

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
OBSERVATÓRIO DO VALONGO
CURSO DE ASTRONOMIA

Wallace Ferreira da Silva

Breve estudo sobre observáveis em cosmologia
Supernovas e Oscilações Acústicas de Bárions

Rio de Janeiro
2013

Wallace Ferreira da Silva

Breve estudo sobre observáveis em cosmologia
Supernovas e Oscilações Acústicas de Bárions

Monografia apresentada ao Curso de Astronomia da UFRJ, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Astronomia.

Orientador: Miguel Quartin

Doutor - IF

Rio de Janeiro

2013

F. da Silva, Wallace

Breve estudo sobre observáveis em cosmologia / Wallace F. da Silva

- 2013

48.p

1.Cosmologia 2. Astronomia 3.Estatística. I.Título.

CDU 524.8

Wallace Ferreira da Silva

Breve estudo sobre observáveis em cosmologia
Supernovas e Oscilações Acústicas de Bárions

Monografia apresentada ao Curso de Astronomia da UFRJ, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Astronomia.

Aprovado em 5 de setembro de 2013

BANCA EXAMINADORA

Miguel Quartin

Doutor - IF

Karín Menéndez-Delmestre

Doutora - OV (presidente)

Ioav Waga

Doutor - IF

A minha mãe, Maurita, e a minha avó, Ana, que mesmo sem a devida compreensão das coisas que eu estudava, foram fontes incessantes de estímulo.

Aos meus queridos e fieis amigos, cujos nomes estão gravados no meu coração, pelo imenso companheirismo.

Resumo

Neste trabalho serão discutidas as principais propriedades do modelo padrão da cosmologia também conhecido como Λ CDM. Este modelo descreve um universo dominado por matéria escura fria (cold dark matter) e uma constante cosmológica (Λ). Entretanto, é comum generalizar o termo Λ CDM de modo a incorporar no modelo a existência de uma fase inicial de expansão inflacionária. Isso significa que o universo passou por uma expansão exponencial (inflação) em épocas muito primordiais gerando as condições necessárias para a configuração atualmente observada na radiação cósmica de fundo (CMB) e na formação das grandes estruturas; existe uma forma de matéria (chamada escura) que só responde a efeitos gravitacionais e que, portanto, domina a aglomeração da matéria visível (bariônica); algum tipo de componente energética exótica com densidade constante e que preenche aproximadamente 70% do universo (constante cosmológica Λ) é responsável pela expansão acelerada.

Este modelo alcançou notoriedade ao longo das últimas quatro décadas por apresentar uma descrição razoavelmente simples do universo, fazendo uso de seis parâmetros primários e outros derivados destes, cuja origem física é prevista pelos mecanismos descritos pelo modelo (Komatsu et al., 2011). Atualmente estes parâmetros têm sido bem determinados de forma direta ou indireta pela análise de observáveis cosmológicos como CMB e as lentes gravitacionais. A contribuição mais recente neste campo foi a utilização de supernovas Ia como indicadores astrofísicos da expansão acelerada do universo (Nobel de Física de 2011).

Em nossa pesquisa o objetivo principal é explorar os métodos estatísticos utilizados na obtenção de vínculos sobre parâmetros cosmológicos a partir de alguns observáveis, em especial: as Supernovas Ia (SN Ia) e as Oscilações Acústicas de Bárions (BAO). Veremos as particularidades de cada um destes observáveis e como é possível obter informações físicas relevantes usando-os como ferramentas para medir distâncias no universo. Medir distâncias com precisão é uma tarefa difícil em muitos ramos da astronomia e a cosmologia não é exceção.

Nossa abordagem consiste em reproduzir alguns resultados clássicos da litera-

tura através de estatística *bayesiana* aplicada ao método do chi-quadrado. Para as SN Ia utilizamos a amostra de Kowalski et al. (2008) com 307 supernovas; para BAO utilizamos os dados do Sloan Digital Sky Survey Data Release 3 (SDSS 3) com os quais reobtivemos os resultados de Eisenstein et al. (2005) e finalmente reconstruímos os resultados combinados de SN+BAO, confirmando o atual cenário da cosmologia.

Dedicamos atenção especial ao estudo de BAO por exigir conceitos de estatística mais elaborados e por causa da teoria física que está por trás deste observável. Nosso foco estará direcionado ao processo de aglomeração da matéria na forma das estruturas observadas e como estas permitem a determinação de parâmetros cosmológicos em conjunto com a CMB.

Embora o modelo Λ CDM seja atualmente a melhor descrição do universo segundo os dados observacionais, notamos que ainda há lacunas não preenchidas; em nosso estudo de BAO, por exemplo, ressaltamos algumas dificuldades estatísticas (correlação estatísticas) e algumas pendências não esclarecidas relativas à própria metodologia usada na literatura específica. Por isso sugerimos ao final do texto orientações ao trabalho que desenvolvemos que possibilitariam análises mais profundas e rigorosas.

Palavras-chaves: Cosmologia, Estatística.

Abstract

This work is a brief description of the main properties of the standard model of cosmology, known as Λ CDM. This model describes a universe dominated by cold dark matter and a cosmological constant (Λ). However, the term Λ CDM is usually generalized in order to incorporate an initial phase of inflationary expansion. This means that the early universe passed through a phase of exponential expansion which caused the conditions required for the present configuration observed in the CMB and in the Large Scale Structure; there is some kind of matter (called dark matter) which only interacts gravitationally and therefore dominates the clustering of visible (baryonic) matter; there is some kind of exotic fluid/energy with constant density that constitutes about 70% of the universe (cosmological constant Λ) and is responsible for the accelerated expansion.

This model gained a good reputation during the last forty years for presenting a reasonable and simple description of universe, using a set of six primary parameters and several derived ones, whose physical origin is predicted by the mechanisms described by the model (Komatsu et al., 2011). At present these parameters have been well determined through the analysis of cosmological observables such as CMB and gravitational lenses. The most recent contribution in this field was the work with type Ia supernovae as probes of the accelerated expansion in the universe (Physics Nobel Prize of 2011).

The main purpose of our research is to explore the statistical methods broadly used when one wants to obtain the constraints on cosmological parameters using some observables, in particular: the type Ia Supernovae (SN Ia) and the Baryon Acoustic Oscillations (BAO). We will see the specificities of each observable and how one can obtain relevant physical informations using them as tools to measure distances in the universe. The precise determination of distances is a big task for the major branches in astronomy, and cosmology is not an exception.

In our approach we reproduce some classical results from the literature using bayesian statistics applied to the chi-square method. For the SNe Ia we used the sample of Kowalski et al. (2008) with 307 supernovae; for the BAO we chose the Sloan Digital Sky Survey Data Release 3 (SDSS 3) from which we re-obtained the results of Eisenstein

et al. (2005) and finally we reconstructed the results combining SN+BAO, confirming the present cosmological scenario.

The BAO analysis deserves special care because it requires an elaborated statistical background and because of the physical theory describing this observable. Our focus will be directed to the process of clustering of matter in the form of the large structures and how these ones allow the determination of cosmological parameters when combined to CMB studies.

Although the Λ CDM model is at present the best description of the universe according to the observational data, we point some blanks; in our BAO study, for instance, we highlighted some statistical difficulties (statistical correlations) and some non-resolved topics related to the methodology developed in the specific literature. That is why we suggest at the end of the text possible ways for deeper and rigorous treatments.

Keywords: Cosmology, Statistics.

Agradecimentos

Glória a Deus por tudo!

Agradeço a todos os meus parentes e amigos, pelo encorajamento e apoio.

Ao professor Miguel Quartin pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do Observatório do Valongo e do Instituto de Física pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram para nossa formação pessoal e profissional.

*“Precisamos de uma só e única coisa:
uma alma sóbria”.*

Ancião Pimem do Egito (Filocalia)

*“A astronomia é útil porque nos eleva
acima de nós mesmos; é útil porque é
grande; é útil porque é bela; é isso que se
precisa dizer.”*

H. Poincaré (O valor da ciência)

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	10
1 Introdução	11
2 O modelo padrão da cosmologia	13
2.1 História	13
2.2 Generalidades	14
3 Cosmografia	20
3.1 Equações básicas	20
3.2 Distância comóvel	21
3.3 Distância de diâmetro angular	22
3.4 Distância de luminosidade	23
4 A questão dos observáveis	24
4.1 SN Ia	24
4.1.1 Fenomenologia	24
4.1.2 Metodologia	26
4.2 BAO	30
4.2.1 Rudimentos teóricos	30
4.2.2 Aplicações	32
5 Considerações finais	45

Lista de Figuras

2.1	Plano Fundamental da Cosmologia	18
4.1	Curvas de luz de Supernovas de tipo Ia; Kim et al. (1996)	25
4.2	Vínculos da análise de supernovas com $w = -1$	28
4.3	Vínculos sobre w da análise de supernovas para universo plano	29
4.4	Marginalizações da função \mathcal{L} sobre $\Omega_{m,0}$ (4.4a) e $\Omega_{\Lambda,0}$ (4.4b)	29
4.5	Evolução das perturbações primordiais	31
4.6	Espectro de potência da CMB	33
4.7	Resultados obtidos através de simulações realizadas com o código CAMB	35
4.8	Resultados clássicos da literatura - Eisenstein et al. (2005)	36
4.9	Função de correlação global $\xi(r)$	37
4.10	Verificação da escala acústica em $\approx 105h^{-1}$ Mpc	38
4.11	Verificação alternativa da corcova ou <i>bump</i> em $\approx 105h^{-1}$ Mpc	39
4.12	Matriz de correlação (estimador padrão)	40
4.13	Vínculos obtidos para BAO com o indicador r_{BAO}	42
4.14	Vínculos combinados para BAO e SN assumindo $w = -1$	43
4.15	Vínculos sobre w combinados para BAO e SN assumindo universo plano	44

Lista de Tabelas

3.1	Equações de estado	22
-----	------------------------------	----

1 Introdução

Embora a ciência contemporânea caminhe para níveis de especificidade e rigor cada vez mais restritos, é evidente o fascínio que ela exerce nos leigos e entusiastas. Essa reclusão em matéria de conteúdo tem contrastado com a popularização das experiências e evidências naturais que os cientistas trazem à luz e que integram os grupos de discussão de forma geral.

A recente entrega do prêmio Nobel de Física de 2011 como resultado das pesquisas desenvolvidas nos projetos *Supernova Cosmology Project* e *High-z Supernova Search Team*, por exemplo, foi o reconhecimento formal diante da sociedade de um fato que já permeava os círculos de pesquisadores e intelectuais da ciência: o universo está se expandindo numa taxa acelerada.

Infelizmente, nossa presunção e orgulho típicos do *ser humano moderno* do século 21 ocultam e desprezam cada vez mais a herança que as antigas civilizações dos gregos, chineses, e tantos outros nos legaram: o universo, entendido como uma entidade dinâmica deixa-se revelar através de mecanismos regulares e precisos que se distribuem em níveis e padrões de complexidade variados. É natural que uma grande soma de dinheiro, dada por uma instituição de renome internacional confira *status* a essa ou àquela teoria, mas a compreensão física do universo tem se consolidado sob uma égide de evidências e argumentos robustos.

Divergências e críticas sempre existirão dentro do organismo científico contribuindo de forma geral para a saúde e subsistência do mesmo. No que tange à cosmologia moderna, um dentre os muitos cenários de universo tem resistido com bravura às investidas das mais diversas propostas que, embora interessantes, não têm obtido sucesso em desbancar o atual modelo padrão, mais conhecido como Λ CDM (Λ -Cold Dark Matter).

A história recente, mais precisamente os últimos 70 anos, mostra que a cosmologia percorreu um árduo êxodo desde os campos da especulação e extrapolação teórica até ser convidada a integrar o *hall* das ciências físicas. Começando pela Relatividade Geral e as descrições subsequentes a respeito da dinâmica do universo, surgiu em paralelo uma tecnologia aliada aos métodos observacionais. As técnicas responderam com satisfação

aos anseios dos teóricos, que em contrapartida iniciaram uma sistematização mais precisa dos fundamentos da cosmologia moderna. Por volta da década de 1980 as bases para o atual modelo padrão da cosmologia estavam lançadas e firmadas sobre terreno plano. Hoje vivemos a era da *Cosmologia de precisão*.

Esse trabalho trata da fenomenologia e metodologia observacional presentes no modelo Λ CDM, com um viés orientado para o estudo da expansão acelerada. Inicialmente serão apresentadas as características básicas do modelo no cenário da cosmologia atual; em seguida, passando à discussão dos métodos observacionais, serão explorados dois observáveis importantes: as Supernovas Ia (SN Ia) e as Oscilações Acústicas de Bárions (*BAO*, em inglês). Não pretendemos fazer uma abordagem suficientemente formal e rigorosa dos métodos estatísticos. Por isso os observáveis supracitados são avaliados desde sua fundamentação teórica até a aplicabilidade na investigação da expansão cósmica.

2 O modelo padrão da cosmologia

2.1 História

O programa cosmológico de Albert Einstein estava sob muitos aspectos atrelado à concepção mecanicista *newtoniana*. O mais evidente deles era a ideia de um universo estático. A revolução relativista pareceu exceder as expectativas de seu próprio idealizador, de modo que Einstein teve de alterar suas equações de campo adicionando um termo para contrabalancear o efeito dinâmico não desejado e forçar o esquema que mais agradava suas pré-concepções (Einstein, 1917). Mais precisamente, este termo na forma de uma constante atuaria contra a tendência natural de acúmulo de matéria não relativística causada pela gravitação e manteria o universo estático.

Posteriormente, Friedmann (1922) e Lemaître (1927) construíram modelos baseados na Relatividade Geral que incluíam ou não o termo, hoje conhecido como constante cosmológica (Λ). Lemaître em particular mostrou que a solução estática de Einstein era instável quando submetida a perturbações na densidade. Em 1929 o astrônomo Edwin Hubble observou uma relação empírica entre a velocidade de recessão de galáxias próximas e as distâncias até elas (lei de Hubble) evidenciando argumentos a favor da expansão cósmica e descartando a necessidade da constante cosmológica como ingrediente para o universo estático.

Seguindo toda essa sucessão de fatos a constante cosmológica permaneceu em segundo plano até as últimas duas décadas do século passado. Nesse período surgiram algumas evidências indiretas a seu favor, por exemplo: a descoberta do fundo cósmico em microondas (*CMB*, em inglês) por Penzias and Wilson (1965), o desenvolvimento das teorias de inflação (Starobinsky, 1980; Guth, 1981; Mukhanov and Chibisov, 1981) e de perturbação cosmológica (Bardeen, 1980; Kodama and Sasaki, 1984), pesquisas que buscaram estimar a idade do universo (Jimenez et al., 1996), o estudo de aglomerados de galáxias em grande escala (Tegmark et al., 2004) aliada a compreensão da matéria escura fria (Blumenthal et al., 1984). Soma-se a esses fatores a confluência de resultados vindos de testes e metodologias diferentes, tais como as SN Ia e BAO.

Todos esses pontos foram fundamentais para a afirmação da descrição cósmica a partir do que chamamos *Hot Big Bang*, ou Modelo Padrão, unindo a Relatividade Geral à Física de Partículas no terreno teórico e estabelecendo como alicerces visíveis todas as evidências empíricas e estatísticas.

