

portuguese

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo

Cosmologia com supernovas do tipo Ia

Autor:
Albert Prado dos Santos

Orientador:
Ribamar Rondon de Rezende dos Reis, IF-UFRJ

Projeto de Conclusão de Curso para a obtenção do título de
Astrônomo

Julho de 2019

Resumo

Cosmologia com supernovas do tipo Ia

por Albert Prado dos Santos

Neste trabalho, o estudo da cosmologia é introduzido através de Supernovas do tipo Ia, de forma a estimar os parâmetros Ω_m e Ω_Λ . Antes, porém, é necessário mostrar alguns conceitos importantes sobre a Relatividade Geral como curvatura e métrica, que combinados com leis como conservação de massa/energia e termodinâmica são utilizados para se construir um modelo padrão capaz de descrever a evolução do universo. Em seguida, é mostrado como aplicar esse conhecimento de forma prática para estimar os parâmetros Ω_m e Ω_Λ . Para isso, foi estudado principalmente o artigo de Riess et al 1998 [20], juntamente com outros importantes, onde são apresentados alguns dos métodos utilizados neste trabalho, para o estudo da cosmologia com Supernovas tipo Ia. Por fim, é mostrado o resultado da aplicação desses métodos para se encontrar os valores mais prováveis dos parâmetros Ω_m e Ω_Λ . Através da evolução dos resultados nessa área, atualmente é necessário uma mudança nesse campo de estudo devido ao fato de que o erro sistemático passou a predominar sobre o erro estatístico nas medidas, tornando-se assim a próxima barreira a ser superada.

Abstract

Cosmologia com supernovas do tipo Ia

by Albert Prado dos Santos

The cosmology study is introduced through the tipe Ia Supernovae as a way of estimating the cosmological constants Ω_m and Ω_Λ . However, before that it is shown important concepts for the General Relativity such as curvature and metric, which combined with laws such as mass/energy conservation and thermodynamics are used to construct a standard model capable of describing the universe is evolution. Next, it is shown how to apply this knowledge in a practical way to estimate the cosmological constants Ω_m and Ω_Λ . For this, the article by Riess at al 1998 [20] together with others was studied, which presents some of the methods used in this work for the study of cosmology with tipe Ia Supernovae. Finally, it is shown the result of applying these methods to find the most probable values of Ω_m and Ω_Λ constants. Through the evolution of results in this area, currently it is necessary a change in the field of study due to the fact that systematic error has predominated over statistic error in the measurements, thus becoming the next barrier the be overcome.

Agradecimentos

Agradeço a Manoel Remigio dos Santos, Rosarejane da Silva Prado e Rejane Prado dos Santos.

Conteúdo

portuguese

Resumo	ii
Abstract	iii
Agradecimentos	iv
Sumário	v
Lista de figuras	vii
1 Introdução	1
2 Evidências observacionais	5
2.1 Lei de Hubble	5
2.2 Radiação cósmica de fundo	11
3 Conceitos de relatividade	15
3.1 Princípio da equilíbrio	15
3.2 Curvatura	17
3.3 Métrica FLRW e Distância Própria.	21
4 Equação de Friedmann	23
4.1 Aplicação da gravitação na expansão do universo	23
4.2 Aplicação da Relatividade Geral	26
5 Modelo Padrão	31
5.1 Primeira Lei da termodinâmica	31
5.2 Equação de estado	34
5.3 Constante Cosmológica	36
5.4 Resolução da equação de fluido	39
5.5 Finalmente o modelo Padrão	42
6 Tipos de distâncias e suas importâncias	45
6.1 Distância Própria Revisitada	45
6.2 Distância de Luminosidade	49

7	Supernovas na Cosmologia	53
7.1	Supernovas tipo Ia	53
7.2	Estatística	58
7.3	Universo em Aceleração	61
8	Considerações finais	67

Lista de Figuras

portuguese

2.1	Na imagem temos o espectro do sol onde cada uma das 50 linhas cobre 60 angstroms assim pegando toda a faixa de comprimento de onda que vai de 4000 a 7000 angstroms. Podemos ver que existem regiões mais escuras, estas são as chamadas linhas de absorção [3].	6
2.2	Espectro de uma galáxia NGC4696 com importantes linhas de emissão e absorção indicadas [4]	6
2.3	Gráfico original feito por Hubble [2], mostrando o ajuste linear entre velocidade e distância.	7
2.4	Versão mais moderna do gráfico do Hubble [5]. As curvas correspondem a valores diferentes do parâmetro de Hubble H_0 , 83, 75 e 67 km/s/Mpc.	8
2.5	Representação da expansão do universo. Crédito: Eugenio Bianchi, Carlo Rovelli e Rocky Kolb. [7]	9
2.6	Os pontos representam a posição de três galáxias em um espaço euclidiano [8, página 18]	9
2.7	representação do efeito da expansão do universo sobre o comprimento de onda de um fóton [11].	12
3.1	Ilustração do princípio da equivalência. [8, página 37]	16
3.2	Triângulo formado em um espaço esférico [12]	18
3.3	Ilustração de um espaço hiperbólico[8, página 42].	19
4.1	representação de uma esfera cujo raio varia com o tempo, logo está expandindo ou contraindo isotropicamente [8, página 59].	24
7.1	No painel acima temos a magnitude na banda B na ordenada e a abscissa mostra o tempo em dias. No painel abaixo temos novamente a magnitude na banda B, corrigida pela relação empírica, pelo tempo em dias [18].	56
7.2	O painel superior mostra os dados do módulo da distância como função do redshift, obtidos por dois grupos diferentes (Riess et al [20] e Perlmutter et al [21]), juntamente com os três modelos sugeridos. Já o painel inferior mostra a diferença entre os dados e o modelo com curvatura negativa e $\Omega_{m,0} = 0.3$ [22].	59
7.3	A imagem acima feita por Wang B, Shi W, Miao Z. PLoS ONE (2015)[24] mostra uma distribuição de probabilidade Gaussiana. Como toda distribuição de probabilidade, a Gaussiana tem área total de uma unidade o que equivale a 100% de chance de um evento ocorrer. A região delimitada por σ tem área total de aproximadamente 68,3% o que, como foi dito antes, representa uma barra de confiança de 68,3%	60

7.4	O grafico feito por A. G. Riess et al [20]feito com 50 Supernovas tipo Ia mostra as regiões com mais probabilidade de se encontrar os valores verdadeiros de $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$, as linhas pontilhadas demarcam três valores de q_0	63
7.5	Grafico retirado do trabalho de R. Kessler et al. [26], feito com 136 Supernovas tipo Ia, onde as curvas em amarelo e vermelho são respectivamente os intervalos de confiança para σ e 2σ , considerando apenas os dados de supernovas tipo Ia	64
7.6	Medição de Ω_m e Ω_Λ com confiança de 68% e 95% feito por M. Betoule et al[25], trabalho realizado com 374 Supernovas tipo Ia	65

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia estuda o universo como um todo, sendo assim tem como objetivo explicar a estrutura e a evolução do universo em grandes escalas. Claro que o desejo de explicar o funcionamento do cosmos caminha junto com a humanidade desde que esta olhou para as estrelas pela primeira vez e sentiu a necessidade de explicar o porquê de estarmos aqui, porém a cosmologia como ciência é muito mais recente. Modelos cosmológicos como conhecidos hoje só apareceram após o surgimento da gravitação de Newton e em seguida foram refinados com os modelos relativísticos de Einstein.

Porém a cosmologia era apenas teórica pois não haviam métodos para se medir distâncias suficientemente grandes até que em 1906 a astrônoma Henrietta Leavitt publicou um artigo [1] no qual ela pôde relacionar estatisticamente a luminosidade de uma estrela variável com o período de variação do fluxo desta pela primeira vez, este tipo de estrela ficou conhecida como Cefeida. A partir deste momento a cosmologia ganhou uma ferramenta de extrema importância. Graças às Cefeidas, em 1923, Edwin Hubble conseguiu medir a distância até a galáxia de Andrômeda, provando desta forma que as nebulosas espirais na verdade se tratam de outras galáxias, mudando todo o panorama vigente do que se pensava sobre o universo.

Mais tarde, em 1929, o mesmo Hubble mostrou que as galáxias tendem a se afastar de nós com velocidade proporcional a distância [2] novamente usando Cefeidas, assim chegando à lei de Hubble. As Cefeidas continuaram a ser utilizadas como vela padrão de forma cada vez mais precisa conforme o número destas observadas aumentava de forma a melhorar a precisão estatística. Algumas interpretações podem ser feitas a partir das observações de Hubble, a mais aceita na comunidade científica é de que o universo está se expandindo e a partir desta interpretação chegou-se a modelos de universo onde haveria uma época em que este estaria confinado a um pequeno espaço, anos mais tarde se obteve a confirmação observacional através da descoberta da radiação cósmica de fundo. Com o

passar dos anos, a utilização das cefeidas passou a ser enormemente restrita pois, mesmo que estas sejam muito luminosas para os padrões de estrelas, não é possível observá-las a distâncias maiores do que o grupo local. Isso fez com que novos métodos para se medir distâncias aparecessem e outros não tão novos assim também, digo isto pois um dos métodos mais utilizados atualmente se trata de uma reciclagem do método das cefeidas. Como o problema das Cefeidas é sua relativa baixa luminosidade para os padrões cosmológicos atuais, os cosmólogos passaram a usar como vela padrão objetos bem mais luminosos e que, da mesma forma que as Cefeidas tem sua luminosidade relacionada com observáveis, as Supernovas tipo Ia. Como as supernovas possuem luminosidade muito elevada isso torna possível medir distâncias muito maiores, o que é de extrema necessidade pois o modelo cosmológico padrão considera o universo homogêneo, o que só é válido para distâncias maiores que 100 Mpc, onde as cefeidas já não podem ser mais utilizadas.

No fim dos anos 90, dois grupos diferentes usando supernovas tipo Ia como vela padrão, concluíram que o universo além de estar expandindo, como Hubble mediu, essa expansão está acelerando com o passar do tempo. Deve-se salientar que esta descoberta não seria possível com a utilização das Cefeidas para se medir as distâncias pois a diferença entre o modelo com expansão acelerada e os demais modelos só pode ser percebida em distâncias maiores do que as que são possíveis de se observar as Cefeidas, pois todos os modelos tem um comportamento linear para baixo *redshift*, como foi observado por Hubble em 1929. Não é possível explicar esta expansão acelerada usando a gravitação de Einstein, pois a atração gravitacional é sempre positiva, o que não deveria permitir que o universo se expandisse de forma acelerada. Entretanto Einstein, logo nos primeiros anos em que lançou a Relatividade Geral, havia feito um modelo de universo estático o qual foi desacreditado logo que Hubble descobriu a expansão do universo. Ao criar o seu modelo estático Einstein se deparou com o mesmo problema do potencial gravitacional atrativo e ele resolveu com uma constante Λ na equação que possuía características repulsivas, assim gerando um equilíbrio na gravitação, o que permitiria que o universo fosse estático como era o panorama vigente na época. Claro que, com a descoberta de Hubble, Einstein abandonou o modelo estático chegando a dizer que a constante cosmológica Λ havia sido o maior erro de sua vida. Porém, após se descobrir que o universo na verdade está se expandindo de forma acelerada, percebeu-se que a constante Λ poderia ser adaptada para explicar a aceleração do universo. No caso do modelo de Einstein o universo precisava ser estático, sendo assim Λ deveria ter o valor exato para compensar a força atrativa. Porém, considerando que o universo na verdade está acelerando, significa que a constante Λ está ganhando o cabo de guerra das forças que regem o mesmo.

Pode-se interpretar Λ como um fluido com pressão negativa, o que se torna muito

mais fácil de modelar, sendo assim este trabalho tem como objetivo identificar os outros agentes de pressão do universo e suas respectivas proporções para que desta forma se possa compreender melhor a evolução do universo por meio das Supernovas tipo Ia. Sendo assim, o texto foi estruturado da seguinte forma: no capítulo 2 falo sobre as principais evidências observacionais que levaram ao entendimento atual do universo de forma mais profunda, no capítulo 3 introduzo os conceitos necessários sobre relatividade para que se possa trabalhar com os modelos cosmológicos, no capítulo 4 apresento a equação de Friedmann, que será uma das ferramentas que usaremos para descrever modelos do universo, no capítulo 5 apresento o modelo padrão da cosmologia, usando além da relatividade geral outras ferramentas físicas e matemáticas, no capítulo 6 falamos sobre como a forma de medir a distância interfere na medida e como levar isso em conta nos cálculos e finalmente no capítulo 7 falo sobre supernovas tipo Ia e como se obter a proporção de densidade de cada agente do universo através da observação destas.

Capítulo 2

Evidências observacionais

Quando se estuda objetos a grandes distâncias a nossa principal fonte de informação é a luz e pelo comportamento desta tenta-se obter respostas para as mais variadas perguntas como: Qual a idade do universo? Ele possui fim? Teve início? etc. Bem, algumas perguntas continuam sem uma resposta bem aceita pela comunidade científica, porém outras foram obtidas através de várias evidências observacionais que nossos telescópios conseguiram captar.

2.1 Lei de Hubble

Dentre estas evidências observacionais, uma das que mais impressionaram a comunidade científica na época foi a descoberta de que as galáxias apresentam um *redshift* proporcional à distância que ela está da Terra. Antes de explicar exatamente o que essa frase significa é essencial se entender o que vem a ser *redshift* e o que ele significa.

Imagine que um feixe de luz de amplo espectro passa por um gás. Dependendo das condições do gás, quando se observar o feixe após passar pelo gás irá se perceber linhas de emissão ou absorção, dependendo da temperatura do gás, devido à interação com o gás. Um exemplo pode ser visto na figura 2.1. Apesar da figura 2.1 ser muito boa para que se possa entender a absorção da luz por um gás, cientificamente não se pode tirar muita informação dela, para a ciência é muito mais interessante um gráfico de fluxo específico (energia por unidade de tempo, por unidade de área, por unidade de comprimento de onda) em função do comprimento de onda, como mostrado na figura 2.2. Através de espectros semelhantes a esses das galáxias, pode-se perceber que as linhas de absorção e de emissão têm curvas características e assim quando elas se encontram em comprimentos de ondas diferentes dos observados em galáxias próximas pode-se dizer

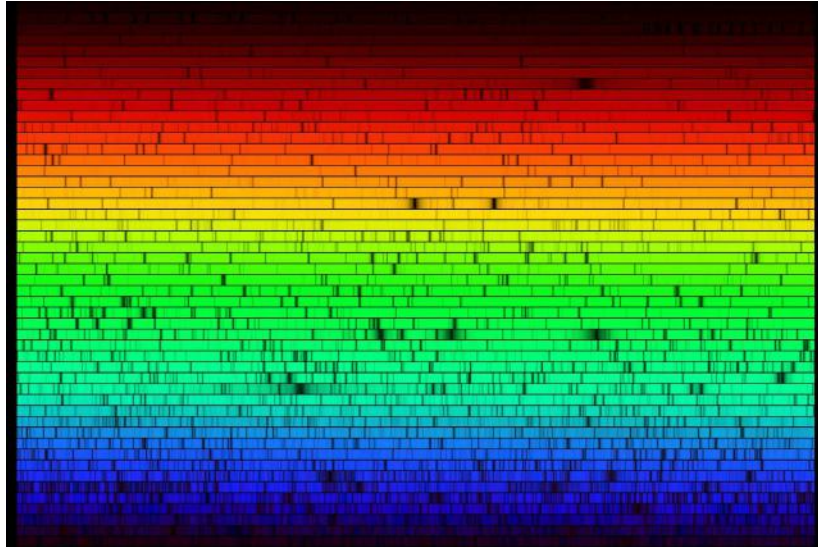


FIGURA 2.1: Na imagem temos o espectro do sol onde cada uma das 50 linhas cobre 60 angstroms assim pegando toda a faixa de comprimento de onda que vai de 4000 a 7000 angstroms. Podemos ver que existem regiões mais escuras, estas são as chamadas linhas de absorção [3].

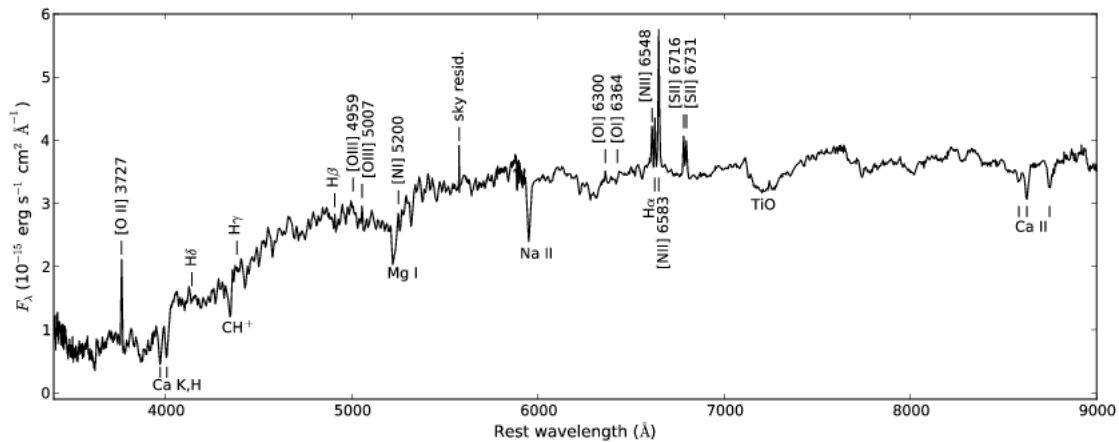


FIGURA 2.2: Espectro de uma galáxia NGC4696 com importantes linhas de emissão e absorção indicadas [4]

que o espectro desta galáxia apresenta um *redshift* ou *blueshift*. Este desvio da luz é causado pelo efeito Doppler, porém há dois tipos de efeito Doppler os quais devem ser considerados, o que chamarei de clássico, que ocorre em ondas sonoras, e o efeito doppler que ocorre em ondas de luz. Ao contrário das ondas sonoras, a luz se propaga no vácuo o que elimina o referencial especial, no caso do som a atmosfera, sobrando apenas as velocidades relativas da fonte e do observador.

