

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS DA MATEMÁTICA E DA NATUREZA
OBSERVATÓRIO DO VALONGO
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA

Influência das propriedades físicas de asteroides no Efeito Yarkovsky

Aluno:

Walter Silva MARTINS FILHO

Orientadora:

Dr^a. Thais MOTHE-DINIZ

Projeto de Conclusão de Curso
para a obtenção do título de Astrônomo

Rio de Janeiro, Brasil

In memoriam Adriana Fidélis da Silva

Agradecimentos

Existem tantas pessoas e situações que tenho à agradecer por estar concluindo o curso de graduação em Astronomia, aqui no Observatório do Valongo/UFRJ. Primeiro, agradeço ao meu pai, Walter Silva Martins, por mostrar que o estudo é o maior tesouro de um homem, e por incentivar o meu interesse em ciências, desde a época do jardim de infância adentrando o colégio. Pelo apoio imensurável da minha avó, Raymunda Silva Martins, e da minha tia, Iêda Silva Martins, pelo apoio em todos esses anos, tanto pelo carinho e preocupação, quanto pelas refeições durante o meu estudo. À minha mãe, Adriana Fidélis da Silva, por simplesmente apoiar a minha decisão de cursar uma carreira acadêmica, com um diálogo que marcou a minha entrada na faculdade: 'minha mãe: Eu vou gastar com mensalidade na faculdade? Eu: Não, é uma faculdade pública. Ela: Então você pode fazer o que você quiser que eu apoio.'. Eu sei que qualquer que fosse a minha decisão, ela iria apoiar, mas foi uma forma engraçada de começar a graduação.

Agradeço a minha melhor amiga, minha irmã Jéssica Silva Martins, pelo apoio dado todos esses anos. Seja numa conversa, jogando PS, vendo anime ou lendo mangá.

Agradeço ao bando de inúteis que eu denomino amigos: Henrique Saraiva de Almeida, Carolina de Assis Costa Moreira (Espirro), Pedro Henrique Gomes Corrêa, Altair Gomes Júnior, Roberta Dittz, Natália Tobinaga Tourinho (Tobi), Tatiana Moura, Nathália Paes-Leme, Geisa Pontes, Wesley (Peso-pena), Wallace Silva, André Pontes, Flávia dos Prazeres, Nathália Lia e vários outros. Peço perdão a quem esqueci de citar, mas que também tenha feito parte desses anos de curso.

Fico muito feliz de ter trabalhado na extensão, com a professora Dra. Silvia Lorenz-Martins e na iniciação científica com a professora Dra. Thais Mothe-Diniz. O apoio de ambas, num dos momentos mais difíceis que passei até hoje e que quase me fez desistir da faculdade foi essencial para estar agora aqui. Agradeço muitas outras coisas a minha amiga Thais Mothe-Diniz, sem ela, eu realmente não estaria aqui.

Por fim, quero dizer que a faculdade ensinou-me várias coisas, muitas das

quais eu já esqueci, e muitas que levarei comigo. Foram anos maravilhosos e gloriosos e espero manter essas amizades feitas por toda a minha vida. Se alguém ler isso no futuro, e caso seja eu mesmo a fazer isto, digo uma coisa: carpe diem! Foi o que eu fiz nesses anos e o que espero para os próximos.

Por fim, agradeço ao CNPq e ao INCT-A pelas bolsas de Iniciação Científica concedidas durante todo o processo.

Resumo

O projeto tem por finalidade estudar o comportamento do efeito Yarkovsky em diferentes condições de densidade, albedo e inércia térmica. Por efeito Yarkovsky entende-se o efeito da re-irradiação térmica de um corpo, causando alterações em seu movimento orbital. Uma primeira descrição matemática encontra-se em Peterson (1976). Atualmente atribui-se a este efeito diversos fenômenos conhecidos tais como o transporte de corpos para ressonâncias e o espalhamento em semi-eixo maior de objetos pertencentes a famílias de asteróides. Asteróides são corpos pequenos remanescentes do processo de formação planetária, com diâmetros típicos menores que 1000Km, que não possuem potencial para atividade cometária.

Tomando por base o formalismo desenvolvido por Vokrouhlický (1998a), alteramos a equação da variação do semi-eixo maior no tempo devido ao Efeito Yarkovsky. Inicialmente, ela depende dos parâmetros orbitais. Essa mudança de variáveis tem por fim torná-la dependente do albedo, da densidade, e da inércia térmica. Com isto, comparamos o efeito entre corpos metálicos e corpos formados por silicatos. Concluimos que estes últimos possuem variações em semi-eixo de uma a duas ordens de grandeza maiores do que os primeiros.

O próximo passo neste projeto será gerar uma família sintética de asteróides, modelando o instante de sua quebra, com membros de propriedades físicas distintas (segundo sua maior concentração de silicatos ou metais em sua composição), e simular sua evolução no tempo, ao longo de centenas de milhares de anos.

Palavras-chave: *Asteróides, Efeito Yarkovsky*

Abstract

The project aims to study the behavior of the Yarkovsky Effect under different albedo, density, and thermal inertia conditions. A first mathematical description of effect was made by Peterson (1976). The effect is known to cause changes in the orbital motions, bringing asteroids to transport routes, such as some mean motion resonances.

Based on the formalism developed by Vokrouhlický (1998a), we express the equation of the semi-major axis variation in terms of the physical parameters. Initially, it depends on orbital parameters. With this change of variables, it becomes dependent on albedo, density, and thermal inertia. This change allowed us to compare the effect on metallic and silicate bodies. Silicate bodies presented variations in semi-axis that are one to two orders of magnitude higher than metal bodies.

The next step in this project is to generate a synthetic family of asteroids, modeling the moment of break-up, assuming members with different physical properties (according to a more silicatic or metallic composition), and simulate its evolution in time.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Asteroides	1
1.2	Cinturão Principal e sua evolução	2
1.3	Efeitos não gravitacionais	3
1.3.1	Pressão de Radiação	3
1.3.2	Efeito Poynting-Robertson	3
1.3.3	Efeito Yarkovsky	4
1.3.4	Efeito YORP	5
1.4	Objetivo do Projeto	6
2	O Efeito Yarkovsky: literatura e modelo linear	9
2.1	Histórico	9
2.2	Modelo Linear	11
2.2.1	Conceitos Matemáticos	11
2.2.2	Teoria	11
3	Mudando variáveis: novos resultados	20
3.1	Funções κ	20
3.2	Explicitando as variáveis	24
3.3	Efeito Yarkovsky como função do albedo, da densidade e da inércia térmica	25
3.3.1	Algoritmo e código maple	26
3.3.2	Análise Gráfica	26
3.3.3	Validação dos resultados	27
3.4	Comparação: Silicato e Metal	31
4	Discussão	33
A	Símbolos e valores típicos	35
B	Código Maple	36

Lista de Figuras

1.1	Falhas de Kirkwood. Ressonâncias citadas na figura são geradas devido ao planeta Júpiter. Fonte:Chamberlin (2007) . . .	2
1.2	Corpos na ordem de micrômetros possuem o parâmetro β maior do que 1. Logo, a força de radiação torna-se maior que a gravitacional, empurrando o corpo para longe do Sol. As diversas curvas apresentam diferentes tipos de materiais constituintes: - - ... - - gelo até 100K; basalto; - - - quartzo amorfo; - - - ferro; magnetita; e a linha contínua é o material ideal, $\rho = 3 \text{ g/cm}^3$ (De Parker, 2001).	7
1.3	Representação dos componentes do Efeito Yarkovsky ((Bottke et al., 2002))	8
1.4	O Efeito YORP:	8
2.1	Sistema de referência e coordenadas usadas na teoria	14
2.2	Coeficientes κ_1 , κ_2 e κ_3	19
3.1	Reprodução do gráfico 2.2 utilizando o novo formalismo desenvolvido nesta seção para os coeficientes de Padé.	23
3.2	Variável X como função da inércia térmica.	24
3.3	Algoritmo do programa Maple para gerar a variação do semi-eixo devido ao Efeito Yarkovsky.	27
3.4	Variação do semi-eixo devida à inércia térmica. O módulo da variação diminui, conforme aumentamos a densidade ($\rho_1 = 3000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 4000$, $\rho_3 = 5000$, $\rho_4 = 6000$, $\rho_5 = 7000$, $\rho_6 = 8000$).	28
3.5	Comportamento do Efeito Diurno, como função do albedo A, e da inércia térmica Γ , para diferentes valores de densidade (da esquerda para a direita): (a) $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, (b) $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$	28
3.6	Variação do semi-eixo com o albedo para $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$ e $\Gamma = 200 \text{ Jm}^{-2}\text{s}^{-1/2}\text{K}^{-1}$	29

3.7	Varição do semi-eixo com a densidade para $A = 0.35$ e $\Gamma = 200 \text{ Jm}^{-2}\text{s}^{-1/2}\text{K}^{-1}$	29
3.8	Comportamento do Efeito Sazonal, como função do albedo A , e da inércia térmica Γ , para diferentes valores de densidade (da esquerda para a direita): (a) $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, (b) $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$	30
3.9	A variação da densidade diminui o módulo do efeito, análogo ao efeito diurno ($\rho_1 = 3000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 4000$, $\rho_3 = 5000$, $\rho_4 = 6000$, $\rho_5 = 7000$, $\rho_6 = 8000$).	30
3.10	Comparação da variação em semi-eixo de corpos compostos de silicatos e de corpos metálicos, usando $A = 0.35$	32

Lista de Tabelas

3.1	Valores e resultados obtidos para os asteroides (152563) 1992BF e 1999RQ36.	31
3.2	Valores diferentes entre corpos metálicos e rochososs.	31
A.1	Variáveis e constantes: valores típicos.	35
B.1	37

Capítulo 1

Introdução

1.1 Asteroides

Asteroides são remanescentes da formação do Sistema Solar. São corpos em geral de forma irregular que não adquiriram massa suficiente para se tornar um planeta, com tamanhos que variam de metros até várias centenas de quilômetros. Grande parte localiza-se em uma faixa situada entre as órbitas de Marte e Júpiter, entre 2.1 e 3.3 UA, conhecido como Cinturão Principal. São encontrados também em pequena quantidade na região dos planetas terrestres, onde são denominados Objetos próximos da Terra, em inglês, Near-Earth Objects (NEAs), assim como nos pontos Lagrangeanos L_4 e L_5 de Júpiter, onde são chamados de Troianos. Para além da órbita de Urano encontram-se o Cinturão de Kuiper e a Nuvem de Oort¹.

Acredita-se que os asteroides sofreram pouca ou nenhuma alteração geológica, tendo sua evolução dada primariamente por processos dinâmicos e físicos (Vokrouhlický et al., 2001). A evolução das suas órbitas é determinada por processos colisionais; efeitos gravitacionais, como aproximação gravitacional com corpos maiores, como por exemplo as falhas de Kirkwood, como podem ser visualizadas em 1.1, que são geradas quando um asteroide alinha sua órbita com Júpiter gerando uma ressonância orbital, isto é, uma relação de inteiros entre o asteroide e Júpiter, um exemplo seria a ressonância 2 : 1, onde o asteroide daria duas voltas em torno do Sol enquanto Júpiter somente uma, gerando uma força de maré; e não-gravitacionais, como o efeito Yarkovsky que é descrito neste trabalho.

¹Que é uma esfera centrada no Sol, para além do Cinturão de Kuiper, inferida teoricamente pela frequência de novos cometas na região dos planetas terrestres.

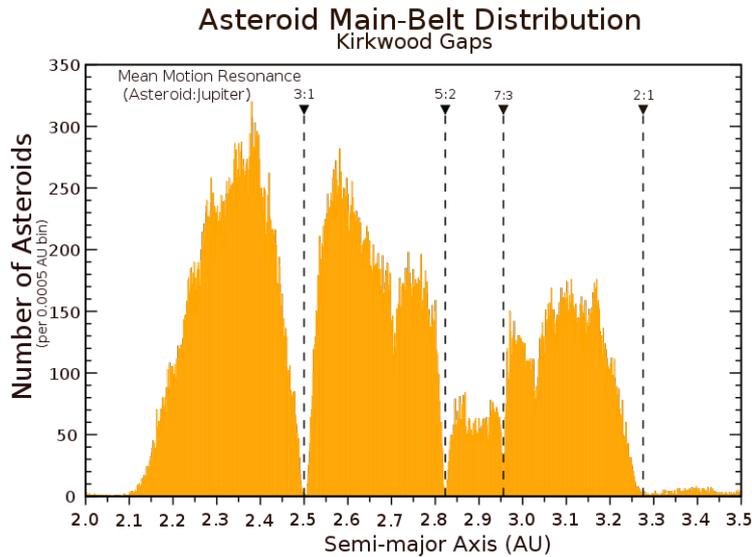


Figura 1.1: Falhas de Kirkwood. Ressonâncias citadas na figura são geradas devido ao planeta Júpiter. Fonte:Chamberlin (2007)

1.2 Cinturão Principal e sua evolução

A evolução dos asteroides deve-se a processos colisionais e mecanismos dinâmicos como aproximação gravitacional a um planeta ou lua. O modelo que explica a evolução por processos gravitacionais e colisionais é denominado Modelo Conservativo, ou Clássico. Quando asteroides cujas órbitas se interseccionem no Cinturão Principal, ocasionalmente colidem gerando craterização e possível fragmentação. O processo de fragmentação pode criar uma família de asteroides. Agrupamentos de asteroides no espaço de fase dos elementos orbitais, ou seja, grupos de asteroide que apresentam elementos orbitais próximos (Zappalà et al., 2002), que devem ter surgido de eventos colisionais gerando fragmentos em órbitas próximas, denomina-se famílias de asteroides.

