



Universidade Federal
do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

MODELAGEM POR REDES BAYESIANAS DE EVENTOS DEPENDENTES NO
CÁLCULO DE ATRIBUTOS DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS DE
SEGURANÇA DE INSTALAÇÕES NUCLEARES

Victor Coppo Leite

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Nuclear da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e
Melo

Rio de Janeiro
Janeiro de 2014

MODELAGEM POR REDES BAYESIANAS DE EVENTOS DEPENDENTES NO
CÁLCULO DE ATRIBUTOS DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS DE
SEGURANÇA DE INSTALAÇÕES NUCLEARES

Victor Coppo Leite

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO
CURSO DE ENGENHARIA NUCLEAR DA ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
ENGENHEIRO NUCLEAR.

Examinado por:

Prof. Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo

Prof. José de Jesús Rivero Oliva

Dr. Pedro Luiz da Cruz Saldanha

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JANEIRO de 2014

Leite, Victor Coppo

Modelagem por Redes Bayesianas de Eventos Dependentes no Cálculo de Atributos de Confiabilidade de Sistemas de Segurança de Instalações Nucleares / Victor Coppo Leite – Rio de Janeiro: UFRJ/ESCOLA POLITÉCNICA, 2013.

XII, 47 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo

Projeto de Graduação – UFRJ/POLI/ Engenharia Nuclear, 2013.

Referencias Bibliográficas: p. 36

1. Eventos Dependentes. 2. Redes Bayesianas. 3. Cadeia de Markov. 4. Confiabilidade. I. Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Nuclear. III. Modelagem Por Redes Bayesianas de Eventos Dependentes no Cálculo de Atributos de Confiabilidade de Sistemas de Segurança de Instalações Nucleares.

Agradecimentos

A todos da minha família que sempre acreditaram e me apoiaram.

A todos os funcionários que viabilizam meu aprendizado: aos professores dos diversos departamentos da UFRJ envolvidos, aos funcionários que cuidam da limpeza e organização da universidade, sem a qual não possuiríamos um ambiente propício para o desenvolvimento acadêmico. Além dos muitos outros empregados que prestam serviços sem os quais essa meta não poderia ser atingida.

Ao meu orientador, prof. Paulo Fernando, e a minha amiga e colega de trabalho, Juliana, que me incentivaram, tiveram paciência e me ensinaram muito.

Aos meus colegas de turma que ao longo do curso sempre me apoiaram.

A Deus por tudo.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Nuclear.

MODELAGEM POR REDES BAYESIANAS DE EVENTOS DEPENDENTES NO
CÁLCULO DE ATRIBUTOS DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS DE
SEGURANÇA DE INSTALAÇÕES NUCLEARES

Victor Coppo Leite

Janeiro/2014

Orientador: Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo

Curso: Engenharia Nuclear

Redes bayesianas tornaram-se uma ferramenta muito útil para a resolução de problemas em diversas áreas de aplicação. Este trabalho discute o uso de redes bayesianas para tratar eventos dependentes em engenharia de confiabilidade que são normalmente modelados por modelos markovianos. Eventos dependentes desempenham um papel importante como, por exemplo, no tratamento de sistemas com componentes com carga compartilhada, sistemas em pontes, falhas de causa comum e sistemas com chaveamento (aqueles para os quais um componente que está em espera é ativado após um componente principal falhar por meio de um mecanismo de um chaveamento). Todos os cálculos com redes bayesianas foram feitos por meio do software Netica™, da Norsys Software Corporation, Python 2.7.5, planilhas do Excel para a avaliação ao longo do tempo e Matemática 9.0. A discussão considera o desenvolvimento de valores de confiabilidade dependentes do tempo, que são facilmente obtidos, através de modelos markovianos, mas não através de redes bayesianas, porque os valores de probabilidade que encontramos como saída tem como entrada valores de confiabilidade e não de taxas de falha. As redes bayesianas geraram resultados bem de acordo com os modelos de Markov e decomposição pivotal. redes bayesianas estáticas e discretas foram utilizadas a fim de verificar as suas capacidades de modelagem de situações específicas, como o chaveamento quando ocorrem falhas em sistemas *cold standby*. Como dito as redes bayesianas geraram resultados muito próximos aos das cadeias de Markov, no entanto, redes bayesianas estáticas são muito mais fáceis de serem modeladas do que cadeias de Markov.

Palavras-chave: Confiabilidade, Eventos Dependentes, Rede Bayesiana, Cadeia de Markov, Sistema de Segurança.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Nuclear Engineer.

BAYESIAN NETWORKS MODELING OF DEPENDENT EVENTS ATTRIBUTES
IN CALCULATION OF SAFETY SYSTEM'S RELIABILITY OF NUCLEAR
INSTALLATIONS

Victor Coppo Leite

January /2014

Advisor: Paulo Fernando Ferreira Frutuoso e Melo

Course: Nuclear Engineering

Bayesian networks have become a very handy tool for solving problems in various application areas. This monograph discusses the use of Bayesian networks to treat dependent events in reliability engineering typically modeled by Markovian models. Dependent events play an important role as, for example, when treating load-sharing systems, bridge systems, common-cause failures, and switching systems (those for which a standby component is activated after the main one fails by means of a switching mechanism). All Bayesian network calculations are performed by means of the Netica™ software, of Norsys Software Corporation, and Python 2.7.5, Excel to evaluate them over time and Mathematica 9.0. The discussion considers the development of time-dependent reliability figures of merit, which are easily obtained, through Markovian models, but not through Bayesian networks, because these latter need probability figures as input and not failure and repair rates. Bayesian networks produced results in very good agreement with those of Markov models and pivotal decomposition. Static and discrete time Bayesian networks were used in order to check their capabilities for modeling specific situations, like switching failures in cold standby systems. Static Bayesian network results were much closer to those of Markovian models and of discrete time Bayesian networks. However, static Bayesian networks are much easier to model.

Keywords: Reliability, Dependent Events, Bayesian Network, Markov Chain, Safety System.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	3
3	Redes bayesianas	6
3.1	Probabilidade condicional e teorema de Bayes.....	6
3.2	Cálculos de confiabilidade através de redes bayesianas	6
4	Comparação usando rede bayesiana e cadeia de markov aplicadas a alguns casos...	8
4.1	Componentes com cargas compartilhadas	8
4.1.1	Cadeia de Markov aplicada a cargas compartilhadas	8
4.1.2	Rede bayesiana aplicada a cargas compartilhadas	9
4.2	Componente em reserva fria	11
4.2.1	Cadeia de Markov aplicada a sistema com componente em reserva fria.	11
4.2.2	Rede bayesiana aplicada a sistema com componente em reserva fria	12
4.3	Sistema com componente em ponte.....	14
4.3.1	Método de pivoteamento aplicado ao sistema ponte	15
4.3.2	Rede bayesiana aplicada a sistema ponte.....	15
4.4	Falha de causa comum	16
4.4.1	Cadeia de Markov aplicada a falha de causa comum	17
4.4.2	Rede bayesiana aplicada a falha de causa comum.....	18
5	Estudo de caso	20
5.1	Método de pivoteamento aplicado ao estudo de caso	20
5.2	Rede bayesiana aplicada ao estudo de caso	21
6	Resultados	23
6.1	Resultados dos casos propostos	23
6.2	Resultados do estudo de caso.....	25

6.3 Análise de sensibilidade.....	25
7 Conclusão	37
Referências.....	38
Apêndice I.....	39
Apêndice II	45

Lista de Figuras

Figura 1- Rede bayesiana para dois componentes em paralelo ativo	7
Figura 2 – Diagrama markoviano de transição de estados para dois componentes com cargas compartilhadas sem considerar reparo.....	9
Figura 3- Rede bayesiana para um instante t de dois componentes com cargas compartilhadas sem levar em conta o reparo.....	10
Figura 4- Diagrama de blocos, sistema com dois componentes sendo o B o componente em reserva.....	11
Figura 5- Diagrama de transições de estados para o caso de sistema com reserva fria	12
Figura 6- Rede bayesiana discretizada no tempo para sistemas com <i>cold standby</i> ..	13
Figura 7- Sistema em ponte	14
Figura 8- Rede bayesiana para o sistema ponte.....	16
Figura 9- Dois componentes em paralelo ativos.....	17
Figura 10- Diagrama de transição de estados para dois componentes em paralelo ativo com taxa de falha comum	17
Figura 11- Rede bayesiana para um instante de tempo t para dois componentes em paralelo ativo levando-se em conta uma falha de causa comum	18
Figura 12- Ponte contendo bombas e válvulas	20
Figura 13- Sistema em ponte com falha de causa comum adaptado para o modelo de pivoteamento.....	21
Figura 14- Rede bayesiana para o estudo de caso	22
Figura 15- Análise de sensibilidade do sistema com cargas compartilhadas em relação à variação de λ_A^*	26
Figura 16- Erro relativo para cargas compartilhadas em relação a λ_A	27
Figura 17- Erro relativo versus a variação de λ_I para falha de causa comum	29
Figura 18- Erro relativo versus a variação de λ_C para falha de causa comum	29
Figura 19- Erro relativo versus a variação de dt para redundância em reserva fria .	30
Figura 20- Erro relativo versus a variação de dt para redundância em reserva fria .	31
Figura 21- Erro relativo versus a variação de λ_A para redundância em reserva fria.	32

Figura 22- Erro relativo versus a variação de λ_B para redundância em <i>cold standby</i>	33
Figura 23- Erro relativo versus a variação de λ_B para redundância em <i>cold standby</i>	34
Figura 24- Erro relativo versus a variação de β_{Bomba}	35
Figura 25- Erro relativo versus $\beta_{Válvula}$	36

Lista de Tabelas

Tabela 1- Valores genéricos para fator beta de componentes do reator (da NUREG 1150)	4
Tabela 2- Tabela de probabilidade condicional do portão OU para dois componentes em paralelo ativo.....	7
Tabela 3- Tabela de probabilidade condicional para B falho	14
Tabela 4: Tabela de Probabilidade Condicional para o caso de falha de causa comum.....	19
Tabela 5- Taxas de falha e valores de probabilidade assumidos	23
Tabela 6- Resultados para redes bayesianas e cadeias de Markov	24
Tabela 7- Taxas de falha para o estudo de caso.....	25
Tabela 8- Resultados do estudo de caso	25

Lista de Siglas

B – Bomba

CM – Cadeia de Markov

ED – Evento dependente

F – Fail

FCC – Falha de causa comum

FSAR – Final Safety Analysis Report

NRC – Nuclear Regulatory Commission

PWR – Pressurized water reactor

R_x – Denota a confiabilidade do componente x

\overline{R}_x – Denota a inconfiabilidade do componente x

RB – Rede bayesiana

TPC – Tabela de probabilidade condicional

W – Work

λ_i – Taxa de falha de um componente i

β_i – Fator beta de um determinado tipo de componente, i

1 INTRODUÇÃO

O tratamento de eventos dependentes (ED) no estudo da confiabilidade tem se tornado cada vez mais importante nos problemas de engenharia. De um lado, centenas ou até milhares de eventos de falha devem ser levados em conta em sistemas, nesse contexto árvores de falha são amplamente utilizadas, apesar de serem limitadas quando se deseja tratar ED. Em contrapartida, em muitos casos, dependências devem ser modeladas até mesmo para sistemas mais simples e árvores de falha tendem a subestimar chances de falha.

Cadeias de Markov (CM) (Lewis, 1996) (Ramakumar, 1993) são amplamente empregadas por terem a capacidade de tratar dependências e reparos. Nesse tipo de modelagem os componentes normalmente apresentam dois estados (funcionando ou falho), gerando dessa forma um número muito grande de estados possíveis do sistema, dificultando essa abordagem, uma vez que se torna necessária a criação de um grande número de variáveis para este cálculo (Singh & Billinton, 1977). Uma das alternativas para o tratamento de ED é a modelagem através de redes bayesianas (RB) (Lee & Lee, 2006). RB é uma forma de aplicação do teorema de Bayes.

O presente trabalho procura discutir a aplicação de RB para a modelagem de alguns ED típicos que vêm sendo levados em conta na engenharia de confiabilidade.

A revisão bibliográfica é feita no Capítulo 2, sobre o que consiste o teorema de Bayes, o funcionamento de RB e de CM, além de apresentar o modelo de decomposição pivotal para o cálculo da confiabilidade de sistemas de segurança. Disso, aplicam-se estes modelos a diversos casos de ED típicos. Como o foco deste trabalho é a discussão do uso de RB, o Capítulo 3 é reservado para apresentar alguns conceitos do que são RB e de como elas funcionam de forma mais detalhada.

No Capítulo 4 serão mostrados alguns casos de ED que são relevantes no estudo de confiabilidade, é feita uma comparação entre a modelagem desses eventos fazendo uso de CM, decomposição pivotal e de RB. Dessa forma, é possível verificar quais as vantagens de se usar as RB para o tratamento desses problemas.

Os casos discutidos nesse trabalho são: sistemas com cargas compartilhadas, sistema com redundância em reserva fria (*cold standby*), sistema com componentes que possuem falhas com taxas de falha de causa comum (FCC) e sistema com componentes em ponte.