O redshift (z) de uma fonte é definido pela seguinte equação:

$$z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}}, \tag{2.1}$$

onde λ_{ob} é o comprimento de onda observado e λ_{lab} é o comprimento de onda no qual a linha se encontra considerando o referencial do observador. Quando $z < 0$ se tem blueshift (fonte se aproxima) e quando $z > 0$ se tem redshift (fonte se afasta). Na época dessas observações (na década de 1920) já se conhecia o efeito Doppler aplicado a luz, logo a observação de um desvio para o vermelho da luz das galáxias proporcional a distância que ela se encontra de nós foi interpretado como um afastamento destas galáxias com uma velocidade proporcional à distancia a qual ela se encontra de nós. Em 1929, Edwin Hubble [2] mediu o *redshift* e à distância para 20 galáxias e obteve um gráfico que viria a ficar famoso em todo o meio científico (veja a figura 2.3). Como todas as galáxias que

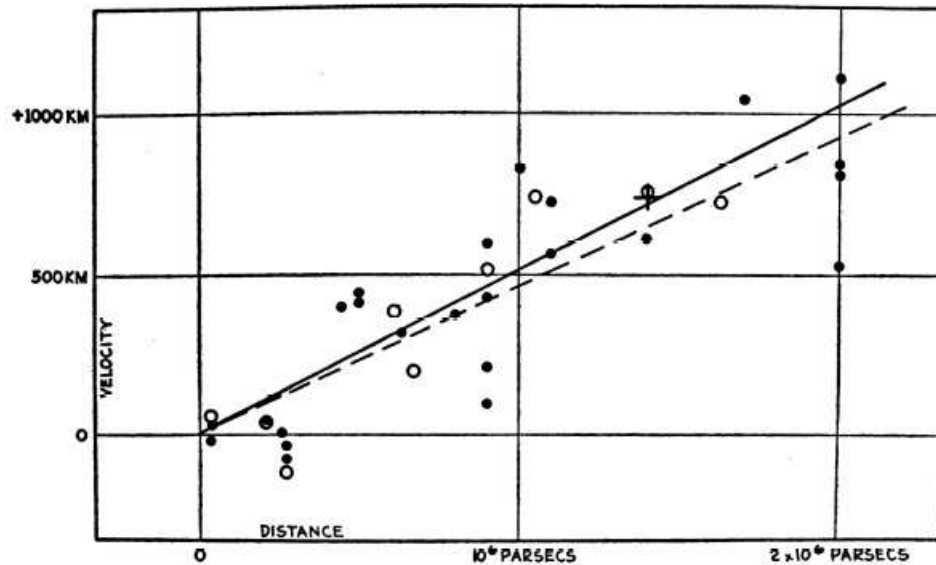


FIGURA 2.3: Gráfico original feito por Hubble [2], mostrando o ajuste linear entre velocidade e distância.

ele utilizou tinham $z < 0.04$ a aproximação clássica era adequada ao caso, logo pode-se escrever

$$z = \frac{v}{c}. \quad (2.2)$$

Utilizando a figura 2.3 pode-se perceber a relação linear

$$v = H_0 r, \quad (2.3)$$

onde a constante de proporcionalidade H_0 ficou conhecida como a constante de Hubble, v é a velocidade de afastamento da galáxia em questão e r é a distância até esta. Na equação 2.3 H_0 é constante, mas de forma geral iremos ver que ele varia com o tempo. Inicialmente quando Hubble fez a primeira medida de H_0 ele obteve

$$H_0 = 500 \frac{\text{Km}}{\text{s.Mpc}}, \quad (2.4)$$

mas Hubble havia errado gravemente na estimativa de distância das galáxias. Trabalhos posteriores baseados em medidas mais acuradas de cefeidas, como na figura 2.4, forneceram uma estimativa mais confiável.

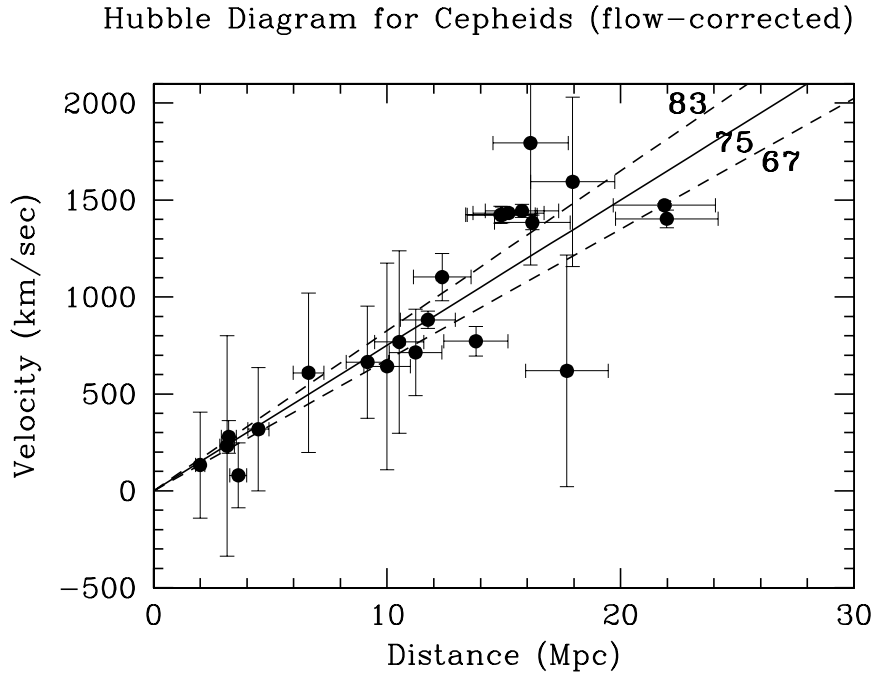


FIGURA 2.4: Versão mais moderna do gráfico do Hubble [5]. As curvas correspondem a valores diferentes do parâmetro de Hubble H_0 , 83, 75 e 67 km/s/Mpc.

Assim como este trabalho de 2001 outros com cada vez mais precisão foram feitos até chegar ao valor que se obteve no trabalho de Riess, A et al. (2016) [6] que é de

$$H_0 = (73.24 \pm 1.74) \frac{\text{Km}}{\text{s.Mpc}}. \quad (2.5)$$

O que o Hubble mostrou em 1929 e tem sido confirmado pela observação através dos anos é que não importa a direção a qual olharmos, as distantes galáxias parecem todas se afastar de nós. A descoberta de Hubble, a primeira vista, parece ir de encontro à ideia de isotropia do universo, já que se todas as galáxias estão se afastando de nós então estaríamos em uma posição privilegiada do universo, mas há outra interpretação possível para explicar o afastamento das galáxias.

O princípio cosmológico estabelece que nós não ocupamos uma posição privilegiada no universo e, portanto, o que observamos deve ser o que qualquer outro observador vê. Com isso, se a expansão parece isotrópica para nós, deve ser isotrópica para qualquer outro observador e um meio isotrópico com relação a todos os pontos é homogêneo. Imagine que o universo é como um balão que está sendo inflado e as galáxias estão na superfície deste balão. Os observadores em cada galáxia irão ver todas as outras se afastando assim como mostrado na figura 2.5.

Para melhor se trabalhar com a do Universo se utiliza o sistema de coordenadas comoveis que irei introduzir agora. Imaginemos três galáxias em um instante t_0 , como na figura 2.6, as distâncias entre estas galáxias são

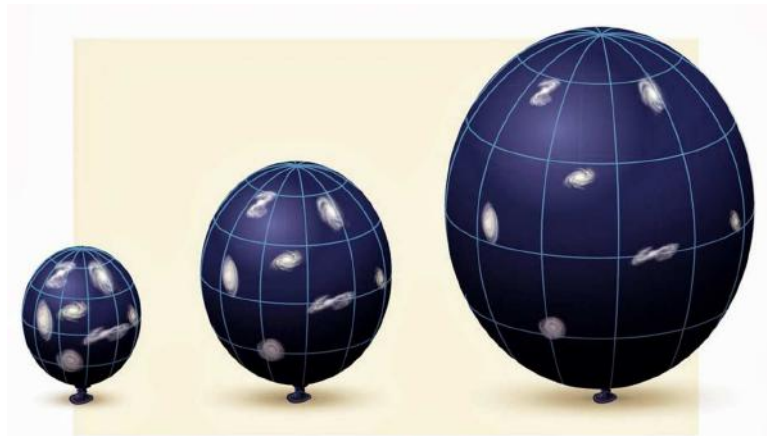


FIGURA 2.5: Representação da expansão do universo. Crédito: Eugenio Bianchi, Carlo Rovelli e Rocky Kolb. [7]

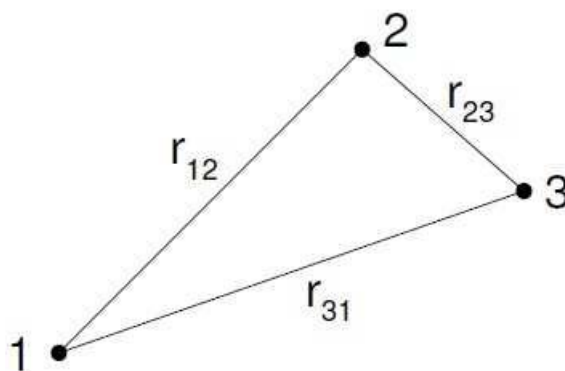


FIGURA 2.6: Os pontos representam a posição de três galáxias em um espaço euclidiano [8, página 18]

$$r_{12} \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, \quad (2.6)$$

$$r_{23} \equiv |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|, \quad (2.7)$$

$$r_{31} \equiv |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|. \quad (2.8)$$

Agora imagine que a distância entre cada uma destas galáxias é multiplicada por um número $a(r, t)$ o qual iremos chamar de *fator de escala*. A princípio, nada impede que este número varie com o tempo e com o espaço, sendo assim, teremos

$$r_{12}(t) = a(r, t)r_{12}(t_0), \quad (2.9)$$

$$r_{23}(t) = a(r, t)r_{23}(t_0), \quad (2.10)$$

$$r_{31}(t) = a(r, t)r_{31}(t_0). \quad (2.11)$$

Primeiramente deve-se ressaltar que a expansão não depende do local em que se está ou da direção em que se olhe, devido ao princípio cosmológico, portanto o fator de escala não pode depender de r . A partir destas equações pode-se também obter a velocidade com que cada galáxia observa a outra se movendo,

$$v_{12}(t) = \frac{dr_{12}}{dt} = \dot{a}r_{12}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{12}(t), \quad (2.12)$$

$$v_{23}(t) = \frac{dr_{23}}{dt} = \dot{a}r_{23}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{23}(t), \quad (2.13)$$

$$v_{31}(t) = \frac{dr_{31}}{dt} = \dot{a}r_{31}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{31}(t), \quad (2.14)$$

onde o ponto sobre a grandeza representa a derivada desta em função do tempo. Com estas equações podemos definir o parâmetro de Hubble. Como Hubble observou que a velocidade com que se observa uma galáxia se afastar é proporcional à distância que ela está do observador, temos

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.15)$$

A detecção do afastamento das galáxias leva a outra pergunta, se as galáxias estão se afastando como no exemplo do balão, significa que um dia o universo esteve completamente comprimido? Tudo leva a acreditar que sim e a principal prova observacional para esta afirmação é a radiação cósmica de fundo. Falarei dela em breve mas antes disso vamos continuar com o raciocínio da expansão do universo. Assumindo que um dia ele esteve completamente compactado, quanto tempo se passou desde então, se H se manteve constante? Podemos fazer esses cálculos de forma simples como segue

$$t_0 = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = H_0^{-1} = (14.0 \pm 1.4) \text{ Gyr}. \quad (2.16)$$

Este resultado é chamado de tempo de Hubble.

2.2 Radiação cósmica de fundo

Como foi falado anteriormente, a radiação cósmica de fundo (em inglês chamada de *Cosmic Microwave Background*, CMB) é a maior evidência observacional de que um dia o universo foi extremamente denso e quente. Sua primeira observação, feita em 1965, por Arno Penzias e Robert Wilson [9] foi realizada por acaso. Durante um teste de uma antena de baixo ruído, foi observado um sinal isotrópico. Estudos posteriores como o Cosmic Background Explorer (COBE) [10] mostraram que a CMB tem espectro de um corpo negro à temperatura

$$T = (2.725 \pm 0.001) \text{ K}. \quad (2.17)$$

Bem, mas o que viria a ser um corpo negro? Um corpo negro é um sistema que encontra-se em equilíbrio térmico ou seja ele emite a mesma quantidade de energia que recebe.

Como a CMB equivale a um corpo negro de baixa temperatura espera-se que também tenha uma baixa densidade de energia, a qual é

$$\varepsilon = 4.17 \times 10^{-14} \text{ J.m}^{-3} = 0.260 \text{ MeV.m}^{-3}. \quad (2.18)$$

Podemos obter a densidade de fótons da CMB

$$\eta_\gamma = \beta T^3, \quad (2.19)$$

onde

$$\beta = \frac{2.404k^3}{\pi^2 \hbar^3 c^3} = 2.03 \times 10^7 \text{ m}^{-3} \text{ K}^{-3}, \quad (2.20)$$

$$\eta_\gamma = 4.11 \times 10^8 \text{ m}^{-3}. \quad (2.21)$$

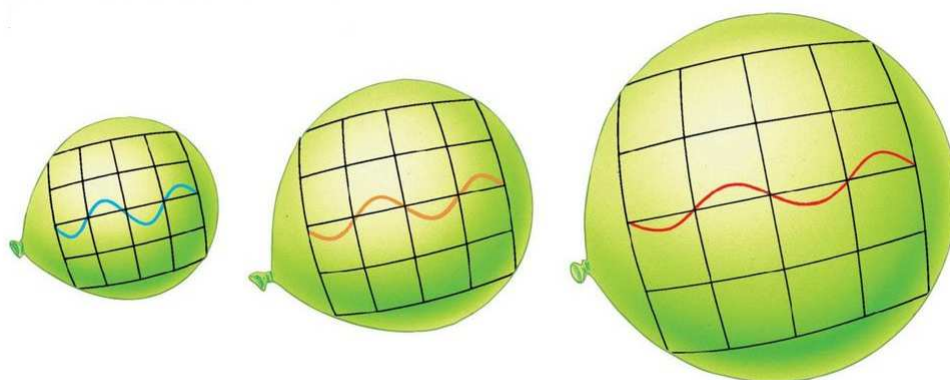
como já calculamos a densidade de energia e a densidade de fótons, é fácil perceber que estes fótons tem baixa energia, em média,

$$E_{media} = 6.34 \times 10^{-4} \text{ eV}. \quad (2.22)$$

Se relembarmos a discussão da seção anterior pode-se perceber que na parte final, quando se calcula a idade do universo, algumas considerações são feitas, a mais importante é que H_0 se mantém constante mas quando Hubble mediu H_0 nada indicava que o universo passou por uma fase na qual toda a matéria estava concentrada em uma região muito pequena. Na verdade, a CMB mostra mais do que isso, ela indica que em alguma época todo o universo era muito menor, logo denso e quente. Já os modelos que consideram o universo estacionário têm muita dificuldade de explicar uma radiação isotrópica na

forma de um corpo negro. Analisando a Lei de Hubble através da CMB pode-se perceber que as galáxias não estão simplesmente se movendo para longe umas das outras mas sim todo o espaço está se expandindo. Ao atingir um estado no qual o universo tenha uma temperatura muito maior que 10^4 K, toda a matéria bariônica estaria ionizada e, em tais condições o universo estaria completamente opaco para ondas eletromagnéticas. Pois com toda a matéria bariônica ionizada a quantidade de elétrons livres faria com que os fótons tivessem um livre caminho médio muito pequeno pois estes realizariam muitas interações para se mover a uma distância curta, o que tornaria a propagação da luz praticamente impossível. Porém quando o universo esfriou e alcançou temperaturas da ordem de 3000 K a matéria se recombinau e então os fótons estavam livres para se dispersarem pelo universo, logo a CMB ser isotrópica significa que o universo também o é, pelo menos em grandes escalas.

O que foi dito levanta uma questão, como os fótons foram liberados quando o universo tinha uma temperatura em torno de 3000 K, porém ao medirmos a CMB hoje em dia observamos que ela corresponde a um corpo negro de temperatura dada pela equação 2.17. Isso ocorre devido a expansão do universo, os fótons na época da recombinação tinham comprimento de onda de acordo com a temperatura da época, porém conforme o universo se expandiu o comprimento de onda destes fótons também foi "esticado" tornando eles, desta forma, menos energéticos e atualmente eles são equivalentes à radiação de um corpo negro de temperatura de 2.725 K e não de temperatura em torno de 3000 K. Esta explicação pode ser entendida melhor observando a figura 2.7



© 2017 Pearson Education, Inc.

FIGURA 2.7: representação do efeito da expansão do universo sobre o comprimento de onda de um fóton [11].

Como pode ser observado na figura 2.7, conforme o universo se expande o comprimento de onda de um fóton também sofre os efeitos da expansão, desta forma o comprimento de onda de um fóton emitido na época da recombinação não permanece o mesmo até os dias de hoje, o que irá interferir diretamente na energia dos fótons da CMB.

Antes da época da recombinação, quando toda a matéria bariônica estava completamente ionizada, o universo era composto basicamente de um plasma de fótons e bárions, fortemente acoplados. Neste cenário, pequenas perturbações na densidade dos bárions faziam que esses oscilassem, devido à competição entre a atração gravitacional e a pressão de radiação dos fótons, causando assim as oscilações acústicas de bárions. Essas perturbações podiam se propagar pelo meio com ondas sonoras, porém, conforme o universo foi se esfriando, a matéria bariônica se combinou e os fótons ficaram livres para seguir seu caminho deixando assim a matéria bariônica concentrada nas frentes de onda, cuja velocidade de propagação foi a zero após o desacoplamento dos fótons. Estas concentrações de matéria deram origem as estruturas que podem ser observadas hoje em dia!

Capítulo 3

Conceitos de relatividade

3.1 Princípio da equivalência

Para que possamos entender corretamente a evolução do universo deveríamos utilizar a rigor a relatividade geral, porém se utilizarmos a física Newtoniana clássica chega-se em muitos casos nos resultados corretos, além de facilitar os cálculos. No entanto para que possamos interpretar corretamente os resultados obtidos pela física clássica deveremos recorrer algumas vezes a relatividade geral.

Na gravitação clássica um corpo com uma determinada massa gera um campo gravitacional. Outro ponto importante da gravitação de Newton que diverge da relatividade é que para Newton um corpo com uma determinada massa cria um campo gravitacional em todos os pontos do espaço instantaneamente. A ideia de que o campo se propaga pelo espaço com uma certa velocidade foi introduzida inicialmente no eletromagnetismo. Na relatividade geral, uma certa distribuição de massa altera a geometria do espaço no qual ela se encontra, além disso Einstein também introduz o conceito de propagação do campo similar ao do eletromagnetismo. Conceitualmente, os dois modelos são muito diferentes. Como iremos utilizar a interpretação relativística algumas vezes, é necessário entender esses conceitos de forma clara, começando pelo princípio da equivalência.

A relatividade geral de Einstein está enraizada no princípio de equivalência das massas gravitacional (que aparece na lei da gravitação universal de Newton) e inercial (que aparece na segunda lei de Newton). Pelo princípio da equivalência, uma pessoa dentro de uma espaçonave sem visão do exterior não é capaz de diferenciar se esta parada no campo gravitacional da terra suposto uniforme, ou se está se movendo com uma aceleração constante de $9,8 \text{ m/s}^2$.