Contudo, observações apresentaram discrepâncias com as previsões dadas pelo Modelo Conservativo (Gladman et al., 1997). Isso motivou a busca por processos não-conservativos que estejam alterando a dinâmica dos asteroides. Uma dessas previsões é de que corpos que entraram em ressonâncias caóticas sofreriam uma baixa exposição aos raios cósmicos, o que não é observado em meteoritos (Bottke et al., 2002). Os possíveis processos não-conservativos que influenciam os pequenos corpos serão citados na próxima secção.

1.3 Efeitos não gravitacionais

Pela impossibilidade de descrever a evolução dos corpos somente considerando efeitos conservativos, adicionam-se ao modelo evolutivo efeitos não gravitacionais. Podemos citar quatro tipos de efeitos não-conservativos conhecidos na dinâmica do Sistema Solar:

1.3.1 Pressão de Radiação

Atuante em corpos da ordem de micrômetros, a radiação solar provoca uma força repulsiva, \vec{F}_{rad} , dada pela equação:

$$\vec{F}_{rad} \approx \frac{L_{\odot} A}{4\pi cr_{\odot}^2} Q_{pr} \hat{r}, \quad (1.1)$$

onde A é a secção de área da luz incidente, L_{\odot} é a luminosidade do Sol, r_{\odot} é a distância heliocêntrica, c é a velocidade da luz e Q_{pr} é o coeficiente de pressão da radiação. Q_{pr} nos diz quanto da luz incidida está contribuindo para a pressão, levando em consideração a reflexão e o espalhamento.

Podemos definir um coeficiente de proporcionalidade entre a força de radiação e a força gravitacional dado por:

$$\beta \equiv \left| \frac{F_{rad}}{F_{grav}} \right| = 5.7 \times 10^{-5} \frac{Q_{pr}}{\rho R}, \quad (1.2)$$

onde ρ é a densidade e R é o raio do corpo no sistema c.g.s.. Este coeficiente independe da distância heliocêntrica, sendo função apenas da radiação que chega ao corpo e do tamanho do mesmo, como visto na figura 1.2.

1.3.2 Efeito Poynting-Robertson

Atuante em corpos da ordem de centímetros. O efeito Poynting-Robertson pode ser compreendido por dois modos, dependendo do referencial utilizado: pela perspectiva do corpo orbitando o Sol, ou pela perspectiva do Sol. Quando colocamos o referencial no corpo, a luz incidente chega de uma direção ligeiramente para a frente do corpo, considerando a direção de movimento dele, efeito que denominamos aberração da luz. A absorção desta luz incidente, gera uma força na direção contrária ao movimento. Do ponto de vista de um referencial no Sol, a radiação chega no corpo na direção radial, e o seu momento angular fica inalterado. Porém, conforme a relação massa-energia, os fótons desta luz incidente acrescentam massa, e para que haja conservação do momento angular, a órbita do corpo é alterada, diminuindo seu raio. A

consequência é um arrasto do corpo em direção ao Sol. A força de radiação deste efeito é dada por:

$$\vec{F}_{rad} \approx \frac{L_{\odot} Q_{pr} A}{4\pi cr_{\odot}^2} \left[\left(1 - \frac{2v_r}{c} \hat{r} \right) - \frac{v_{\theta}}{c} \hat{\theta} \right], \quad (1.3)$$

onde v_{θ} e v_r são as componentes da velocidade do corpo no sistema de referência polar. Podemos definir um tempo de decaimento associado para que a partícula caia em direção ao Sol. Este decaimento em anos é dado pela equação 1.4, exprimindo a distância em unidades astronômicas (UA).

$$\tau_{PR} \approx 400 \frac{r_{UA}^2}{\beta} \quad (1.4)$$

Onde podemos também definir o coeficiente $\beta \equiv |F_{rad}/F_{grav}|$. Um exemplo observado deste fenômeno são os grãos que geram o efeito da Luz Zodiacal. Estes possuem tamanhos entre 20 e 200 μm e possuem um tempo de decaimento de 10^5 anos. Acredita-se que a fonte principal desses grãos sejam as colisões entre os asteroides no Cinturão Principal.

1.3.3 Efeito Yarkovsky

Atua em corpos da ordem de metros a quilômetros. Inicialmente proposto por Ivan Osipovich Yarkovsky (1844-1902), sugerindo que o aquecimento de um corpo durante o dia, rotacionando no espaço, geraria uma força, mesmo sendo fraca, que provocaria grandes efeitos seculares em pequenos corpos (Öpik, 1951).

O efeito pode ser dividido em duas componentes: diurno e sazonal (Farinella et al., 1998). Consideremos que o corpo esteja revolucionando em torno do Sol e seu eixo de rotação seja normal ao plano deste movimento, como na figura 1.3(a). Desta maneira, a radiação incidida em um tempo t_o será re-emitada em um outro momento $t_o + \Delta t$ em que o corpo já rotacionou, não necessariamente chegando à mesma configuração inicial. Com isto a radiação será re-emitada em uma direção diferente da incidente, gerando uma força dissipativa. Esta situação é o máximo do que denominamos Efeito Diurno (ou Componente Diurno).

Por outro assumindo que o eixo de rotação seja paralelo ao plano da órbita do corpo (figura 1.3(b)), em cada posição de sua revolução, algum hemisfério terá maior incidência de luz do que outro. Da mesma forma, num instante posterior, esta radiação será re-emitada em uma outra direção gerando uma força. Esta configuração é o máximo do efeito denominado Efeito Sazonal (ou Componente Sazonal).

A força não-conservativa é uma função da velocidade de rotação do corpo, de seus elementos orbitais e das propriedades físicas do mesmo. Atribui-se a ela: (1) o movimento de asteróides com diâmetro $D < 20\text{Km}$ para zonas de ressonância caóticas no Cinturão Principal; (2) dispersão de famílias de asteroides, deslocando seus membros também para ressonâncias seculares; (3) a alteração da velocidade de rotação de asteroides pequenos, da ordem de poucos quilômetros (Bottke et al., 2006). Apresentaremos a modelagem matemática no Efeito Yarkovsky no capítulo 2.

O efeito diurno e o efeito sazonal ocorrem simultaneamente no corpo, porém a componente diurna a re-emissão é local, enquanto na componente sazonal a re-emissão depende do hemisfério iluminado. Uma boa analogia pode ser feita tomando como exemplo o planeta Terra. A hora com maior incidência de luz durante o dia são as 12h, mas a hora mais quente é às 13h. Isto nos diz que leva 1h para que a radiação absorvida seja re-emitada pelo planeta, correspondente ao Efeito Diurno. Para ilustrar o Efeito Sazonal, consideremos as estações do ano. A época com maior incidência de luz é dezembro, durante o solstício de verão no hemisfério sul. Contudo, o período compreendido entre o final de janeiro e início de fevereiro é a época mais quente. Porém, como a Terra é muito grande e possui atmosfera ², o Efeito Yarkovsky é irrelevante para sua dinâmica.

1.3.4 Efeito YORP

O efeito YORP, ou efeito Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack, é um efeito de reflexão e reemissão da radiação solar por um corpo, da ordem de metros à quilômetros, que possui uma superfície irregular também produz um torque não-gravitacional (Rubincam and Bottke, 2000; Bottke et al., 2006). Esse torque pode alterar o eixo de rotação e a obliquidade, e causa mudanças na magnitude e direção do Efeito Yarkovsky, como a taxa de variação do semi-eixo no tempo que depende diretamente dos parâmetros de rotação. Podemos compreendê-lo visualizando uma esfera que possua em dois pontos irregularidades, como na figura 1.4. Quando a radiação é refletida nessas irregularidades, ocorre um torque adicional.

Sendo $d\vec{f}$ o elemento de força aplicado no elemento de superfície $d\vec{S} = \vec{n}_\perp dS$, produzido pela reflexão e reemissão da radiação absorvida. Integrando em toda superfície S , podemos obter o torque resultante:

$$\vec{T} = \int \vec{r} \times d\vec{f}, \quad (1.5)$$

²A atmosfera altera a razão de radiação emitida pela incidida. Logo, o Efeito Yarkovsky é relevante somente em corpos sem atmosfera.

onde \vec{r} é o vetor posição do elemento de superfície dS . Na prática, modelamos a superfície irregular como um poliedro de N-faces. Cada face terá um torque associado e o torque resultante será a soma de todos os torques.

Sendo C o momento de inércia do corpo e supondo constante, e sendo \vec{e} o vetor unitário do eixo de rotação, podemos calcular a variação da velocidade angular e a variação da direção de rotação pelo efeito YORP usando:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\vec{T} \cdot \vec{e}}{C} \quad (1.6)$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{\vec{T} - (\vec{T} \cdot \vec{e})\vec{e}}{C\omega} \quad (1.7)$$

1.4 Objetivo do Projeto

Atualmente, a modelagem teórica e computacional do Efeito Yarkovsky em famílias de asteróides assume que os membros de uma mesma família possuem características físicas semelhantes, ou seja, homogeneidade do corpo progenitor. Mas o que acontece se o corpo primordial não for homogêneo? No caso de um corpo parental diferenciado, podemos pensar que algumas famílias de asteroides seriam formadas por núcleo, manto e crosta do mesmo, possivelmente sujeitos à ação do Efeito Yarkovsky de modo diferente uns dos outros de acordo com a composição ou as propriedades físicas.

Para modelar a heterogeneidade em famílias de asteroides, é necessário modificar as equações do efeito, exprimindo-as em função de características físicas dos corpos, como o albedo, a densidade e a inércia térmica, e analisar como a dispersão em semi-eixo ocorre conforme modificamos estas características. As modificações teóricas no modelo, a análise decorrente, e os resultados obtidos, serão expostos no capítulo 3. As implicações serão apresentadas no capítulo 4.

