

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Obsevatório do Valongo

**Possibilidade de Redução do Lixo Espacial
Geoestacionário Através das Variedades
Invariantes Hiperbólicas Associadas às
Órbitas Periódicas de Lyapunov do
Problema Restrito de Três Corpos**

Diogo Teixeira Belloni
Orientadora: Teresinha de Jesus Stuchi (IF/UFRJ)

Projeto de Conclusão de Curso

Possibilidade de Redução do Lixo Espacial
Geoestacionário Através das Variedades
Invariantes Hiperbólicas Associadas às
Órbitas Periódicas de Lyapunov do
Problema Restrito de Três Corpos

Diogo Teixeira Belloni

Monografia de Final de Curso apresentada
ao programa de graduação em Astronomia,
Observatório do Valongo, da Universidade Federal
do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos
necessários para obtenção do título de Astrônomo.

Orientadora: Teresinha de Jesus Stuchi (IF/UFRJ)

Rio de Janeiro
27 de junho de 2013

"Nossa civilização não é mais do que a soma de todos os sonhos das idades anteriores. E tem que ser assim, pois se os homens deixarem de sonhar, se voltarem as costas às maravilhas do Universo, acabará a história da nossa raça."

Arthur C. Clarke, dirigindo-se aos membros da *British Interplanetary Society*, Londres, 1946.

"O impossível de hoje tornar-se-á o possível de amanhã."

Konstantin E. Tsiolkovski

Dedicatória

*Dedico este trabalho
à minha mãe Eda Belloni
como reconhecimento pelo
imenso apoio recebido!*

Agradecimentos

Como os agradecimentos não são leitura fundamental de uma tese, me desobriço de ser econômico. Espero não ter esquecido, particularmente, de nenhuma pessoa que foi determinante no meu processo de graduando do curso de Astronomia da UFRJ.

Agradeço à minha mãe, Eda Maria Teixeira, por sua dedicação, seu amor e sua solidariedade. Sem ela não seria a pessoa que sou hoje. Certamente posso afirmar que minha mãe foi a pessoa que mais me ensinou, coisas tais como comer, vestir-me e como enfrentar a vida. Isso, sem dúvidas, foi resultado do seu esforço e da sua perseverança.

À minha orientadora, profa. Teresinha J. Stuchi, agradeço por ter acompanhado meus passos como pesquisador desde o início da minha Iniciação Científica; agradeço por conferir a mim, a liberdade e a confiança necessárias para que as pesquisas sejam levadas a bom termo; agradeço por ter sido bem mais que uma orientadora nos momentos difíceis do percurso da minha graduação. Deixo aqui expresso meu reconhecimento pelo seu trabalho intelectual e pela importância acadêmica da sua atuação como docente da UFRJ.

À Dra. Annelis Aiex Corrêa (*in memoriam*), agradeço por propor esse tema de pesquisa, que hoje é bastante recorrente.

Agradeço à Dra. Mery Pinheiro por ajudar na revisão do capítulo sobre Órbita Geoestacionária.

Agradeço à minha orientadora acadêmica, profa. Thais Mothé-Diniz, pelas valiosas contribuições práticas, tanto na vida acadêmica, quanto na vida pessoal.

A todos os funcionários do Observatório do Valongo agradeço o apoio nas questões práticas da graduação. A quantidade e a qualidade do trabalho dessas pessoas é instrumento de luta diante dos ataques que o funcionalismo público sofreu e sofre. Em especial, à Maria Alice, com quem tive aprazíveis conversas e à Rosa, que muito se dedica a todos os graduandos dessa instituição. Agradeço também a todos os professores da casa, que mesmo não sendo aluno de todos nos cursos que tive, contribuíram enormemente para minha formação.

Ao prof. Carlos Ziller agradeço por decidir orientar um projeto de extensão nada convencional que relaciona Astronomia e Arte; agradeço por conferir a mim, fantásticas discussões políticas que muito contribuíram para meu entendimento acerca da academia; agradeço por suas contribuições sobre História da Ciência que muito me motivaram a entender a ciência como um processo histórico.

À minha esposa, Paula Jorge, não há algo mais importante a dizer senão que eu a amo. Sua amizade me define como pessoa e torna minha vida melhor, mais colorida. E isso é fundamental para o trabalho intelectual. Agradeço por sua contribuição autuista no momento em que mais precisei nesse percurso; agradeço por sua ajuda na elaboração e manipulação de algumas imagens dessa monografia. Serei eternamente grato a essa fantástica pessoa.

Finalmente, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação.

Obrigado a todos !!!

Resumo

A estrutura de variedades invariantes associadas aos pontos colineares do problema restrito e circular de três corpos nos fornece um esquema geométrico para o entendimento de fenômenos de transporte: no Sistema Solar, em sistemas de estrelas binárias e seus discos de acreção, em sistemas formados por galáxia-aglomerado-estrela, etc. Essa estrutura tem sido largamente utilizada no transporte de satélites para missões como SOHO, WIND, etc. Em particular, as variedades instáveis e estáveis correspondentes às órbitas periódicas associadas a esses pontos de libração formam verdadeiros tubos de transporte de matéria, tanto entre corpos do mesmo sistema como de um problema restrito e circular de três corpos a outro. O presente trabalho tem como objetivo desenvolver programas eficientes para integração numérica de sistemas dinâmicos, em particular, o sistema associado ao problema restrito e circular de três corpos plano e a obtenção de secções de Poincaré para um entendimento prévio do retrato de fase. Foram determinadas as órbitas periódicas de Lyapunov em torno dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 bem como as órbitas planas em torno da Terra. Sabe-se que a Órbita Geoestacionária é uma órbita direta, em torno da Terra, do problema restrito e circular de três corpos espacial no caso Sol-Terra. Pretende-se obter a variedade central referente a essas órbitas e estudar a relação dessa com a teoria de bifurcação. A globalização numérica das variedades invariantes hiperbólicas associadas às órbitas periódicas de Lyapunov permite estudar a possibilidade de cruzamento destas com a vizinhança da Órbita Geoestacionária. Essa etapa corresponde à uma perspectiva futura do trabalho. Se este cruzamento ocorrer, então teremos um canal de escape para o lixo em direção ao Sol ou para fora do sistema Terra-Sol.

Palavras-chave: Dinâmica Orbital - Órbitas de Lyapunov - Lixo Espacial Geoestacionário

Abstract

The invariant manifold structure associated with collinear equilibrium points of Lagrange in the restricted three body problem provides us a geometric layout in order to understand the transport phenomena: in our solar system, in binary star systems and their accretion disks, in systems formed by galaxy-cluster-star, etc. That structure has been widely used to transfer spacecrafts in missions like SOHO, WIND, and so on. In particular, the unstable and stable manifolds corresponding to the periodic orbits associated with those libration points form true transport tubes of particles, between both bodies of the same system as one restricted three body problem to another. The purpose of this work is to develop effective programs in order to numerically integrate dynamical systems, in particular, the system related to the planar restricted three body problem and the obtainment of Poincaré surfaces of section to comprehend first the phase portrait. Lyapunov periodic orbits around collinear equilibrium points L1 and L2 and the planar orbits around the Earth have also been determined. Everyone knows Geostationary Orbit is a direct orbit - around the Earth - from spacial restricted three body problem (Sun-Earth case). We intend to determine the center manifold allied to those orbits and study the relation of that with bifurcation theory. The numeric globalization of hyperbolic invariant manifolds associated with Lyapunov periodic orbits allows us study the possibility of intersection of these orbits in the vicinity of the Geostationary Orbit. This will be the last job step. If this crossing occurs, we will have a channel to escape the garbage toward the Sun or out of the Sun-Earth system.

Keywords: Dynamic - Lyapunov's orbits - geostationary orbit

Sumário

1	Introdução	5
2	O Problema Restrito de Três Corpos	7
2.1	Introdução	7
2.2	Definição do Problema	8
2.3	As Equações de Movimento	8
2.3.1	Referencial Sideral	9
2.3.2	Referencial Sinódico	12
2.4	A Integral de Jacobi	13
2.5	Curvas de Velocidade Zero e Pontos de Equilíbrio de Lagrange	13
2.6	Regiões de Hill	15
2.7	Caso Sol-Terra	19
3	Órbita Geoestacionária	21
3.1	Um Pouco de História	21
3.2	Lançamento, Controle Orbital e Eliminação	25
3.3	Determinação da Órbita Geoestacionária	28
3.4	A Órbita Geoestacionária e o Problema Restrito e Circular de Três Corpos	30
4	Secção de Poincaré	33
4.1	Introdução	33
4.2	Integração Numérica das Equações de Hamilton	33
4.3	Secção de Poincaré	40
5	Órbitas Periódicas	50
5.1	Continuação Numérica	50
5.2	Resultados	56
6	Bifurcação de <i>Pitchfork</i>	61
	Conclusões e Perspectivas Futuras	70

Lista de Figuras

1.1	Simulação feita pela ESA relacionando a quantidade de lixo espacial atual (esquerda) e a quantidade de lixo espacial projetada para 2112 (direita).	6
2.1	Referencial Inercial $O\xi\eta\zeta$, isto é, fixo no espaço.	9
2.2	Separação entre os dois corpos primários, onde $l = l_1 + l_2$	10
2.3	Referencial Inercial $O\xi\eta\zeta$, onde a partícula de massa m é atraída pelos corpos primários.	11
2.4	Referencial não-inercial $Oxyz$, onde as posições dos corpos primários são fixas.	12
2.5	Superfície definida por $C = 2 \Omega(x, y)$ e $\mu_2 = 0.3$. (vista de cima).	14
2.6	Superfície definida por $C = 2 \Omega(x, y)$ e $\mu_2 = 0.3$. (vista de baixo).	14
2.7	Superfície definida por $C = 2 \Omega(x, y)$ e $\mu_2 = 0.3$. (vista de cima).	14
2.8	Superfície definida por $C = 2 \Omega(x, y)$ e $\mu_2 = 0.3$. (vista de baixo).	14
2.9	Localização esquemática dos pontos de equilíbrio do PRTC.	15
2.10	Curvas de Velocidade Zero associadas ao Pontos de Equilíbrio ($\mu_2 = 0.3$).	16
2.11	Região I: A região cinza corresponde à área proibida.	16
2.12	Região II: A região cinza corresponde à área proibida.	17
2.13	Região III: A região cinza corresponde à área proibida.	17
2.14	Região IV: A região cinza corresponde à área proibida.	17
2.15	Região I.	18
2.16	Região II.	18
2.17	Região III.	18
2.18	Região IV.	18
2.19	Curvas de Velocidade Zero para $\mu_2 = 0.3$	19
2.20	Curvas de Velocidade Zero na região próxima à Terra.	20
3.1	Esquema do elevador espacial idealizado por Tsiolkovski.	21
3.2	Órbita desenhada por Tsiolkovski em seu livro <i>Speculations of Earth and Sky, and On Vesta</i>	22
3.3	Órbita geoestacionária e outras órbitas (CNET, 2013).	22
3.4	Os engenheiros Slanley R. Peterson (esquerda) e Ray Bowerman (direita) estão conferindo o satélite Intelsat I, também chamado de <i>Early Bird</i> que foi lançado pela NASA e construído pela <i>Hughes Aircraft Corporation</i> . A superfície do satélite possuía cerca de 6000 células solares a fim de fornecer energia ao mesmo.	23
3.5	Lançador Ariane 5 da missão ECA com EchoStar XVII e MSG-3 (Space, 2012)	26
3.6	Satélite de GPS (NASA, 2013).	26
3.7	LEOP típico, onde r_1 é a altura que o satélite alcança antes de entrar na órbita de transferência, r_2 é a altura da órbita geoestacionária, v_1 é a velocidade do satélite na órbita de transferência e v_2 é a velocidade do satélite na órbita geoestacionária. Note que a órbita de transferência não pertence ao mesmo plano da órbita geoestacionária.	27

3.8	Diagrama de vetores na órbita geoestacionária.	29
3.9	Configuração que facilita o cálculo de C	31
3.10	Curva de velocidade zero associada a C_{GEO}	32
4.1	Movimento em torno do Sol. $C = 3.000898$	35
4.2	Movimento em torno da Terra. $C = 3.000898$	35
4.3	Trajectoria de escape. $C = 3.000898$	35
4.4	Movimento em torno do Sol. $C = 3.000895$	36
4.5	Movimento em torno da Terra. $C = 3.000895$	36
4.6	Trajectoria em torno do Sol e da Terra. $C = 3.000895$	36
4.7	Movimento em torno do Sol (esquerda) e movimento em torno da Terra (direita).	37
4.8	Trajectoria em torno do Sol e da Terra. À esquerda, $C = 3.0000985$ e à direita, $C = 3.0008$	37
4.9	Zoom na região em torno da Terra, da figura 4.8 - $C = 3.0000985$	38
4.10	Movimento em torno do Sol. $C = 3.000002$	38
4.11	Movimento caótico. $C = 3.000002$	39
4.12	À esquerda aparecem o fluxo do sistema dinâmico bem como o plano $y = 0$. Já à direita, aparecem o plano $y = 0$ e a projecção da secção de Poincaré (Celletti & Perozzi, 2007). . .	40
4.13	A Secção de Poincaré (verde) foi obtida a partir da técnica descrita. O fluxo que corta o plano $y = 0$ (vermelho), foi integrado até cruzar tal plano 30 vezes.	40
4.14	Projecção do <i>tori</i> invariante de um sistema hamiltoniano integrável de dimensão N (Wiggins, 2003).	41
4.15	Secção de Poincaré para trajetórias em torno do Sol. $C = 3.000898$	42
4.16	Secção de Poincaré para trajetórias em torno da Terra. $C = 3.000898$	42
4.17	Zoom da região à direita da Terra na figura 4.16.	43
4.18	Zoom da região esquerda da figura 4.17.	43
4.19	Zoom da região direita da figura 4.17.	44
4.20	Gráfico gerado a partir de uma condição inicial na região das órbitas estáveis resultantes da bifurcação <i>pitchfork</i> , para 10^6 iterações. A área em preto corresponde à região caótica e as regiões internas, em branco, são protegidas por um <i>torus</i> invariante que não permite a entrada deste caos.	45
4.21	Secção de Poincaré para trajetórias à esquerda do Sol. $C = 3.000895$	45
4.22	Secção de Poincaré para trajetórias à direita do Sol. $C = 3.000895$	46
4.23	Secção de Poincaré para trajetórias em torno da Terra. $C = 3.000895$	46
4.24	Zoom da região à esquerda da Terra na figura 4.23.	47
4.25	Zoom da região à direita da Terra na figura 4.23.	47
4.26	Região à esquerda do Sol. $C = 3.0000895$	48
4.27	Região à direita do Sol. $C = 3.0000895$	48
4.28	Movimento em torno da Terra. $C = 3.0008$	49
4.29	Região à esquerda do Sol. $C = 3.000002$	49
5.1	A órbita periódica é o ponto fixo da secção de Poincaré no plano xOp_x que está sobre o eixo x , i. e., $p_x = 0$. Nesse caso, a órbita cruza o plano $y = 0$ seis vezes, pois há seis ilhas de estabilidade em torno de tal ponto fixo.	50
5.2	Configuração que gera órbitas de Lyapunov e órbitas diretas.	52
5.3	Configuração que gera órbitas halo.	52
5.4	Escolhe-se um valor inicial e refina-o, até encontrar as condições da órbita periódica (Wiggins, 2003).	54

5.5	Órbita periódica obtida a partir da secção de Poincaré.	57
5.6	Família de Órbitas Diretas Planas.	57
5.7	Curva característica da Família de Órbitas Diretas Planas.	58
5.8	Família de Órbitas de Lyapunov.	58
5.9	Curva característica da Família de Órbitas de Lyapunov.	59
5.10	Dinâmica linear em torno de L_1 ou L_2 . A figura acima à esquerda exibe a parte de sela, enquanto que à direita a parte central. A figura abaixo esboça as variedades invariantes de uma órbita periódica p_1 em torno de L_1	59
5.11	Variedade invariante instável associada à órbita periódica de Lyapunov em torno de L_1 . . .	60
5.12	Variedade invariante instável associada à órbita periódica de Lyapunov em torno de L_1 . . .	60
6.1	Diagrama de bifurcação do tipo <i>pitchfork</i>	61
6.2	$C = 3.00095$	62
6.3	$C = 3.00094$	63
6.4	$C = 3.00093$	63
6.5	$C = 3.000929$	64
6.6	$C = 3.000927$	64
6.7	$C = 3.000925$	65
6.8	$C = 3.000922$	65
6.9	$C = 3.00092$	66
6.10	$C = 3.000917$	66
6.11	$C = 3.000913$	67
6.12	$C = 3.00091$	67
6.13	$C = 3.000907$	68
6.14	$C = 3.0009055$	68
6.15	$C = 3.000904$	69
6.16	Gráfico gerado com $y = 0$, sendo x a abscissa e p_x a ordenada. À esquerda: variedades instável (linha tracejada) e estável (linha contínua) associadas à órbita periódica direta do Problema de Hill, para $H = 1/18$. À direita: tangência heteroclínica entre a terceira iteração do mapa de Poincaré da variedade instável de uma órbita de Lyapunov e da variedade estável de uma órbita direta.	69

Lista de Tabelas

- 3.1 Informações quantitativas acerca dos satélites operacionais em órbita em torno da Terra. 25
- 5.1 Condições iniciais do sistema variacional. 55

Capítulo 1

Introdução

“A História das Ciências é marcada pela descontinuidade, por erros superados, revoluções e refundições epistemológicas.”

Alexandre Koyré

A motivação principal para realização desse trabalho consiste na preocupação de agências e alguns setores da sociedade civil referentes à quantidade de detritos na vizinhança da Terra gerados pela atividade espacial. A NASA já informou, no começo desse ano, que a quantidade de detritos suspensos no espaço alcançou um ponto crítico o que gera perigo, principalmente para satélites e astronautas. De acordo com a agência espacial, são tantos os objetos que vagam no momento, ao nosso redor, que é grande a chance de colisão. Com isso, ainda mais lixo seria gerado, aumentando os riscos de danificar outros aparelhos espaciais. "Os detritos espaciais aumentam geometricamente", afirma Las Casas, pesquisador da UFMG, em entrevista aos meios de comunicação .

Embora a ONU tenha um subcomitê jurídico que aponta diretrizes para o uso espacial, os países dificilmente as cumprem, e acidentes graves já ocorreram em decorrência do acúmulo de aparatos e fragmentos deles no espaço. Na opinião de Las Casas, a legislação não ganha força porque as agências espaciais estão mais preocupadas com o lucro que suas atividades podem gerar.

Quando os objetos espaciais param de funcionar como deveriam (por perder sua validade ou ser afetado por algum problema), perdem a velocidade com a qual orbitam a Terra. Quando essa velocidade diminui muito, a força gravitacional terrestre puxa os objetos em direção ao planeta, gerando as quedas. Apesar da frequência com que detritos de lixo espacial retornam à Terra, a probabilidade do objeto atingir um ser humano é rara porque nosso planeta tem mais água do que terra - e esta, por sua vez, não é totalmente habitada. Estatisticamente, a chance de algum objeto espacial cair na porção habitada é pequena. Se setores da população civil começaram a se preocupar com o lixo produzido no planeta há 50 anos, a consciência de que a atividade espacial também produz dejetos está apenas começando.

Há cerca de 20 anos, cientistas já falavam em lixo espacial, mas apenas em regiões restritas em torno de nosso planeta. A preocupação com o tema é recente e é consequência dos artefatos que periodicamente caem e são amplamente divulgados pelos meios de comunicação , até de maneira sensacionalista.



Figura 1.1: Simulação feita pela ESA relacionando a quantidade de lixo espacial atual (esquerda) e a quantidade de lixo espacial projetada para 2112 (direita).

Ao longo desse trabalho, utilizamos como modelo o Problema Restrito de Três Corpos (PRTC), que será descrito no capítulo 2. A partir desse modelo, que consiste em três corpos que interagem gravitacionalmente, onde um deles não afeta os outros dois, estudamos Sol-Terra-detrito, onde o detrito é o corpo que não afeta o sistema Sol-Terra. Mostraremos que há quatro regiões permitidas ao movimento do detrito, sendo que a órbita geostacionária (GEO) pertence a uma dessas regiões, a saber a região que é delimitada pelos maiores valores da constante de Jacobi, a única constante de movimento do modelo. Trataremos o problema a partir dos formalismos newtoniano e na parte final do capítulo usaremos a abordagem hamiltoniana.

Já no capítulo 3, descrevemos a órbita GEO, uma vez que os detritos que nos interessam pertencem às proximidades de tal órbita. Dessa forma, inicialmente discutiremos sobre a história da órbita GEO; a seguir discutiremos um pouco as três etapas da vida de um satélite (lançamento, controle orbital e eliminação) e a determinação da órbita GEO. Finalizamos o capítulo relacionando a órbita GEO com o PRTC, calculando por sua vez, a posição da órbita no sistema sinódico adimensional e o valor da constante de Jacobi desta órbita.

Os capítulos 4 e 5 são dedicados à Secção de Poincaré e à órbitas periódicas (técnicas utilizadas largamente em Sistemas Dinâmicos). Inicialmente, integraremos o sistema hamiltoniano associado ao PRTC para o caso Sol-Terra. Colocamos várias imagens de possíveis trajetórias da partícula nesse sistema, dividindo as mesmas pelas regiões de Hill, a fim de facilitar a análise qualitativa das soluções. Em seguida, explicaremos como se dá a implementação computacional da técnica da secção de Poincaré, sendo exibidas várias secções obtidas para o sistema Sol-Terra (novamente, separando-as pelas regiões de Hill). O capítulo 5 consiste em um breve estudo acerca de algumas soluções periódicas do PRTC que decorrem das simetrias do modelo e que fornecem as condições iniciais apropriadas para a determinação das mesmas. Logo após, forneceremos detalhes de como implementar numericamente o método de determinação de tais órbitas, utilizando a matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose (Penrose, 1955). Exibiremos duas famílias de órbitas periódicas associadas a tal sistema, a saber as órbitas diretas planas e as órbitas de Lyapunov. A projeção da GEO no plano da eclíptica é uma órbita da primeira família.

No capítulo 6, mostraremos, através de secções de Poincaré, uma bifurcação do PRTC de uma órbita estável para instável e cuja variedade invariante quase conecta com aquela vinda de L_1 ou L_2 . Esta quasi-conexão poderia servir para se catapultar detritos com um estágio para fora da vizinhança da Terra (Stuchi & Simó, 2000). Ao término da Monografia, resumiremos as conclusões e apontaremos as perspectivas futuras relacionadas a esse trabalho.

Vale ressaltar que as referências seguem as normas da revista *Apj*. As rotinas foram implementadas em Fortran ou C e as imagens foram ora contruídas em GIMP, ora construídas em INKSCAPE. O *software* Maple 11 também foi utilizado no capítulo 2.

Capítulo 2

O Problema Restrito de Três Corpos

2.1 Introdução

O **Problema Restrito de Três Corpos** (PRTC) é um dos modelos mais estudados da Mecânica Celeste, sendo uma excelente primeira aproximação para estudos da dinâmica do Sistema Solar, da teoria planetária, do movimento de naves espaciais lançadas no Sistema Solar, da dinâmica estelar, etc. Seu estudo envolve a área dos Sistemas Dinâmicos não-integráveis, sendo necessária a aplicação de métodos numéricos para uma análise qualitativa das soluções e um entendimento global do espaço de fase. O PRTC consiste no estudo do movimento de uma partícula de massa infinitesimal sob a influência gravitacional de dois corpos massivos, os quais se movem em órbitas keplerianas circulares, ao redor do centro de massa. A formulação básica desse modelo teve sua origem na segunda teoria lunar de Euler, há mais de 200 anos (Zsebehely, 1967).

As equações de movimento para a partícula perturbada pela ação gravitacional dos outros dois corpos são obtidas pela lei da gravitação de Newton, fornecendo um conjunto de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Por outro lado, pode-se obter, para o mesmo sistema, equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, utilizando o formalismo hamiltoniano.

Quando o problema é analisado em dois sistemas de referência distintos, o inercial e o não-inercial, notamos que a energia não se conserva em ambos (Corrêa, 2000). Porém, no referencial não-inercial, obtemos **apenas** uma constante de movimento - a constante de Jacobi. Apesar do sistema apresentar esta constante de movimento, sua resolução analítica continua sendo inviável. Pelo teorema da integrabilidade de Liouville, deveria existir uma segunda integral funcionalmente independente e em involução com a constante de Jacobi (Berry, 1978).

Neste capítulo, utilizando o sistema não-inercial, o problema é estudado qualitativamente através das curvas de velocidade zero ou curvas equipotenciais, as quais reduzem o espaço de fase (quadridimensional) ao espaço de configuração (bidimensional). Com isto, pode-se estudar as regiões de movimento onde o movimento é permitido, ou não, conforme o valor da constante de Jacobi.

Lagrange verificou que, para certas condições iniciais, o problema apresenta duas soluções analíticas. Essas condições iniciais são conhecidas como as soluções de equilíbrio triangulares de Lagrange. Além dessas, há mais três soluções de equilíbrio, chamadas soluções de equilíbrio colineares, descobertas por Euler. Essas soluções são obtidas numericamente, a partir de uma equação conhecida como *quintica de Euler*. As curvas de velocidade zero fornecidas por estes pontos auxiliam o estudo das possíveis regiões de movimento. O método numérico utilizado para determinação destas soluções de equilíbrio será abordado neste capítulo após um estudo do modelo nos dois referenciais.

Resumidamente, podemos expor os seguintes tópicos que serão tratados neste capítulo:

1. descrever as equações de movimento do PRTC;
2. discutir a localização e a estabilidade dos pontos de equilíbrio com ênfase particular na constante de movimento;
3. obter a *constante de Jacobi*;
4. encontrar uma relação entre as curvas definidas pela constante de Jacobi e a trajetória de uma partícula em uma órbita.

2.2 Definição do Problema

O problema de dois corpos que se movem devido a atração gravitacional mútua é solúvel analiticamente e o movimento resultante está sempre confinado em órbitas fixas e fechadas, quando a energia potencial efetiva é negativa. Quando a energia potencial efetiva é nula ou positiva, a órbita é parabólica ou hiperbólica, respectivamente. Vamos agora estender essa análise a fim de considerar a interação gravitacional entre três corpos, em particular, o problema em que a massa do terceiro corpo é desprezível em relação aos outros dois. O PRTC vem sendo estudado por séculos e atualmente tal problema ainda apresenta novas descobertas fascinantes, como as *figure-8*, que foram descobertas por Chenciner e Montgomery (Chenciner & Montgomery, 2000). O desenvolvimento da dinâmica não-linear e a iniciativa de novas observações no Sistema Solar e de Exoplanetas fizeram com que o interesse nesse problema ressurgisse.

Definição 2.1. *Se dois corpos no problema de três corpos, que se atraem gravitacionalmente, movem-se em órbitas coplanares e circulares em relação ao centro de massa do sistema e se a massa do terceiro corpo não¹ afeta o movimento dos outros dois, então o estudo do movimento desse sistema é chamado problema restrito de três corpos (PRTC).*

Definição 2.2. *Os corpos que se movem em órbitas circulares e coplanares em relação ao centro de massa do sistema na definição 2.1 são chamados corpos primários² ou apenas corpos, caso não haja possibilidade de dúvidas. Chamaremos de partícula o terceiro corpo que não influencia o movimento dos corpos primários.*

2.3 As Equações de Movimento

Nesta secção, serão apresentadas as equações que descrevem o movimento da partícula em dois sistemas distintos: o inercial e o não-inercial.

As equações no sistema inercial são facilmente obtidas através das forças atuantes entre os corpos envolvidos no problema, evidenciando-se, desta forma, o uso do formalismo newtoniano. As equações do sistema não-inercial são geradas através das primeiras tomando-se uma rotação dos eixos com a mesma velocidade angular dos primários.

A partir de agora, restringiremos nossa análise ao movimento da partícula no plano orbital dos primários, ou seja, o PRTC plano.

¹Nesse caso a massa do terceiro corpo é dita *infinitesimal*.

²Tais corpos também são chamados de corpo primário e corpo secundário, uma nomenclatura comum em dinâmica estelar que não seguiremos.

2.3.1 Referencial Sideral

Consideremos o movimento de uma partícula de massa desprezível movendo-se sob a ação gravitacional de dois corpos de massas m_1 e m_2 , respectivamente. Vamos assumir que os dois corpos estão em órbitas circulares em relação ao centro de massa do sistema e que eles exercem uma força sobre a partícula, mas a partícula não afeta o movimento dos dois corpos. Em outras palavras, consideremos o PRTC plano.

Considere um sistema de referência inercial (ξ, η, ζ) cuja origem está no centro de massa do sistema.

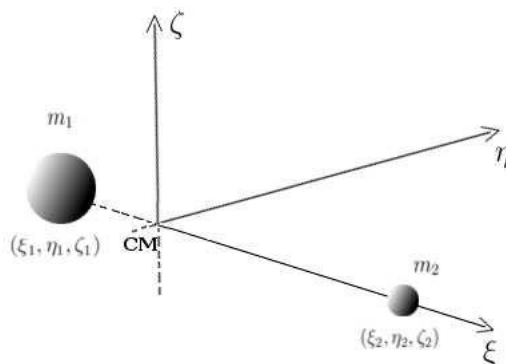


Figura 2.1: Referencial Inercial $O\xi\eta\zeta$, isto é, fixo no espaço.

Observação 2.1. Observe que se trata de um referencial inercial, isto é, um referencial fixo no espaço.

Vamos fixar o eixo ξ na linha que liga m_1 e m_2 para algum instante de tempo, digamos $t = 0$. Suponha a coordenada de m_1 negativa e a de m_2 positiva, como na figura 2.1. Considere o eixo η perpendicular a ξ , mas no plano orbital dos corpos primários. Finalmente, o eixo ζ será perpendicular ao plano $\eta O\xi$, ao longo do vetor momento angular. Trata-se de um sistema de coordenadas cartesianas.

As coordenadas de m_1 e de m_2 são (ξ_1, η_1, ζ_1) e (ξ_2, η_2, ζ_2) , respectivamente. Os corpos primários estão separados por uma distância constante e possuem a mesma velocidade angular em relação ao centro de massa. Vamos assumir a partir de agora que $m_1 > m_2$.

Definição 2.3. Definimos como a massa relativa do corpo i a grandeza adimensional $\mu_i := Gm_i$, onde G é a constante Gaussiana da gravitação.

Proposição 2.1. Seja G a constante Gaussiana da gravitação. Afirmamos que

$$G = \frac{1}{m_1 + m_2}$$

Demonstração

Com efeito, seja l a distância entre os corpos primários e sejam l_1 e l_2 as distâncias dos corpos de massa m_1 e m_2 ao centro de massa, respectivamente. A figura 2.2 ilustra tais hipóteses.

Então, da Lei da Gravitação de Newton, segue que o módulo da força gravitacional entre os corpos primários é

$$\frac{G m_1 m_2}{l^2}$$

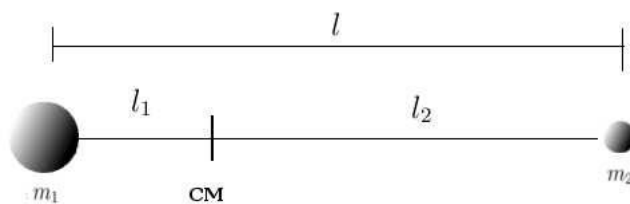


Figura 2.2: Separação entre os dois corpos primários, onde $l = l_1 + l_2$.

