



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

DIAGNOSTICABILIDADE EM SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS FUZZY

Adonis Arantes de Souza

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores: Marcos Vicente de Brito Moreira
Lilian Kawakami Carvalho

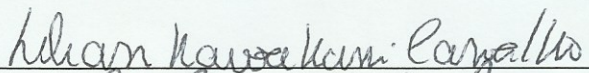
Rio de Janeiro
Novembro de 2017

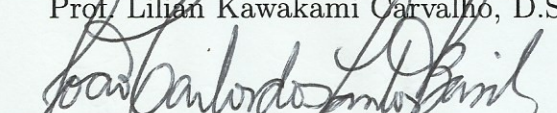
DIAGNOSTICABILIDADE EM SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS FUZZY

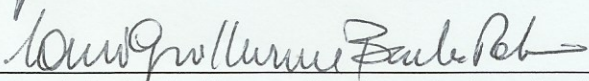
Adonis Arantes de Souza

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO DE AUTOMAÇÃO.

Examinado por:


Prof. Lilian Kawakami Carvalho, D.Sc.


Prof. João Carlos dos Santos Basílio, Ph.D.


Prof. Luís Guilherme Barbosa Rolim, Dr.Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

NOVEMBRO DE 2017

Arantes de Souza, Adonis

Diagnosticabilidade em Sistemas a Eventos Discretos Fuzzy/Adonis Arantes de Souza. – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2017.

VIII, 79 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Marcos Vicente de Brito Moreira

Lilian Kawakami Carvalho

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia de Controle e Automação, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 77 – 79.

1. Sistemas a Eventos Discretos. 2. Autômatos Fuzzy. 3. Sistemas a Eventos Discretos Fuzzy. 4. Diagnosticabilidade fuzzy de falhas. I. Vicente de Brito Moreira, Marcos *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia de Controle e Automação. III. Título.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Automação.

DIAGNOSTICABILIDADE EM SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS FUZZY

Adonis Arantes de Souza

Novembro/2017

Orientadores: Marcos Vicente de Brito Moreira

Lilian Kawakami Carvalho

Curso: Engenharia de Controle e Automação

A teoria de diagnose de falhas, em se tratando de sistemas a eventos discretos, propicia a identificação em tempo real de eventos indesejáveis no ciclo de vida de sistemas de natureza discreta. Para sistemas que envolvem uma complexidade maior apresentando características imprecisas ou incompletas, é necessário reformular a teoria de diagnose de falhas, levando em conta o caso fuzzy. Este trabalho apresenta uma revisão teórica, trazendo conceitos de sistemas a eventos discretos e da teoria fuzzy. Além disso, realiza extensão da teoria de sistemas a eventos discretos e da teoria de diagnose de falhas para o caso fuzzy, abordando o conceito de diagnosticabilidade fuzzy. Ainda uma condição necessária e suficiente para determinação da diagnosticabilidade fuzzy é apresentada se utilizando de diagnosticadores fuzzy de falhas.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

DIAGNOSABILITY OF FUZZY DISCRETE-EVENT SYSTEMS

Adonis Arantes de Souza

November/2017

Advisor: Marcos Vicente de Brito Moreira

Lilian Kawakami Carvalho

Course: Automation and Control Engineering

The failure diagnosis theory, in the case of discrete event systems, provides the real-time identification of undesirable events on discrete event systems. It is necessary to reformulate the failure diagnosis theory, taking into account the fuzzy case to cope systems that present greater complexity having imprecise or incomplete characteristics. This work address a theory revision, showing concepts of fuzzy discrete events systems and fuzzy theory. Furthermore, it extends the theory of discrete event systems and the failure diagnosis to the fuzzy case, approaching fuzzy diagnosability. Besides that a necessary and sufficient condition to fuzzy diagnosability is presented using fuzzy failure diagnosers.