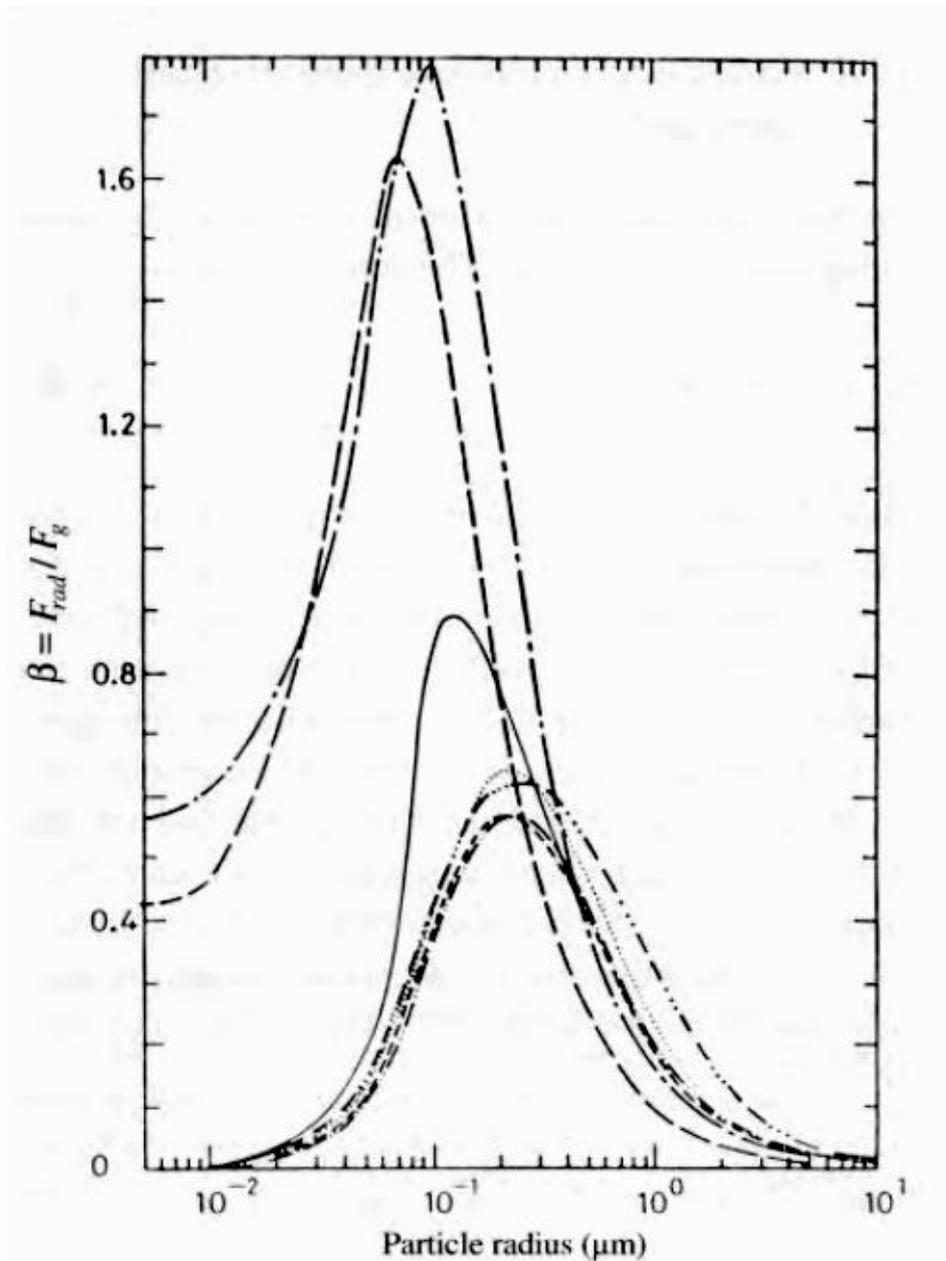


Figura 1.2: Corpos na ordem de micrômetros possuem o parâmetro β maior do que 1. Logo, a força de radiação torna-se maior que a gravitacional, empurrando o corpo para longe do Sol. As diversas curvas apresentam diferentes tipos de materiais constituintes: - - ... - - gelo até 100K; basalto; - - - quartzo amorfo; - - - ferro; - . . . magnetita; e a linha contínua é o material ideal, $\rho = 3 \text{ g/cm}^3$ (De Parker, 2001).

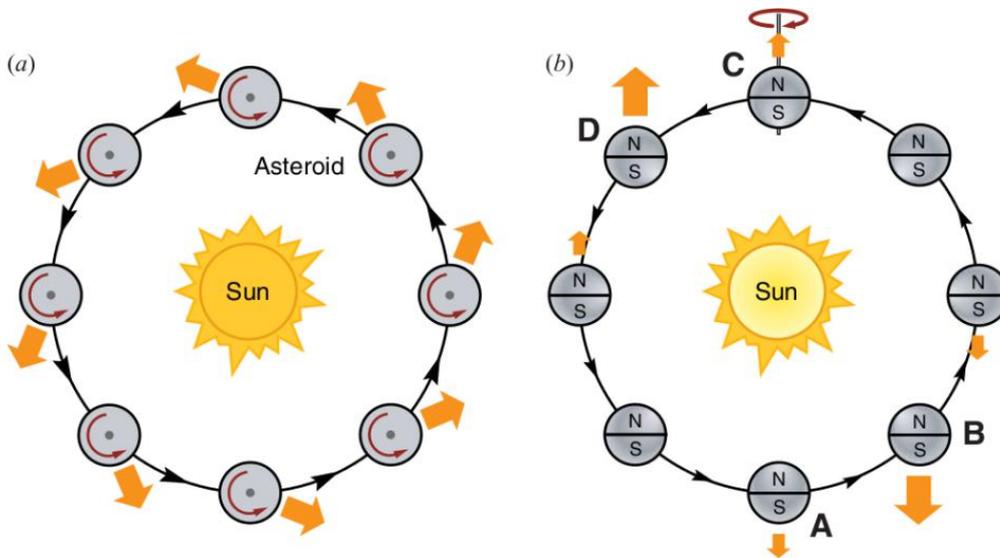


Figura 1.3: Representação dos componentes do Efeito Yarkovsky ((Bottke et al., 2002))

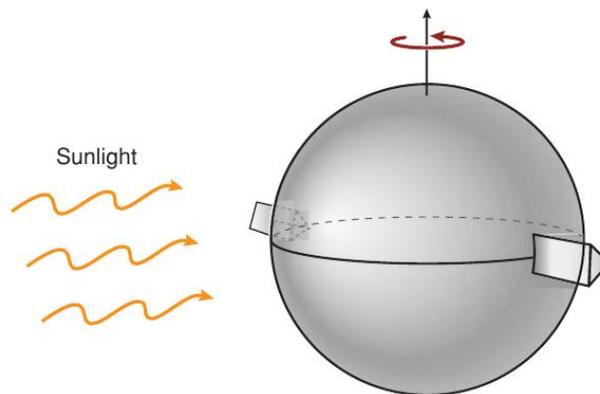


Figura 1.4: O Efeito YORP:

Capítulo 2

O Efeito Yarkovsky: literatura e modelo linear

2.1 Histórico

As primeiras estimativas das grandezas envolvidas no Efeito Yarkovsky foram feitas por Öpik (1951). Neste trabalho, Öpik cita um trabalho feito por Ivan Osipovich Yarkovsky, no início do século 20, denominando o efeito descrito de Efeito Yarkovsky.

No ano seguinte, Radzievskii (1952) propõe um tratamento matemático detalhado para efeitos térmicos em uma esfera. Este trabalho foi pioneiro em abordar um modelo teórico para efeitos térmicos. Porém, possuía duas suposições que não condiziam com a realidade: a primeira, de que o eixo de rotação do corpo seria normal ao plano de sua órbita; a segunda, de que o corpo era suficientemente grande para ignorar onda de penetração térmica.

Posteriormente, Peterson (1976) faz uma análise detalhada da solução da equação do calor de segunda ordem para um cilindro, estimando a seguir o efeito para corpos esféricos, descrevendo um método de conversão dos resultados do cilindro para o caso esférico. Seus resultados estariam corretos para corpos grandes, enquanto que para corpos pequenos, era preciso seguir argumentos qualitativos de Öpik (1951). Aplicações diretas deste trabalho ocorreram no estudo de meteoritos, apresentando a importância dos efeitos não-conservativos na dinâmica dos pequenos corpos ao longo do tempo (Bottke et al., 2006).

Durante a década de 1980, uma motivação para a generalização do Efeito Yarkovsky foi a investigação do satélite artificial LAGEOS cuja órbita é perturbada por efeitos similares aos dos pequenos corpos, como descrito em Rubincam (1987). A razão do interesse em LAGEOS é devida a sua rotação ser

muito rápida, o que possibilitou a cálculo do efeito para corpos com períodos curtos.

Em Afonso (1994) desenvolvem um modelo teórico para o Efeito Yarkovsky, e comprovam que a maioria dos meteoritos encontrados na superfície da Terra, chegaram por uma combinação de efeitos dissipativos com ressonâncias com Júpiter. Contudo, sua formulação estava incompleta.

Em Rubincam (1995) aparece pela primeira vez a discussão da existência de duas componentes para o efeito. Nesse trabalho, o modelo desenvolvido graças a análise do satélite LAGEOS, possibilitou ser aplicado no estudo de fragmentos de asteroides e da eventual queda para a região dos planetas interiores.

Em seguida, Farinella et al. (1998) refaz a análise entre corpos grandes e pequenos, estudando também a situação de corpos de rotação rápida e rotação lenta. Devido a variedade de efeitos térmicos encontrada em corpos grandes, uma nova classificação foi proposta, confirmando a existência de duas componentes para o efeito, denominando-as diurno e sazonal. Neste trabalho foi demonstrada ainda a importância do efeito diurno para fragmentos de asteroides de ferro, especialmente na aplicação a meteoritos. Os fragmentos considerados possuem em torno de 10 à 100 metros de diâmetro e estão na vizinhança da Terra. Esta análise foi feita baseada em Peterson (1976), não desenvolvendo um modelo mais acurado para a força térmica resultante.

Em Vokrouhlický (1998a) e Vokrouhlický (1998b) foi desenvolvido um modelo teórico para a situação linear e não-linear, respectivamente, do Efeito Yarkovsky. Na teoria linear é assumido que o corpo é esférico e que possui órbita circular, ou de baixa excentricidade, possibilitando a obtenção de soluções analíticas para a equação do calor encontrando a força gerada pelo efeito tanto na componente diurna quanto na sazonal. Na teoria não-linear, as suposições anteriores para o caso linear não são admitidas, logo, corpos elipsoidais, com órbitas excêntricas são admitidos, tornando-o extremamente complexo e sem solução analítica. Neste caso, soluções numéricas aproximadas, dadas por integradores dinâmicos, são geradas. Para simplificar, podemos supor situações que possam negligenciar da velocidade angular orbital, porém, estas suposições devem ser tomadas caso a caso, dependendo do asteroide que queira ser analisado. A base deste trabalho é o modelo linear, o qual será descrito na próxima secção.

Bottke et al. (2002) discutem o modelo conservativo e suas falhas, além de apresentarem o modelo de Vokrouhlický (1998a), iniciando um debate sobre o efeito em famílias de asteroides, além de sua aplicação ao estudo de meteoritos.

Aplicações do Efeito Yarkovsky podem ser encontrados em diversos trabalhos publicados na última década, alguns analisando o efeito em famílias

de asteroides. Em Vokrouhlický et al. (2001) discute-se a família de Koronis simulando no integrador numérico swift a evolução de seus membros e o eventual deslocamento para regiões de ressonância com os planetas gasosos. Em Vokrouhlický et al. (2006a), o estudo teórico e de simulações é levado a diversas famílias, dentre elas: Erigone, Massalia, Merxia e Astrid. No mesmo ano, em Vokrouhlický et al. (2006b), um estudo mais aprofundado, usando as técnicas utilizadas no artigo anterior, foi feito para a família de Eos. Em Vokrouhlický et al. (2008) foi mostrada a detecção, usando astrometria, da variação do semi-eixo no tempo devido ao Efeito Yarkovsky no asteroide 1992BF (ou 152563) e medido seu valor a partir das novas efemérides. Este caso é utilizado no próximo capítulo para confirmar que as mudanças geradas no modelo prevêm valores obtidos observacionalmente. Conforme mencionado anteriormente, todos esses estudos foram feitos supondo homogeneidade no corpo progenitor.

2.2 Modelo Linear

2.2.1 Conceitos Matemáticos

Durante o desenvolvimento do modelo linear, diversos métodos de física-matemática foram usados. Alguns deles são o método de solução de equações diferenciais por separação de variáveis, expansão em harmônicos esféricos e funções de Bessel (Arfken and Weber, 2007).

2.2.2 Teoria

Este modelo é apresentado em Vokrouhlický (1998a), supondo um corpo esférico. A condução do calor num meio sólido é descrita pela equação parabólica de Fourier, também denominada equação de Landau:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T, \quad (2.1)$$

sendo T a temperatura, K a condutividade térmica, C a capacidade térmica e ρ a densidade do corpo. Fisicamente, $C = C(T)$, $K = K(T)$ e $\rho = \rho(T)$. Contudo, consideraremos que C , K e ρ são quantidades médias e seus respectivos incrementos podem ser negligenciados.

O problema a tratar é o da determinação da distribuição térmica ΔT no corpo e a eventual força associada a esta distribuição, dadas as condições de contorno:

- a temperatura T é regular dentro do corpo;

- as condições da radiação na superfície devem ser satisfeitas.

As condições de temperatura na superfície são dadas pela lei da conservação da energia:

$$\epsilon\sigma T^4 + K\left(\vec{n} \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{r}}\right) = \alpha\mathcal{E}, \quad (2.2)$$

onde ϵ é a emissividade, σ é a constante de Stefan-Boltzmann, α é a absorvidade e \mathcal{E} é o fluxo externo de radiação. O primeiro termo à esquerda representa a energia térmica re-emitada pelo corpo (lei de Lambert) e o segundo termo descreve a energia conduzida para o interior. O termo à direita está relacionado à energia da radiação que chega por unidade de área, por unidade de tempo.