Agora, como os corpos orbitam em torno do centro de massa, em órbita circular, o módulo da força gravitacional é igual ao módulo da força centrípeta do movimento circular. Logo, se n é a velocidade angular de cada corpo primário, então

$$\frac{G m_1 m_2}{l^2} = m_1 l_1 n^2 = m_2 l_2 n^2$$

Portanto

$$G m_1 = l_2 l^2 n^2$$

E

$$G m_2 = l_1 l^2 n^2$$

Daí, somando as duas últimas equações, temos que

$$\begin{aligned} G m_1 + G m_2 &= l_1 l^2 n^2 + l_2 l^2 n^2 \\ \Rightarrow G(m_1 + m_2) &= l^2 n^2 (l_1 + l_2) \\ \Rightarrow G(m_1 + m_2) &= l^3 n^2 \end{aligned}$$

Obtemos a proposição considerando a unidade de comprimento como sendo a distância entre os dois corpos primários, isto é, $l = 1$ e a unidade da velocidade angular como sendo a velocidade angular dos dois corpos, isto é, $n = 1$.

□

Definição 2.4. A velocidade angular comum aos corpos primários é chamada de movimento médio comum³.

Segue trivialmente da definição 2.3 e da proposição 2.1 que

$$\mu_1 = G m_1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} m_1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

E

$$\mu_2 = G m_2 \Rightarrow \mu_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} m_2 \Rightarrow \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Observe agora que

$$\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

³Tal definição é amplamente usada em mecânica celeste.

Mas $m_1 > m_2$, por hipótese. Logo

$$\frac{m_1}{m_2} > 1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} + 1 > 2 \Rightarrow \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} < \frac{1}{2}$$

Portanto

$$\mu_2 < \frac{1}{2}$$

Que é um resultado já esperado, pois assumimos $m_1 > m_2$. *A priori* tal resultado parece irrelevante, mas seu real significado ficará claro ao longo do texto.

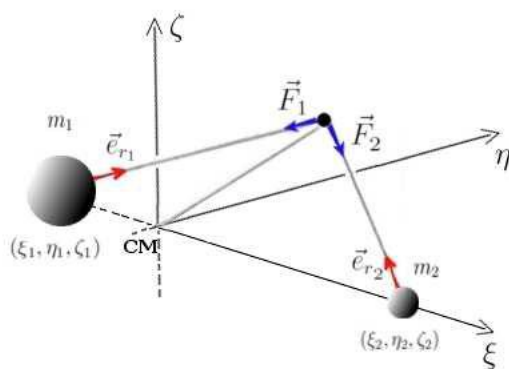


Figura 2.3: Referencial Inercial $O\xi\eta\zeta$, onde a partícula de massa m é atraída pelos corpos primários.

Definição 2.5. *Um sistema inercial de referência é chamado de sistema sideral ou referencial fixo.*

Dado o referencial fixo no espaço $O\xi\eta\zeta$, considere (ξ, η, ζ) como sendo as coordenadas da partícula nesse sistema de referência.

Aplicando a Lei da Gravitação, obtemos as seguintes equações de movimento para a partícula:

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \quad (2.1)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \quad (2.2)$$

onde

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2$$

Se os corpos primários se movem em órbitas circulares, então a distância entre eles é fixa e eles se movem em torno do centro de massa comum com uma velocidade angular constante, o movimento médio n . Nessas circunstâncias, é natural considerar o movimento da partícula em um referencial girante no qual as posições dos primários são fixas.

2.3.2 Referencial Sinódico

Considere um novo referencial, que possui a mesma origem que o anterior, porém gira com uma velocidade constante n na direção positiva, conforme a figura 2.4.

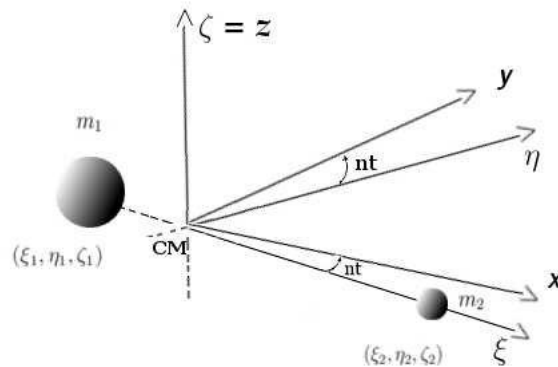


Figura 2.4: Referencial não-inercial $Oxyz$, onde as posições dos corpos primários são fixas.

Definição 2.6. Um sistema girante de referência é chamado de referencial girante ou sistema sinódico (no contexto da Mecânica Celeste).

O eixo x é escolhido de modo que os corpos primários estejam sobre ele. Suas coordenadas são: $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$ e $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$. Logo, da figura 2.4, temos que

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 \quad (2.3)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 \quad (2.4)$$

onde (x, y) são as coordenadas da partícula no plano xOy . Podemos relacionar os dois referenciais a partir de uma simples rotação, a saber

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Logo, derivando duas vezes a equação acima obtemos

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \end{pmatrix}$$

Manipulando essa expressão matricial, obtemos as seguintes equações de movimento, onde utilizamos $n = 1$ (Murray & Dermott, 2001):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} + x \quad (2.5)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\mu_1 \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} + y \quad (2.6)$$

Essas acelerações podem ser obtidas a partir do gradiente de uma função escalar Ω , tal que

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (2.8)$$

onde

$$\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (2.9)$$

Na equação 2.9, o termo $x^2 + y^2$ é o potencial centrífugo e o termo em $1/r_1$ e $1/r_2$ é o potencial gravitacional. Os termos $-2\dot{y}$ e $+2\dot{x}$, nas equações 2.5 e 2.6, são os termos de Coriolis, que dependem da velocidade no referencial sinódico.

Observação 2.2. *Observe que Ω não é um potencial verdadeiro. É melhor dizer que se trata de uma função escalar da qual podemos derivar a aceleração experimentada pela partícula. Ω é comumente chamada de "pseudo-potencial" (Murray & Dermott, 2001).*

2.4 A Integral de Jacobi

Multiplicando a equação 2.7 por \dot{x} e a equação 2.8 por \dot{y} e somando as duas, obtemos

$$\dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \dot{y}$$

Logo, integrando a última equação, obtemos

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2 \Omega - C \quad (2.10)$$

onde C é a constante de integração. Como $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, temos que

$$v^2 = 2 \Omega - C \quad (2.11)$$

ou, usando a definição de Ω ,

$$C = x^2 + y^2 + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2.12)$$

Isso demonstra que a quantidade C é uma constante de movimento. Pode-se provar que C é a única constante de movimento e como o sistema possui dois graus de liberdade, o problema é não-integrável, conforme o Teorema de Liouville (Berry, 1978).

2.5 Curvas de Velocidade Zero e Pontos de Equilíbrio de Lagrange

Na secção anterior, foi visto que quando se trabalha o PRTC no sistema sinódico, pode-se escrever uma constante de movimento - a constante de Jacobi -, sendo:

$$C = 2 \Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2.13)$$

A equação 2.13 define uma superfície em um espaço tridimensional. Considerando um valor fixo da constante de Jacobi e $\dot{x} = \dot{y} = 0$, são obtidas curvas de nível desta superfície no plano xOy , pois:

$$C(x, y) = 2 \Omega(x, y) \tag{2.14}$$

Essas curvas são chamadas *curvas de velocidade zero* e cumprem um papel importante na determinação das fronteiras das regiões permitidas à partícula. A importância do estudo destas curvas está relacionada com a classificação das regiões de movimento do corpo; cada região é delimitada por uma curva que corresponde a valores distintos de C .

As figuras 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8 correspondem à função 2.14 e algumas curvas de velocidade zero estão esboçadas na mesma. Tais figuras foram geradas utilizando o Maple 11.

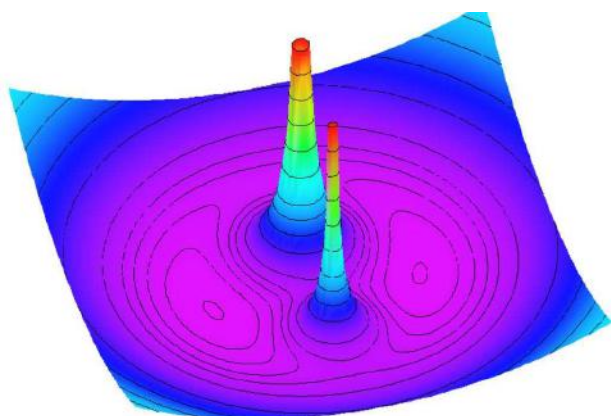


Figura 2.5: Superfície definida por $C = 2 \Omega(x, y)$ e $\mu_2 = 0.3$. (vista de cima).

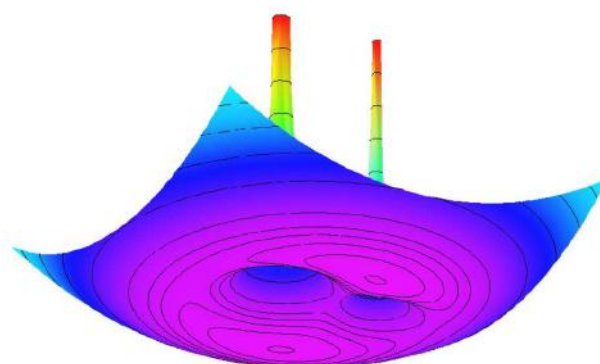


Figura 2.6: Superfície definida por $C = 2 \Omega(x, y)$ e $\mu_2 = 0.3$. (vista de baixo).

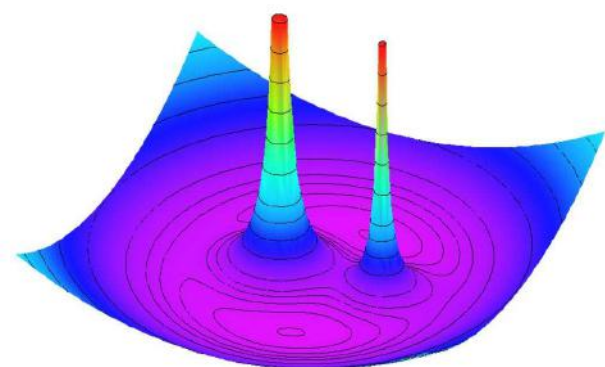


Figura 2.7: Superfície definida por $C = 2 \Omega(x, y)$ e $\mu_2 = 0.3$. (vista de cima).

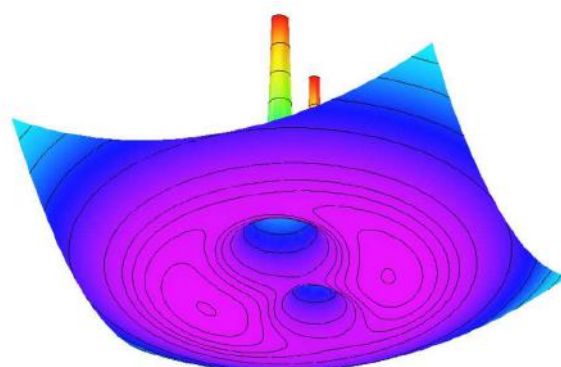


Figura 2.8: Superfície definida por $C = 2 \Omega(x, y)$ e $\mu_2 = 0.3$. (vista de baixo).

Os pontos de equilíbrio são os pontos nos quais as derivadas do pseudo-potencial se anulam. Esses pontos de equilíbrio podem ser estáveis ou instáveis. Euler e Lagrange mostraram a existência de cinco pontos de equilíbrio para o problema restrito e circular de três corpos, denominados pontos de equilíbrio de Euler-Lagrange (Corrêa, 2000).

Para a determinação desses pontos é necessário a resolução do seguinte sistema:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} + x = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\mu_1 \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} + y = 0 \quad (2.16)$$

O resultado fornece três pontos sobre o eixo x , L_1 , L_2 e L_3 , chamados de *pontos colineares* e os dois restantes, L_4 e L_5 , que formam triângulos equiláteros com os corpos primários, chamados de *pontos triangulares*.

A figura 2.9 exhibe a localização de tais pontos de equilíbrio.

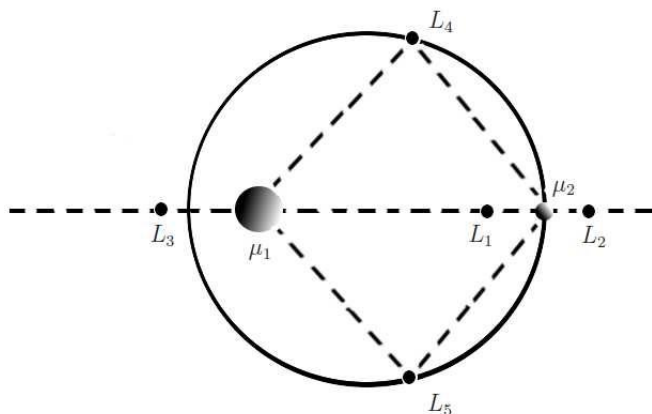


Figura 2.9: Localização esquemática dos pontos de equilíbrio do PRTC.

Para o cálculo dos pontos colineares, tem-se $y = 0$, na equação 2.15, enquanto que para a solução triangular é suficiente fazer $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$, nas equações 2.3 e 2.4, e resolver o sistema.

As coordenadas dos pontos triangulares são $x = 0.5 - \mu_2$ e $y = \pm\sqrt{3}/2$, onde o sinal positivo corresponde a L_4 e o negativo a L_5 .

No caso dos pontos colineares, para cada ponto, obtemos uma função polinomial de grau 5. Para resolvê-las, utilizamos o algoritmo de Newton-Raphson implementado em C++. Para uma visão mais detalhada do comportamento da posição dos pontos colineares à medida que alteramos μ_2 , vide o livro de Szebehely (Zsebehely, 1967).

2.6 Regiões de Hill

Nesta secção, serão discutidas as diferentes regiões de movimento, também denominadas *regiões de Hill*.

Note que podemos discutir o movimento da partícula a partir de uma análise qualitativa da função $\Omega(x, y)$. Já mostramos que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C$ (equação 2.10) e como $v^2 \geq 0$, temos que $2\Omega \geq C$. Dessa forma, utilizando as figuras 2.5 e 2.6, podemos ter uma ideia das regiões permitidas à partícula. As curvas onde $2\Omega = C$ são chamadas curvas de velocidade zero e funcionam como *curvas de retorno*, as quais a partícula não pode ultrapassar, ou seja, correspondem a verdadeiras barreiras topológicas.

A figura 2.10 mostra as curvas de velocidade zero correspondentes aos valores da constante de Jacobi dos pontos colineares. Essas linhas definem quatro regiões de movimento no plano, a saber: região I, região II, região III e região IV.

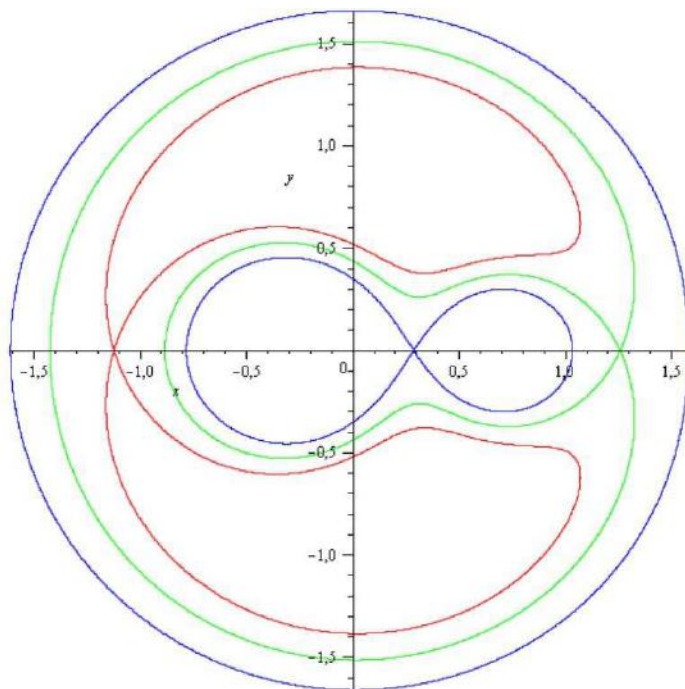


Figura 2.10: Curvas de Velocidade Zero associadas ao Pontos de Equilíbrio ($\mu_2 = 0.3$).

Como C é uma função de x, y, \dot{x} e \dot{y} (relação 2.12), temos que, para $v^2 = 0$, cada ponto do plano xOy corresponde a um valor de C diferente. Sejam C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 as constantes que associadas aos cinco pontos de Euler-Lagrange L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 , respectivamente. A análise das possíveis regiões de movimento, onde a área branca corresponde à região permitida e a área cinza à região proibida, é feita do seguinte modo:

$C \geq C_1$: o movimento é permitido na região I (área branca), figura 2.11. Nesse caso, o movimento ocorre em órbitas ao redor de cada corpo primário. Não há comunicação entre as regiões que circundam cada corpo primário e a partícula pode se mover até atingir a curva limite, fechada em L_1 . É possível a existência de órbitas ao redor dos dois corpos primários, simultaneamente; bem como órbitas de escape, externas à fronteira exterior. À medida que o valor da constante de Jacobi diminui, as duas regiões internas se tocam em L_1 .

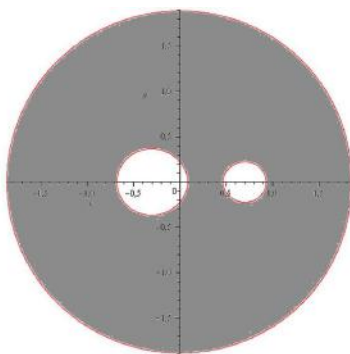


Figura 2.11: Região I: A região cinza corresponde à área proibida.

$C_1 \geq C \geq C_2$: o movimento é permitido na região II (área branca), figura 2.12. Nesse caso, a partícula pode transitar entre os corpos primários, orbitando ora um, ora outro. Também são permitidas órbitas

ao redor de cada corpo primário (e dos dois, simultaneamente). Órbitas de escape, além da curva mais externa, também são permitidas.

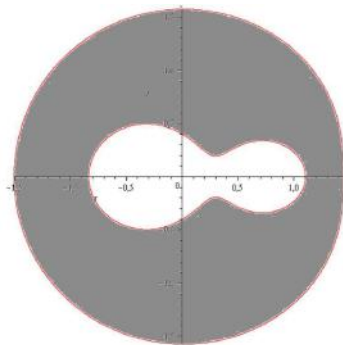


Figura 2.12: Região II: A região cinza corresponde à área proibida.

$C_2 \geq C \geq C_3$: o movimento é permitido na região III (área branca), figura 2.13. Nesse caso, a partícula pode escapar das proximidades dos corpos primários, pois a curva de velocidade zero é aberta.

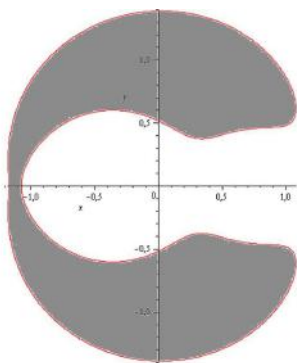


Figura 2.13: Região III: A região cinza corresponde à área proibida.

$C_3 \geq C \geq C_4 = C_5$: o movimento é permitido na região IV (área branca), figura 2.14. Nesse caso, a partícula pode percorrer todo o plano xOy , exceto as áreas internas das curvas definidas por C . As curvas de velocidade zero vão diminuindo até se reduzirem aos pontos L_4 e L_5 . Quando $C = C_4 = C_5$, a partícula é permitida em todo o espaço de configuração .

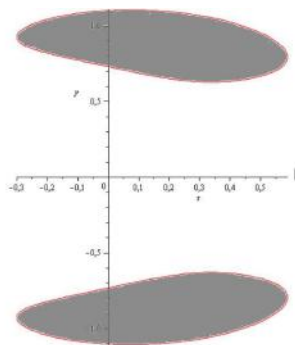


Figura 2.14: Região IV: A região cinza corresponde à área proibida.

As figuras 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18 mostram algumas curvas de velocidade zero para cada região de Hill, para $\mu_2 = 0.3$.

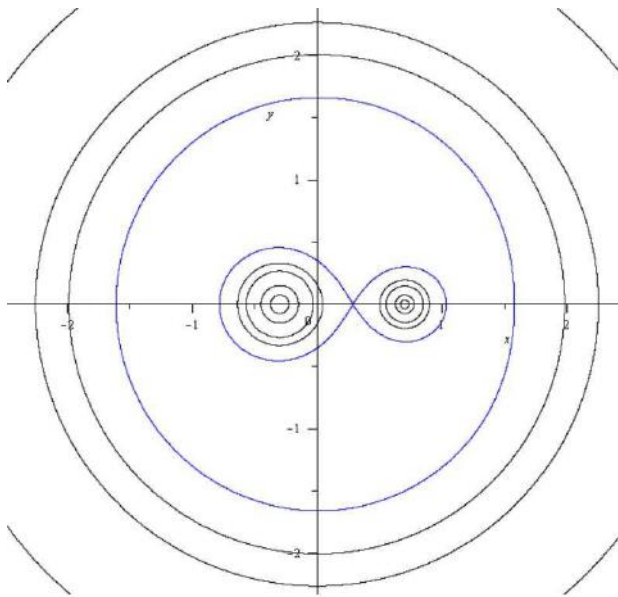


Figura 2.15: Região I.

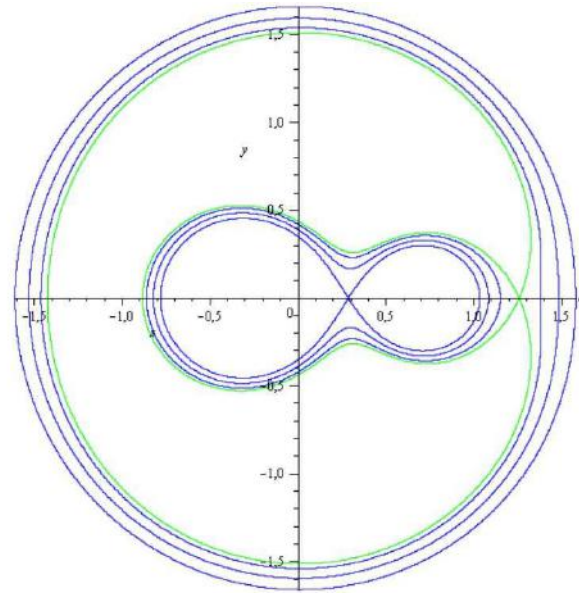


Figura 2.16: Região II.

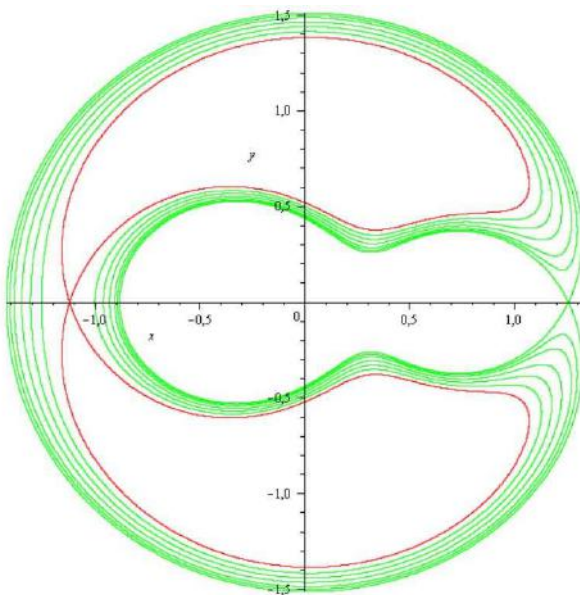


Figura 2.17: Região III.

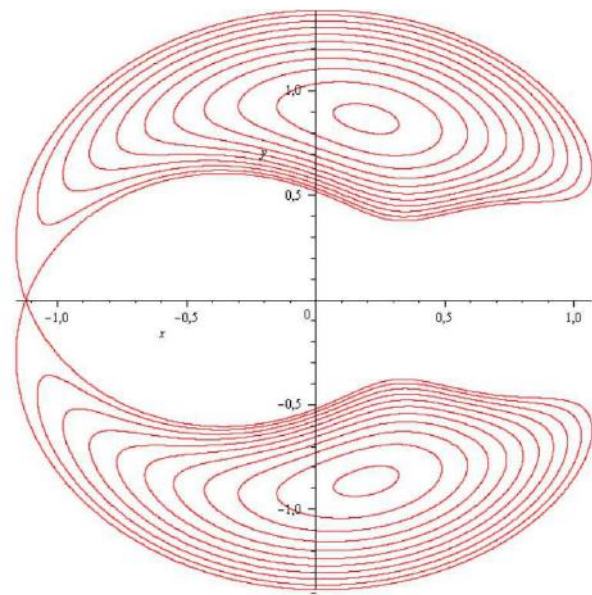
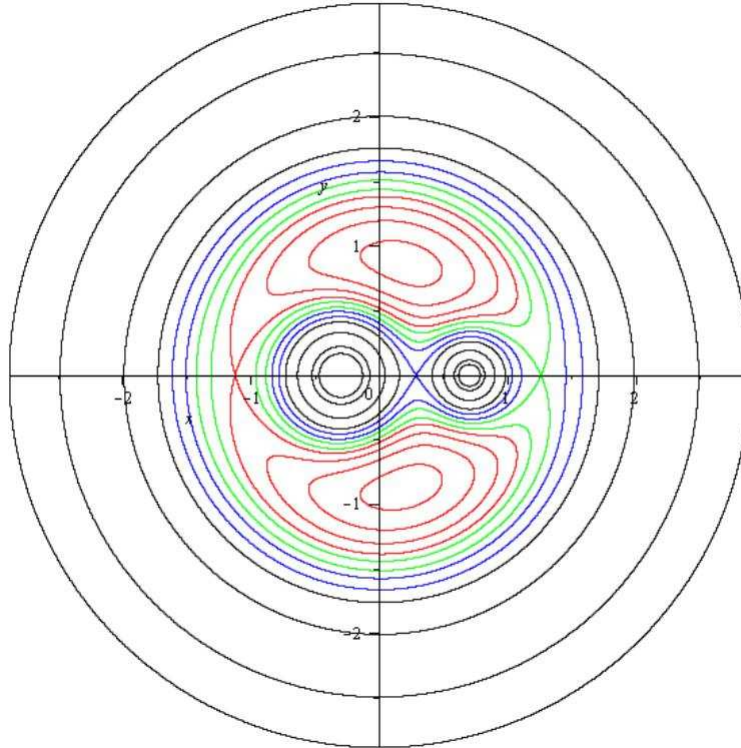


Figura 2.18: Região IV.

A figura 2.19 exibe todas as regiões de Hill, bem como várias curvas de velocidade zero que permeiam o plano xOy .


 Figura 2.19: Curvas de Velocidade Zero para $\mu_2 = 0.3$.

2.7 Caso Sol-Terra

Nesta monografia, usaremos o valor de μ_2 igual a 3.0359×10^{-6} que corresponde ao caso Sol-Terra. As posições do Sol e da Terra são dadas, respectivamente, por: $x_{SOL} = -\mu_2 = 3.0359 \times 10^{-6} \approx 0$ e $x_{TERRA} = +\mu_1 = 0.9999969641 \approx 1$. Note que o Sol se encontra praticamente na origem ($x = 0$), enquanto que a Terra se encontra praticamente em $x = 1$. Os pontos de equilíbrio colineares e triangulares, para o sistema Sol-Terra, são dados abaixo.

$$L_1: x_{L1} = +0.989923740693944$$

$$L_2: x_{L2} = +1.010002991023459$$

$$L_3: x_{L3} = -1.000001264958333$$

$$L_4: x_{L4} = 0.5 - \mu_2 = 0.499996964100 \quad y_{L4} = +\sqrt{3}/2$$

$$L_5: x_{L5} = 0.5 - \mu_2 = 0.499996964100 \quad y_{L5} = -\sqrt{3}/2$$

Os valores da constante de Jacobi dos pontos de equilíbrio de Euler-Lagrange para o caso Sol-Terra são dados abaixo:

$$L_1: C(L_1) = 3.000897096$$

$$L_2: C(L_2) = 3.000893048$$

$$L_3: C(L_3) = 3.000003036$$

$$L_4: C(L_4) = 2.999996964 \approx 3.0 - \mu_2$$

$$L_5: C(L_5) = 2.999996964 \approx 3.0 - \mu_2$$

Note que basta conhecermos a região próxima à Terra, uma vez que a órbita geostacionária é uma órbita próxima à Terra. As curvas de velocidade zero dessa região estão mostradas na figura 2.20.

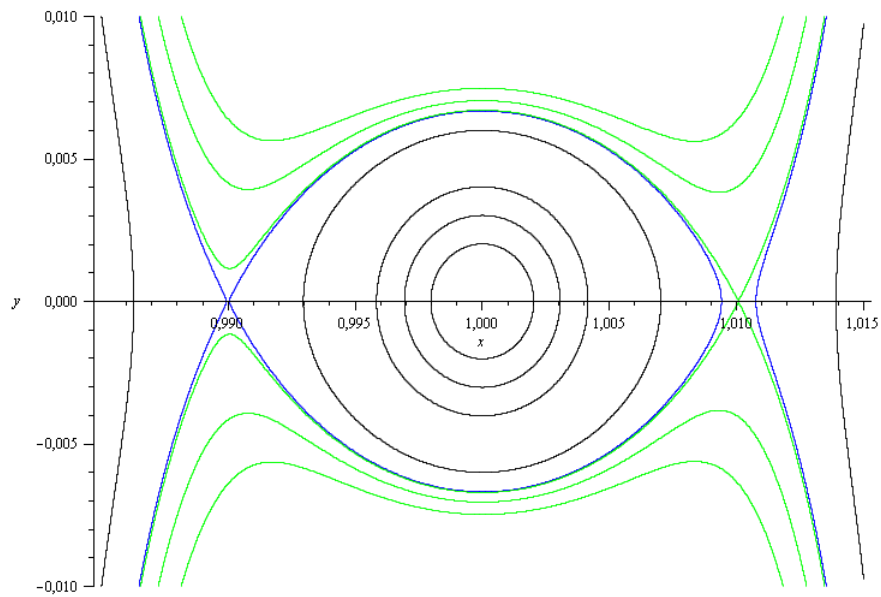


Figura 2.20: Curvas de Velocidade Zero na região próxima à Terra.

Capítulo 3

Órbita Geoestacionária

3.1 Um Pouco de História

Isaac Newton apresentou, em seu livro *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*, a ideia de se criar um satélite artificial pela primeira vez. Séculos depois, K. Tsiolkovski, no fim do século XIX, em seu livro *Speculations of Earth and Sky, and On Vesta* (1895), imaginou uma torre vertical ancorada no equador da Terra, subindo até a órbita geoestacionária e tendo um contrapeso além dela, conforme ilustra a figura 3.1.

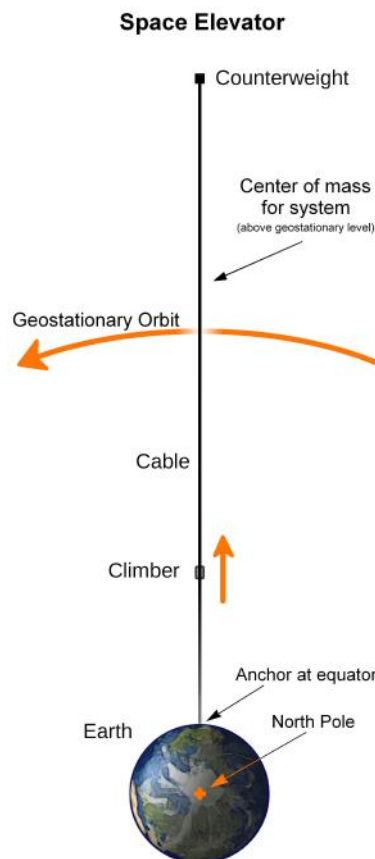


Figura 3.1: Esquema do elevador espacial idealizado por Tsiolkovski.