Sumário

Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Sistemas a Eventos Discretos	8
2.1 Linguagens	9
2.2 Autômatos	11
2.3 Observabilidade	16
2.4 Diagnose de Falhas	18
2.4.1 Diagnosticabilidade de Falhas	18
2.4.2 Autômato Diagnosticador	20
3 Teoria Fuzzy	26
3.1 Introdução	26
3.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy	27
3.2.1 Conjuntos Clássicos	27
3.2.2 Conjuntos Fuzzy	28
3.3 Teoria das Relações Fuzzy	34
3.3.1 Relações Clássicas	35
3.3.2 Operações e Propriedades de Relações Clássicas	37
3.3.3 Composição de Relações Clássicas	38
3.3.4 Relações Fuzzy	40
3.3.5 Operações e Propriedades de Relações Fuzzy	42
3.3.6 Composição de Relações Fuzzy	42
4 Diagnosticabilidade de Sistemas a Eventos Discretos Fuzzy	46
4.1 Sistemas a Eventos Discretos Fuzzy	46
4.1.1 Formulação alternativa de SED	47
4.1.2 SEDF - Sistemas a Eventos Discretos Fuzzy	49
4.2 Diagnosticabilidade Fuzzy	52
4.3 Autômato Diagnosticador Fuzzy	59

5 Conclusão	75
Referências Bibliográficas	77

Lista de Figuras

2.1	Autômato Simples	14
2.2	Autômato Utilizado no Exemplo 3	18
2.3	Autômato Observador	18
2.4	Autômato Rotulador	21
2.5	Autômato Diagnosticador	21
2.6	Elementos fortemente conexos	24
2.7	G_{scc} , obtido a partir do diagnosticador da figura	24
3.1	Conjuntos Crisp	28
3.2	Conjuntos Fuzzy	29
3.3	Gráfico Função de Pertinência	33
3.4	Funções de Pertinência	34
3.5	Diagrama de Sagittal - Relações	36
3.6	Relações de Proximidade entre Cidades	37
3.7	Composição entre Relações	38
3.8	Relações Fuzzy	41
4.1	Autômato Utilizado no Exemplo 3	47
4.2	Autômato do Exemplo 14	50
4.3	Funções de Pertinência associadas ao exemplo 13	51
4.4	FDES do exemplo de Qiu	58
4.5	Diagnosticador Fuzzy	63
4.6	Automato fuzzy do Exemplo de Qiu	69
4.7	Diagnosticador Fuzzy com relação a $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\gamma}$	72
4.8	Diagnosticador Fuzzy com relação a $\tilde{\beta}$	72
4.9	Diagnosticador Fuzzy com relação a $\tilde{\theta}$	73

Capítulo 1

Introdução

Com o advento da indústria 4.0, a revolução criada pelos novos paradigmas tecnológicos permite que dados e informações sejam trabalhadas em prol da inovação. As estratégias de avaliação de dados e cenários fomentam as análises preditivas, de modo a garantir os objetivos desse novo patamar de revolução, quais sejam a redução de custos, aumento da segurança, redução de erros, aumento da qualidade de vida, entre outros.

Aliando os novos integrantes deste cenário de tecnologias com as técnicas clássicas e difundidas de automação, é possível estender a capacidade e escopo visando analisar, controlar e prever os sistemas de maneiras não convencionais. Nesse contexto, faz-se necessário que algumas técnicas clássicas que pouco haviam sido desenvolvidas anteriormente, sejam estudadas com mais afinco, de modo a permitir que esse novo paradigma seja aproveitado em sua totalidade. No presente texto, os Sistemas a Eventos Discretos (SEDs), bem como a teoria fuzzy são atrelados de maneira a propiciar a geração de valor nesse novo paradigma.

É notória a importância dos sistemas a eventos discretos em ambientes industriais. Tais tipos de sistemas dinâmicos estão presentes em diversos setores da indústria e até mesmo em ambientes não industriais, tais como residenciais, biológicos, econômicos, entre outros. Desde controladores programáveis em processos químicos até a completa automação de uma linha de produção automotiva, passando pela indústria de óleo e gás, os conceitos e teorias relacionados a sistemas a eventos discretos possuem importância fundamental, propiciando o controle de processos de natureza

discreta de modo mais acurado. Importância ainda maior pode ser dada à teoria de SEDs, uma vez que é fato que diversos sistemas de caráter contínuo também podem ser modelados através de estados e transição de eventos, levando em conta um relativo grau de abstração.

De forma simplificada, os SEDs são sistemas dinâmicos cuja evolução dos mesmos se dá através de transições entre os estados discretos do sistema, sendo tais transições motivadas pela ocorrência de eventos, não necessariamente síncronos com o tempo. Por eventos, podemos entender ações de ocorrência abrupta ou o atingimento de determinadas condições, como por exemplo o apertar de um botão, a administração de um determinado medicamento, o atingimento de um nível de um tanque, etc. Além das aplicações em indústrias química, automotiva e óleo e gás, como acima mencionado, podem-se encontrar aplicações em robótica, sistemas econômicos, tráfego urbano, sistemas biomédicos, redes de comunicação, entre outros.