Suposições e Simplificações

A solução da equação 2.1 com a condição de contorno dada por 2.2 é complicada devido ao termo T^4 . Para simplificar, suponhamos que a temperatura não varie muito de um valor médio ($\Delta T \ll T_{medio}$).

$$T = T_{medio} + \Delta T \quad (2.3)$$

Expandindo T^4 em termos de T_{medio} e de ΔT , e também negligenciando termos de ordem $(\Delta T)^2$ e superior, temos:

$$T^4 \approx T_{medio}^4 + 4T_{medio}^3\Delta T + \mathcal{O}((\Delta T)^2) \quad (2.4)$$

Suponhamos um sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) e o tempo t . A origem $r = 0$ estará no centro do corpo, θ é o ângulo medido a partir do eixo de rotação, ϕ o ângulo no equador e t o tempo. Para maior simplificação utilizemos variáveis adimensionais $(r', \theta, \phi, \zeta)$, da seguinte forma:

- $r \rightarrow r'$: dividimos a coordenada radial pelo comprimento de onda térmica ($l_s = \sqrt{\frac{K}{\rho C \omega}}$) que penetra no corpo:

$$r' \equiv \frac{r}{l_s} \quad (2.5)$$

onde ω é a velocidade angular do objeto. O raio do objeto torna-se:

$$R' \equiv \frac{R}{l_s} \quad (2.6)$$

- $t \rightarrow \zeta$: o tempo t será posto dentro da variável complexa¹:

$$\zeta = \exp(i\omega t) \quad (2.7)$$

Adicionalmente, tornamos a temperatura T adimensional fazendo $T \rightarrow T'$ da seguinte forma:

$$T' \equiv \frac{T}{T_\star}, \quad (2.8)$$

$$\Delta T' = \frac{\Delta T}{T_\star}, \quad (2.9)$$

onde T_\star é a temperatura dada pelo fluxo de radiação \mathcal{E}_\star , denominada temperatura do ponto sub-solar, na posição do corpo:

$$\epsilon\sigma T_\star^4 = \alpha\mathcal{E}_\star \quad (2.10)$$

Incluindo nas equações o parâmetro térmico Θ , definido por:

$$\Theta = \frac{\Gamma\sqrt{\omega}}{\epsilon\sigma T_\star^3}, \quad (2.11)$$

reduzimos a quantidade de termos nesta equação. Γ representa a inércia térmica, dada por $\Gamma = \sqrt{\rho C K}$.

Equação de Landau para o problema

Com este novo conjunto de variáveis $(r', \theta, \phi, \zeta)$ a equação 2.1 torna-se:

$$i\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\Delta T' \right] = \frac{1}{r'^2} \left[\frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial}{\partial r'} \right) + \Lambda(\theta, \phi) \right] \Delta T', \quad (2.12)$$

onde o operador das variáveis angulares $\Lambda(\theta, \phi)$ é definido como:

$$\Lambda(\theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (2.13)$$

Aplicando o novo conjunto de variáveis $(r', \theta, \phi, \zeta)$ também à equação 2.2, temos:

$$\sqrt{2}\Delta T' + \Theta \left(\frac{\partial}{\partial r'} \Delta T' \right) = \Delta \mathcal{E}', \quad (2.14)$$

onde $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_{\text{medio}} + \Delta \mathcal{E}'$, proveniente da equação $\epsilon\sigma T_{\text{medio}}^4 = \alpha\mathcal{E}_{\text{medio}}$.

¹Lembrando que $i \equiv \sqrt{-1}$.

Termo da radiação

Na figura 2.1, podemos observar os eixos do sistema de referência (x, y, z) , centrado no corpo. Neste sistema, o eixo de rotação \vec{s} , é alinhado com o eixo- z .

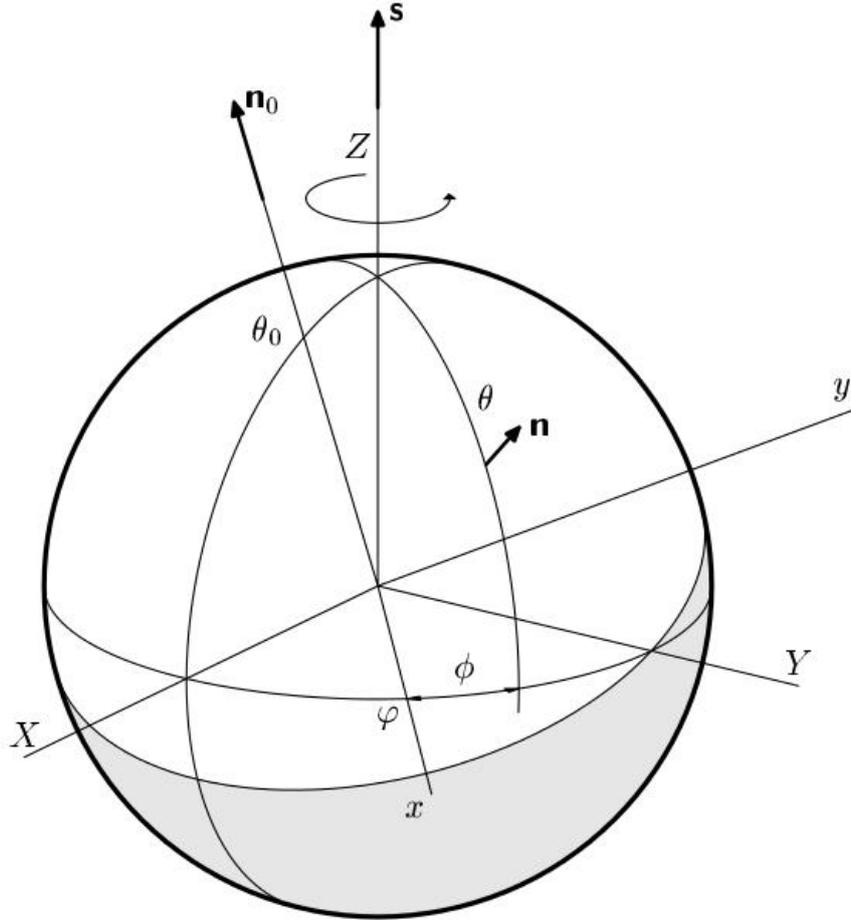


Figura 2.1: Sistema de referência e coordenadas usadas na teoria

Supondo que em $t = 0$ o Sol está no plano- xy e que o vetor \vec{n}_0 identifica a posição do Sol:

$$\vec{n}_0 = \left(\frac{1}{2}\zeta \sin \theta_0, \frac{i}{2}\zeta \sin \theta_0, \cos \theta_0 \right)^T + C.C., \quad (2.15)$$

onde $C.C.$ é o complexo conjugado do primeiro termo e θ_0 é a direção angular do Sol, com respeito ao eixo- z . É importante notar a variabilidade

no tempo do vetor \vec{n}_0 . No efeito diurno, θ_0 é constante o que implica numa resposta térmica local, enquanto no efeito sazonal, θ_0 não é constante porém é usual utilizar uma média sobre o tempo. Idealmente deveria-se assumir θ_0 dependente do tempo.

Sendo o vetor unitário normal ao elemento de superfície:

$$\vec{n}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T \quad (2.16)$$

Temos que:

$$\mathcal{E}' = \vec{n}(\theta, \phi) \cdot \vec{n}_0(\theta_0, \zeta), \quad (2.17)$$

quando $(\vec{n} \cdot \vec{n}_0) > 0$. Em qualquer outro caso, $\mathcal{E}' = 0$. Expandindo 2.17 em harmônicos esféricos:

$$\mathcal{E}' = \vec{n} \cdot \vec{n}_0 = \sum_{p \geq 0} \sum_{q=-p}^p a_{pq}(\theta_0, \zeta) Y_{pq}(\theta, \phi) \quad (2.18)$$

Apenas os casos de monopolo, $q = 0$, e dipolo, $p = 1$, são relevantes. Assumindo $a_{pq}(\theta_0, \zeta) = b_{pq}(\theta_0)\zeta^q$, os coeficientes são:

$$a_{00} = b_{00} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (2.19)$$

$$b_{10}(\theta_0) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \cos \theta_0, \quad (2.20)$$

$$b_{1\pm 1}(\theta_0) = \mp \sqrt{\frac{\pi}{6}} \cos \theta_0, \quad (2.21)$$

onde 2.19 é para o termo de monopolo enquanto 2.20 e 2.21 são os coeficientes do dipolo.

Desta forma, $Y_{00} = 1/(2\sqrt{\pi})$. Rubincam (1995) observa que o termo de monopolo representa exatamente a média de irradiação do corpo, pois obtém-se que $T'_{medio} = T_{medio}/T_{\star} = 1/\sqrt{2}$. Assim, os termos importantes para $\Delta\mathcal{E}'$ devem provir do termo de dipolo.

Solução regular

Suponhamos que a equação 2.12 tenha solução dada por:

$$\Delta T'(r', \theta, \phi, \zeta) = \sum_{p \geq 1} \sum_{q=-p}^p t'_{pq}(r', \zeta) Y_{pq}(\theta, \phi) \quad (2.22)$$

Aplicando a propriedade da expansão em harmônicos esféricos, $t'_{pq}(r', \zeta) = \tau'_{pq}(r')\zeta^q$, a parte radial da equação 2.12 torna-se:

$$\left\{ \frac{d}{dr'} \left(r'^2 \frac{d}{dr'} \right) - [p(p+1) + iqr'^2] \right\} \tau'_{pq}(r') = 0 \quad (2.23)$$

A solução geral, quando a distribuição de temperatura é regular dentro do corpo, é:

$$\Delta T'(r', \theta, \phi, \zeta) = \sum_{p \geq 1} \sum_{q=-p}^p t'_{pq}(r', \zeta) Y_{pq}(\theta, \phi), \quad q = 0, \quad (2.24)$$

e

$$\tau'_{pq}(r') = c_{pq} j_p(\sqrt{-iqr'}), \quad q \neq 0, \quad (2.25)$$

onde $j_p(z)$ são as funções de Bessel esféricas de ordem p com argumento complexo z . Substituindo 2.24 e 2.25 em 2.14, encontramos os coeficientes da expansão c_p e c_{pq} :

$$c_p = \frac{b_{p0}}{\sqrt{2}R^p} \frac{1}{1 + p\lambda} \quad (2.26)$$

$$c_{pq} = \frac{b_{pq}}{\sqrt{2}j_p(\sqrt{-iqR'})} \frac{1}{\left[1 + \lambda \frac{z}{j_p(z)} \frac{d}{dz} j_p(z) \right]_{z=\sqrt{-iqR'}}}, \quad (2.27)$$

onde $\lambda \equiv \Theta/\sqrt{2}R'$. Para simplificar, vamos definir a função $\psi(z)$:

$$1 + \psi(z) = \frac{z}{j_1(z)} \frac{d}{dz} j_1(z) \quad (2.28)$$

Solução linear

Adicionando os termos vistos anteriormente às equações 2.19, 2.20, 2.21, 2.26 e 2.27, a solução regular torna-se:

$$\Delta T'(R', \theta, \phi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\lambda)} \left[b_{10}(\theta_0) Y_{10}(\theta, \phi) + \frac{b_{11}(\theta_0)\zeta}{1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\psi(\sqrt{-iR'})} Y_{11}(\theta, \phi) + C.C. + \dots \right] \quad (2.29)$$

Consideremos um novo sistema de referências onde eixo- X na direção do Sol e o eixo- Z na direção \vec{s} , como ilustrado na figura 2.1. Utilizando coordenadas esféricas (r', ϑ, φ) neste novo referencial, definidas pelas transformações:

$$\vartheta = \theta, \quad (2.30)$$

$$\varphi = \phi + \omega t, \quad (2.31)$$

e supondo o Sol sempre na mesma direção, a solução 2.29 torna-se independente do tempo:

$$\Delta T'(R', \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\lambda)} \left[b_{10}(\theta_0) Y_{10}(\vartheta, \varphi) + \frac{b_{11}(\theta_0)}{1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} \psi(\sqrt{-i}R')} Y_{11}(\vartheta, \varphi) + C.C. + \dots \right], \quad (2.32)$$

O fato da solução 2.32 ficar independente do tempo demonstra que num sistema orientado para a fonte de radiação, a temperatura na superfície deve ser estacionária.