O Capítulo 5 apresenta o uso da modelagem que foi apresentada no Capítulo 4 para que seja feita a discussão de um problema real. O problema apresentado é o cálculo de confiabilidade do sistema de Remoção de Calor Residual de Angra 1, Final Safety Analysis Report (FSAR) (2005).

Com todas as modelagens apresentadas, são feitos cálculos apresentadas no Capítulo 6. Também é apresentada nesse capítulo uma análise de sensibilidade que possibilitará ver como se dá o comportamento do erro com a variação de alguns valores de parâmetros.

Conclusões acerca dos resultados obtidos no trabalho são apresentadas no Capítulo 7.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O conceito de confiabilidade é apresentado por Ebeling (1997), Lewis (1996) e ISO (2004) como sendo a probabilidade de um componente ou sistema realizar a função designada a ele com sucesso sob determinadas condições de operação.

Neste trabalho, o cálculo de confiabilidade é feito a partir de 3 tipos de modelagem: decomposição pivotal, CM e RB.

Um sistema composto por N componentes, no qual cada componente apresenta dois estados: funcionando ou falho, há 2^N estados possíveis, Lewis (1996). Para cada estado existe uma chance do sistema apresentar-se funcionando em função do tempo $P_i(t)$. A confiabilidade do sistema é uma função do tempo que é igual ao somatório da probabilidade do sistema apresentar-se funcionando para cada um dos estados possíveis.

$$R(t) = \sum_i P_i(t) \quad (1)$$

Portanto, para que seja calculada a confiabilidade do sistema por meio de CM é necessário determinar as funções $P_i(t)$. Essas são funções diferenciais ordinárias, de primeira ordem, com coeficientes constantes e concatenadas. Cada uma delas é construída a partir da transição de um determinado estado i para os outros $2^N - 1$ estados. No caso estudado, a única taxa de transferência entre um estado e outro é a taxa de falha de um componente que poderá falhar num intervalo de tempo infinitesimal, isso porque este é um modelo simplificado, não sendo levado em consideração a taxa de reparo.

Para tanto, esse modelo exige duas restrições: a de que em um intervalo de tempo apenas um evento ocorra, ou seja, apenas ocorrerá a falha de um componente, a outra restrição é de que as taxas de falha devem ser constantes no tempo, sendo assim, a confiabilidade dos componentes é dada por uma distribuição de probabilidade exponencial.

O método da decomposição pivotal é uma aplicação do teorema de probabilidade condicional, em que é selecionado um componente pivô aplicando dessa forma a seguinte equação para o cálculo da confiabilidade:

$$R(t) = P(\text{Sistema funcionar} | \text{Pivô falho})P(\text{Pivô falho}) + P(\text{sistema funcionar} | \text{Pivô funciona})P(\text{Pivô funciona}) \quad (2)$$

Para essa abordagem, a escolha do componente pivô deve ser feita de tal forma que um sistema complexo possa ser tratado através de dois sistemas mais simples.

Para o cálculo da confiabilidade de um sistema com componentes apresentando FCC é necessário determinar-se as mesmas. Um método com tal finalidade é apresentado no relatório NUREG-1150 , Nuclear Regulatory Commission (NRC) (1987).

Tal método assume que a taxa de falha total, λ , de cada um dos componentes do sistema, é a soma de duas parcelas: a taxa de falha independente de cada componente, λ_i , e a taxa de FCC, λ_C . Por conveniência é definido um parâmetro β como sendo a razão entre a taxa de FCC, λ_C , e a taxa de falha total de cada componente, λ . A seguir, é mostrada as equações do modelo e a tabela com os valores de β para diversos componentes obtidos do relatório citado acima:

$$\lambda = \lambda_i + \lambda_C \tag{3}$$

$$\lambda_C = \frac{\beta \lambda_i}{1 - \beta}$$

Tabela 1- Valores genéricos para fator beta de componentes do reator (da NUREG 1150)

Componente	Limite superior	Média
Trip do reator	0,19	0,792
Geradores diesel	0,05	0,0208
Válvulas operadas a motor	0,08	0,0333
Segurança/ válvulas de alívio (PWR)	0,07	0,0292
Bombas de injeção de segurança	0,17	0,0708
Bombas de remoção de calor residual	0,11	0,0458
Bombas do spray da contenção	0,05	0,0208
Bombas de alimentação de água auxiliar	0,03	0,0125
Bombas de alimentação de água principal	0,03	0,0125
Baterias	0,10	0,04

As RB são grafos acíclicos dirigidos por nós e arestas. Cada nó representa a probabilidade de que uma determinada variável esteja em um dado estado. Neste caso, as variáveis são as probabilidades do sistema encontrar-se nos diferentes estados

existentes em função do tempo, Jensen e Nielsen (2007). O Capítulo seguinte destina-se à discussão mais detalhada a respeito de RB.

3 REDES BAYESIANAS

As RB possibilitam tratar de maneira direta e bem estruturada as dependências entre variáveis de um domínio. Elas levam este nome, pois são uma aplicação da teoria de probabilidade bayesiana (Thomas Bayes, em 1763).

Uma RB é um grafo não direcionado e não cíclico no qual cada nó representa uma variável aleatória contínua (Langseth e Portinale, 2007). Estes nós são conectados por arcos direcionados representando as dependências entre as variáveis do domínio que está sendo modelado.

Com as RB é possível tratar o problema através das probabilidades condicionais. Ou seja, os dados de entrada do problema são probabilidades em cenários específicos.

Cada nó da rede possui uma Tabela de Probabilidade Condicional (TPC) preenchida com valores de probabilidade de um evento dado um determinado cenário.

3.1 Probabilidade condicional e teorema de Bayes

Para o cálculo da probabilidade de que dois eventos ocorram, por exemplo, A e B, tem-se a expressão:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \quad (1)$$

Lê-se: a probabilidade de que A e B ocorram é igual à probabilidade de A ocorrer dado que B ocorreu multiplicado pela probabilidade de que B ocorra.

Partindo da equação $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, pode-se escrever a seguinte relação:

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad (2)$$

Esta equação é conhecida como Teorema de Bayes e é de fundamental importância, já que é com ela que se inferem valores para cada estado do sistema representado pelos nós da rede.

3.2 Cálculos de confiabilidade através de redes bayesianas

Uma vez estruturada a rede, ou seja, estabelecidas as relações de dependência dos componentes do sistema, será feito o cálculo da probabilidade do sistema encontrar-

se em um determinado estado. O exemplo a seguir, mostra como este cálculo é realizado.

Para um sistema com dois componentes A e B em paralelo ativo, segundo Bobbio et al. (2001) modelar a RB para este tipo de problema pode ser feito da forma apresentada na Fig. 1.

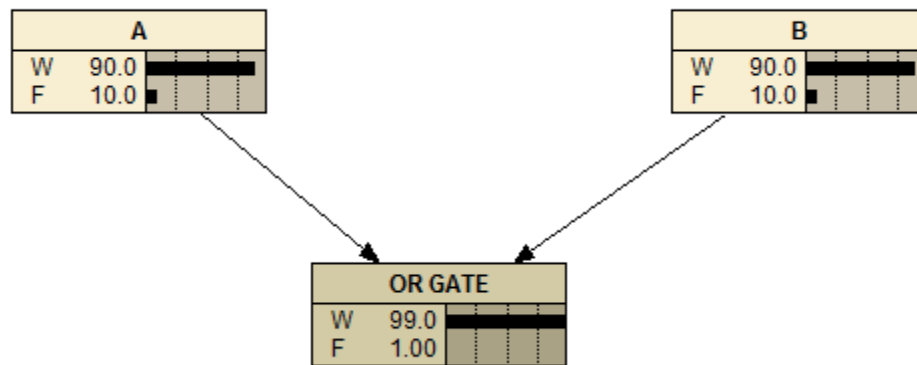


Figura 1- Rede bayesiana para dois componentes em paralelo ativo

Nas TPC dos nós que representam os componentes A e B mostram dois estados possíveis: funcionando (“W”) e falho (“F”), eles são preenchidos respectivamente com a confiabilidade e inconfiabilidade do componente. Na TPC do nó OR GATE, são apresentados ao todo 4 estados possíveis do sistema como mostrado na Tab. 2:

Tabela 2- Tabela de probabilidade condicional do portão OU para dois componentes em paralelo ativo

A	B	OR GATE
W	W	1
W	F	1
F	W	1
F	F	0

Finalmente, o cálculo da probabilidade para que o sistema esteja funcionando é feito usando a seguinte equação:

$$P(\text{sistema funcionando}) =$$

$$\sum_{i=1}^4 P(\text{sistema funcionando} | A \text{ no estado } i | B \text{ no estado } i) P(A \text{ no estado } i) P(B \text{ no estado } i) \quad (3)$$

4 COMPARAÇÃO USANDO REDE BAYESIANA E CADÉIA DE MARKOV APLICADAS A ALGUNS CASOS

Este capítulo destina-se à apresentação da modelagem de alguns ED típicos no estudo de confiabilidade fazendo uso da abordagem de Markov e da abordagem com RB. Com a modelagem apresentada, posteriormente serão atribuídos valores e os resultados obtidos serão comparados e discutidos através de uma análise de sensibilidade que será apresentada no Capítulo 6.

4.1 Componentes com cargas compartilhadas

Sistemas com componentes com cargas compartilhadas são sistemas no qual caso haja a falha de um dos componentes haverá uma sobrecarga no outro. Um exemplo desse tipo de sistema é quando duas válvulas operam e, caso uma delas deixe de operar, a pressão que será imposta sob a que continua realizando a tarefa aumentará, criando uma sobrecarga sobre a mesma.

Outro possível exemplo é quando um sistema é composto por duas bombas que desempenham uma tarefa de gerar um determinado fluxo de água. Em certo momento, uma das bombas falha, sendo dessa forma, o fluxo desejado deverá ser mantido por uma única bomba, aquela que ainda está em operação. Dessa forma, haverá uma sobrecarga sobre essa bomba, de tal forma que sua chance de sofrer uma falha aumente.

4.1.1 Cadeia de Markov aplicada a cargas compartilhadas

Considerando dois componentes em paralelo ativo formando o sistema a Fig. 2 ilustra o diagrama de transições de Markov para este caso, no qual A e B denotam os respectivos componentes em funcionamento e \bar{A} e \bar{B} os mesmo componentes falhos. Além disso, λ_A e λ_B são as taxas de falha dos componentes A e B e λ_A^* denota a taxa de falha do componente A estando o componente B falho e λ_B^* a taxa de falha do componente B estando o componente A falho.

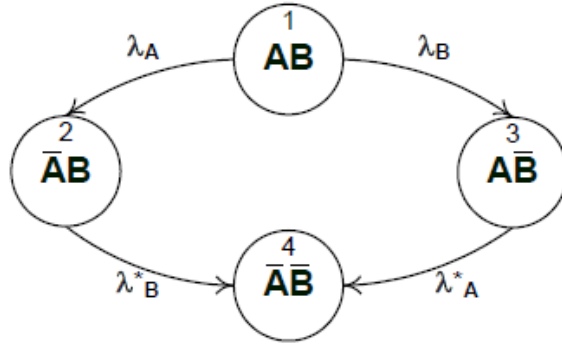


Figura 2 – Diagrama markoviano de transição de estados para dois componentes com cargas compartilhadas sem considerar reparo

Para este caso, com a abordagem markoviana, teremos 4 equações diferenciais, uma para cada estado. São elas:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1(t)}{dt} &= -(\lambda_A + \lambda_B) p_1(t) \\
 \frac{dp_2(t)}{dt} &= \lambda_A p_1(t) - \lambda_B^* p_2(t) \\
 \frac{dp_3(t)}{dt} &= \lambda_B p_1(t) - \lambda_A^* p_3(t) \\
 \frac{dp_4(t)}{dt} &= \lambda_B^* p_2(t) + \lambda_A^* p_3(t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

A solução para o sistema apresentado é:

$$R(t) = e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B - \lambda_B^*} [e^{-\lambda_B^* t} - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}] + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B - \lambda_A^*} [e^{-\lambda_A^* t} - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}] \tag{2}$$

4.1.2 Rede bayesiana aplicada a cargas compartilhadas

Como discutido anteriormente, neste tipo de arranjo o funcionamento ou não de um dos componentes do sistema afetará o desempenho do outro. Dessa forma, a RB para este tipo de dependência é ilustrada na Fig. 3.

Em seguida, apresentam-se os cálculos que devem ser feitos para obter a confiabilidade do sistema.

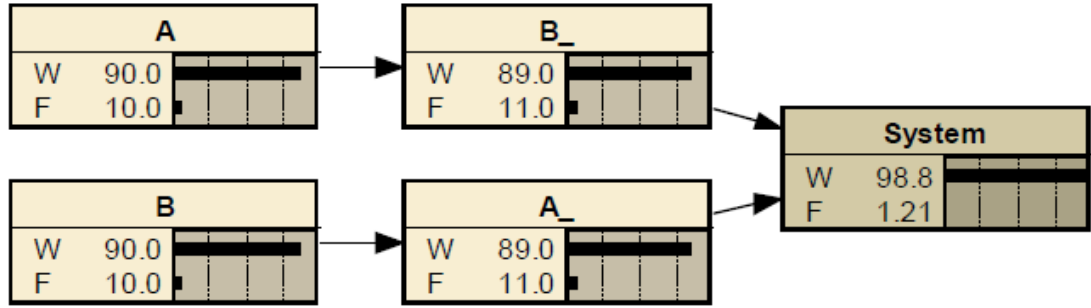


Figura 3- Rede bayesiana para um instante t de dois componentes com cargas compartilhadas sem levar em conta o reparo

$$P(\text{system work}) = P(A_) + P(B_) - P(A_)P(B_) \quad (3)$$

Onde,

$$P(A_) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \quad (4)$$

$$P(B_) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

Entende-se $A_$ como a probabilidade do componente A funcionar, dado que o componente B esteja falho ou dado que ele esteja funcionando. Esse mesmo entendimento deve ser feito para $B_$.