Se imaginarmos agora uma caixa viajando com certa aceleração para cima com um dispositivo capaz de enviar um feixe de luz acoplado a uma de suas paredes, quando o dispositivo for acionado o feixe de luz emitido não irá atingir o ponto diretamente oposto ao dispositivo, mais sim um ponto um pouco abaixo, ou seja, em um referencial acelerado o feixe de luz parece ser curvado pela aceleração aplicada na caixa. Caso o princípio de equivalência possa ser aplicado também neste exemplo, um feixe de luz também deve ser curvado da mesma forma se atravessar um campo gravitacional que seja equivalente à aceleração sofrida pela caixa, supondo \vec{g} e \vec{a} uniformes dentro da caixa. A figura 3.1 exemplifica bem o experimento mental descrito. Classicamente o princípio da equivalência pode-se ser exemplificado pela equação abaixo, onde m_i é a massa inercial, m_g a massa gravitacional, a a aceleração, M a massa do objeto que cria o campo gravitacional e G a constante da gravitação de Newton

$$m_i a = \frac{GM}{r^2} m_g \Rightarrow a = \frac{GM}{r^2} \left(\frac{m_g}{m_i} \right). \quad (3.1)$$

Onde a fração $\left(\frac{m_g}{m_i} \right)$ iria variar de objeto para objeto, porém o que se percebe através das experiências que vêm ocorrendo desde a época de Galileu é que essas duas massas são iguais para todos os objetos.

Figura 1

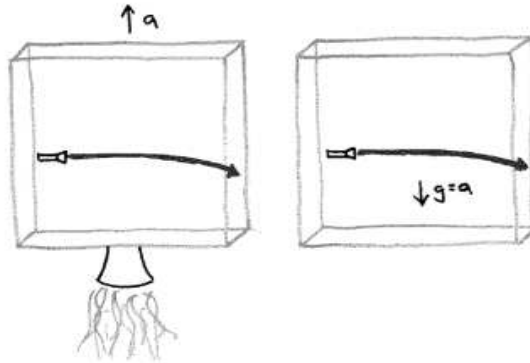


FIGURA 3.1: Ilustração do princípio da equivalência. [8, página 37]

A rigor, os efeitos de distorção da luz em um campo gravitacional uniforme são equivalentes ao de um referencial com aceleração uniforme. No caso geral, só se pode dizer que este princípio é válido localmente, ou seja, quando a variação do campo for desprezível em um determinado volume. Deve-se salientar que na época de Newton não sabiam com certeza se a luz era formada por partículas ou ondas e, neste contexto, Newton era um dos líderes da teoria corpuscular da luz de acordo com a qual foi possível prever a curvatura da luz pelo campo gravitacional. Na verdade um feixe de luz sempre atravessa a trajetória mais rápida de um ponto a outro, na geometria plana e sem haver

alteração do meio essa trajetória é uma reta porém, dependendo do campo gravitacional essa geometria pode ser diferente, de forma geral pode-se dizer que um feixe de luz no vácuo sempre percorre um caminho de geodésica nula (trajetória sujeita apenas à gravidade, sem qualquer outra força atuando) independente da geometria espacial da região. Fazendo desta forma com que ocorra efeitos com o feixe de luz semelhantes aos efeitos que ocorrem quando um feixe atravessa uma lente, podendo acontecer tanto a convergência do feixe se ele passar por uma região com uma densidade maior do que a vizinhança, como a divergência, se o feixe passar por uma região que possua uma densidade menor do que a vizinhança, esses fenômenos são conhecidos como lenteamento gravitacional.

Os efeitos mencionados anteriormente ocorrem devido à curvatura do espaço, sendo assim é extremamente importante para a compreensão da relatividade geral o estudo da geometria

3.2 Curvatura

Geralmente se diz que a distância entre dois pontos (infinitesimalmente próximos) em uma superfície é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (3.2)$$

Esta equação é sempre verdade quando o espaço onde estes dois pontos se encontram possui uma geometria euclidiana. Na verdade, escrever a equação acima é análogo a dizer que a geometria deste espaço em particular é euclidiana. Na geometria euclidiana a linha reta é uma geodésica nula, ou seja

$$ds = 0.$$

Independente da geometria usada, o triângulo sempre será a conexão de três pontos por geodésicas nulas. Na geometria euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual 180° , desta forma podemos escrever

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad (3.3)$$

onde α , β e γ são os ângulos internos do triângulo. O nosso caso de interesse é o estudo da geometria em 4 dimensões, onde 3 são espaciais e 1 temporal, no entanto, vamos primeiro estudar os casos bidimensionais que são facilmente visualizados e em seguida poderemos aplicar esses resultados para espaços de maiores dimensões.

Da mesma forma que a reta é a geodésica nula na geometria euclidiana, pode-se imaginar que na superfície de uma esfera um triângulo seria a figura geométrica formada por três geodésicas nulas como mostrado na figura 3.2. Pode-se perceber que no caso de

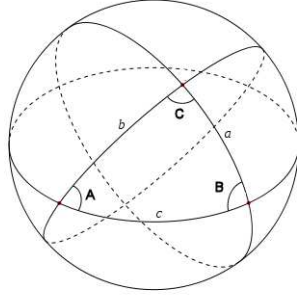


FIGURA 3.2: Triângulo formado em um espaço esférico [12]

uma espaço com curvatura esférica a geodésica nula é o grande círculo, ou seja, qualquer círculo cujo centro seja o centro da esfera. Neste caso, a soma dos ângulos internos de um triângulo é

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/R^2, \quad (3.4)$$

onde A é a área do triângulo e R é o raio da esfera. Todo espaço onde o somatório dos ângulos internos de um triângulo for maior que 180° é tido como espaço com curvatura positiva, quando este somatório for igual a 180° o espaço é plano e quando o somatório for menor que 180° dizemos que o espaço possui curvatura negativa. O caso da geometria de uma esfera é um espaço com curvatura positiva e constante em 2 dimensões, para definirmos coordenadas neste caso devemos pegar dois pontos diametralmente opostos, um deles será chamado de “polo norte” e outro de “polo sul”, em seguida, devemos passar um grande círculo por esses dois pontos, este círculo é chamado de meridiano principal. Neste sistema de coordenadas a posição de um ponto é dada pelas coordenadas (r, θ) onde r é a distância angular entre o polo norte e o ponto e θ é o ângulo azimutal entre o meridiano principal e este ponto.

Agora que já definimos as coordenadas, temos que a distância entre dois pontos é dada por

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2. \quad (3.5)$$

Como no caso do espaço com curvatura positiva e constante temos uma esfera, é fácil perceber que neste caso a área do espaço é finita ($4\pi R^2$) e, em consequência disso, existe uma distância máxima entre dois pontos, que é πR , ao contrario do caso plano onde as distâncias podem ser infinitas.

O caso de curvatura negativa e constante é o mais complexo de ser visualizado. Um espaço com esta curvatura é chamado de espaço hiperbólico. A figura 3.3 tenta ilustrar como seria um espaço com este tipo de curvatura, porém, a imagem não é completamente correta pois, ao contrário da esfera, que representa todo o espaço com curvatura positiva, a “sela de cavalo” representa apenas um ponto do espaço com curvatura negativa. Ou seja, um observador dentro de um espaço com curvatura negativa constante perceberia a cada momento como se estivesse na parte superior da sela.

Isso ocorre porque é impossível representar o espaço hiperbólico de duas dimensões em um espaço euclidiano tridimensional. Neste caso também podemos definir o triângulo

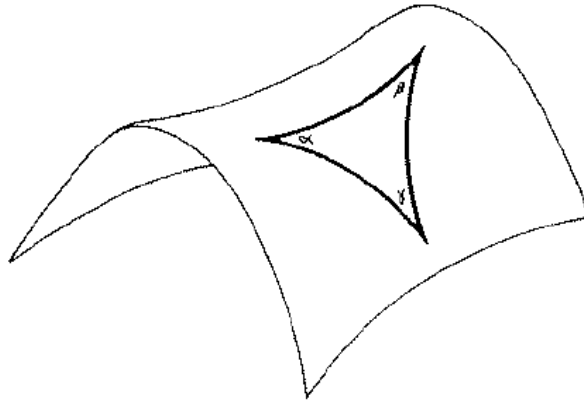


FIGURA 3.3: Ilustração de um espaço hiperbólico[8, página 42].

como sendo 3 pontos ligados por geodésicas e, como foi dito antes, temos que o somatório dos ângulos internos é menor que 180° ,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - A/R^2. \quad (3.6)$$

Para este tipo de curvatura podemos estabelecer um sistema de coordenadas polares escolhendo um ponto qualquer como polo e uma geodésica qualquer como meridiano principal. Desta forma, temos novamente as coordenadas (r, θ) onde r é a distância entre o polo e o ponto, e θ o ângulo azimutal do meridiano principal até este ponto, sendo assim temos

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2. \quad (3.7)$$

É importante salientar que as equações 3.2 , 3.5 e 3.7 são válidas apenas para o caso bidimensional. No caso tridimensional a distância entre dois pontos no espaço plano é escrita como

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.8)$$

em coordenadas cartesianas, ou em coordenadas esféricas tem-se

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \quad (3.9)$$

onde φ é o angulo zenital e θ o angulo longitudinal. Para curvatura positiva e negativa a distância entre dois pontos pode ser escrita, respectivamente, como

$$ds^2 = dr^2 + \text{sen}^2(r/R)[d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2], \quad (3.10)$$

$$ds^2 = dr^2 + \text{senh}^2(r/R)[d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2]. \quad (3.11)$$

As equações 3.9, 3.10 e 3.11 podem ser escritas como

$$ds^2 = dr^2 + S(r)^2 d\Omega^2, \quad (3.12)$$

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2, \quad (3.13)$$

onde $d\Omega$ é o angulo sólido,

$$S(r) = \begin{cases} R\text{sen}(r/R) & (k = 1) \\ r & (k = 0) \\ R\text{senh}(r/R) & (k = -1). \end{cases} \quad (3.14)$$

e k é chamada constante de curvatura e é positiva, negativa ou nula para as respectivas curvaturas esférica, hiperbólica ou plana e R é o raio de curvatura do espaço caso esta seja curvo. Sendo assim, para um universo isotrópico e homogêneo existem apenas três tipos de curvatura possíveis. É claro que as hipóteses de isotropia e homogeneidade do universo são válidas apenas em grandes escalas, sendo assim localmente a curvatura é uma função da posição.

Se olharmos para o limite $r \ll R$, $S_k \approx r$ para qualquer valor de k . Sendo assim se olharmos em escalas pequenas (em relação a R), a curvatura do universo sempre parecerá plana. A equação 3.12 foi escrita anteriormente em função das coordenadas (r, θ, φ) , entretanto é claro que este não é o único sistema de coordenadas possível para representar ds . Realizando a mudança de variável $x = S_k(r)$, podemos reescrever 3.12 da forma

$$ds_3^2 = \frac{dx^2}{1 - kx^2/R^2} + x^2 d\Omega^2. \quad (3.15)$$

Adotarei a partir de agora a notação ds_n , onde o subíndice n se refere ao numero de dimensões do espaço.

3.3 Métrica FLRW e Distância Própria.

Anteriormente se obteve a descrição geométrica de um universo isotrópico e homogêneo em 3 dimensões, porém a relatividade especial mostra que espaço e o tempo juntos constituem um espaço tempo quadridimensional, e a separação entre dois eventos, que é dada pela métrica de Minkowski.

$$ds_4^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + x^2 d\Omega^2, \quad (3.16)$$

ds_4 é a distancia entre dois eventos que ocorreram um no tempo t e outro no tempo $t + dt$ mais uma distância espacial. No caso da relatividade especial a geometria sempre é plana porém, como foi visto anteriormente, para um universo isotrópico e homogêneo tem-se 3 tipos de geometria diferente. Sendo assim aplicando 3.15 em 3.16 se obtém

$$ds_4^2 = -c^2 dt^2 + \frac{dx^2}{1 - kx^2/R^2} + x^2 d\Omega^2. \quad (3.17)$$

A equação 3.17 é válida para o caso de um universo estático. Vamos pensar agora que estamos observando uma galáxia muito distante, imagine agora que a distância entre a galáxia e o observador está aumentando com o tempo. Porém, o aumento da distância entre a galáxia e o observador no nosso exemplo não é devido à velocidade do observador e/ou da galáxia, mas sim o próprio espaço entre eles que se expande. A distância entre o observador no centro do sistema de coordenadas e a galáxia em um determinado tempo t será dada por

$$ds_3^2 = a(t)^2 \left[\frac{dx^2}{1 - kx^2/R^2} + x^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.18)$$

onde $a(t)$ é adimensional. Sendo assim pode-se escrever que a distância entre dois eventos no espaço quadridimensional para um universo dinâmico

$$ds_4^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dx^2}{1 - kx^2/R^2} + x^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.19)$$

que conhecida como a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Voltando ao exemplo anterior, no caso de um observador no centro do sistema de coordenadas (x, θ, φ) que observa uma galáxia muito distante, no caso de um universo em expansão, a distância entre ele e a galáxia a cada instante é dada por 3.18, se considerarmos que se está olhando para um objeto com coordenadas fixas, tanto espaciais quanto temporal, se obtém

$$d_p = a(t) \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - kx'^2/R^2}}, \quad (3.20)$$

onde d_p é a distância própria, que é a distância entre dois pontos quando se fixa um determinado tempo t , a equação 3.20 pode ser resolvida analiticamente para os três

valores de k

$$d_p = a(t) \begin{cases} \sin^{-1}(r/R) & (k = 1) \\ r & (k = 0) \\ \sinh^{-1}(r/R) & (k = -1). \end{cases} \quad (3.21)$$

Desta forma podemos escrever

$$d_p = a(t)\chi,$$

onde

$$\chi = \begin{cases} \sin^{-1}(r/R) & (k = 1) \\ r & (k = 0) \\ \sinh^{-1}(r/R) & (k = -1). \end{cases} \quad (3.22)$$

é a distância comóvel, que é independente do tempo. Usando a notação de ponto sobre a grandeza para representar derivadas desta em função do tempo, temos

$$\begin{aligned} \dot{d}_p &= \dot{a}\chi, \\ \dot{d}_p &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}a(t)\chi, \\ \dot{d}_p &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d_p, \\ v_p &= H(t)d_p, \end{aligned} \quad (3.23)$$

A aumento linear da velocidade com a distancia mostrada na equação 3.23 leva a um limite no qual se pode observar eventos que é conhecido como distancia do horizonte. que é a distancia na qual

$$v_p > c. \quad (3.24)$$

Definindo t_0 como o tempo atual, temos

$$H(t_0) = H_0$$

Sendo assim vimos que aparece de forma natural a lei de Hubble quando consideramos um universo homogêneo, isotrópico e ao mesmo tempo em expansão. É claro que a lei de Hubble que foi descoberta inicialmente na forma

$$zc = H_0r, \quad (3.25)$$

é valida apenas para pequenas distâncias. No caso geral devemos usar a equação 3.23.

Capítulo 4

Equação de Friedmann

Agora que temos uma noção básica sobre alguns conceitos de Relatividade Geral podemos nos aprofundar mais na parte matemática e a equação de Friedmann é a ferramenta apropriada para isso, pois nela é possível considerar além da curvatura do espaço também os efeitos da relatividade geral sobre esta curvatura, assim como a expansão do universo. Embora boa parte matemática da relatividade geral já estivesse pronta quando esta foi publicada por Einstein, como curvatura por exemplo, toda a parte conceitual é revolucionária e Friedmann usou todas as ferramentas desta para tentar descrever o universo, porém não irei deduzir a equação de Friedmann a partir das equações de Einstein. Mas antes de seguirmos para a Relatividade Geral é interessante aplicar a gravitação de Newton e iremos perceber que mesmo usando apenas a gravitação newtoniana, teremos resultados interessantes.

4.1 Aplicação da gravitação na expansão do universo

Para que possamos aplicar a gravitação na expansão do universo devemos ter em mente que, apesar de obtermos alguns resultados interessantes, esta é uma simplificação enorme do sistema. Imaginemos que o universo é uma esfera expandindo ou contraindo isotropicamente, como na figura 4.1, vamos colocar uma partícula teste cuja a massa será muito menor que a da esfera, sendo assim a força gravitacional exercida será de

$$F = -\frac{GM_s m}{R_s(t)^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{d^2 R_s(t)}{dt^2} m, \quad (4.1)$$

onde R_s é o raio da esfera, M_s massa da esfera e m a massa teste. Rearranjando esta equação temos

$$\frac{d^2 R_s(t)}{dt^2} = -\frac{GM_s}{R_s(t)^2}. \quad (4.2)$$

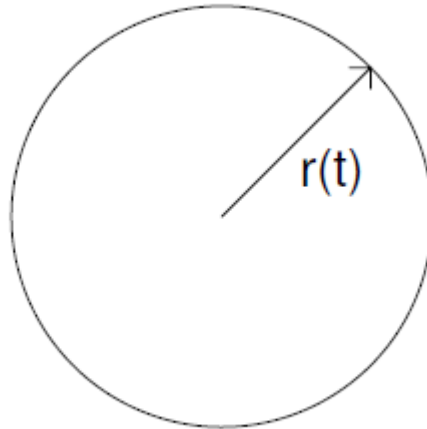


FIGURA 4.1: representação de uma esfera cujo raio varia com o tempo, logo está expandindo ou contraindo isotropicamente [8, página 59].

Agora se multiplicarmos por $\frac{dR_s(t)}{dt}$ os dois lados da equação 4.2 e integramos iremos obter

$$\int \frac{dR_s(t)}{dt} \frac{d^2 R_s(t)}{dt^2} = - \int \frac{GM_s}{R_s^2(t)} \frac{dR_s(t)}{dt}, \quad (4.3)$$

como resultado temos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR_s(t)}{dt} \right)^2 = \frac{GM_s}{R_s(t)} + U. \quad (4.4)$$

onde U é a constante de integração, ao isolarmos U nossa equação fica dividida em duas partes. A primeira é a energia cinética por unidade de massa

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\frac{dR_s(t)}{dt} \right)^2, \quad (4.5)$$

e a segunda é a energia potencial gravitacional por unidade de massa

$$E_p = - \frac{GM_s}{R_s(t)}. \quad (4.6)$$

Agora que temos uma equação para trabalhar podemos escrevê-la em termos de observáveis cosmológicos que são mais fáceis de medir, para isso vamos começar por M_s que, apesar de ser uma constante, pode ser escrita em função de variáveis no tempo, já que conforme o volume aumenta a densidade diminui de forma que a massa permanece constante.

$$M_s = \frac{4\pi}{3} \rho(t) R_s(t)^3. \quad (4.7)$$

Como estamos considerando um universo em expansão ou contração isotrópica, $R_s(t)$ pode ser escrito em termos das coordenadas comóveis

$$R_s(t) = a(t)r_s, \quad (4.8)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, r_s é o raio comóvel da esfera e $\rho(t)$ é a densidade de matéria do universo. Agora podemos escrever a equação 4.4 substituindo a M_s por 4.7 e $R_s(t)$ por 4.8, assim teremos

$$\frac{1}{2}r_s^2\dot{a}(t)^2 = \frac{4\pi}{3}Gr_s^2\rho(t)a(t)^2 + U. \quad (4.9)$$

Dividindo a equação acima por $r_s^2a(t)^2/2$ teremos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho(t) + \frac{2U}{r_s^2} \frac{1}{a(t)^2}. \quad (4.10)$$

Se levarmos em conta as observações até hoje, tudo indica que $a(t) > 0$ sendo assim vamos nos focar na resolução da equação 4.10 para este caso, e ao se fazer essa análise obtemos três soluções possíveis para a equação. A primeira considera U sempre positivo, sendo assim \dot{a} será sempre positivo pois todos os outros números e variáveis da equação também o são, o segundo caso ocorre quando $U < 0$ nesta situação \dot{a} inicia maior que zero (universo em expansão) porém, com o passar do tempo, o termo negativo da equação 4.10 se iguala ao primeiro termo e a expansão pára, $\dot{a} = 0$, isso ocorre quando o fator de escala atinge um valor crítico é facilmente obtido da equação 4.10 e é

$$a_{crit} = -\frac{GM_s}{Ur_s}, \quad (4.11)$$

Quando este ponto crítico é alcançado a esfera começa a se contrair. O terceiro caso ocorre quando $U = 0$ pela equação 4.10 podemos perceber que neste caso se tem

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \propto \frac{1}{a^3}\dot{a} \propto \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.12)$$

Logo, quando o tempo tende ao infinito, $\dot{a} = 0$.