Simplificando um pouco mais

Vokrouhlický (1998a) cria funções auxiliares $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, e $D(x)$ para calcular as forças térmicas advindas de 2.32, onde:

$$A(x) = -(x+2) - e^x[(x-2)\cos x - x\sin x], \quad (2.33)$$

$$B(x) = -x - e^x[x\cos x + (x-2)\sin x], \quad (2.34)$$

$$C(x) = A(x) + \frac{\lambda}{1+\lambda} \{3(x+2) + e^x[3(x-2)\cos x + x(x-3)\sin x]\}, \quad (2.35)$$

e

$$D(x) = B(x) + \frac{\lambda}{1+\lambda} \{x(x+3) - e^x[x(x-3)\cos x + 3(x-2)\sin x]\}. \quad (2.36)$$

A ideia é escrever $1/[1 + (\lambda/(1+\lambda))\psi(z)]$ como uma divisão de dois números complexos, $A(x) + iB(x)$ e $C(x) + iD(x)$, separando termos reais e imaginários, simplificando o cálculo das densidades de força. Assim:

$$\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} \psi(z)} = \frac{A(x) + iB(x)}{C(x) + iD(x)} = E(x) \exp i\delta(x), \quad (2.37)$$

com $z = \sqrt{-i}R'$ e $x = \sqrt{2}R'$.

Força Térmica

Assumindo uma emissão térmica isotrópica de Lambert, a força por unidade de massa do corpo, projetada no sistema (X, Y, Z) , é dada por:

$$f_X + if_Y = -\frac{4\alpha}{9} \Phi \frac{\sin \theta_0}{1 + \lambda} E_{R'} \exp(-i\delta_{R'}) \quad (2.38)$$

$$f_Z = -\frac{4\alpha}{9} \Phi \frac{\cos \theta_0}{1 + \lambda}, \quad (2.39)$$

onde $E_{R'} \equiv E(\sqrt{2}R')$ e $\delta_{R'} = \delta(\sqrt{2}R')$. O fator $\Phi \equiv (\pi R^2 \mathcal{E}_*/mc)$, sendo m a massa do corpo e c a velocidade da luz, é o parâmetro usual de pressão da radiação em corpos esféricos (Burns et al., 1979).

Peterson (1976) descreve empiricamente as densidades de força no plano (f_X, f_Y) usando a aproximação de Padé (Adukov V. and L, 2011):

$$\frac{E \cos \delta}{1 + \lambda} = \frac{1 + \kappa_1 \Theta}{1 + 2\kappa_1 \Theta + \kappa_2 \Theta^2}, \quad (2.40)$$

obtendo os coeficientes para corpos grandes ($R' \approx \infty$). Podemos perceber que 2.38 é uma função racional em λ e conseqüentemente do parâmetro térmico Θ . Reescreve-se então as densidades de força como:

$$f_X = -\frac{4\alpha}{9} \Phi \sin \theta_0 \frac{1 + \kappa_1 \Theta}{1 + 2\kappa_1 \Theta + \kappa_2 \Theta^2} \quad (2.41)$$

$$f_Y = -\frac{4\alpha}{9} \Phi \sin \theta_0 \frac{\kappa_3 \Theta}{1 + 2\kappa_1 \Theta + \kappa_2 \Theta^2} \quad (2.42)$$

Sendo os coeficientes κ_1 , κ_2 e κ_3 funções de R' . O comportamento desses coeficientes pode ser visto na figura 2.2, e foi utilizado por Vockrouhlkỳ para extrapolar e comprovar os resultados de Peterson. Esses coeficientes são reescritos, neste projeto, de forma a torna-se computacionalmente viáveis no próximo capítulo.

Desta forma, as densidades de força tornam-se diretamente proporcionais ao parâmetro térmico, onde os coeficientes κ_1 , κ_2 e κ_3 são os pesos de Θ .

Varição do Semi-eixo maior devido ao Efeito Yarkovsky

Após calcular as componentes das forças, podemos escrever a variação dos elementos orbitais devido as forças térmicas. Para ordem zero de excentricidade, temos que:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{8\alpha}{9} \frac{\Phi}{n} \frac{E_{R'} \sin \delta_{R'}}{1 + \lambda} \cos \gamma + \mathcal{O}(e), \quad (2.43)$$

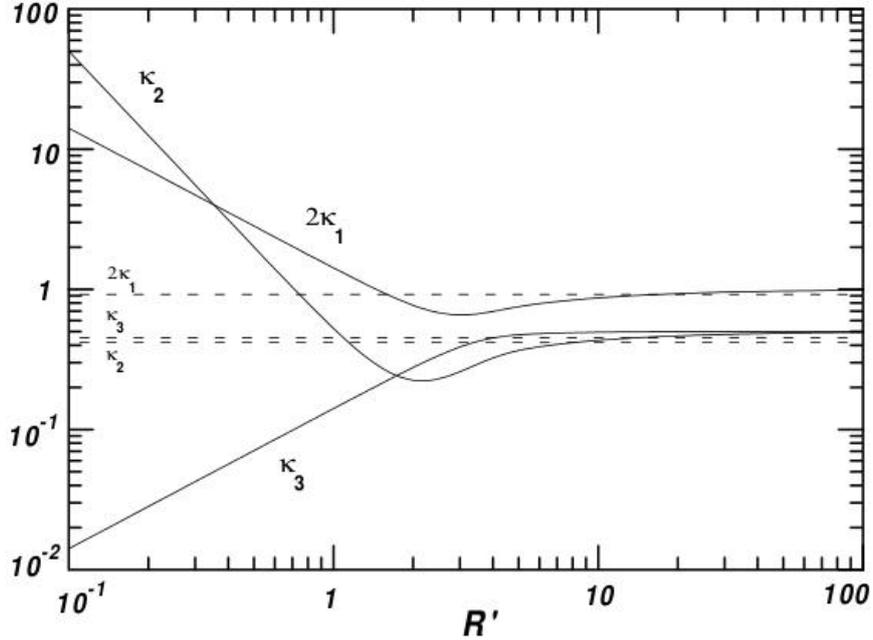


Figura 2.2: Coeficientes κ_1 , κ_2 e κ_3

onde n é o movimento médio e γ a obliquidade.

Os valores médios para os casos diurno e sazonal da equação 2.43 podem ser encontrados em Bottke et al. (2006). Teremos assim:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{diurno} = -\frac{8\alpha\Phi}{9n}F_\omega(R', \Theta) \cos \gamma + \mathcal{O}(e) \quad (2.44)$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{sazonal} = -\frac{8\alpha\Phi}{9n}F_n(R', \Theta) \sin^2 \gamma + \mathcal{O}(e) \quad (2.45)$$

Sendo a função $F_\nu(R', \Theta)$ dada por:

$$F_\nu(R', \Theta) = -\frac{\kappa_1(R')\Theta_\nu}{1 + 2\kappa_2(R')\Theta_\nu + \kappa_3(R')\Theta_\nu^2}, \quad (2.46)$$

onde $\nu = \omega$ no efeito diurno e $\nu = n$ no efeito sazonal. O parâmetro térmico é redefinido como $\Theta_\nu = \sqrt{K\rho C\nu}/(\epsilon\sigma T_\star^3)$.

Calculando a variação do semi-eixo maior no tempo pelas equações 2.44 e 2.45, encontramos o conjunto de substituições suficientes para torná-las dependentes das características físicas (albedo, densidade e inércia térmica).

Capítulo 3

Mudando variáveis: novos resultados

3.1 Funções κ

As funções κ são os coeficientes da aproximação de Padé aplicados às equações 2.41 e 2.42. Queremos nesta seção encontrar uma fórmula explícita para esses coeficientes em função do raio do corpo.

Seja

$$\exp(-i\delta_{R'}) = \cos \delta_{R'} - i \sin \delta_{R'}. \quad (3.1)$$

Aplicando 3.1 na equação 2.38, que define a densidade de força devida ao Efeito Yarkovsky no plano XY, podemos separá-la em suas componentes f_X e f_Y :

$$f_X = -\frac{4\alpha}{9} \phi \sin \theta_0 \left(\frac{E_{R'} \cos \delta_{R'}}{1 + \lambda} \right), \quad (3.2)$$

e

$$f_Y = -\frac{4\alpha}{9} \phi \sin \theta_0 \left(\frac{-E_{R'} \sin \delta_{R'}}{1 + \lambda} \right). \quad (3.3)$$

Pela igualdade 2.37, temos que¹:

$$\left(\frac{A + iB}{C + iD} \right) \left(\frac{C - iD}{C - iD} \right) = \frac{(AC + BD) + i(BC - AD)}{C^2 + D^2} \quad (3.4)$$

Separando a parte real da imaginária temos:

¹Para simplificar notação, farei $A(x) = A; B(x) = B; C(x) = C$ e $D(x) = D$

$$E \cos \delta = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2}, \quad (3.5)$$

e

$$-E \sin \delta = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}. \quad (3.6)$$

Definindo:

$$M(x) \equiv 3(x + 2) + e^x[3(x - 2) \cos x + x(x - 3) \sin x], \quad (3.7)$$

$$N(x) \equiv x(x + 3) + e^x[x(x - 3) \cos x - 3(x - 2) \sin x], \quad (3.8)$$

e

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \quad (3.9)$$

temos que:

$$\begin{aligned} AC + BD &= A(A + f(\lambda)M) + B(B + f(\lambda)N) \\ &= (A^2 + B^2) + f(\lambda)(AM + BN), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} BC - AD &= B(A + f(\lambda)M) - A(B + f(\lambda)N) \\ &= f(\lambda)(BM - AN), \end{aligned} \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} C^2 + D^2 &= (A + f(\lambda)M)^2 + (B + f(\lambda)N)^2 \\ &= (A^2 + B^2) + 2f(\lambda)(AM + BN) + [f(\lambda)]^2(M^2 + N^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

E assim:

$$\frac{E \cos \delta}{1 + \lambda} = \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right) \frac{AC + BD}{C^2 + D^2}, \quad (3.13)$$

e

$$\frac{-E \sin \delta}{1 + \lambda} = \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right) \frac{AD - BC}{C^2 + D^2}. \quad (3.14)$$

Da equação 3.13 tiramos que:

$$\frac{E \cos \delta}{1 + \lambda} = \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right) \frac{1}{A^2 + B^2} \left[\frac{(A^2 + B^2) + f(\lambda)(AM + BN)}{1 + 2f(\lambda) \frac{AM + BN}{A^2 + B^2} + [f(\lambda)]^2 \frac{M^2 + N^2}{A^2 + B^2}} \right] \quad (3.15)$$

Definindo:

$$\chi \equiv 1 + 2f(\lambda) \frac{AM + BN}{A^2 + B^2} + [f(\lambda)]^2 \frac{M^2 + N^2}{A^2 + B^2}, \quad (3.16)$$

$$\vartheta \equiv \frac{M^2 + N^2}{A^2 + B^2}, \quad (3.17)$$

$$\xi \equiv \frac{AM + BN}{A^2 + B^2}, \quad (3.18)$$

temos:

$$\frac{E \cos \delta}{1 + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda} \left(\frac{1 + f(\lambda)\xi}{\chi} \right) \quad (3.19)$$

Queremos a equação 3.19 no formato da aproximação de Padé. Lembrando que $\lambda = \Theta/x$, o termo $(1 + \lambda)\chi$ torna-se:

$$\begin{aligned} (1 + \lambda)\chi &= (1 + \lambda)(1 + 2f(\lambda)\xi + [f(\lambda)]^2\vartheta) \\ &= \frac{1 + 2\lambda + 2\lambda\xi + \lambda^2 + 2\lambda^2\xi + \lambda^2\vartheta}{1 + \lambda} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Substituindo $\lambda = \lambda(\Theta)$:

$$(1 + \lambda)\chi = \frac{1}{1 + \lambda} \left[1 + 2 \frac{1 + \xi}{x} \Theta + \frac{1 + 2\xi + \vartheta}{x^2} \Theta^2 \right] \quad (3.21)$$

A equação 3.19 torna-se:

$$\frac{E \cos \delta}{1 + \lambda} = \frac{1 + \lambda + \xi\lambda}{1 + 2 \frac{1 + \xi}{x} \Theta + \frac{1 + 2\xi + \vartheta}{x^2} \Theta^2} \quad (3.22)$$

Definindo:

$$\kappa_1 \equiv \frac{1}{x}(1 + \xi), \quad (3.23)$$

$$\kappa_2 \equiv \frac{1}{x^2}(1 + 2\xi + \vartheta), \quad (3.24)$$

a equação 3.21 fica no formato da aproximação de Padé (equação 2.40).

Substituindo a equação 2.40 em 3.3 e reorganizando de forma análoga ao que foi feito para encontrar κ_1 e κ_2 , obtemos:

$$\frac{-E \sin \delta}{1 + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda} \left[\frac{AD - BC}{C^2 + D^2} \right] = \frac{\kappa_3 \Theta}{1 + 2\kappa_1 \Theta + \kappa_2 \Theta^2}, \quad (3.25)$$

e assim

$$\kappa_3 = \frac{1}{x} \left(\frac{AN - BM}{A^2 + B^2} \right). \quad (3.26)$$

Para confirmar que as equações analíticas para os coeficientes da aproximação de Padé dadas em 3.23, 3.24 e 3.26 reproduzem resultados anteriores, refizemos o gráfico da figura 2.2, como pode ser visto na figura 3.1.