Lê-se $P(A|B)$ ou $P(A|\bar{B})$ como sendo a probabilidade do componente A estar funcionando dado que B também está funcionando e de que A está funcionando dado que B está falho, respectivamente. Sendo também válido o mesmo raciocínio para $P(B|A)$ e para $P(B|\bar{A})$.

Conhecendo as taxas de falha dos componentes, é possível escrever as equações que permitirão calcular a confiabilidade dos componentes em diversas circunstâncias, aplicando esses valores às TPC.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A|B) = e^{-\lambda_A t} \\
 P(B) &= P(B|A) = e^{-\lambda_B t} \\
 P(A|\bar{B}) &= e^{-\lambda_A^* t} \\
 P(B|\bar{A}) &= e^{-\lambda_B^* t}
 \end{aligned} \quad (5)$$

4.2 Componente em reserva fria

Este caso consiste em dois componentes em paralelo, um deles está em operação e o outro está inativo em reserva fria. Caso o componente principal falhe o componente em *cold standby* é ativado por meio de um chaveamento que pode ser feito por uma VA ou por meio de relês elétricos, dependendo do caso. É importante observar que não está sendo levada em consideração aqui a falha em reserva do componente B e que está sendo levada em consideração a chance de uma falha no chaveamento R_S .

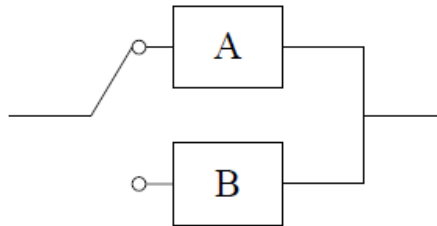


Figura 4- Diagrama de blocos, sistema com dois componentes sendo o B o componente em reserva

Este tipo de sistema é empregado, por exemplo, em redes elétricas. Caso um dos componentes do circuito elétrico falhe, com o intuito de não haver uma parada na alimentação elétrica ou uma sobrecarga, ocorre um chaveamento, dessa forma, outro componente que é capaz de desempenhar a mesma função entra em operação no lugar daquele que falhará de forma imediata e só após o componente que estava em operação ter sofrido falha.

4.2.1 Cadeia de Markov aplicada a sistema com componente em reserva fria

Para a utilização do modelo de Markov é necessária a criação de um diagrama de transição de estados, que é representado na Fig. 5.

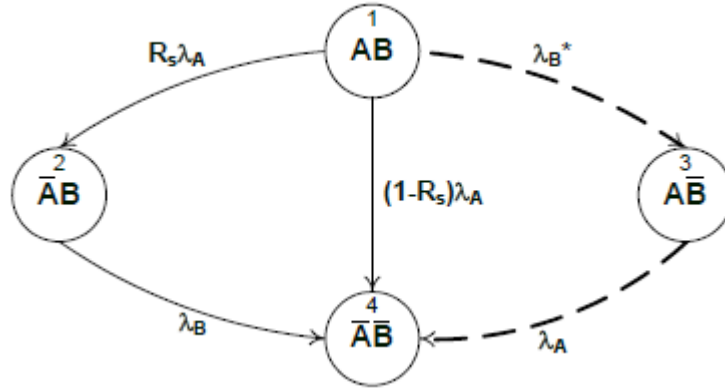


Figura 5- Diagrama de transições de estados para o caso de sistema com reserva fria

O conjunto de equações diferenciais obtidas com tal modelo é:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1(t)}{dt} &= -\lambda_A p_1(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= R_S \lambda_A p_1(t) - \lambda_B p_2(t) \\ \frac{dp_4(t)}{dt} &= (1 - R_S) \lambda_A p_1(t) + \lambda_B p_2(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$p_3(t) = 0$, visto que este estado é impossível.

A solução para este sistema de equações é:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= e^{-\lambda_A t} \\ p_2(t) &= \frac{\lambda_A R_S}{\lambda_A - \lambda_B} (e^{-\lambda_S t} - e^{-\lambda_A t}) \\ p_4(t) &= 1 - p_1(t) - p_2(t) \end{aligned} \quad (7)$$

De tal forma que:

$$R(t) = p_1(t) + p_2(t) = \frac{\lambda_A R_S}{\lambda_A - \lambda_B} (e^{-\lambda_S t} - e^{-\lambda_A t}) + e^{-\lambda_A t} \quad (8)$$

4.2.2 Rede bayesiana aplicada a sistema com componente em reserva fria

Para representar este problema, foi montada uma rede denominada rede bayesiana discretizada no tempo (Khakzad *et alii*, 2013). Esta rede é representada na

Fig. 6 de maneira simplificada. Os estados dos componentes dependem da probabilidade de falha em um intervalo $[t_i, t_f]$. Como não é levada em conta a falha do componente B em reserva, a tabela de probabilidade condicional de B é dada através da Tab. 3.

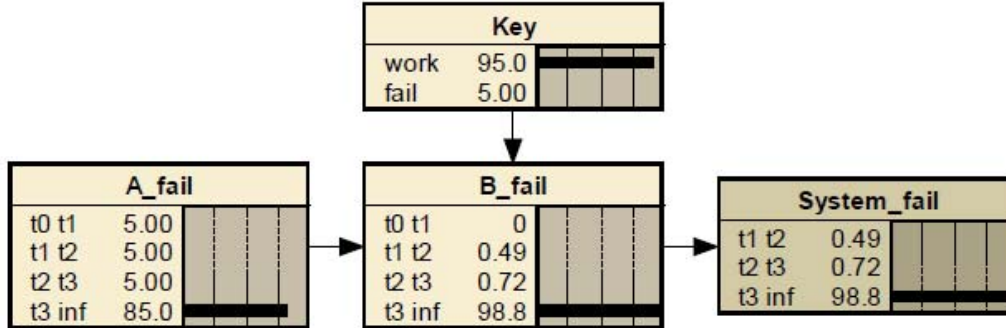


Figura 6- Rede bayesiana discretizada no tempo para sistemas com *cold standby*

A Tab. 3 pode ser interpretada da seguinte forma: apenas o componente B pode falhar no tempo $j+1$, uma vez que o componente A tenha falhado no tempo j e o chaveamento não tenha falhado. Caso o chaveamento tenha falhado, isso quer dizer que o componente B não entra em operação no instante $j+1$, pois ele é tido como falho. De acordo com tal estudo $P_{i,j}$ é a probabilidade de falha do componente B no intervalo de tempo $[i, i + \Delta]$, dado que ele não falhou até o tempo j , ou seja, o componente A tenha funcionado até este tempo:

$$P_{i,j} = \frac{P(B=1)}{P(B>j)}, \text{ se } i > j, \text{ tendo ocorrido chaveamento};$$

$P_{i,j} = 0$, se $i < j$ e tendo ocorrido chaveamento uma vez que o componente B não pode falhar antes do componente A, componente principal;

$P_{i,j} = 0$, se $j = i + 1$ e não ocorreu chaveamento, ou seja, o componente A falhou e como não ocorre chaveamento, o componente B não entrará em operação, logo a chance dele mostrar-se em funcionamento é zero. (9)

Tabela 3- Tabela de probabilidade condicional para B falho

$P(\bar{A})$	Key	$P(\bar{B})$			
		$[t_0, t_1[$	$[t_1, t_2[$	$[t_2, t_3[$	$[t_3, t_{inf}]$
$[t_0, t_1[$	WORK	0	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$P_{1,\infty}$
$[t_0, t_1[$	FAIL	0	1	0	0
$[t_1, t_2[$	WORK	0	0	$P_{2,3}$	$P_{2,\infty}$
$[t_1, t_2[$	FAIL	0	0	1	0
$[t_2, t_3[$	WORK	0	0	0	1
$[t_2, t_3[$	FAIL	0	0	0	1
$[t_3, t_{inf}]$	WORK	0	0	0	1
$[t_3, t_{inf}]$	FAIL	0	0	0	1

Em contrapartida, o sistema falhará quando B falhar. Isso quer dizer que a probabilidade do sistema falhar no intervalo $[t_i, t_f[$ será igual a probabilidade de B falhar neste intervalo, o que explica a forma com a qual esta modelagem foi feita.

4.3 Sistema com componente em ponte

Neste caso, um novo componente é inserido para conectar as duas linhas de componentes redundantes de um sistema. Este é o componente C, ilustrado na Fig. 7.

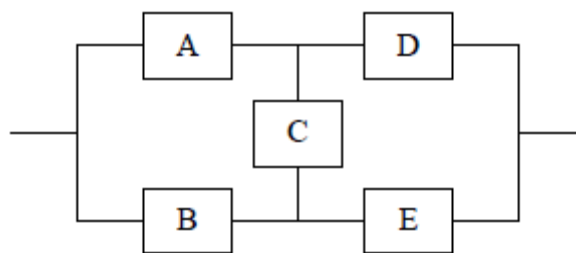


Figura 7- Sistema em ponte

Quando é possível organizar os componentes de um sistema na forma de uma ponte, a confiabilidade do sistema aumentará. Isso é facilmente entendível se pensarmos por exemplo em um sistema de transmissão de dados. Nesse caso, um sinal deverá ser transmitido do lado esquerdo para o lado direito, sem o componente do sistema que liga os dois lados do mesmo (o componente C) os únicos dois caminhos

possíveis para que o sinal fosse transmitido seriam através da passagem pelos componentes A e D ou B e E, já com a existência da ponte, os seguintes caminhos também seriam possíveis: A, C e E ou B, C e D, logo, conclui-se que a confiabilidade do sistema deverá ser maior.

4.3.1 Método de pivoteamento aplicado ao sistema ponte

Este é o único caso para o qual não se utiliza Markov para se obter um valor da confiabilidade, uma vez que seria necessário lidar com um diagrama de transição de estados com 32 estados. Essa abordagem seria útil apenas se o reparo estivesse sendo levado em consideração.

Por meio do método de decomposição pivotal, é possível estimar a confiabilidade do sistema ponte. Neste caso, o componente C é escolhido como o pivô e o teorema da probabilidade total é usado para estimar a confiabilidade através da equação:

$$R(S) = R(S|\bar{C})\bar{R}(C) + R(S|C)R(C) \quad (10)$$

Onde,

$$R(S|C) = (R_A + R_B - R_A R_B)(R_D + R_E - R_D R_E) \quad (11)$$

$$R(S|\bar{C}) = R_A R_D + R_B R_E - R_A R_B R_C R_D$$

Logo,

$$R(S) = (R_A + R_B - R_A R_B)(R_D + R_E - R_D R_E)R_C + (R_A R_D + R_B R_E - R_A R_B R_C R_D)(1 - R_C) \quad (12)$$

4.3.2 Rede bayesiana aplicada a sistema ponte

O sistema em ponte (Fig. 7) pode ser modelado por uma RB (Fig. 8), considerando os nós A, B, C, D e E como as confiabilidades de cada um desses componentes. A tabela de probabilidade do nó "Bridge System" tem todas as possibilidades de configurações do sistema, sendo especificadas entre elas as que fazem

com que o sistema funcione. Por exemplo, se A, C e E estão funcionando o sistema opera, porém se A, C e E estão falhos o sistema não funcionará. Aplicando o teorema de Bayes para essa configuração, obtem-se a equação (12), obtida anteriormente com o método de pivoteamento. Tem-se, neste caso, que a solução por meio das duas abordagens são idênticas.

Contudo, é importante ressaltar que não é só porque as equações para a confiabilidade são idênticas para este tipo de sistema que elas sempre serão. Isto é, a depender do que esteja sendo modelado, a modelagem a partir do método de pivoteamento gerará resultados diferentes dos obtidos com RB, esse caso foi apenas uma coincidência. Isso será evidenciado no estudo de caso, onde através dessas duas modelagens para um determinado problema, foram obtidas soluções distintas.