No contexto de SEDs, a diagnose de falhas tem recebido atenção especial devido à busca por confiabilidade e segurança na operação de sistemas, o que é potencializado caso o comportamento normal do sistema seja alterado. Diagnosticar a ocorrência de falhas em sistemas em tempo hábil é uma das características imprescindíveis requeridas aos sistemas atuais, uma vez que a interrupção dos sistemas, ou ainda, a queda do desempenho global podem gerar danosas consequências econômicas e até mesmo risco à segurança.

Dentre os avanços em termos de teoria de diagnose de falhas de SEDs, partindo da introdução do conceito na década de 90 por LIN [1] e SAMPATH *et al.* [2], diversos pesquisadores buscaram novas formas de garantir com menor custo computacional e de maneira mais rápida a exata informação de existência de falha em um sistema. Estudos relacionados podem ser vistos em CASSANDRAS e LAFORTUNE [3] e BASILIO *et al.* [4], por exemplo. Da teoria proposta nessas fontes, entende-se que a diagnose de falhas baseada em SEDs visa detectar, após um número finito de ocorrência de eventos, se determinado evento de falha ocorreu. Assim, visto que a diagnose se baseia na ocorrência de eventos registráveis por sensores, os seguintes

paradigmas norteiam a diagnose de falhas via SEDs.

1. As falhas a serem diagnosticadas são eventos não observáveis, isto é, eventos cujas ocorrências não pode ser registrada por sensores, uma vez que falhas observáveis são triviais de serem identificadas;

2. A ocorrência de falhas altera o comportamento do sistema, porém não necessariamente leva o sistema a uma parada; por exemplo, em sistemas de manufatura, a ocorrência de uma falha não diagnosticada pode levar a uma degradação dos indicadores de eficácia global dos equipamentos (disponibilidade, eficiência e qualidade).

A diagnose de falhas em sistemas que apresentam maior complexidade, dada a natureza ambígua ou imprecisa como fator característico, obrigou a estender a pesquisa abordando conceitos fuzzy, como iniciado por KILIC *et al.* [5]. Entretanto, para que fosse possível realizar essa abordagem de diagnose de falhas é necessária a proposição e amadurecimento das teorias relacionadas.

O termo fuzzy em si não possui uma tradução bem definida, sendo comumente utilizados os termos nebuloso ou difuso. Sua principal característica é possibilitar a modelagem de informações não precisas através de um arcabouço matemático. De forma geral, três tipos de informações são trabalhadas, como segue.

- Informações inacuradas, com valores não precisos ou representados por uma faixa aceitável;
- Informações incertas, em que podem existir dúvidas na veracidade da informação em si; e
- Informações incompletas, cujo conhecimento da realidade / medições são parciais.

De uma maneira geral, o pioneirismo no estudo e proposição de uma teoria fuzzy é atribuído a Zadeh, que em [6] realizou o desenvolvimento de uma teoria de conjuntos fuzzy e, posteriormente, uma extensão da lógica matemática para representar as imprecisões. Em termos práticos, existe uma considerável diferença entre a lógica convencional, também denotada como “crisp” no contexto de estudos fuzzy, e

a lógica fuzzy. Enquanto a lógica crisp encara a realidade de maneira binária, no contexto fuzzy são permitidos graus intermediários que possibilitam trabalhar a vagueza e incerteza intrínsecas. Dada essa característica, sua aplicação vem crescendo e estudos nos mais diversos campos de atuação de pesquisa científica tem sido desenvolvidos, como na análise de sistemas dinâmicos, controle de processos, inteligência computacional, robótica, sistemas econômicos e sistemas biomédicos.

A utilização da lógica fuzzy juntamente com a teoria de SED foi intensificada a partir do fim da década de 90. Sua principal motivação foi modelar e analisar sistemas discretos, cuja identificação de um estado é ambíguo ou impreciso e que a transição entre um estado e outro não seja tão bem definida. O formalismo matemático fuzzy permite que essas ambiguidades ou imprecisões sejam modeladas, ao invés de serem desconsideradas. Dessa forma, um estado discreto pouco menos preciso, e que carrega fatores subjetivos em sua natureza pode ser discriminado através de um conjunto fuzzy de estados, como veremos ao longo deste texto. Por exemplo, a condição de saúde de um paciente pode ser modelada através dos estados: bom, ruim ou razoável, porém a definição objetiva de cada um desses estados fica muito dificultada, sendo avaliadas de maneira subjetiva pela visão de um especialista.

