theory, Springer Verlag, Berlin, 1929.
- [18] WILLMERSDORF, R.B., <u>Formulação P-Adaptativa do Méto-</u> <u>do dos Elementos de Contorno Aplicado a Proble-</u> <u>mas de Potencial</u>, tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1988.

- [19] BATHE, K.J., <u>Finite Element Procedure in Engineering</u> Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
- [20] PARREIRA, P.G.S.V., <u>Análise do Erro no Método dos</u> <u>Elementos de Fronteira em Elasticidade</u>, tese de D.Sc., Universidade Técnica de Lisboa, 1987.
- [21] HAMMER, P.C., MARLOVE, O.J., STROUD, A.H., "Numerical Integration over Simplex on Cones", <u>Mathematical</u> <u>Tables and other Aids to Computational</u>, vol. 10, 1956.
- [22] PAULA, F. A. de, <u>Obtenção da Matriz de Rigidez Utili-</u> <u>zando o Método dos Elementos de Contorno</u>, tese de M.Sc., 1986.
- [23] ARAUJO, F.C., <u>Técnicas Iterativas para a Solução de</u> <u>Sistemas de Equações Lineares Oriundas do Método</u> <u>dos Elementos de Contorno, tese de M.Sc., 1989.</u>
- [24] MARQUES, E., MANSUR, W.J., "Coupling of Boundary and Finite Element Methods: Application to Potencial Problems", MECOM 87, PUC, Rio de Janeiro, 1987
- [25] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., <u>Teoria da Elastici</u>dade, Guanabara Dois, 3<sup>a</sup> edição, 1980.

[26] NAKAGUMA, R.K., <u>Three Dimensional Elastostatics using</u> <u>the Boundary Element Method</u>, tese de Ph.D., University of Southampton, U.K.

- [27] FEODOSIEV, V., <u>Resistência dos Materiais</u>, Lopes da Silva Editora, Porto, 1977.
- [28] LAGUE, G., BALDUR, R., "Extended Numerical Integration Method for Triangular Surfaces", Int. J. Num. Math., Eng'g 11, pp. 388, 1977.