Ao analisarmos esses três exemplos pode-se perceber que a solução para um universo esférico com uma expansão isotrópica é semelhante ao lançamento de um projétil na superfície da Terra considerando um campo gravitacional uniforme, em ambos os casos existem três possibilidades. Na primeira, o projétil tem velocidade maior ou igual que a de escape e se afasta indefinidamente ($U > 0$), na segunda o projétil tem velocidade menor do que a de escape e cai após alcançar uma altura máxima ($U < 0$) e na terceira o projétil é lançado com velocidade igual a de escape sendo assim sua velocidade tende a zero quando o tempo se aproxima do infinito. Como foi dito no início desta seção, a

gravitação de Newton traz resultados interessantes, porém para tal ela se permite graves erros conceituais. Por exemplo quando começamos a construir as equações partimos de um universo esférico com um volume finito, é importante salientar que um universo como este jamais poderia respeitar o princípio cosmológico da isotropia e homogeneidade, do qual deriva a equação de Friedmann pois, nesse caso, há isotropia apenas com respeito ao centro da esfera e, portanto, não há homogeneidade.

4.2 Aplicação da Relatividade Geral

Agora que vimos não ser possível descrever o universo de forma correta a partir da gravitação de Newton vamos analisar a equação de Friedmann já incluindo a relatividade geral:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)}. \quad (4.13)$$

Ao analisar a equação 4.13 pode-se observar que agora foi acrescentado o fator da curvatura o qual já foi visto em capítulos anteriores, o que é de se esperar, pois para a consideração correta dos efeitos relativísticos a curvatura é imprescindível. Outro fator importante que foi alterado foi a densidade de matéria a qual foi alterada para densidade de energia, como Einstein mostrou, a matéria está intimamente ligada à energia, sendo assim, para considerar os efeitos da curvatura do espaço devemos considerar a densidade de energia total e para isso usamos

$$E = (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

onde p é o momento e c a velocidade da luz. Para se aplicar corretamente a equação 4.14 deve-se considerar não somente as partículas com massa mas os fótons também pois estes, da mesma forma que as partículas com massa, não só respondem como contribuem para a curvatura do universo também. Vamos olhar inicialmente para as partículas com massa, como nossa intenção é trabalhar em grande escala, podemos considerar na equação 4.14 que a velocidade peculiar das partículas é $v \ll c$ logo p pode ser escrito $p \approx mv$ então pode-se reescrever a 4.14 como

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right),$$

por fim se tem

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.15)$$

Desta forma, considerando apenas as partículas com massa, tem-se que a densidade de energia do universo é ρc^2 mais uma correção devido a energia cinética destas partículas. Agora que já obtivemos a densidade de energia referente as partículas com massa também devemos considerar a parte referente aos fótons. Para tal, basta voltarmos à equação 4.14

$$E = (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{\frac{1}{2}} = pc = hf \quad (4.16)$$

Quanto à alteração no segundo termo da equação 4.10 ao se trocar $\frac{2U}{r_s^2}$ por $\frac{\kappa c^2}{R_0^2}$ é feita para que se possa englobar a curvatura na equação, e de forma similar a equação clássica ela abre três possibilidades de solução, $\kappa = +1$ que equivale a curvatura positiva ou seja $U < 0$, $\kappa = -1$ que equivale a $U > 0$ e $\kappa = 0$ que é o caso do universo plano. É preciso salientar que eu não derivei a equação relativística de Friedmann. Para que possamos aplicar a equação de Friedmann a cosmologia devemos colocá-la em função de variáveis que são mais fáceis de medir, como foi visto anteriormente na equação 2.15 podemos reescrever a equação 4.13 da seguinte forma

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)}. \quad (4.17)$$

Neste caso estamos considerando o parâmetro de Hubble como uma variável do tempo o que é correto se formos considerar a versão mais geral, porém se formos pensar no tempo atual podemos substituir $H(t)$ por H_0 estaremos considerando a equação de Friedmann para o tempo. Como vimos anteriormente, o valor atual de $H(t)$ é apresentado na equação 2.5, quanto a $a(t)$ pode-se definir que no tempo atual temos que $a_0 = 1$ ao se fazer isso agora somos capazes de reescrever 4.13 como

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}. \quad (4.18)$$

Na equação anterior temos H_0 de duas incógnitas, uma é a densidade de energia do universo nos dias atuais (ε_0) e a outra é κ/R_0^2 , que nos dá uma indicação da curvatura do universo. Agora podemos resolver alguns casos especiais da equação 4.18 que nos ajudarão a entender os limites desta equação. Primeiro vamos ver o caso do universo com curvatura negativa, porém com uma densidade de energia que se aproxima de zero, sendo assim na equação 4.18 se tem $\kappa = -1$ e $\varepsilon_0 = 0$ logo

$$H_0^2 = \frac{c^2}{R_0^2},$$

$$R_0 = \frac{c}{H_0}. \quad (4.19)$$

O resultado obtido é valido para um universo com curvatura negativa e completamente vazio! É claro que este tipo de resultado não representa um caso, real porém ele é interessante para mostrar que o raio de curvatura tem um valor mínimo.

Vamos agora considerar que o universo tenha curvatura igual a zero, desta forma podemos escrever a equação 4.18 da forma

$$H_0 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0. \quad (4.20)$$

Neste caso o que iremos obter será a densidade de energia crítica, ou seja se $\varepsilon(t) > \varepsilon_c$ a curvatura do universo será positiva, porém se $\varepsilon(t) < \varepsilon_c$ então a curvatura do universo será negativa, resolvendo a equação 4.20 temos

$$\varepsilon_{c,0} \equiv \frac{3c^2}{8\pi G}H_0^2, \quad (4.21)$$

logo o valor numérico para a densidade crítica de energia na época atual é de

$$\varepsilon_{c,0} = (5.2 \pm 1.0) \times 10^3 \text{Mev.m}^{-3}. \quad (4.22)$$

É não é tão comum se ver o termo densidade de energia para o publico em geral, sendo assim se reescrevermos em termos de densidade de massa esse numero se torne algo mais palpável. Se usarmos a equação 4.15, desconsiderando a correção devido a energia cinética, temos que a densidade de massa para esse caso será

$$\rho = \frac{\varepsilon}{c^2} = (9,2 \pm 1,8) \times 10^{-27} \text{kg.m}^{-3}. \quad (4.23)$$

O que não é muito se comparado à densidade do disco da Via Láctea é $\rho_{lac} \approx 7 \times 10^{-21} \text{kg.m}^{-3}$ mas está bem próximo da densidade em um raio de 100Mpc ou mais a partir da terra. O resultado obtido acima é referente à densidade de energia crítica do universo nos dias atuais mas também podemos escrevê-la como uma função do tempo da forma

$$\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G}H(t)^2. \quad (4.24)$$

Com este resultado pode-se reescrever a equação 4.13 de outra forma, se dividirmos esta equação por $\varepsilon_c(t)$ vamos obter

$$1 = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}, \quad (4.25)$$

onde aparece o termo $\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}$ o qual é claramente adimensional. Ao analisarmos ele percebemos que ele é extremamente útil para se estudar a curvatura do universo pois como

foi mostrado antes a densidade de energia crítica é o limiar entre curvatura positiva e negativa. Este termo é chamado de parâmetro de densidade e é definido como

$$\Omega(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}. \quad (4.26)$$

Sendo assim pode-se reescrever a equação acima em função do parâmetro de densidade

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}. \quad (4.27)$$

Se formos pensar novamente em termos do momento atual do universo a equação acima fica da seguinte forma

$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2}. \quad (4.28)$$

Podemos observar por esta equação que quando $\Omega(t) < 1$ então a curvatura do universo será negativa e se $\Omega > 1$ então a curvatura do universo vai ser positiva. Isso se dá pois no lado da equação que está o fator κ , que define a curvatura, todas as constantes são positivas, o que demonstra novamente a relação simbiótica entre curvatura e densidade de energia. Sendo assim, para facilitar a notação, pode-se definir o parâmetro de densidade de curvatura do Universo como

$$1 - \Omega_0 = \Omega_{\kappa,0}. \quad (4.29)$$

logo

$$\Omega_{\kappa,0} = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (4.30)$$

Capítulo 5

Modelo Padrão

Como foi visto no capítulo anterior, a equação de Friedmann é extremamente importante para se entender a evolução do universo como um todo, porém ela sozinha não pode nos dar todas as respostas, pois na sua forma geral ela possui muitas variáveis do tempo ($\varepsilon(t)$, $H(t)$, $a(t)$). Sendo assim, é impossível resolvê-la sem informação adicional, por isso o Modelo Padrão usado para descrever o universo leva em conta não apenas a relatividade geral como também outras ferramentas físicas e matemáticas, as quais eu irei mostrar neste capítulo.

5.1 Primeira Lei da termodinâmica

Para descrever a evolução do universo usamos a equação de Friedmann. Para darmos o próximo passo iremos usar uma outra vertente do conceito de conservação da energia que é a *Primeira Lei da Termodinâmica*.

$$dQ = dE + PdV, \tag{5.1}$$

onde, nesse caso, supomos um processo reversível infinitesimal. Nesta equação dQ representa a troca de calor em uma região, dE a variação da energia interna nesta região, P a pressão e dV a variação do volume. Considerando o princípio cosmológico, pode-se assumir o universo como homogêneo, sendo assim, se considerarmos uma expansão homogênea podemos aproximar o processo de expansão do universo como sendo adiabático o que quer dizer que dentro de uma dada região com volume dV não haverá troca de calor com as regiões vizinhas. Considerando que o processo ocorre em um intervalo de tempo dt podemos reescrever a equação 5.1 como

$$0 = \dot{E} + P\dot{V}. \tag{5.2}$$

Como vimos anteriormente, no caso de uma expansão isotrópica temos que o volume em coordenadas comoveis pode ser escrito como

$$V(t) = \frac{3}{4}\pi r_s^3 a(t)^3. \quad (5.3)$$

Derivando o volume em função do tempo teremos

$$\dot{V}(t) = \frac{3}{4}\pi r_s^3 3a(t)^2 = V \left(3\frac{\dot{a}}{a} \right). \quad (5.4)$$

Pode-se usar a energia interna como sendo a densidade de energia $\varepsilon(t)$ multiplicada pelo volume do universo, sendo assim tem-se

$$E(t) = V(t)\varepsilon(t). \quad (5.5)$$

Logo, pela regra da cadeia,

$$\dot{E}(t) = \dot{V}(t)\varepsilon(t) + \dot{\varepsilon}(t)V(t)$$

,

$$\dot{E}(t) = V(t) \left(\dot{\varepsilon}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\varepsilon(t) \right). \quad (5.6)$$

Agora podemos reescrever a equação 5.2, usando as equações 5.6 e 5.4, como

$$V \left(\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\varepsilon + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}P \right) = 0$$

,

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\varepsilon + P) = 0, \quad (5.7)$$

que é conhecida como equação da continuidade ou de conservação.

Podemos combinar a equação 5.7 com a equação de Friedmann que obtivemos anteriormente

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)}$$

. Se multiplicarmos a equação anterior por a^2 a equação pode ser reescrita como

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t)a^2 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}. \quad (5.8)$$

Se derivarmos esta equação com relação ao tempo teremos

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\dot{\varepsilon}a^2 + 2\varepsilon a\dot{a}), \quad (5.9)$$

dividindo ambos os lados por $2\dot{a}a$ temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2} \left(\dot{\epsilon} \frac{a}{\dot{a}} + 2\epsilon \right). \quad (5.10)$$

A partir da equação 5.7 pode-se escrever

$$\dot{\epsilon} \frac{a}{\dot{a}} = -3(\epsilon + P). \quad (5.11)$$

Por fim usando a equação acima pode-se escrever

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\epsilon + 3P). \quad (5.12)$$

Até o momento, realizamos muitos cálculos sendo assim chegou o momento de analisarmos conceitualmente os resultados que foram obtidos até o momento. A primeira equação que foi derivada neste capítulo foi a equação 5.7. Ao observarmos esta equação pode-se perceber que ela relaciona a densidade de energia do universo com a pressão deste. Já a Equação 5.12 correlaciona a derivada segunda do fator de escala com a densidade de energia e a pressão do universo sendo assim ela é chamada de equação de aceleração. A partir destas duas equações podemos tentar solucionar o caso de um universo que esteja se expandindo aceleradamente, para tal é necessário encontrar um regime no qual tanto \dot{a} quanto \ddot{a} serão positivos. Se analisarmos a equação 5.7 temos que

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{\epsilon}}{3(\epsilon + P)}. \quad (5.13)$$

Como estamos considerando o universo se expandindo de forma acelerada, $\dot{\epsilon}$ será negativo, sendo assim para que $\frac{\dot{a}}{a} > 0$ logo $P > -\epsilon$. Como no nosso caso além de querermos que o universo esteja se expandindo também queremos que esta expansão seja acelerada, a equação 5.12 deve ter como solução $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$ sendo assim $P < -\frac{\epsilon}{3}$. Reunindo estas duas condições temos por fim que, para haver uma expansão do universo de forma acelerada, deve existir uma pressão negativa cujo valor seja

$$-\frac{\epsilon}{3} > P > -\epsilon. \quad (5.14)$$

Para estes cálculos foi considerado que $\epsilon > 0$ em todo o tempo o que faz sentido se não estivermos falando de um universo vazio, porém o que chama a atenção nestes resultados é que para observarmos o universo se expandir aceleradamente é necessário haver uma pressão negativa. Claro na física uma pressão negativa costuma ocorrer em alguns casos como quando se puxa o êmbolo de uma seringa ou quando de estica uma borracha, porém quando se fala do universo como um todo essas questões são mais complicadas. Pois nesses casos citados que se há pressão negativa existe uma interferência

externa. A situação ainda piora se formos analisar as componentes conhecidas que podem gerar pressão no universo. No caso de um gás de bárions a pressão gerada é positiva devido a movimentação aleatória dessas partículas, um gás de fótons também exerce uma pressão positiva. Embora não se saiba explicar exatamente as causas desta pressão negativa sabe-se muito bem como a modelar pois como foi dito a pressão negativa não é inédita na física.

5.2 Equação de estado

Até agora temos três equações que podemos usar para descrever o universo 4.13, 5.7 e 5.12 que repetimos aqui

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)}, \\ \dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\varepsilon + P) &= 0, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P).\end{aligned}$$

Esse sistema possui três incógnitas, $a(t)$, $\varepsilon(t)$ e $P(t)$, porém das equações obtidas até agora uma delas não é independente (5.12) pois foi obtida a partir das outras duas, sendo assim precisamos de uma equação que relacione a pressão com a densidade de energia

$$P = P(\varepsilon). \quad (5.15)$$

Este tipo de equação é conhecida como equação de estado. Este tipo de equação pode se tornar muito complicada se formos pensar em gases de forma geral, porém ao tratarmos do universo como um todo esta equação simplifica muito pois, como estamos lidando geralmente com baixa densidade de gás, podemos considerar para o universo que estamos lidando com um gás diluído. Desta forma a equação de estado se torna muito mais simples, pois ela pode ser escrita de forma linear

$$P = \omega\varepsilon. \quad (5.16)$$

Vamos pensar agora no caso de um gás formado por partículas com massa e que tenham a velocidade aleatória devido a velocidade média de agitação térmica muito menor do que a velocidade da luz. No caso de o universo respeitar estas características na maior parte do espaço pode-se utilizar a lei dos gases perfeitos como equação de estado, assim tem-se

$$P = \frac{\rho}{\mu}\kappa T \quad (5.17)$$

onde μ é a massa média das partículas de gás, ρ a densidade, κ a constante de Boltzmann e T a temperatura. Como foi visto no capítulo 4 pode-se reescrever a densidade de matéria do universo como $\rho \approx \varepsilon/c^2$.

$$P \approx \frac{\kappa T}{\mu c^2} \varepsilon. \quad (5.18)$$

Porém esta equação ainda não é o que buscamos pois, como dito no início, a intenção é encontrar uma equação de estado que relacione a pressão com a densidade de energia mas até agora ainda temos a temperatura como variável também, que também depende do tempo. Para resolver isso, pode-se usar a seguinte relação da termodinâmica

$$3\kappa T = \mu \langle v^2 \rangle,$$

que decorre do teorema da equipartição de energia para um gás monoatômico, onde $\langle v^2 \rangle$ é a média do quadrado da velocidade das partículas. Isolando a temperatura temos

$$T = \frac{\mu \langle v^2 \rangle}{3\kappa}. \quad (5.19)$$

Assim, se substituirmos a equação 5.19 na 5.18 vamos obter

$$P_{no-rel} \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \varepsilon. \quad (5.20)$$

Como estamos considerando desde o início o caso não relativístico, então se tem que

$$\omega \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c} \ll 1. \quad (5.21)$$

A esmagadora maioria dos gases encontrados no nosso cotidiano são não relativísticos, se formos pensar na atmosfera, que é formada 80% por nitrogênio, temos que as moléculas deste gás se movem a temperatura ambiente a uma velocidade em torno de 500 ms^{-1} a qual é claramente muito menor do que a velocidade da luz, sendo assim, para este caso se tem $\omega \approx 10^{-12}$. Mesmo se pensarmos no contexto astronômico um gás cujas partículas se movam próximo a velocidade da luz devido ao movimento térmico é muito raro. Para um gás ionizado, enquanto a temperatura deste permanecer muito menor que $6 \times 10^9 \text{ K}$ a velocidade dos elétrons pode ser considerada como não relativística; já para os prótons a temperatura tem que se manter muito menor do que 10^{13} K . Entretanto, o universo não é formado apenas por partículas com massa, mesmo as partículas sem massa carregam energia e assim também são capazes de transferir momento como é o caso do fóton. A equação de estado para o fóton e qualquer outra partícula sem massa é dada por

$$P_{rel} = \frac{1}{3} \varepsilon_{rel}. \quad (5.22)$$

Na verdade a equação acima é válida também para gases com massa e energia suficiente para que a temperatura alcance níveis necessários para que suas partículas se movam a velocidades próximas a da luz. Dessa forma, existe um espectro de valores bem distintos que ω pode assumir que são $0 < \omega < \frac{1}{3}$ levando em conta todo o espectro entre matéria não-relativística e fótons. Imaginemos agora um gás com uma pressão P . Pequenas perturbações neste gás irão viajar a velocidade do som e, se considerarmos essas perturbações de forma adiabática neste gás com pressão P e energia ε , a velocidade do som é obtida por

$$c_s^2 = c^2 \left(\frac{dP}{d\varepsilon} \right). \quad (5.23)$$

Se considerarmos agora o operador $d/d\varepsilon$ sendo aplicado na equação 5.16 temos como resultado

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \omega,$$

logo a velocidade do som no meio seria dada por

$$c_s = \sqrt{\omega}c. \quad (5.24)$$

O que esta equação mostra é que $\omega \leq 1$, caso contrário, a velocidade de propagação do som em um meio seria maior do que a velocidade da luz. Existem alguns valores para ω que são muito interessantes, como foi visto no caso de $\omega \approx 0$ temos matéria não relativística que para simplificar iremos chamar de "matéria", porém no caso do universo ser composto por fótons ou matéria relativística temos que $\omega = 1/3$ para simplificar iremos chamar este caso de "radiação". Na seção 5.1 foi visto que para que possa haver uma expansão acelerada do universo deve haver uma pressão negativa que obedecesse a relação 5.14, ou seja $\omega < -1/3$. Ao contrario da radiação e da matéria uma componente com este tipo de ω não é conhecida sendo assim foi batizada de "Energia Escura". No modelo padrão esta componente pode ser definida simplesmente com $\omega = -1$ e $P = -\varepsilon$ e é representada geralmente pela letra grega Λ .