Em termos de representação, enquanto o formalismo de um SED convencional se dá através de autômatos e sua linguagem gerada através da evolução dos eventos, os trabalhos de LIN [1], apresentam a adoção de um framework para integração das teorias fuzzy e SED, que possibilitou considerar e modelar a linguagem definida em um sistema a eventos discretos fuzzy (SEDF). Através da representação matricial de um autômato, é possível estender o conceito de que um estado seja considerado o estado atual do sistema (modelando o caráter ambíguo) e que os eventos também sejam modelados segundo a possibilidade de ocorrência da transição entre estados. Para tal serão definidos estados fuzzy e eventos fuzzy, representados por um conjunto fuzzy e uma relação fuzzy, a ser melhor detalhado no presente texto. Em MOHUN [7], é apresentada a modelagem de um sistema de automação, consistindo de duas esteiras e um funil alimentador, segundo a teoria de SEDF, exemplificando

as transições entre os estados possíveis do sistema. No campo de atuação de biomedicina, em YING *et al.* [8] é apresentada a proposição de um modelo de SEDF para estabelecer um sistema de seleção inteligente para tratamento de pacientes com HIV/Aids, enquanto que THORSLEY e TENEKETZIS [9] realiza a modelagem de um sistema de ventilação utilizando valores de probabilidades para caracterizar os eventos fuzzy.

A partir dos trabalhos de CAO e YING [10], foi possível estender a teoria de observabilidade de eventos para o caso fuzzy, na qual é definido um grau de observabilidade para o SEDF, tal que a linguagem gerada pelo sistema seja observável. A observabilidade em um determinado SEDF deve então ser considerada tendo como base um evento fuzzy do espaço de estados, ao qual seu grau de observabilidade será considerado limitante. Para tal, são definidos conjuntos fuzzy observáveis e não observáveis, em que cada evento possui um percentual de possibilidade de pertencer a cada um desses conjuntos, tal qual o conceito de pertinência relacionado aos conjuntos fuzzy, como em ROSS [11].

A observabilidade definida propicia a adoção da lógica fuzzy para projeto e sintonia de controladores e estratégias de supervisão baseadas em regras fuzzy. Ainda importante destacar que estratégias de controle de SEDF também são apresentadas em CAO e YING [10], no qual uma estratégia de controle supervisorio é proposta para projeto e análise de sistemas cujo comportamento e regras de controle são adquiridos através da experiência de operadores conhecedores do sistema ou descritas por linguagem natural. Em SCHMIDT e BOUTALIS [12] é apresentada uma estratégia de controle fuzzy para um sistema modelado relacionando a trajetória de um robô com múltiplos objetivos de controle, enquanto que em HUQ *et al.* [13] tem-se uma estratégia para controle de um robô durante movimento de empurrar objetos.

Tendo então o arcabouço desses avanços nas teorias que relacionam fuzzy e SED, foi possível estender toda a teoria de diagnose de falhas para conter sistemas que possibilitem a representação de comportamentos imprecisos/vagos. Assim, em KILIC *et al.* [5], é proposto o conceito de diagnosticabilidade fuzzy de falhas em SEDF, que

como para a teoria clássica, considera o conceito de falha como um comportamento anômalo no sistema. Cada evento fuzzy definido em um SEDF possui uma pertinência associada ao conjunto fuzzy de falhas considerado. Dessa forma, é proposta uma função de diagnosticabilidade fuzzy, que caracteriza a diagnosticabilidade de um dado SEDF através da resposta da função, representada pelo grau de diagnosticabilidade.

Da mesma forma como na teoria de diagnose de SED, em que se propõe a construção de um diagnosticador para realizar a diagnose online e que permite condições necessárias e suficientes para a diagnosticabilidade de uma linguagem gerada por um autômato, como pode ser visto em SAMPATH *et al.* [2], CASSANDRAS e LAFORTUNE [3], na teoria de SEDF implementa-se um algoritmo para construção de um diagnosticador fuzzy. O diagnosticador fuzzy como apresentado em LIU e QIU [14], propicia a determinação das condições necessárias e suficientes para que um SEDF, em relação a um dado evento de falha, seja considerado f-diagnosticável com determinado grau e que, ao varrer todas os possíveis eventos de falha considerados, determina o grau de f-diagnosticabilidade do SEDF. Outros artigos trazem a teoria de diagnosticabilidade e variações de diagnosticadores, como visto em KILIC *et al.* [5], LIU *et al.* [15], ou ainda se utilizam do conceito de verificadores, como visto em LIU *et al.* [16], LIU [17].