A seguir (figura 3.2), um desenho ilustrativo feito pelo próprio Tsiolkovski referente a suas ideias acerca de um elevador espacial.

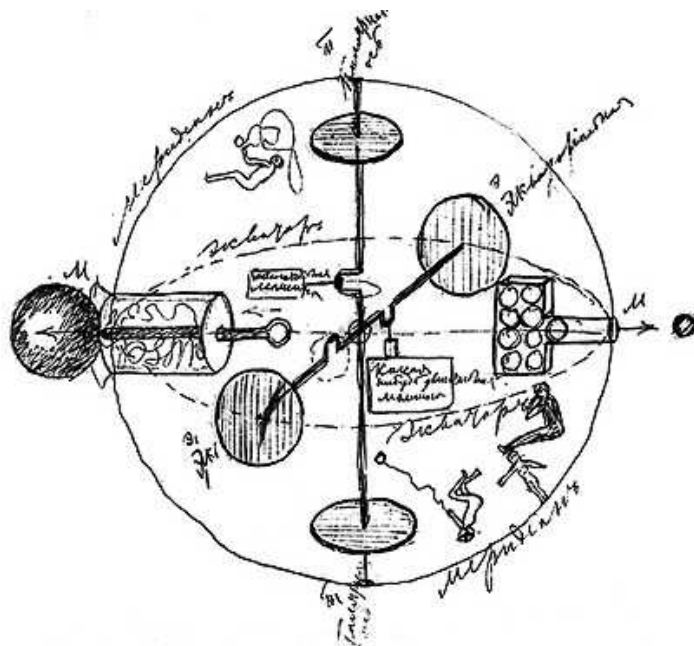


Figura 3.2: Órbita desenhada por Tsiolkovski em seu livro *Speculations of Earth and Sky, and On Vesta*.

Em 1945, Arthur C. Clarke, em artigo para a revista *Wireless World* (Clarke, 1945), fez a extraordinária antecipação do que se tornaria realidade vinte anos depois. Ele demonstrou que havia possibilidade de se colocar um satélite em órbita circular da Terra a uma altura de 35.786 km, com velocidade angular exatamente igual àquela que a terra tem em torno de seu próprio eixo. Ele sugeriu que esta plataforma espacial poderia conter uma estação transmissora de rádio. Assim nasceu a ideia dos satélites de telecomunicações. A figura 3.3 exibe algumas órbitas, incluindo a geoestacionária.

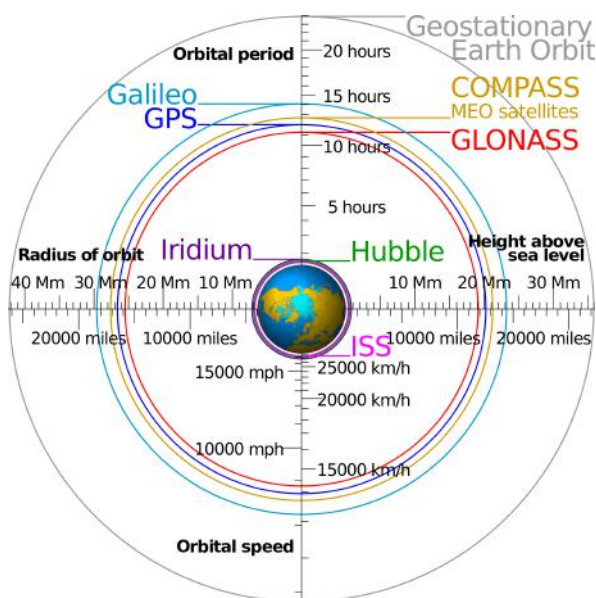


Figura 3.3: Órbita geoestacionária e outras órbitas (CNET, 2013).

As estações terrenas usavam antenas parabólicas rastreadoras de grande diâmetro. Os Estados Unidos foram os pioneiros no uso de refletores passivos espaciais. Em 1946, J. Mofenson detectou ecos lunares pelo radar. Em 1957, houve o primeiro chaveamento passivo de circuitos de voz pela reflexão lunar, realizado por J. H. Trexler.

Mas mesmo antes disso, a Marinha dos EUA, em 1954, já usava a Lua como refletor passivo para fazer comunicações regulares entre o Havaí e Washington usando antenas de 25m de diâmetro, direcionáveis, de radiotelescópios. As primeiras experiências usando a Lua como refletor passivo foram feitas entre os anos 40 e 50, com radares militares. Eles simplesmente redirecionavam os sinais de rádio emitidos da Terra, sem que houvesse qualquer processamento. A estrutura refletora passiva operava de modo análogo a um espelho plano da ótica geométrica, segundo as leis da reflexão.

Em 1957, a U.R.S.S. lançou o primeiro satélite ativo da Terra - o Sputnik I¹ -, capaz de receber, amplificar e retransmitir informação de estações terrenas. Ele funcionou por 21 dias transmitindo sinais de telemetria². Em 12 de agosto de 1960, foi colocado em órbita pela NASA o primeiro satélite de telecomunicações - o Echo I -, o qual é o tipo mais simples de satélite (refletor passivo). Era um balão esférico de 30m de diâmetro feito de plástico aluminizado.



Figura 3.4: Os engenheiros Stanley R. Peterson (esquerda) e Ray Bowerman (direita) estão conferindo o satélite Intelsat I, também chamado de *Early Bird* que foi lançado pela NASA e construído pela *Hughes Aircraft Corporation*. A superfície do satélite possuía cerca de 6000 células solares a fim de fornecer energia ao mesmo.

Em 10 de julho de 1962, graças à competição entre U.R.S.S. e Estados Unidos, foi lançado também pela NASA, o primeiro satélite ativo de telecomunicações - o Telstar -, mas ele estava longe de ter uma

¹Os objetivos principais do Sputnik I consistiam em: determinar a densidade das camadas mais altas da atmosfera através do arraste aerodinâmico e da velocidade e decadência orbitais, testar métodos ópticos e de rádio de rastreamento orbital, determinar os efeitos da propagação das ondas de rádio através da atmosfera e verificar os efeitos de pressurização em órbita. O satélite alcançou seus objetivos plenamente. Os dados transmitidos por esse satélite, através de sinais de rádio, podiam ser escutados por radioamadores do mundo inteiro.

²Telemetria é uma tecnologia que permite a medição e comunicação de informações de interesse do operador. A palavra é de origem grega onde *tele* significa remoto e *metron* significa medida.

órbita síncrona. Ele girava ao redor da Terra numa órbita baixa e elíptica de 300 a 500 km de altura, dando uma volta a cada duas horas. O Telstar podia ser usado como radioenlace³ por menos de meia hora de cada vez, somente durante o tempo em que podia ser visto simultaneamente pelas duas estações rastreadoras que deveriam se comunicar.

A órbita sugerida por Clarke é hoje conhecida como geoestacionária e o primeiro satélite a receber esta qualificação foi o Syncom I⁴. Lançado em 14 de fevereiro de 1963 pela NASA, silenciou depois de 20 segundos. Seguiu-se o Syncom II em 26 de julho de 1963, que funcionou perfeitamente. O terceiro satélite síncrono foi o Syncon C, lançado em 19 de agosto de 1964. Por ele, foram transmitidas imagens de televisão do Japão à Costa Oeste dos EUA, durante os Jogos Olímpicos daquele ano. Em 06 de abril de 1965, foi lançado o satélite *Early Bird* (Pássaro Madrugador) que atingiu a órbita prevista por Clarke, e que se tornou o primeiro satélite comercial para fins de comunicação.

Em 1970, entrava em operação o Intelsat III com capacidade para 1200 circuitos de voz e um canal de televisão. Em 1971, o Intelsat IV entrava em órbita com 9000 circuitos de voz e 12 canais de televisão. O primeiro satélite brasileiro, o Brasilsat I, foi lançado em 1984 com o propósito de cobrir todo território nacional.

O projeto de um sistema de satélite depende inicialmente da escolha de sua órbita. Os sistemas de órbita baixa são assíncronos, não-geoestacionários. Os satélites de baixa altitude (LEO: *Low Earth-Orbit*) têm órbitas de cerca de 1.600 km (ou um pouco mais) de altura, porém abaixo do primeiro cinturão de radiação de Van Allen. Os satélites de média altitude (MEO: *Medium Earth-Orbit*) são localizados a cerca de 10.000 km de altura, o que os coloca entre os dois cinturões de Van Allen. A altitude dos satélites geoestacionários (GEO: *Geostationary Earth-Orbit*) (que será obtida na seção 3.3) corresponde a 35786.38 km, quando então têm sua velocidade angular de translação igual à velocidade angular da rotação da Terra.

Os dados contidos nessa monografia, acerca de satélites em órbita em torno da Terra, correspondem àqueles fornecidos pela **UCS Satellite Database**⁵. A seguir, há uma tabela discriminando a quantidade de objetos, que existe atualmente, em cada órbita.

Um satélite de telecomunicações nada mais é do que um repetidor ativo de sinal localizado no espaço. Ele recebe o sinal que passa por um sistema de antenas, um receptor, um conversor de frequência, um transmissor e depois é enviado de volta para determinada região da superfície terrestre. O sinal recebido pelo satélite chega extremamente fraco devido à distância que o mesmo percorre, que é de aproximadamente 36000 km. O satélite é monitorado e controlado por sinais de telemetria enviados por estações terrenas. Esses sinais são usados para referência de posicionamento e ajuste correto do satélite em sua posição orbital. A energia necessária para o funcionamento do satélite é obtida através de painéis solares; essa energia é armazenada em baterias para os períodos de eclipse.

No início da era dos satélites de comunicação, pensava-se que a tendência seria somente o uso de órbitas geoestacionárias. A primeira exceção em operação regular foi o sistema *Molnyia*, construído pelos soviéticos, que tinha uma órbita inclinada de 60° em relação ao Equador, não-síncrono, com uma órbita altamente excêntrica, mas que permitia a cobertura do território nas altas latitudes. Posteriormente, começou-se a utilizar muitos sistemas de satélites não-síncronos, não somente para atender a peculiaridades de cober-

³No dimensionamento de um enlace de rádio, o objetivo é garantir que o sinal digital original que transporta a informação possa ser regenerado na outra ponta com uma taxa de erros aceitável. Para que isto ocorra, a relação portadora ruído (C/N) na recepção tem que ser maior que um valor mínimo especificado. Este valor é função da modulação e mecanismos de codificação utilizados no enlace.

⁴O termo Syncom vem de *Synchronous Communication Satellite*.

⁵O *UCS Satellite Database* é uma lista contendo mais de 900 satélites operacionais que estão em órbita em torno da Terra. Com o intuito de auxiliar pesquisadores, a UCS (*Union of Concerned Scientists*) disponibiliza informações acerca dos satélites operacionais na forma de uma planilha que pode ser acessada no próprio site da UCS (UCS, 2013). Tal lista contém informações básicas sobre os satélites e suas órbitas, mas não contém informação detalhada necessária para localizar cada satélite.

Tabela 3.1: Informações quantitativas acerca dos satélites operacionais em órbita em torno da Terra.

	Tipo	Quantidade
Órbita	LEO	489
	MEO	68
	GEO	424
País Proprietário	Estados Unidos	443
	Rússia	110
	China	93
	Brasil	10
Finalidade	Civil	8
	Comercial	197
	Governamental	116
	Militar	122

tura, mas também para serviços de baixa órbita, a fim de permitir o uso de receptores simples. Esses casos são respectivamente os sistemas globais de telefonia pessoal e os sistemas de posicionamento global (GPS).

Para se manter um satélite em órbita é preciso considerar o efeito das perturbações, como a pressão de radiação, a resistência da atmosfera, a atração gravitacional da Lua e de outros corpos celestes (Sol e planetas), a não esfericidade da Terra, etc. É interessante notar que 100% da superfície da Terra pode ser coberta com um único satélite em órbita polar. O satélite gira em torno da Terra em uma órbita num plano meridiano, que passa pelos pólos. Mas a Terra gira segundo um eixo latitudinal do Equador. Assim sendo, enquanto o satélite gira, a superfície da Terra muda debaixo dele. Como resultado, cada localidade da Terra fica no alcance do satélite duas vezes por dia.

3.2 Lançamento, Controle Orbital e Eliminação

O número de satélites na órbita geoestacionária está crescendo, desde o primeiro (que foi lançado, em 1963), até cerca de cem em 1980 e duzentos em 1990. O último registro sobre a quantidade de lixo que se acumula no espaço mostrou que de cerca de 19 mil objetos maiores que 10 centímetros que estão em órbita, a maior parte gira próximo à Terra, representando riscos significativos na colocação de novos satélites em órbita, que precisam ser posicionados a cada dia, com maior precisão. Na órbita geoestacionária, atualmente, há cerca de 424 satélites, conforme a tabela 3.1 que foi construída a partir dos dados da UCS.

Esse tipo de órbita, na qual o satélite está em repouso com relação à Terra, é utilizada, principalmente, por missões de telecomunicações, mas também por algumas missões de observação da Terra (geológicas ou meteorológicas) e algumas missões científicas. A principal vantagem é o contato permanente entre a estação terrena e o satélite em uma órbita geoestacionária. Atualmente, os satélites são meios de comunicação extremamente importantes. Por eles passam cerca de 33% das chamadas telefônicas internacionais, bem como a maior parte das transmissões televisivas internacionais.

A União Internacional de Telecomunicações (UIT) dividiu o **cinturão de Clarke**⁶ em 180 posições orbitais⁷, cada uma separada da outra de um ângulo de 2°.

⁶Outro termo para designar a linha ideal pré-determinada no espaço tal que o satélite permanece em repouso com relação à Terra, isto é, órbita geoestacionária. Recebe esse nome em homenagem a Arthur Clarke.

⁷O Brasil pleiteou 19 posições orbitais junto à UIT. Destas, atualmente sete se encontram designadas para uso dos operadores

Um satélite típico é composto de uma parte comum (*bus*) onde se encontram as baterias, painéis solares, circuitos de telemetria e a parte de propulsão. Além do *bus*, tem-se a carga útil (*payload*) composta essencialmente por *transponders*, que é o equipamento receptor, processador e repetidor do sinal recebido no satélite.

As hipóteses mais rigorosas sobre as propriedades geoestacionárias de tal órbita surgem com missões de telecomunicações, onde as estações terrenas são equipadas com antenas fixadas e orientadas para uma única direção; alguns satélites científicos não necessitam de qualquer outro benefício da órbita geoestacionária, além da visibilidade contínua de uma estação terrena com uma antena funcionando com *autotrack system*⁸. Os controles a rádio, porém, impõem restrições sobre as variações longitudinais do satélite, a fim de minimizar a interferência na frequência com a vizinhança da órbita.



Figura 3.5: Lançador **Ariane 5** da missão ECA com EchoStar XVII e MSG-3 (Space, 2012)



Figura 3.6: Satélite de GPS (NASA, 2013).

As órbitas geoestacionárias têm algumas vantagens e também desvantagens, apesar de seu uso ser o mais difundido. O satélite permanece quase⁹ estacionário em relação à estação terrena. Por isso não é exigido equipamento de rastreamento. Não há necessidade de comutação de um satélite para outro. Consequentemente, a estação terrena dispensa o equipamento de comutação e o complicado sistema de coordenação da comunicação, combinado com a comutação. A grande altitude dos satélites permite a cobertura de praticamente toda a superfície da Terra, exceto uma pequena calota em cada pólo. O efeito Doppler é muito menor e praticamente desprezível, se comparado com as órbitas baixas. Como desvantagens, sua maior altitude faz com que o tempo de propagação do sinal seja maior. O tempo de ida e volta do sinal em um circuito de satélite é de cerca de 500 milissegundos. Este retardo provoca problemas mais complexos em protocolos de verificação e correção de erro de dados, onde a todo instante um transmissor interrompe a comunicação de dados para aguardar a resposta do receptor de que há erro do dado enviado. Só então o dado é retransmitido¹⁰. Por este motivo os protocolos de comunicação de sistemas via satélites geoestacionários, são diferentes dos outros sistemas de telecomunicações, tornando viável a tecnologia. Nesse

brasileiros (*Star One*, *Loral* e *Hispasat*).

⁸Trata-se de um sistema para controlar a orientação da antena a partir do ruído do sinal.

⁹No fim dessa secção, discutiremos um pouco mais acerca da condição estacionária dos satélites.

¹⁰Esta interação entre os dois sistemas (Tx e Rx) seria normalmente instantânea se eles não tivessem que aguardar 0.5 s por uma confirmação de erro.

sentido, os satélites geoestacionários exigem maior potência de transmissão e receptores mais sensíveis. É mais complicado colocar um satélite em órbita geoestacionária e é necessária uma estação de controle para manter o satélite na órbita correta durante sua vida útil. Além disso, são necessários pequenos propulsores a bordo do satélite que utilizam combustível para controlar a órbita e a altitude. O combustível a bordo é, basicamente, quem determina o tempo de vida útil do satélite.

Usaremos a expressão geoestacionária para caracterizar uma missão que almeja manter o satélite, em repouso, o mais distante possível, com relação à Terra. A expressão geossíncrona é frequentemente utilizada no mesmo sentido, embora, na verdade, signifique que o período orbital é idêntico ao período de rotação da Terra (o termo geossíncrono não impõe qualquer restrição acerca da excentricidade ou da inclinação da órbita).

O propósito desse texto está, *a priori*, limitado à descrição da parte geoestacionária de uma missão. Logo, apenas uma breve discussão do Lançamento, Primeira Fase de Operações (LEOP)¹¹, Controle Orbital e Eliminação dos satélites geoestacionários será feita aqui¹². Os dados a seguir correspondem ao lançador **Ariane**, mas as LEOP com outros lançadores são realizadas de forma similar.

Depois de 15 minutos queimando combustível em um voo, o lançador coloca o satélite a cerca de 200 km acima da superfície da Terra em uma órbita de transferência cujo apogeu localiza-se próximo da altura geoestacionária, conforme a figura 3.7.

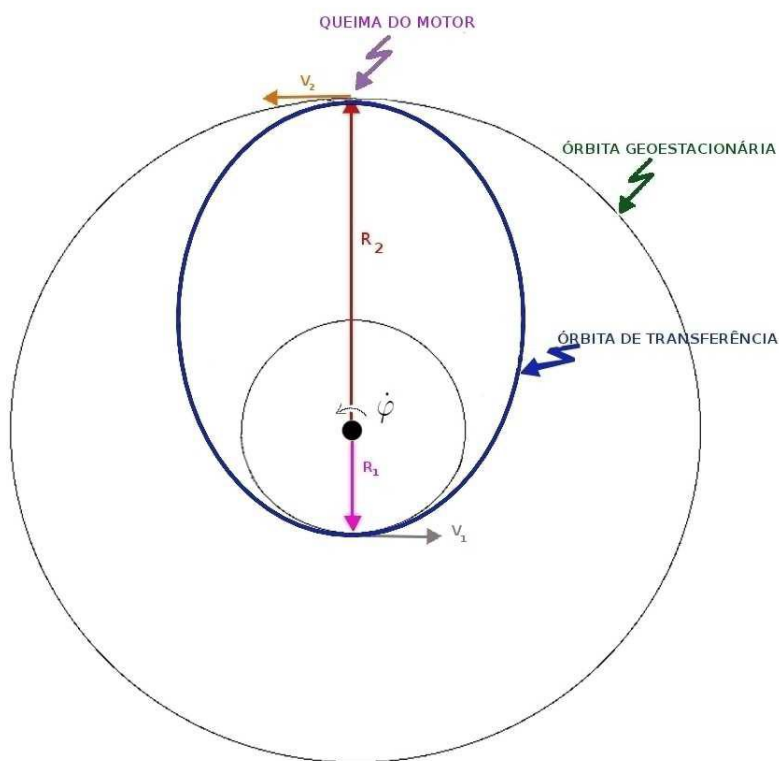


Figura 3.7: LEOP típico, onde r_1 é a altura que o satélite alcança antes de entrar na órbita de transferência, r_2 é a altura da órbita geoestacionária, v_1 é a velocidade do satélite na órbita de transferência e v_2 é a velocidade do satélite na órbita geoestacionária. Note que a órbita de transferência não pertence ao mesmo plano da órbita geoestacionária.

Após algumas voltas na órbita de transferência, o motor é acionado no apogeu a fim de colocar o satélite na órbita geoestacionária. O combustível queimado no apogeu corresponde a, aproximadamente,

¹¹Essa abreviação vem do termo em inglês, que é *Launch and Early Operations Phase*.

¹²Detalhes sobre esse tema podem ser encontrados no capítulo 6 do livro de Soop (Soop, 1994).

metade do peso do satélite e é usado para aumentar a velocidade do mesmo de 1.6 km/s para 3 km/s. Durante a queima no apogeu, a inclinação da órbita de transferência varia de 7° para próximo de 0° (inclinação da órbita geoestacionária).

Os satélites geoestacionários primitivos possuíam combustível sólido que queimava em menos de um minuto. Nos projetos mais recentes, utiliza-se combustível líquido em um motor que pode ser ligado e desligado várias vezes em diferentes apogeus (Soop, 1994). Entre tais queimas, o satélite voa em órbitas intermediárias com perigeus mais altos, porém o apogeu permanece próximo à posição geoestacionária. Os incrementos na velocidade, devido a diferentes queimas, resultam no mesmo valor v_2 da figura 3.7.

Após colocar o satélite na órbita geoestacionária, uma série de manobras é realizada por cerca de um mês a fim de mover o satélite para a longitude desejada e ajustar a excentricidade e a inclinação da órbita.

Essa série de manobras compensa os erros da queima do motor no apogeu - no que se refere à direção, magnitude e tempo -, além disso, também compensa erros remanescentes da injeção do lançador. Certamente, há mais parâmetros para ajustar quando o combustível é sólido do que quando o combustível é líquido.

Quando as correções terminam, as operações de rotina podem ser iniciadas. Essa fase da missão costuma durar muitos anos, na verdade, termina quando: o combustível de bordo acaba, os geradores de energia elétrica se deterioram, uma anomalia grave a bordo do satélite ocorre ou a missão se torna obsoleta.

Após tal término da missão, o satélite permanece num curso pela órbita geoestacionária ou próximo da mesma. Nos últimos anos, o problema potencial, relativo ao aumento do número de satélites geoestacionários abandonados, tem atraído a atenção das agências espaciais. Agora, é recomendado que, ao término da missão, o satélite geoestacionário seja removido da região geoestacionária, sendo colocado, dessa forma, em uma órbita circular acima do cinturão de Clarke por meio de vários deslocamentos tangenciais¹³.

Portanto, longe do cinturão de Clarke, a probabilidade de colisão no espaço de um satélite ativo com um inativo é nula. Como o número de satélites vem crescendo, em particular, há um risco crescente de danificar os painéis solares extremamente grandes que são utilizados nas missões mais recentes.

3.3 Determinação da Órbita Geoestacionária

As perturbações devido às atrações gravitacionais do Sol e da Lua, à não esfericidade da Terra e à pressão de radiação solar fazem com que a órbita geoestacionária seja uma idealização matemática.

Para a situação idealizada, considere uma Terra esférica girando com uma velocidade angular constante $\dot{\phi}$, em torno do eixo norte-sul. Considere um satélite se movendo em uma órbita circular, de raio r_g , em torno da Terra.

Da Lei da Gravitação, devido a Newton, segue que a força de atração entre duas partículas é diretamente proporcional ao produto das partículas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa as duas partículas.

Então, a força com que a Terra (massa M) atrai um satélite (massa m) é dada por

$$\vec{F} = -\frac{G M m}{r^2} \vec{e}_r \quad (3.1)$$

Considere agora um referencial não-inercial fixado no satélite, conforme ilustrado na figura 3.8.

¹³A recomendação atual é que o satélite seja removido para uma órbita de aproximadamente 300 km acima da geoestacionária. Isso representa um acréscimo de velocidade de 11 m/s. Esse acréscimo deve ser incluído no orçamento de combustível para um satélite (Pinheiro, 2012).

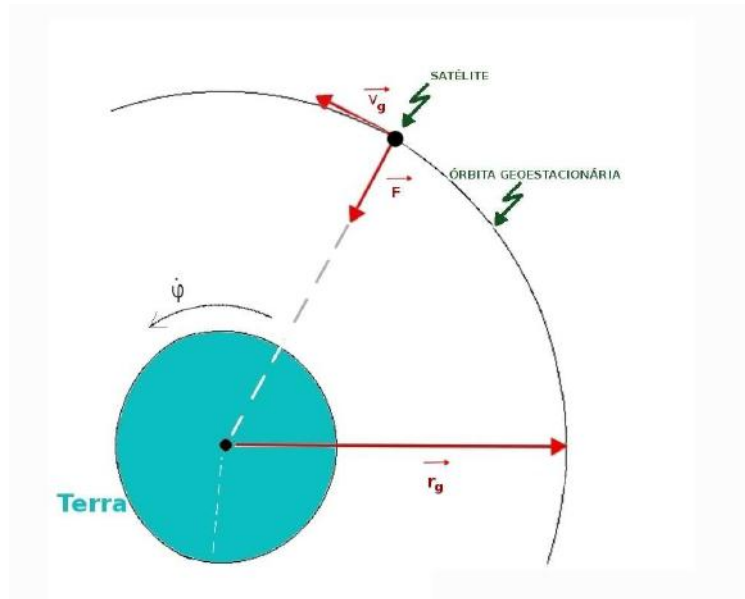


Figura 3.8: Diagrama de vetores na órbita geoestacionária.

Nesse referencial, fixado no satélite, percebemos o surgimento de uma força fictícia, a saber a força centrífuga. Para o satélite ficar em repouso em relação à Terra, é necessário que

$$\vec{F} + \vec{F}_c = \vec{0}, \quad \text{onde } \vec{F}_c = m \dot{\varphi}^2 r_g \vec{e}_r$$

Logo,

$$\begin{aligned} m \dot{\varphi}^2 r_g \vec{e}_r &= \frac{G M m}{r_g^2} \vec{e}_r \\ \Rightarrow m \dot{\varphi}^2 r_g &= \frac{G M m}{r_g^2} \\ \Rightarrow r_g &= \left(\frac{G M}{\dot{\varphi}^2} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

O valor da velocidade angular de rotação da Terra é

$$\dot{\varphi} = 7.29211585 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (3.3)$$

O valor de GM, adotado em 1989 pelo Serviço Internacional para a Rotação da Terra é

$$GM = 398600.440 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

Substituindo esses valores na equação 3.2, obtemos

$$r_g = 42164.2 \text{ km} \quad (3.4)$$

Porém, quando todas as outras forças são acrescentadas no cálculo, obtemos um valor médio que vale (Soop, 1994)

$$r_g = 42164.5 \text{ km} \quad (3.5)$$

Esse valor do raio varia com o tempo de forma desprezível devido aos termos perturbativos dependentes do tempo.

Como o raio da Terra vale 6378.12 km (Roy, 1978), temos que a altura da órbita geoestacionária é 35786.38 km, conforme dito na secção 3.1.

3.4 A Órbita Geoestacionária e o Problema Restrito e Circular de Três Corpos

Todo o tratamento desenvolvido até aqui concernente ao PRTC é válido para a órbita GEO, i.e., o satélite geoestacionário é a partícula que se move em uma órbita periódica em torno da Terra no sistema Sol-Terra-satélite. Dessa forma, precisamos converter os valores associados à órbita GEO para o sistema adimensional adotado na formulação do PRTC.

A partir do valor do raio da órbita geoestacionária (equação 3.4), calculado na secção 3.3, podemos obter o valor do raio da órbita geoestacionária no sistema adimensional.

Note que, de acordo com a demonstração da proposição 2.1 temos que $l = 1$. Mas l é a distância média entre o Sol e a Terra. Utilizando o valor contido em Murray (Murray & Dermott, 2001) para essa distância, i. e., $l = 1.495978707 \times 10^{11}$ m e a equação 3.4, temos que, o raio da órbita geoestacionária no sistema adimensional vale:

$$r_{GEO} = \frac{4.21645 \times 10^7}{1.495978707 \times 10^{11}}$$

Então,

$$r_{GEO} = 2.81852 \times 10^{-4} \quad (3.6)$$

A velocidade angular da Terra, em torno do Sol, é dada por 2.0×10^{-7} rad/s. E, da mesma forma que $l = 1$, temos que $n = 1$. Logo, a velocidade angular de uma partícula na órbita geoestacionária, no sistema adimensional, de acordo com a equação 3.3 é dada por:

$$\dot{\varphi}_{GEO} = \frac{7.29211585 \times 10^{-5}}{2.0 \times 10^{-7}}$$

Então,

$$\dot{\varphi}_{GEO} = 2.81852 \times 10^{-4} \quad (3.7)$$

Logo, a velocidade da partícula nessa órbita é

$$v_{GEO} = r_{GEO} \times \dot{\varphi}_{GEO}$$

Portanto,

$$v_{GEO} = 0.102765 \quad (3.8)$$

Agora, para calcularmos o valor da constante de Jacobi associada a essa órbita, devemos escolher uma configuração particular. Digamos quando $y = y_o = 0$ e $x = x_o = \underbrace{x_{TERRA}}_{= \mu_1} + r_{GEO}$, conforme a imagem abaixo:

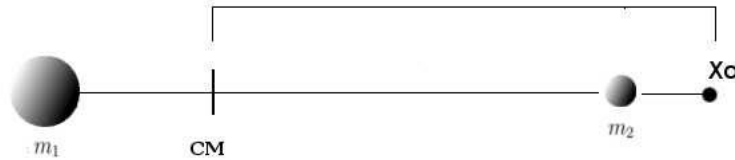


Figura 3.9: Configuração que facilita o cálculo de C .

Então, nessa configuração, de acordo com a definição 2.9, temos que:

$$\Omega(x_o, y_o = 0) = \frac{x_o^2}{2} + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$$

onde

$$r_1 = x_o + \mu_2 \tag{3.9}$$

$$r_2 = x_o - \mu_1 \tag{3.10}$$

ou, substituindo o valor de x_o ,

$$r_1 = r_{GEO} + 1 \tag{3.11}$$

$$r_2 = r_{GEO} \tag{3.12}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Omega_{GEO} &= \frac{(\mu_1 + r_{GEO})^2}{2} + \frac{\mu_1}{r_{GEO} + 1} + \frac{\mu_2}{r_{GEO}} \\ \Rightarrow \Omega_{GEO} &= 1.510790846 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Portanto, como $C = 2\Omega - v^2$, temos que

$$C_{GEO} = 3.011020691 \tag{3.14}$$

Abaixo, segue a curva de velocidade zero associada a esse valor de C .