5.3 Constante Cosmológica

O termo "Energia Escura" surgiu no contexto da cosmologia nos anos 1990 com a descoberta de que o universo está se expandindo aceleradamente, porém a constante cosmológica Λ foi introduzida primeiramente por Einstein para que o seu modelo descrevesse um universo estático que era compatível com as observações na época. Quando Einstein publicou seu trabalho sobre a relatividade geral o universo que nós conhecíamos era muito menor; conhecíamos estrelas em nossa galáxia e nuvens difusas como algumas nebulosas, porém entendíamos o universo estritamente apenas como a nossa galáxia e ao analisá-la

via-se o movimento das estrelas, algumas se afastando e outras se aproximando, sem nenhuma indicação de expansão ou contração, o que a primeira vista não fazia sentido, pois ao observar o universo se via matéria não relativística e a radiação proveniente das estrelas principalmente. Como sabemos, a pressão gerada pela matéria é próxima de zero, sendo assim sobraria apenas a pressão da radiação para competir com a gravidade e assim equilibrar as forças que manteriam o universo (até então conhecido) sem expansão ou contração. Porém, como a radiação conhecida provinha majoritariamente das estrelas e esta é baixa demais para conseguir equilibrar com a gravidade não seria possível pensar em um universo em equilíbrio apenas com estes ingredientes. Isso pode ser observado analisando a gravitação de Newton, pois com a densidade ρ e o potencial gravitacional Φ temos a equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (5.25)$$

Por outro lado, a aceleração de um corpo causada por uma distribuição de massa é dada por

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi. \quad (5.26)$$

Como no caso que estamos analisando o universo se encontra estático e não há nenhuma forma de pressão relevante a ser considerada, a aceleração deve ser nula, logo

$$\vec{\nabla}\Phi = 0,$$

e

$$\nabla^2\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = 0.$$

Logo pela equação 5.25 é fácil perceber que

$$\rho = 0. \quad (5.27)$$

Sendo assim o único caso em que o universo se manteria completamente em equilíbrio é no caso deste não conter absolutamente nada! Como vimos no capítulo 4, um universo estático que não esteja vazio seria como jogar uma bola para o alto e esperar que ela pairasse no ar, pois pelo que se conhecia a gravitação era a força dominante e por ela ser atrativa esse tipo de comportamento não era esperado. Para resolver este problema, Einstein introduziu uma constante na equação 5.25

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda. \quad (5.28)$$

Com esta alteração da equação 5.25 pode-se reescrever a equação de Friedmann da forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (5.29)$$

e as outras equações que obtivemos antes podem ser reescritas da forma

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.30)$$

Pode-se perceber algumas coisas analisando estas equações, aparentemente a equação 5.7 não é alterada e a equação 5.12 é acrescentada em $\frac{\Lambda}{3}$. Se analisarmos a equação 5.29, pode-se perceber que a densidade geral de energia do sistema ganha um acréscimo de $\frac{c^2}{8\pi G}\Lambda$, ou seja,

$$\varepsilon_{\Lambda} \equiv \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda, \quad (5.31)$$

logo, no caso de Λ ser uma constante com relação ao tempo, se tem que a densidade de energia de Λ também será constante. A equação 5.7 foi obtida inicialmente de forma geral, sendo assim nada impede de que a usemos para as respectivas componentes do universo isoladamente. Para Λ tem-se

$$\dot{\varepsilon}_{\Lambda} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_{\Lambda} + P) = 0,$$

para que $\dot{\varepsilon}_{\Lambda} = 0$ logo

$$\begin{aligned} \varepsilon + P &= 0, \\ P_{\Lambda} &= -\frac{c^2}{8\pi G}\Lambda. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Como já foi dito, ao se introduzir Λ nas equações a ideia era fazer com que a aceleração do universo fosse zero logo, usando as equações 5.26 e 5.28, tem-se

$$\Lambda = 4\pi G\rho. \quad (5.33)$$

Desta forma pode-se reescrever a equação 5.29, usando a relação entre densidade de energia e densidade de massa $\varepsilon = \rho c^2$, da forma

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)} + \frac{4\pi G\rho}{3} = 4\pi G\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}. \quad (5.34)$$

O zero do lado esquerdo da equação se deve a considerarmos o universo estático, logo $\dot{a} = \ddot{a} = 0$. Em consequência da equação 5.34, a curvatura do Universo deve se $\kappa = +1$, logo tem-se

$$R_0 = \frac{c}{(4\pi G\rho)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \quad (5.35)$$

Einstein chegou a este resultado em 1917. Nesta época, como foi falado, todas as evidências indicavam um universo estático, o que é obtido com a introdução da constante Λ ,

porém, ao analisarmos o resultado pode-se perceber que este equilíbrio é instável já que a pressão gerada por Λ é constante sendo assim uma pequena variação da densidade de matéria quebraria esse equilíbrio fazendo o universo expandir ou contrair. Analogamente, pode-se pensar que o universo estático seria como equilibrar uma esfera na ponta de uma agulha. Com a descoberta da expansão do universo por Hubble, a constante Λ foi abandonada até que, nos anos 1990, foi descoberto que a expansão do universo na verdade está acelerando! Agora que analisamos os principais macro componentes do universo devemos voltar as equações 5.29, 5.30, 5.7. Essas equações são escritas em função de $a(t)$, $\varepsilon(t)$ e $P(t)$, sendo que as duas últimas devem ser consideradas como a combinação de componentes variadas e que se comportam de forma diferente umas das outras. Por exemplo, a pressão gerada por Λ além de ser negativa também é constante no modelo padrão, o que tem sido um grande problema para a ciência conseguir encontrar um bom candidato para o componente que possa ter essas características.

5.4 Resolução da equação de fluido

Como dito anteriormente, cada componente contribui para a pressão e a densidade de energia totais do universo, sendo assim tem-se

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i, \quad (5.36)$$

$$P = \sum_i P_i = \sum_i \omega_i \varepsilon_i, \quad (5.37)$$

e consideramos válida a equação 5.7 individualmente para cada termo,

$$\dot{\varepsilon}_i + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\varepsilon_i + P_i) = 0, \quad (5.38)$$

$$\dot{\varepsilon}_i + 3 \frac{\dot{a}}{a} (1 + \omega_i) \varepsilon_i = 0. \quad (5.39)$$

Se ω for constante esta equação diferencial pode ser resolvida facilmente

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i} &= -3 \frac{da}{a} (1 + \omega_i), \\ \varepsilon_i(a) &= \varepsilon_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde o índice i representa o tipo de componente do universo ao qual a densidade de energia esta se referindo e $\varepsilon_{i,0}$ é a densidade de energia desta componente nos dias atuais. Desta forma, é fácil perceber que no caso da densidade de energia referente

à matéria bariônica se tem

$$\varepsilon_m(a) = \frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3}, \quad (5.41)$$

enquanto que para a radiação tem-se

$$\varepsilon_r(a) = \frac{\varepsilon_{r,0}}{a^4}. \quad (5.42)$$

Esta diferença ocorre pois, conforme o universo se expande, os fótons tem seu comprimento de onda alterado como foi dito na seção 2.1. Assim a densidade de energia devido aos fótons cai com uma taxa maior do que a da matéria e como já foi mencionada a densidade de energia de Λ é constante. Porém devemos nos lembrar que os cálculos feitos para pressão e densidade de energia foram feitos de modo que não especificavam os fótons mas sim partículas relativísticas. Claro que os fótons são englobados neste conjunto porém não são os únicos com características relativísticas. Os neutrinos também se movem a velocidades relativísticas e possuem uma massa insignificante comparado a energia cinética, porém é necessário determinar se a quantidade de neutrinos é grande o suficiente para ser levada em conta quando se trata de escalas compatíveis com o universo? A resposta é sim! Cada estrela, assim como produz fótons, também produz neutrinos e, mais importante do que isso, se voltarmos no tempo para o período anterior ao acoplamento dos elétrons com os prótons que gerou a CMB, houve um momento na história do universo no qual este esfriou o suficiente para liberar os neutrinos que estavam aprisionados gerando desta forma um fundo de neutrinos. Para que possamos encontrar a densidade de fótons e neutrinos, irei começar pelos fótons pois, como vimos em 2.18, já sabemos a densidade de energia dos fótons referentes a CMB. Agora se formos pensar nos fótons relativos às estrelas temos que

$$\varepsilon_{r,0} \approx \eta L t_0 = 0.007 \text{MeV m}^{-3}, \quad (5.43)$$

onde η é a densidade numérica de estrelas observada, L é a luminosidade média das estrelas e t_0 é o tempo de Hubble. Como pode-se ver, a densidade de energia dos fótons proveniente das estrelas é muito menor do que a referente aos fótons da CMB que é

$$\varepsilon_{CBM,0} = \alpha T^4 = 0,260 \text{MeV m}^{-3}, \quad (5.44)$$

e ainda deve-se levar em conta que os cálculos feitos são um limite superior, pois foi considerado que a mesma quantidade de estrelas que existem hoje sempre existiu desde o início do universo, logo pode-se ignorar a radiação das estrelas no calculo de $\varepsilon_{r,0}$. Há uma relação entre a densidade de energia dos fótons provenientes da CMB e a densidade

de energia dos neutrinos provenientes da radiação cósmica de neutrinos que é [8][pag 83]

$$\varepsilon = \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \varepsilon_{CMB} \approx 0.227 \varepsilon_{CMB} \quad (5.45)$$

Porém, o resultado obtido é para cada sabor de neutrino e como são três [13] ao todo que deve-se considerar, temos:

$$\varepsilon_\nu = 0.681 \varepsilon_{CMB} \approx 0.177 \text{ MeV} m^{-3}. \quad (5.46)$$

Desta forma

$$\Omega_{r,0} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_c} = \frac{\varepsilon_{CMB} + \varepsilon_\nu}{\varepsilon_c} = 8.4 \times 10^{-5}. \quad (5.47)$$

A densidade atual de matéria é difícil de ser mapeada porém alguns modelos indicam que $\Omega_m \approx 0.3$ [14]. Se considerarmos um universo contendo como macro componentes apenas três ingredientes que são matéria, radiação e Λ então pode-se escrever

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} \approx 0.7. \quad (5.48)$$

Porém estes são valores atuais e os parâmetros de densidade de cada ingrediente se alteram com o tempo, exceto Ω_Λ . Sendo assim, pode-se pensar em um tempo no passado em que havia igualdade entre a densidade de energia da matéria e de Λ

$$1 = \frac{\varepsilon_\Lambda}{\varepsilon_m} = \frac{\varepsilon_{\Lambda,0}}{\varepsilon_{m,0}} a^3 = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} a^3 = 2.3 a^3, \quad (5.49)$$

logo

$$a_{m=\Lambda} = 0.75. \quad (5.50)$$

Sendo assim a densidade de energia da matéria e de Λ eram iguais quando o fator de escala era $a = 0.75$. Seguindo este mesmo raciocínio para a densidade de energia da matéria e da radiação temos

$$a_{m=r} = 2,8 \times 10^{-4}. \quad (5.51)$$

Desta forma, tudo indica que houve uma época no início do universo que este foi dominado pela radiação entre $0 \leq a \leq 2,8 \times 10^{-4}$, em seguida a matéria passou a ser dominante entre $2,8 \times 10^{-4} \leq a \leq 0.75$ e, após $a \geq 0.75$, Λ passou a ser o componente dominante no universo. O fator de escala é uma função que cresce de forma monótona, pois tem a primeira derivada sempre positiva. Como a relação entre o fator de escala e o *redshift* é dada pela simples equação 5.52, a qual demonstrarei futuramente,

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (5.52)$$

pode-se usar o valor obtido para o fator de escala como uma forma de se medir o tempo.

5.5 Finalmente o modelo Padrão

Agora temos todas as ferramentas necessárias para obtermos o modelo padrão da cosmologia. Para tal, devemos nos lembrar que a densidade de energia é na verdade um somatório de densidades, sendo assim pode-se reescrever as equações anteriores de modo a considerar cada um dos elementos que compõe o universo,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \sum_i \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_i(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)}, \quad (5.53)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_i (1 + \omega_i) \varepsilon_i, \quad (5.54)$$

$$\dot{\varepsilon}_i + 3\frac{\dot{a}}{a} (1 + \omega_i) \varepsilon_i = 0. \quad (5.55)$$

A primeira vista, estas equações podem parecer não levar em conta a constante Λ como faz a equação 5.29. Isso acontece porque quando Einstein introduziu o fator Λ pela primeira vez ele o fez como um fator de correção apenas porém, se considerarmos Λ como um fluido adicional entre outros dos macro componentes do universo, então ele estaria incluso dentro do somatório das densidades de energia, de forma que se poderia escrever

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \sum_i \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_i(t) + \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_\Lambda(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)}, \quad (5.56)$$

onde

$$\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \varepsilon_\Lambda(t) = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}. \quad (5.57)$$

Agora, se voltarmos a equação 5.53 e a dividirmos por H_0^2 teremos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2} \varepsilon_i(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} \frac{1}{a^2(t)}, \quad (5.58)$$

e, usando a equação 4.21, podemos reescrever a equação acima da forma

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{1}{\varepsilon_{c,0}} \sum_i \varepsilon_i + \frac{\Omega_{\kappa,0}}{a^2}. \quad (5.59)$$

Pode-se reescrever cada ε_i em função de a em vez de do tempo, como foi visto na equação 5.40, obtendo

$$\frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_{c,0}} = \frac{\varepsilon_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)}}{\varepsilon_{c,0}} = \frac{\Omega_{i,0}}{a^{3(1+\omega_i)}}. \quad (5.60)$$

Por fim pode-se escrever

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\kappa,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (5.61)$$

Na seção anterior foi mencionado um modelo no qual $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$, $\Omega_{m,0} = 0,3$ e, consequentemente, $\Omega_{\kappa,0} = 0$, porém este é um modelo dos muitos possíveis. Portanto, quando se interpreta os dados deve-se deixar os parâmetros o mais livres possível para que não haja uma restrição indevida na teoria. Para que possamos calcular $a(t)$ devemos nos lembrar que $H = \frac{\dot{a}}{a}$ sendo assim se a equação 5.61 for multiplicada por a^2 podemos integrá-la como

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r,0}/a^2 + \Omega_{m,0}/a + \Omega_{\kappa,0} + \Omega_{\Lambda,0}a^2}} \quad (5.62)$$

Esta integral pode ser resolvida numericamente para cada escolha dos valores para os parâmetros $\Omega_{i,0}$. É interessante estudar as soluções para o caso em que apenas um tipo de Ω_i seja relevante, ou seja, todos os outros seriam aproximadamente zero. Como exemplo pode-se fazer para o caso de um universo dominado por constante cosmológica, em que $\Omega_{\Lambda,0}$ é muito maior que as outras contribuições,

$$H_0 t = \int_1^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}a^2}} = \frac{\ln a}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}H_0 t}}, \quad (5.63)$$

$$a(t) = e^{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}H_0 t}}. \quad (5.64)$$

Portanto, em um universo dominado por Λ o fator de escala cresce exponencialmente com o tempo. Pode-se calcular $a(t)$ para outros casos também, porém esses cálculos não acrescentariam muito ao objetivo final sendo assim não os farei.

Capítulo 6

Tipos de distâncias e suas importâncias

Na astronomia, medir a distância até um objeto é extremamente complicado. Como foi dito no capítulo 2, o próprio Hubble cometeu graves erros ao estimar as distâncias das galáxias quando propôs a lei de Hubble pela primeira vez, causando uma discrepância enorme entre o resultado que ele obteve e o que é conhecido atualmente. Toda essa dificuldade em medir distâncias na astronomia se deve ao fato de que nela trabalha-se quase que o tempo todo com a radiação eletromagnética, o que restringe enormemente as formas de se medir distâncias que pode-se utilizar. Durante os séculos que a astronomia tem de vida muitos métodos já foram usados para se medir distâncias, um que foi utilizado por muito tempo e ainda é até hoje conhecido como paralaxe e que se trata de observar o mesmo objeto de duas posições diferentes e comparar como a posição aparente deste objeto varia em comparação a um fundo infinitamente distante. Este método tem dois problemas, o primeiro é que um fundo infinitamente distante não existe de verdade, porém há objetos que estão distantes o suficiente para a aproximação ser muito boa. Entretanto, o principal problema deste método é que quanto mais longe está um objeto que se quer medir a distância mais difícil é para aplicá-lo e por este fato este método acaba por ter sua utilidade limitada. Porém, existem outros métodos para se encontrar a distância até um objeto e falarei sobre eles neste capítulo.