2.2 Generalidades

O modelo padrão faz uso do Princípio Copernicano, que assume como condições necessárias a homogeneidade e a isotropia do universo em grandes escalas.

Em termos geométricos essa descrição pode ser traduzida pelo elemento de linha espaço-temporal associado a métrica de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker(FLRW)*:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + d\sigma^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala que relaciona separações físicas (\mathbf{x}) e comóveis (\mathbf{r}) pela expressão $\mathbf{x} = a\mathbf{r}$ e $k = -1, 0, +1$ representa o sinal da tri-curvatura espacial¹. O termo $d\sigma$ corresponde ao elemento de linha tri-dimensional (espacial).

As componentes materiais, representadas pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ são aquelas de um fluido perfeito em coordenadas comóveis, ou seja:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + P)u^{\mu}u_{\nu} + P\delta_{\nu}^{\mu} \quad (2.2)$$

e que obedece à lei de conservação de energia-momento na forma $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$ onde $u^{\mu} = (-1, 0, 0, 0)$ é a quadri-velocidade do fluido e P e ρ são a pressão e a densidade de energia, respectivamente. Na equação $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$ o símbolo $(;)$ indica derivação covariante, uma generalização da derivada vetorial (nesse caso tensorial) para espaços curvos.

Assim, aplicando as condições acima nas equações de campo da Relatividade Geral:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

obtemos as eqs. de *Friedmann*² a partir das componentes (00) e (ii):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.4)$$

$$\dot{\rho} + 3\rho(1 + w)H = 0 \quad (2.5)$$

¹Nesse caso $a(t)$ tem dimensão de [comprimento] e \mathbf{r} é adimensional.

²Aqui usamos unidades de Planck ao omitirmos o termo c^2 , fixando $c=1$.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1+3w) \quad (2.6)$$

onde $H(t) \equiv \dot{a}/a$ é chamado *parâmetro de Hubble* e descreve a taxa de expansão do universo e $w \equiv P/\rho$ é o parâmetro da equação de estado do fluido. A terceira equação é dita *eq. de aceleração*³. Resolvendo as eqs. (2.4) e (2.5) encontramos como soluções gerais para um único fluido de eq. de estado w constante:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad a \propto t^{2/(3(1+w))}. \quad (2.7)$$

A equação (2.4) pode ser escrita na forma:

$$\Omega_T + \Omega_k = 1 \quad (2.8)$$

onde os termos Ω_T e Ω_k são respectivamente os parâmetros de densidade correspondentes às componentes do fluido cósmico e à curvatura. Por definição:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.9)$$

onde ρ_c é a densidade obtida fixando $k = 0$ para um dado valor de H (no caso hoje, representado pelo índice subscrito 0), chamada *densidade crítica*. Podemos separar as componentes do fluido em matéria e radiação ($\Omega_T = \Omega_m + \Omega_r$), além é claro do termo de curvatura:

$$\Omega_{m,0} = \frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2}, \quad \Omega_{r,0} = \frac{8\pi G\rho_r}{3H_0^2}, \quad \Omega_{k,0} = -\frac{kc^2}{(a_0H_0)^2}. \quad (2.10)$$

Pela eq. (2.5) percebemos como a densidade evolui e pela eq. (2.4) vemos como ela afeta a dinâmica do universo juntamente com a curvatura. Também pela eq. (2.8) são apresentados os **vínculos** sobre os parâmetros de densidade, usando como referencial o universo plano. Assim, a partir das propriedades da matéria/energia é possível determinar o comportamento do fator de escala $a(t)$ e das suas derivadas, caracterizando a história evolutiva do espaço-tempo em grande escala.

Tais vínculos serão de fundamental importância nas seções seguintes, uma vez que a determinação precisa deles contribui para a obtenção de outros parâmetros, como a idade do universo, por exemplo.

Contudo, o panorama acima não está completo. As recentes evidências observacionais obtidas com as sondas COBE e WMAP favoreceram um modelo de universo

³Na verdade existem apenas duas equações de Friedmann independentes. A terceira é obtida combinando as outras duas.

plano em expansão acelerada (Smoot et al., 1992; Spergel et al., 2003). Entretanto, os resultados obtidos para a idade do universo eram inconsistentes com uma dinâmica dominada exclusivamente por matéria/energia convencionais e pelas estimativas obtidas com aglomerados globulares (Jimenez et al., 1996). Os dados sugeriam que em grandes escalas a gravitação se torna repulsiva. No contexto das eqs. de Friedmann (2.4) e (2.5), isso só seria possível através de algum tipo de componente material exótica com pressão negativa como pode ser verificado na eq. (2.6):

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow P < -\rho/3 \Rightarrow w < -1/3. \quad (2.11)$$

Uma forma de quantificar a expansão observada, realizada pelos grupos vencedores do Nobel de Física de 2011, consiste em medir o *parâmetro de desaceleração* q_0 : quanto maior q_0 , mais rapidamente o universo desacelera. Consideremos a expansão do fator de escala $a(t)$ em torno do seu valor atual $a(t_0) = a_0$:

$$a(t) = a_0 + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \dots$$

ou

$$(2.12)$$

$$a(t) = a_0 \left(1 + H_0[t - t_0] - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 [t - t_0]^2 + \dots \right)$$

onde definimos o parâmetro q_0 através da derivada segunda de $a(t)$:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a_0 H_0^2}. \quad (2.13)$$

Usando as definições (2.10) num universo com constante cosmológica Λ escrevemos:

$$q_0 = \frac{\Omega_{m,0}}{2} - \Omega_{\Lambda,0} \quad (2.14)$$

que satisfaz a expansão acelerada se $q_0 < 0 \Rightarrow \Omega_{\Lambda,0} > \Omega_{m,0}/2$

Pelo modelo padrão, a candidata à “vaga” de fluido exótico foi ocupada pela chamada **energia escura** (*dark energy*). O caso específico para o qual $w = -1$, ou seja, $\rho = \text{const.} = -P$ (cf. eq. (2.5)) corresponde à conhecida constante cosmológica Λ , outrora adicionada no lado esquerdo das equações de Einstein como uma modificação da curvatura ($\Lambda g_{\mu\nu}$). Existe atualmente uma disputa entre os teóricos para tentar resolver alguns problemas relativos à natureza da energia escura ou do mecanismo não convencional que gera a aceleração. As muitas tentativas que buscam explicar a aceleração podem ser classificadas em dois grupos principais: modificações da gravidade e novas componentes de energia (essa linha de pesquisa é ainda muito controversa e está baseada na Teoria Quântica de Campos).

No geral, em que pese as dificuldades de interpretação da energia escura enquanto constante cosmológica, ela é comumente estudada como uma nova forma de energia, integrando o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ e contribuindo com um efeito gravitacional repulsivo, aparentemente imperceptível nas pequenas escalas do universo. Fazendo as devidas substituições na eq. (2.10) obtemos um termo semelhante para a energia escura:

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{8\pi G\rho_{\Lambda}}{3H_0^2}. \quad (2.15)$$

A constante cosmológica também é fundamental na teoria de **expansão inflacionária** que descreve a dinâmica do universo primordial através de uma expansão exponencial do fator de escala: $a(t) \propto \exp(Ht)$. A ideia da inflação surgiu na década de 1980 como uma tentativa de solucionar problemas não explicados pelos mecanismos de expansão conhecidos (Guth, 1981). Os principais problemas ficaram conhecidos como: o problema da “**planura**” (do inglês *flatness*) e está relacionado ao fato de que a curvatura deveria ser muito pequena no passado remoto para satisfazer a configuração atualmente observada; o problema do **horizonte**, ou seja, por que regiões causalmente desconectadas no céu possuem a mesma temperatura e como foram formadas as anisotropias na CMB; o problema das **partículas fósseis** que aponta para os monopólos magnéticos supostamente produzidos em abundância e que não são atualmente observados.

Além da inflação existem outros tópicos de suma importância que compõem o modelo e que não serão discutidos com o devido detalhe pois fogem ao escopo deste trabalho, mas que estão descritos resumidamente abaixo:

1. Nucleosíntese primordial: mecanismo que prevê a abundância de elementos leves como hidrogênio e hélio, formados no início do universo (depende sensivelmente da densidade de bárions);
2. Estruturas em grande escala: dinâmica das instabilidades gravitacionais na evolução das perturbações cosmológicas⁴ e consequente formação das estruturas em grande escala;
3. CDM (*cold dark matter*): distribuição da matéria escura fria, detecção e sua natureza;

⁴Na seção 4.2 faremos uma exposição fenomenológica do mecanismo das oscilações acústicas através das perturbações cosmológicas

4. CMB⁵: registro fóssil do universo primordial; existe uma concordância altamente precisa entre teoria e observação (Spergel et al., 2003); além disso a CMB apresenta vínculos observacionais sobre inflação, curvatura espacial e parâmetros de densidade.

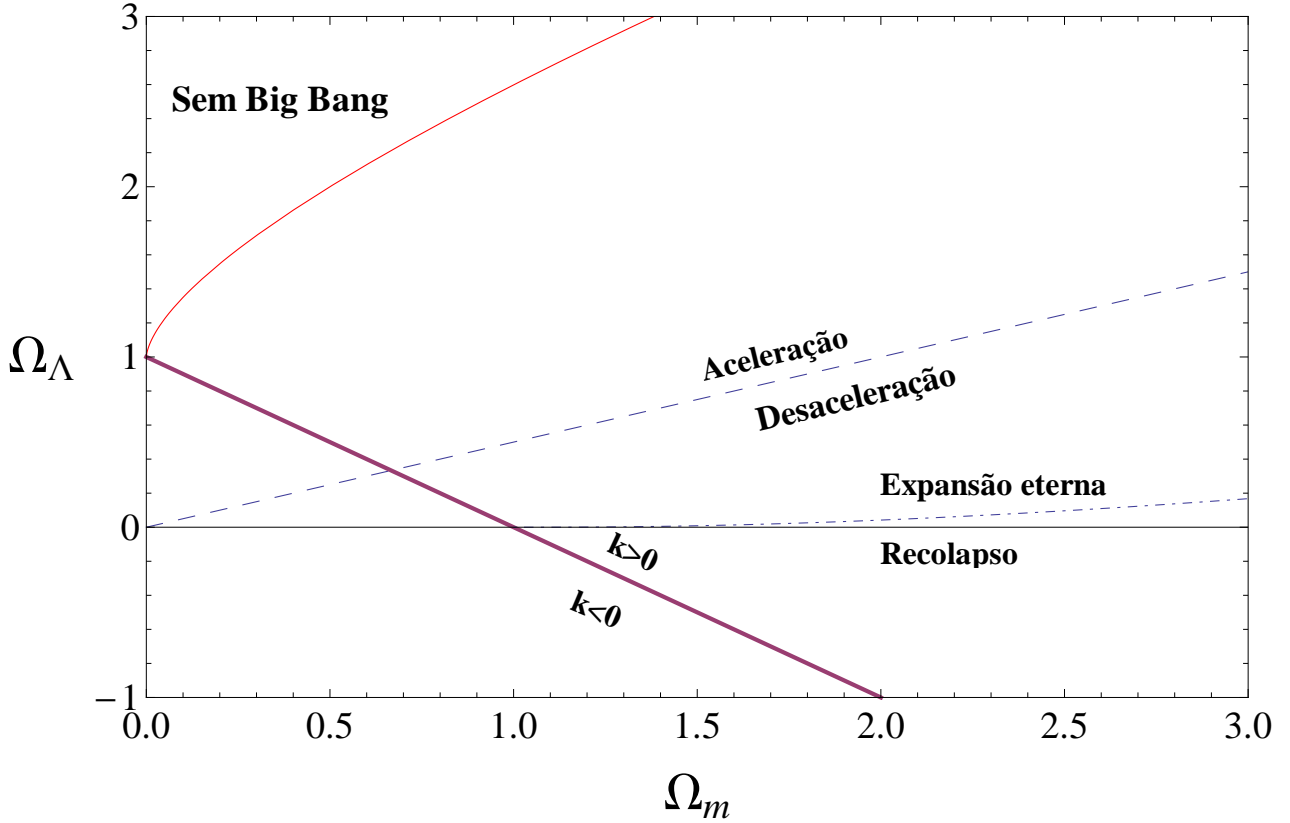


Figura 2.1: Plano Fundamental da Cosmologia
Construído a partir dos vínculos sobre $\Omega_{\Lambda,0}$ e $\Omega_{m,0}$

Finalizamos este capítulo com um gráfico que é popularmente conhecido como Plano Fundamental da Cosmologia (fig. 2.1). Neste gráfico nós reunimos os possíveis regimes da dinâmica do universo em termos das quantidades relativas de matéria (Ω_m) e constante cosmológica (Ω_Λ)⁶. Por isso uma das tarefas da cosmologia observacional é estabelecer com precisão neste esquema evolutivo o lugar do universo que observamos.

Na eq. (2.10) vimos como as densidades das espécies podem ser expressas em termos da densidade crítica ρ_c e na Eq. de Friedmann (2.8) como elas estão vinculadas. Como a contribuição da radiação é em geral desprezada ($\Omega_r \approx 8 \times 10^{-5}$), ficamos com $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k$, caracterizando três tipos de universo segundo a geometria (linha violeta na fig. 2.1):

⁵Uma breve descrição a respeito das observações da CMB será apresentada na seção 4.2

⁶Aqui omitimos o subíndice 0, embora essas quantidades correspondam aos valores atuais

1. universo com curvatura negativa: $0 < \Omega_m + \Omega_\Lambda < 1$
2. universo plano: $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$
3. universo com curvatura positiva: $\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1$.

De outro modo, usando o parâmetro de desaceleração q_0 podemos analisar a cinemática da expansão através da eq. (2.14) (linha tracejada na fig. 2.1):

1. expande aceleradamente: $q_0 < 0$
2. expande desaceleradamente: $q_0 > 0$.

As expressões que descrevem as demais regiões são obtidas numericamente (Felten and Isaacman, 1986) como soluções da Equação de Friedmann⁷ (2.4) e definem os limites globais da dinâmica no futuro (expansão eterna ou recolapso) e no passado (big bang ou ricochete, conhecido como *bounce*).

⁷Escrita na forma (3.9); veja seção 3.2

3 Cosmografia

Após expor os fundamentos que compoem o modelo padrão Λ CDM, passemos ao estudo das metodologias que nos permitem obter quantidades físicas dentro do contexto da expansão cosmológica.

Explicaremos ao longo das seções seguintes como as diferentes definições de distância usadas em cosmologia permitem avaliar a configuração atual do universo pela obtenção de vínculos sobre parâmetros cosmológicos.

3.1 Equações básicas

Como já observado na seção anterior, o conteúdo energético/material contido no universo é responsável por curvar o espaço-tempo e as propriedades deste fluido ditam e governam a evolução do fator de escala de forma global. Essa dinâmica contribui para que a noção de distância em cosmologia perca seu caráter unívoco. Escrevemos a parte espacial $d\sigma$ do elemento de linha ds na métrica FLRW na forma genérica:

$$d\sigma_k^2 = d\xi^2 + (f_k(\xi))^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{array}{ccc} r = \text{sen } \xi & r = \xi & r = \text{senh } \xi \\ (k = +1) & (k = 0) & (k = -1) \end{array} \quad (3.2)$$

$$f_k(x) = \begin{cases} \text{sen } x & , \quad k = +1 \\ x & , \quad k = 0 \\ \text{senh } x & , \quad k = -1 \end{cases}$$

A função $f_k(\xi)$ descreve como as distâncias medidas numa esfera de raio ξ dependem da curvatura k e pode ser escrita de forma unificada como:

$$f_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \text{senh}(\sqrt{-k}\xi) \quad (3.3)$$

tal que o caso plano é obtido no limite $k \rightarrow 0^-$.