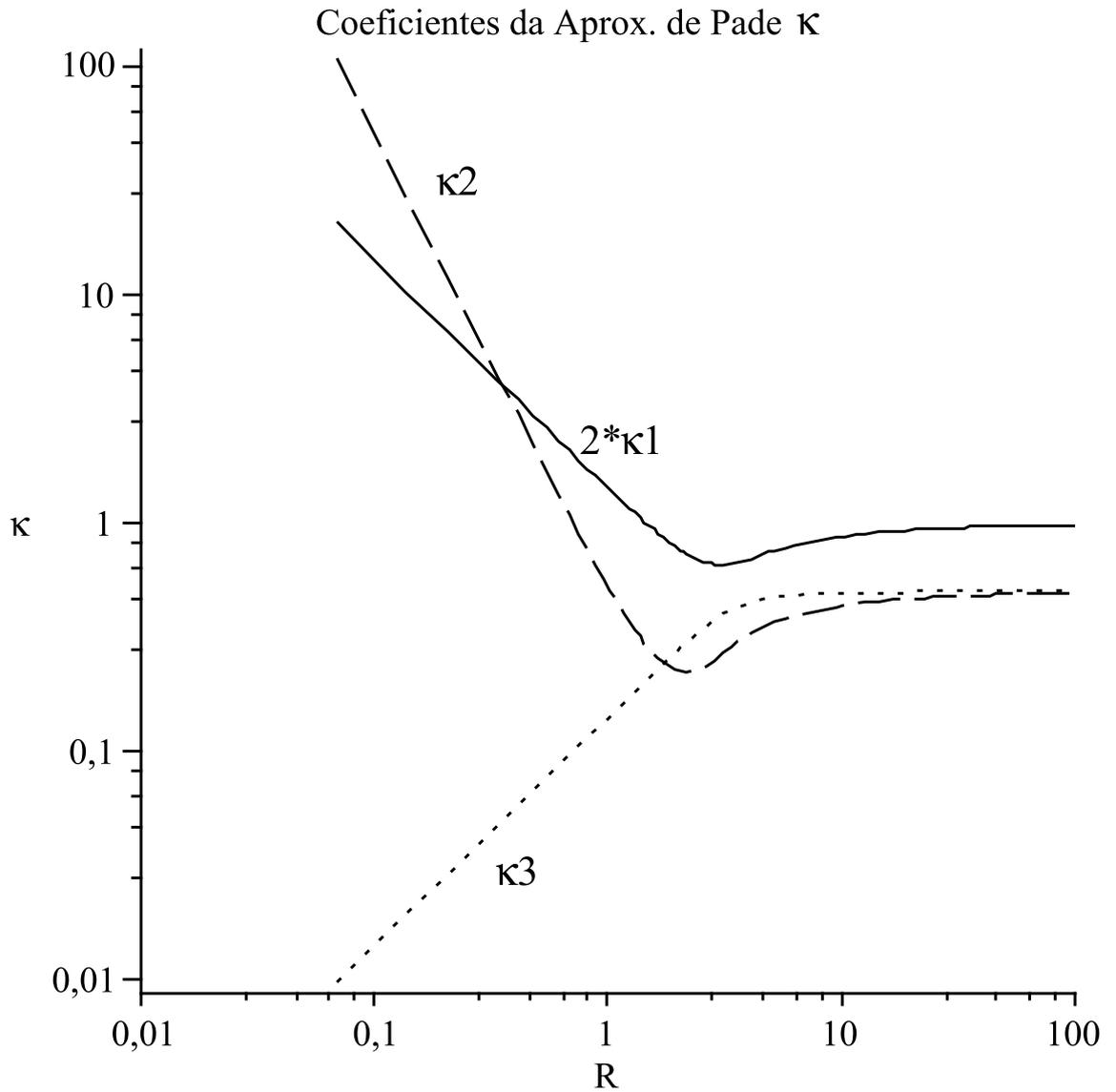


Figura 3.1: Reprodução do gráfico 2.2 utilizando o novo formalismo desenvolvido nesta seção para os coeficientes de Padé.

3.2 Explicitando as variáveis

Como a inércia térmica é dada por $\Gamma = \sqrt{\rho C k}$, a variável x como função da inércia térmica será explicitada pela equação:

$$x = R' \sqrt{2} \quad (3.27)$$

$$= \frac{R}{l_s} \sqrt{2} \quad (3.28)$$

$$= \frac{R \Gamma \sqrt{2 \nu}}{k} \quad (3.29)$$

Podemos ver na figura 3.2 o comportamento devido a inércia térmica:

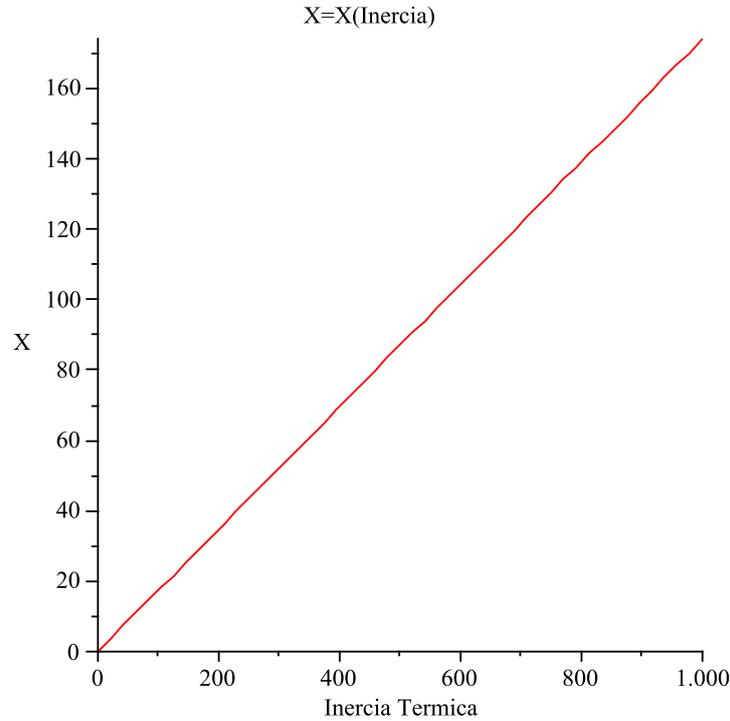


Figura 3.2: Variável X como função da inércia térmica.

O parâmetro de pressão de radiação, Φ , será reescrito como uma função da densidade do corpo. Substituindo o fluxo do corpo à uma certa distância heliocêntrica da estrela $\mathcal{E}_* = L_\odot / 4\pi r^2$,

$$\Phi \equiv \frac{\pi R^2 \mathcal{E}_*}{mc}$$

$$= \frac{\pi R^2 L_{\odot}}{4mc\pi r^2}. \quad (3.30)$$

Como consideramos o caso linear, a distância heliocêntrica será igual ao semi-eixo maior, devido a órbita ser circular, e pelo corpo ser esférico, o volume será dado por $V = 4\pi R^3/3$. Reescrevemos a densidade como:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} \\ &= \frac{3m}{4\pi R^3} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo a equação 3.31 em 3.30, a pressão de radiação passa a ser uma função da densidade, quando conhecemos a distância heliocêntrica e o raio do corpo, e será dada por:

$$\Phi = \frac{3L_{\odot}}{16\pi cr^2 R\rho} \quad (3.32)$$

A temperatura na posição r será:

$$\begin{aligned} T_{\star} &= \left[\frac{\alpha \mathcal{E}_{\star}}{c\sigma} \right]^{1/4} \\ &= \left[\frac{(1-A)L_{\odot}}{4\pi r^2 \epsilon \sigma} \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Logo:

$$T_{\star}^3 = \left[\frac{(1-A)L_{\odot}}{4\pi r^2 \epsilon \sigma} \right]^{3/4} \quad (3.34)$$

Assim, as equações 3.29, 3.32 e 3.34 são o conjunto de substituições necessárias para tornar as equações 2.44 e 2.45 como funções do albedo, da densidade e da inércia térmica.

3.3 Efeito Yarkovsky como função do albedo, da densidade e da inércia térmica

Devido a extensão dos coeficientes da Aproximação de Padé, mesmo simplificando as etapas de obtenção da variação do semi-eixo no tempo, e dos

valores envolvidos nas constantes e nas variáveis² terem ordens de grandeza muito discrepantes, o resultado analítico torna-se muito extenso e difícil de ser analisado algébricamente. Assim, optamos por uma análise gráfica da modelagem do Efeito Yarkovsky como função do albedo, da densidade e da inércia térmica.

3.3.1 Algoritmo e código maple

Para uma análise tanto analítica quanto algébrica, escolhemos utilizar o software matemático Maple. O algoritmo usado pode ser visto na figura 3.3.

O código completo pode ser visto no apêndice B, no qual é apresentada a entrada de valores das constantes e das variáveis, o cálculo dos coeficientes da aproximação de Padé (as funções κ), e são detalhados: 1) a obtenção da variação do semi-eixo maior no tempo devido ao efeito diurno e sazonal, respectivamente; 2) a mudança de unidades de m/s para UA/Ma , e; 3) a geração dos resultados gráficos.

3.3.2 Análise Gráfica

Efeito Diurno

Na figura 3.4 vemos uma variação positiva no semi-eixo, variação esta com um máximo em torno da inércia térmica $\Gamma = 100 Jm^{-2}s^{-1/2}K^{-1}$, para diversos valores de densidade. Para complementar a compreensão do Efeito Yarkovsky como função também do albedo, apresentamos a figura 3.5 que mostra, para dois valores de densidade a variação da inércia térmica, e do albedo.

Fixando valores de densidade, albedo, ou inércia térmica podemos fazer cortes seccionais e estudar a variação do Efeito Yarkovsky devido a características físicas individuais. Na figura 3.6, fixamos a densidade $\rho = 3000 kg/m^3$ e a inércia térmica $\Gamma = 200 Jm^{-2}s^{-1/2}K^{-1}$. Neste caso o semi-eixo varia inversamente com o albedo de forma aproximadamente linear. Fisicamente, esperávamos um resultado semelhante (eq. 2.44). Da mesma forma, o semi-eixo varia inversamente com a densidade (figura 3.7).

Considerando que corpos primariamente feitos de silicatos possuem inércia térmica entre $0 \leq \Gamma \leq 450 Jm^{-2}s^{-1/2}K^{-1}$, e corpos metálicos entre $450 \leq \Gamma \leq 1000 Jm^{-2}s^{-1/2}K^{-1}$, e fixando o mesmo valor de albedo e densidade para ambos, podemos concluir que eles terão variações de semi-eixo diferentes. Isso sugere que o Efeito Yarkovsky poderia atuar em famílias provenientes de corpos com composição diferenciada, de forma distinta de acordo com a

²Informações sobre valores e intervalos usados podem ser vistos no apêndice A.

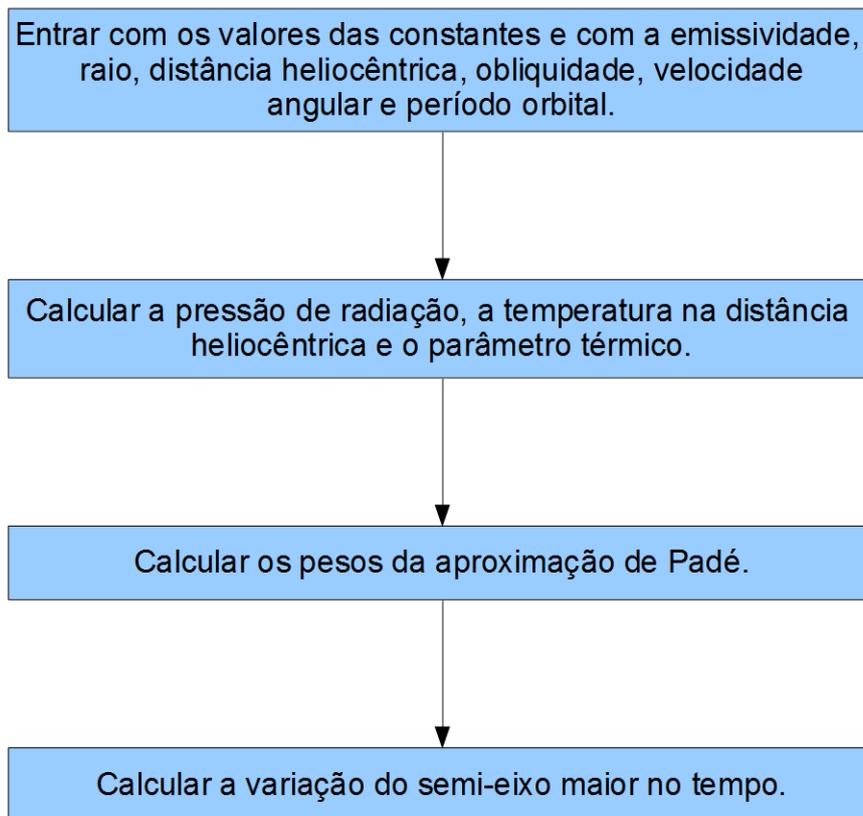


Figura 3.3: Algoritmo do programa Maple para gerar a variação do semi-eixo devido ao Efeito Yarkovsky.

composição do membro da família em questão, causando maior variação de semi-eixo em corpos de silicatos e menor em corpos metálicos.