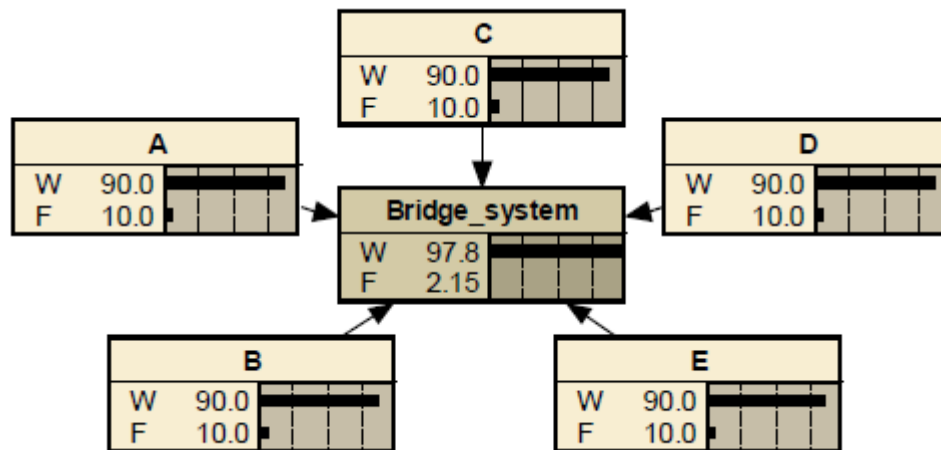


Figura 8- Rede bayesiana para o sistema ponte

4.4 Falha de causa comum

Para o caso de FCC, dois componentes ativos e em paralelo compõem o sistema que é apresentado na Fig. 9. Para o estudo em questão considerou-se que as taxas de falha dos componentes são iguais.

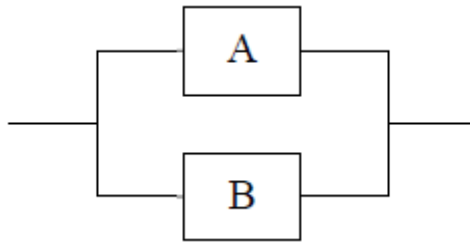


Figura 9- Dois componentes em paralelo ativos

Esse tipo de falha ocorre quando uma fonte de falha compromete o funcionamento dos dois componentes (NRC). Essa fonte é considerada como sendo das mais diversas formas, podem ser por exemplo, um erro cometido sistematicamente por uma equipe de manutenção ao inspecionar duas válvulas ou uma falha ocorrida no processo de fabricação de um lote de bombas.

4.4.1 Cadeia de Markov aplicada a falha de causa comum

Como dito anteriormente, os componentes A e B possuem taxas de falhas iguais, sendo elas $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_I$ e a taxa de FCC dos dois componentes é λ_C . Dessa forma, o diagrama de transição de estados é o apresentado na Fig. 10.

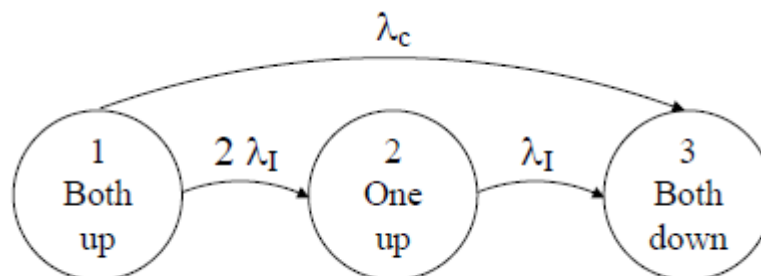


Figura 10- Diagrama de transição de estados para dois componentes em paralelo ativo com taxa de falha comum

Para este caso, o sistema de equações a ser resolvido é:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1(t)}{dt} &= -(2\lambda_I + \lambda_C)p_1(t) \\
 \frac{dp_2(t)}{dt} &= 2\lambda_I p_1(t) - \lambda_I p_2(t) \\
 \frac{dp_3(t)}{dt} &= \lambda_C p_1(t) + \lambda_I p_2(t)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Resolvendo o sistema a cima, é possível chegar à equação de confiabilidade:

$$R(t) = \frac{I}{\lambda_I + \lambda_C} [2\lambda_I e^{-\lambda_I t} - (\lambda_I - \lambda_C) e^{-2(\lambda_I + \lambda_C)t}] \quad (14)$$

4.4.2 Rede bayesiana aplicada a falha de causa comum

Este modelo procura fazer o cálculo da confiabilidade levando em consideração que o sistema possui componentes sujeitos a falhas que afetam todos os componentes e adicionalmente falhas independentes para cada um dos componentes. A Fig. 11 mostra a RB estática proposta.

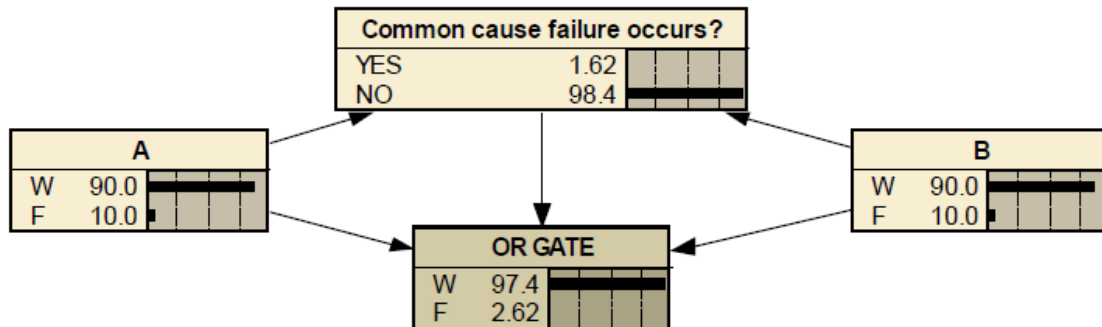


Figura 11- Rede bayesiana para um instante de tempo t para dois componentes em paralelo ativo levando-se em conta uma falha de causa comum

A TPC do nó “Common-cause failure occurs?” permite que a rede leve em conta uma FCC para o cálculo de confiabilidade. Nela é introduzida a condição de que este tipo de falha só pode ocorrer quando os dois componentes estão em funcionamento, caso contrário, a probabilidade é zero e os componentes só podem apresentar falhas de causa independentes.

A Tab. 4 é relativa à TPC do nó “OR GATE” e mostra os estados possíveis do sistema e se eles dão a condição de funcionamento ou não funcionamento do sistema. A probabilidade total do sistema estar funcionando no instante de tempo t é dada pela equação (15).

$$P(\text{or_gate} = \text{work}) = P(A)P(B)P(\text{common_failure_occur?} = \text{no}) + P(A)P(\bar{B}) + P(B)P(\bar{A}) \quad (15)$$

Tabela 4: Tabela de Probabilidade Condicional para o caso de falha de causa comum

A	B	Common cause failure occurs?	Or gate
W	W	YES	F
W	W	NO	W
W	F	YES	F
W	F	NO	W
F	W	YES	F
F	W	NO	W
F	F	YES	F
F	F	NO	F

5 ESTUDO DE CASO

Com o intuito de avaliar a eficácia da modelagem através de RB para o cálculo da confiabilidade de um sistema, será feito um estudo de caso considerando um sistema de segurança com um grau de complexidade maior do que os sistemas apresentados nos Capítulos 3 e 4. O sistema escolhido para tal análise foi o Sistema de Remoção de Calor Residual de Angra 1, FSAR (2005).

O sistema em questão possui duas B e três VA, de tal forma que estes componentes estão arranjados em uma ponte como mostrado na Fig. 12. É importante ressaltar que esta é uma simplificação do sistema e que para este estudo foi considerado falhas de causa comum entre B1 e B2 e falhas de causa comum entre VA2 e VA3.

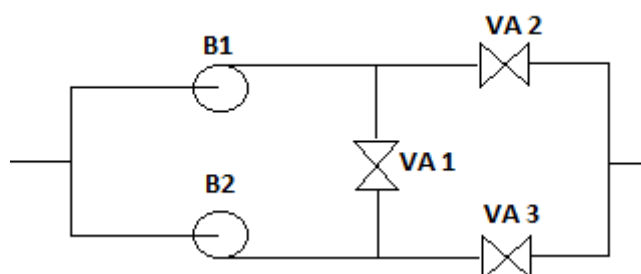


Figura 12- Ponte contendo bombas e válvulas

Nesse problema é considerado que os componentes apresentados na Fig. 12 possuem taxas de falha independentes e taxa de FCC. Cálculos da confiabilidade são feitos através de uma modelagem usando pivoteamento e outra com RB e os resultados são comparados.

5.1 Método de pivoteamento aplicado ao estudo de caso

O método de pivoteamento costuma ser usado quando não existem dependências entre os componentes, uma vez que ele trabalha com os valores de confiabilidade individuais dos mesmos. Como este estudo envolve FCC, a princípio tal falha não poderia ser levada em consideração nos cálculos, portanto, deverá ser feita uma adaptação na modelagem para que este ED possa ser considerado.

A adaptação foi feita considerando as chances de FCC como sendo componentes do sistema que estão ligadas em série com a ponte, como mostra a Fig. 13.

Essa adaptação foi feita partindo do raciocínio de que caso ocorra as FCC o sistema se encontrará falho, logo, esses eventos agem como componentes em série com a ponte.

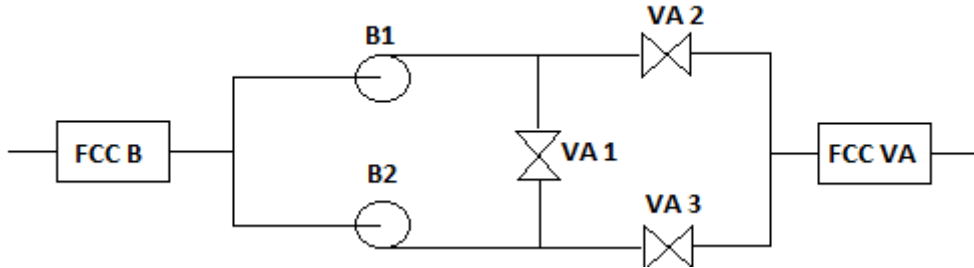


Figura 13- Sistema em ponte com falha de causa comum adaptado para o modelo de pivoteamento

Dessa forma, considerando a VA central da ponte como o componente pivô, através da equação (2) do Capítulo 2 chega-se à equação da confiabilidade do sistema para essa modelagem:

$$R(t) = R_{FCC B} R_{FCC VA} [(R_{B1}R_{VA2} + R_{B2}R_{VA3} - R_{B1}R_{VA2}R_{B2}R_{VA3})(1 - R_{VA1}) + (R_{B1} + R_{B2} - R_{B1}R_{B2})(R_{VA2} + R_{VA3} - R_{VA2}R_{VA3})R_{VA1}] \quad (1)$$

5.2 Rede bayesiana aplicada ao estudo de caso

Considerando as seções 4.3.2 e 4.4.2, nas quais se mostra, respectivamente, como é possível modelar com RB um sistema de componentes em ponte e a FCC entre componentes, torna-se possível unir esses dois raciocínios para a ilustração de uma RB do estudo de caso apresentado.

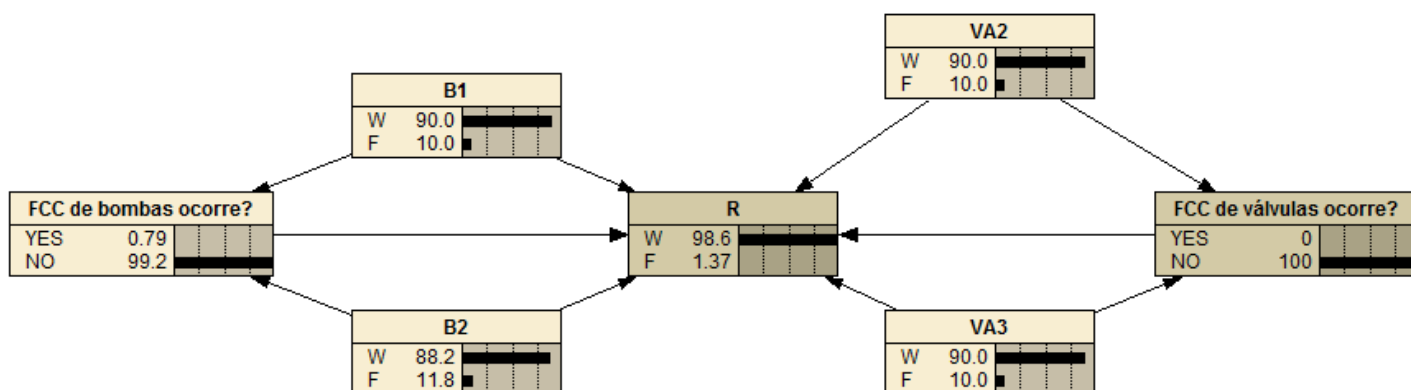


Figura 14- Rede bayesiana para o estudo de caso

Montada a RB, as TPC são preenchidas com as confiabilidades dos componentes e com as chances de ocorrerem FCC. Além disso, a TPC do nó “R” é aferido o valor de 100% de chance de funcionamento e 0% de chance de não funcionamento para os cenários nos quais o sistema de fato se mostrará em operação. Por exemplo, dado o cenário: B1, B2 e VA1 funcionando, mas VA2 e VA3 falhos, sendo que não ocorreu nenhuma FCC, o sistema se apresentará falho, logo afere-se 100% de chance do sistema não estar em operação, mas se B1, VA1 e VA2 funcionando e que não houve falha de causa comum de nenhum tipo, logo, o sistema apresentará 100% de chance de estar em operação.

Ao realizar esses passos, é possível compilar a RB, obtendo assim o resultado de confiabilidade do sistema, que é obtido através de uma equação determinada pelos estados selecionados como falhos ou operantes.