O objetivo deste trabalho é apresentar e discutir a teoria de diagnose de falhas em SEDs, no contexto fuzzy e para tal, abordaremos conceitos introdutórios tanto nas bases de Sistemas a Eventos Discretos, quanto na teoria fuzzy, fornecendo assim um arcabouço para entendimento das teorias relacionadas. O trabalho irá se basear no trabalho de [14], visto que tal trabalho possui semelhança de implementação com a teoria de SAMPATH *et al.* [2], bastante referenciada nos estudos de diagnosticadores de SED. Tendo este material como referência, estudos posteriores poderão ser realizados e aprofundados em questões relacionadas à modelagem e diagnose de falhas, de modo a garantir a busca por métodos mais simples e efetivos.

A organização do presente texto se dá da seguinte forma: no capítulo 2, é reali-

zada uma revisão teórica dos conceitos principais de Sistemas a Eventos Discretos, enquanto que no capítulo 3, os conceitos de conjuntos e sistemas fuzzy são abordados. No capítulo 4, é realizada uma adaptação da notação usual de SED, que possibilita a definição de um SEDF e, em seguida, é estudado o problema da diagnosticabilidade para SEDF, contendo exemplos sobre a diagnosticabilidade para um dado SEDF.

Capítulo 2

Sistemas a Eventos Discretos

Sistemas a eventos discretos (SED) são sistemas dinâmicos, cuja evolução temporal se dá pela ocorrência, em geral, assíncrona de eventos. Tais sistemas são comuns na manufatura, robótica, biologia, sistemas de informação, economia, entre outros.

O modelo de um sistema é um dispositivo capaz de representar de maneira aceitável sua estrutura e seu comportamento. Tais dispositivos podem ser equações ou diagramas que descrevam as características importantes do sistema que representam. Para SED, uma modelagem bem definida e apropriada é de grande importância, visto que possibilita meios de realizar o projeto e análises relacionados a tais classes de sistemas. Neste capítulo serão apresentadas linguagens e autômatos, que são duas principais formas de representação de SED. Existem outras formas de modelagem de SED, dentre elas Redes de Petri e modelos analíticos, que não serão objetos de análise no presente trabalho.

Na seção 2.1 será visto o conceito de linguagens e na seção 2.2 iremos abordar o conceito de autômatos, importante ferramenta para modelagem e análise de sistemas a eventos discretos. Adiante, serão abordadas Observabilidade e Diagnosticabilidade de SED nas seções 2.3 e 2.4 respectivamente.

2.1 Linguagens

Uma vez que a evolução do sistema é definida e caracterizada pelo conjunto de eventos ocorridos, é intuitivo descrever o comportamento do sistema pela sequência de eventos a que o sistema se submete. Por eventos, entendem-se acontecimentos ou ocorrências em sistemas dinâmicos, em geral de caráter assíncrono com o tempo, que podem ocasionar modificações significativas no sistema propiciando a alteração do seu estado atual. O término de processamento de um item em uma máquina, a chegada de material em uma fila, o alcance de determinado nível de um líquido em um tanque, o envio de um pacote de comunicação são exemplos de possíveis ocorrências que alteram o estado de diferentes sistemas. Assim, a modelagem de SED pode ser realizada utilizando-se a teoria de linguagens.

Segundo a analogia necessária para a interpretação de SED por uma linguagem, tal como apresentada em CASSANDRAS e LAFORTUNE [3], o conjunto finito de eventos E que propiciam a evolução do sistema deve ser encarado como um alfabeto, no qual um conjunto de eventos caracterizando uma sequência serão palavras existentes dentro do alfabeto definido e cada evento em si seria uma letra do alfabeto. Um conjunto de palavras chama-se linguagem.