Efeito Sazonal

A variação do efeito sazonal possui sinal contrário ao do efeito diurno, contudo, de forma análoga, o módulo da variação do efeito diminui conforme aumentamos a densidade (figura 3.8). Como no efeito diurno, o caso interessante é a variação do semi-eixo no tempo em função da inércia térmica (figura 3.9).

3.3.3 Validação dos resultados

Para validar o método desenvolvido neste trabalho aplicamos o mesmo a dois asteroides, 1999RQ36 e (152563) 1992BF, cujas variações em semi-eixo cau-

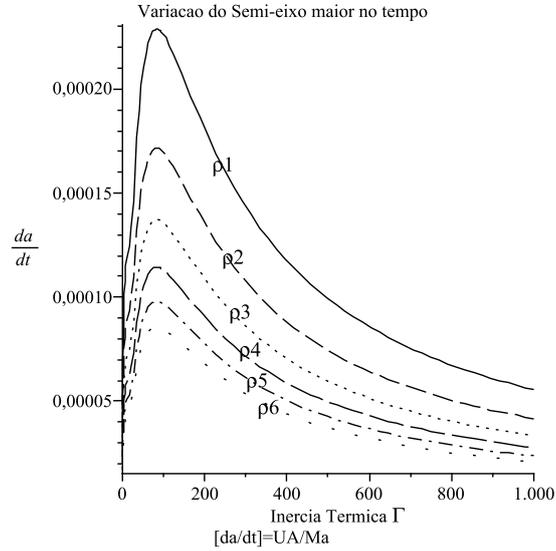


Figura 3.4: Variação do semi-eixo devida à inércia térmica. O módulo da variação diminui, conforme aumentamos a densidade ($\rho_1 = 3000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 4000$, $\rho_3 = 5000$, $\rho_4 = 6000$, $\rho_5 = 7000$, $\rho_6 = 8000$).

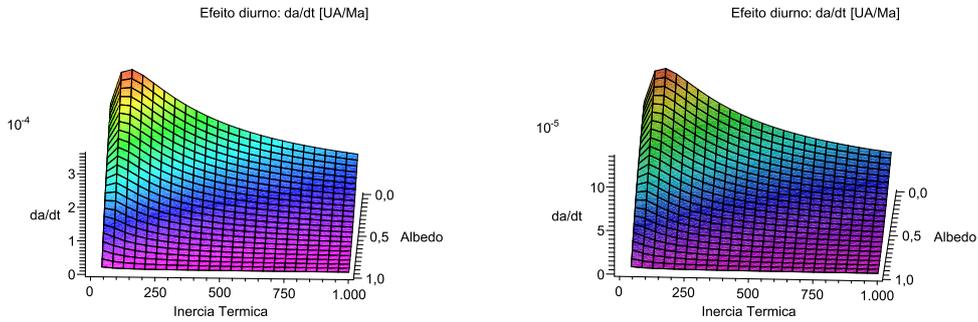


Figura 3.5: Comportamento do Efeito Diurno, como função do albedo A , e da inércia térmica Γ , para diferentes valores de densidade (da esquerda para a direita): (a) $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, (b) $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$.

sada pelo efeito Yarkosvsky haviam sido calculadas previamente na literatura (Milani et al., 2009; Vokrouhlický et al., 2008, respectivamente). Podemos observar a comparação dos valores obtidos com os da literatura na tabela 3.1.

Para o asteroide 1999RQ36 encontramos uma variação de $da/dt = -11.96 \times 10^{-4} \text{ UA/Ma}$ que encontra-se dentro da margem de erro observada na liter-

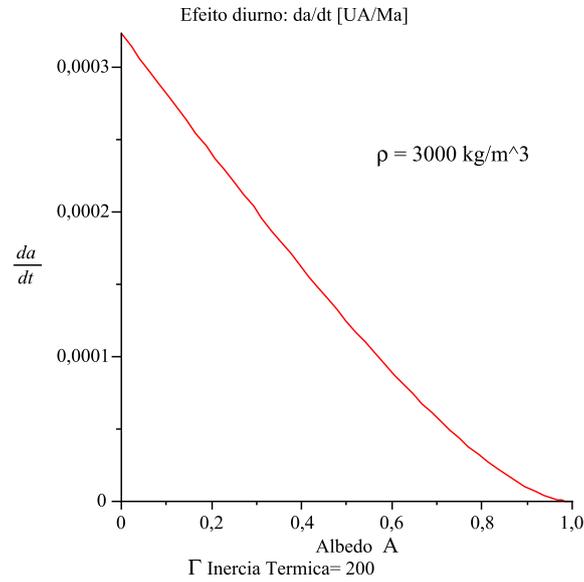


Figura 3.6: Variação do semi-eixo com o albedo para $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$ e $\Gamma = 200 \text{ Jm}^{-2}\text{s}^{-1/2}\text{K}^{-1}$.

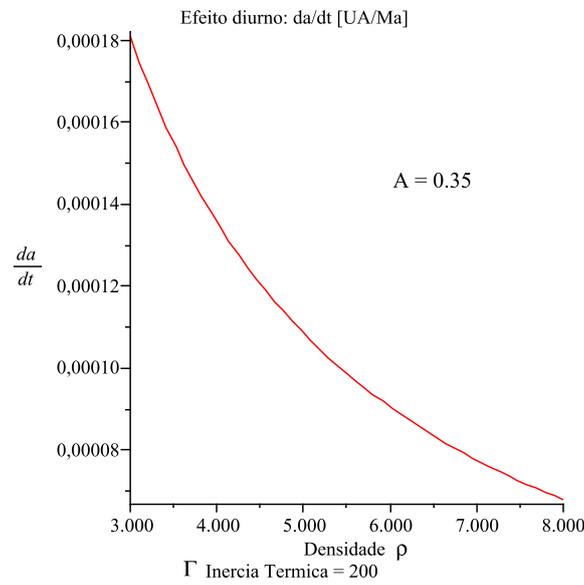


Figura 3.7: Variação do semi-eixo com a densidade para $A = 0,35$ e $\Gamma = 200 \text{ Jm}^{-2}\text{s}^{-1/2}\text{K}^{-1}$.

atura. O valor calculado na literatura baseia-se em integração numérica e , enquanto este trabalho usa os valores de sua característica física e orbital,

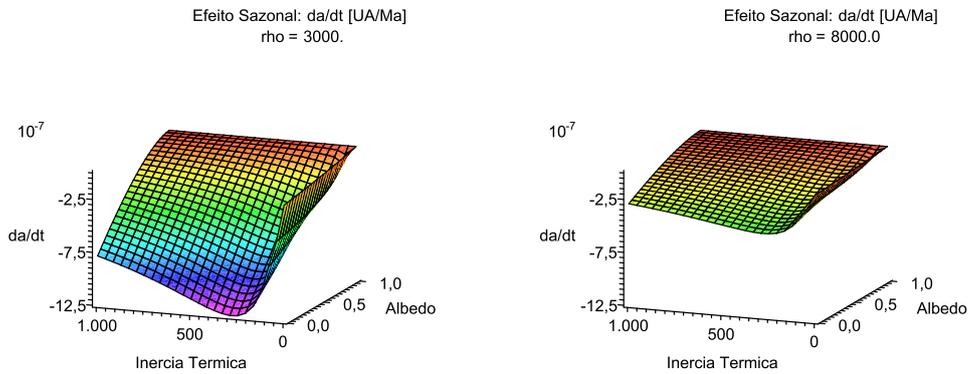


Figura 3.8: Comportamento do Efeito Sazonal, como função do albedo A , e da inércia térmica Γ , para diferentes valores de densidade (da esquerda para a direita): (a) $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, (b) $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$.

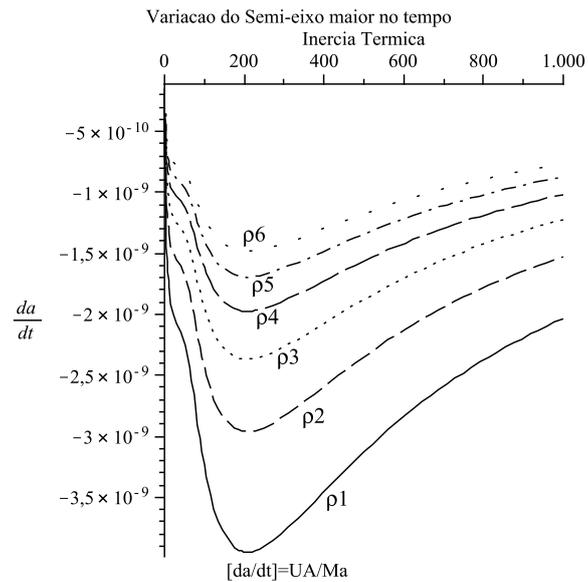


Figura 3.9: A variação da densidade diminui o módulo do efeito, análogo ao efeito diurno ($\rho_1 = 3000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 4000$, $\rho_3 = 5000$, $\rho_4 = 6000$, $\rho_5 = 7000$, $\rho_6 = 8000$).

substituindo diretamente no código dado no apêndice B.

Para o asteroide (152563) 1992BF optamos por usar a mesma análise de Vokrouhlický et al. (2008). Fazendo uma varredura por todos os valores de

Asteroide	(152563) 1992BF	(101955) 1999RQ36
R	200 m	280 m
k	0.5 W/mK	0.01 W/mK
P	4 h	4.29 h
r	0.9 UA	1.12 UA
A	0.05	0.05
ρ	2500 kg/m^3	1500 kg/m^3
Γ	-	396.26 $Jm^{-2}s^{-1/2}K^{-1}$
da/dt (Literatura)	$1.4 \times 10^{-3} UA/Ma$	$(-12.5 \pm 5) \times 10^{-4} UA/Ma$
da/dt (Neste trabalho)	$1.3 \times 10^{-3} UA/Ma$	$-11.96 \times 10^{-4} UA/Ma$

Tabela 3.1: Valores e resultados obtidos para os asteroides (152563) 1992BF e 1999RQ36.

inércia térmica possíveis, encontramos o módulo da variação máxima do semi-eixo devida ao Efeito Yarkovsky. Neste trabalho, obtemos uma variação de $|da/dt|_{max} = 1.3 \times 10^{-3} UA/Ma$ muito próxima do valor dado na literatura, corroborando a ordem de grandeza do efeito (Nugent et al., 2012). Este tipo de análise, não associa erros às medidas obtidas.

3.4 Comparação: Silicato e Metal

Na seção sobre a análise gráfica do efeito diurno foi sugerido que corpos de composição metálica teriam uma dispersão menor em semi-eixo do que corpos compostos de silicatos. Na tabela 3.2 apresentamos os valores utilizados para calcular a variação devida ao efeito Yarkovsky em cada caso.

Característica Física	Silicático	Metálico
K	1 W/mK	20 W/mK
ρ	3000 kg/m^3	7500 kg/m^3

Tabela 3.2: Valores diferentes entre corpos metálicos e rochosos.

Podemos observar na figura 3.10 que corpos formados de silicatos possuem uma variação do semi-eixo no tempo que é o dobro ou triplo da variação em corpos metálicos, sofrendo uma maior dispersão em semi-eixo em relação aos últimos.

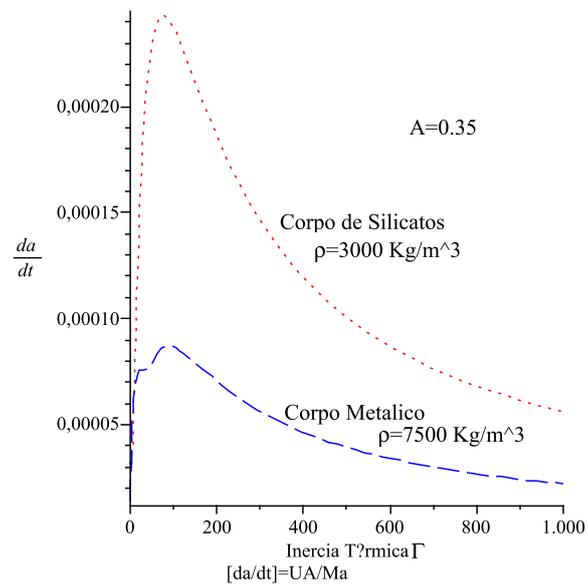


Figura 3.10: Comparação da variação em semi-eixo de corpos compostos de silicatos e de corpos metálicos, usando $A = 0.35$.