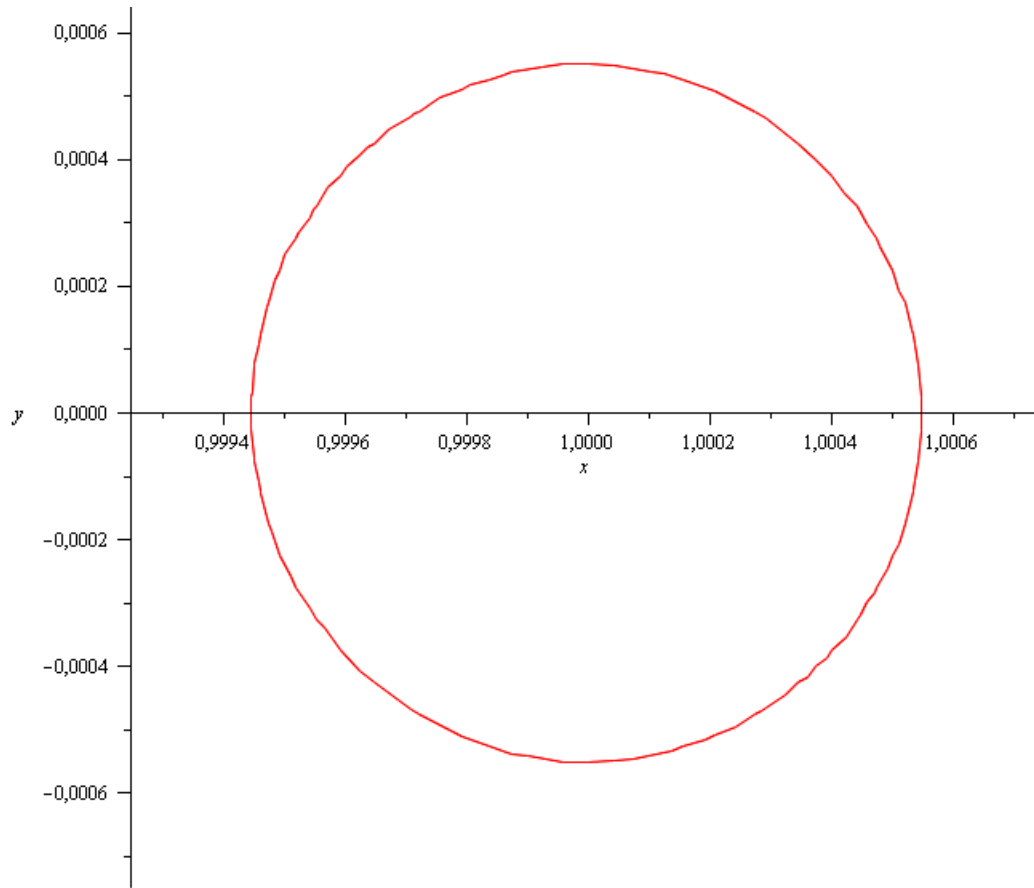


Figura 3.10: Curva de velocidade zero associada a C_{GEO} .

Capítulo 4

Secção de Poincaré

4.1 Introdução

Neste capítulo, abordaremos o estudo de técnicas de sistemas dinâmicos que nos permitem analisar qualitativamente o PRTC, pois como já dissemos, o mesmo não admite soluções analíticas.

Para isso, primeiramente, usamos o método de Runge-Kutta-Fehlberg que aproxima a solução até a sétima ordem na expansão em série de Taylor e utiliza a oitava ordem para corrigir o passo de integração. Utilizamos a implementação do prof. Carles Simó. Alguns resultados numéricos das integrações do PRTC no caso Sol-Terra serão mostrados na secção 4.2.

Em seguida, implementamos uma rotina que calcula as secções de Poincaré, que será discutida na secção 4.3. Tal técnica nos permite reduzir o espaço de fase do sistema a uma representação bidimensional.

4.2 Integração Numérica das Equações de Hamilton

Como é bem conhecido, para um sistema de N graus de liberdade, o formalismo newtoniano fornece N equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Já o formalismo hamiltoniano, para o mesmo sistema, fornece $2N$ equações diferenciais de primeira ordem. Com estas EDO's de primeira ordem, pode-se utilizar todos os resultados já conhecidos da teoria de sistemas dinâmicos.

Para o PRTC, descrito no capítulo 2, a hamiltoniana é dada por (Coelho, 1999):

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) - (y p_x - x p_y) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} \quad (4.1)$$

onde

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 \quad (4.2)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 \quad (4.3)$$

e x e y são as coordenadas da partícula e p_x e p_y são os momentos canonicamente conjugados:
 $p_x := \dot{x} - y$ e $p_y := \dot{y} + x$.

A relação entre o valor da hamiltoniana e a constante de Jacobi é (Corrêa, 2000)

$$H = -\frac{C}{2} \quad (4.4)$$

Note que a hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, uma vez que o referencial sinódico elimina tal dependência.

A partir da relação 4.1, podemos derivar um sistema dinâmico associado. Então,

$$\dot{x} = p_x + y \quad (4.5)$$

$$\dot{y} = p_y - x \quad (4.6)$$

$$\dot{p}_x = p_y - \mu_1 \frac{\mu_1(x + \mu_2)}{r_1^3} - \mu_2 \frac{\mu_1(x - \mu_1)}{r_2^3} \quad (4.7)$$

$$\dot{p}_y = -p_x - \mu_1 \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \quad (4.8)$$

O sistema acima é o sistema dinâmico autônomo não-linear que corresponde ao PRTC em sua formulação hamiltoniana. Ele foi integrado numericamente a partir do método de Runge-Kutta-Fehlberg 7-8 de passo variado (Simó, 1990), implementado em Fortran 77. Para se resolver um sistema hamiltoniano de quarta ordem, são necessárias quatro condições iniciais. Nesse caso, foram fornecidos os valores de x_o , y_o , p_{x_o} e H , que é a única integral primeira do sistema. O valor de p_{y_o} é então calculado a fim de manter fixo o valor de H .

As figuras abaixo correspondem a trajetórias da partícula. As trajetórias foram divididas nas regiões de Hill (capítulo 2), a fim de exemplificar a discussão teórica anterior. A partir de agora, todos os resultados estarão associados ao sistema Sol-Terra, pois o satélite geoestacionário se encontra em uma órbita fechada desse sistema. O valor de μ_2 vale 3.0359×10^{-6} para tal sistema. Os valores de C , H e condição inicial, ou se encontram nas figuras, ou se encontram nas legendas das figuras.

Região I: Trata-se do movimento em torno do Sol ou da Terra, bem como em torno de ambos e trajetórias de escape.

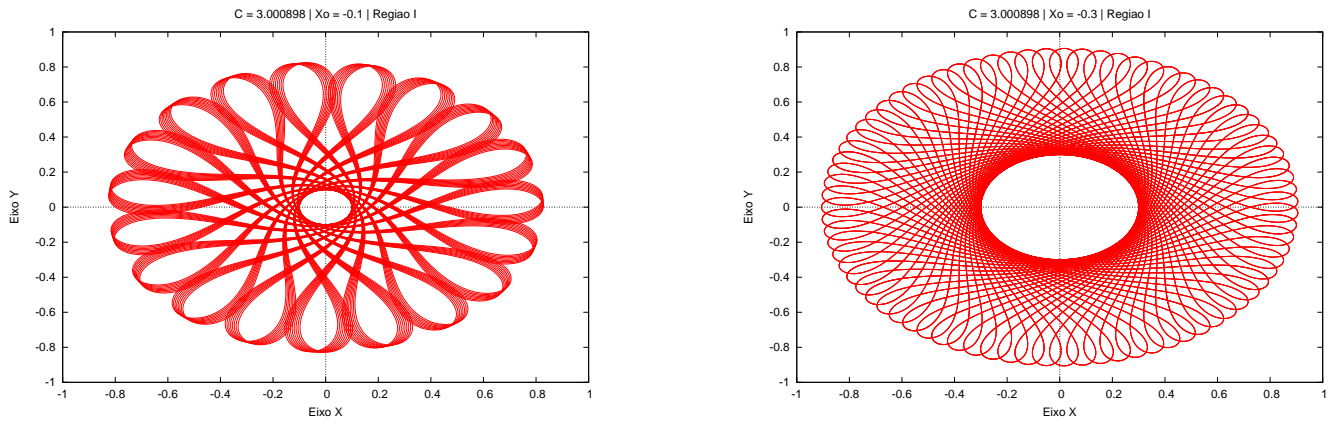


Figura 4.1: Movimento em torno do Sol. $C = 3.000898$

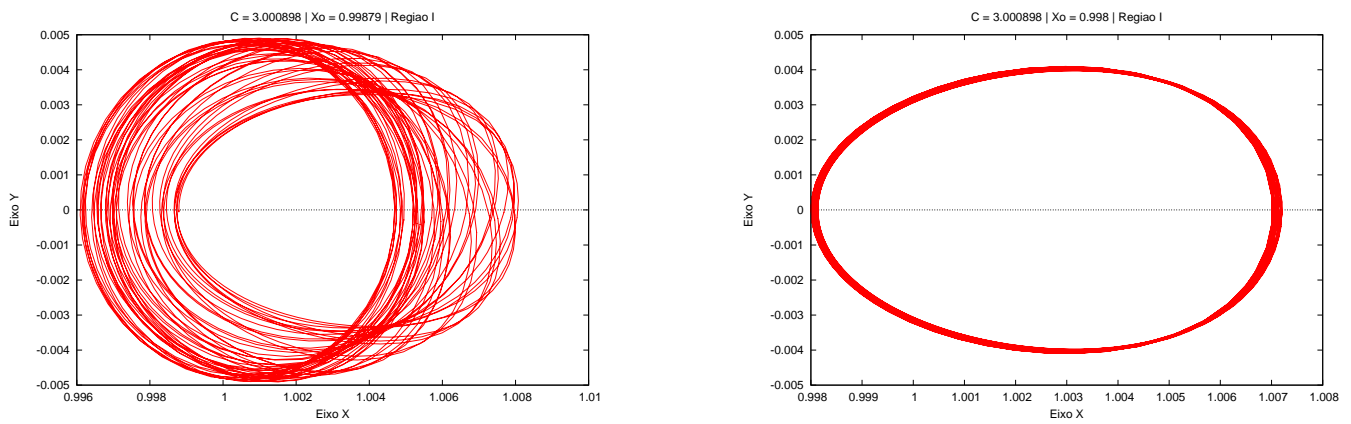


Figura 4.2: Movimento em torno da Terra. $C = 3.000898$

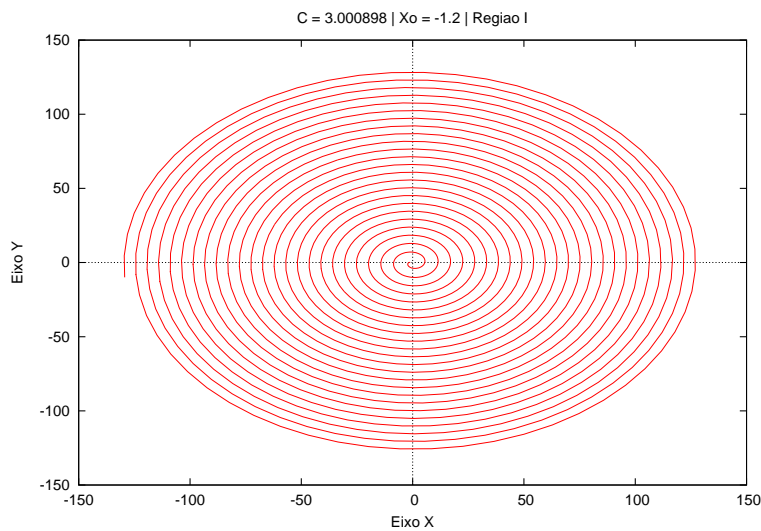


Figura 4.3: Trajetória de escape. $C = 3.000898$

Região II: Trata-se do movimento em torno do Sol ou da Terra, bem como em torno de ambos e trajetórias de escape. O corpo pode transitar entre os corpos primários.

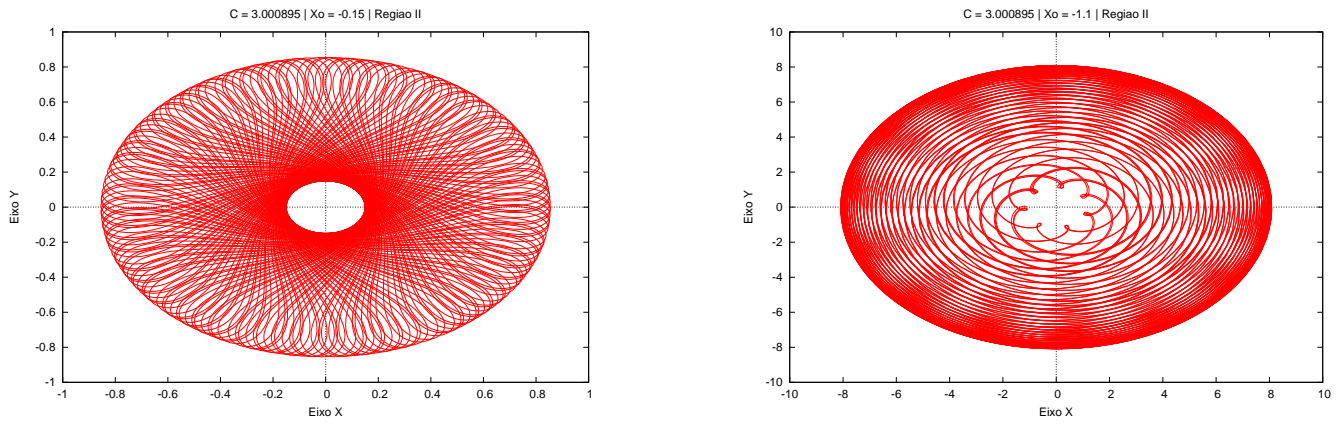


Figura 4.4: Movimento em torno do Sol. $C = 3.000895$

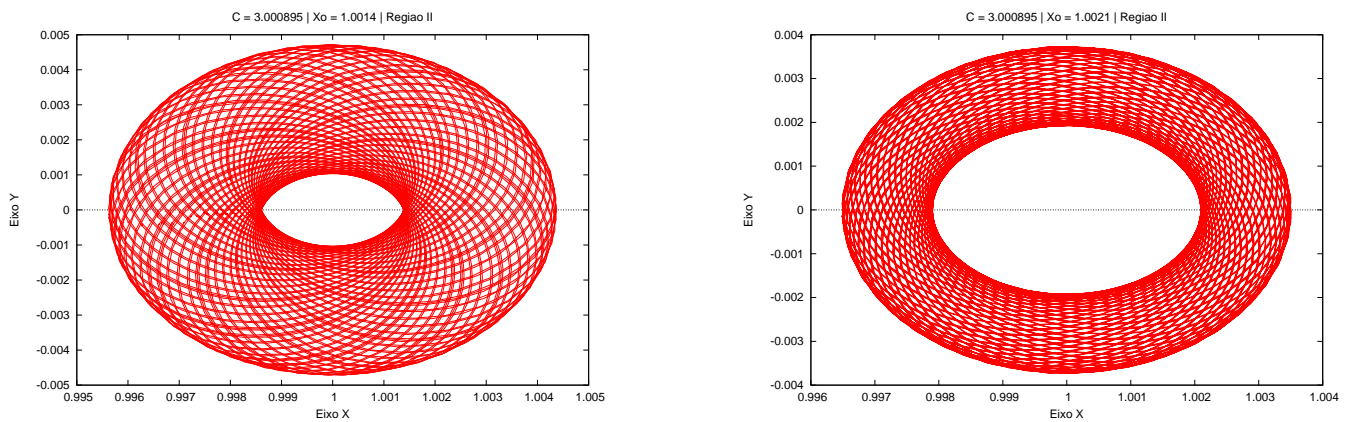


Figura 4.5: Movimento em torno da Terra. $C = 3.000895$

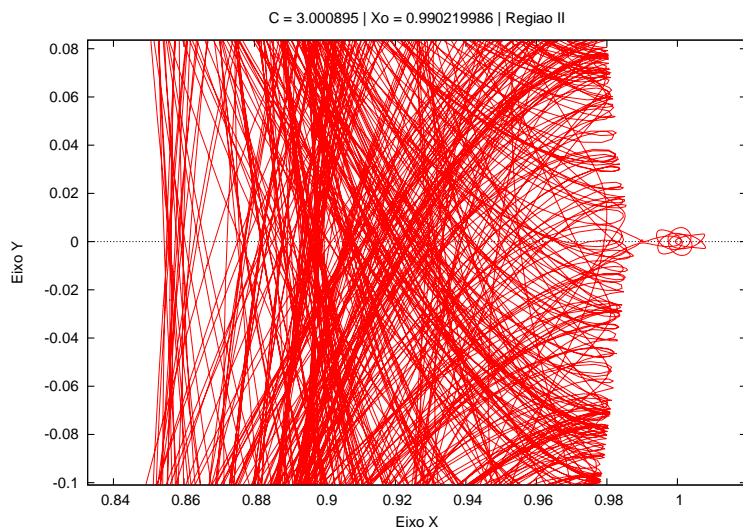


Figura 4.6: Trajetória em torno do Sol e da Terra. $C = 3.000895$

Região III: Trata-se do movimento em torno do Sol ou da Terra, bem como em torno de ambos e trajetórias de escape. O movimento da partícula não é confinado, necessariamente.

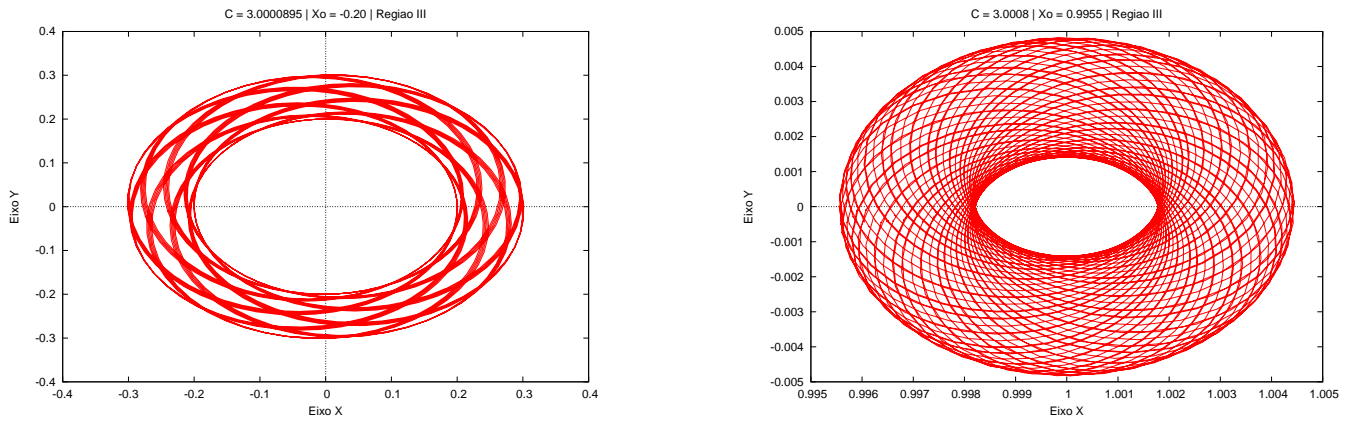


Figura 4.7: Movimento em torno do Sol (esquerda) e movimento em torno da Terra (direita).

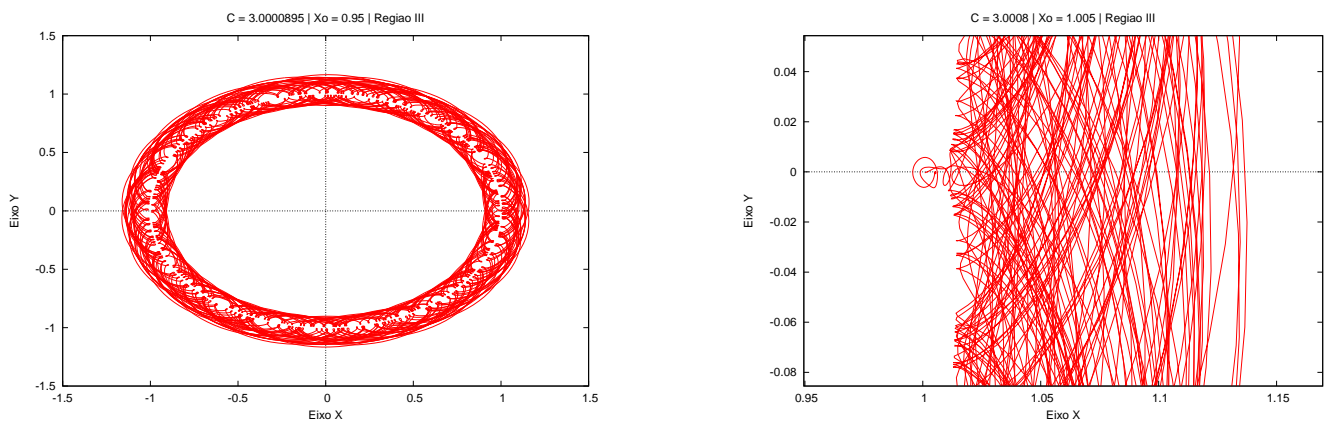


Figura 4.8: Trajetória em torno do Sol e da Terra. À esquerda, $C = 3.0000985$ e à direita, $C = 3.0008$

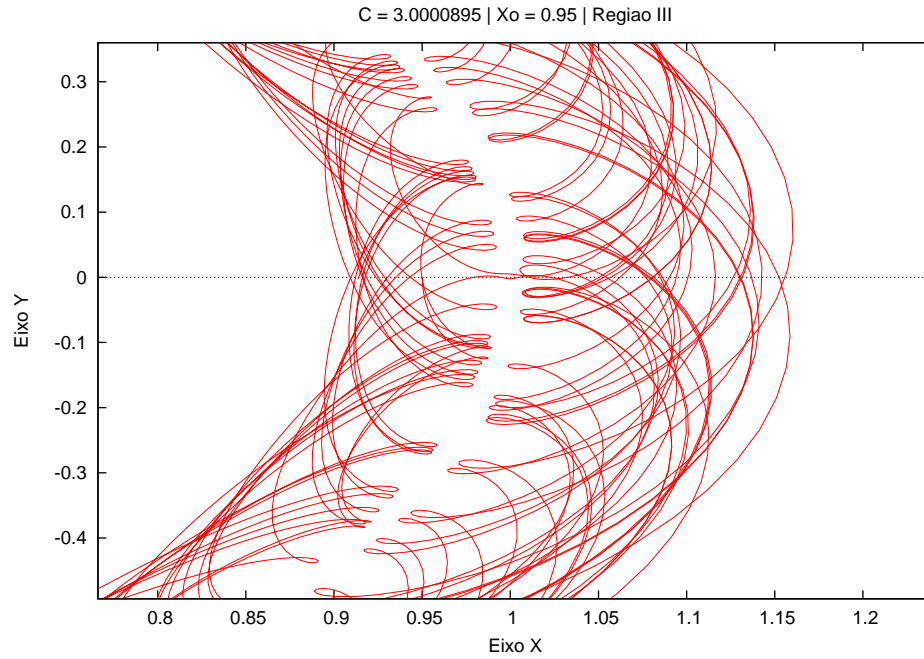


Figura 4.9: Zoom na região em torno da Terra, da figura 4.8 - $C = 3.0000985$.

Região IV: A partícula pode percorrer todo o plano xOy , menos uma região em torno do pontos de equilíbrio triangulares.

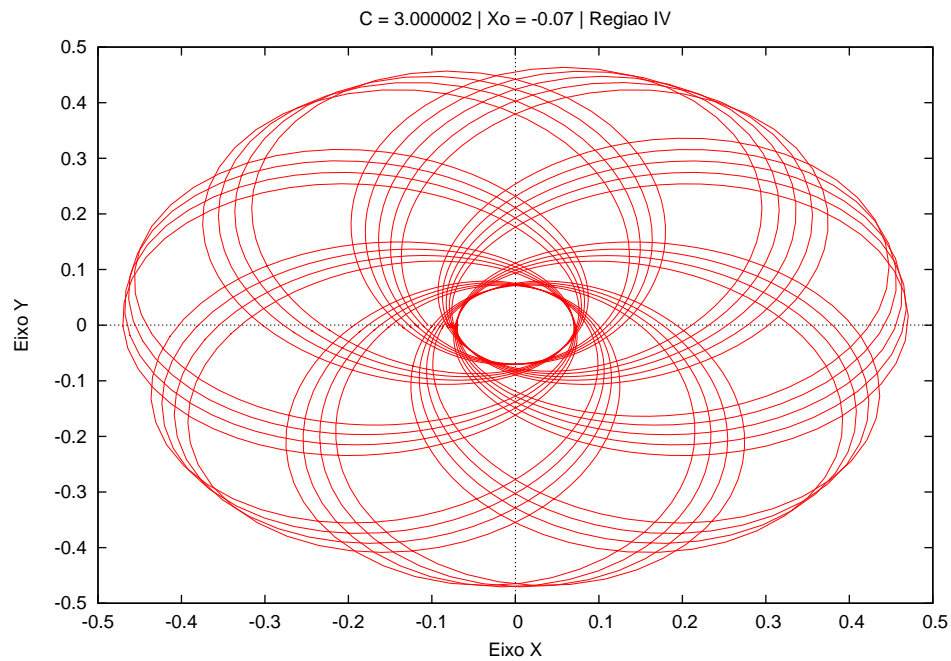


Figura 4.10: Movimento em torno do Sol. $C = 3.000002$.

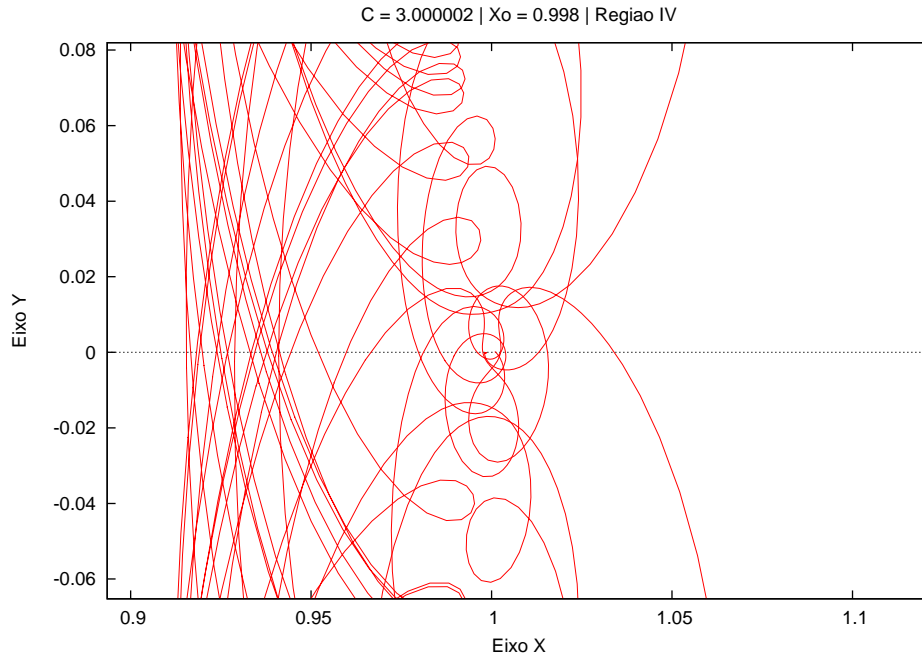


Figura 4.11: Movimento caótico. $C = 3.000002$

Comentários:

Ao analisar o movimento da partícula no PRTC, utilizamos vários valores de H a fim de visualizarmos grosseiramente o movimento da mesma nas diferentes regiões de Hill. Isso é feito para se ter uma ideia do comportamento qualitativo do movimento da partícula.

As figuras 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.7, 4.8, 4.10, mostram 13 trajetórias da partícula para diferentes condições iniciais e valores da hamiltoniana, de modo a varrer todas as regiões de Hill possíveis (secção 2.6). Note que o movimento é quasi-periódico durante o tempo em que efetuamos a integração. Para sabermos se este movimento é preservado quando $t \rightarrow \infty$, isto é, se está sobre um torus bidimensional invariante, caracterizado pelo valor da constante de Jacobi e uma segunda integral de movimento local, necessitamos da técnica da secção de Poincaré que será descrita na próxima secção. Regular ou não nesta região, as trajetórias estarão sempre confinadas ao redor dos corpos primários, a não ser que a condição inicial seja tomada além do contorno mais externo na região de Hill em questão e neste caso a trajetória será de escape.

Quando a trajetória da partícula é caótica - figuras 4.3, 4.6, 4.9 e 4.11 - a partícula pode ser encontrada em qualquer região definida pela superfície $H \in \mathbb{R}$.

No caso da figura 4.3, além da trajetória ser caótica, também é de escape.

A partícula também pode colidir com a Terra ou com o Sol e para melhor lidar com esse problema seria preciso que o sistema dinâmico estivesse regularizado para evitar dificuldades durante a integração numérica. No instante das colisões, as coordenadas da partícula são nulas, ocasionando um valor infinito nas equações de movimento. Como o sistema dinâmico associado ao PRTC não está regularizado, a fim de evitar tal colisão, foi definido um intervalo de segurança da ordem de 10^{-3} ao redor de cada corpo primário. Quando o integrador tenta ultrapassar essa barreira, a integração se encerra.

4.3 Secção de Poincaré

É impossível visualizar todas as trajetórias da partícula, quando fixamos o valor da hamiltoniana (ou constante de Jacobi). Para superar essa problemática e obter uma visualização global do movimento que a partícula pode possuir, Poincaré sugeriu o uso de uma superfície arbitrária e invariante, $S(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$, transversal ao movimento. Toda vez que a trajetória cruzar esta superfície em uma direção fixa arbitrariamente escolhida, é gravado um ponto. Esse procedimento gera uma *secção de Poincaré*. As figura 4.12 e 4.13 ilustram essa técnica.

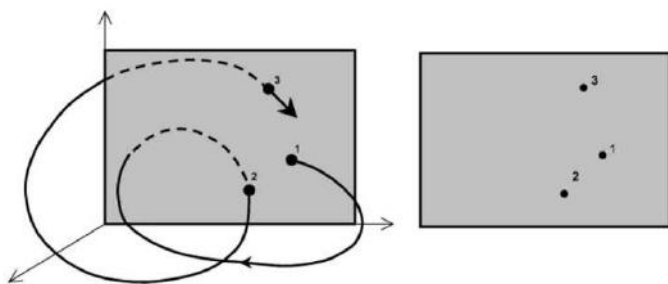


Figura 4.12: À esquerda aparecem o fluxo do sistema dinâmico bem como o plano $y = 0$. Já à direita, aparecem o plano $y = 0$ e a projeção da secção de Poincaré (Celletti & Perozzi, 2007).

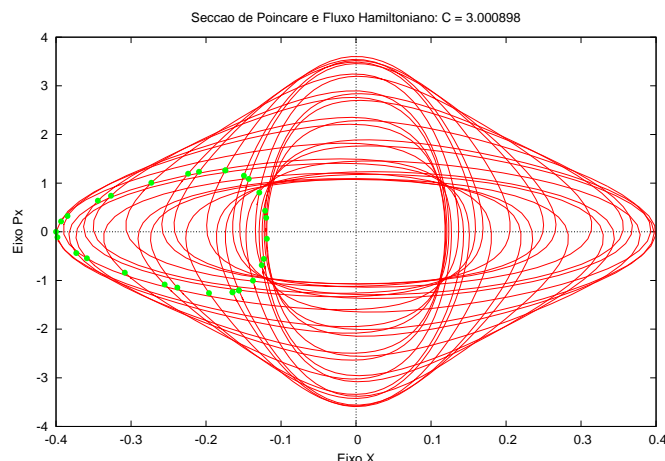


Figura 4.13: A Secção de Poincaré (verde) foi obtida a partir da técnica descrita. O fluxo que corta o plano $y = 0$ (vermelho), foi integrado até cruzar tal plano 30 vezes.