6 RESULTADOS

Os modelos usando cadeias de Markov, decomposição pivotal, no caso do sistema em ponte e RB apresentados nos Capítulos 4 e 5, foram simulados para os quatro casos discutidos: sistemas com cargas compartilhadas, sistemas com redundância em reserva fria, sistemas pontes e sistemas com FCC. O principal motivo dessas simulações foi comparar os resultados das duas aproximações para casos simplificados com o intuito de explorar as vantagens do uso de RB no cálculo da confiabilidade.

6.1 Resultados dos casos propostos

A Tab. 5 mostra os valores das variáveis usados para os cálculos. Para que esta análise seja feita, é considerado que as taxas de falhas de todos os componentes permanecem constantes ao longo do tempo, ou seja, os tempos de falha dos componentes seguem distribuições exponenciais. Caso contrário, não seria possível aplicar as cadeias de Markov para a montagem do diagrama de transição de estados.

Os dados da seguinte tabela foram escolhidos de tal forma que as análises feitas gerassem resultados com confiabilidades maiores que 80% para diversos intervalos de tempo, esta restrição será explicada no parágrafo a seguir.

Tabela 5- Taxas de falha e valores de probabilidade assumidos

Taxas de falha ($i= A, B, C, D$ e E)	$\lambda_i (h)^{-1}$	0,001
Taxa de falha de A quando B falho	$\lambda_A^* (h)^{-1}$	0,0015
Taxa de falha de B quando A falho	$\lambda_B^* (h)^{-1}$	0,0015
Taxa de falha de causa comum	$\lambda_C (h)^{-1}$	0,0002
Chance de falha no chaveamento	R_S	0,95

A Tab. 6 mostra os resultados para $t=10$ h, 100 h, 200 h e 500 h. Como pode ser observado, os resultados obtidos com a modelagem usando RB são muito próximos aos obtidos através das cadeias de Markov. Como taxas de reparo não são levadas em conta, não faz sentido considerar grandes intervalos de tempo, nos quais os valores de confiabilidade são menores que 80%. Essas mesmas observações também deverão ser aplicadas ao analisar a Tab. 8, que trará os resultados do estudo de caso apresentado.

Tabela 6- Resultados para redes bayesianas e cadeias de Markov

Confiabilidade para t=10 h			
	Rede bayesiana	Cadeia de Markov	Erro relativo
Sistema com carga compartilhada	0,9999	0,9998	0,00%
Redundância em cold standby	0,9996	0,9995	0,01%
Sistema em ponte	0,9998	0,9998	0,00%
Falha de causa comum	0,9979	0,9992	0,13%
Confiabilidade para t=100 h			
	Rede bayesiana	Cadeia de Markov	Erro relativo
Sistema com carga compartilhada	0,9903	0,9869	0,30%
Redundância em cold standby	0,9906	0,9908	0,00%
Sistema em ponte	0,9806	0,9806	0,00%
Falha de causa comum	0,9747	0,9836	0,90%
Confiabilidade para t=200 h			
	Rede bayesiana	Cadeia de Markov	Erro relativo
Sistema com carga compartilhada	0,9614	0,9523	0,90%
Redundância em cold standby	0,9875	0,9727	1,50%
Sistema em ponte	0,9274	0,9274	0,00%
Falha de causa comum	0,9409	0,9525	1,17%
Confiabilidade para t=500 h			
	Rede bayesiana	Cadeia de Markov	Erro relativo
Sistema com carga compartilhada	0,8015	0,7865	1,90%
Redundância em cold standby	0,8744	0,8946	2,30%
Sistema em ponte	0,6695	0,6695	0,00%
Falha de causa comum	0,8102	0,8101	0,00%

6.2 Resultados do estudo de caso

A tabela a seguir apresenta os valores das taxas de falha para os componentes do sistema representado pela Fig. 13.

Tabela 7- Taxas de falha para o estudo de caso

Componente	$\lambda_i (h)^{-1}$	$\lambda_C (h)^{-1}$	$\lambda (h)^{-1}$
Bomba	0,001	2,05 E-4	1,21 E-3
Válvula	0,001	8,70 E-5	1,09 E-3

Essa tabela mostra três diferentes taxas de falha: λ_i , a taxa de falha independente, λ_C , a taxa de FCC e λ , a taxa de falha total. Determinadas as taxas de falha independentes, se usa os valores de limites superiores da Tab. 1 e a equação (3) do Capítulo 2 para o cálculo do valor de λ_C . Com λ_i e λ_C conhecidos, tem-se o valor de λ .

A Tab. 8 mostra os resultados da confiabilidade para os tempos $t=10$ h, $t=50$ h, $t=150$ h e $t=300$ h para a modelagem com RB e para o modelo de pivoteamento.

Tabela 8- Resultados do estudo de caso

Tempo	Redes Bayesianas	Pivoteamento	Erro relativo
$t=10$ h	0,9971	0,9969	0,00%
$t=50$ h	0,9831	0,9812	0,00%
$t=150$ h	0,9295	0,9181	0,01%
$t=300$ h	0,8057	0,7823	0,03%

6.3 Análise de sensibilidade

Para que sejam feitos os cálculos de confiabilidade para os modelos apresentados nos diversos casos escolhidos é necessária determinar uma série de parâmetros. Neste

Capítulo uma análise de sensibilidade para os modelos propostos que fizeram uso de RB é feita a partir da variação de cada um desses parâmetros.

Para tanto, são apresentados gráficos nos quais o eixo das abscissas mostra o erro relativo entre a modelagem padrão e a modelagem feita através de RB. No eixo das ordenadas, encontra-se a variação do parâmetro em questão.

É importante ressaltar que para todas as análises são discutidas as faixas de variação dos parâmetros selecionados, uma vez que para este tipo de análise a interpretação física também é essencial. Com o intuito de observar o comportamento do erro relativo entre a modelagem feita através de uma RB com uma feita através de uma CM, traçam-se 4 curvas distintas, cada uma considerando um intervalo de tempo diferente. Além disso, os erros analisados aqui são referentes a valores de confiabilidade maiores que 80%, caso exista alguma exceção quanto a essa restrição o leitor será avisado.

As Figs. 15 e 16 mostram o erro relativo entre a modelagem a partir de RB e o obtido com a CM para o caso de sistemas com cargas compartilhadas.

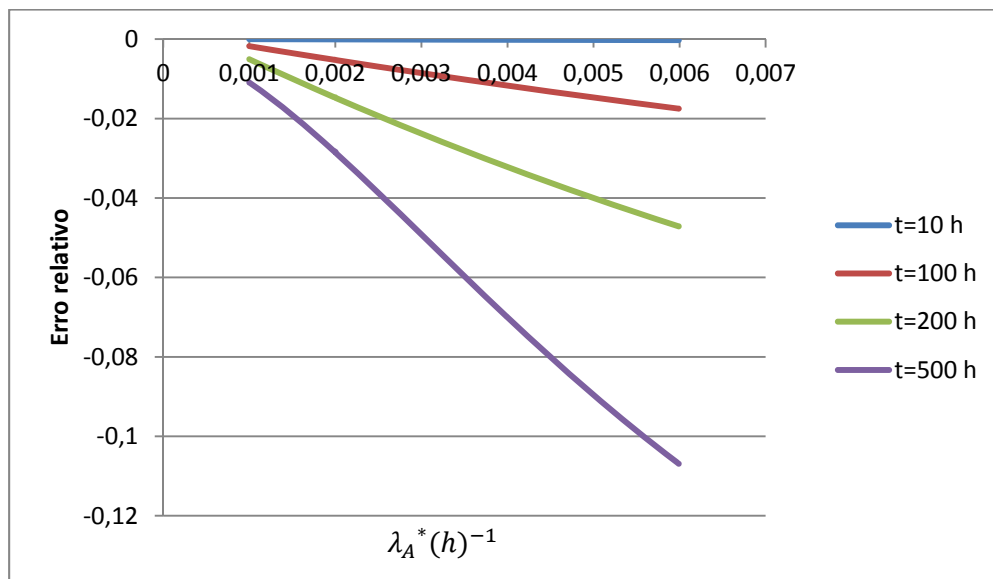


Figura 15- Análise de sensibilidade do sistema com cargas compartilhadas em relação à variação de λ_A^*

Para o gráfico da Fig. 15 foram mantidos constantes os valores de λ_A , λ_B e λ_B^* segundo os valores da Tab. 3 e variando o valor de λ_A^* .

Os valores admitidos por λ_A^* foram escolhidos de tal forma que $\lambda_A^* \geq \lambda_A$. Isso faz sentido, já que este valor representa a taxa de falha do componente A na situação em que B está falho, ou seja, criando uma sobrecarga em A. Não faz sentido λ_A^* diminuir de valor tendo ocorrido uma sobrecarga sob esse componente.

É evidente que o valor absoluto do erro aumenta quando o valor de λ_A^* aumenta e que a taxa com que isso ocorre também aumenta para cada intervalo de tempo analisado. Isso se deve ao fato de que o erro está associado ao produto $\lambda_A^* t$, quando o fator tempo é aumentado a taxa com a qual o erro varia em relação a λ_A^* aumenta, e quando varia o valor de λ_A^* aumentando-o, o valor absoluto do erro deverá aumentar também.

Seguindo este raciocínio, quando considerado um intervalo de tempo igual a 500 h o erro aumenta muito, porém, esta curva só foi traçada com o intuito de observar o comportamento do erro mesmo com baixos valores de confiabilidade dos componentes (inferiores a 80%). Ou seja, apesar desta curva apresentar grandes valores de erro, ela não quer dizer que a modelagem através de RB se mostra ineficiente.

A Fig. 16 mostra a variação do erro relativo entre os modelos apresentados para o caso do sistema com dois componentes com cargas compartilhadas. Para a construção deste gráfico, foram mantidos os valores de λ_B , λ_B^* e λ_A^* , segundo a Tab. 5 e o valor de λ_A variou.

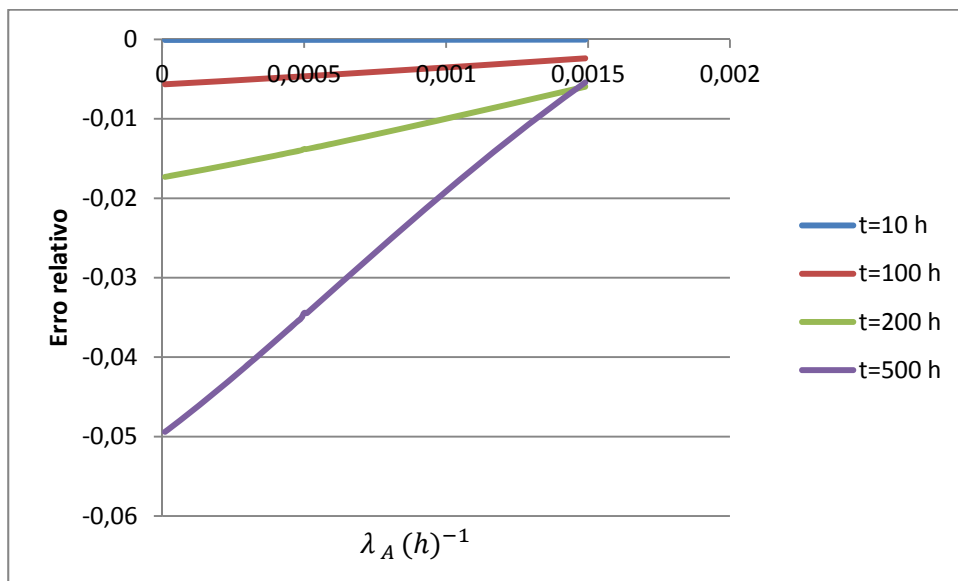


Figura 16- Erro relativo para cargas compartilhadas em relação a λ_A

A faixa de variação de λ_A foi tal que $\lambda_A \leq \lambda_A^*$ pelo mesmo motivo explicado anteriormente, não faz sentido pensar que a taxa de falha do componente A irá diminuir quando estiver sendo requisitado em uma situação de sobrecarga.

Como é evidenciado pelo gráfico da Fig. 16, quanto mais o valor de λ_A se afasta do valor que foi fixado para λ_A^* , respeitando a condição $\lambda_A \leq \lambda_A^*$, maior é o erro relativo entre os modelos para um sistema com cargas compartilhadas.

Assim como no gráfico expresso pela Fig. 15, o comportamento de cada uma das curvas é explicado pelo produto $\lambda_A t$. Quando o fator tempo aumenta a taxa com a qual o erro varia em relação a λ_A aumenta e quando o valor de λ_A varia, aumentando-o, o valor absoluto do erro deverá aumentar também.

Conforme é possível observar nos dois gráficos, quanto mais próximo é o valor de λ_A do valor de λ_A^* , mais a modelagem proposta por RB aproxima-se da solução analítica obtida pela CM.

Não foram expressos os gráficos do comportamento do erro relativo com a variação de λ_B^* nem com a variação de λ_B , já que o comportamento desses gráficos seriam idênticos aos apresentados pelos das Figs. 15 e 16, respectivamente. Isso é facilmente compreendido, já que as taxas λ_B^* e λ_B desempenham o mesmo papel das λ_A^* e λ_A , respectivamente.

As Figs 17 e 18 ilustram os gráficos do erro entre as modelagens através de RB e CM para o caso de FCC.