6.1 Distância Própria Revisitada

É a distância entre dois objetos em um determinado instante do tempo, ou seja se tivermos duas galáxias a distância entre elas em um determinado instante de tempo é

dada por

$$d_p(t) = a(t)r_c \quad (6.1)$$

o fator r_c é a distancia entre dois pontos antes da expansão ter inicio, ao analisarmos a equação 3.23 que vem da definição da distância própria, pode-se perceber que existe uma d_p para a qual $v_p = c$ que é conhecida como distância de Hubble d_H ,

$$d_H \equiv c/H_0 = (4300 \pm 400) \text{ Mpc}. \quad (6.2)$$

Esta distância de Hubble também sai naturalmente da equação 3.19

$$ds_4^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dx^2}{1 - kx^2/R^2} + x^2 d\Omega^2 \right]$$

, que, para um objeto em uma posição fixa no céu, fica

$$ds_4^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2. \quad (6.3)$$

Como a luz sempre percorre uma geodésica nula, $ds_4 = 0$, então se tem

$$dr = c \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.4)$$

e

$$r = \int_{t_e}^{t_0} c \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.5)$$

onde t_e é o instante em que uma crista de onda luminosa foi emitida e t_0 o instante em que a mesma crista é observada. A crista de onda seguinte emitida tem uma defasagem de tempo para a primeira que é igual a $t_e + \frac{\lambda_e}{c}$ e a observada tem uma defasagem de tempo igual a $t_0 + \frac{\lambda_0}{c}$ e, portanto,

$$r = \int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} c \frac{dt}{a(t)}. \quad (6.6)$$

Como a diferença entre t_e e $t_e + \frac{\lambda_e}{c}$ é muito pequena, assim como a diferença entre t_0 e $t_0 + \frac{\lambda_0}{c}$, se formos levar em conta a escala de tempo do universo então pode-se escrever

$$\int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} c \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_0} c \frac{dt}{a(t)}. \quad (6.7)$$

Se subtrairmos dos dois lados desta relação a integral

$$\int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.8)$$

obtemos

$$\int_{t_e}^{t_e + \frac{\lambda_e}{c}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}. \quad (6.9)$$

Como a diferença de tempo entre as duas cristas de onda é insignificante com relação a escala de tempo do universo, podemos considerar, neste intervalo de tempo no qual a integral é feita, que $a(t)$ seja constante. Sendo assim

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \frac{\lambda_e}{c}} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} dt, \quad (6.10)$$

logo

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}. \quad (6.11)$$

Como foi dito antes pode-se adotar $a(t_0) = 1$ sendo assim podemos usar a relação 6.11 para se escrever o fator de escala em função do redshift,

$$z = \frac{(\lambda_0 - \lambda_e)}{\lambda_e} = \frac{1}{a(t_e)} - 1, \quad (6.12)$$

desta forma

$$a(t_e) = \frac{1}{1 + z}. \quad (6.13)$$

Com esse resultado, pode-se obter o fator de escala a partir do redshift cosmológico, claro que desta forma não se considera a velocidade da galáxia que não provém da expansão do universo, chamada velocidade peculiar. Porém, quando se observa galáxias cada vez mais distantes a velocidade peculiar torna-se cada vez menos relevante em comparação com a velocidade da expansão. Vamos relembrar agora da equação 6.1, se quisermos saber a distância própria nos dias atuais então se tem

$$d_p(t_0) = a(t_0)r. \quad (6.14)$$

Como definiu-se que $a(t_0) = 1$, temos

$$d_p(t_0) = r = \int_{t_e}^{t_0} c \frac{dt}{a(t)}. \quad (6.15)$$

Claramente a solução desta equação pode ser muito complexa pois, como foi visto no capítulo sobre Modelo Padrão, a determinação do fator de escala depende do modelo cosmológico. Porém, se estivermos interessados no universo local, pode-se escrever $a(t)$ como uma serie de Taylor no caso do t próximo de t_0 , o que resulta em

$$a(t) \approx a(t_0) + \dot{a}|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{a}|_{t=t_0} (t - t_0)^2. \quad (6.16)$$

Ao dividirmos ambos os lados por $a(t_0)$ temos

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} \approx 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2, \quad (6.17)$$

onde

$$q_0 \equiv - \left(\frac{\ddot{a}}{aH^2} \right)_{t=t_0}. \quad (6.18)$$

Percebe-se que o fator de desaceleração q é positivo se o universo está desacelerando e negativo se o universo estiver expandindo de forma acelerada. A definição de $q(t)$ desta forma se dá pois, na época em que este fator foi inicialmente definido, a visão predominante era de que o universo era dominado pela matéria bariônica não relativística, o que faria com que houvesse uma desaceleração na expansão do universo. Como $a(t_0) = 1$, então

$$a(t) \approx 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2, \quad (6.19)$$

logo,

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0 (t - t_0) + (1 + q_0/2) H_0^2 (t - t_0)^2. \quad (6.20)$$

Quando se realiza a integral para se obter a d_p devemos nos lembrar que os resultados com potência maior do que dois devem ser desconsiderados devido a aproximação que esta sendo feita, desta forma,

$$d_p \approx c(t_0 - t_e) + \frac{cH_0}{2} (t_0 - t_e)^2. \quad (6.21)$$

Esta equação nos dá a distância própria em função do tempo de emissão, porém este não é um observável, sendo mais interessante se escrever a distância própria em função do redshift z e, para isso, devemos nos lembrar que

$$z = \frac{1}{a(t_e)} - 1. \quad (6.22)$$

Aplicando a relação do fator de escala com o z na equação 6.20 se tem

$$z \approx H_0 (t_e - t_0) + (1 + q_0/2) H_0^2 (t_e - t_0)^2. \quad (6.23)$$

Invertendo esta equação para se obter uma relação para $t_e - t_0$ que envolva z , temos

$$t_e - t_0 \approx H_0^{-1} [z - (1 + q_0/2) z^2], \quad (6.24)$$

que chamado de “lookback time”. Agora para encontrarmos a distância própria em função do z basta usarmos as equações 6.24 e 6.21 teremos

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} [z - (1 + q_0/2) z^2] + \frac{cH_0}{2} \frac{z^2}{H_0^2}. \quad (6.25)$$

Logo,

$$d_p \approx \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{1 + q_0}{2} z \right]. \quad (6.26)$$

Quando $z \ll a/(1 + q_0)$ se $q_0 > -1$ então para redshifts menores que 0.1 se obtém a lei de Hubble que foi mostrada no capítulo 2. Porém esta é apenas uma aproximação. No caso geral, para obtermos a distância própria deve-se usar a integral

$$d_p(t_0) = r = \int_{t_e}^{t_0} c \frac{dt}{a(t)}. \quad (6.27)$$

e, neste caso, vimos na seção 5.5 que devemos resolver a integral

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r,0}/a^2 + \Omega_{m,0}/a + \Omega_{\kappa,0} + \Omega_{\Lambda,0} a^2}}, \quad (6.28)$$

para se obter o tempo. Deve-se perceber também que, no caso da equação 6.15, a distância própria está em função do tempo e do fator de escala, porém saber em qual instante a luz foi enviada acarreta certas complicações sendo assim é mais interessante escrever esta equação em função do redshift que é um observável direto. Para tal, basta usar a equação 6.13 e lembrar que

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (6.29)$$

Com isso

$$\dot{a} = \frac{-\dot{z}}{(z + 1)^2}, \quad (6.30)$$

e

$$H = -\frac{\dot{z}}{(z + 1)} = \dot{z}a. \quad (6.31)$$

Desta forma, pode-se reescrever a distância própria em função do redshift

$$d_p(t_0) = -c \int_{t_0}^{t_e} \frac{dt}{H} \frac{dz}{dt} = c \int_0^z \frac{dz'}{H}. \quad (6.32)$$

6.2 Distância de Luminosidade

Infelizmente, não tem como se medir a distância própria pois, como o universo está em expansão, esta se altera a cada momento e a luz também possui uma velocidade finita, sendo assim, tudo que vemos foi emitido em um instante anterior. Como não

se pode parar a expansão para se medir as distâncias então devemos trabalhar com os observáveis. Existem algumas maneiras de se estimar a distância até um objeto, uma delas foi mencionada no início deste capítulo, e é conhecida como paralaxe trigonométrica, que é muito usada para se medir distâncias até estrelas em nossa galáxia. Existem alguns métodos que utilizam objetos que pertencem a alguma classe ou classes com características específicas. Um exemplo é caso se possa descobrir uma relação do tamanho próprio de um grupo ou mais de galáxias que independe da distância da galáxia até nós, desta forma pode-se usar este tamanho padrão conhecido como parâmetro para se calcular a distância até o objeto. Não falarei especificamente deste método pois mesmo sendo muito utilizado na cosmologia ele não foi meu objeto de estudo.

Distância de Luminosidade é a distância obtida quando se sabe a luminosidade de um objeto, ou seja a potência total emitida no referencial de repouso da fonte, esses objetos são chamados de *velas padrão*, e se utiliza esta informação juntamente com o fluxo observado para se calcular a distância do objeto até o observador. Sendo assim, pode-se definir a distância de luminosidade como

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2} \quad (6.33)$$

onde L é a luminosidade do objeto e f é o fluxo total do objeto, ou seja o seu fluxo integrado em todos os comprimentos de ondas, conhecido como *Fluxo Bolométrico*. Obviamente existem dificuldades práticas para se obter o fluxo bolométrico de um objeto. Neste caso deve-se observar o objeto na maior quantidade de bandas possíveis. Como exemplo imaginemos que nosso objeto é uma lâmpada de 60 W e ao observar essa lâmpada a uma certa distância percebe-se que seu fluxo é 15 W/m² sendo assim a distância que estamos do objeto é

$$d_L = \left(\frac{60 \text{ W}}{4\pi 15 \text{ W/m}^2} \right)^{1/2} \approx 0.56 \text{ m}. \quad (6.34)$$

Olhando os cálculos acima parece bem fácil aplicar a distância de luminosidade caso se tenha um objeto o qual se conhece a luminosidade. Bem, em pequenas escalas é realmente bem direto porém, quando falamos de escalas compatíveis com a cosmologia, algumas coisas devem ser levadas em consideração, como a métrica utilizada. Desta forma para que possamos calcular d_L de forma geral precisamos considerar as equações obtidas nas seções 3.3 e 3.2,

$$ds_4^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa(r)^2 d\Omega^2] \quad (6.35)$$

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R \operatorname{sen}(r/R) & (k = 1) \\ r & (k = 0) \\ R \operatorname{senh}(r/R) & (k = -1). \end{cases} \quad (6.36)$$

Imagine que uma vela padrão está emitindo a mesma quantidade de energia em todas as direções, de modo que observadores dispostos sobre a superfície de uma esfera centrada na fonte, e em repouso relativo, meçam o mesmo fluxo. Se estivermos em um espaço euclidiano e estático, o raio desta esfera de radiação será igual a *distancia propria* ou seja, $d_p(0) = r$ e a área da esfera será uma *área própria* $A_p = 4\pi d_p^2 = 4\pi r^2$, porém, no caso geral quando a curvatura pode ser diferente de zero, então se tem

$$A_p = 4\pi S_\kappa^2. \quad (6.37)$$

Caso $\kappa < 0$, então os fótons emitidos pela vela padrão estarão em uma área maior do que no caso em que a curvatura é zero, porém se $\kappa > 0$ então a esfera de fótons terá uma área menor do que no caso euclidiano. Mas além do efeito da curvatura, também deve-se levar em conta a expansão do universo que ocorre durante todo o percurso da luz. Como a expansão altera o comprimento de onda da luz, temos que a energia carregada por esta também não permanece inalterada. Inicialmente a energia de cada fóton é $E = hc/\lambda_e$ porém, quando observado a sua energia se altera $E = hc/\lambda_0$ como foi visto na equação 6.11

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \lambda_e (z + 1), \quad (6.38)$$

ou seja, a energia sofre um decréscimo dado por

$$E_o = \frac{E_e}{z + 1}. \quad (6.39)$$

Enquanto a energia dos fótons sofre um decréscimo com a expansão do universo, o tempo entre a detecção de dois fótons sofre um acréscimo. Digamos que dois fótons são emitidos com uma diferença de tempo δt_e , logo a distância entre estes fótons seria de $c\delta t_e$ no referencial da emissão, porém, o universo se expande entre o fóton ser emitido e observado, expansão esta que é facilmente obtida usando as equações 6.11 e 6.13,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = (1 + z). \quad (6.40)$$

Como a velocidade do fóton não é alterada então esta expansão do espaço também causa um aumento na diferença do tempo entre os fótons

$$\delta t_0 = \delta t_e (1 + z), \quad (6.41)$$

onde δt_0 é a diferença de tempo entre dois fótons no referencial do observador. O fluxo bolométrico pode ser definido como a energia por unidade de área por unidade de tempo que chega ao detector

$$f \equiv \frac{dE_0}{dA dt_0}. \quad (6.42)$$

Logo considerando a expansão do universo o fluxo será

$$f = \frac{dE_e}{dAdt_e (1+z)^2}. \quad (6.43)$$

A luminosidade é a energia total por unidade de tempo que um determinado objeto emite ou dE_e/dt_e e a área total onde o fluxo se espalha é dada pela equação 6.37, logo

$$f = \frac{L}{4\pi S_\kappa^2 (1+z)^2}. \quad (6.44)$$

Sendo assim, de forma geral levando em conta a curvatura e a expansão do universo a distância de luminosidade será

$$d_L = S_\kappa (1+z). \quad (6.45)$$

Atualmente tudo indica que o universo tem curvatura próxima de zero e R_0 , o raio de curvatura nos dias atuais, é maior do que a distância do horizonte ($d_{hor}(t_0)$). Objetos com redshift finito tem distância própria menor do que $d_{hor}(t_0)$ e por isso menores do que o raio de curvatura. Sendo assim, $r \ll R_0$ e, portanto $S_\kappa(r) \approx r$. Sendo assim, se o universo for plano, então a distância de luminosidade será

$$d_L = r(1+z) = d_p(t_0)(1+z). \quad (6.46)$$

Desta forma, se o universo for realmente plano, a diferença entre d_L e d_p seria da ordem de $(1+z)$. Agora, no caso de $z \ll 1$ devemos lembrar que a distancia própria é dada por

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z \right], \quad (6.47)$$

sendo assim, a distancia d_L será

$$d_L = d_p(t_0)(1+z) \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z \right) (1+z) \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 + \frac{1-q_0}{2} z \right), \quad (6.48)$$

para redshift muito pequeno então,

$$d_L \approx d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} z, \quad (6.49)$$

ou seja, para z pequeno a distância d_L deve coincidir com a distância própria. É importante salientar que toda a discussão sobre a distância de luminosidade leva em conta que, de alguma forma, se conhece uma classe de objetos astronômicos que tenha uma luminosidade que independe do tempo e a qual nós conhecemos.

Capítulo 7

Supernovas na Cosmologia

No capítulo anterior falou-se muito sobre velas padrão e suas possíveis aplicações dentro da cosmologia, chegou a hora de aplicarmos estes conceitos que foram discutidos anteriormente. Como foi mencionado no capítulo 2, Hubble deduziu a sua lei usando cefeidas como velas padrão, porém a maior dificuldade em se usar esse tipo de estrela é a sua baixa luminosidade para estimarmos distâncias cosmológicas. Como na cosmologia é necessário obter distâncias de luminosidade extremamente grandes, os objetos que devemos observar devem ser muito luminosos. Sendo assim estrelas, mesmo as mais luminosas, não são boas escolhas para serem usadas como vela padrão. Cefeidas podem ser observadas a distâncias de $d_L \approx 20\text{Mpc}$, distância para a qual não podemos considerar o universo homogêneo ainda. Como o centro do aglomerado de Virgem está a $d_L = 15\text{Mpc}$ de nós, se espera que a velocidade peculiar em uma distância entorno de 5 Mpc seja 375ms^{-1} [15] o que é de grande relevância ao se medir o *redshift* destas.

Por isso necessita-se de um objeto para vela padrão que possa ser observado a distâncias de $d_L \approx 100\text{Mpc}$ para que se possa calcular H_0 sem se preocupar com as velocidades peculiares das galáxias e, para se obter q_0 , são necessárias distâncias muito maiores, portanto, estes objetos devem ter uma luminosidade comparável a de galáxias. Claro que se tentou usar as próprias galáxias como vela padrão porem não houve sucesso nesta tentativa pois os processos que envolvem as galáxias são dos mais variados possíveis, de forma que suas luminosidades são muito diferentes. Há algumas décadas os cosmólogos têm optado por usar as *Supernovas Tipo Ia* como Vela Padrão.

7.1 Supernovas tipo Ia

Uma supernova pode ser definida, de maneira superficial, como a explosão que finaliza a evolução de uma estrela e apresenta uma curva ascendente do seu brilho, o qual após

chegar a um pico começa a decair. Inicialmente, quando não se sabia muito sobre esses eventos do nosso cosmos, a classificavam em dois tipos, baseado em haver ou não linhas de absorção em seu espectro. As supernovas que são classificadas como tipo I não apresentam linhas de absorção de hidrogênio, enquanto que as supernovas tipo II contêm fortes linhas de absorção desse elemento. As supernovas tipo II são geradas a partir de estrelas muito massivas, com massa $m > 8M_{\odot}$. Este tipo de estrela termina sua vida com um colapso gigantesco e deixa como remanescente uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. As linhas de hidrogênio se formam pois durante a sua vida a estrela queima diversos tipos de combustíveis diferentes e estes elementos se distribuem do mais denso ao menos denso em camadas como a de uma cebola e a última camada é a de hidrogênio, a qual é responsável pelas linhas características no espectro. As supernovas tipo I não apresentam linhas de absorção pois perderam a camada de hidrogênio devido a fortes ventos, porém são na verdade o mesmo tipo de evento que as supernovas tipo II, com exceção das Supernovas Tipo Ia

Já as supernovas tipo Ia ocorrem por processos completamente diferentes, acredita-se que as tipo Ia ocorram a partir de uma relação binária entre uma anã branca e uma outra estrela. Anãs brancas são objetos onde o colapso gravitacional já não é mais balanceado pela fusão nuclear mas sim pela pressão de degenerescência dos elétrons, como mostrado por Chandrasekhar [16], sendo que a estrela que lhe deu origem possui uma massa menor do que oito massas solares. As anãs brancas podem ser compostas de carbono, oxigênio ou uma mistura dos dois elementos. Neste sistema binário formado por uma anã branca e uma outra estrela, a anã absorve matéria de sua companheira até que atinge uma massa crítica onde a pressão de degenerescência dos elétrons já não é mais capaz de sustentar sua gravidade e então entra em colapso. Quando isso acontece, ocorre uma explosão termonuclear em grande escala na anã branca e esta, por sua vez, explode como uma Supernova Tipo Ia sem deixar um remanescente compacto.