Capítulo 4

Discussão

Neste trabalho desenvolvemos uma análise capaz de tratar o Efeito Yarkovsky como função do albedo, da densidade, e da inércia térmica. Desta forma, podemos, futuramente, estudar a situação em que o corpo progenitor de uma família de asteroides não seja homogêneo, com a quebra gerando uma família diferenciada, em que os membros possuam composições compatíveis com esta diferenciação, sendo assim afetados de modo distinto pelo Efeito Yarkovsky.

No capítulo anterior deduzimos expressões analíticas para os coeficientes da aproximação de Padé, reproduzindo resultados anteriores obtidos na literatura (Vokrouhlický, 1998a). Concluimos que a dependência da variação do semi-eixo com o albedo e a densidade estavam de acordo com o esperado (figuras 3.6 e 3.7). A inércia térmica é a variável mais significativa neste estudo (figuras 3.4, 3.9), e sua variação em semi-eixo muda significativamente segundo a composição do corpo, chegando a apresentar o dobro ou triplo de diferença a mais para corpos formados por silicatos em relação aos corpos metálicos (figura 3.10).

Este desenvolvimento pode ter fortes implicações no estudo do espalhamento de membros de famílias cujo corpo progenitor fosse diferenciado, como pode ter sido o caso da família de Baptistina (Reddy et al., 2011), ou a família de Eos (Mothé-Diniz et al., 2005). E em geral supõe-na literatura que membros de famílias possuem as mesmas características físicas, como albedo, densidade, e inércia térmica, podendo levar a conclusões imprecisas no que tange ao espalhamento em semi-eixo das mesmas, desde a quebra do progenitor até os dias atuais. Esta imprecisão é propagada podendo causar erros na idade da família, entre outros.

O próximo passo será simular a evolução dinâmica de uma família de asteroides diferenciada usando um integrador numérico, como por exemplo o

integrador Swift¹. Com isto, poderemos compreender a distribuição em semi-eixo dos membros de uma família diferenciada, e determinar a sua idade.

¹<http://www.sourcefiles.org/Scientific/Astronomy/Simulation/swift.tar.Z.shtml>

Apêndice A

Símbolos e valores típicos

Diversos parâmetros utilizados durante a modelagem são constantes ou possuem intervalos de valores típicos, como é apresentado na tabela A.1.

Símbolo	Significado	Valores típicos
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	$5.6704 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
c	velocidade da luz	$3 \times 10^8 \text{ ms}^{-2}$
L_{\odot}	luminosidade do Sol	$3.9 \times 10^{26} \text{ W}$
ϵ	emissividade	$0 \leq \epsilon \leq 1$
Γ	inércia térmica	$0 < \Gamma < 1000 \text{ Jm}^{-2}\text{s}^{-1/2}\text{K}^{-1}$
γ	obliquidade	$0 < \gamma < \pi/2$
R	raio do corpo	$10^{-4} \text{ m} \leq R \leq 10 \text{ km}$
A	albedo	$0 \leq A \leq 1$
k	condutividade térmica	$2 \times 10^{-2} \leq k \leq 40 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
ρ	densidade	$3.0 \leq \rho \leq 8.0 \text{ g/cm}^3$

Tabela A.1: Variáveis e constantes: valores típicos.

Apêndice B

Código Maple

Na tabela B podemos observar o código maple usado para obter a variação do semi-eixo no tempo devido ao albedo, a inércia térmica e a densidade. Inicialmente, definimos as constantes físicas que serão usadas, e os valores de conductividade, raio, emissividade, distância heliocêntrica, movimento próprio, período de rotação e orbital, e a obliquidade.

Após definir os valores, o código usa-os para calcular a temperatura superficial, o parâmetro térmico, e os coeficientes da aproximação de Padé. Assim, obtemos as funções `diurno1` e `sazonal1`, que são a variação do semi-eixo no tempo usando o Sistema de Unidades Internacional (S.I.). Contudo, queremos uma saída em UA/Ma. Para isto, o código transforma `diurno1` e `sazonal1`, respectivamente, em `diurno` e `sazonal`, que são a variação do semi-eixo no tempo, devido ao Efeito Yarkovsky, em UA/Ma.

> σ	:= $5.6704 * 10^{(-8)}$;
> c	:= $3 * 10^8$;
> L	:= $3.9 * 10^{26}$;
> ppi	:= 3.141592654 ;
> R	:= ; #raio
> k	:= ; #conductividade
> ϵ	:= ; #emissividade
> P	:= ; #período de rotação
> $obliq$:= ; #obliquidade
> r	:= ; #distância heliocêntrica
> PP	:= ; #período orbital
> η	:= $2*ppi/(86400*PP)$; #movimento próprio
> ω	:= $2*ppi/(3600*P)$; #velocidade angular
> Φ	:= $3*L/(16*ppi*r^2*rho*R*c)$;
> T	:= $((1-A)*L/(4*ppi*r^2*\epsilon*\sigma))^{(3/4)}$;
> Θ	:= $Inercia*\sqrt{\omega}/(\epsilon*\sigma*((1-A)*L/(4*ppi*r^2*\epsilon*\sigma))^{(3/4)})$;
> x	:= $Inercia*R*\sqrt{2*\omega}/k$;
> a	:= $-x-2-\exp(x)*((x-2)*\cos(x)-x*\sin(x))$;
> b	:= $-x-\exp(x)*(x*\cos(x)+(x-2)*\sin(x))$;
> nn	:= $x*(x+3)-\exp(x)*(x*(x-3)*\cos(x)-(3*(x-2))*\sin(x))$
> mm	:= $3*(x+2)+\exp(x)*((3*(x-2))*\cos(x)+x*(x-3)*\sin(x))$;
> i	:= $(a*mm+b*nn)/(a^2+b^2)$;
> ii	:= $(mm^2+nn^2)/(a^2+b^2)$;
> $K1$:= $(1+i)/x$;
> $K2$:= $(1+2*i+ii)/x^2$;
> $K3$:= $(a*nn-b*mm)/((a^2+b^2)*x)$;
> F	:= $-K1*Theta/(1+2*K2*\Theta+K3*\Theta^2)$;
> $diurno1$:= $((-8)*(1-A))*\Phi*F*\cos(obliq)/(9*\eta)$;
> $diurno$:= $diurno1/(4.98666666*10^{-3})$;
> $sazonal1$:= $(4*(1-A))*\Phi*F*\sin^2(obliq)/(9*\eta)$;
> $sazonal$:= $sazonal1/(4.98666666*10^{-3})$;
> $VariacaoSemiEixo$:= $diurno+sazonal$;

Tabela B.1:

Referências Bibliográficas

- M. Adukov V. and I. O. L. A new algorithm for computing Pade approximants. *ArXiv e-prints*, December 2011.
- G.B. Afonso. Asteroid fragments in Earth-crossing orbits. *Planet. Space Sci.*, 43:787–795, July 1994.
- G. B. Arfken and H.J. Weber. *Física Matemática*. Campus and Elsevier, 2007.
- W. F. Bottke, Jr., D. Vokrouhlický, D. P. Rubincam, and D. Nesvorný. The Effect of Yarkovsky Thermal Forces on the Dynamical Evolution of Asteroids and Meteoroids. *Asteroids III*, pages 395–408, 2002.
- W. F. Bottke, Jr., D. Vokrouhlický, D. P. Rubincam, and D. Nesvorný. The Yarkovsky and Yorp Effects: Implications for Asteroid Dynamics. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 34:157–191, May 2006. doi: 10.1146/annurev.earth.34.031405.125154.
- J.A. Burns, P.L. Lamy, and S. Soter. radiation forces on small particles in the Solar System. *Icarus*, 40:1–48, July 1979.
- A. Chamberlin. Kirkwood gaps - mean motion resonance: asteroid:jupiter., 2007. URL <http://ssd.jpl.nasa.gov/images/>.
- I. De Parker. *Planetary Science*. Cambridge University Press, 2001.
- P. Farinella, D. Vokrouhlicky, and W. K. Hartmann. Meteorite Delivery via Yarkovsky Orbital Drift. *Icarus*, 132:378–387, April 1998. doi: 10.1006/icar.1997.5872.
- B.J. Gladman, F. Migliorini, A. Morbidelli, V. Zappalà, P. Michel, A. Celino, C. Froeschlé, H.F. Levison, M. Bailey, and M. Duncan. Dynamical lifetimes of objects injected into asteroid belt resonances. *Science*, 277:197–201, 1997.

- A. Milani, S. R. Chesley, M. E. Sansaturio, F. Bernardi, G. B. Valsecchi, and O. Arratia. Long term impact risk for (101955) 1999RQ36. *Icarus*, 203: 460–471, October 2009. doi: 10.1016/j.icarus.2009.05.029.
- T. Mothé-Diniz, F. Roig, and J. M. Carvano. Reanalysis of asteroid families structure through visible spectroscopy. *Icarus*, 174:54–80, March 2005. doi: 10.1016/j.icarus.2004.10.002.
- C. R. Nugent, J. L. Margot, S. R. Chesley, and D. Vokrouhlický. Detection of Semimajor Axis Drifts in 54 Near-Earth Asteroids: New Measurements of the Yarkovsky Effect. *The Astronomical Journal*, 144:60, August 2012. doi: 10.1088/0004-6256/144/2/60.
- C. Peterson. A Source Mechanism for Meteorites Controlled by the Yarkovsky Effect. *Icarus*, 29:91–111, November 1976.
- V.V. Radzievskii. A mechanism for the disintegration of asteroids and meteorites. *Astronomicheskii Zhurnal*, 24:162–170, July 1952.
- V. Reddy, J. M. Carvano, D. Lazzaro, T. A. Michtchenko, M. J. Gaffey, M. S. Kelley, T. Mothé-Diniz, A. Alvarez-Candal, N. A. Moskovitz, E. A. Cloutis, and E. L. Ryan. Mineralogical characterization of Baptistina Asteroid Family: Implications for K/T impactor source. *Icarus*, 216:184–197, November 2011. doi: 10.1016/j.icarus.2011.08.027.
- D. P. Rubincam and W. F. Bottke. The YORP Effect and the Spin of Small Asteroids. In *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, volume 31 of *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, page 1399, March 2000.
- D.P. Rubincam. LAGEOS orbit decay due to infrared radiation from Earth. *J. Geophys. Res.*, 92:1287–1294, July 1987.
- D.P. Rubincam. Asteroid orbit evolution due to thermal drag. *J. Geophys. Res.*, 100:1585–1594, July 1995.
- D. Vokrouhlický. Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. I. Linear theory. *Astronomy and Astrophysics*, 335:1093–1100, July 1998a.
- D. Vokrouhlický. Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. II. Non-sphericity effects. *Astronomy and Astrophysics*, 338:353–363, October 1998b.

- D. Vokrouhlický, M. Brož, P. Farinella, and Z. Knežević. Yarkovsky-Driven Leakage of Koronis Family Members I. The Case of 2953 Vysheslavia. *Icarus*, 150:78–93, March 2001. doi: 10.1006/icar.2000.6552.
- D. Vokrouhlický, M. Brož, W. F. Bottke, D. Nesvorný, and A. Morbidelli. Yarkovsky/YORP chronology of asteroid families. *Icarus*, 182:118–142, May 2006a. doi: 10.1016/j.icarus.2005.12.010.
- D. Vokrouhlický, M. Brož, A. Morbidelli, W. F. Bottke, D. Nesvorný, D. Lazzaro, and A. S. Rivkin. Yarkovsky footprints in the Eos family. *Icarus*, 182:92–117, May 2006b. doi: 10.1016/j.icarus.2005.12.011.
- D. Vokrouhlický, S. R. Chesley, and R. D. Matson. Orbital Identification for Asteroid 152563 (1992 Bf) Through the Yarkovsky Effect. *The Astronomical Journal*, 135:2336–2340, June 2008. doi: 10.1088/0004-6256/135/6/2336.
- V. Zappalà, A. Cellino, A. dell’Oro, and P. Paolicchi. Physical and Dynamical Properties of Asteroid Families. *Asteroids III*, pages 619–631, 2002.
- E.J. Öpik. *Proc. Roy. Irish Acad.*, 54:165, 1951.