Um importante parâmetro que nos ajuda a identificar os efeitos da expansão é o redshift cosmológico z definido por:

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (3.4)$$

onde λ e λ_e são, respectivamente, o comprimento de onda recebido por um observador comóvel no instante da observação (t) e aquele atribuído por outro observador comóvel no instante da emissão (t_e). Uma vez que os comprimentos de onda são dilatados pelo fator de escala obtemos a relação $1 + z = a^{-1}$ onde usamos $a_0 = 1$ para a época atual¹, ou seja: $z_0 = 0$. Também observamos que o redshift aumenta no passado remoto, como pode ser verificado pela linearização $z \simeq H_0(t - t_e)$

Podemos utilizar a aproximação $z \simeq v/c$ para baixas velocidades de recessão ($v/c \ll 1$). Nessas condições, por exemplo, o parâmetro de Hubble é a constante de proporcionalidade H_0 entre a velocidade v de um objeto e a distância radial r ao observador (*Lei de Hubble*):

$$v \simeq H_0 r \simeq cz \quad (3.5)$$

$$H_0 = 100h \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \quad (3.6)$$

onde o parâmetro h descreve a incerteza em H_0 e é vinculado pelas observações do Hubble Key Project como $h = 0.72 \pm 0.08$ (Freedman et al., 2001).

Também introduzimos o raio (ou distância) de Hubble D_H , que em termos genéricos é uma grandeza que corresponde (grosseiramente) a escala do universo observável atualmente:

$$D_H = \frac{c}{H_0} \quad (3.7)$$

3.2 Distância comóvel

Retomando a discussão sobre distâncias, consideramos agora um raio de luz ($ds^2 = 0$) emitido no instante t_e e observado no instante t_0 . A *distância comóvel* d_c percorrida pelo fóton é definida como o caminho que ele percorreria se não houvesse interação:

$$d_c \equiv \int_{t_e}^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt = c\eta \quad (3.8)$$

onde $\eta \equiv \int_{t_e}^{t_0} dt/a(t)$ é chamado *tempo conforme*.

¹Note que a convenção $a_0 = 1$ só pode ser adotada se considerarmos o universo localmente plano.

A história térmica do universo é compreendida pelo prisma da formulação estatística da termodinâmica. As conhecidas distribuições quânticas de Fermi-Dirac (para férmions) e Bose-Einstein (para bósons) são usadas, respectivamente, na descrição de espécies relativísticas (fótons e neutrinos) e matéria não-relativística (bariônica ou escura). Na tabela a seguir estão os valores que o parâmetro w pode assumir para as espécies materiais e para a constante cosmológica:

	Matéria	Radiação	Λ
w	≈ 0	$1/3$	-1

Tabela 3.1: Equações de estado

Aplicando os valores de w descritos acima na primeira das eqs. (2.7) e usando a relação $1 + z = a^{-1}$, reescrevemos a eq. (2.4) na forma:

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \quad (3.9)$$

que dá a evolução de $H(z)$, ou seja, da taxa de evolução do universo e que permite escrever a distância comóvel como:

$$d_c = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3.10)$$

3.3 Distância de diâmetro angular

A distância de diâmetro angular comóvel d_A é definida por:

$$d_A = \frac{\delta x}{\delta \theta}. \quad (3.11)$$

onde δx é o tamanho físico de um objeto e $\delta \theta$ é o seu tamanho angular, medidos sobre a superfície de uma esfera de raio ξ . Portanto, a separação δx é dada pelo comportamento da função (3.3). No instante t :

$$\delta x = (a(t)f_k(\xi))\delta \theta. \quad (3.12)$$

A partir da eq. (2.10) escrevemos a curvatura² na forma $k = -\Omega_k(a_0 H_0)^2/c^2$ e substituindo na função $f_k(\xi)$ com $\xi = d_c$ construímos a *distância de diâmetro angular*

²Aqui k é a curvatura gaussiana do espaço quando $a(t) = 1$ e tem dimensão de [comprimento]⁻². Nesse caso o fator de escala $a(t)$ é adimensional.

comóvel d_A :

$$d_A = \frac{1}{1+z} \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_{k,0}}} \sinh \left(c \sqrt{\Omega_{k,0}} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right). \quad (3.13)$$

Aqui observamos a dependência explícita da distância d_A com a curvatura espacial k , e por conseguinte com as espécies materiais. Veja que d_A é menor num universo com $k > 0$, pois $\Omega_k < 0$, o que implica em ângulos maiores medidos no céu.

3.4 Distância de luminosidade

Suponhamos agora que queiramos medir distâncias a objetos cuja luminosidade é conhecida. Usamos a lei empírica do inverso do quadrado da distância:

$$\mathcal{F} = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (3.14)$$

onde $L = \Delta E / \Delta t$ é a luminosidade absoluta de uma fonte e \mathcal{F} é o fluxo observado à distância d_L ou *distância de luminosidade*. Admitamos que a fonte está no centro de uma esfera de raio comóvel $a_0 f_k(\xi)$ e que o fluxo é observado na superfície desta esfera, ou seja, $\mathcal{F} = L / 4\pi (a_0 f_k(\xi))^2$. Consideremos ainda o efeito da expansão sobre os fótons emitidos: sabendo que a energia E de um fóton é inversamente proporcional a seu comprimento de onda λ , então $\Delta E \propto \lambda^{-1} \propto a^{-1} \propto (1+z)$. E como $c = \lambda / \Delta t = \text{const.}$ obtemos $\Delta t \propto (1+z)^{-1}$, o que implica em $L \propto (1+z)^2$. Fazendo as devidas substituições na eq. (3.14) obtemos:

$$d_L = a_0 f_k(\xi) (1+z). \quad (3.15)$$

e usando $\xi = d_c$ na função $f_k(\xi)$ finalmente escrevemos:

$$d_L = (1+z) \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_{k,0}}} \sinh \left(c \sqrt{\Omega_{k,0}} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right). \quad (3.16)$$

Novamente observamos o vínculo estreito entre distância e a taxa de expansão do universo. Comparando as expressões finais para d_L e d_A chegamos a uma relação importante:

$$d_L = (1+z)^2 d_A \quad (3.17)$$

que é independente da cosmologia, ou seja, ambas distâncias apresentam as mesmas informações a respeito de $H(z)$ e dos Ω_i .

4 A questão dos observáveis

Nas seções seguintes serão apresentados os observáveis estudados durante a pesquisa e o trabalho desenvolvido em cada um deles. O método estatístico utilizado é aquele dos mínimos quadrados na forma do *chi-quadrado* (χ^2).

4.1 SN Ia

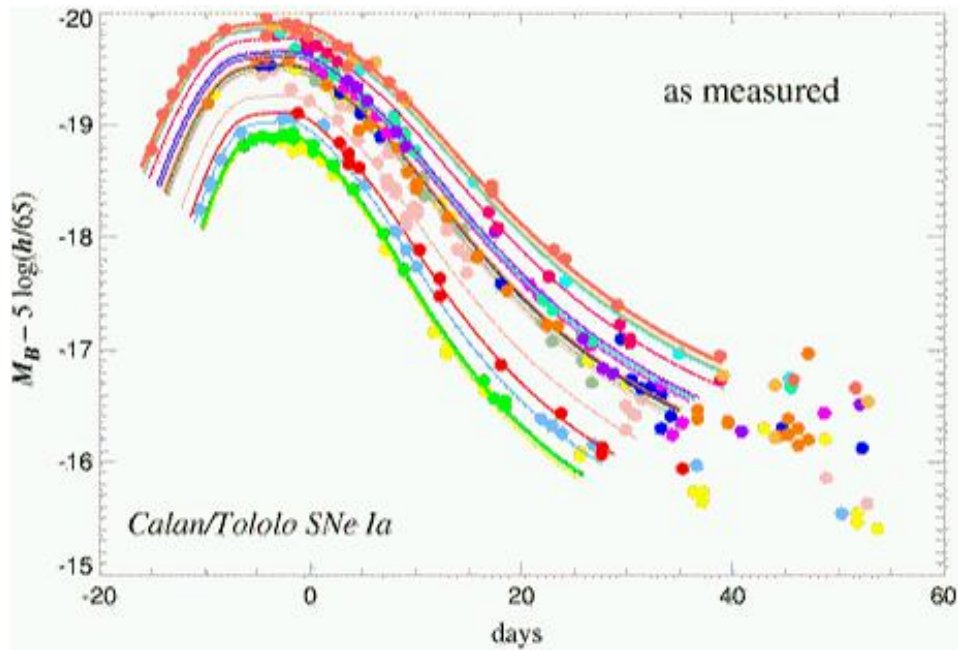
4.1.1 Fenomenologia

Como já mencionado na introdução deste trabalho, as supernovas estão na vanguarda da cosmologia moderna. Os motivos para essa consolidação devem-se sobretudo à evolução da sistemática observacional capaz de proporcionar métodos sempre mais robustos e precisos.

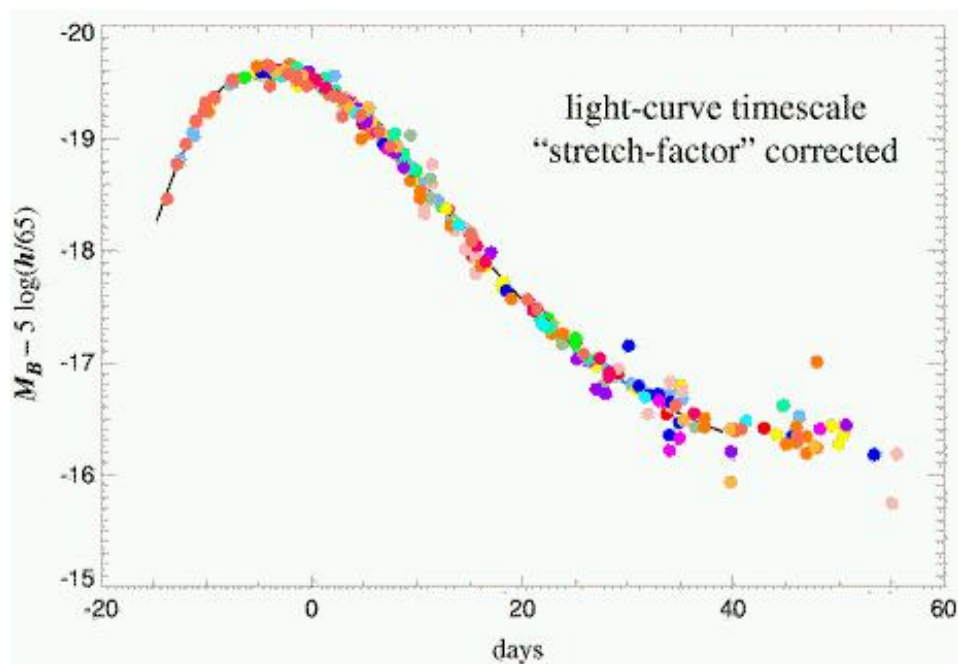
A atual teoria que descreve o estágio final de estrelas massivas diz que a implosão do núcleo numa supernova é exclusiva para aquelas que atingiram, pela fusão nuclear, o limite da produção de ferro; observacionalmente são caracterizadas por possuírem linhas de emissão ou absorção de hidrogênio no espectro e são chamadas *Supernovas II*. A massa M do remanescente é determinante no estágio seguinte que poderá ser uma estrela de nêutrons ou um buraco negro.

Contudo, as *Supernovas de tipo Ia (SN Ia)*, em especial, chamam a atenção dos cosmólogos devido a uma característica que lhes é fundamental: o brilho. Observações de supernovas deste tipo mostram que elas possuem luminosidades aproximadamente iguais sendo uma característica intrínseca destes objetos astrofísicos, independente da cosmologia. Além disso, o pico de luminosidade está vinculado a largura da curva de luz, o que foi confirmado recentemente através de pesquisas que apontaram um fator de parametrização dessas curvas (cf. fig. 4.1) que permite a redução da dispersão para aprox. 12% em torno do pico (Kim et al., 1996).

Acredita-se que esse tipo de objeto (*SN Ia*) seja formado em sistemas binários através do mecanismo de acreção da matéria de uma estrela gigante por uma estrela anã.



(a) Sobreposição das curvas de luz



(b) Uniformização após parametrização

Figura 4.1: Curvas de luz de Supernovas de tipo Ia; Kim et al. (1996)

Superior: curvas de luz para supernovas próximas. As distâncias relativas a esses objetos são calculadas a partir do redshift. Inferior: As mesmas curvas de luz após ajuste segundo a correlação empírica entre luminosidade e largura.

Quando esta última alcança o limite de Chandrasekhar ($1.44M_{\odot}$) ocorre a supernova pela queima explosiva do carbono. Acredita-se que essa condição inicial (a massa) comum a todas as *SNIa* seja responsável por produzir os efeitos observados e descritos pelo comportamento das curvas de luz.

Por isso, as *SNIa* recebem o epíteto “Velas Padrão” em função da pequena dispersão de sua luminosidade. A partir da luz emitida por esses objetos pode-se calcular com precisão satisfatória a distância até eles e a dependência com os parâmetros cosmológicos.

4.1.2 Metodologia

Tratando-se de uma “Vela Padrão” é natural que usemos a distância de luminosidade d_L como grandeza fundamental. Contudo, é preciso fazer uma observação: a análise de supernovas consiste numa análise de objetos individuais e *independentes* distribuídos em redshifts distintos. Por isso, cada objeto fornece uma *informação individual* sobre a cosmologia.

Por convenção utiliza-se como indicador de distância o *módulo de distância* MD determinado pelas observações das próprias supernovas através da relação distância-redshift dada pela eq. (3.5). O módulo de distância é definido como a diferença entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta M (a menos da correção K , aplicada quando os fluxos são diferenciais ou não bolométricos):

$$MD \equiv 5 \log \left(\frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right). \quad (4.1)$$

O desenvolvimento estatístico utilizado para a obtenção de vínculos sobre parâmetros cosmológicos segue uma abordagem *bayesiana*. De maneira grosseira, isso significa que queremos “atualizar” nosso conhecimento a respeito de uma hipótese ou evento considerando probabilidades subjetivamente. Ou seja, aprende-se sobre o evento **B** e então passamos a avaliar ou ter uma opinião melhor sobre o evento **A**.

O *teorema de Bayes* apresentado a seguir é fundamental para a compreensão deste mecanismo:

$$\mathcal{P}(H|D) = \frac{\mathcal{P}(H)\mathcal{P}(D|H)}{\mathcal{P}(D)} \quad (4.2)$$

onde o termo $\mathcal{P}(H|D)$ indica a probabilidade **a posteriori** de ocorrência da hipótese H supondo a ocorrência do evento D ; percebemos que a probabilidade condicional $\mathcal{P}(H|D)$

é obtida multiplicando a probabilidade **a priori** $\mathcal{P}(H)$ pelo fator $\mathcal{P}(D|H)/\mathcal{P}(D)$, onde $\mathcal{P}(D|H)$ é chamada *verossimilhança* da hipótese H.