Se formos pensar apenas em uma galáxia as Supernovas Tipo Ia são raras, ocorrendo apenas uma vez a cada século. Porém possuem grande luminosidade e, portanto, podem ser vistas a grandes distâncias, permitindo assim serem observadas em até $z > 1$. As supernovas tipo Ia, em média, tem um pico de luminosidade de $L = 4 \times 10^9 L_{\odot}$, ou seja, a luminosidade de uma galáxia média [8, página 145].

Porém ainda há o problema que elas não ocorrem com muita frequência, como dito anteriormente, uma vez em cada século por galáxia. Entretanto, se pensarmos em escalas maiores, essa situação melhora, o aglomerado de virgem por exemplo tem luminosidade cem vezes maior do que a nossa sendo assim é de se esperar que todo ano sejamos capazes de observar pelo menos uma Supernova Tipo Ia no aglomerado de Virgem. Através de observações de supernovas em regiões onde se conhecia bem a distância,

devido às cefeidas, pode-se perceber que existe uma variação grande na luminosidade de uma supernova tipo Ia para outra, algo em torno de $L \approx 3 \rightarrow 5 \times 10^9$. Ao mesmo tempo, também se percebeu que a luminosidade máxima da supernova podia ser correlacionada com o comportamento da curva de luz desta. O que se percebeu é que as supernovas tipo Ia que alcançam o pico de luz muito rápido e depois decaem rapidamente são menos luminosas do que a média das supernovas Tipo Ia e as que demoram mais tempo para atingirem o pico de luz e depois caem lentamente tem o pico de luz mais luminoso do que a média. Através desta relação empírica, descoberta em 1992 por Mark Phillips [17], pode-se criar um fator de "esticamento" capaz de ajustar as curvas de luz das supernovas tipo Ia.

Na figura 7.1 as curvas de luz das supernovas tipo Ia foram corrigidas pelo fator de esticamento e, como todas convergem muito bem, a relação tem se mostrado correta. Sendo assim, mesmo que não se saiba a luminosidade da supernova tipo Ia de imediato pode-se descobrir sua luminosidade observando como ela evolui. Porém esta relação da luminosidade com a curva de luz não é feita de forma tão direta, sendo necessário tratamento estatístico para que se possa entender esta relação de forma cada vez mais precisa.

Já há algumas décadas grupos de cosmologia têm buscado observar supernovas em redshifts cada vez maiores, em torno de $z \sim 1$ para que desta forma se possa definir se o universo está acelerando ou desacelerando. Para que se possa apresentar os dados mais recentes é necessário se entender o sistema de magnitude usado na astronomia, o sistema de magnitude é um sistema logarítmico que relaciona o brilho aparente de um astro, ou seja, o seu fluxo medido com uma referência. As estrelas começaram a ser classificadas por magnitude já há mais de dois mil anos. Hiparco classificou as estrelas visíveis em seis magnitudes diferentes de acordo com a percepção do seu olho, onde magnitude 1 era a mais brilhante e 6 a menos brilhante. Em 1856, este sistema foi modernizado. Como o olho humano percebe a luz em uma escala logarítmica [19, página 199] se percebeu que a diferença de brilho de uma estrela com magnitude 1 é cem vezes maior do que o brilho de uma com magnitude 6,

$$m_1 - m_2 = K \log_{10} \frac{F_1}{F_2} \rightarrow 1 - 6 = K \log_{10} 100, \quad (7.1)$$

logo,

$$K = -2,5. \quad (7.2)$$

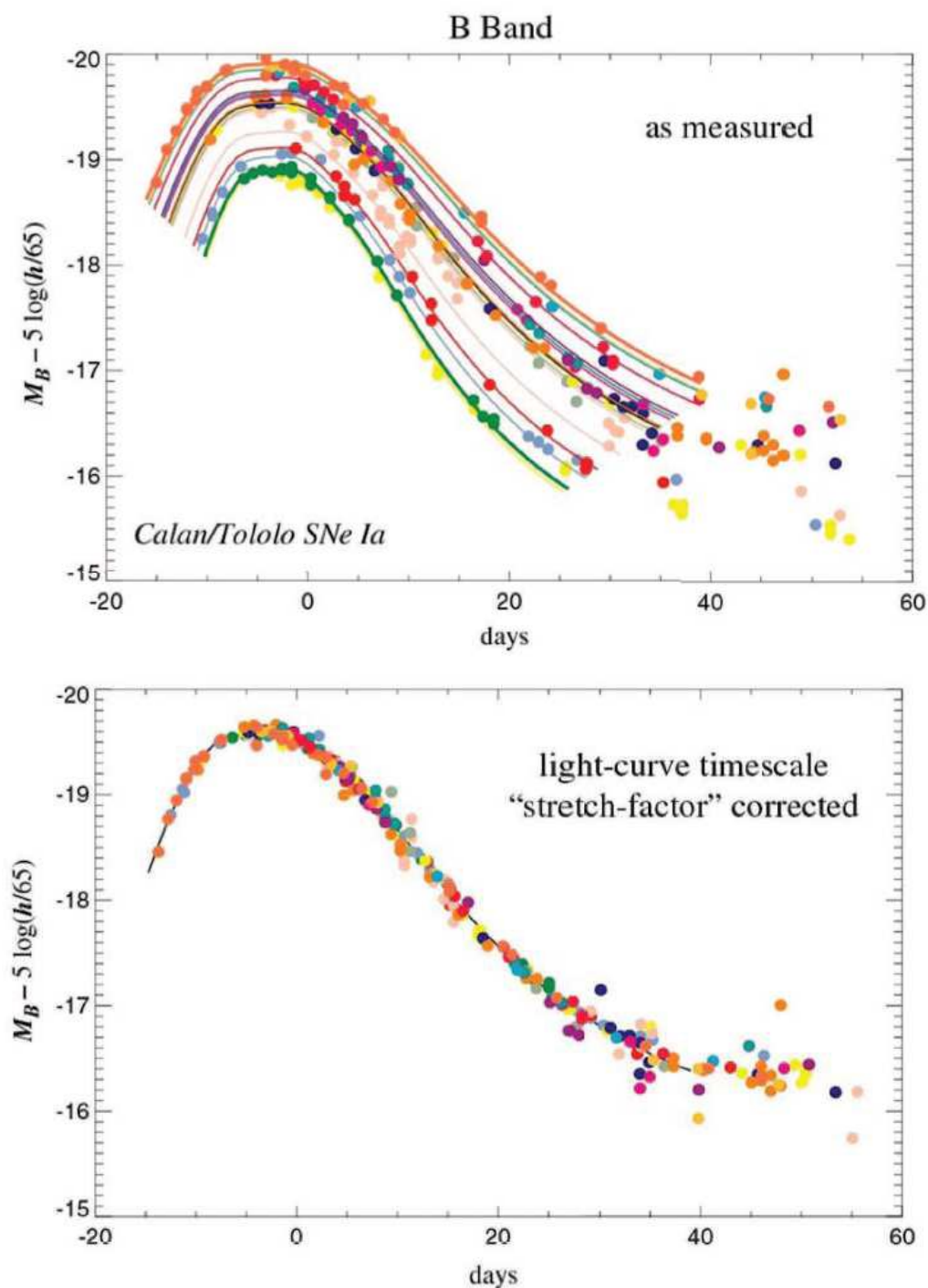


FIGURA 7.1: No painel acima temos a magnitude na banda B na ordenada e a abscissa mostra o tempo em dias. No painel abaixo temos novamente a magnitude na banda B, corrigida pela relação empírica, pelo tempo em dias [18].

É necessário definir um ponto zero na escala de magnitudes, o fluxo deste ponto zero será usado como fluxo de referência para a escala. Desta forma, se tem

$$m = -2,5 \log_{10} \frac{F}{F_x}, \quad (7.3)$$

onde F_x é o fluxo de referência. Na prática observa-se em uma banda por vez, de acordo com os filtros usados na fotometria. De forma geral, o fluxo depende do comprimento de onda, sendo a equação 6.42 o resultado de se integrar o fluxo em todos os comprimentos de onda. Então, de forma geral, se tem

$$F(\lambda) = \frac{dE}{dt dA d\lambda}, \quad (7.4)$$

sendo assim o fluxo bolométrico é

$$F_b = \int_0^{\infty} F(\lambda) d\lambda. \quad (7.5)$$

O fluxo bolométrico não é de fato observável. Na prática, observa-se com vários filtros diferentes e o fluxo observado depende da curva de transmissibilidade do filtro. Logo o fluxo observado vai ser

$$F_T = \int_0^{\infty} F(\lambda) T(\lambda) d\lambda, \quad (7.6)$$

onde $T(\lambda)$ é a função que representa a curva de transmissibilidade para cada filtro usado.

Porém, a magnitude, da forma como está sendo apresentada, é uma forma de quantificar o fluxo, não a luminosidade. Para que se possa tratar de luminosidade deve-se utilizar a magnitude absoluta do objeto observado. A magnitude absoluta é a magnitude hipotética que o objeto teria caso estivesse a uma distância de 10 *pc* de nós. Também se supõe que o observador está em repouso em relação a mesma, o que daria

$$M \equiv -2.5 \log_{10} \left(\frac{f(10)}{f_x} \right), \quad (7.7)$$

onde $f(10)$ é o fluxo do objeto observado a uma distância de dez parsecs ou seja $d_L = 10$ *pc*. Agora, se calcularmos a diferença entre a magnitude aparente e a magnitude absoluta, ambas bolométricas, o resultado é chamado de módulo de distância

$$\begin{aligned} m - M &= -2.5 \log_{10} \left(\frac{f}{f_x} \right) + 2.5 \log_{10} \left(\frac{f(10)}{f_x} \right) \\ &= 2.5 \log_{10} \left(\frac{f(10) f_x}{f} \right) = 2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{4\pi(10 \text{ pc})^2} \frac{4\pi d_L^2}{L} \right), \end{aligned} \quad (7.8)$$

que pode ser reescrita como

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25, \quad (7.9)$$

onde d_L está em unidades de Mpc. Desta forma se obtém a distância de luminosidade em função da magnitudes aparente e absoluta bolométricas. Como foi visto antes, para

$z \ll 1$ pode-se escrever a d_L de forma aproximada como

$$d_L \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 + \frac{1 - q_0}{2} z \right). \quad (7.10)$$

substituindo a 7.10 na 7.9, temos

$$m - M \approx 43.17 - 5 \log_{10} \left(\frac{H_0}{70 \text{ Kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \right) + 5 \log_{10} z + 1.086 (1 - q_0) z. \quad (7.11)$$

Dessa maneira, pode-se montar um gráfico de $m - M$ versus $\log z$ que inicialmente se comportará como uma reta, para redshift próximos a 0.1, o qual irá indicar o valor de H_0 e, conforme z aumentar, ele começará a se desviar do comportamento linear indicando assim o valor de q_0 . Como foi visto nas equações 6.18 e 5.62, tanto q_0 quanto H_0 de forma geral são escritos em função dos parâmetros de densidade $\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\kappa$ e Ω_r . No trabalho feito por Riess et al foram considerados três modelos: um onde o universo é plano e contém nada além de matéria, neste caso se usa $\Omega_m = 1$ e $q_0 = 0.5$; no segundo caso o universo tem curvatura negativa e contém apenas matéria, neste caso se usa $\Omega_m = 0.3$ e $q_0 = 0.15$; no final dos anos 90 quando Riess et al obtiveram estes dados foram obtidos pela primeira vez estes dois primeiros modelos eram concorrentes porém, os resultados acabaram mostrando que o modelo que melhor se ajustava aos dados, na verdade, seria um terceiro que considera o universo plano porém contendo matéria e constante cosmológica, neste modelo usaremos $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$ e $q_0 = -0.55$.

Logo como os dados na figura 7.2 mostram que o universo parece se comportar como plano e com expansão acelerada, porém a equação 7.10 é uma aproximação para redshift próximo a 1. Para resolvermos o caso em redshifts maiores é necessário maior conhecimento estatístico.

7.2 Estatística

Quando se está trabalhando com um conjunto de dados experimentais existem varias questões que devem ser levadas em conta como, por exemplo, se os dados são compatíveis com a previsão teórica e o método da máxima verossimilhança é uma maneira de se abordar esse problema. Imagine que se tem um conjunto de pontos experimentais e cada ponto possui sua barra de incerteza, ou seja, existe 68,3% de confiança de que o valor verdadeiro esteja no intervalo da barra de incerteza. Sendo assim, um ajuste de função que represente estes dados deve cruzar com 68,3% das barras de incerteza para que seja um ajuste verossímil, sendo assim um ajuste verossímil é aquele que considera que aconteceu o que tinha maior probabilidade de acontecer.

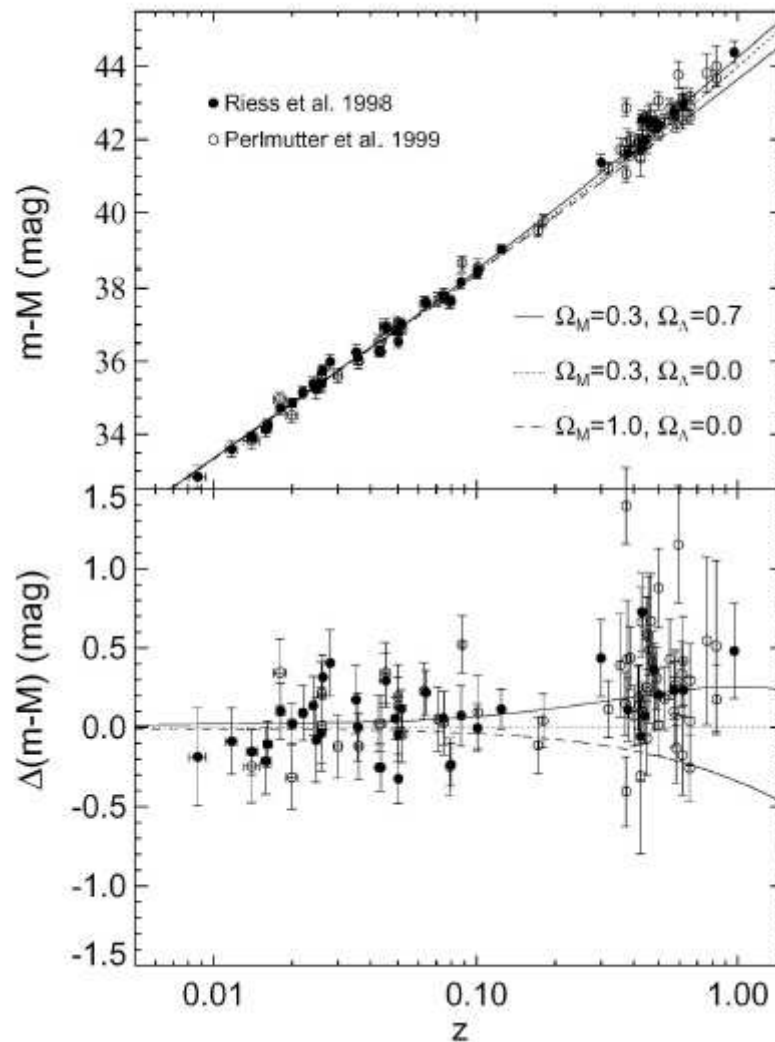


FIGURA 7.2: O painel superior mostra os dados do módulo da distância como função do redshift, obtidos por dois grupos diferentes (Riess et al [20] e Perlmutter et al [21]), juntamente com os três modelos sugeridos. Já o painel inferior mostra a diferença entre os dados e o modelo com curvatura negativa e $\Omega_{m,0} = 0.3$ [22].

Ao se medir um observável o erro é a diferença entre o valor verdadeiro e o valor medido, porém essa é uma equação de duas incógnitas pois o valor verdadeiro do observável não pode ser conhecido. Este problema pode ser resolvido a partir de uma distribuição de probabilidades, esta distribuição pode ser de vários tipos como retangular, triangular, gaussiana entre outras mas se os erros forem independentes (o que é uma suposição muito boa no geral) a distribuição mais adequada é a gaussiana. Que é a distribuição mais adequada quando os erros são aleatórios e independentes [23, página 46]

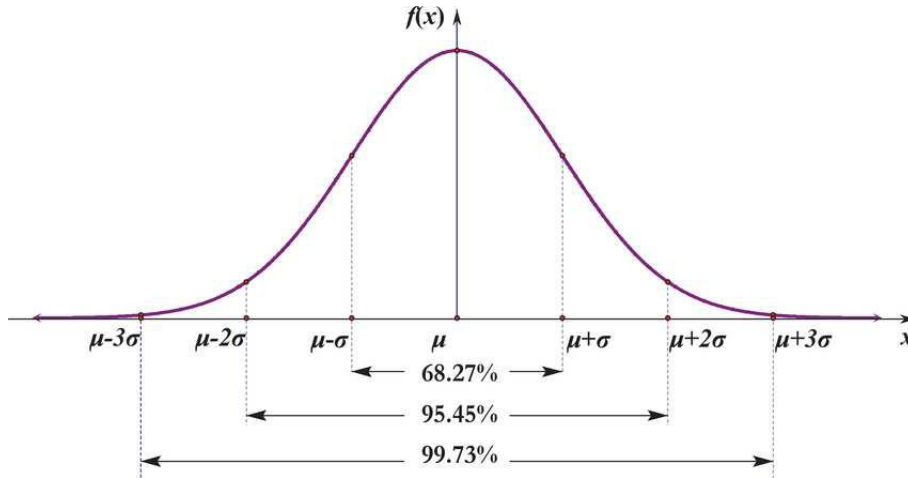


FIGURA 7.3: A imagem acima feita por Wang B, Shi W, Miao Z. PLoS ONE (2015)[24] mostra uma distribuição de probabilidade Gaussiana. Como toda distribuição de probabilidade, a Gaussiana tem área total de uma unidade o que equivale a 100% de chance de um evento ocorrer. A região delimitada por σ tem área total de aproximadamente 68,3% o que, como foi dito antes, representa uma barra de confiança de 68,3%

A figura 7.3 é descrita matematicamente pela função de densidade

$$G(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^2}, \quad (7.12)$$

onde σ é o desvio padrão, μ o valor verdadeiro e y o valor observado. A equação 7.12 já está normalizada. Quando se tem uma teoria a qual acredita-se que se encaixe a um determinado conjunto de dados pode-se escrever para cada ponto que a probabilidade de ocorrer aquela observação é

$$P_i = \frac{C}{\sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2}, \quad (7.13)$$

onde $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Embora a função 7.12 seja normalizada, o mesmo não vale para a equação 7.13 pois está é referente à distribuição de probabilidade para um parâmetro, e não de um ponto. A partir de agora trataremos apenas o caso da distribuição de probabilidade de parâmetros ao fazer isso estamos assumindo como hipótese que o valor verdadeiro do observável é dado pelo modelo teórico, sendo assim, a probabilidade de se observar um conjunto de pontos será

$$P = P_1 P_2 P_3 \dots P_n = \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2}. \quad (7.14)$$

Podemos definir

$$\chi \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{y - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (7.15)$$

Na equação 7.14, como hipótese, considera-se que cada medida é realização de uma variável independente com distribuição Gaussiana e variância conhecida. Além disso, a equação 7.14 tem como única variável o fator χ todos os outros termos são constantes. Pode-se normalizar esta função

$$P_{normali} = \frac{\frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2} dx}. \quad (7.16)$$

$$P_{normali} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2} dx}. \quad (7.17)$$

O valor mais provável de ser observado é aquele que maximiza a equação 7.17 ou que minimize 7.15. Apesar de como hipótese as medidas serem variáveis independentes com a forma de uma Gaussiana, a equação 7.17 só terá a forma de uma Gaussiana com respeito aos parâmetros se $f(x)$ for uma função linear.