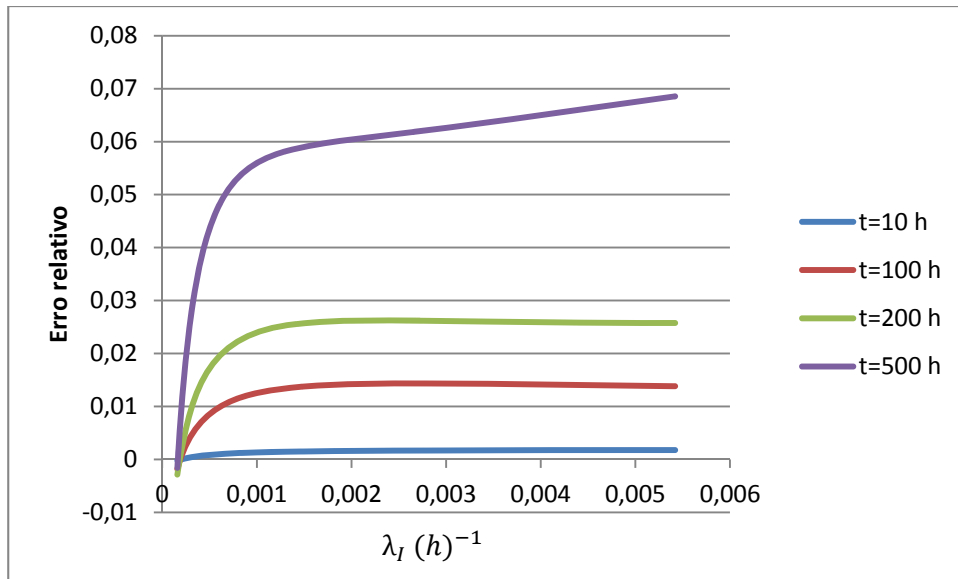


Figura 17- Erro relativo versus a variação de λ_I para falha de causa comum

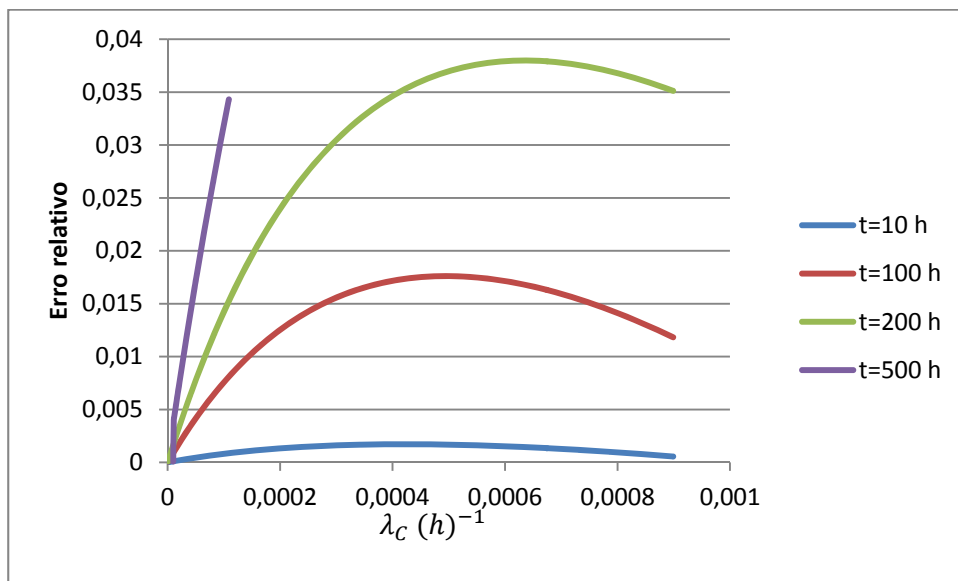


Figura 18- Erro relativo versus a variação de λ_C para falha de causa comum

Para a escolha da faixa de variação de λ_I e λ_C dos gráficos acima foi levado em consideração o seguinte intervalo de valores: $0 \leq \beta \leq 50\%$, onde β é a porcentagem da taxa de FCC para um componente, ver Eq. (3) do Capítulo 2, ou seja, fixando um dos valores de uma das taxas, a outra taxa irá variar para uma variação no valor de β . Essa faixa de valores foi escolhida partindo do pressuposto de que a taxa de FCC não deve ultrapassar o valor da taxa de falha independente do componente.

Para o primeiro gráfico, estabelece-se $\lambda_C = 0.0002 (h)^{-1}$ e para o segundo $\lambda_I = 0.001 (h)^{-1}$, valores que estão de acordo com a Tab. 5.

Pode-se notar para ambos os gráficos que quando o produto λt aumenta o erro também aumenta. O que chama a atenção nas curvas de intervalos de tempo iguais a 10 h, 100 h e 250 h apresentadas pelos gráficos é o fato de que cada uma delas tende a ter o erro estabilizado com a variação de λ . O fato dessa estabilização do erro em uma margem próxima de 0 comprova a eficácia da RB em modelar esse tipo de evento. O mesmo não pode ser dito em relação às curvas do intervalo de tempo de 500 h, uma vez que elas são restritas a valores de confiabilidade inferiores a 80%.

Os gráficos apresentados nas Figs. 19 a 23 são relativos à análise de sensibilidade para a modelagem de redundância com reserva fria. Para este caso, os parâmetros necessários para os cálculos são: dt , λ_A , λ_B e R_S . Em cada uma das análises, os valores que são mantidos constantes são iguais aos da Tab. 5.

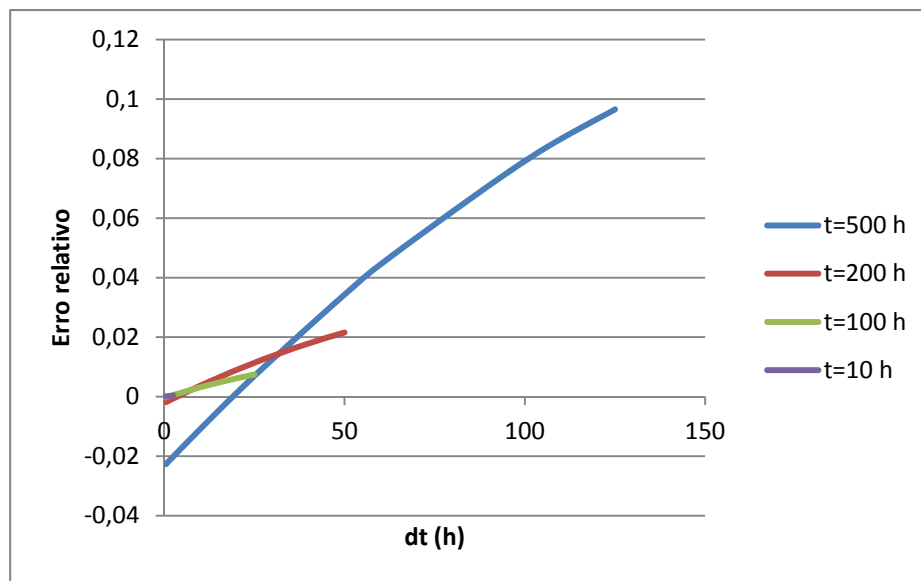


Figura 19- Erro relativo versus a variação de dt para redundância em reserva fria

Nota-se que, para este gráfico, as curvas são limitadas para o valor de dt. Isso se deve ao fato de que para o modelo apresentado de RB é necessário para os cálculos a divisão do intervalo de tempo t em pelo menos 4 subintervalos com valores iguais a dt cada um. Dessa forma, por exemplo, para a curva de t=500 h o máximo valor de dt admitido seria 125 h.

Com essa limitação nos intervalos dos gráficos, a curva que representa o intervalo $t=10$ h fica muito pequena para ser observada no mesmo gráfico que as outras, portanto, ela é apresentada no da Fig. 20.

Fica claro que o erro relativo aumenta quando se fazem os cálculos considerando um menor número de intervalos de tempo (dt maior), nesse caso, quanto mais partições são usadas, até certo ponto, neste modelo numérico, maior é a aproximação do resultado dele quando comparado ao resultado do modelo analítico. Sendo que, em um determinado ponto as soluções geram o mesmo resultado, tendo em vista que algumas das curvas passam pelo eixo das abscissas, tornando o erro igual a zero. Este aspecto será explorado na análise de sensibilidade dos outros parâmetros da modelagem de chaveamento.

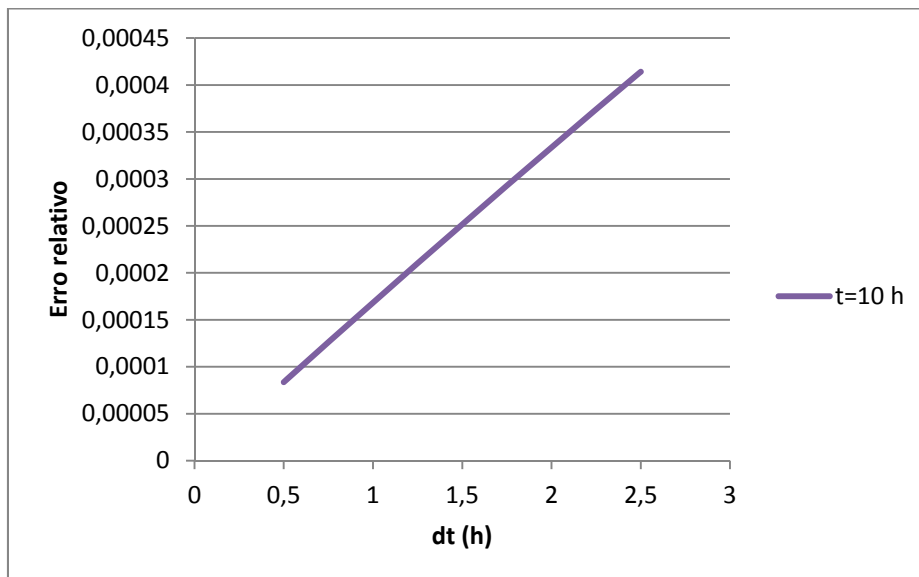


Figura 20- Erro relativo versus a variação de dt para redundância em reserva fria

É muito importante observar que para os resultados dos gráficos das Figs. 21 a 23 foram usados valores da Tab. 5. Entretanto, para a modelagem com RB, é requerido um valor dt . Dessa forma, com o intuito de minimizar o erro, usamos o valor no qual o erro é igual a zero no gráfico da Fig. 19. Para cada intervalo de tempo considerado tem-se uma curva, cada uma dessas curvas corta o eixo das abscissas, logo o valor de dt para o qual isto ocorre minimiza o erro, sendo estes valores usados para as análises de sensibilidade referentes aos gráficos representados pelas Figs 21 a 23.

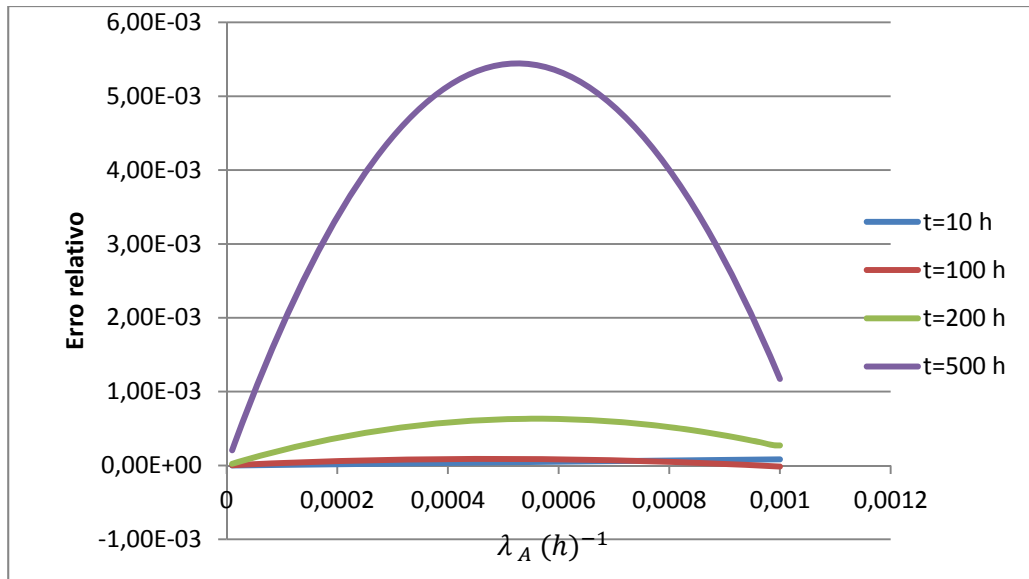


Figura 21- Erro relativo versus a variação de λ_A para redundância em reserva fria

Para o gráfico da Fig. 21 a faixa de variação de λ_A foi escolhida de tal forma que $\lambda_A \leq \lambda_B$, uma vez que o componente A é o principal na operação do sistema e o B é a redundância em reserva fria. Faz sentido imaginar que o componente que é escolhido para operar de forma cotidiana num sistema é aquele com maior confiabilidade, logo é o que possui a menor taxa de falha, justificando assim a restrição usada.