Consideremos D como o conjunto de dados de grandezas físicas e a hipótese H como o modelo que descreve esses dados. A verossimilhança é o indicador da qualidade do ajuste dos dados ao modelo. Podemos dizer, portanto, que estamos interessados em investigar a distribuição de probabilidade para os parâmetros de um modelo (Λ CDM), uma vez que conhecemos os dados.

Consideremos um conjunto de dados D_i e um modelo $y(x_i)$ que descreve estes dados. Obtemos o ajuste de mínimos quadrados a partir da expressão (para dados não correlacionados):

$$\chi^2 = \sum_i w_i [D_i - y(x_i)]^2 \quad (4.3)$$

onde w_i são pesos apropriados, que nesse caso, correspondem a $w_i = 1/\sigma_i^2$, onde σ_i é o desvio padrão (erro) associado ao dado D_i . O valor χ^2 que minimiza a expressão anterior é chamado *chi-quadrado* e indica o melhor ajuste.

Nosso catálogo de supernovas Ia é o mesmo usado em Kowalski et al. (2008) e dispõe de 307 objetos com os respectivos redshifts, módulos de distância e erros nos módulos de distância. Assim, utilizamos as definições de distâncias dadas nas seções anteriores para calcular valores teóricos de MD dependentes dos parâmetros Ω_i e aplicá-los no cálculo de χ^2 . Com isso reobtivemos os vínculos sobre os parâmetros Ω_i (assumindo $w = -1$) pela análise do χ^2 exibidos na figura 4.2.

O gráfico 4.2 contém os vínculos sobre os parâmetros $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ na forma da eq. (2.8) para os níveis de confiança 68.3%, 95.4% e 99.73%. Percebemos que esse resultado é muito semelhante à fig. 15 de Kowalski et al. (2008) como pode ser verificado na fig. 4.14. O valor central que obtivemos ($\chi^2 = 321.97$) fornece $(\Omega_m; \Omega_\Lambda) = (0.4; 0.915)$.

Os percentuais citados indicam a região sob a função de verossimilhança (ou Likelihood) \mathcal{L} dos parâmetros de densidade, expressa na forma:

$$p = \int_R \mathcal{P}(H|D)dH \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L} \propto \exp [-(1/2)\chi^2] \quad (4.5)$$

onde p indica o nível de confiança e R o espaço de parâmetros. Os valores p podem ser entendidos como regiões sob a função \mathcal{L} correspondentes a seções constantes de χ^2 .

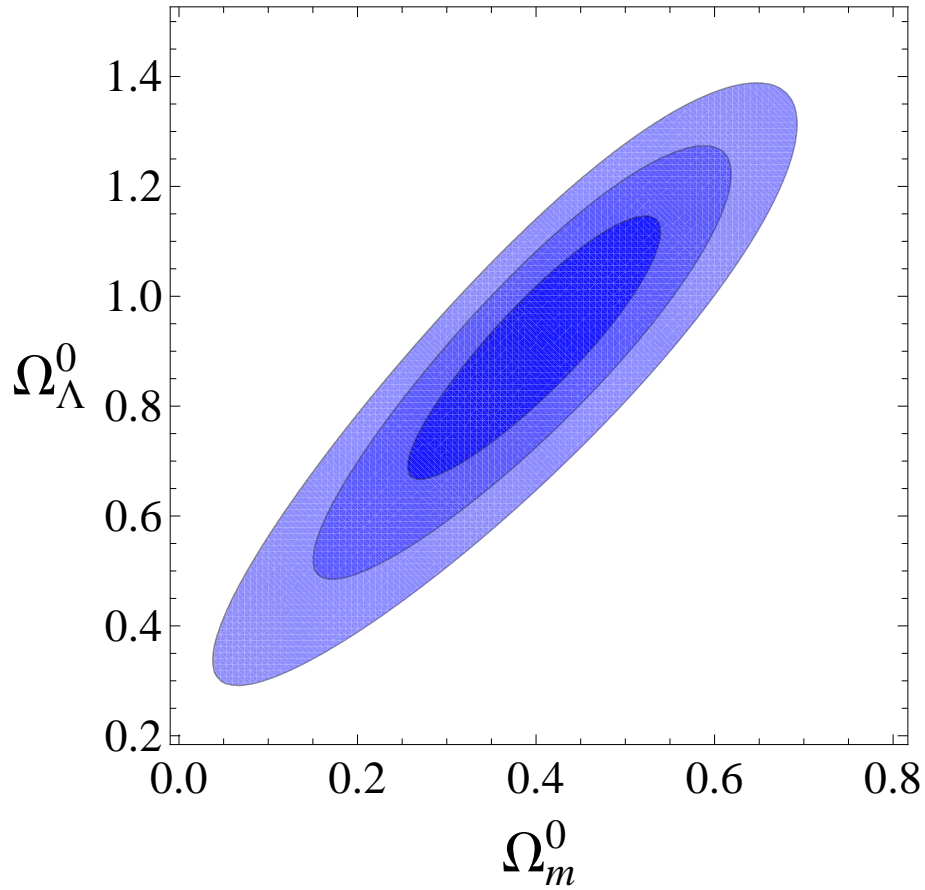


Figura 4.2: Vínculos da análise de supernovas com $w = -1$

Esta análise foi feita seguindo o processo de *marginalização* da função \mathcal{L} , que consiste em ocultar a informação de um parâmetro que, em princípio, não nos interessava, a fim de evidenciar a contribuição dos demais que são mais importantes. Em termos espaciais: nós projetamos a função \mathcal{L} sobre o parâmetro a ser marginalizado, reduzindo a dimensão do nosso espaço de parâmetros. Por exemplo, para o parâmetro h definido na eq. (3.6), realizamos a integração (numérica e analítica) da função \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = \int \mathcal{L}(\Omega_m, \Omega_\Lambda, h) dh. \quad (4.6)$$

Pelo mesmo processo obtivemos vínculos sobre w assumindo agora $\Omega_{k,0} = 0$, como pode ser verificado na fig. 4.3. Ressaltamos o acordo entre nossos resultados e aqueles de Kowalski et al. (2008) como percebemos na fig. 4.15.

Alguns exemplos de marginalizações e vínculos combinados podem ser visualizados na fig. 4.4 (novamente $k = 0$).

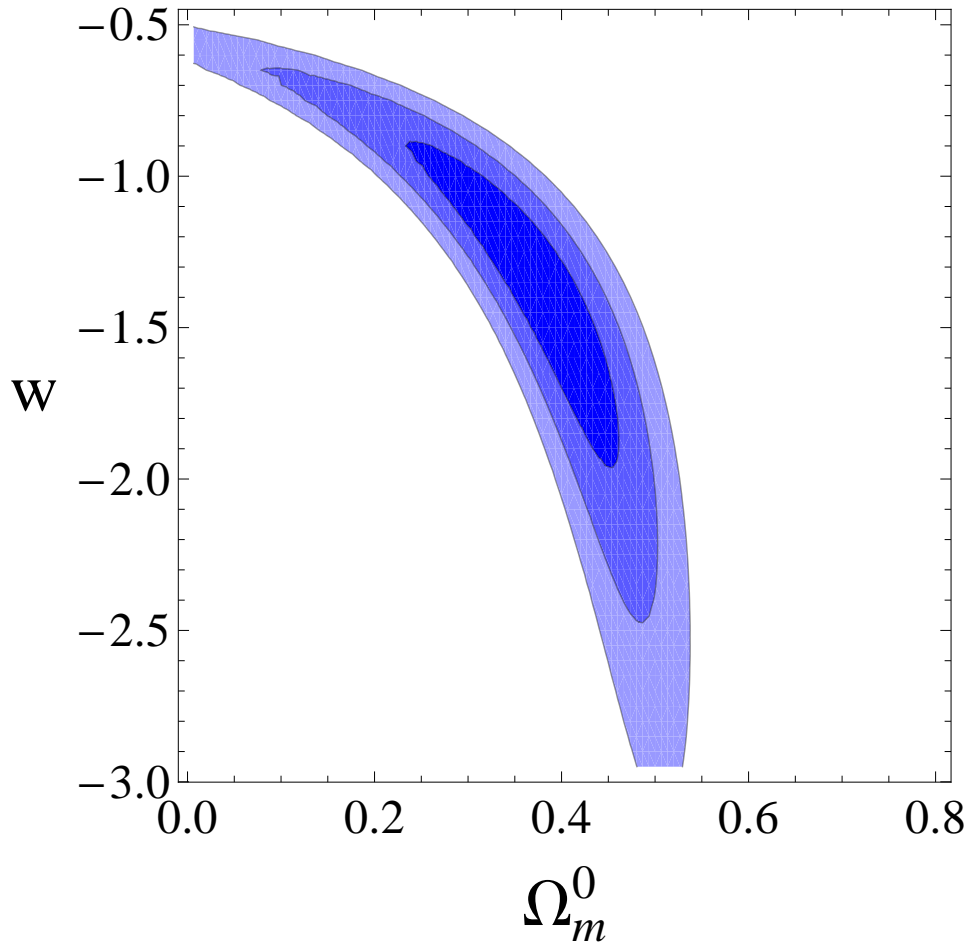
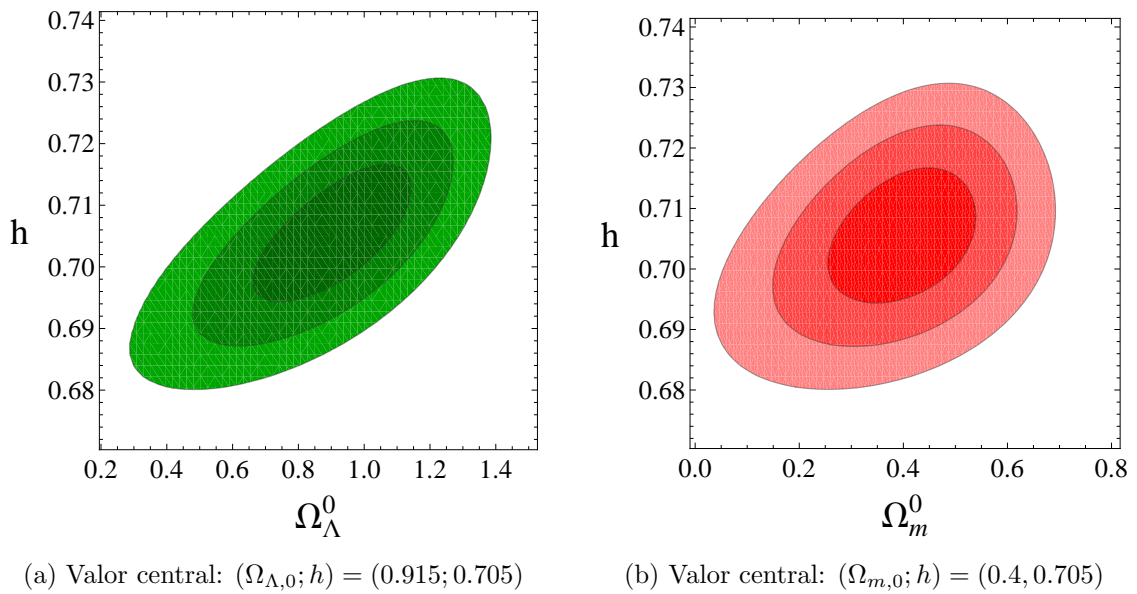


Figura 4.3: Vínculos sobre w da análise de supernovas para universo plano

O melhor ajuste calculado em $\chi^2 = 319.7$ é $(\Omega_{m,0}; w) = (0.373; -1.35)$



(a) Valor central: $(\Omega_{\Lambda,0}; h) = (0.915; 0.705)$

(b) Valor central: $(\Omega_{m,0}; h) = (0.4, 0.705)$

Figura 4.4: Marginalizações da função \mathcal{L} sobre $\Omega_{m,0}$ (4.4a) e $\Omega_{\Lambda,0}$ (4.4b)

4.2 BAO

4.2.1 Rudimentos teóricos

Faremos agora uma exposição didática do mecanismo físico associado às Oscilações Acústicas. O contexto por trás do desenvolvimento teórico vai desde o universo primordial até a formação das grandes estruturas atualmente observadas e envolve tópicos da teoria inflacionária e conceitos da física da CMB. A fig. 4.5 apresenta em sequência as fases de todo o processo descrito abaixo. Para um desenvolvimento rigoroso ver Eisenstein and Hu (1998).

Segundo a teoria de perturbação cosmológica, perturbações primordiais no fluido cósmico evoluem adiabaticamente. Inicialmente as componentes propagam-se uniformemente de acordo com as condições impostas pela inflação: enquanto a matéria escura cresce sob domínio exclusivo da gravidade, o fluido de bárions e fótons está fortemente acoplado e evolui através de um mecanismo que opõe a gravitação gerada pela matéria à pressão da radiação.

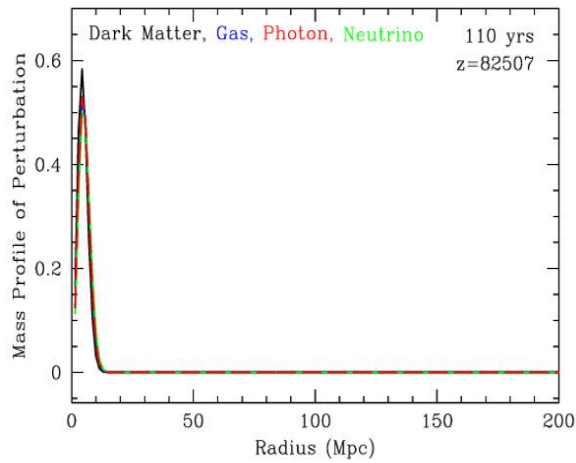
Essa dinâmica é análoga ao processo de propagação do som em um meio material, ou seja, variações de densidade pequenas que se propagam devido a variações de pressão. Por isso, esse fenômeno no contexto cosmológico recebe o nome de *Oscilações Acústicas de Bárions* (BAO em inglês) e está associado à dinâmica interna do fluido de bárions-fótons no universo primordial.

A medida que o universo expande, as condições de interação entre as partes do fluido são alteradas, de modo que elas passam a evoluir independentemente.

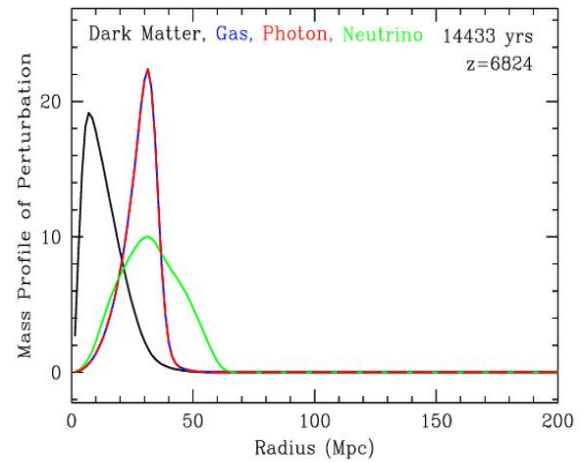
Em primeiro lugar, os neutrinos se dissociam do centro da perturbação em função de sua natureza fracamente interagente com as demais espécies.