7.3 Universo em Aceleração

Na seção anterior vimos as ferramentas estatísticas necessárias para que possamos analisar os dados das distâncias de luminosidade obtidos através das Supernovas Tipo Ia. Como vimos anteriormente, a distância de luminosidade pode ser obtida através de

$$\mu \equiv m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25, \quad (7.18)$$

onde o módulo de distância μ é obtido através da curva de luz de supernovas observadas. O modelo teórico nos fornece a distância

$$d_{Lt} = cH_0^{-1} (1+z) |\Omega_\kappa|^{-1/2} \sin n \left(|\Omega_\kappa|^{1/2} \times \int_0^z \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right] dz \right), \quad (7.19)$$

onde d_{L_t} é a distância de luminosidade teórica, $\Omega_\kappa = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$. Caso $\Omega_\kappa \geq 0$, então $\sin n = \sinh e$, caso $\Omega_\kappa \leq 0$, então $\sin n = \sin$. A equação 7.19 é obtida a partir da equação 6.45, onde S_κ é dado pela equação 6.36, por sua vez r é a distancia própria que pode ser calculada em função dos parâmetros de densidade se utilizarmos as equações 6.32 e 5.61. Por hipótese, iremos assumir como sendo o valor verdadeiro da medida. Como vimos na equação 5.47 $\Omega_{r,0}$ é muito pequeno comparado com os outros parâmetros de densidade, por isso ele não é levado em conta. Assim temos o módulo da distância teórico μ_t que é obtido substituindo a equação 7.19 na 7.18 e o módulo de distância observado μ_o que se obtém a partir da observação de supernovas tipo Ia. É importante salientar que, assim como foi falado na seção 7.1, as Supernovas tipo Ia não tem uma luminosidade conhecida de imediato mas sim dependem da curva de luz destas. Desta forma, o μ_o na verdade foi obtido anteriormente a partir de um ajuste, como mostrado em [25]. Sendo assim a probabilidade de se observar um determinado conjunto de μ_o 's será

$$P(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) = \frac{C^n}{\prod \sigma_{\mu_o,i}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu_t - \mu_o}{\sigma_{\mu_o,i}} \right)^2}. \quad (7.20)$$

Pode-se normalizar a função como

$$P(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)_n = \frac{e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\chi^2}{2}} dH_0 d\Omega_\Lambda d\Omega_m}. \quad (7.21)$$

Na equação 7.21 a região com $\Omega_m < 0$, embora não seja fisicamente possível, deve ser considerada nos cálculos para se ter maior rigor numérico, sendo descartada após se obter os níveis de confiança.

A equação 5.54 pode ser escrita em função de q_0 e Ω_i obtendo-se

$$q_0 = \Omega_{r,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{2} - \Omega_{\Lambda,0}. \quad (7.22)$$

Sendo assim para que se possa saber se o universo esta em expansão ou não, apenas o conhecimento de $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ é necessário pois, como vimos, $\Omega_r \approx 0$. Dessa maneira, como não estamos interessados no valor de H_0 pode-se marginalizar a distribuição, que consiste em integrar a distribuição de probabilidade de menos infinito até mais infinito para que desta forma a função densidade de probabilidade não seja mais dependente deste parâmetro. Desta forma a probabilidade fica em função apenas de $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$,

$$P(\Omega_m, \Omega_\Lambda)_n = \int_{-\infty}^{\infty} P(H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)_n dH_0. \quad (7.23)$$

Pode-se resolver essa equação para curvas de nível com $\sigma = 68,3\%$, $2\sigma = 95.4\%$ e $3\sigma =$

99.7% de chance para encontrarmos $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ nestas regiões. Uma das informações

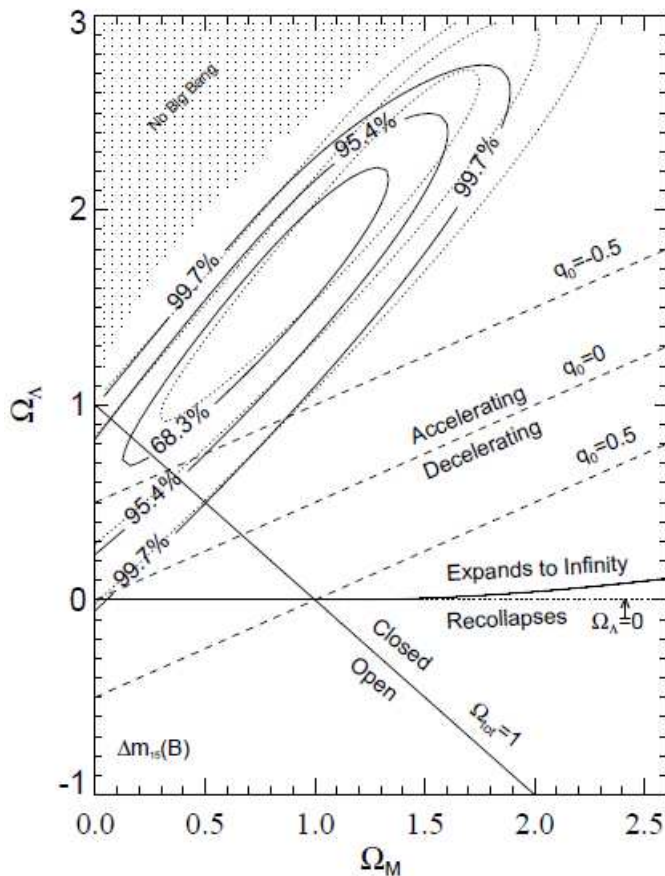


FIGURA 7.4: O gráfico feito por A. G. Riess et al [20]feito com 50 Supernovas tipo Ia mostra as regiões com mais probabilidade de se encontrar os valores verdadeiros de $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$, as linhas pontilhadas demarcam três valores de q_0

mais importantes que gráfico 7.4 mostra é que as chances do universo estar em expansão acelerada são maiores do que 99%, pois uma expansão acelerada ocorreria para qualquer valor de $q_0 < 0$!

Como foi dito anteriormente, as supernovas tipo Ia não tem uma luminosidade sempre igual, mas dependemo de um ajuste na sua curva de luz. Com isso, quanto mais delas forem observadas melhor a precisão da estatística feita para se estimar sua luminosidade e, conseqüentemente, melhor a precisão das estimativas dos parâmetros Ω_m e Ω_Λ , como podemos ver na figura 7.5 que .

Na figura 7.5 além de termos as curvas de nível das supernovas tipo Ia podemos observar também linhas em verde e azul tracejado que mostram os resultados de métodos diferentes para se obter os valores de Ω_m e Ω_Λ , que são oscilações acústicas de bárions e radiação cósmica de fundo, métodos que não fazem parte do objetivo deste trabalho.

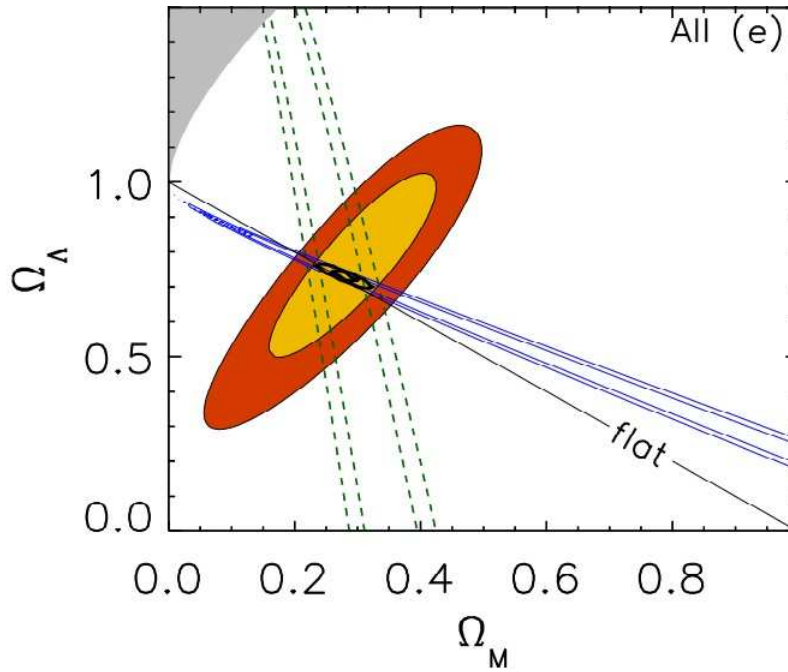


FIGURA 7.5: Gráfico retirado do trabalho de R. Kessler et al. [26], feito com 136 Supernovas tipo Ia, onde as curvas em amarelo e vermelho são respectivamente os intervalos de confiança para σ e 2σ , considerando apenas os dados de supernovas tipo Ia

Porém, é importante salientar que os resultados são compatíveis com os obtidos pelo método das supernovas Tipo Ia.

Quando se faz uma medida, além do erro estatístico também deve-se considerar o erro sistemático. Na prática os dois agem em conjunto ao se fazer uma medida, porém no trabalho do Riess et al [20] o erro predominante é o estatístico pois, como se pode observar, ao aumentar o número de supernovas de 50 usadas por Riess et al [20] para 136 usadas por Kessler et al [26] o resultado melhorou enormemente. Porém, no trabalho de M. Betoule et al 2014 [25] com um número de 374 SNe o resultado não foi tão melhor quanto se poderia esperar levando em conta apenas o erro estatístico como pode-se ver na figura 7.6. Mesmo utilizando mais que o dobro de dados que o trabalho de Kessler et al de 2009 o de Betoule et al de 2014 tem uma área muito parecida. Isso ocorreu porque o erro estatístico diminuiu ao ponto em que o erro sistemático passou a dominar as medidas e este é o novo desafio ao se trabalhar com SNe, conseguir diminuir também o erro sistemático para melhorar a precisão de medidas futuras para os parâmetros cosmológicos.

Muitos fatores são responsáveis pelo erro sistemático nas medidas feitas por Betoule et al 2014 e Kessler et al 2009. Como foi falando antes, a medida da luminosidade das Supernovas do Tipo Ia é obtida a partir de um tratamento estatístico, ou seja, apesar de

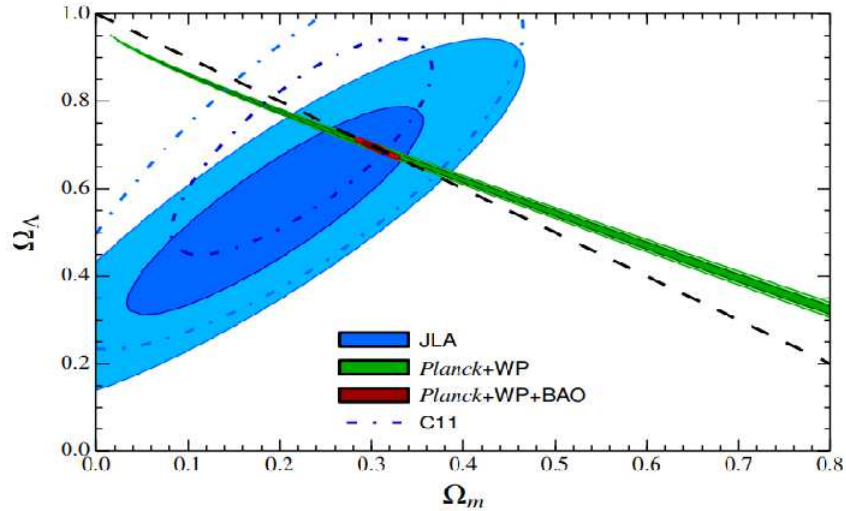


FIGURA 7.6: Medição de Ω_m e Ω_Λ com confiança de 68% e 95% feito por M. Betoule et al[25], trabalho realizado com 374 Supernovas tipo Ia

utilizarmos os valores de luminosidade destas como verdadeiros, eles trazem um erro em suas medidas. Erros que são causados por diversos fatores como a absorção da luz no meio interestelar da Via Láctea e a radiação da própria galáxia que hospeda a Supernova do Tipo Ia, o que faria com que esta tivesse um brilho maior do que verdadeiramente tem. Existem outras fontes de erro sistemático como a velocidade peculiar das galáxias, que altera o *redshift* observado desta e conseqüentemente o da Supernova do Tipo Ia também. Além disso, existem várias fontes de erro, como variações na transmissão dos filtros com tempo, nas condições da atmosfera, etc. Esses erros e outros são melhores discutidos por D. Brout et al [28], Josh Calcino e Tamara Davis [29].

Capítulo 8

Considerações finais

Para a obtenção dos parâmetros cosmológicos Ω_m e Ω_Λ foi necessário termos conhecimento do que ocorre em nosso universo em grandes escalas, o que só foi possível com as descobertas da lei de Hubble e da radiação cósmica de fundo, como foi mostrado no capítulo 2. Porém, para se entender a evolução da expansão do Universo demonstrada pela lei de Hubble e radiação cósmica de fundo só foi possível graças aos conceitos introduzidos anteriormente pela relatividade geral, como mostrado no capítulos 3 e 4, onde foi introduzidas a relatividade geral e a Equação de Friedmann que foram essenciais para o entendimento do universo que temos hoje.

Utilizando as ferramentas empíricas e teóricas obtidas nos capítulos 2, 3 e 4, juntamente com alguns outros princípios físicos, como o da conservação de energia, entre outros, pode-se chegar a um modelo padrão para o universo que está de acordo com os dados observacionais obtidos [2] e pode ser resumido em um conjunto de três equações:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \sum_i \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_i(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_i (1 + \omega_i) \varepsilon_i, \quad (8.2)$$

$$\dot{\varepsilon}_i + 3\frac{\dot{a}}{a} (1 + \omega_i) \varepsilon_i = 0. \quad (8.3)$$

Porém, para que este modelo possa ser testado, é necessário se utilizar de mais duas ferramentas a *distância própria*, que aparece naturalmente quando se define as coordenadas comóveis, e a *distância de Luminosidade*, que é um resultado direto da propagação da luz em um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, como vimos no capítulo 6. A partir do modelo padrão para distância própria e da distância de luminosidade

pôde-se escrever

$$d_{L_t} = cH_0^{-1} (1+z) |\Omega_\kappa|^{-1/2} \sin n \left(|\Omega_\kappa|^{1/2} \times \int_0^z \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right] dz \right). \quad (8.4)$$

Como foi mostrado na seção 7.3, com a equação 8.4, pôde-se relacionar o módulo de distância das supernovas tipo Ia com os parâmetros de densidade Ω_m e Ω_Λ . A partir de um tratamento estatístico para os valores dos módulos de distância teórico e observado, pode-se chegar ao resultado obtido por Riess et al [20] em 1998, que pode ser observado na figura 7.4.

Como vimos na seção 7.3, este trabalho de 1998 foi de extrema importância para a cosmologia e mostrou pela primeira vez que o universo, além de estar expandindo, também está acelerando. Porém ele contou com um número pequeno de supernovas, o que fez com que o erro estatístico dominasse o resultado. Posteriormente, em 2009, Kessler et al [26], com uma quantidade bem maior de supernovas, conseguiu uma precisão consideravelmente melhor, como pode ser visto na figura 7.5.

No entanto, trabalhos mais modernos com um número de supernovas ainda maior não têm mostrado uma melhoria semelhante na precisão dos resultados, como pode ser visto na figura 7.6.

Isso ocorre porque no trabalho de Riess et al. o erro estatístico domina sobre o erro sistemático das medidas. Porém, a partir do trabalho de Kessler et al. o erro dominante passa a ser o sistemático. Com isso, aumentar o número de objetos observados não tem mais tanto efeito na precisão da medida, o que é mostrado claramente pelo trabalho de Betoule et al. Por conta disso, a perspectiva futura para a cosmologia com supernovas é conseguir diminuir os erros sistemáticos para que novamente possamos melhorar a precisão dos resultados obtidos.

Bibliografia

- [1] H. Leavitt, Ann. Harvard Coll. Obs. 60, 87 (1908).
- [2] E. Hubble, PNAS 15, 168 (1929).
- [3] N.A.Sharp, NOAO/NSO/Kitt Peak FTS/AURA/NSF https://www.noao.edu/image_gallery/html/im0600.html
- [4] C. L. Farage et al., Astrophys.J. 724, 267 (2010) arXiv:1009.3070 [astro-ph.CO].
- [5] W. Freedman, et al., Astrophys. J. 553, 47 (2001).
- [6] A. Riess et al., Astrophys. J. 826, 56 (2016).
- [7] <https://phys.org/news/2015-02-fast-universe.html>
- [8] B. Ryden, "Introduction to Cosmology", Addison-Wesley (2002).
- [9] A. A. Penzias e R. W. Wilson, Astrophys. J. 142, 419 (1965).
- [10] D.J. Fixsen and J.C. Mather, Astrophys. J. 581, 817 (2002)
- [11] E. Chaisson e S. McMillan, "Astronomy: A Beginner's Guide to the Universe", 8th Edition, Pearson (2017).
- [12] <http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm>
- [13] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 98, 030001 (2018).
- [14] N. Aghanim et al. (Planck Collaboration) arXiv:1807.06209.
- [15] Gagandeep et al., 2019arXiv190511416A
- [16] S. Chandrasekhar, Astrophysical Journal 74, 81 (1931).
- [17] M. M. Phillips, Astrophys. J. 413, L105 (1993).
- [18] R. Miquel, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 40, 25 (2007).

-
- [19] K. de Souza Oliveira Filho e M. F. O. Saraiva, "Astronomia e astrofísica", Editora Livraria da Física (2004).
- [20] A. G. Riess et al. AJ 116, 1009 (1998).
- [21] S. Perlmutter et al. ApJ 517, 565 (1999).
- [22] A. G. Riess, PASP 112, 1284 (2000).
- [23] J. H. Vuolo, "Fundamentos da Teoria de Erros", Editora Edgard Blucher LTDA. (2000)
- [24] Wang B, Shi W, Miao Z. PLoS ONE (2015)
- [25] M. Betoule et al. Astronomy and Astrophysics 568, A22 (2014).
- [26] Kessler et al., ApJS, 185, 32 (2009).
- [27] B. F. Madore and W. L. Freedman, PASP 103, 933 (1991).
- [28] D. Brout et al., ApJ, 150, 50 (2019)
- [29] J. Calcino and T. Davis, JCAP, 1, 038 (2017)