Com a faixa de valores que podem ser admitidos por λ_A determinada, constrói-se a curva de erro relativo. Pelo gráfico da Fig. 21, observa-se que quanto maior o produto λt , maior é o erro relativo absoluto. A modelagem proposta através da RB aproxima-se daquela proposta através da CM para pequenos valores de λ_A (quanto menor o valor de λt , menor é o erro), além disso, também é visível uma diminuição do erro quando λ_A se aproxima de λ_B . Dessa forma, o gráfico toma uma forma parabólica com concavidade voltada para baixo, existindo um máximo da função entre esses dois pontos para cada uma das curvas. Como o maior valor de erro relativo observado é da ordem de 10^{-3} , a modelagem através de RB mostrou-se eficaz.

Seguindo a restrição $\lambda_A \leq \lambda_B$, discutida na análise do gráfico anterior, são estabelecidas as curvas de erro relativo para os quatro valores de t escolhidos anteriormente, agora com a variação de λ_B .

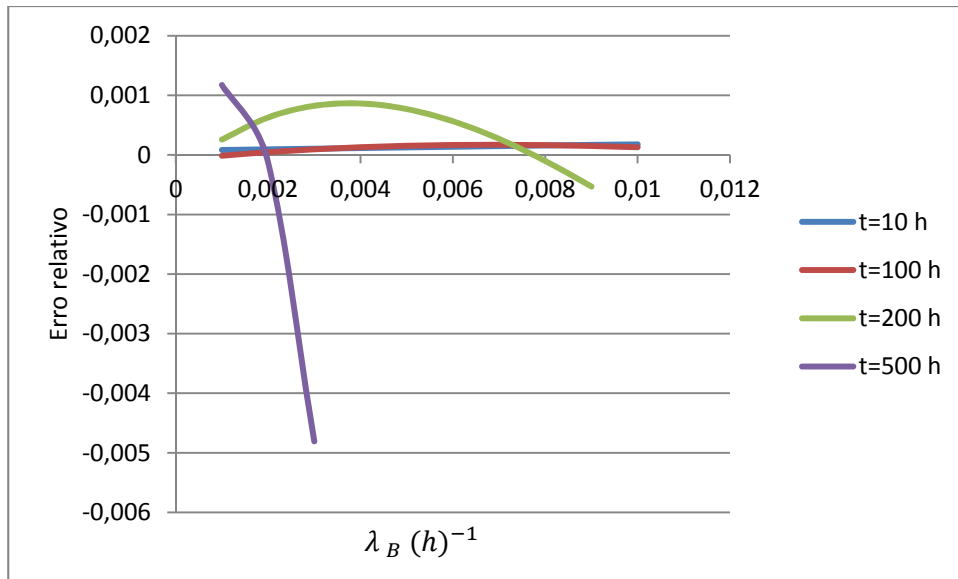


Figura 22- Erro relativo versus a variação de λ_B para redundância em *cold standby*

Com o aumento do valor do intervalo t considerado, maior é a sensibilidade do erro com relação à variação de λ_B . Considerando a faixa de variação que respeite $\lambda_A \leq \lambda_B$, como mencionado acima, além de que o gráfico foi traçado apenas para valores de confiabilidade do sistema acima de 80%, pode-se concluir que a modelagem através de RB mostrou-se eficaz, uma vez que os erros se restringiram a um valor absoluto máximo inferior a 0,005.

O gráfico da Fig. 23 mostra como o erro relativo se comporta com a variação do valor da chance de sucesso no processo de chaveamento.

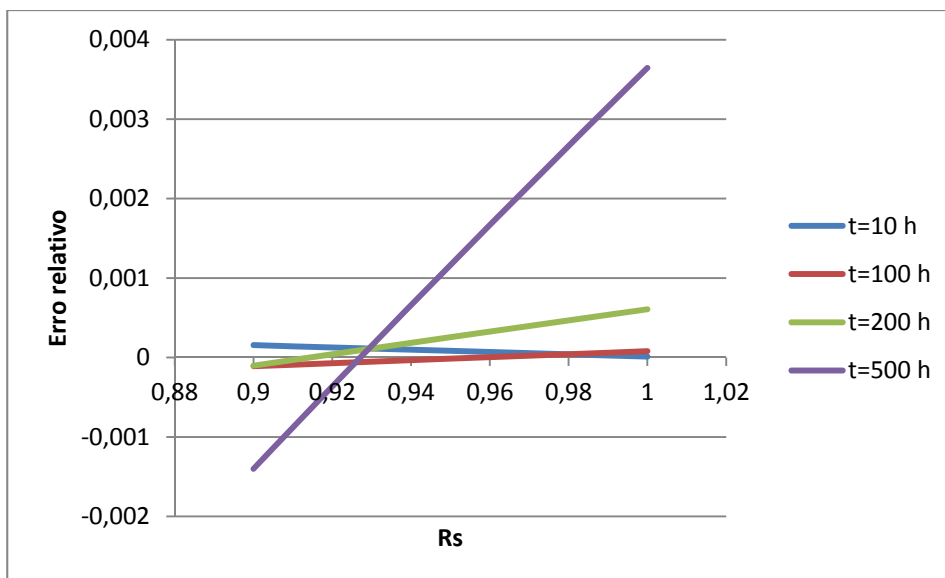


Figura 23- Erro relativo versus a variação de λ_B para redundância em *cold standby*

É possível perceber que o chaveamento causa uma variação linear no erro relativo. Quanto maior for o intervalo de tempo considerado, maior será a sensibilidade do erro. Esse gráfico foi construído assumindo que uma possível faixa de variação dos valores para o chaveamento vão de 90% a 100% de chance de sucesso. Essa análise aponta um bom desempenho para as RB em seu propósito. Ela rendeu resultados nos quais o valor absoluto do erro relativo ficou restrito a um erro inferior a 1%.

Com a análise de sensibilidade feita para os casos de FCC, cargas compartilhadas e redundância em *cold standby*, resta apenas o caso do sistema ponte. Para este caso, a comparação da modelagem feita através de RB foi feita com uma modelagem utilizando o método do pivoteamento. Essa escolha foi justificada na sessão referente a esse caso e, na mesma seção, é exposto que a equação que a modelagem através de RB fornece é idêntica àquela obtida pelo método de pivoteamento. Portanto, independente de quaisquer que sejam os valores usados nessas duas modelagens para o cálculo da confiabilidade, serão obtidos resultados exatamente iguais. Dessa forma, pode-se afirmar que a modelagem proposta através de RB fornece resultados apreciáveis, uma vez que ela tem solução idêntica ao método de pivoteamento.

Também foi feita uma análise de sensibilidade para o estudo de caso em questão. Foi construído um conjunto de curvas em dois gráficos, cada uma representando o comportamento do erro em relação aos parâmetros β_{Bomba} e $\beta_{Válvula}$ para cada intervalo de tempo considerado.

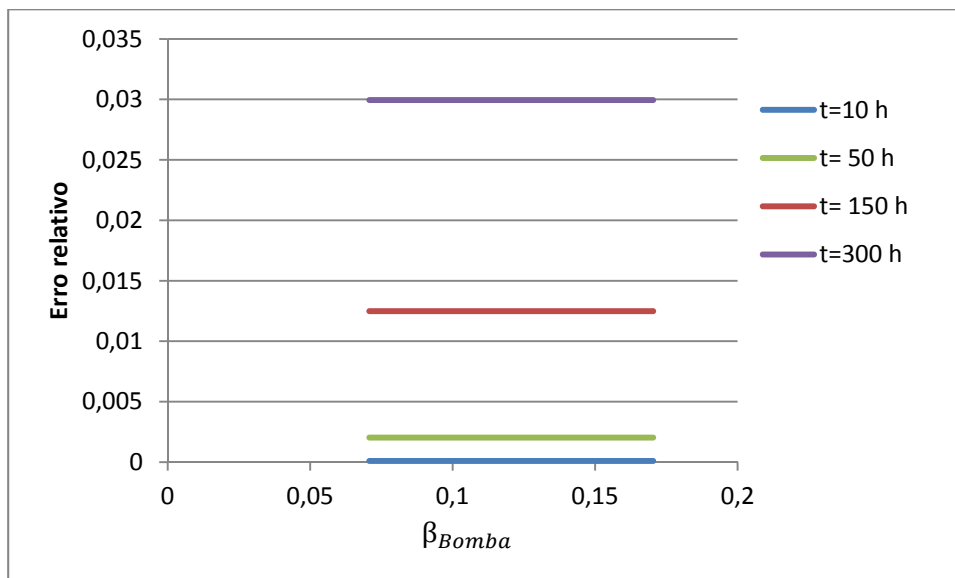


Figura 24- Erro relativo versus a variação de β_{Bomba}

Para o gráfico da Fig. 24 mantiveram-se constantes os valores da Tab. 7 variando apenas o valor de β_{Bomba} . Na Tab. 1 encontram-se dois valores, um médio e um limite superior para β_{Bomba} , a variação desse parâmetro para esta análise foi tal que $0,07 < \beta_{Bomba} < 0,17$, ou seja, β_{Bomba} está variando ente esses valores.

O gráfico mostra que o erro relativo entre os dois modelos não varia com o β_{Bomba} , porém ele aumenta quando se consideram intervalos de tempo maiores.

Da mesma forma, é construído o gráfico para o erro relativo variando o valor de $\beta_{Válvula}$, mostrado na Fig. 25.

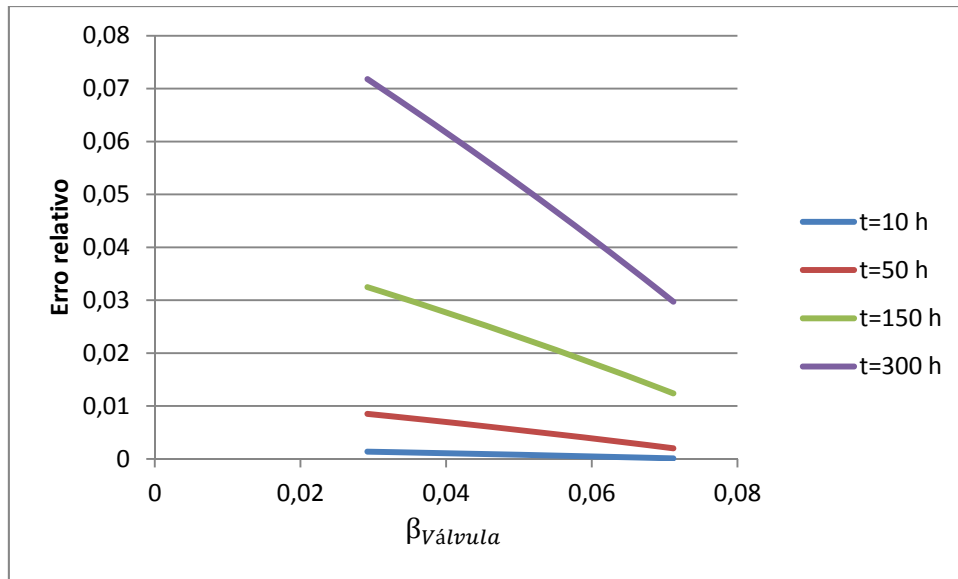


Figura 25- Erro relativo versus $\beta_{válvula}$

No gráfico da Fig. 25 o erro se reduz linearmente com o aumento de $\beta_{válvula}$ e é possível dizer que as duas modelagens estiveram bem de acordo uma com a outra para este problema, uma vez que os erros mantiveram valores baixos nas análises feitas.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho discutiu e analisou modelagens típicas de ED a partir de CM ou pivoteamento comparando os resultados com os obtidos através de RB, sem considerar reparo. A intenção era verificar a capacidade de utilizar RB para a modelagens de ED, uma vez que CM tornam-se problemáticas nessa tarefa, devido ao grande número de estados a serem considerados na elaboração do diagrama de transição e com isso, o grande número de equações diferenciais que devem ser resolvidas.

RB geraram resultados bem próximos dos obtidos para o modelo de pivoteamento e CM. RB estáticas e discretizadas no tempo foram usadas com o objetivo de verificar a sua capacidade de modelar situações específicas como chaveamento com redundância em *cold standby*.

Uma limitação neste trabalho que (será explorada em trabalhos futuros) é tratar a confiabilidade levando em conta também o reparo, que não foi levado em consideração até então. Este tratamento deverá ser feito com RB discretizadas no tempo, como foi o tratamento da redundância em *cold standby*.

As RB podem tratar diversos ED e têm a vantagem de poder contar com a opinião de especialistas para estimar probabilidades. Além disso, existe outra vantagem no uso de RB, que é o fato de que o modelo não é limitado ao período de vida útil dos componentes, ou seja, a confiabilidade dos componentes pode seguir qualquer tipo de distribuição, não sendo exclusivamente uma distribuição exponencial.

Referências

Angra 1, ETN, Final Safety Analysis Report, Rev. 34, Rio de Janeiro, Brasil, 2005a.

Billinton, R e Singh, C. System Reliability Modelling and Evaluation, Hutchinson, London, UK, 1977.

Bobbio, A, Portinale L.; Minichino, M.; Ciancarmela, E.. “Improving the analysis of dependable systems by mapping fault trees into Bayesian networks”. Reliability Engineering and Systems Safety, 2001.

Ebeling C.E.. “An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering”. MacGraw-Hill, Boston, Massachusetts, 1997.

ISO - International Organization Standardization (2004) - “Petroleum and natural gas industries - Collection and exchange of reliability and maintenance data for equipment”, 2004.