Os fótons permanecem fortemente acoplados à matéria bariônica, sendo constantemente espalhados pelos elétrons livres através do espalhamento Thompson, já que as altas temperaturas mantém a matéria ionizada. Nessa época o universo é dito opaco.

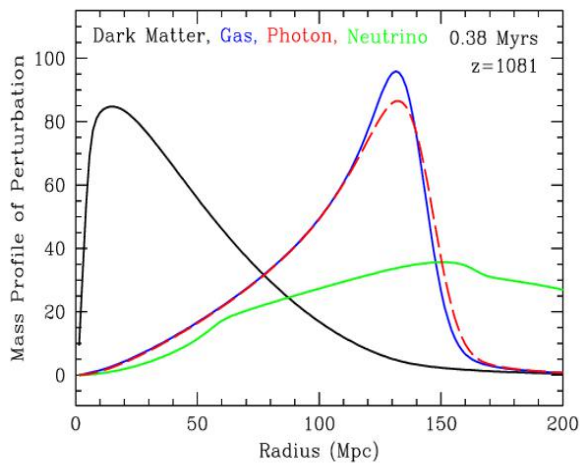
Posteriormente, quando o mecanismo de expansão reduz a temperatura a ponto de superar o espalhamento e permitir a formação de matéria neutra (quando a energia média do fóton torna-se muito menor do que a energia de ionização do hidrogênio), os fótons tornam-se livres atingindo um livre caminho médio da ordem do raio de Hubble. Os



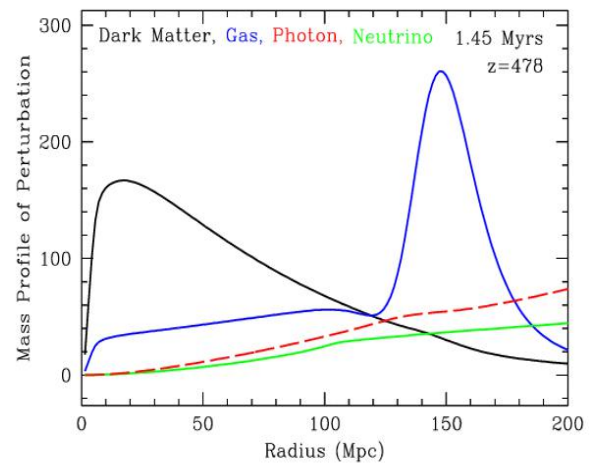
(a) Perturbação pontual inicial



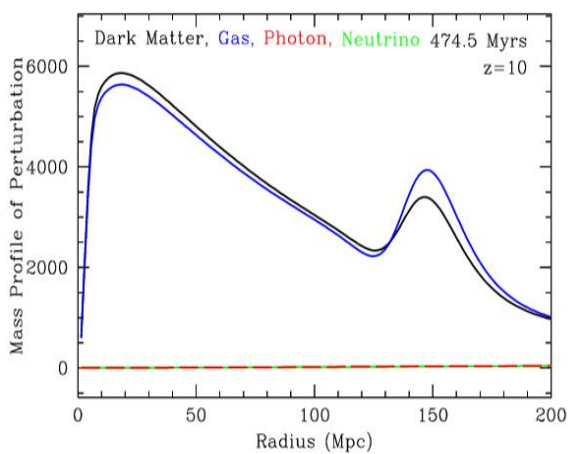
(b) Neutrinos evoluem independentemente



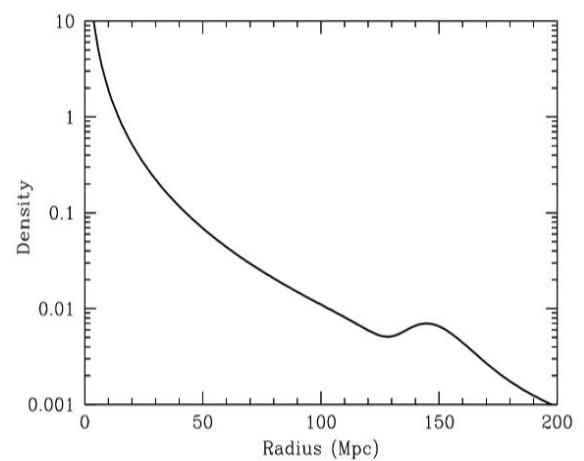
(c) Início da formação de matéria neutra



(d) Cada espécie evolui separadamente



(e) Formação do horizonte sonoro



(f) “Sobredensidade” na distribuição bariônica

Figura 4.5: Evolução das perturbações primordiais

Criadas com o CMBFast (Seljak e Zaldarriaga, 1996; Zaldarriaga e Seljak, 2000)

últimos fótons que se destacam do centro da perturbação constituem a mais antiga fonte de informação cósmica; hoje eles chegam até nós na forma de microondas e constituem a *CMB*.

Ao final do processo de desacoplamento entre matéria e radiação, que corresponde a chamada recombinação, a distância comóvel já percorrida pelas ondas sonoras desde o início do universo fica registrada no espectro das perturbações. Dá-se o nome de *horizonte sonoro* r_s a esta distância:

$$r_s = \int_0^{t_{rec}} \frac{c_s(t) dt}{1+z} = \int_{z_{rec}}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz \quad (4.7)$$

onde c_s é a velocidade do som, isto é, de propagação da perturbação. Esta escala caracteriza uma *régua padrão* e por isso é usada em cosmologia como unidade de medida de distância.

Do ponto de vista da formação de estruturas, a distância r_s corresponde ao comprimento de Jeans das perturbações durante a recombinação, significando o limiar que define os regimes de crescimento das próprias perturbações (grande ou pequena escala).

Após a recombinação a fração bariônica cresce juntamente com a matéria escura de acordo com a evolução das instabilidades gravitacionais. Contudo, enquanto a matéria escura se reúne no centro da perturbação, existe um excedente de bárions à distância r_s do centro. Esperamos, então, encontrar o seguinte padrão na atual configuração das estruturas observadas: concentrações de galáxias no centro dos aglomerados (dominados pela matéria escura) e um registro elevado de galáxias separadas por r_s .

4.2.2 Aplicações

Na seção 4.1 o método do chi-quadrado foi introduzido como a base do trabalho aqui desenvolvido. Agora caminharemos em paralelo por outra abordagem estatística fundamental no estudo de BAO.

Diferentemente de uma supernova, que constitui um evento no espaço-tempo, as oscilações acústicas são, como vimos, consequência de um processo cósmico (a evolução das perturbações) que tipifica o crescimento das espécies materiais no universo e, portanto, não pode ser medido diretamente.

Historicamente as evidências de BAO remontam ao estudo da CMB, sendo previstas como um efeito no espectro de potência angular C_l . O próprio nome BAO

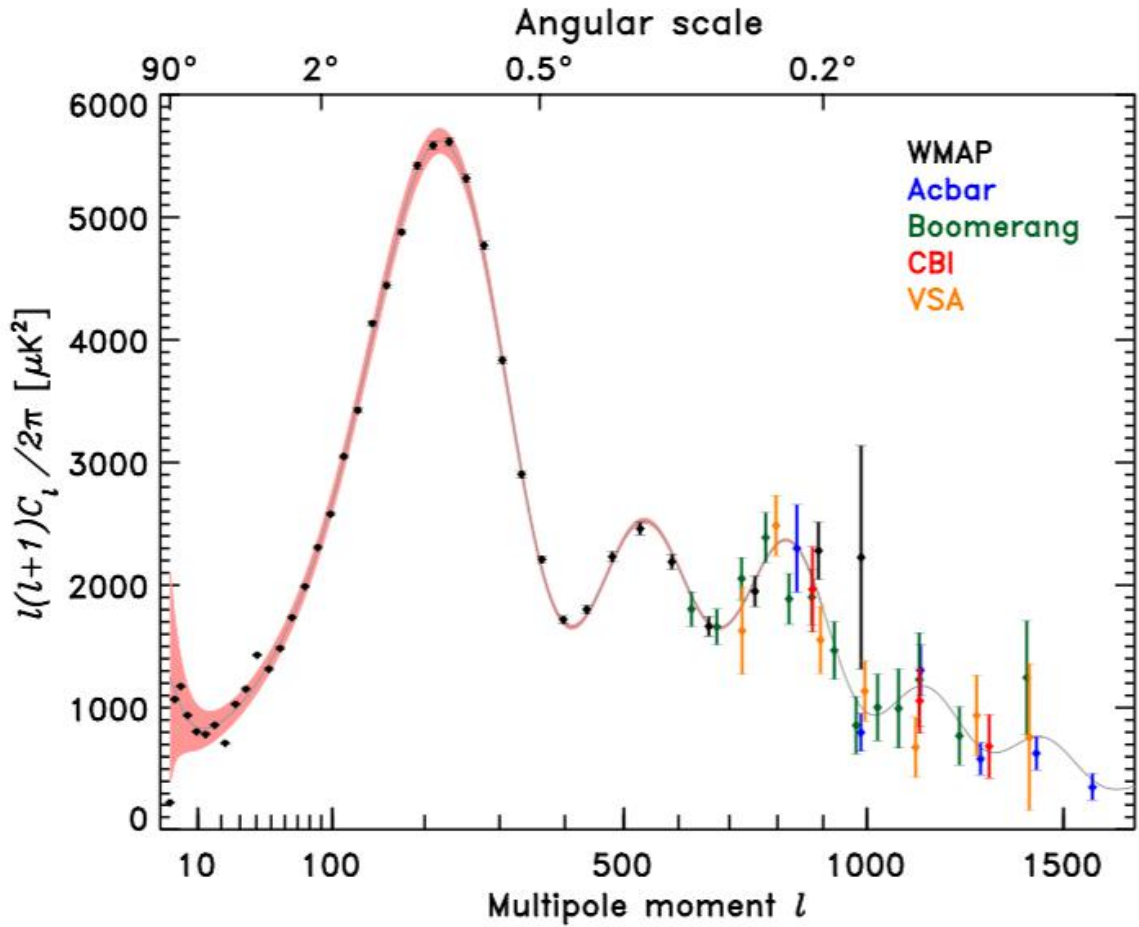


Figura 4.6: Espectro de potência da CMB

também tem raízes na idealização do espectro de potência exibido na fig. 4.6, além da analogia feita com as ondas de som no fluido de bárions-fótons (ver seção anterior).

A interpretação das alturas e posições dos picos é de importância fundamental. A altura do primeiro pico, por exemplo, corresponde a alterações na quantidade de matéria ($\Omega_m h^2$) responsável por modificar a velocidade do som c_s .

Mas a proposta apresentada aqui é reproduzir um resultado clássico da literatura: identificar o horizonte sonoro r_s na própria estrutura material do universo. A ideia é simples: pela teoria linear de BAO a existência da *corcova* (*bump*) a uma distância bem determinada do centro da perturbação é interpretada como um excesso de probabilidade de encontrar galáxias separadas por aquela distância. Assim, para uma distribuição suficientemente grande de galáxias deve existir uma distância mais *frequente* entre pares de galáxias.

Estatisticamente, a função que nos permite reproduzir este esquema é a função

de correlação de dois pontos $\xi(r)$. Consideremos N partículas distribuídas num volume V , tal que $dN_{ab} = \langle n_a n_b \rangle$ é a média do número de pares nos volumes dV_a e dV_b , separados por r_{ab} . Escrevemos $\xi(r_{ab})$ implicitamente:

$$dN_{ab} = \rho_0^2 dV_a dV_b (1 + \xi(r_{ab})) \quad (4.8)$$

onde ρ_0 é a densidade média de partículas no volume V . Fazendo $\rho_0 dV_a = 1$ obtemos:

$$dN_b = \rho_0 dV_b (1 + \xi(r_b)) \quad (4.9)$$

ou

$$\xi(r) = \frac{dN(r)}{\rho_0 dV} - 1 = \frac{\langle \rho_c \rangle}{\rho_0} - 1$$

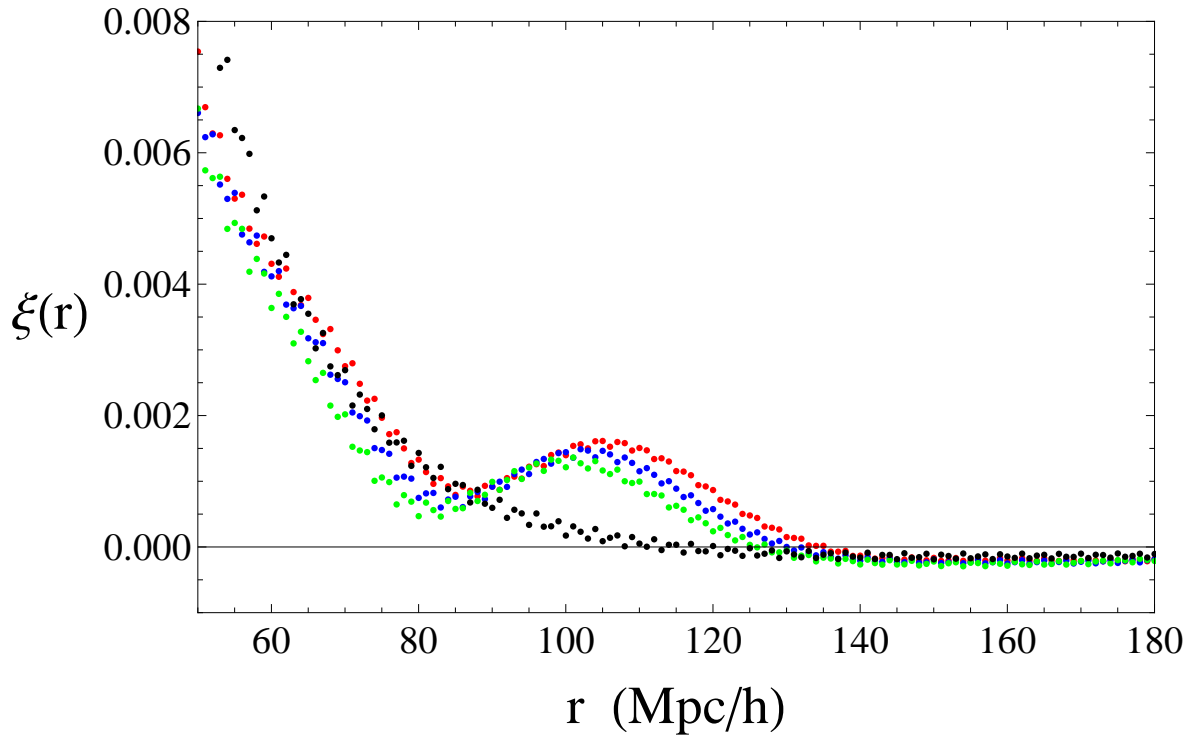
que pode ser entendido como o número médio de partículas à distância r desde qualquer outra partícula, dividido pelo número esperado de partículas à mesma distância numa distribuição uniforme.