A secção de Poincaré escolhida foi $S(x, y, p_x, p_y) = y = 0$. Para se obter os pontos dessa secção, fixa-se o valor da hamiltoniana H e de três condições iniciais necessárias; já que se tem y_o e que p_{y_o} é obtido a partir do valor fixado da hamiltoniana e dos valores x_o e p_{x_o} fornecidos através da expressão:

$$p_{y_o} = x_o \pm \sqrt{x_o^2 + 2 \left(H + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - p_{x_o}^2} \quad (4.9)$$

Durante toda a integração, coleta-se os valores de (x, p_x) toda vez que $y = 0$ e $\dot{y} > 0$. O conjunto desses pontos, para todos os valores de $(x, 0, p_x, p_y; H)$, não estão sobre a superfície (x, p_x, p_y) , pois, em geral, $p_y \neq 0$. Com efeito, esses pontos são projetados na superfície bidimensional (x, p_x) que facilita a representação da secção de Poincaré.

No caso de sistemas dinâmicos hamiltonianos, tal procedimento gera uma aplicação que preserva a área, como decorrência da conservação da área simplética (Moser & Zehnder, 2005). A preservação dessa área é devido à geometria dos sistemas hamiltonianos. O teorema de Liouville sobre a conservação do volume do espaço de fase é também uma consequência dessa geometria (Berry, 1978).

O espaço de fase de um sistema com dois graus de liberdade, analiticamente integrável, é foliado por *tori* bidimensionais invariantes determinados por duas constantes de movimento (F_1 e F_2) que, de acordo com o teorema de Liouville-Arnold, devem ser funcionalmente independentes e estar em involução, i. e., $[F_1, F_2] = 0$, onde $F_1 = H$ (Perko, 1991) e o colchete de Poisson é definido por:

$$[F_1, F_2] := \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right)$$

A figura 4.14 mostra um *torus*, que é uma projeção do fluxo do sistema dinâmico integrável.

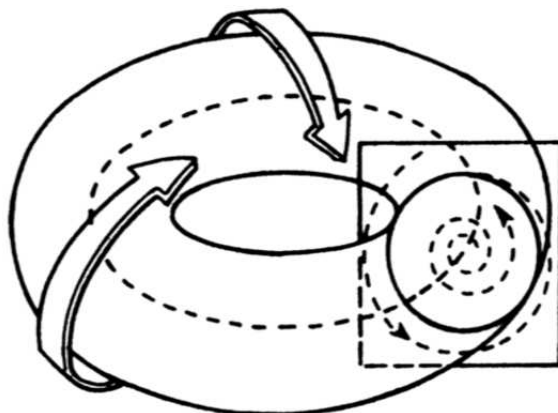


Figura 4.14: Projeção do *tori* invariante de um sistema hamiltoniano integrável de dimensão N (Wiggins, 2003).

Quando esses *tori* - do sistema analiticamente integrável - cruzam a superfície de secção, geram círculos, como é o caso de dois osciladores harmônicos simples desacoplados.

Se o sistema é não-integrável, sua secção é um pouco mais complexa, apresentando além das curvas invariantes, pontos espalhados em regiões bidimensionais. Essas regiões são geradas por trajetórias caóticas.

Utilizando a técnica da secção de Poincaré, construímos algumas secções nas proximidades dos corpos primários. Para isso, ora utilizamos o valor positivo da raiz de p_{yo} , ora utilizamos o negativo (equação 4.9). Note que, a escolha do sinal em tal equação é determinante na construção das secções. Com efeito, para duas condições iniciais diferentes, quando integramos uma utilizando o sinal positivo e a outra o negativo, podemos obter a mesma secção. Dessa forma, tomamos o devido cuidado de alternar o sinal, convenientemente, a fim de obter as secções. No título de cada gráfico consta o sinal utilizado, sendo: ($p_y >$) correspondente ao sinal (+) e ($p_y <$) ao sinal (-). As secções com $p_y > 0$ correspondem ao movimento direto do pequeno corpo e caso contrário movimento retrógrado.

Nas figuras, os eixos x e p_x são representados pela abscissa e pela ordenada, respectivamente. A intersecção da trajetória com a superfície foi determinada com o método de Newton-Raphson implementado tanto em C como em Fortran. Foram utilizados o programa em C feito pelo autor, no caso das secções de Poincaré desta secção. No caso da determinação das órbitas periódicas foram utilizados ambos.

Seguem abaixo as secções de Poincaré, que foram agrupadas de acordo com a região de Hill a que pertence o valor da constante de Jacobi utilizada na integração.

Região I: Trata-se do movimento em torno do Sol ou da Terra, bem como em torno de ambos e trajetórias de escape.

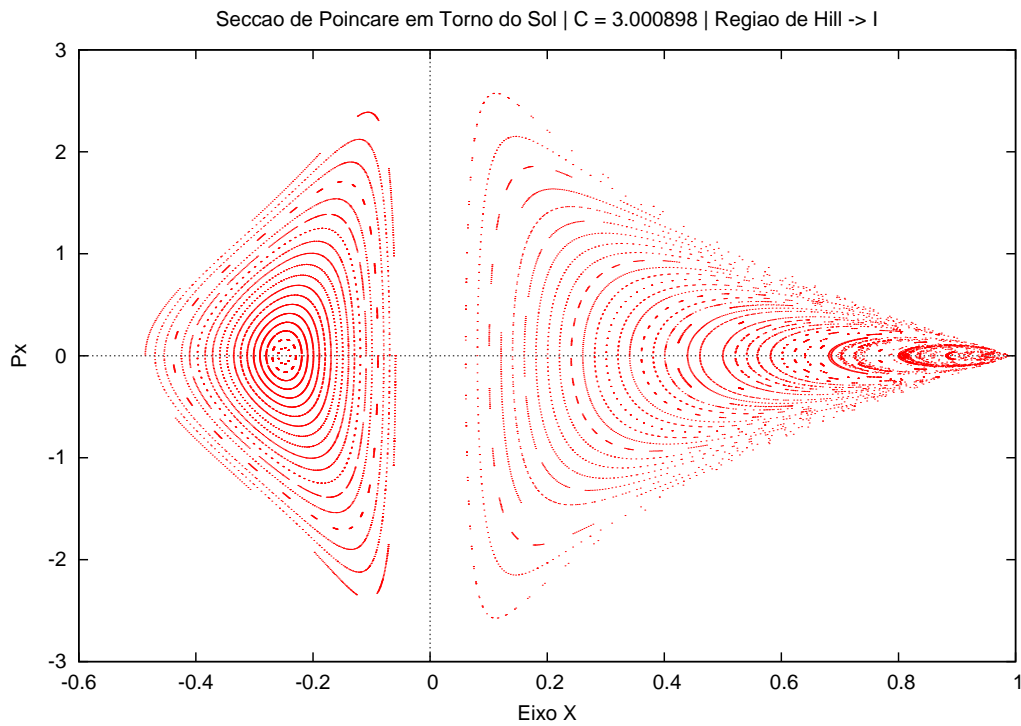


Figura 4.15: Secção de Poincaré para trajetórias em torno do Sol. $C = 3.000898$

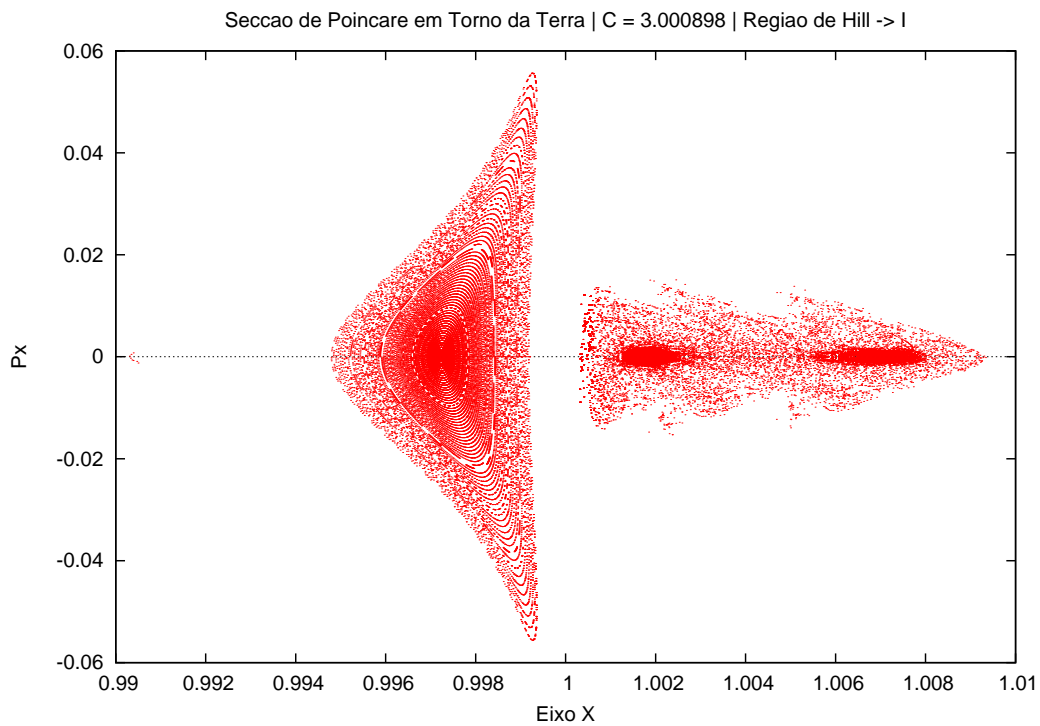


Figura 4.16: Secção de Poincaré para trajetórias em torno da Terra. $C = 3.000898$

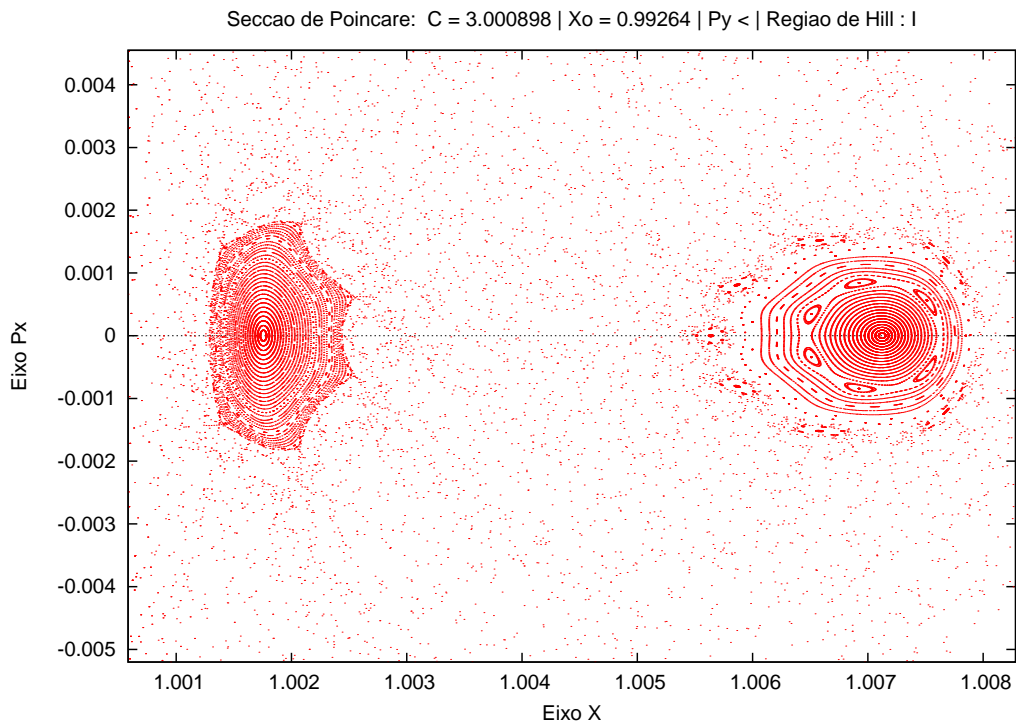


Figura 4.17: *Zoom* da região à direita da Terra na figura 4.16.

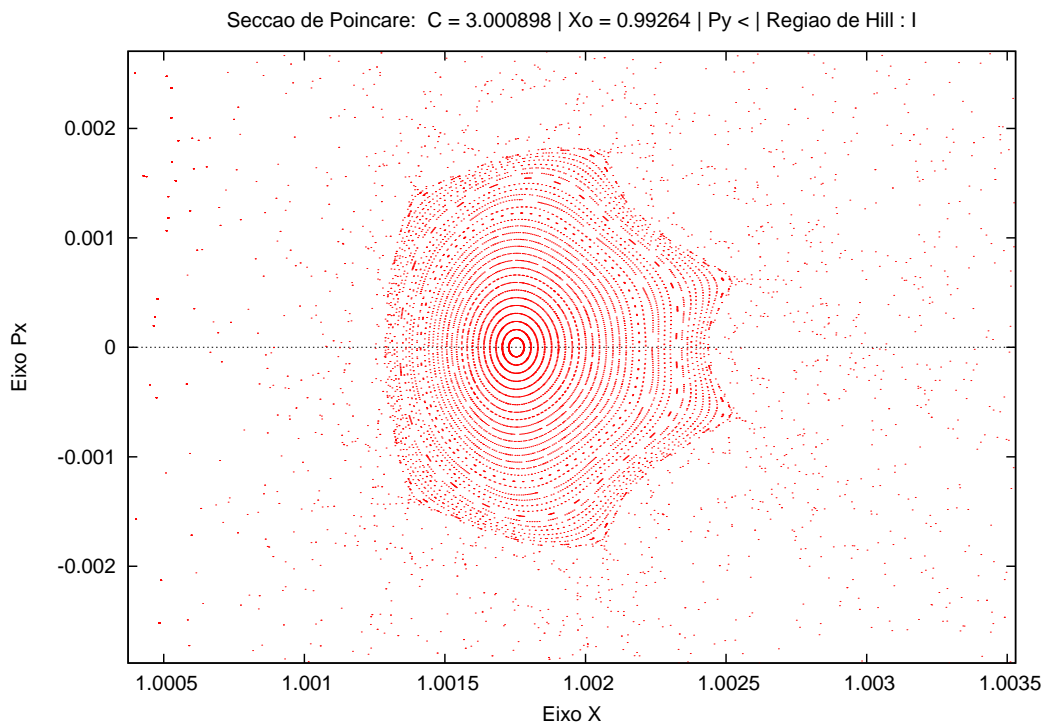


Figura 4.18: *Zoom* da região esquerda da figura 4.17.

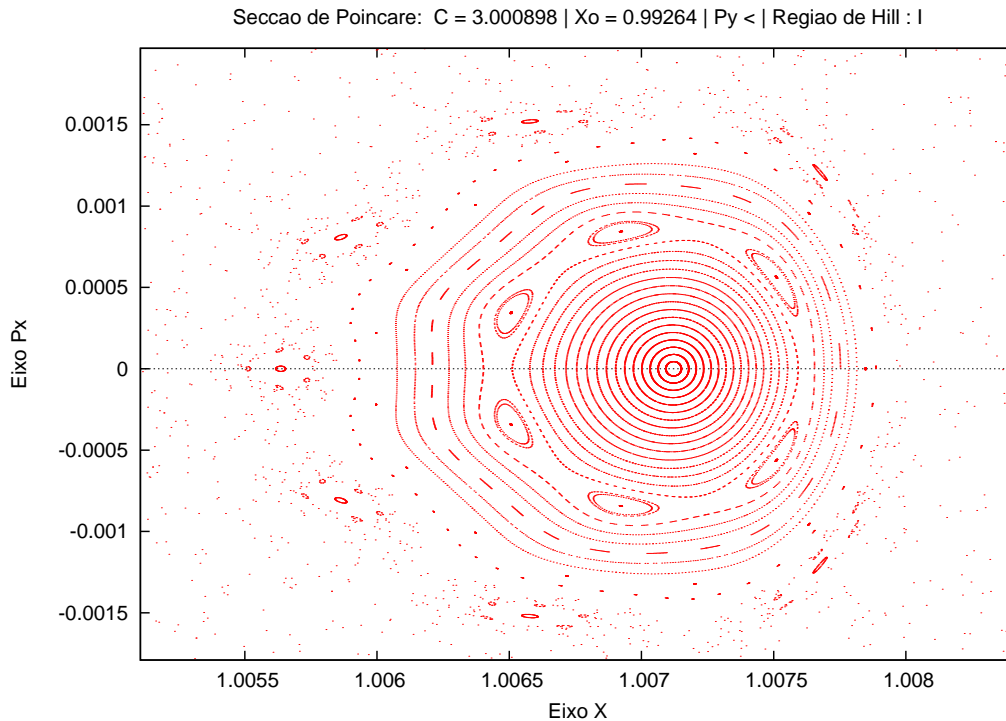


Figura 4.19: Zoom da região direita da figura 4.17.

As figuras 4.15 e 4.16, que correspondem a secções de Poincaré do PRTC para o caso Sol-Terra, exibem características qualitativas da região de Hill I. O Sol está localizado próximo da origem e a Terra próxima de 1.0. Note que o sistema apresenta regiões regulares e regiões caóticas. As regiões mais regulares aparecem à esquerda dos corpos primários, sendo estas órbitas retrogradadas, enquanto que à direita dos mesmos, observamos uma região regular concomitante com regiões caóticas. As regiões caóticas são os pontos espalhados aleatoriamente na secção e podem ser vistas, principalmente à direita dos corpos primários. As órbitas 4.1 e 4.2 da seção anterior correspondem à uma curva regular dessas seções e a figura 4.3 corresponde à parte caótica que pode escapar.

Da figura 4.16 até a figura 4.19, temos uma ampliação das bifurcações que sofrem as órbitas periódicas e os *tori* que as acompanham, vistos como pontos e "curvas fechadas" desenhadas pelas sucessivas iterações do mapa de Poincaré. Ressaltamos aqui a semelhança com as órbitas apresentadas em Simó e Stuchi (Stuchi & Simó, 2000) para o problema de Hill (figura 4.20), problema este que é uma aproximação do PRTC especializada para a vizinhança da Terra. Qualitativamente temos os mesmos fenômenos dinâmicos.

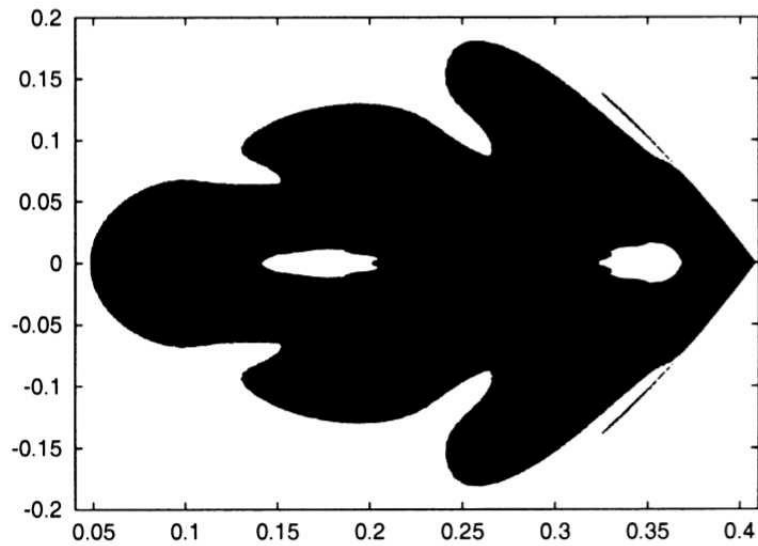


Figura 4.20: Gráfico gerado a partir de uma condição inicial na região das órbitas estáveis resultantes da bifurcação *pitchfork*, para 10^6 iterações. A área em preto corresponde à região caótica e as regiões internas, em branco, são protegidas por um *torus* invariante que não permite a entrada deste caos.

Região II: Trata-se do movimento em torno do Sol ou da Terra, bem como em torno de ambos e trajetórias de escape. O corpo pode transitar entre os corpos primários.

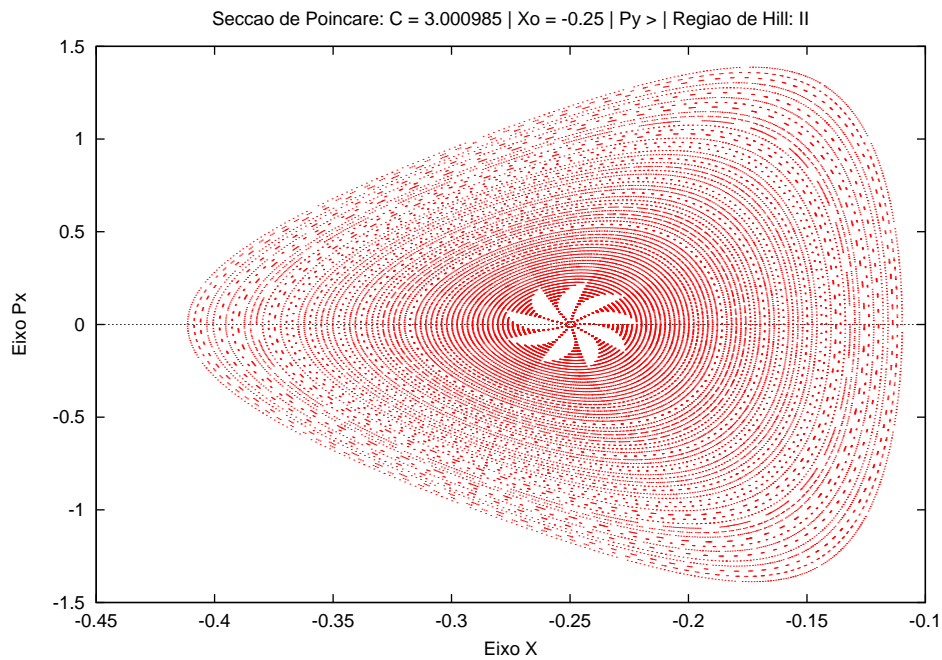


Figura 4.21: Secção de Poincaré para trajetórias à esquerda do Sol. $C = 3.000895$

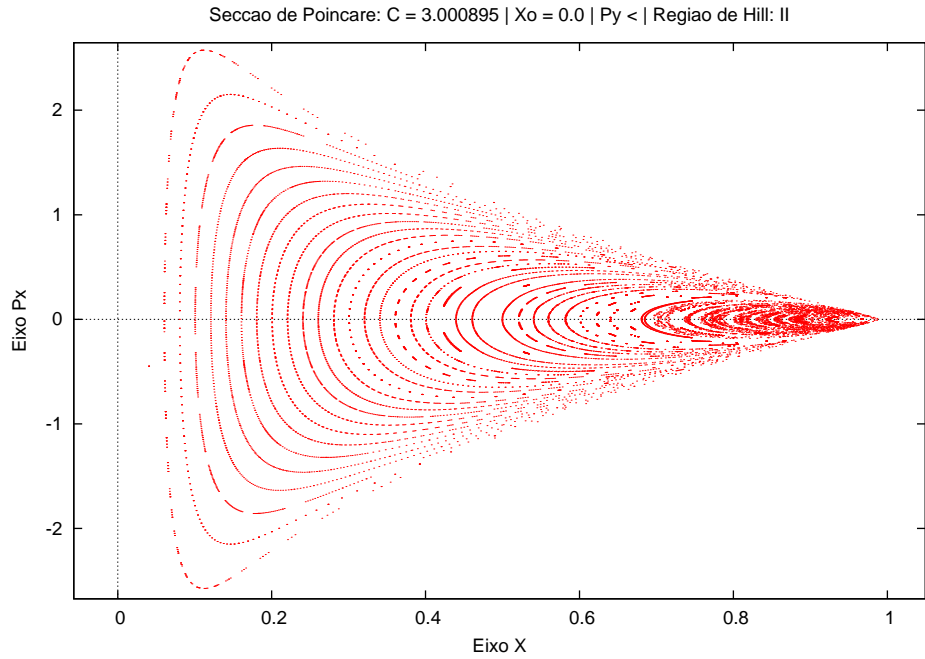


Figura 4.22: Secção de Poincaré para trajetórias à direita do Sol. $C = 3.000895$

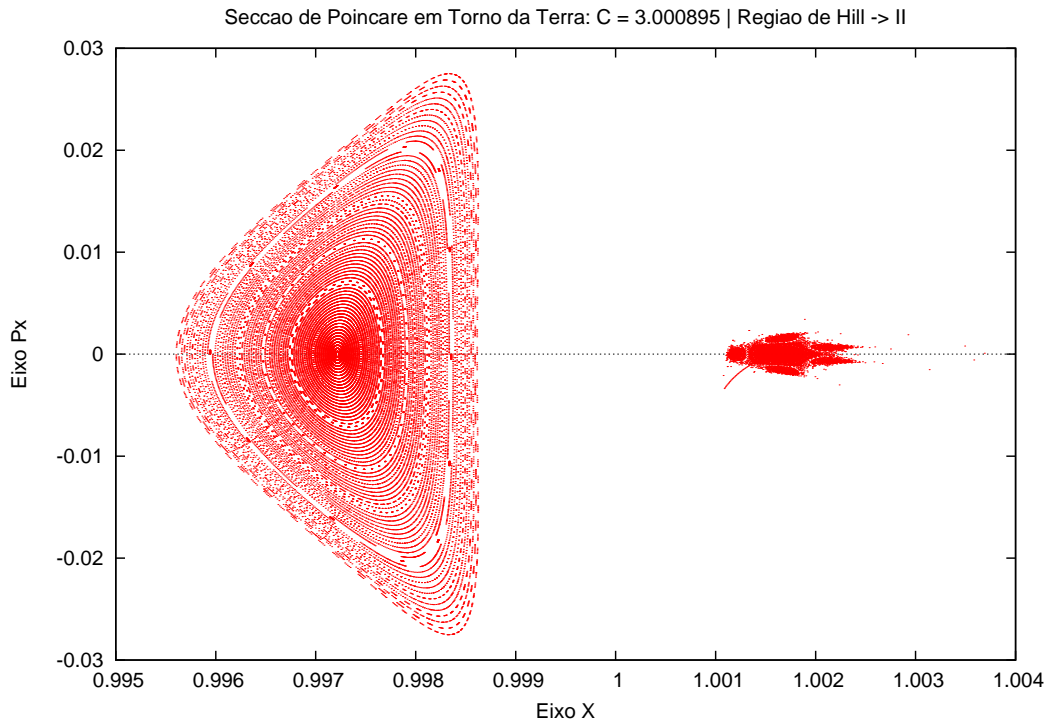


Figura 4.23: Secção de Poincaré para trajetórias em torno da Terra. $C = 3.000895$

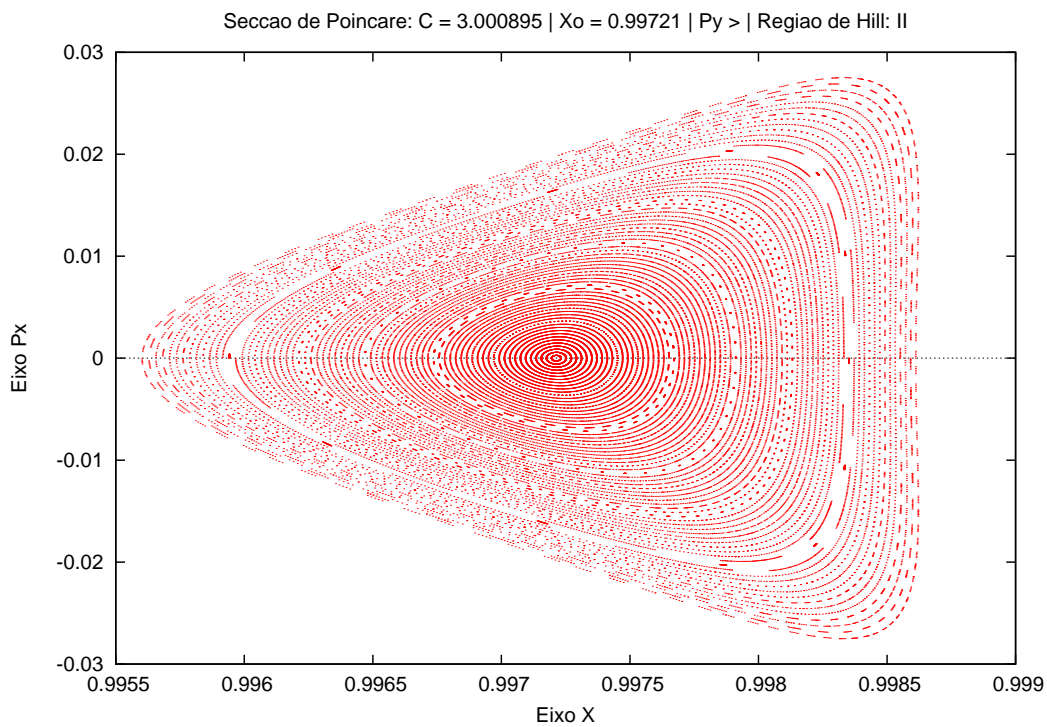


Figura 4.24: *Zoom* da região à esquerda da Terra na figura 4.23.

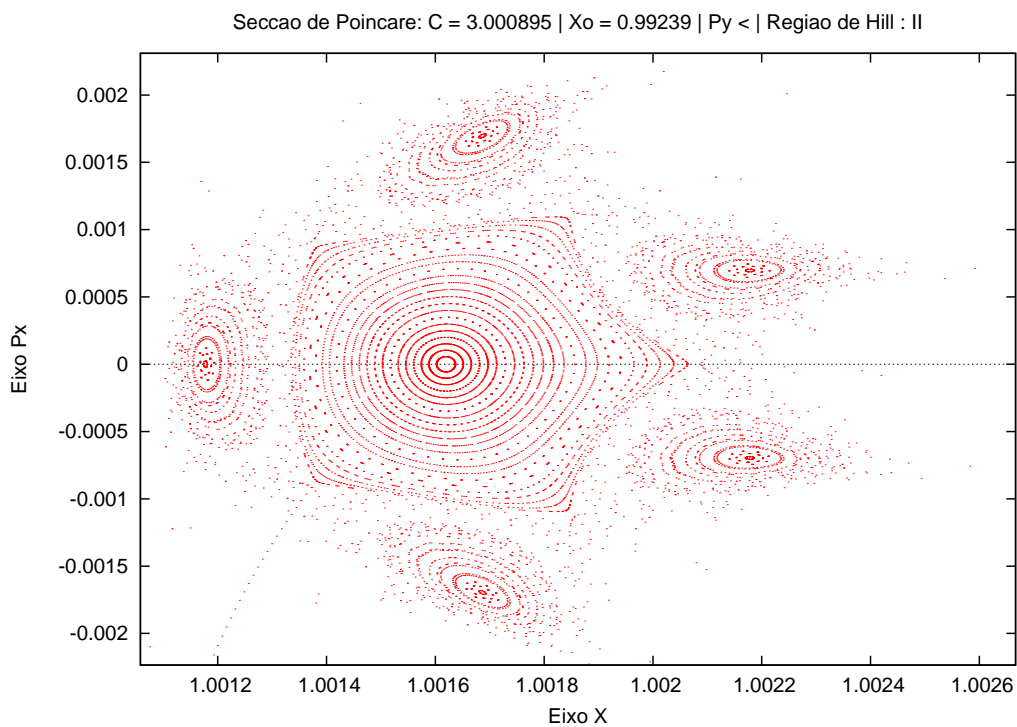


Figura 4.25: *Zoom* da região à direita da Terra na figura 4.23.