Para a formação de palavras a partir de um alfabeto é necessária a concatenação de letras, ou em nossa abstração, eventos, que resultará numa sequência a partir da junção de eventos. Assim, dados dois eventos a e b , gera-se uma sequência ab , a partir da concatenação de a com b . Dessa forma, tem-se a definição formal de linguagem, como em CASSANDRAS e LAFORTUNE [3]:

Definição 1 *Uma linguagem definida sobre um conjunto de eventos E é um conjunto de sequências de comprimento finito formadas por eventos de E .*

Assim, de acordo com a definição 1, dado um conjunto de eventos $E = \{a, b, c\}$, os seguintes conjuntos são linguagens definidas sobre E : $L_1 = \{ab, aab, ac\}$, $L_2 = \{s \in E : s \text{ termine com } a\}$ e $L_3 = \{\varepsilon, a, bb, ccc\}$. Em tempo, toma-se ε como uma sequência de eventos de comprimento zero, denominada sequência vazia.

O conjunto E^* pode ser denotado como sendo o conjunto de todas as sequências possíveis de serem geradas a partir de E , incluindo a sequência ε . Tal conjunto é chamado de fecho de Kleene de E , sendo definido formalmente como $E^* = \{\{\varepsilon\} \cup E \cup EE \cup EEE \cup \dots\}$. Sendo assim, para o conjunto de eventos $E = \{a, b, c\}$ o fecho de Kleene será $E^* = \{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, \dots\}$. Vale ressaltar que o conjunto E é um subconjunto de E^* .

Quanto às linguagens, pode-se entender a operação concatenação da seguinte maneira.

Definição 2 *Dadas L_1 e $L_2 \subset E^*$ pode-se resultar a linguagem L_1L_2 tal que $s \in L_1L_2$ se $s=s_1s_2$ em que $s_1 \in L_1$ e $s_2 \in L_2$.*

Ainda devem ser explicitadas algumas terminologias relacionadas a sequências. Dada a sequência $s = tuv$, em que $t, u, v \in E^*$, t é chamado de prefixo de s , u é chamado subsequência de s e v pode ser chamado de sufixo de s .

O fecho de prefixo de uma determinada linguagem L consiste no conjunto de todos os prefixos de todas as sequências definidas de L . Assim, pode-se definir o fecho de prefixo como $\bar{L} = \{s \in E^* : (\exists t \in E^*)[st \in L]\}$ e se uma linguagem L possui o mesmo conjunto de sequências do seu fecho em prefixo, ou seja, $L = \bar{L}$, a linguagem é dita prefixo-fechada.

Dado que um conjunto E de eventos é um conjunto clássico, todas as operações e propriedades clássicas de conjuntos são válidas, quais sejam união, interseção, complemento, diferença, pertinência, associatividade, distributividade, entre outras.

A operação complemento de um subconjunto E_s em relação ao conjunto de eventos E , é denotada por $E_s \setminus E$ e reúne todas os eventos pertencentes a E mas não pertencentes a E_s . Seja $E = \{a, b, c, d, e\}$ e $E_s = \{c, d\}$. O complemento de E_s em relação a E será o conjunto $E_s \setminus E = \{a, b, e\}$.

A projecção natural de uma linguagem, como apresentada em CASSANDRAS e LAFORTUNE [3] pode ser apresentada se utilizando da definição do operador Projecção P_o , em que E_o representa o subconjunto de eventos observáveis de E , ou seja, eventos cuja ocorrência se torna de conhecimento do indivíduo e pode ser registrada

por sensores. A definição de projeção P_o , como em RAMADGE e WONHAM [18], pode ser vista, como segue:

Definição 3 $P_o : E \rightarrow E_o$ e $s \rightarrow P_o(s)$, é projeção de uma sequência tal que

$$P_o(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$P_o(a) = \begin{cases} a, & \text{se } a \in E_o \\ \varepsilon, & \text{se } a \in E \setminus E_o \end{cases}$$

$$P_o(sa) = P_o(s)P_o(a)$$

Assim, a projeção de uma linguagem L é estendida como

$$P_o(L) = \{t \in E_o^* : (\exists s \in L)[P_o(s) = t]\}.$$

Basicamente falando, a projeção natural apaga do sistema todas as sequências de eventos que não pertencem ao conjunto E_o e pode ser entendida como a representação da linguagem observável de um sistema, isto é, as sequências formadas pelos eventos cujas ocorrências são, de alguma forma, do conhecimento do observador.

Com relação à projeção inversa, tem-se a seguinte definição, como em BASILIO *et al.* [4].