Matematicamente, existe uma correspondência entre a escala r_s e as oscilações no espectro de potência da matéria. Essa relação pode ser entendida se considerarmos o *teorema de Wiener-Khinchin* que diz que o espectro de potência e a função de correlação formam um par de Transformadas de Fourier:

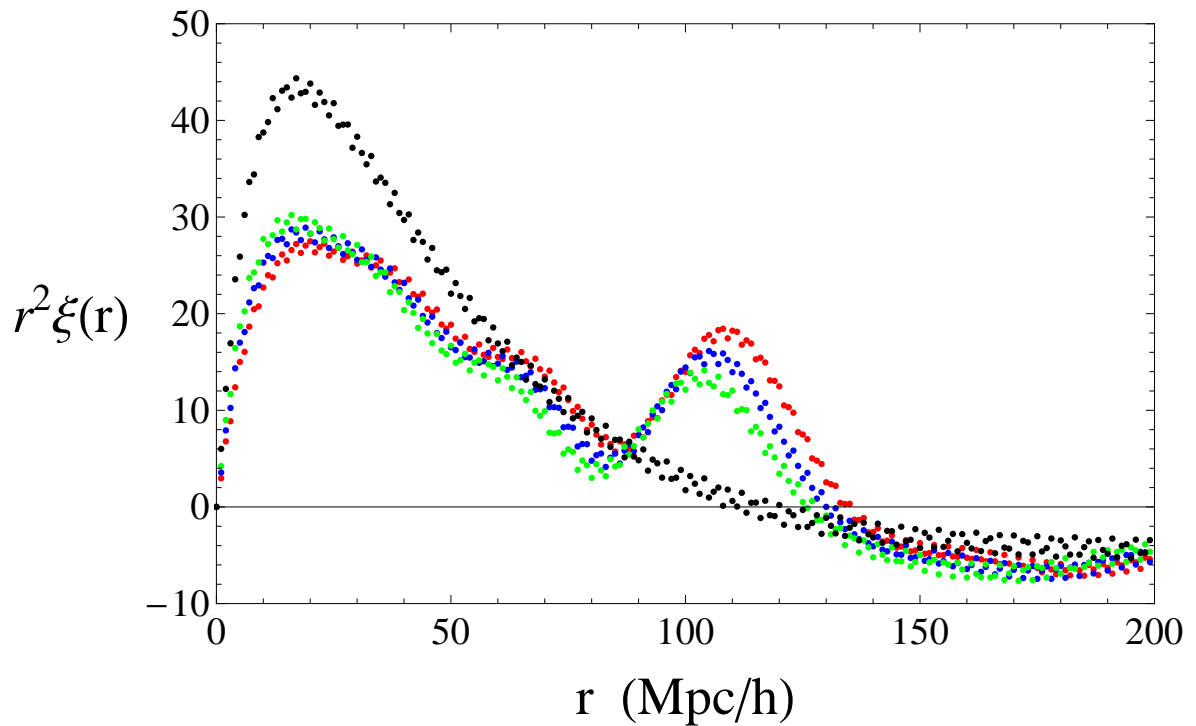
$$\xi(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int P(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k. \quad (4.10)$$

De posse dessa relação e do código CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Background), nós pudemos gerar diferentes espectros $P(k)$ e reconstruir as funções de correlação $\xi(r)$ para os modelos de bárions e matéria escura exibidas na fig. 4.7, a semelhança do que foi feito em Eisenstein et al. (2005) (fig. 4.8). O código CAMB (Lewis, Challinor and Lasenby, 2000) é um aplicativo escrito em Fortran 90 que calcula o espectro da CMB a partir de um conjunto de parâmetros cosmológicos. É baseado no CMBFast criado por U. Seljak e M. Zaldarriaga e está disponível numa interface online no site da Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis (Lambda), um projeto administrado pela NASA (<http://lambda.gsfc.nasa.gov/>). Entretanto, a definição (4.9) é irrealizável em termos práticos pois requer conhecimento da densidade de partículas de uma casca esférica à distância r de cada partícula. Por isso, utilizamos *estimadores* estatísticos que quantificam a função ξ associada a um conjunto de dados. Foram usados os seguintes estimadores:

$$\widehat{\xi}_N = \frac{DD}{RR} - 1 \quad (4.11)$$

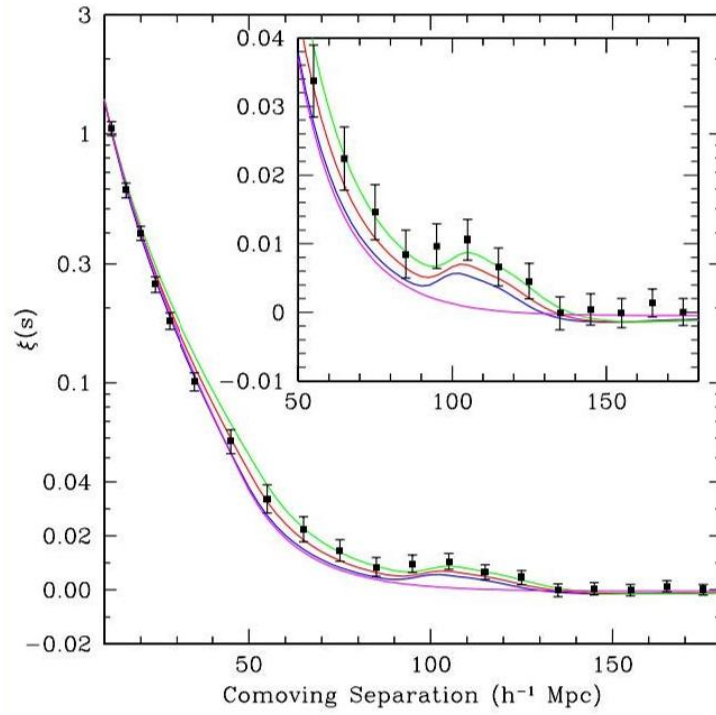
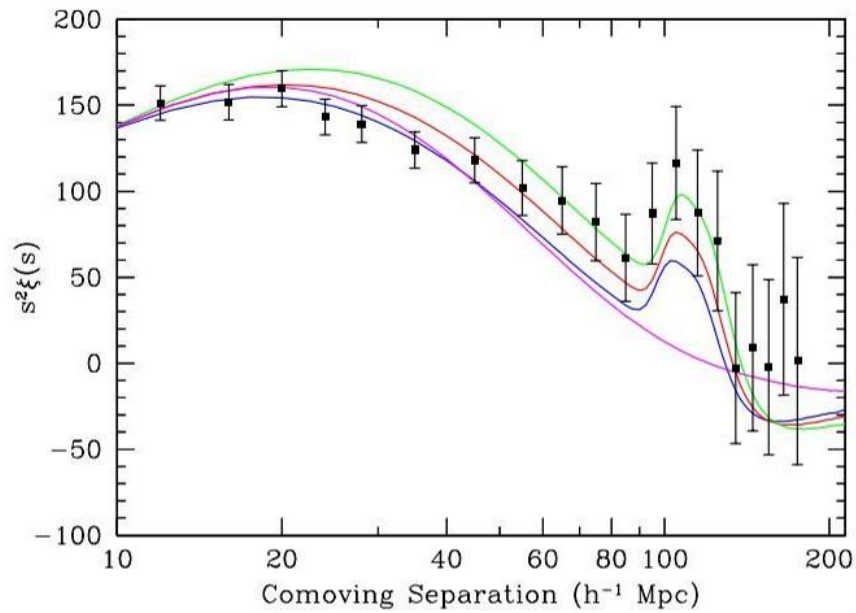


(a) Detecção da escala acústica



(b) Plot alternativo: eliminação da divergência na origem

Figura 4.7: Resultados obtidos através de simulações realizadas com o código CAMB. Nesses gráficos percebemos a sensibilidade da distribuição de galáxias no universo relativa à quantidade de matéria escura e de bárions. Em preto um modelo sem bárions (ou CDM puro); nos demais fixamos $\Omega_{b,0}h^2 = 0.024$ e variamos $\Omega_{c,0}h^2 = 0.096, 0.106, 0.116$ nas curvas em vermelho, azul e verde respectivamente.

(a) Primeira detecção da escala acústica r_s 

(b) Visualização alternativa das evidências

Figura 4.8: Resultados clássicos da literatura - Eisenstein et al. (2005)

$$\widehat{\xi}_{LS} = \frac{DD - 2DR + RR}{RR} \quad (4.12)$$

onde D é um conjunto de dados reais e R é um conjunto de “dados” gerados aleatoriamente; as combinações DD , RR e DR são as respectivas distâncias entre pontos de um e de outro volume de dados. O estimador $\widehat{\xi}_N$ é considerado padrão ou natural, enquanto o estimador $\widehat{\xi}_{LS}$ é chamado Landy-Szalay (Landy and Szalay, 1993) e possui uma dispersão menor do que os demais conforme Kerscher et. al. (2000)

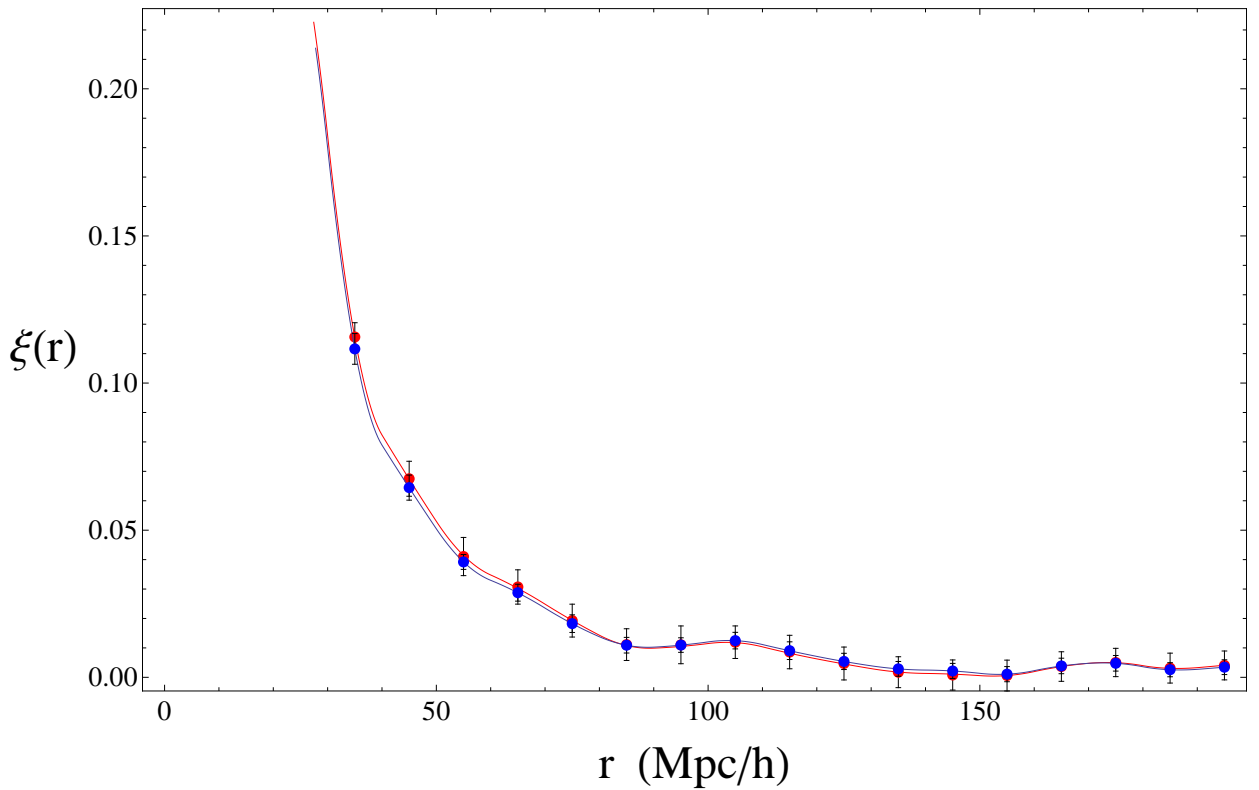


Figura 4.9: Função de correlação global $\xi(r)$

Em nossa abordagem utilizamos dois catálogos de galáxias LRG (Luminous Red Galaxies): um contendo os dados (D) de posição de ≈ 47000 destes objetos (correspondendo ao SDSS Data Release 3) e o outro com as posições de ≈ 737000 galáxias distribuídas aleatoriamente (R). A amostra D é a mesma usada em Eisenstein et al. (2005) com redshift médio $z = 0.3438$ e a função de correlação $\xi(r)$ foi calculada para 20 bins de distância (5 a $195 h^{-1}\text{Mpc}$) usando os estimadores padrão e LS. Em nosso algoritmo calculamos as distâncias usando pesos contidos na própria tabela a medida que eliminávamos galáxias que se encontravam a distâncias maiores do que $195 h^{-1}\text{Mpc}$.

Uma importante diferença entre supernovas e BAO está na natureza dos da-

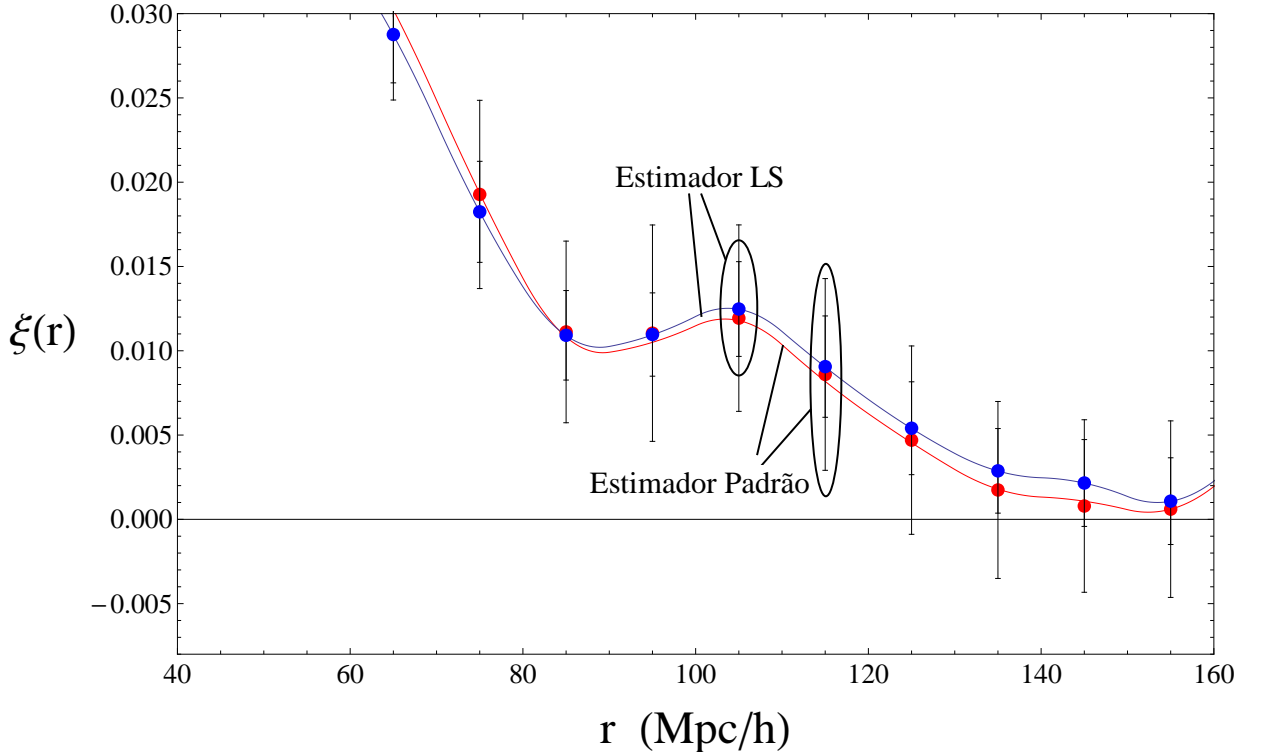


Figura 4.10: Verificação da escala acústica em $\approx 105h^{-1}$ Mpc

dos. Enquanto as supernovas são independentes, sabe-se que os erros da função $\xi(r)$ são correlacionados, o que torna o seu cálculo não trivial (Eisenstein et al. (2005) e Percival et al. (2007)). Na literatura específica, é comum construir diversos catálogos aleatórios (chamados de *mocks* ou fajutos) e usá-los no processo para evidenciar a correlação presente nos dados (Kolatt et al., 1996).