Região III: Trata-se do movimento em torno do Sol ou da Terra, bem como em torno de ambos e trajetórias de escape. O movimento da partícula não é confinado, necessariamente.

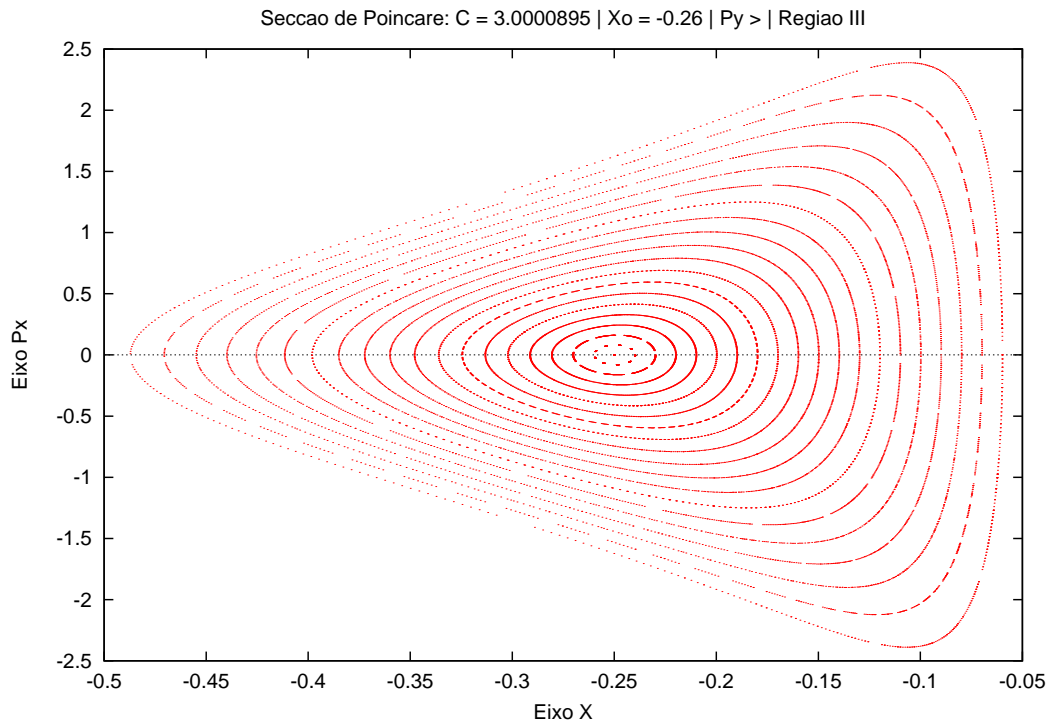


Figura 4.26: Região à esquerda do Sol. $C = 3.0000895$

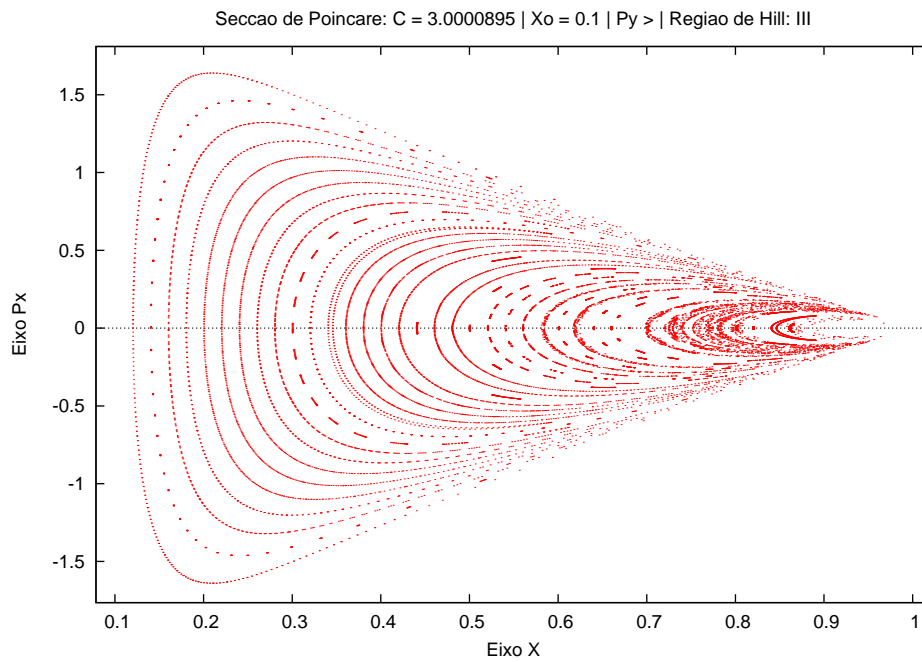


Figura 4.27: Região à direita do Sol. $C = 3.0000895$

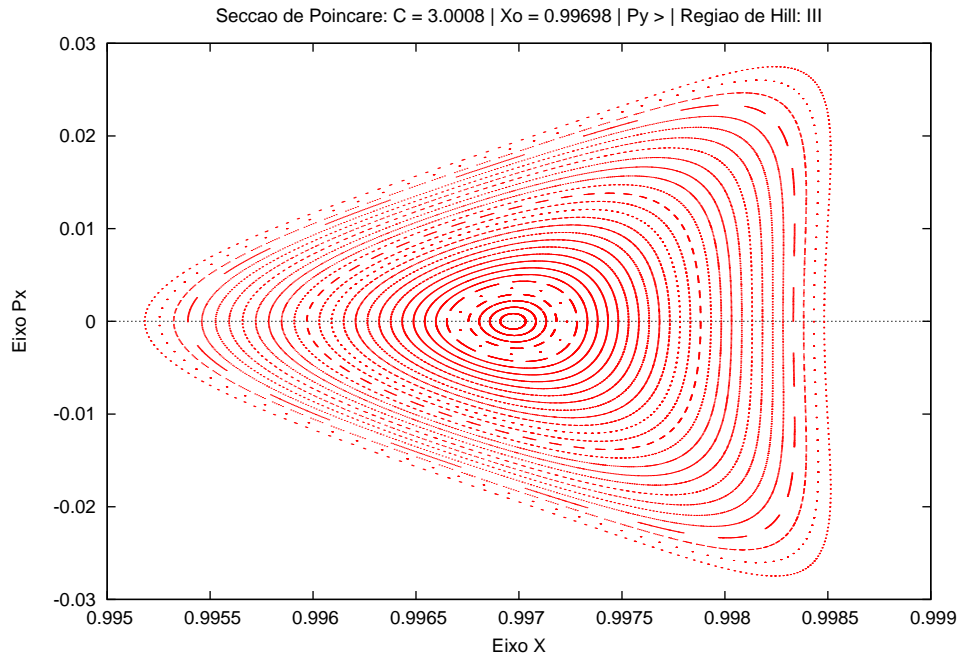


Figura 4.28: Movimento em torno da Terra. $C = 3.0008$

Região IV: A partícula pode percorrer todo o plano Oxy , menos uma região em torno dos pontos de equilíbrio triangulares.

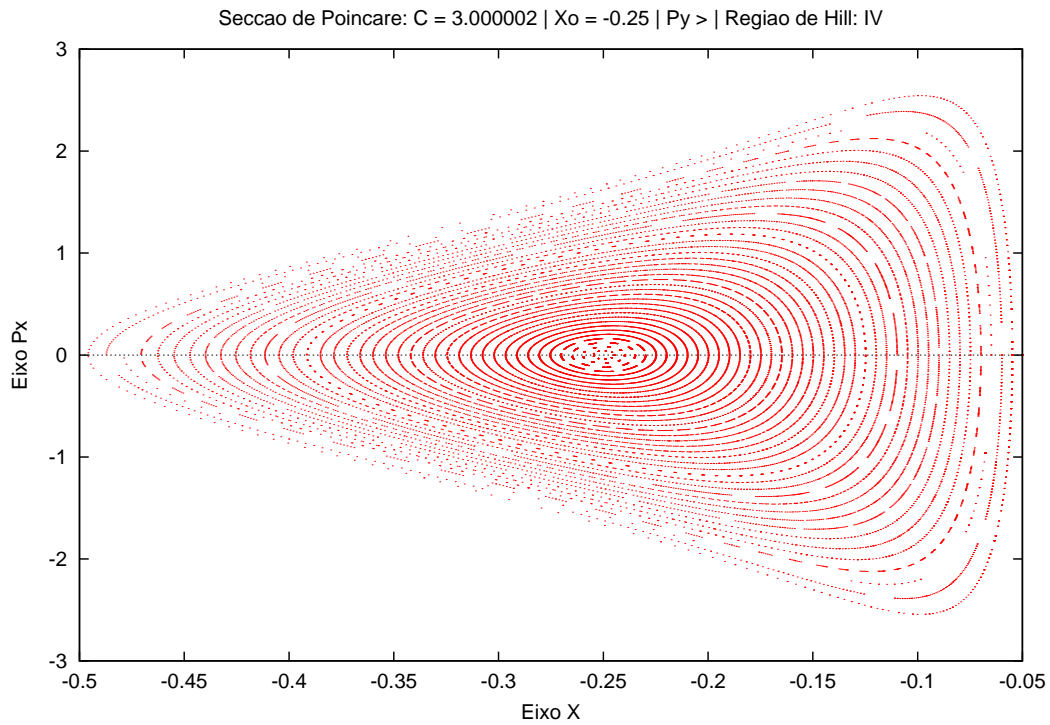


Figura 4.29: Região à esquerda do Sol. $C = 3.000002$

Capítulo 5

Órbitas Periódicas

5.1 Continuação Numérica

Entre as soluções do PRTC, particular atenção deve ser dada à existência de *trajetórias fechadas* - configurações orbitais que se repetem em intervalos de tempo regulares. Órbitas desse tipo têm sido encontradas e recebem o nome genérico de órbitas periódicas. Neste capítulo obteremos parte da variedade central do sistema que corresponde ao conjunto das órbitas periódicas. Essas foram obtidas a partir do método da continuação numérica, que também é descrito neste capítulo.

As órbitas periódicas aparecem como pontos fixos da secção de Poincaré ou de potências do mesmo. Um ponto fixo corresponde a uma órbita que se fecha após dar s voltas, furando a secção s vezes. Em torno dos pontos fixos estáveis, aparecem curvas invariantes ou "ilhas" e seu número está ligado ao número de voltas s . Por exemplo, na figura 5.1 aparecem 6 ilhas. Logo, a órbita se fecha após 6 voltas em torno da Terra.

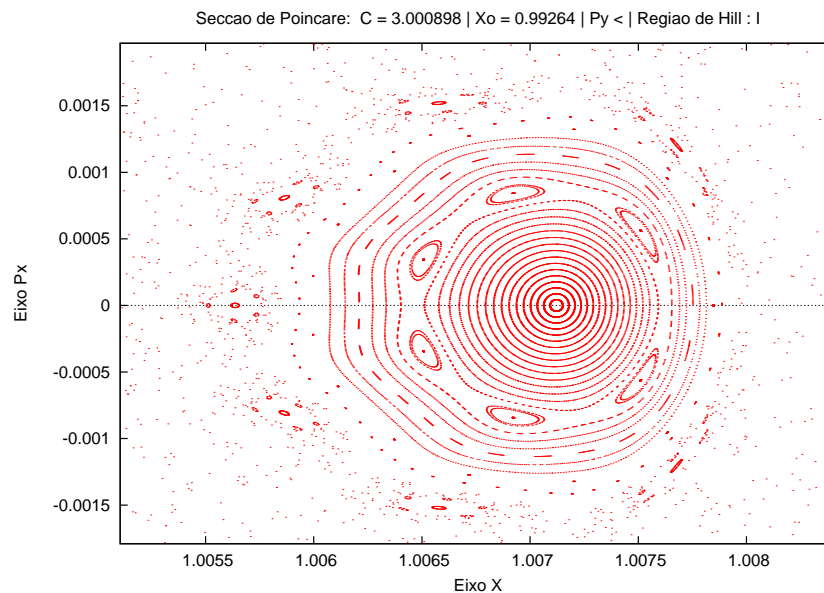


Figura 5.1: A órbita periódica é o ponto fixo da secção de Poincaré no plano xOp_x que está sobre o eixo x , i. e., $p_x = 0$. Nesse caso, a órbita cruza o plano $y = 0$ seis vezes, pois há seis ilhas de estabilidade em torno de tal ponto fixo.

Iniciemos nossa discussão com a busca de uma órbita periódica do problema, que possa ser refinada e continuada. Essas soluções são diversas e, nessa monografia, estamos interessados nas órbitas periódicas obtidas ao redor dos pontos de equilíbrio e aquelas obtidas ao redor da Terra. Logo, buscamos por duas famílias de órbitas periódicas, a saber: as órbitas de Lyapunov (ao redor dos pontos de equilíbrio) e as órbitas diretas (ao redor da Terra). A primeira família é obtida a partir de órbitas periódicas do sistema linearizado ou também pode ser continuada a partir de um ponto fixo na seção de Poincaré. Um estudo completo de todas as órbitas periódicas de um dado problema é um trabalho metuculoso e refinado, veja por exemplo Simó e Stuchi (Stuchi & Simó, 2000). Estas órbitas podem ser consideradas o esqueleto do espaço de fase.

Sabemos que em sistemas dinâmicos que possuem uma integral primeira, as famílias de órbitas periódicas são parametrizadas pelos valores dessa integral (Baião, 2010). No nosso caso, tal integral primeira é a constante de Jacobi (C).

Poincaré mostrou que é possível obter uma família de soluções periódicas em um sistema dinâmico autônomo dependente de um parâmetro λ , partindo-se de uma solução periódica para $\lambda = 0$. Tal procedimento é conhecido como *Método da Continuação Analítica* e consiste em uma aplicação do teorema da função implícita, conforme descrito em Boccaletti (Boccaletti & Pucacco, 1996) e Szebehely (Szebehely, 1967).

É bem conhecido que na vizinhança dos pontos colineares do PRTC existem famílias de órbitas periódicas no plano orbital dos primários, bem como órbitas diretas em torno dos mesmos. Nosso objetivo consiste em determinar essas órbitas.

Lembrando que uma solução periódica de período T tem a seguinte propriedade:

$$x = x(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

onde x é o vetor que representa um ponto no espaço de fase quadridimensional, então a equação $x(t + T) - x = 0$ é a equação de periodicidade que necessitamos resolver.

Para computar órbitas periódicas de período T de um sistema autônomo $\dot{x} = F(x)$, buscamos condições iniciais x_o tais que $G(x_o) := \varphi(T, x_o) - x_o = 0$. No entanto, todos os pontos $\varphi(t, x_o)$, $t \in \mathbb{R}$ são soluções desta equação se x_o o é. Ou, equivalentemente, $DG(x_o) = D\varphi(T, x_o) - I$ é singular, porque $F(x_o)$ - vetor tangente à órbita - é um autovetor da matriz de monodromia $D\varphi(T, x_o)$ com autovalor 1. Isto impede a inversão da matriz, a fim de calcular o valor x_o (Simó, 1990).

Uma das soluções para evitar este problema é usar o método da secção de Poincaré. Desta forma, considerando uma secção conveniente S , transversal ao fluxo, procuramos um ponto $x_o \in S$ de tal forma que $G(x_o) = P(x_o) = 0$, onde P é o mapa de Poincaré associado a S . Nesse caso, o período T não é pré-fixado. O zero de G é o procurado com o método de Newton-Raphson usando a diferencial da aplicação de Poincaré e, em seguida, usa-se o método da continuação. Com isso, é eliminada a degenerescência da matriz de monodromia.

Vamos considerar uma secção de Poincaré definida por $y = 0$ e C fixa. Esta secção será uma superfície com 3 (três) dimensões no espaço de fase quadridimensional e um ponto dessa superfície é representado por $P(x, 0, p_x, p_y; C)$, uma vez que a constante de Jacobi é fixada.

Consideremos uma determinada órbita que se inicie no ponto $P_i(x, 0, p_x, p_y)_i$ e que após um tempo $T/2$ (Broucke & Boogs, 1975) esteja sobre o ponto $P_f(x, 0, p_x, p_y)_f$, ambos na secção de Poincaré definida por $y = 0$.

A forma das equações de movimento do PRTC permite que uma afirmação seja feita devido à simetria do sistema. Tal afirmação corresponde ao Teorema do Espelho. A demonstração desse resultado está fora das intenções desse texto e podem ser encontradas no artigo de Roy (Roy & Ovenden, 1955).

Teorema 5.1 (Teorema do Espelho). *Se n partículas pontuais estão sob ação das forças gravitacionais mútuas apenas, e se, num dado instante, cada vetor posição (com origem no centro de massa do sistema, considerado um referencial inercial) é perpendicular a todos os vetores velocidade, então a órbita de cada partícula depois desse instante é uma imagem espelhada da sua órbita anterior a esse instante.*

Tal configuração dos vetores posição e dos vetores velocidade é chamada de configuração de espelho. No caso particular do PRTC, temos duas configurações de espelho possíveis. A primeira ocorre quando a partícula está alinhada com os corpos primários, supondo também que todos possuem velocidade perpendicular à linha em comum. A segunda ocorre quando a partícula e os corpos primários pertencem a um mesmo plano e todas as velocidades são perpendiculares a esse plano. As órbitas de Lyapunov e as órbitas diretas planas são órbitas que satisfazem ao Teorema do Espelho no caso que em a partícula e os corpos primários estão alinhados. As figuras 5.2 e 5.3 ilustra as duas configurações de espelho possíveis.

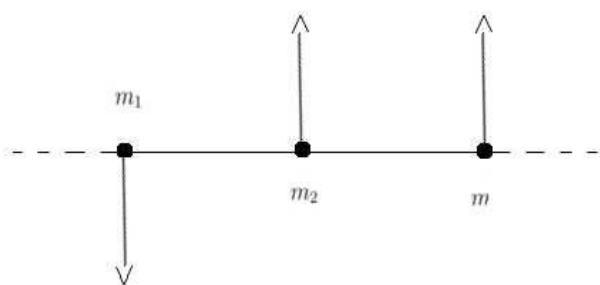


Figura 5.2: Configuração que gera órbitas de Lyapunov e órbitas diretas.

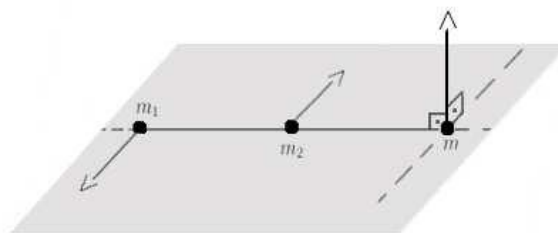


Figura 5.3: Configuração que gera órbitas halo.

De acordo com o teorema 5.1, temos que as coordenadas dos pontos P_i e P_f devem ser tais que $p_{xi} = p_{xf} = 0$. Portanto, basta partir de um ponto $P_i = (x_i, 0, 0, p_y > 0)$ e procurar por um ponto cujas coordenadas são $P_f(x_f, 0, 0, p_y < 0)$. Essas condições nos permitem passar para um plano euclidiano tornando mais simples a obtenção do ponto P_f a partir de P_i .

Assim, podemos escrever

$$p_{xf} = \psi(x_i, p_{yi}) = 0 \quad (5.2)$$

Note que a equação 5.2 é não-linear e possui duas incógnitas. Sua solução descreve uma curva característica no plano euclidiano xOp_y . Assim, cada ponto dessa curva representa uma órbita periódica simples com período T . As coordenadas desse ponto, acrescidas de $p_{xi} = y = 0$, permite-nos estabelecer o ponto inicial $P_i(x_i, 0, 0, p_{yi})$ do espaço de fase para o qual existe uma solução periódica.

Consideremos a curva característica Φ , que é solução da equação 5.2, no plano definido por x e p_y . Como sabemos, todos os pontos dessa curva nos fornecem coordenadas que juntamente com a secção de Poincaré ($y = 0$) e $p_x = 0$ originam órbitas periódicas para o PRTC.

Sejam $P_i(x, p_y)$ e $P_{i+1}(x + dx, p_y + dp_y)$ dois pontos próximos pertencentes a Φ e separados por um arco de comprimento ds , tal que satisfaça à métrica euclidiana

$$ds^2 = dx^2 + dp_y^2 \quad (5.3)$$

Como $P_i \in \Phi$ e $P_{i+1} \in \Phi$, as coordenadas dx e dp_y satisfazem ao sistema variacional associado à equação 5.2. Assim, temos que

$$\psi(x, p_y) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial p_y} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} dx \\ dp_y \end{array} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx &= - \frac{\partial \psi}{\partial p_y} dp_y \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dessa forma, temos que

$$\Rightarrow dx = - \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_y}\right)}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)} dp_y \quad (5.5)$$

Com as equações 5.3 e 5.5, podemos obter cada uma das variações das coordenadas como função do comprimento de arco ds , como se segue:

$$dx = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial p_y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_y}\right)^2}} \quad (5.6)$$

$$dp_y = + \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_y}\right)^2}} \quad (5.7)$$

As equações 5.6 e 5.7 permitem a integração da curva Φ ao longo de um parâmetro de arco ds e assim podemos percorrer todos os seus pontos, ainda que sejam pontos de retorno, pois não há direção privilegiada. A solução dessas equações nos dá as coordenadas do vetor que permite levar do ponto P_i ao ponto P_f . Dessa forma, obtemos uma órbita periódica sempre a partir de outra que lhe é vizinha e cuja precisão requerida será alcançada pelo refinamento numérico explicado adiante.

Considerando a função ψ , o vetor $u = (x, p_y)$, a equação $\psi(u) = 0$ e que u está na vizinhança de u_i , podemos escrever, como uma primeira aproximação que

$$\psi(u) = \psi(u_i) + G(u_i) \underbrace{(u - u_i)}_{=: \Delta u} = 0 \quad (5.8)$$

onde $G(u_i) = G = D_u \psi \Big|_{u_i}$ é a jacobiana da equação 5.2, i.e.,

$$G = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial p_y} \end{array} \right) \Big|_{u_i} \quad (5.9)$$

A solução da equação 5.2 é dada pelo zero da função ψ . Para isso, utilizaremos o método de Newton-Raphson modificado, minimizando a norma¹ ds a partir de G .

A equação 5.8 pode ser utilizada em um processo iterativo com (Deuffhard, 2011)

$$G(u^{k-1}) \Delta u^{k-1} = -\psi(u^{k-1}) \quad (5.10)$$

de tal modo que o cálculo de Δu^{k-1} nos forneça $u^k = u^{k-1} + \Delta u^{k-1}$ com um erro cada vez menor. O vetor u^k representa a k -ésima iteração para o refinamento da solução da equação 5.2, fornecendo com a precisão escolhida as condições iniciais adequadas para a obtenção da órbita periódica.

¹A norma ds é dada por $\Delta u^T \cdot \Delta u = dx^2 + dp_y^2$.

Para calcularmos Δu^{k-1} , a partir de 5.10, devemos observar que $G(u^{k-1})$ não é uma matriz quadrada. Logo, devemos utilizar uma generalização de matriz inversa que se aplique a esse caso. Utilizaremos a pseudo-inversa de Moore-Penrose (Penrose, 1955), a fim de isolarmos Δu^{k-1} na equação 5.10.

Moore e Penrose mostraram que há uma solução geral para o sistema

$$\vec{b} = A \vec{y}, \quad \text{onde } \vec{b} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

da forma $\vec{y} = A^\dagger \vec{b}$. A matriz A^\dagger é a pseudo-inversa de Moore-Penrose. Trata-se de uma generalização da matriz inversa, onde (Wulff & Schebesch, 2000)

- se $n = m$, então $A^\dagger = A^{-1}$
- se $n > m$, então $A^\dagger = A^T (AA^T)^{-1}$
- se $m > n$, então $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$

No nosso caso, temos que $n > m$. Logo,

$$G^\dagger = G^T (G G^T)^{-1} \quad (5.11)$$

Portanto, multiplicando a equação 5.10 dos dois lados, pela inversa dada pela equação 5.11, obtemos

$$\Delta u^{k-1} = -G^T(u^{k-1}) (G(u^{k-1})G^T(u^{k-1}))^{-1} \psi(u^{k-1}) \quad (5.12)$$

A equação 5.12 nos dá as componentes variacionais $\Delta u = (\Delta x, \Delta p_y)$ do vetor u e permite-nos, através de uma precisão pré-determinada, refinar a órbita periódica a cada passo, fornecendo a solução da equação 5.2. O processo está ilustrado na figura 5.4.

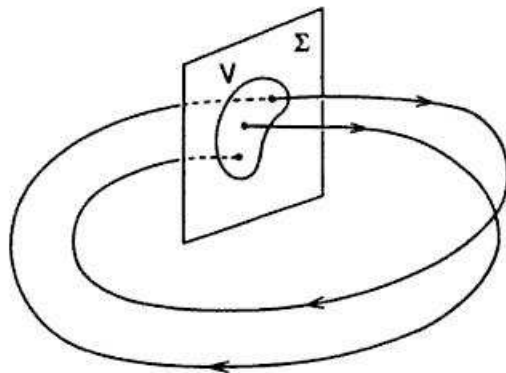


Figura 5.4: Escolhe-se um valor inicial e refina-o, até encontrar as condições da órbita periódica (Wiggins, 2003).

Para utilizarmos a equação 5.12, precisamos obter a matriz G . Essa matriz deve ser calculada com base nas variações do campo definido pelo sistema dinâmico, levando em consideração as variações das 4 variáveis do sistema. Para isso, devemos escrever as equações variacionais da seguinte forma (Baião, 2010)

$$\dot{\delta x} = D_x F \cdot \delta x \quad (5.13)$$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{p}_x \\ \delta \dot{p}_y \end{pmatrix} = D_x F \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta p_x \\ \delta p_y \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

onde F corresponde ao campo vetorial, definido a partir do sistema dinâmico (equações 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8).

$$F_1 = \dot{x} \quad (5.15)$$

$$F_2 = \dot{y} \quad (5.16)$$

$$F_3 = \dot{p}_x \quad (5.17)$$

$$F_4 = \dot{p}_y \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

Ou, equivalentemente,

$$F_1 = p_x + y \quad (5.20)$$

$$F_2 = p_y - x \quad (5.21)$$

$$F_3 = p_y - \mu_1 \frac{\mu_1(x + \mu_2)}{r_1^3} - \mu_2 \frac{\mu_1(x - \mu_1)}{r_2^3} \quad (5.22)$$

$$F_4 = -p_x - \mu_1 \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \quad (5.23)$$

O sistema 5.14 pode então ser resolvido para quatro condições iniciais diferentes, onde cada uma delas representa a variação inicial de uma única variável, definidas como na tabela 5.1

Tabela 5.1: Condições iniciais do sistema variacional.

variação	vetor inicial
δx	(1, 0, 0, 0)
δy	(0, 1, 0, 0)
δp_x	(0, 0, 1, 0)
δp_y	(0, 0, 0, 1)

Para cada uma das soluções obtidas teremos um vetor com quatro coordenadas². Dessa forma, podemos definir uma matriz Δ cujas colunas são dadas por esses vetores. Essa matriz representa todas as variações de todas as coordenadas. Ela é definida da seguinte forma:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial p_x} & \frac{\partial x}{\partial p_y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial p_x} & \frac{\partial y}{\partial p_y} \\ \frac{\partial p_x}{\partial x} & \frac{\partial p_x}{\partial y} & \frac{\partial p_x}{\partial p_x} & \frac{\partial p_x}{\partial p_y} \\ \frac{\partial p_y}{\partial x} & \frac{\partial p_y}{\partial y} & \frac{\partial p_y}{\partial p_x} & \frac{\partial p_y}{\partial p_y} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Como o sistema que estamos tratando é hamiltoniano, conforme já foi dito, o fluxo preserva a área simplética e isto implica que o determinante da matriz variacional é 1 (Perko, 1991). Este resultado foi utilizado como medida da exatidão das variacionais. Logo,

²Note que para cada condição inicial dada na tabela 5.1, temos a variação das quatro variáveis do sistema dinâmico, i. e., na primeira linha, temos a variação de x, y, p_x, p_y , com relação a x . Já na segunda, com relação a y . E na terceira e na quarta, com relação a p_x e p_y , respectivamente.

$$\det(\Delta) = 1 \quad (5.25)$$

A variação completa para o vetor x , ou seja δx , quando consideramos as variações em todas as coordenadas deve ainda considerar a diferença de tempo Δt para se chegar à secção em diferentes iterações quando o sistema é integrado. Isso ocorre porque quando o sistema 5.14 é integrado, com qualquer condição inicial, ele nos fornece uma variação da órbita fiducial (Baião, 2010), que é obtida pela integração das equações 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8, que é o sistema dinâmico. Os tempos gastos para que a órbita fiducial e sua variação atinjam a secção ($y = 0$) são diferentes. Sendo assim, temos que acrescentar à variação δx o valor $\Delta t \cdot F_i$, que representa a correção devido à diferença de tempo. Logo, temos que

$$\delta x \iff \Delta \cdot \delta x + \Delta t \cdot F_i$$

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta p_x \\ \delta p_y \end{pmatrix} \iff \Delta \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta p_x \\ \delta p_y \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} \delta F_{1i} \\ \delta F_{2i} \\ \delta F_{3i} \\ \delta F_{4i} \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

onde F_i representa o campo vetorial no ponto inicial P_i .

De acordo com o teorema do espelho e da secção de Poincaré, temos que $\delta y = \delta p_x = 0$ e, com isso, podemos calcular Δt a partir da segunda linha da equação 5.26, da seguinte forma:

$$\Delta t = -\frac{1}{F_{2i}} (\Delta_{21} \delta x + \Delta_{24} \delta p_y)$$

O valor de Δt é substituído na equação 5.26 e assim obtemos as correções temporais para as variações da coordenada p_x da seguinte forma:

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} \iff \frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{F_{3i}}{F_{2i}} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial p_y} \iff \frac{\partial p_x}{\partial p_y} - \frac{F_{3i}}{F_{2i}} \frac{\partial y}{\partial p_y} \quad (5.28)$$

$$(5.29)$$

Com isso, é possível determinar a matriz $G(u^{k-1})$ a partir da equação 5.9.

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{F_{3i}}{F_{2i}} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial p_x}{\partial p_y} - \frac{F_{3i}}{F_{2i}} \frac{\partial y}{\partial p_y} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Os elementos da matriz G são determinados a partir da matriz Δ , do campo vetorial F e da devida correção temporal. Essa matriz é então levada à equação 5.12 para se prosseguir com o refinamento da órbita periódica até conseguirmos a precisão requerida.

5.2 Resultados

Abaixo constam figuras acerca das órbitas periódicas de Lyapunov e diretas planas. Fizemos uma inversão da posição dos corpos primários, onde $x_{TERRA} = -\mu_1$ e $x_{SOL} = +\mu_2$.

A figura 5.5 é uma órbita semente, utilizada como órbita geratriz da família das órbitas diretas planas.