Jensen, F. V. e Nielsen, T. D. Bayesian Networks and Decision Graphs, Springer-Verlag, New York, USA 2007.

Khakzad, N, Khan F. e Amyotte, P., "Risk-based design of process systems using discrete-time Bayesian networks", Reliability Engineering and System Safety, 109, pp.5-17, 2013.

Langseth, H.; Portinali, L.. “Bayesian networks in reliability”. Reliability Engineering and System Safety, 2007

Lee, C.J. e Lee, K.J. “Application of Bayesian network to the probabilistic risk assessment of nuclear waste disposal”, Reliability Engineering and System Safety, 2006.

Lewis, E.E.. “Introduction to Reliability Engineering”, John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, New York 1996.

NUREG-1150, Reactor Risk Reference Document, US Nuclear Regulatory Commission, Washington, DC, 1987.

Ramakumar, R. Engineering Reliability: Fundamentals and Applications, Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, USA, 1993.

Wolfram, <http://www.wolfram.com/mathematica>, acessado em agosto de 2013.

Apêndice I

*Programa Redundância em cold standby
(em linguagem Python 2.7.5)*

```
#Redundância em cold standby
```

```
from math import *
```

```
#Solução por Redes Bayesianas
```

```
def RB(t,dt,lambA,lambB,Rs):
```

```
    intervalos=int(t/dt)
```

```
    Bf_dado_Afalho_chaveado=[]
```

```
    Bf_dado_Afalho_naochaveado=[]
```

```
    R_=[]
```

```
    for i in range(intervalos-1):
```

```
        Bf_dado_Afalho_chaveado.append([])
```

```
    for i in range(intervalos-1):
```

```
        for j in range(intervalos):
```

```
            Bf_dado_Afalho_c_chaveado[i][j]=exp(-lambB*(j-i)*dt)*(exp(lambB*dt)- 1)
```

```
    for i in range(intervalos-1):
```

```
        for j in range(intervalos-1):
```

```
            if Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j]!=0:
```

```
                Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j+1]=exp(-lambB*(j-i)*dt)*(exp(lambB*dt)- 1)
```

```
    for i in range(intervalos-1):
```

```
        for j in range(intervalos):
```

```
            if j>0:
```

```
                Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j]=Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j]*(1-
```

```
Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j-1])
```

```
    for i in range(intervalos-1):
```

```
        Bf_dado_Afalho_chaveado[i][intervalos-1]=1+1-exp(-lambB*dt)-
```

```
sum(Bf_dado_Afalho_chaveado[i])
```

```

for i in range(intervalos-1):
    Bf_dado_Afalho_naochaveado.append([])

for i in range(intervalos-1):
    for j in range(intervalos):
        Bf_dado_Afalho_naochaveado[i].append(0)

for i in range(intervalos-1):
    for j in range(intervalos):
        if j==i+1:
            Bf_dado_Afalho_naochaveado[i][j]=1

def inconf_dado_chaveamento(intervalo):
    inconf=0
    for i in range(intervalos-1):
        inconf+=Bf_dado_Afalho_chaveado[i][intervalo]*(1-exp(-lambA*dt))
    return inconf*Rs

def inconf_dado_nao_chaveado(intervalo):
    inconf=0
    for i in range(intervalos-1):
        inconf+=Bf_dado_Afalho_naochaveado[i][intervalo]*(1-exp(-lambA*dt))
    return inconf*(1-Rs)

def inconf(intervalo):
    return
inconf_dado_chaveamento(intervalo)+inconf_dado_nao_chaveado(intervalo)

for i in range(intervalos-1):
    R_.append(inconf(i))

R_.pop(len(R_-1))

return 1-sum(R_)

```

#Solução por Markov

```
def MC(t,dt,lambA,lambB,Rs):
```

```
    if lambA==lambB:
```

```
        return exp(-lambA*t)*(1+lambA*Rs*t)
```

```
    if lambA!=lambB:
```

```
        return 1-exp(-t*lambB-t*lambB)*(lambA*exp(t*lambB)-  
lambA*exp(t*lambB+t*lambA)+Rs*lambA*exp(t*lambA)-Rs*lambA*exp(t*lambB)-  
lambB*exp(t*lambB)+lambB*exp(t*lambA+t*lambB))/(lambB-lambA)
```

#Calcula o erro entre os dois métodos com um determinado conjunto de valores t,dt,lambA,lambB e Rs

```
def ERRO(t,dt,lambA,lambB,Rs):
```

```
    return -(MC(t,dt,lambA,lambB,Rs)-  
RB(t,dt,lambA,lambB,Rs))/MC(t,dt,lambA,lambB,Rs)  
    haveado[i].append(0)
```

```
    for i in range(intervalos-1):
```

```
        for j in range(intervalos):
```

```
            if j==i+1:
```

```
                Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j]=exp(-lambB*(j-i)*dt)*(exp(lambB*dt)- 1)
```

```
    for i in range(intervalos-1):
```

```
        for j in range(intervalos-1):
```

```
            if Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j]!=0:
```

```
                Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j+1]=exp(-lambB*(j-i)*dt)*(exp(lambB*dt)- 1)
```

```
    for i in range(intervalos-1):
```

```
        for j in range(intervalos):
```

```
            if j>0:
```

```

        Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j]=Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j]*(1-
Bf_dado_Afalho_chaveado[i][j-1])

for i in range(intervalos-1):
    Bf_dado_Afalho_chaveado[i][intervalos-1]=1+1-exp(-lambB*dt)-
sum(Bf_dado_Afalho_chaveado[i])

for i in range(intervalos-1):
    Bf_dado_Afalho_naochaveado.append([])

for i in range(intervalos-1):
    for j in range(intervalos):
        Bf_dado_Afalho_naochaveado[i].append(0)

for i in range(intervalos-1):
    for j in range(intervalos):
        if j==i+1:
            Bf_dado_Afalho_naochaveado[i][j]=1

def inconf_dado_chaveamento(intervalo):
    inconf=0
    for i in range(intervalos-1):
        inconf+=Bf_dado_Afalho_chaveado[i][intervalo]*(1-exp(-lambA*dt))
    return inconf*Rs

def inconf_dado_nao_chaveado(intervalo):
    inconf=0
    for i in range(intervalos-1):
        inconf+=Bf_dado_Afalho_naochaveado[i][intervalo]*(1-exp(-lambA*dt))
    return inconf*(1-Rs)

def inconf(intervalo):
    return
inconf_dado_chaveamento(intervalo)+inconf_dado_nao_chaveado(intervalo)

```



```

for i in range(intervalos-1):
    R_.append(inconf(i))

R_.pop(len(R_)-1)

return 1-sum(R_)

#Solução por Markov

def MC(t,dt,lambA,lambB,Rs):

    if lambA==lambB:
        return exp(-lambA*t)*(1+lambA*Rs*t)

    if lambA!=lambB:
        return 1-exp(-t*lambB-t*lambB)*(lambA*exp(t*lambB)-
lambA*exp(t*lambB+t*lambA)+Rs*lambA*exp(t*lambA)-Rs*lambA*exp(t*lambB)-
lambB*exp(t*lambB)+lambB*exp(t*lambA+t*lambB))/(lambB-lambA)

#Calcula o erro entre os dois métodos com um determinado conjunto de valores
t,dt,lambdaA,lambdaB e Rs

def ERRO(t,dt,lambA,lambB,Rs):
    return -(MC(t,dt,lambA,lambB,Rs)-
RB(t,dt,lambA,lambB,Rs))/MC(t,dt,lambA,lambB,Rs)

```

Apêndice II

Programa Solução de Cadeias de Markov (Mathematica 9.0)

**Algumas linhas foram ocultadas propositalmente.*

Solução da cadeia de Markov para cargas compartilhadas:

$$\text{eqa} = \frac{d}{dt} p1[t] = -(\lambda_a + \lambda_b) p1[t]$$

$$\text{eqb} = \frac{d}{dt} p2[t] = -\lambda_B p2[t] + \lambda_a p1[t]$$

$$\text{eqc} = \frac{d}{dt} p3[t] = \lambda_b p1[t] - \lambda_A p3[t]$$

$$\text{eqd} = \frac{d}{dt} p4[t] = \lambda_B p2[t] + \lambda_A p3[t]$$

$$\text{eqe} = p1[t] \square 1 \quad / . \quad t \rightarrow 0$$

$$\text{eqf} = p2[t] \square 0 \quad / . \quad t \rightarrow 0$$

$$\text{eqg} = p3[t] \square 0 \quad / . \quad t \rightarrow 0$$

$$\text{eqh} = p4[t] \square 0 \quad / . \quad t \rightarrow 0$$

```
Sol=DSolve[{eqa,eqb,eqc,eqd,eqe,eqf,eqg,eqh},{p1[t],p2[t],p3[t],p4[t]},t][[1]]
```

```
p1[t_]=Sol[[1]][[2]]
```

```
p2[t_]=Sol[[2]][[2]]
```

```
p3[t_]=Sol[[3]][[2]]
```

```
p4[t_]=Sol[[3]][[2]]
```

```
FullSimplify[p1[t]+p2[t]+p3[t]]
```

$$e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B - \lambda_B^*} [e^{-\lambda_B^* t} - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}] + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B - \lambda_A^*} [e^{-\lambda_A^* t} - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}]$$

Solução da cadeia de Markov para chaveamento:

$$\text{eqa} = \frac{d}{dt} P1[t] = -\lambda_a P1[t]$$

$$\text{eqb} = \frac{d}{dt} P2[t] = R_s \lambda_a P1[t] - \lambda_b P2[t]$$

$$\text{eqc} = \frac{d}{dt} P3[t] = (1 - R_s) \lambda_a P1[t] + \lambda_b P2[t]$$

$$\text{eqd} = P1[t] \square 1 \quad / . \quad t \rightarrow 0$$

$$eqe = P2[t] \square 0 /. t \rightarrow 0$$

$$eqf = P3[t] \square 0 /. t \rightarrow 0$$

```
Sol=DSolve[{eqa, eqb, eqc, eqd, eqe, eqf}, {P1[t], P2[t], P3[t]}, t][[1]]
```

$$P1[t_] = Sol[[1]][[2]]$$

$$P2[t_] = Sol[[2]][[2]]$$

$$P3[t_] = Sol[[3]][[2]]$$

```
FullSimplify[P1[t]+P2[t]]
```

$$\frac{\lambda_A R_S}{\lambda_A - \lambda_B} (e^{-\lambda_S t} - e^{-\lambda_A t}) + e^{-\lambda_A t}$$

Solução da cadeia de Markov para falha de causa comum (taxas diferentes):

$$eqa = \square_t p1[t] == -\lambda_a p1[t] - \lambda_b p1[t]$$

$$eqb = \square_t p2[t] == \lambda_a p1[t] - \lambda_b p2[t]$$

$$eqc = \square_t p3[t] == \lambda_b p1[t] - \lambda_a p3[t]$$

$$eqd = \square_t p4[t] == \lambda_b p2[t] + \lambda_a p3[t]$$

$$eqe = p1[t] \square 1 /. t \rightarrow 0$$

$$eqf = p2[t] \square 0 /. t \rightarrow 0$$

$$eqg = p3[t] \square 0 /. t \rightarrow 0$$

$$eqh = p4[t] \square 0 /. t \rightarrow 0$$

```
Sol=DSolve[{eqa, eqb, eqc, eqd, eqe, eqf, eqg, eqh}, {p1[t], p2[t], p3[t], p4[t]}, t][[1]]
```

$$p1[t_] = Sol[[1]][[2]]$$

$$p2[t_] = Sol[[2]][[2]]$$

$$p3[t_] = Sol[[3]][[2]]$$

$$p4[t_] = Sol[[4]][[2]]$$

```
FullSimplify[p1[t]+p2[t]+p3[t]]
```

$$e^{-t(\lambda_a+\lambda_b)}(e^{\lambda_a t} + e^{\lambda_b t} - 1)$$

Solução da cadeia de Markov para falha de causa comum (componentes com taxas iguais):

$$\text{eqa} = \frac{d}{dt} p1[t] = - (2\lambda_I + \lambda_C) p1[t]$$

$$\text{eqb} = \frac{d}{dt} p2[t] = 2\lambda_I p1[t] + \lambda_I p2[t]$$

$$\text{eqc} = \frac{d}{dt} p3[t] = \lambda_C p1[t] - \lambda_I p2[t]$$

$$\text{eqd} = p1[t] \square 1 \quad /. \quad t \rightarrow 0$$

$$\text{eqe} = p2[t] \square 0 \quad /. \quad t \rightarrow 0$$

$$\text{eqf} = p3[t] \square 0 \quad /. \quad t \rightarrow 0$$

```
Sol=DSolve[{eqa,eqb,eqc,eqd,eqe,eqf},{p1[t],p2[t],p3[t]},t][[1]]
```

$$p1[t_] = Sol[[1]][[2]]$$

$$p2[t_] = Sol[[2]][[2]]$$

$$p3[t_] = Sol[[3]][[2]]$$

```
FullSimplify[p1[t]+p2[t]]
```

$$\frac{I}{\lambda_I + \lambda_C} [2\lambda_I e^{-\lambda_I t} - (\lambda_I - \lambda_C) e^{-2(\lambda_I + \lambda_C)t}]$$



Created with Wolfram *Mathematica* 9.0