Nós tentamos contornar essa dificuldade através de um procedimento análogo: dividimos o catálogo R original em 16 subcatálogos com aproximadamente o mesmo número de galáxias reais; então repetimos o cálculo de $\xi(r)$ via estimadores para a faixa de distâncias mencionada e computamos as variâncias das amostras, assumindo por simplicidade distribuições gaussianas para as mesmas. Os resultados¹ obtidos para esse procedimento estão exibidos nas figuras 4.9, 4.10 e 4.11 (em vermelho o estimador padrão e em azul o estimador Landy-Szalay); comparando nossos resultados com os resultados da literatura (fig. 4.8) percebemos que o pico acústico está igualmente presente em nossa análise à distância $r \approx 146$ Mpc e que os erros associados ao estimador Landy-Szalay são de fato menores.

Embora este seja um método simplista, ele nos permite explorar outro elemento

¹As curvas correspondem às médias das amostras de subcatálogos

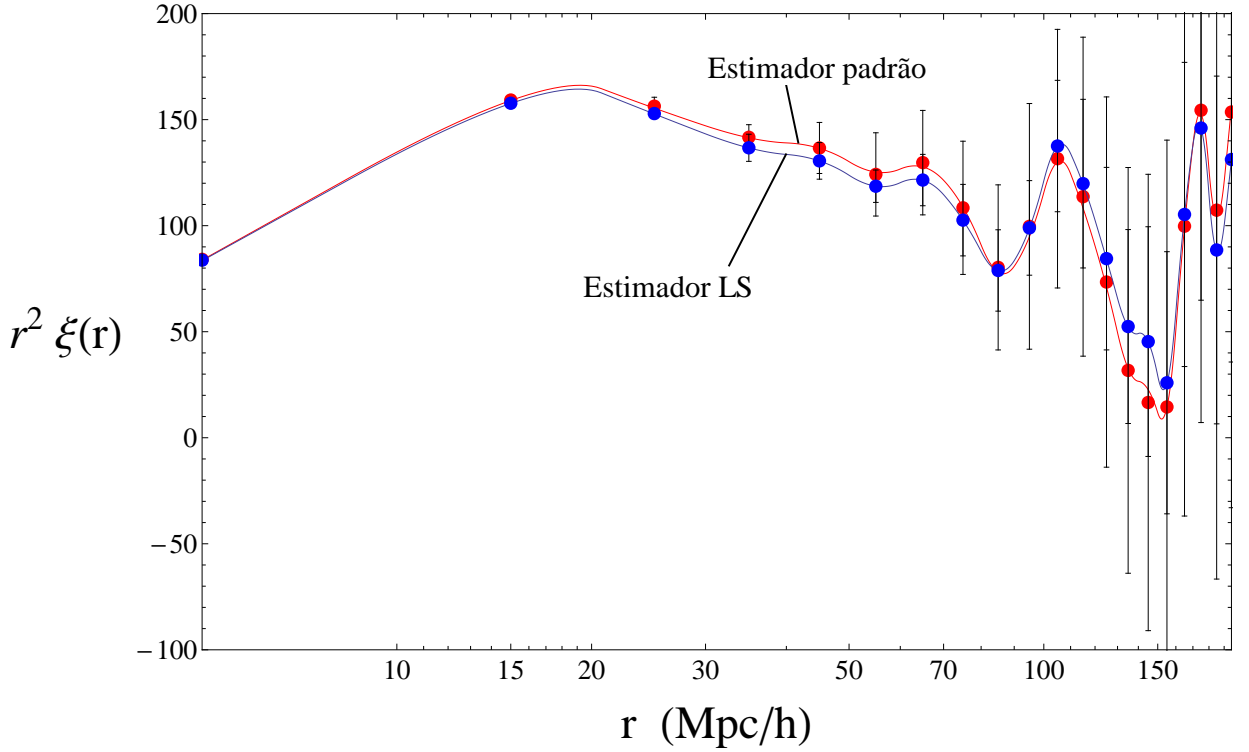


Figura 4.11: Verificação alternativa da corcova ou *bump* em $\approx 105h^{-1}$ Mpc

estatístico importante: a matriz de correlação. Tomemos um vetor \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

cujos elementos são variáveis aleatórias com variância σ_X finita. A matriz cujas entradas são as correlações entre os elementos de \mathbf{X} é chamada matriz de correlação:

$$Q_{ij} = \text{corr}(X_i X_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} = \frac{E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \quad (4.14)$$

onde $\text{cov}(X, Y)$ é chamada *covariância* entre as variáveis X e Y ; $E[\mathbf{X}]$ é a definição do valor esperado de uma variável aleatória. Como podemos ver na figura 4.12 a matriz de correlação mostra uma relação razoavelmente linear entre os bins de distância. Isso se deve a supressão da correlação por causa das simplificações assumidas e pela drástica redução do tamanho da amostra R . Apenas concluímos que a correlação, quando vista nas vizinhanças de um bin qualquer, é alta nas proximidades do bin (veja a diagonal principal) e desprezível nas periferias (todos os demais elementos). Nós também tentamos construir a matriz de covariância invertendo a matriz de correlação, mas em função do tamanho da

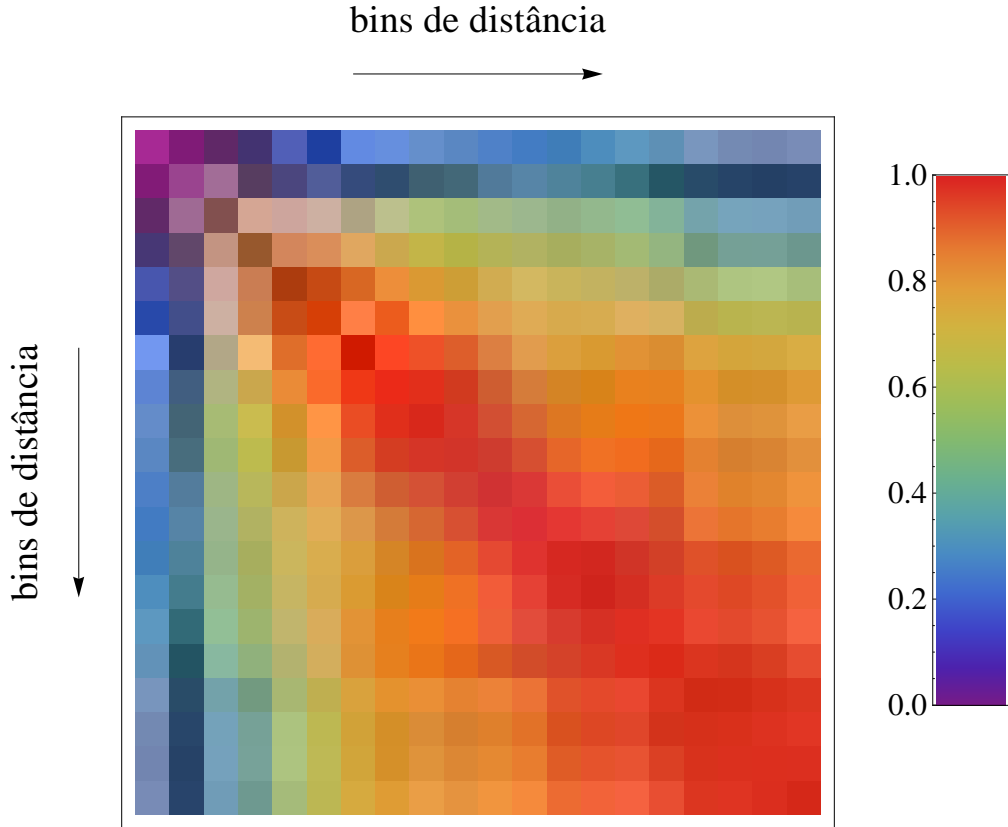


Figura 4.12: Matriz de correlação (estimador padrão)

amostra (16 subcatálogos) ser menor do que o número de variáveis (20 bins), esta matriz tornou-se singular.

Agora passamos a segunda parte do estudo das oscilações acústicas: semelhante às supernovas usaremos uma medida de distância para vincular os parâmetros de densidade. Novamente calculamos o χ^2 como função dos parâmetros cosmológicos e obtemos as regiões de confiança em torno do melhor ajuste pela análise da likelihood $\mathcal{L}(\chi^2)$.

Como já mencionado, um entendimento preciso dos dados da CMB é essencial no correspondente estudo de BAO. Mais precisamente, o valor de r_s , inferido a partir de ajustes no espectro da CMB é usado para construir as medidas (indicadores) de distância. Em nosso trabalho utilizamos dois indicadores definidos a seguir:

$$r_{BAO}(z) \equiv \frac{r_s(z_{drag})}{D_V(z)} \quad (4.15)$$

$$A \equiv D_V(0.35) \frac{\sqrt{\Omega_{m,0} H_0^2}}{0.35c} \quad (4.16)$$

onde z_{drag} corresponde a época na qual os bárions puderam se desvincular dos fótons ($z_{drag} = 1020.5 \pm 1.6$ e $r_s(z_{drag}) = 153.3 \pm 2.0$ Mpc pelo WMAP); $D_V(z) \equiv [d_A^2 \frac{cz}{H(z)}]^{1/3}$ é uma medida de distância efetiva obtida pela combinação de duas escalas:

$$\theta_s(z) = \frac{r_s(z_{drag})}{d_A(z)} \quad (4.17)$$

$$\delta z_s(z) = \frac{r_s(z_{drag})H(z)}{c} \quad (4.18)$$

tal que $\theta_s(z)$ é transversal e $\delta z_s(z)$ é medida ao longo da linha de visada. Entretanto essas escalas ainda não são medidas separadamente, somente o combinado $[\theta_s^2(z)\delta z_s(z)]^{1/3}$. Os vínculos atuais são: $D_V(0.35) = 1370 \pm 64$ Mpc do SDSS; $r_{BAO}(0.2) = 0.1980 \pm 0.0058$ e $r_{BAO}(0.35) = 0.1094 \pm 0.0033$ do 2dF/SDSS (Percival et al., 2007).

Desse modo, tanto r_{BAO} quanto A são parâmetros que combinam distâncias comóveis radiais (linha de visada) e transversais (diâmetro angular). O primeiro, conforme indica a literatura, substituiu o segundo, passando a vigorar nas publicações mais recentes (Percival et al., 2007).

Nós verificamos a dependência de $\Omega_{m,0}$ com o redshift z_{eq} que corresponde à época da igualdade entre as densidades de matéria e radiação, através da expressão (vide eq. (2.78) de Amendola and Tsujikawa (2010)):

$$1 + z_{eq} = 2.396 \times 10^4 \Omega_{m,0} h^2. \quad (4.19)$$

No processo de obtenção dos vínculos para BAO utilizamos os dois indicadores descritos nas eqs. (4.15) e (4.16) e os resultados são idênticos quando fixamos $z_{eq} = 3258$ (considerando vínculos da CMB). Observamos que o indicador A não depende de z_{eq} pois não considera explicitamente o horizonte sonoro. Entretanto os vínculos apresentam uma ligeira diferença ainda desconhecida quando variamos z_{eq} e usamos r_{BAO} (cf. a eq. (5.56) de Amendola and Tsujikawa (2010)). Nas figuras 4.13a e 4.13b observamos os resultados distintos usando r_{BAO} . Ainda assim, verificamos que nossos resultados (fig. 4.13a) confirmam os vínculos obtidos em Kowalski et al. (2008).

Finalmente apresentamos os resultados combinados ($BAO + SN$)² e a contrapartida pela literatura nas fig. 4.14 e 4.15. O melhor ajuste na fig. 4.14b é dado por $(\Omega_{m,0}; \Omega_{\Lambda,0}) = (0.3067; 0.7633)$, o que implica em $\Omega_{k,0} = 0.07$. Na fig. 4.15b os valores centrais são $(\Omega_{m,0}; w) = (0.313; -1.1)$ para $k = 0$.

²Na análise de BAO mantivemos os resultados do indicador r_{BAO} (fig. 4.13a)