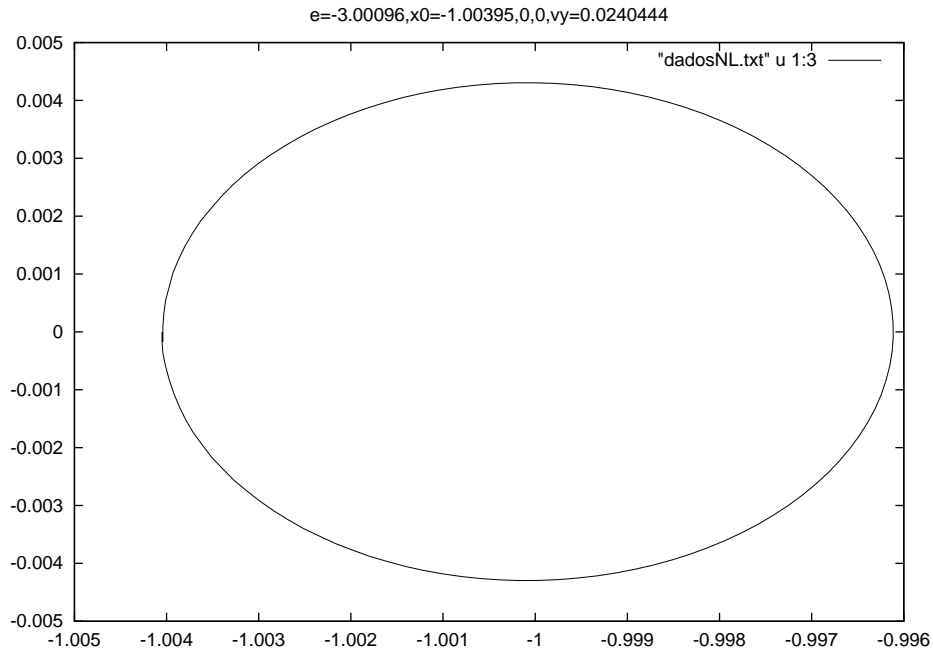


Figura 5.5: Órbita periódica obtida a partir da secção de Poincaré.

A figura 5.6 corresponde à família de órbitas periódicas diretas planas, obtidas a partir do método descrito anteriormente. Já a figura 5.7 corresponde à curva característica³ associada a essa família de órbitas periódicas.

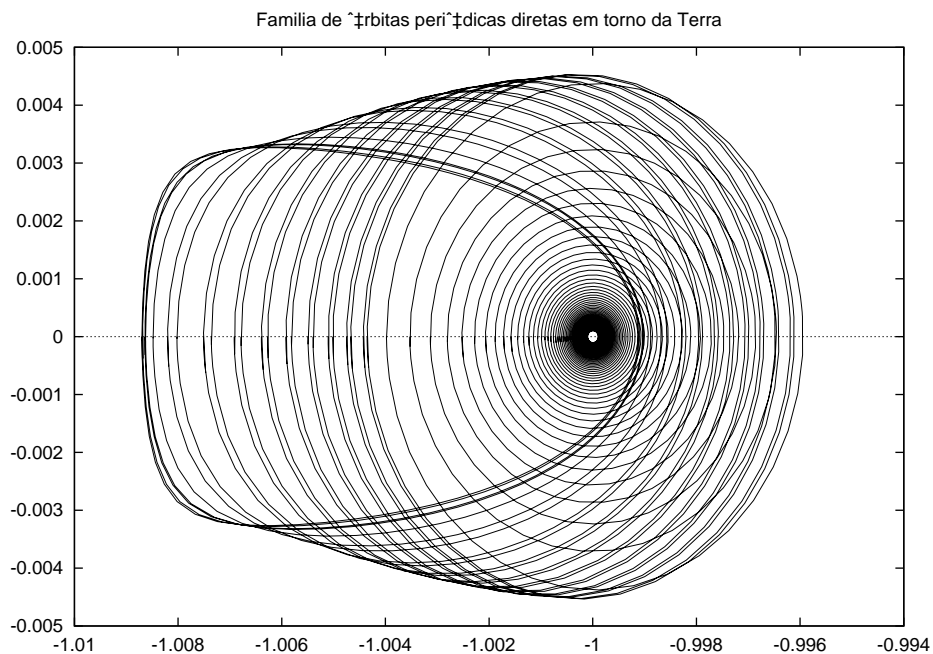


Figura 5.6: Família de Órbitas Diretas Planas.

³A curva característica, conforme já foi dito, é a curva que relaciona as condições iniciais que fornecem órbitas periódicas e o parâmetro utilizado no método da continuação.

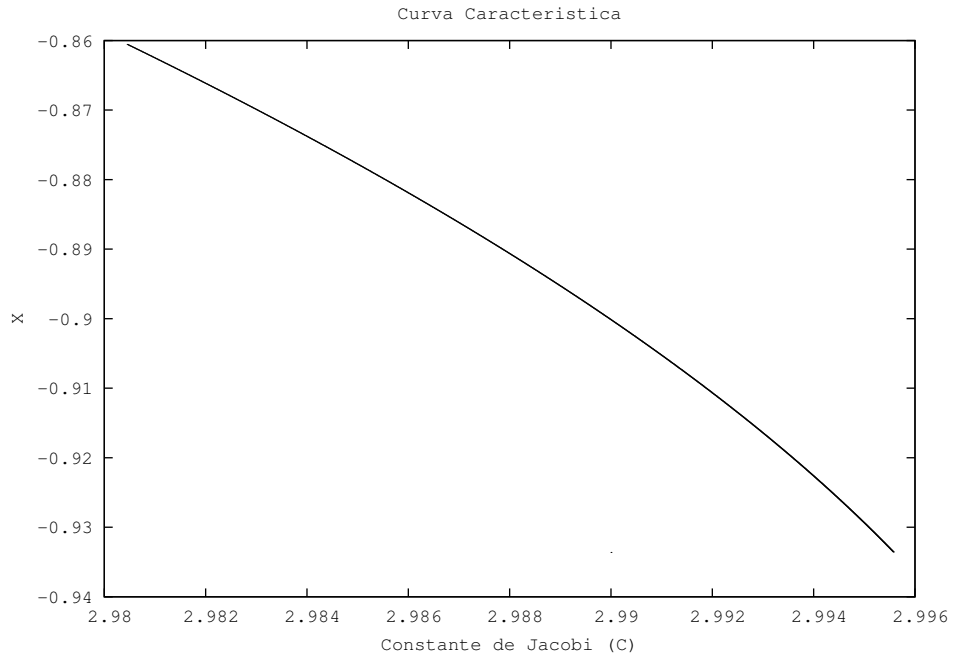


Figura 5.7: Curva característica da Família de Órbitas Diretas Planas.

A figura 5.8 corresponde à família de órbitas periódicas de Lyapunov, obtidas a partir do método descrito anteriormente. Já a figura 5.9 corresponde à curva característica associada a essa família de órbitas periódicas.

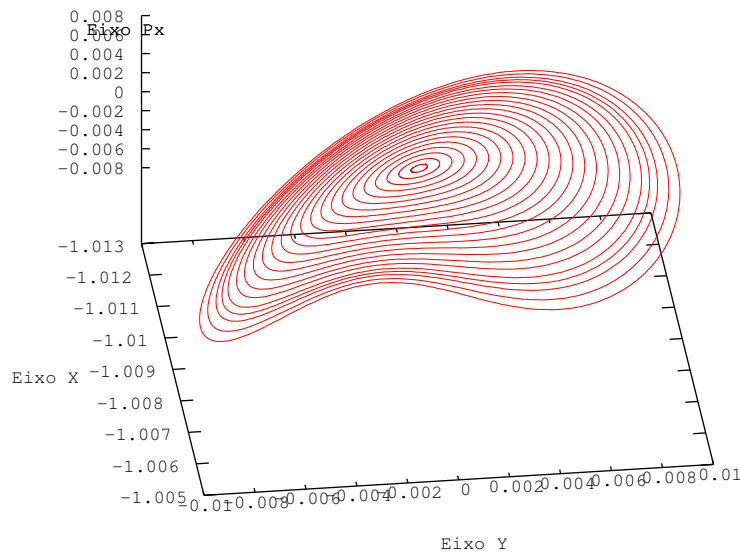


Figura 5.8: Família de Órbitas de Lyapunov.

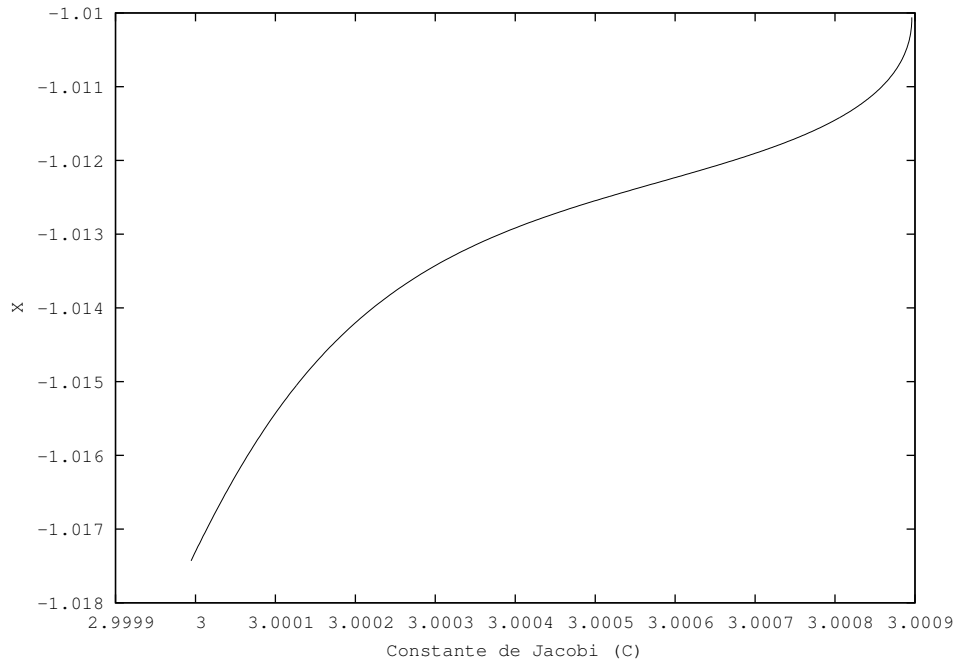


Figura 5.9: Curva característica da Família de Órbitas de Lyapunov.

As órbitas 5.8 e 5.6 foram obtidas utilizando-se o programa desenvolvido por Mauro Ferreira Baião em sua dissertação de mestrado e adaptado para o caso em questão (Baião, 2010).

Como é conhecido, as órbitas periódicas de Lyapunov são instáveis. Portanto, de cada órbita emana dois cilindros (variedades invariantes hiperbólicas), sendo um estável e outro instável, conforme a figura 5.10.

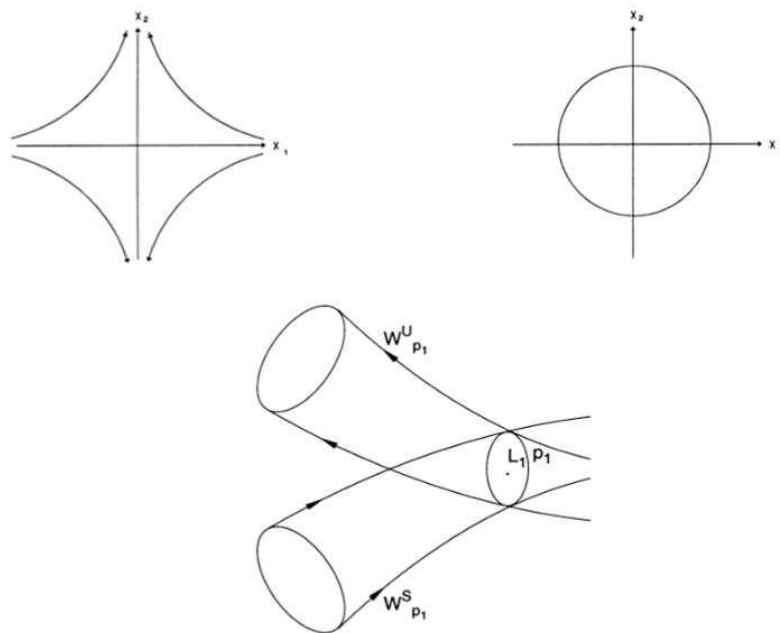


Figura 5.10: Dinâmica linear em torno de L_1 ou L_2 . A figura acima à esquerda exibe a parte de sela, enquanto que à direita a parte central. A figura abaixo esboça as variedades invariantes de uma órbita periódica p_1 em torno de L_1 .

A variedade estável é constituída de órbitas que, para $t \rightarrow \infty$, vão, assintoticamente, para a órbita estável. Analogamente, as órbitas da variedade instável, aproximam-se da órbita periódica quando $t \rightarrow -\infty$. As figuras 5.11 e 5.12, extraídas de Simó e Stuchi (Stuchi & Simó, 2000), exibem uma variedade instável nas proximidades de uma órbita periódica.

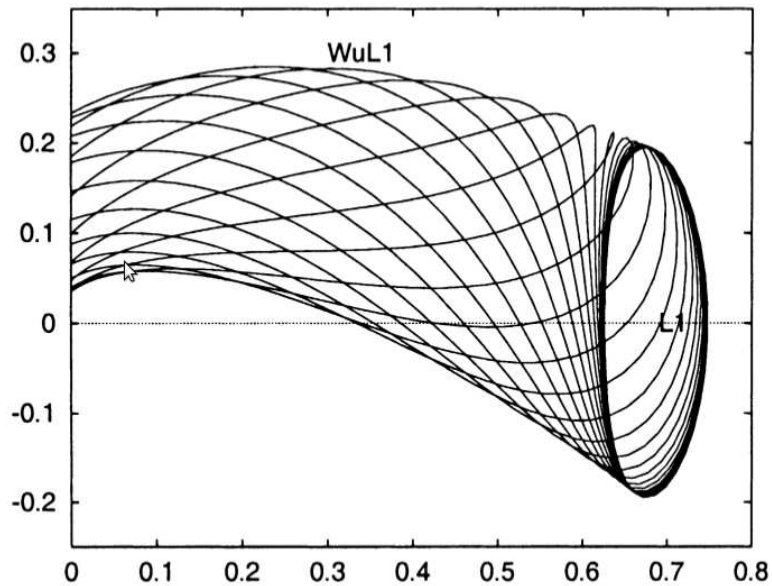


Figura 5.11: Variedade invariante instável associada à órbita periódica de Lyapunov em torno de L_1 .

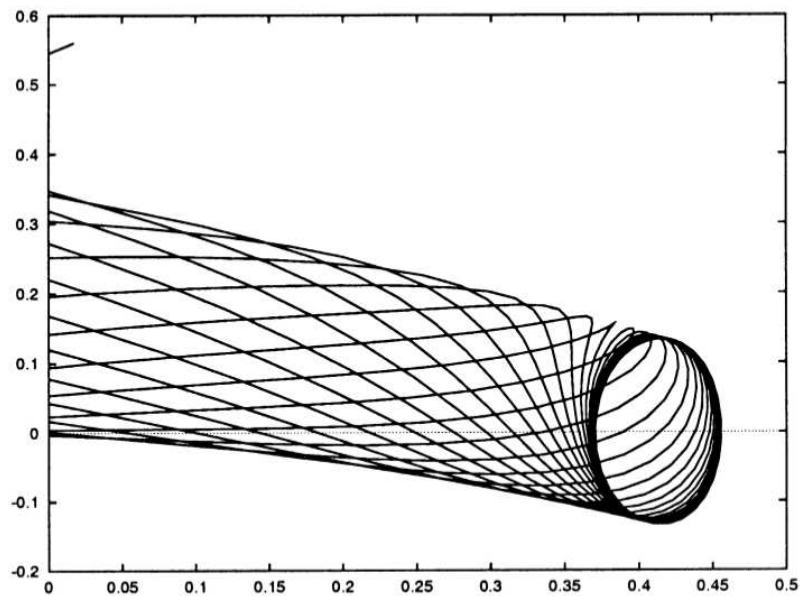


Figura 5.12: Variedade invariante instável associada à órbita periódica de Lyapunov em torno de L_1 .

Capítulo 6

Bifurcação de *Pitchfork*

Neste capítulo, discutiremos um pouco acerca de uma bifurcação do PRTC, a saber a bifurcação *pitchfork*. Serão mostradas algumas seções de Poincaré desta bifurcação e discutida uma conexão interessante com a variedade instável de L_1 , discutida no trabalho de Simó e Stuchi (Stuchi & Simó, 2000).

O termo bifurcação, introduzido por Poincaré em 1885, refere-se a mudanças qualitativas no espaço de fase de um sistema dinâmico, conforme algum parâmetro do sistema ultrapasse um valor crítico. A ideia de bifurcação está intimamente ligada ao conceito de estabilidade estrutural¹. Essa mudança qualitativa na topologia do espaço de fase é chamada bifurcação.

Analisaremos, nesse trabalho, a bifurcação *pitchfork* (forquilha). Essa bifurcação ocorre em sistemas que possuem algum tipo de simetria. Em tais sistemas, um par de pontos de equilíbrio de mesma estabilidade pode aparecer ou desaparecer simultaneamente, quando o parâmetro de controle passa por um valor crítico². A seguir, encontra-se o diagrama de bifurcação (figura 6.1) típico de um sistema que apresenta esse tipo de bifurcação.

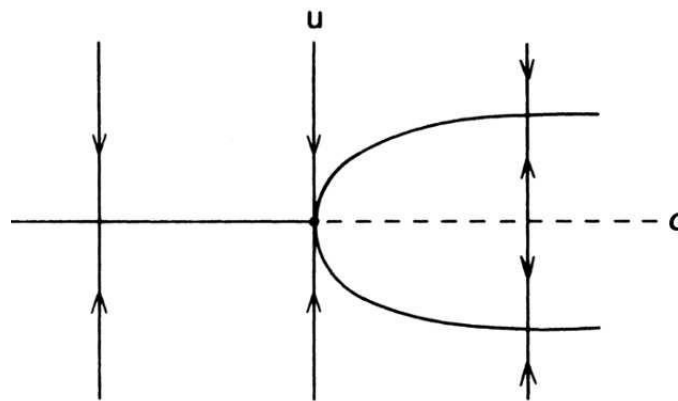


Figura 6.1: Diagrama de bifurcação do tipo *pitchfork*.

¹Um sistema dinâmico é estruturalmente estável, se ele é topologicamente equivalente a uma versão perturbada desse sistema. Se, no entanto, ao se variar o valor do parâmetro, em torno de um valor crítico, ocorrer uma mudança qualitativa no seu espaço de fase, então o sistema dinâmico é estruturalmente instável, para esse valor do parâmetro (Monteiro, 2006).

²O exemplo clássico, que foi estudado por Euler, em 1744, é o da coluna fina e elástica, presa perpendicularmente ao solo plano, sob a ação do peso de uma carga colocada na sua extremidade livre. Se o valor da carga é menor que um valor crítico, então a barra permanece na vertical (equilíbrio estável). Caso o valor da carga supere esse valor crítico, então a barra entorta (equilíbrio instável) e o lado para o qual entorta depende da condição inicial.

No caso do PRTC, o parâmetro de controle poderá ser μ_2 ou a constante de Jacobi C (hamiltoniana H). Como estamos estudando o caso Sol-Terra (μ_2 fixo), utilizaremos como parâmetro a constante de Jacobi C . Tal bifurcação ocorre na região próxima do corpo primário menos massivo, no nosso caso, a Terra. A bifurcação ocorre na região de Hill I. Nessa região, quando o valor de C está acima de um valor crítico, existe apenas uma órbita periódica. Quando C vale menos que tal valor crítico, a órbita que era estável, torna-se instável ao mesmo tempo que surgem duas órbitas estáveis, de acordo com a figura 6.1.

A seguir, exibiremos essa bifurcação por meio de algumas secções de Poincaré cujos pontos fixos correspondem a órbitas estáveis, como já vimos. Para tal cálculo foi utilizado o programa desenvolvido por T.J. Stuchi e Annelisie Aiex Corrêa em Fortran 77 (Stuchi & Simó, 2000) e (Stuchi & Corrêa, 2007).

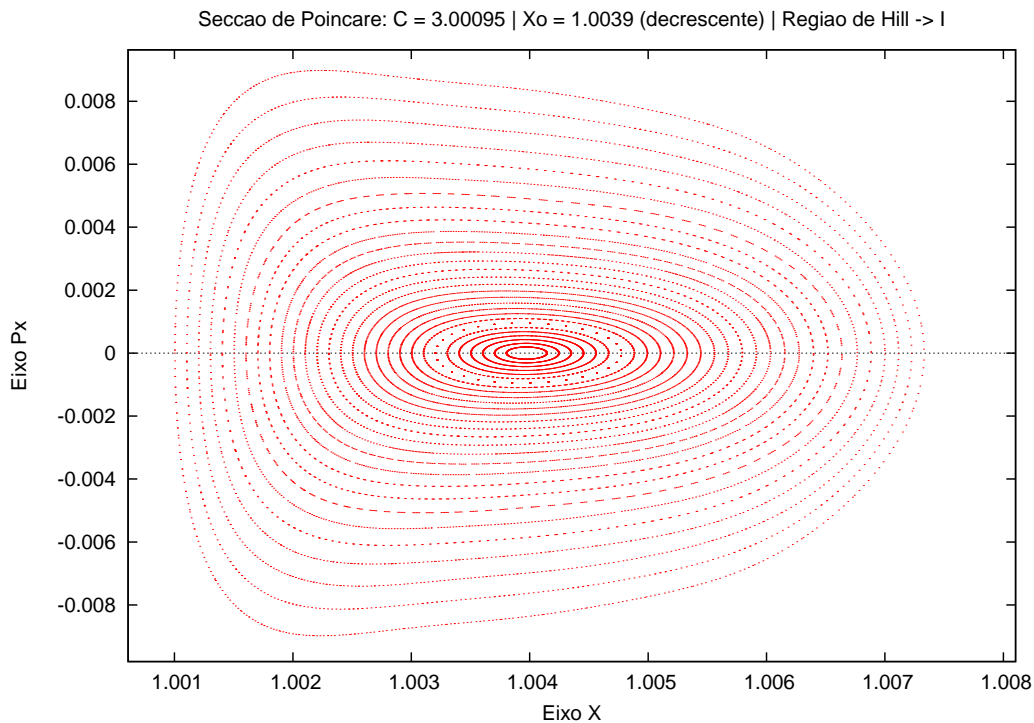


Figura 6.2: $C = 3.00095$

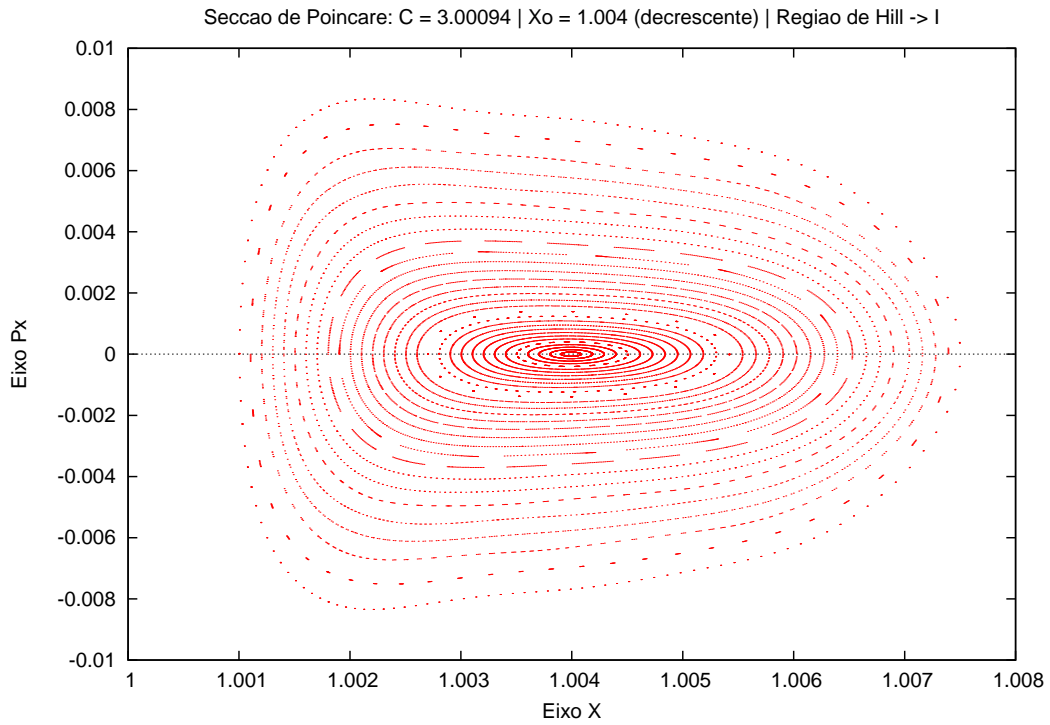


Figura 6.3: $C = 3.00094$

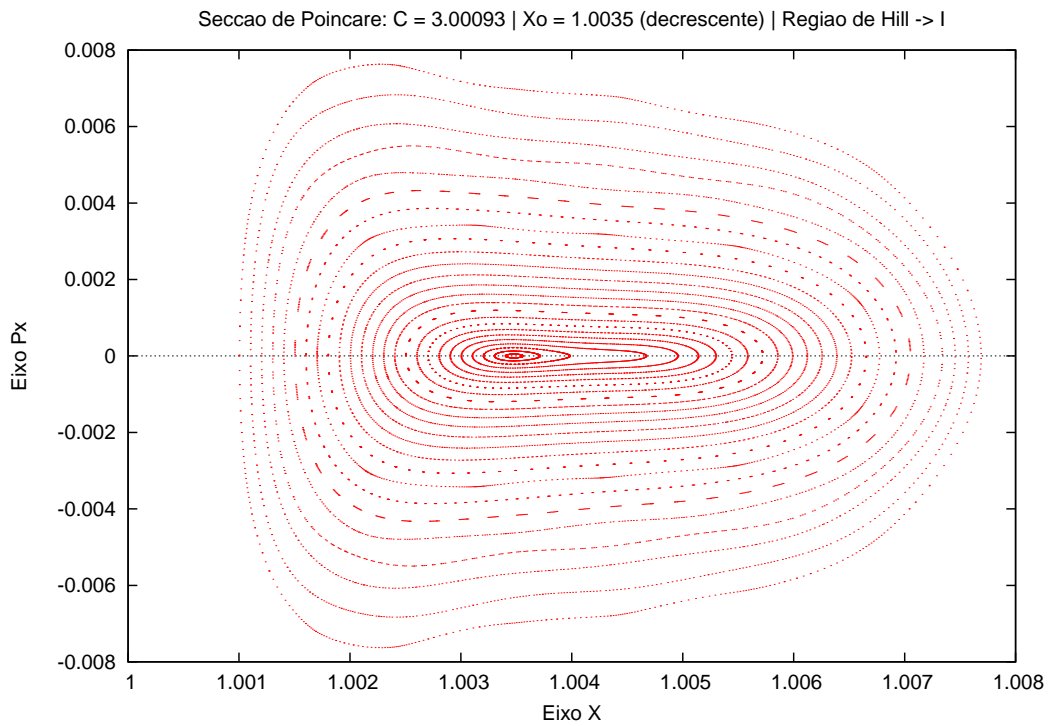


Figura 6.4: $C = 3.00093$

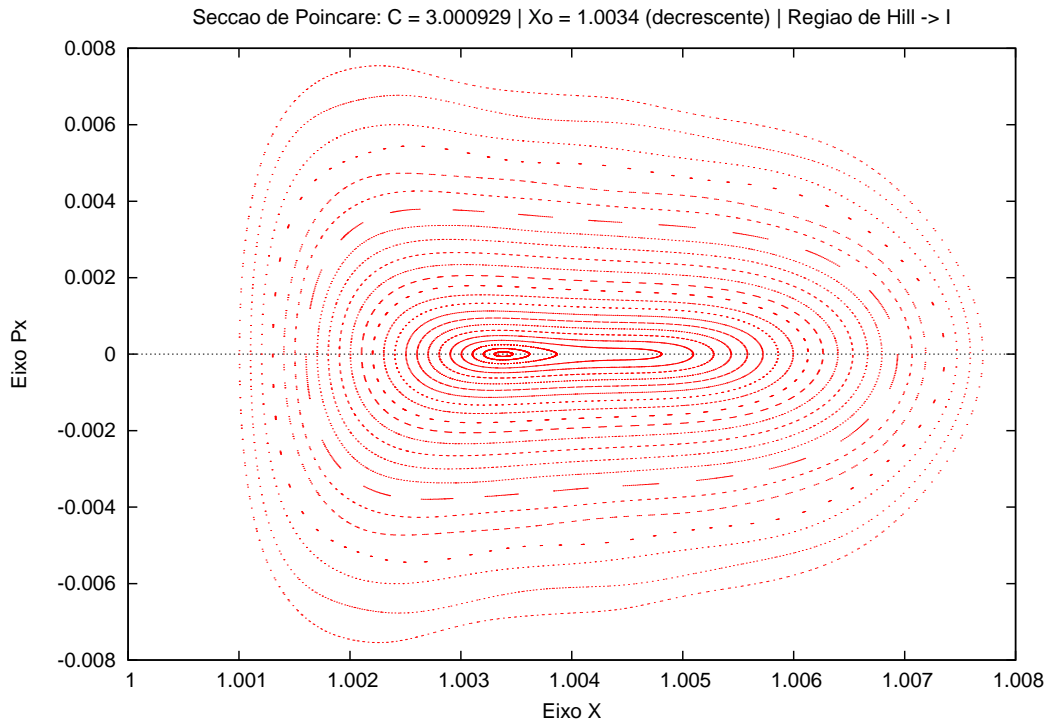


Figura 6.5: $C = 3.000929$

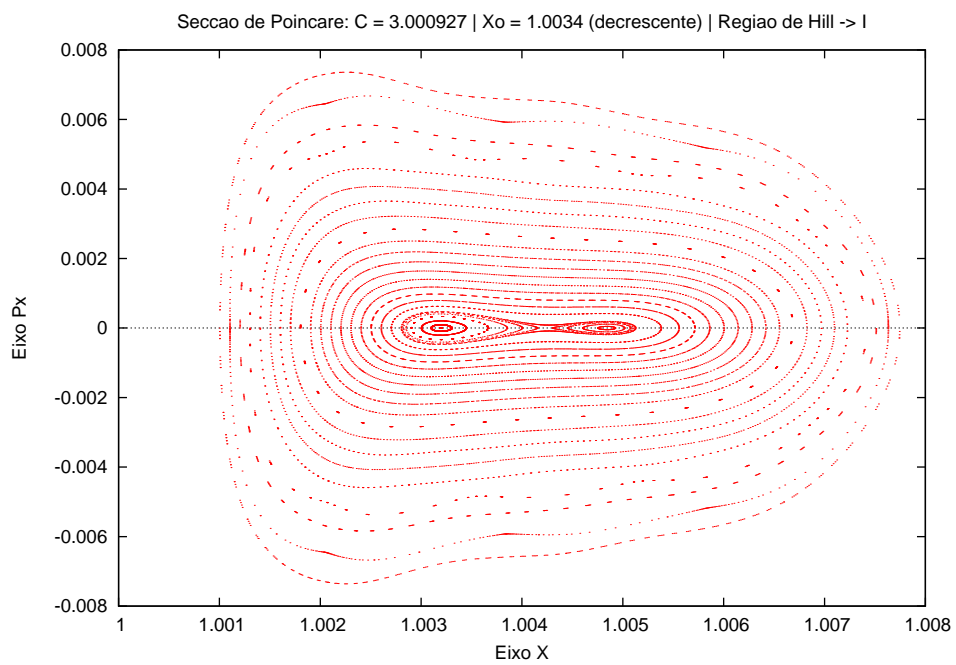


Figura 6.6: $C = 3.000927$

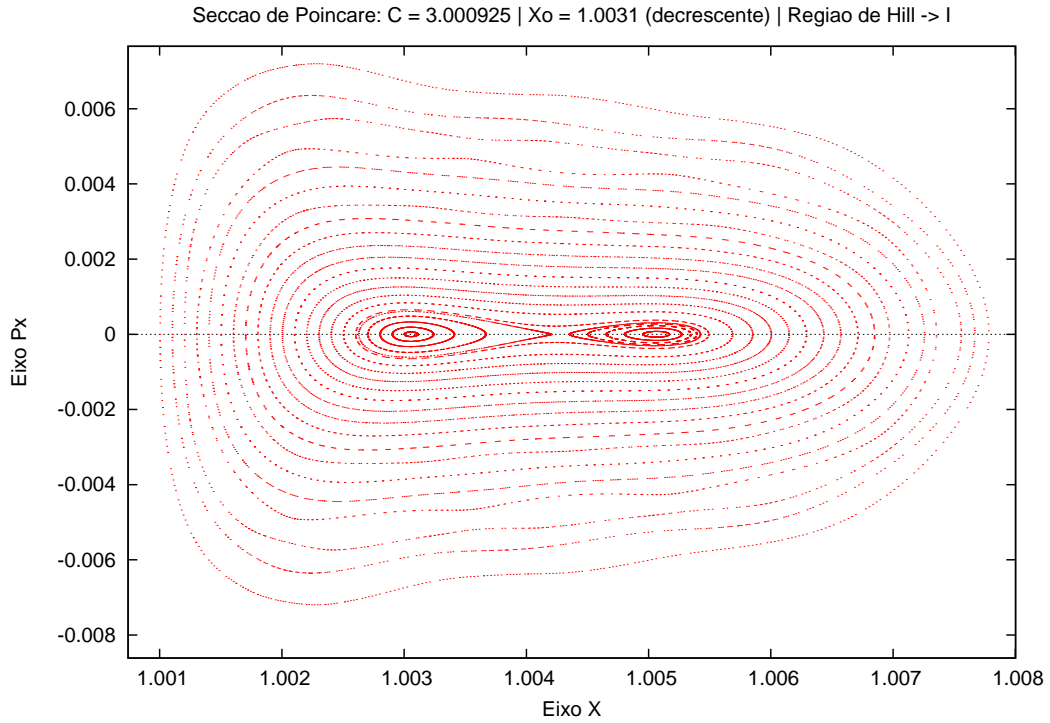


Figura 6.7: $C = 3.000925$

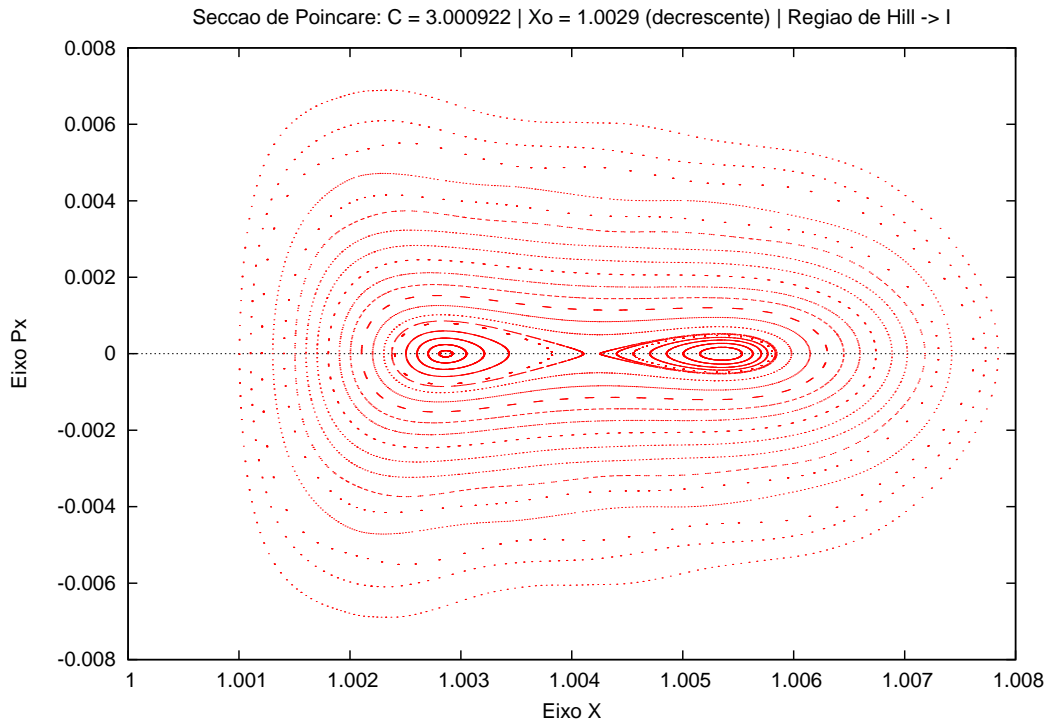


Figura 6.8: $C = 3.000922$

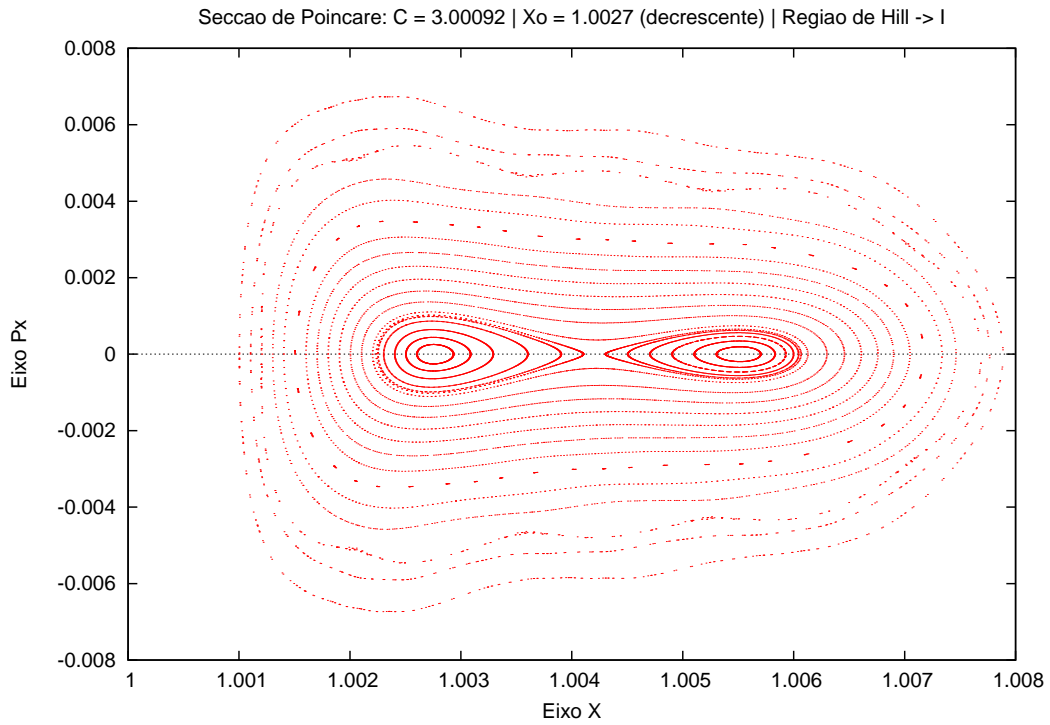


Figura 6.9: $C = 3.00092$

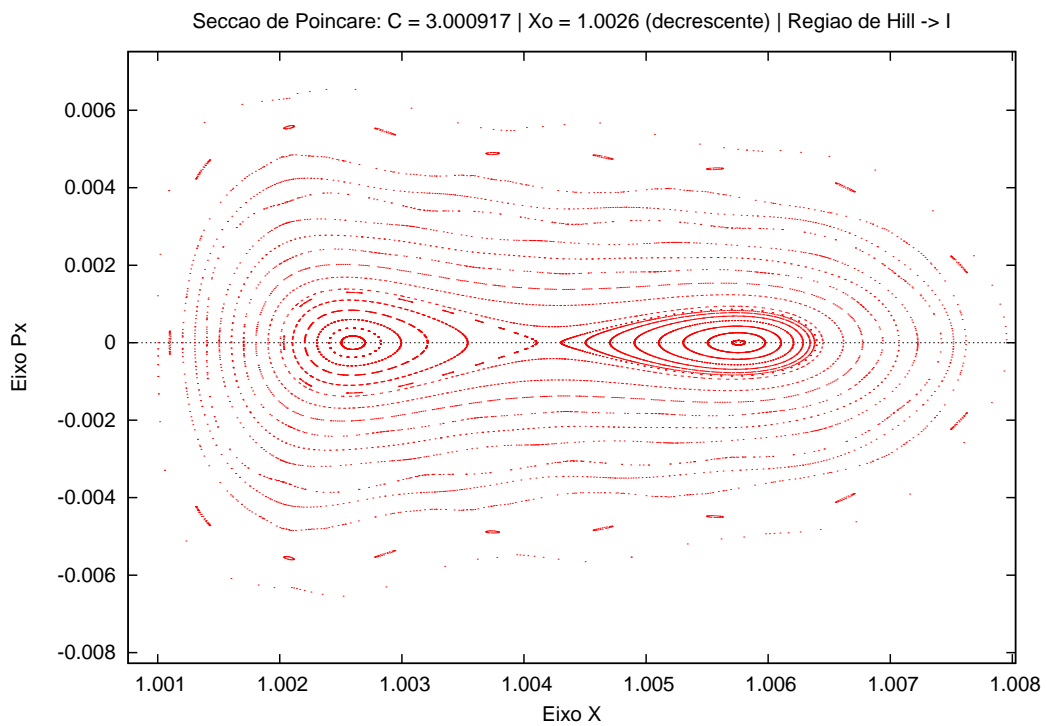


Figura 6.10: $C = 3.000917$

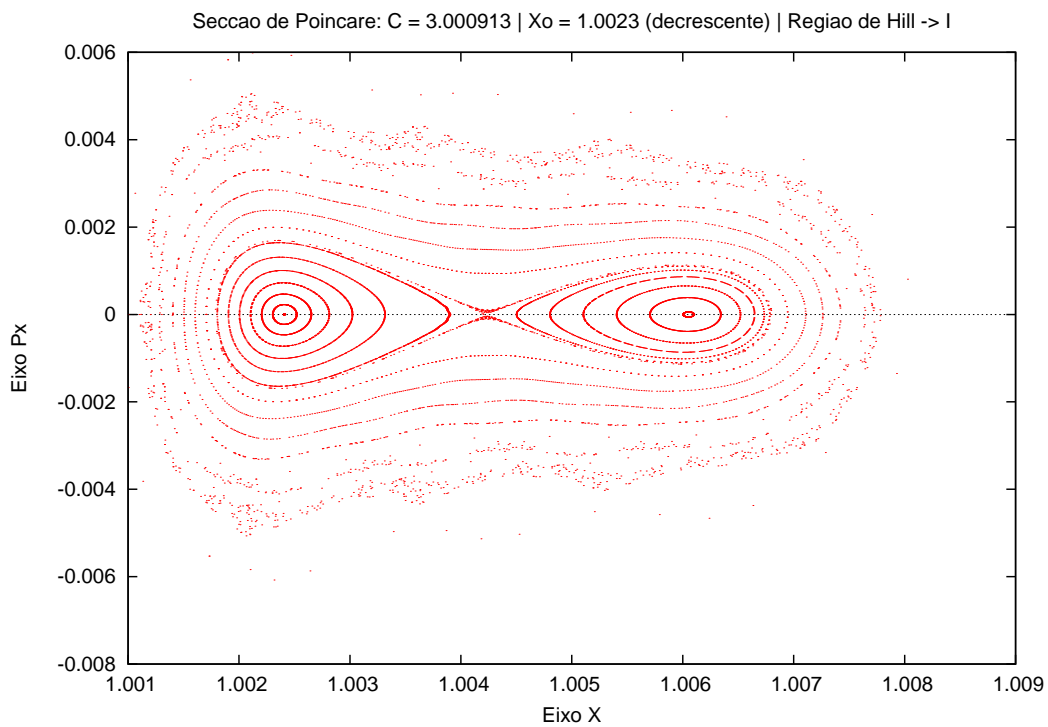


Figura 6.11: $C = 3.000913$

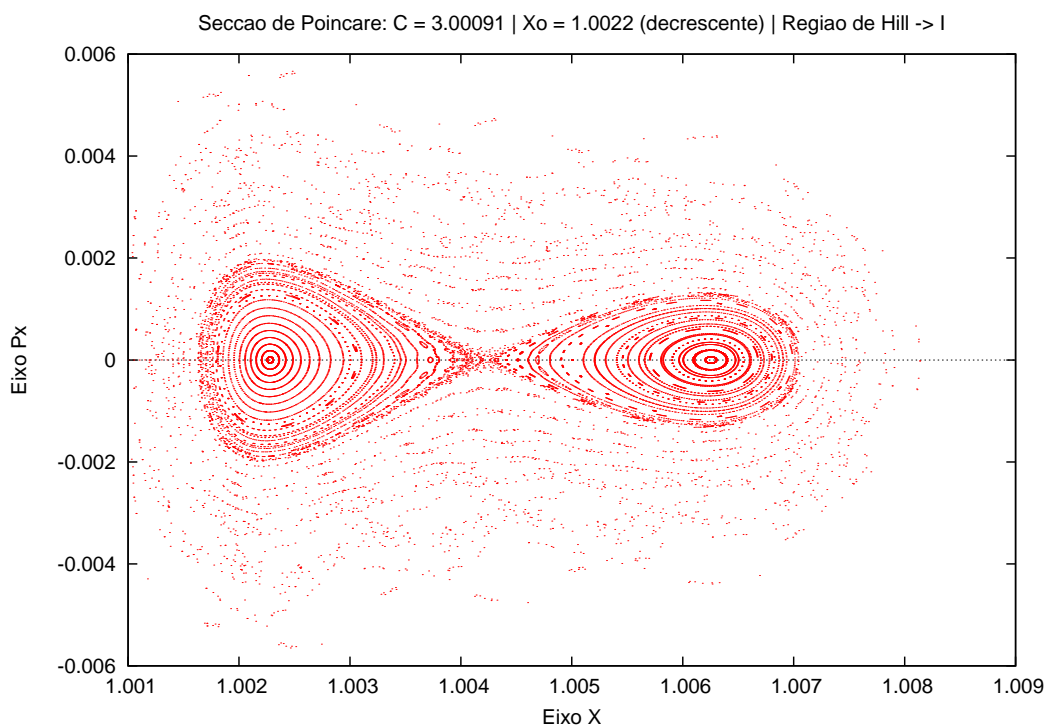


Figura 6.12: $C = 3.00091$

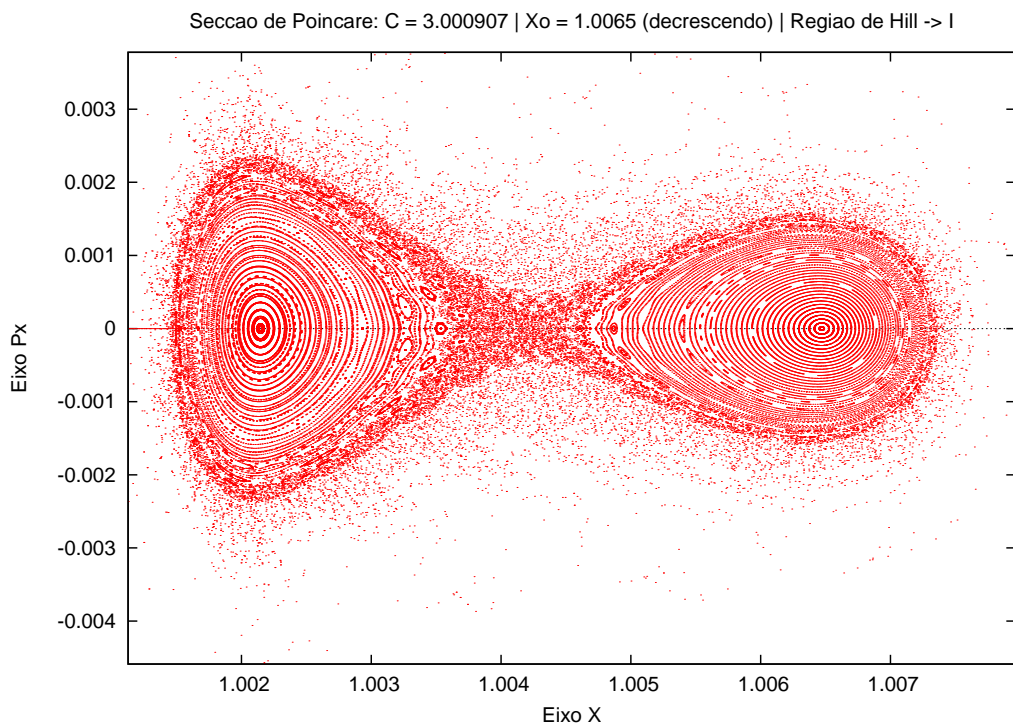


Figura 6.13: $C = 3.000907$

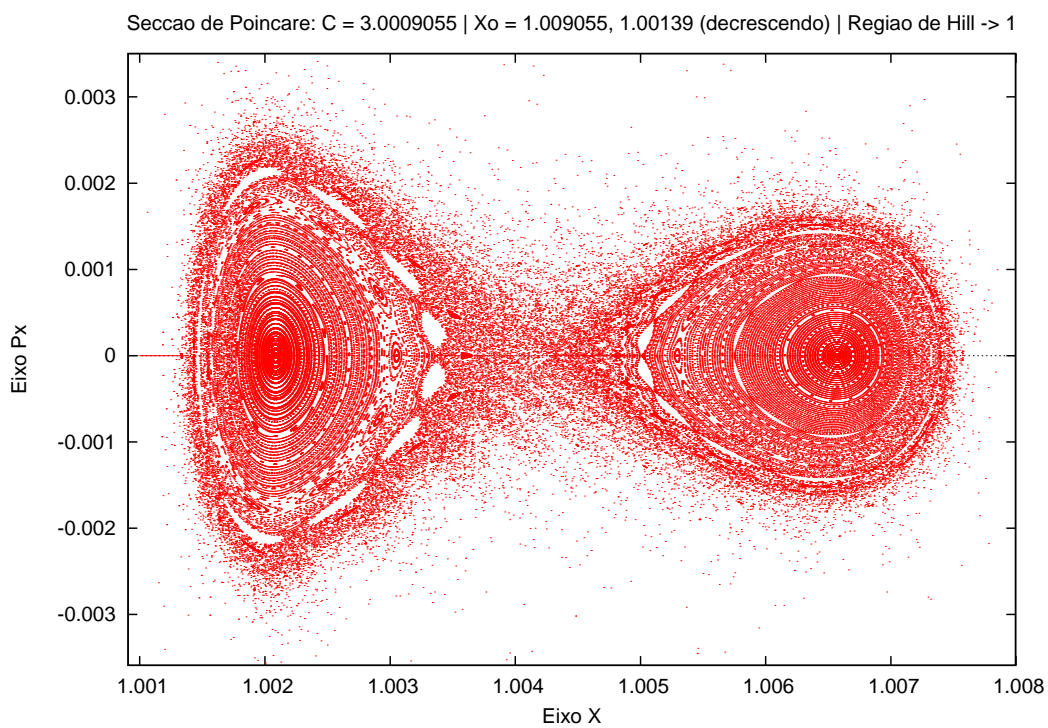


Figura 6.14: $C = 3.0009055$

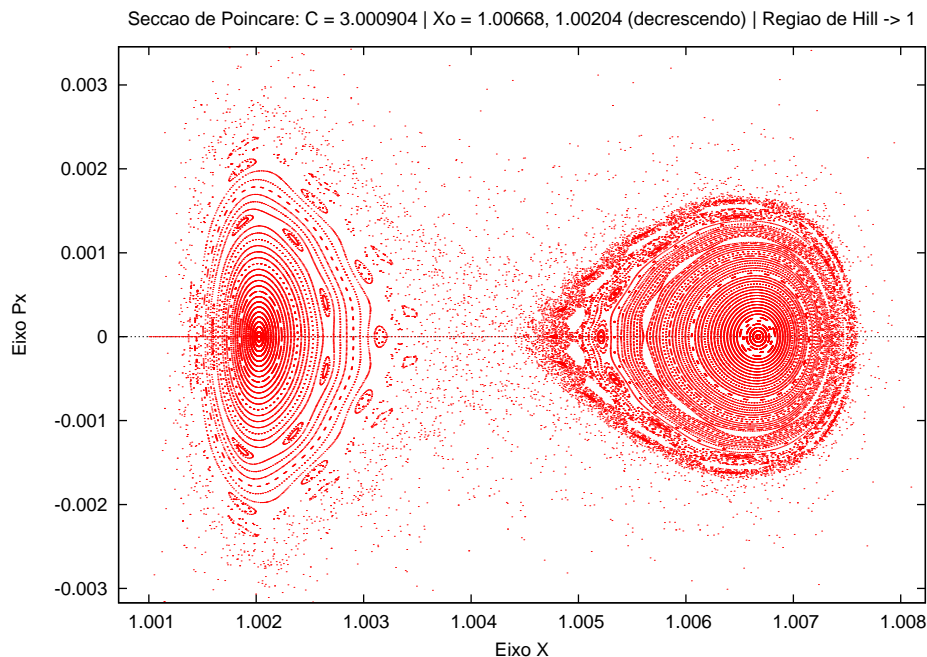


Figura 6.15: $C = 3.000904$

A figura 6.16 (Stuchi & Simó, 2000) exhibe as variedades invariantes estável/instável do ponto fixo correspondente à órbita periódica instável da bifurcação *pitchfork* no problema de Hill ($H = 1/18$) que tangencia o corte da variedade instável de uma órbita de Lyapunov. Esta tangência poderia ser utilizada num processo de transporte proveniente da região da GEO. É necessário se pensar em uma trajetória que minimize o gasto de combustível para levar um satélite da GEO até a vizinhança da tangência heteroclínica. Aqui já entramos nas perspectivas futuras do trabalho.

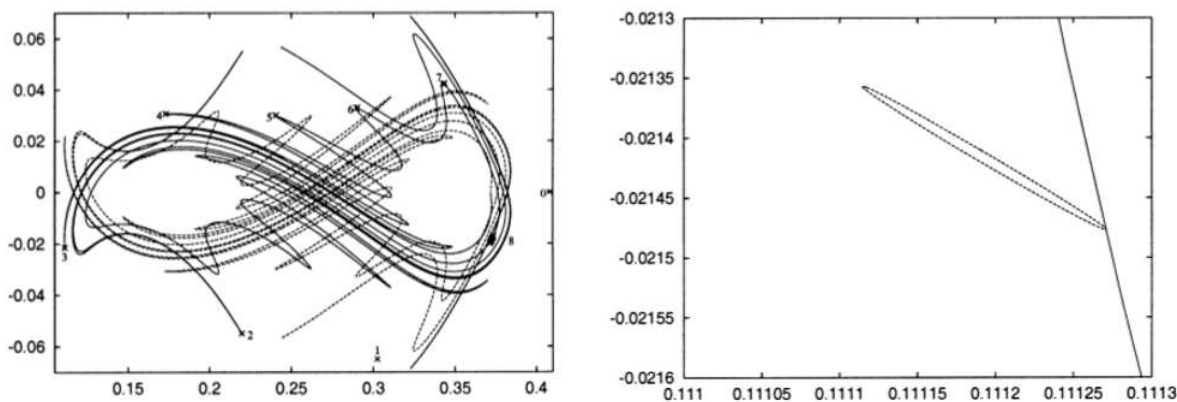


Figura 6.16: Gráfico gerado com $y = 0$, sendo x a abscissa e p_x a ordenada. À esquerda: variedades instável (linha tracejada) e estável (linha contínua) associadas à órbita periódica direta do Problema de Hill, para $H = 1/18$. À direita: tangência heteroclínica entre a terceira iteração do mapa de Poincaré da variedade instável de uma órbita de Lyapunov e da variedade estável de uma órbita direta.

Conclusões e Perspectivas Futuras

Devido a atual situação do lixo espacial e às técnicas pensadas para o eliminarem, podemos afirmar que há necessidade de existir políticas mais afirmativas acerca da sustentabilidade das atividades espaciais. O presente trabalho mostra que pode existir uma alternativa concernente à eliminação do lixo espacial, seja ele pertencente a uma órbita LEO ou GEO, entre outras; bastando verificar, a partir do cálculo das variedades invariantes hiperbólicas³, se as mesmas estão próximas das vizinhanças de tais órbitas.

Há um consenso claro no que se refere ao problema de sustentabilidade das atividades espaciais e que a comunidade mundial deve tomar iniciativas rigorosas para impedir que os bens comuns do espaço se transformem em um depósito intocável de lixo e numa prova da incapacidade da humanidade de lidar de forma sustentável com as órbitas dos satélites. Segundo Ray Williamson, no Comitê das Nações Unidas para o Uso Pacífico do Espaço (COPUOS), *”há necessidade de se firmar um acordo internacional para regulamentar o esforço de todos os países interessados na solução do complexo problema dos detritos espaciais”*.

Acerca do estudo feito nessa monografia, podemos concluir, primeiramente, que o PRTC plano é o modelo dinâmico mais simples que aproxima o movimento de três objetos reais no Sistema Solar, sendo um de massa muito pequena. Além disso, tal modelo pode ser dividido em quatro regiões de movimento distintas definidas pelos três pontos de equilíbrio colineares de Euler-Lagrange. Temos, ainda, que se trata de um sistema quasi-integrável, ou seja, há apenas uma constante de movimento, a saber a Constante de Jacobi.

Acerca da órbita GEO, podemos afirmar que é uma órbita direta do PRTC espacial. A singularidade não permite que determinemos a órbita GEO, portanto precisamos generalizar o estudo para três dimensões, bem como regularizar o sistema. Note que a órbita GEO pertence à região de Hill que contém os maiores valores de C , por isso essa órbita está bem próxima da Terra. Sem regularizar o sistema não conseguimos detectá-la.

Sabemos que, para o PRTC, a região caótica é estreita em torno de ilhas que aparecem à esquerda do corpo primário menos massivo. Com relação ao estudo qualitativo do sistema Sol-Terra-detrito, podemos concluir que a região à esquerda (de cada corpo) é mais regular por corresponder a órbitas retrógradas (como é conhecido em geral). Uma análise das Secções de Poincaré mostra claramente um aumento da região caótica à medida que o valor de C diminui.

Finalmente, por meio da técnica da continuação calculamos as órbitas periódicas. Na família das órbitas diretas planas observamos uma bifurcação, a saber *pitchfork*, que é típica de sistemas simétricos. Nesse caso, próximo à Terra, uma órbita estável, torna-se instável e duas órbitas estáveis surgem.

³As variedades invariantes hiperbólicas não foram tratadas nessa monografia, mas correspondem a verdadeiros tubos de transporte nos mais variados sistemas celestes.

A fim de verificar se é possível eliminar o lixo espacial geostacionário através das variedades invariantes hiperbólicas do PRTC, precisamos obter, futuramente, as variedades estáveis e instáveis associadas aos pontos de equilíbrio colineares. Caso haja proximidade entre essas e a órbita GEO, podemos pensar em uma estratégia econômica para eliminar o detrito.

As perspectivas futuras desse trabalho devem ser:

- estudar o Problema Restrito de Três Corpos Espacial a fim de determinar numericamente a órbita geostacionária;
- regularizar o sistema a fim de determinar a órbita geostacionária com precisão;
- obter as Variedades Invariantes Estáveis e Instáveis em torno das órbitas periódicas de Lyapunov;
- calcular a variação de velocidade necessária para atingir a variedade instável a partir da órbita geostacionária, que possivelmente é bem maior do que $\Delta v = 11$ m/s, atualmente utilizando para deslocar o satélite da órbita GEO.
- entender como o transporte de corpos naturais e artificiais se relaciona com essas variedades invariantes, tendo como um dos objetivos verificar se as variedades estáveis e instáveis associadas às órbitas de Lyapunov em torno de L1 e de L2 se aproximam da órbita geostacionária.

Conforme foi dito na introdução

Referências Bibliográficas

- Baião, M. 2010, Análise dinâmica de um sistema de satélites vinculados na vizinhança dos pontos colineares (Universidade Federal do Rio de Janeiro, Curso de Pós-Graduação em Astronomia. Rio de Janeiro: Observatório do Valongo)
- Berry, M. V. 1978, Regular and Irregular Motion, 2nd edn. (New York: Journal Physics in Nonlinear Dynamics)
- Boccaletti, D., & Pucacco, G. 1996, Theory of Orbits (Garching: Springer)
- Broucke, R., & Boogs, D. 1975, Celestial Mechanics, 11, 13
- Celletti, A., & Perozzi, E. 2007, Celestial Mechanics (Chichester: Springer)
- Chenciner, A., & Montgomery, R. 2000, Annals Math., 152, 881
- Clarke, A. 1945, Wireless World, 42, 13
- CNET. 2013, CSR reaches beyond GPS to improve navigation
- Coelho, L. A. 1999, Sobre a Integrabilidade dos Problemas de Euler e Stoner (Universidade Federal do Rio de Janeiro, Curso de Graduação em Astronomia. Rio de Janeiro: Observatório do Valongo)
- Corrêa, A. A. 2000, Linhas de Fluxo de Discos de Acreção em Estrelas Binárias com Órbitas Periódicas Simples. (Universidade Federal do Rio de Janeiro, Curso de Graduação em Astronomia. Rio de Janeiro: Observatório do Valongo)
- Deuffhard, P. 2011, Newton Methods for Nonlinear Problems (Berlin: Springer)
- Monteiro, L. H. A. 2006, Sistemas Dinâmicos, 2nd edn. (São Paulo: Editora Livraria da Física)
- Moser, J., & Zehnder, E. 2005, Notes on Dynamical Systems (New York: Courant Institute of Mathematical Sciences)
- Murray, C. D., & Dermott, S. F. 2001, Solar System Dynamics (Cambridge: Cambridge University Press)
- NASA. 2013, National Aeronautics and Space Administration
- Penrose, R. 1955, Proc. Cambridge Philos. Soc., 51, 306
- Perko, L. 1991, Differential Equations and Dynamical Systems (Berlin: Springer-Verlag)
- Pinheiro, M. 2012, in Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, ed. C. F. de Melo (São Paulo: UFABC), 201–201

- Roy, A. E. 1978, *Orbital Motion* (New York: Halsted Press)
- Roy, A. E., & Ovenden, M. W. 1955, *Mon. Not. Royal Astronomical Society*, 115, 296
- Simó, C. 1990, in *Modern Methods in Celestial Mechanics*, ed. D. Benest & C. Froeshlé (Paris: Éditions Frontière), 285–330
- Soop, E. M. 1994, *Handbook of Geostationary Orbits* (California: Kluwer Academic Publishers)
- Space, A. 2012, *Image Library*, arianespace was founded in 1980 as the world's first commercial satellite launch company.
- Stuchi, T., & Corrêa, A. 2007, *Journal of Advances in Space Research*, 68, 1
- Stuchi, T., & Simó, C. 2000, *Physica D*, 5, 1
- UCS. 2013, *UCS Satellite Database*, the UCS Satellite Database is the only free, comprehensive compilation of active satellites in an easy to manipulate, commonly-used database format.
- Wiggins, S. 2003, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Berlin: Springer-Verlag)
- Wulff, C., & Schebesch, A. 2000, *Celestial Mechanics*, 1, 1
- Zsebehely, V. G. 1967, *Theory of Orbits* (New York: Academic Press)