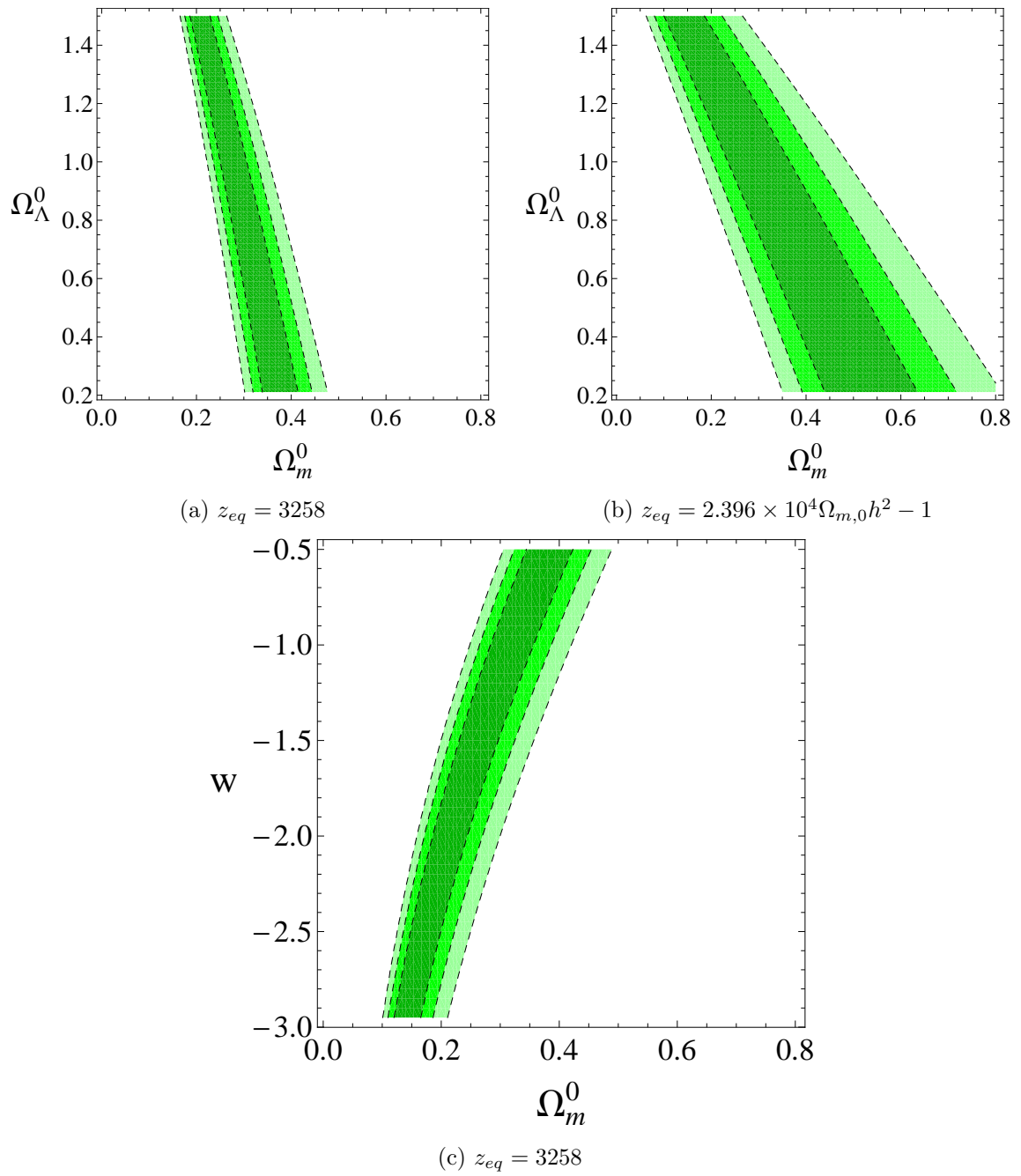
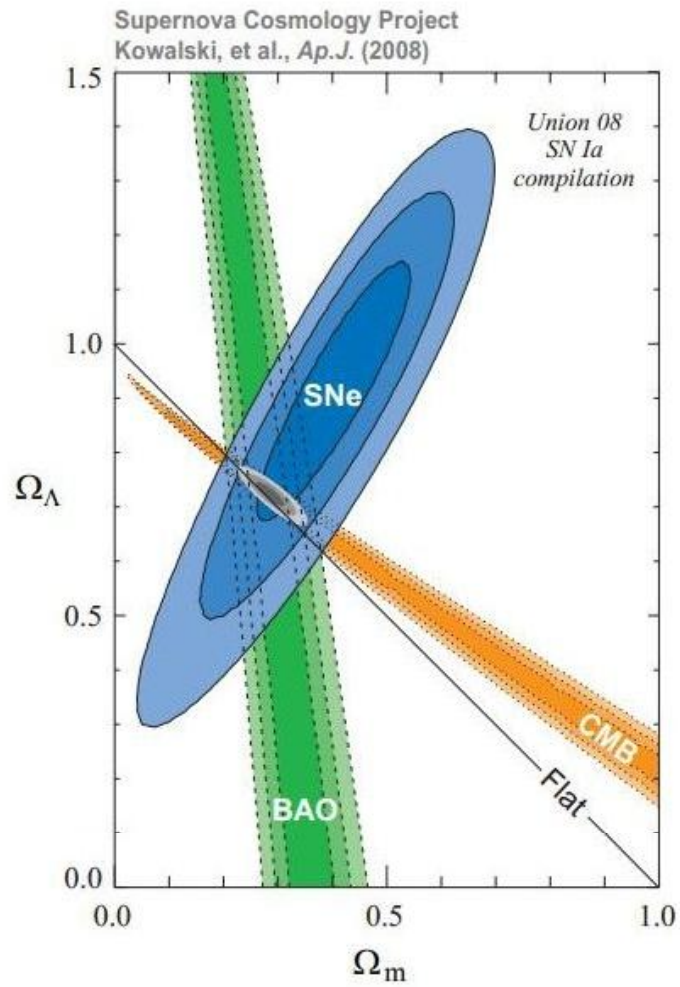
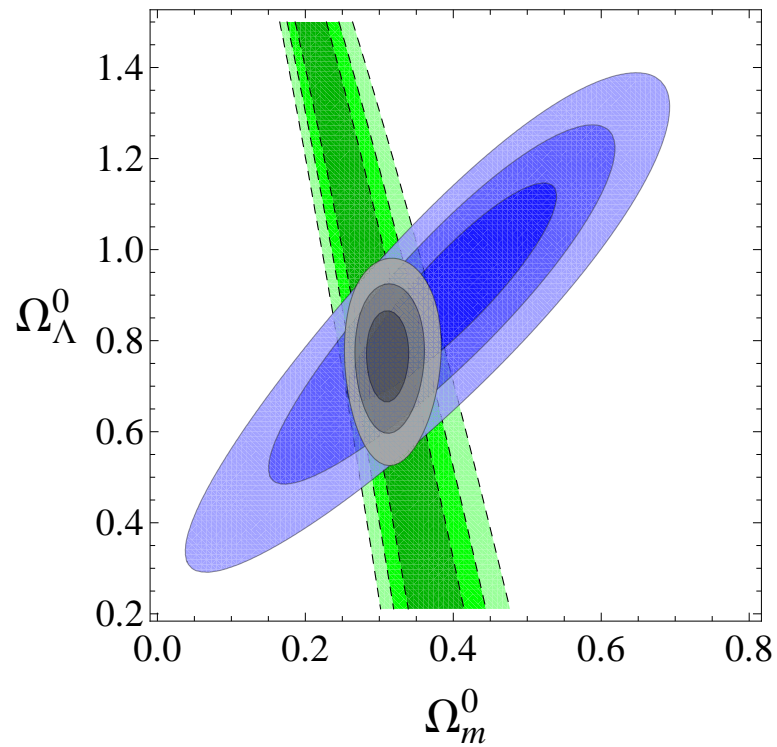


Figura 4.13: Vínculos obtidos para BAO com o indicador r_{BAO}

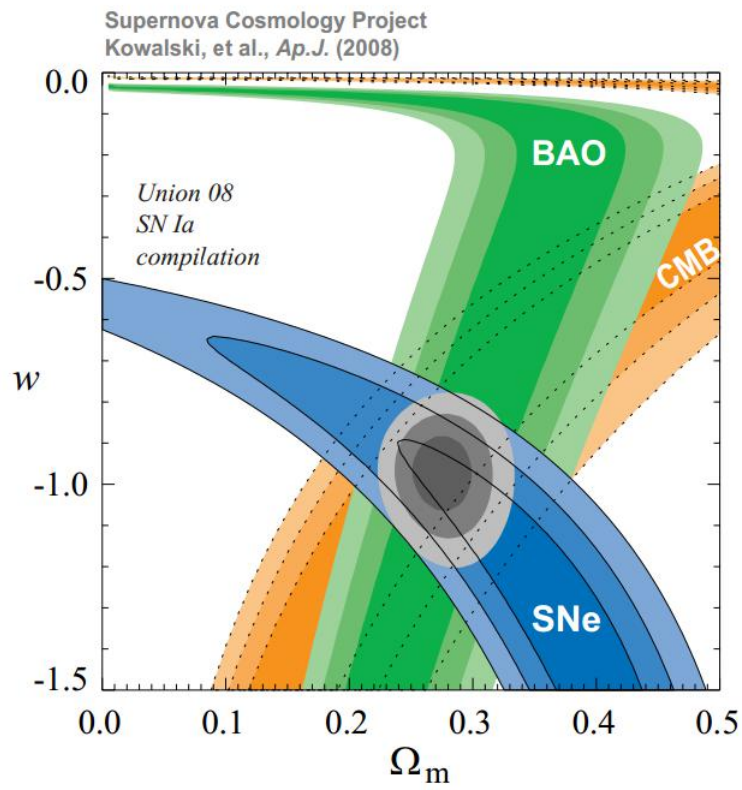


(a) Literatura

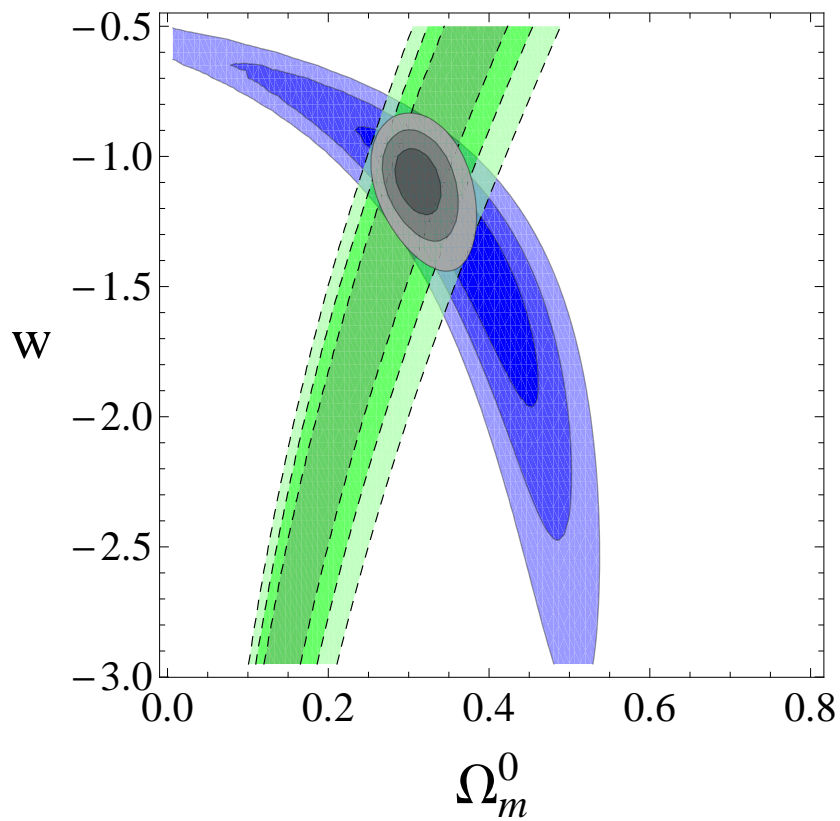


(b) Obtidos

Figura 4.14: Vínculos combinados para BAO e SN assumindo $w = -1$



(a) Literatura



(b) Obtidos

Figura 4.15: Vínculos sobre w combinados para BAO e SN assumindo universo plano

5 Considerações finais

No decorrer desta monografia foram apresentados os rudimentos do modelo padrão da cosmologia Λ CDM e os princípios da metodologia observacional contida nele através dos vínculos obtidos pelas supernovas e pelas oscilações acústicas de bárions.

Enfatizamos as evidências que favorecem a atual descrição cósmica e mostramos porque os referidos observáveis estabeleceram-se na *mainstream* da cosmologia observacional. Reproduzimos os mesmos vínculos obtidos em dois trabalhos consagrados da literatura: Kowalski et al. (2008) e Eisenstein et al. (2005)

Reproduzimos resultados que mostram a complementaridade entre BAO e SN, pois o primeiro gera implicações físicas diretamente da teoria e está vinculado à CMB, enquanto as informações obtidas com o último estão baseadas em argumentos empíricos; nenhum conhecimento da teoria responsável pelas supernovas é, em princípio, necessário. Além disso, o método das supernovas está baseado em medições de distâncias relativas, isto é, independentes de H_0 , pois a luminosidade das supernovas é calibrada por observações locais no fluxo de Hubble (via lei de Hubble). Por outro lado, medidas de BAO são realizadas em unidades absolutas (vinculadas através de observações da CMB e do desenvolvimento teórico).

A principal dificuldade em estudos de BAO é de natureza estatística: uma precisa detecção da escala acústica depende de amostras com grandes volumes de galáxias. Para as supernovas o desafio é garantir a qualidade das calibrações. Segundo as previsões de Seo and Eisenstein (2007) a performance de BAO relativa à constante cosmológica é máxima na faixa $0.6 < z < 3.5$ porque a importância de Λ diminui com o redshift z enquanto o volume comóvel aumenta. Por isso, os vínculos gerados pelas supernovas são mais evidentes do que aqueles de BAO.

Entretanto, percebemos que existem pendências como discutidos em BAO. Consideramos que para uma análise mais profunda do nosso trabalho é preciso, além de um volume de dados cada vez maior, investir no tratamento estatístico, como: otimizar o cálculo de $\xi(r)$ e submeter a matriz de covariância a estimadores mais rigorosos, como o *jackknife*. Este método fornece uma alternativa na determinação do *viés* (ou *bias*) e

dos erros de parâmetros descritos por uma amostra de dados correlacionados. Em termos gerais uma dada amostra inicial de tamanho N é sucessivamente reduzida (retirando um dado a cada iteração) e a análise estatística é feita para cada uma das N subamostras, gerando médias jackknife que serão usadas para calcular o erro final.

Por fim concluímos que esta dissertação é apenas uma introdução a uma discussão com vários desdobramentos. Salientamos que estes desdobramentos estão em curso, e que embora o sucesso quanto à concordância observacional seja evidente, os temas aqui abordados estão longe do esgotamento. A cosmologia ainda é um terreno fértil de ideias.

Referências Bibliográficas

- Amendola, L. and Tsujikawa, S. (2010) *DARK ENERGY Theory and Observations*, Cambridge University Press, UK.
- Bardeen, J. (1980) Phys. Rev. D, 22, 1882
- Blumenthal, G. R.; Faber, S. M.; Primack, J. R.; Rees, M. J., (1984) Nature, vol. 311, Oct. 11, p. 517-525.
- Einstein, A., (1917) Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse VI, 142.
- Eisenstein, D. and Hu, W., (1998) ApJ 496, 605.
- Eisenstein, D. et al., (2005) ApJ 633, 560.
- Felten, J.E. and Isaacman, (1986) R. Rev. Mod. Phys., 58: 689
- Freedman, W. L. et al., (2001) ApJ 553, 47
- Friedmann, A., (1924) Z. Phys. 21, 326.
- Guth, A., (1981) Phys. Rev. D 23, 347.
- Jimenez, R. et al., (1996) Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 282, 926.
- Kerscher, M., Szapudi, I. and Szalay, A., (2000) ApJ 535, L13-L16
- Kim et al., (1996) Publ. Astron. Soc. Pac. 108, 190.
- Kodama H., Sasaki M., (1984) Prog. Theor. Phys. Supplement, 78, 1-166
- Kolatt, T. et al., (1996) ApJ 458, 419
- Komatsu, E. et al., (2011) Astrophys. J. Suppl., 192:18.
- Kowalski, M. et al., (2008) ApJ 686, 749.
- Landy, S. and Szalay, A., (1993) ApJ, 412, 64.
- Lemaître, G., (1927) Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. 1,47, 49.

Lewis, A., Challinor, A. and Lasenby, A., (2000) *ApJ* 538, 473

Mukhanov, V.; Chibisov, G. (1981), *JETP Lett.* Vol. 33, p.532

Penzias, A. and Wilson, R., (1965) *ApJ* 142, 419.

Percival, W. J. et al., (2007) *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 381, 1053

Seo, H., and Eisenstein, D., (2007) *ApJ* 665, 14.

Smoot, G. F. et al., (1992) *ApJ* 396, L1

Spergel, D. N. et al., (2003) *Astrophys. J. Suppl.* 148, 175

Starobinsky, A. (1980). *Phys. Lett.* B91: 99-102.

Tegmark, M. et al., (2004) *Phys. Rev. D* 69, 103501