Definição 4 $P_o^{-1} : E_o \rightarrow 2^{E^*}$ e $s \rightarrow P_o^{-1}(s)$, é projeção inversa de uma sequência tal que $P_o^{-1}(s) = \{t \in E^* : P_o(t) = s\}$, em que é possível restringir a projeção na linguagem L sendo $P_o^{-1}(M) = \{s \in L : (\exists y \in M)P_o(s) = y\}$.

2.2 Autômatos

Dada a natureza comportamental de SED, a evolução entre os estados discretos do sistema acontece mediante a existência de ocorrências que influenciam componentes do sistema, os eventos.

Por estado, entende-se como a condição em que um dado sistema se encontra durante a evolução do processo sistêmico e, atentando à característica discreta

de tal sistema, a evolução se dá em estados determinados, configurando um espaço de estados discreto. Assim, é possível, por exemplo, estados do tipo {ligado, desligado} ou {vermelho, amarelo, verde} ou ainda {disponível, processando, aguardando, quebrado}.

É possível ilustrar como os conceitos acima se relacionam em um sistema com um simples exemplo, visto em BASILIO *et al.* [4].

Exemplo 1 *Considere uma célula de manufatura formada por duas máquinas (M_1 e M_2) e um robô que transporta as peças de M_1 para M_2 . A máquina M_1 recebe peças brutas e quando as peças estão prontas são recolhidas pelo robô. Caso o robô esteja ocupado, a máquina M_1 retém a peça até que o robô esteja completamente livre. Caso uma outra peça chegue enquanto a máquina M_1 estiver processando/retendo alguma peça, a máquina M_1 rejeita a peça recebida. Quando o robô recebe uma peça de M_1 , inicia o transporte desta até a máquina M_2 . No momento em que chegar a M_2 , o robô somente entregará a peça à máquina M_2 se esta estiver livre; caso contrário reterá a peça até M_2 ficar disponível. Após entregar a peça a M_2 , o robô retorna à máquina M_1 . A máquina M_2 recebe a peça do robô e a processa.*

A tabela 2.1 descreve os estados e os eventos das máquinas M_1 e M_2 e do robô. Note que os eventos e_1 (entrega de peça ao robô) e a_2 (entrega/chegada de peça em M_2) pertencem a dois subsistemas: máquina M_1 e robô, e robô e máquina M_2 , respectivamente. É importante notar que, para que o evento e_1 ocorra, a máquina M_1 deverá estar no estado H_1 e o robô no estado I; para que o evento a_2 ocorra, o robô deverá estar no estado H e a máquina M_2 deverá estar no estado I_2 . Para os demais estados do sistema, isto é, aqueles que estão presentes em somente um dos subsistemas, a ocorrência não dependerá do estado em que os demais subsistemas estiverem, sendo determinada somente pelo estado atual do subsistema; por exemplo, a ocorrência do evento t_1 (fim de processamento da peça em M_1) dependerá apenas da máquina M_1 estar no estado P_1 , independentemente de quais estados estiverem o robô e a máquina M_2 .

O sistemas do exemplo anterior, bem como SEDs em geral, podem ser expressos

Tabela 2.1: Os estados e os eventos das máquinas M1, M2 e do robô.

Elemento	Estado	Evento
Máquina M_1	M_1 disponível: I_1 M_1 processando: P_1 M_1 retendo peça pronta: H_1 $X_1 = \{a_1; P_1; H_1\}$	Chegada de peça a M_1 : a_1 Fim de processamento: a_1 Entrega de peça ao robô: e_1 $E_1 = \{a_1, t_1, e_1\}$
Robô	Robô disponível: I Transportando M_1 - M_2 : T_{12} Esperando em M_2 : H Retornando para M_1 : R $Xr = \{I, T_{12}, H, R\}$	Entrega de peça ao robô: e_1 Chegada a M_2 : c_2 Entrega/chegada de peça a M_2 : a_2 Chegada a M_1 : r_1 $Er = \{e_1, c_2, a_2, r_1\}$
Máquina M_2	M_2 disponível: I_2 M_2 processando: P_2 $X2 = \{I_2, P_2\}$	Entrega/chegada de peça em M_2 : a_2 Fim de processamento: t_2 $E2 = \{a_2, t_2\}$

por meio de autômatos, que fornecem uma estrutura visual, tal qual um diagrama de transição de estados, que facilita a manipulação e análise do sistema. Tal representação gráfica é constituída por um conjunto de círculos, representando os estados do sistema, ligados entre si por meio de arcos, que representam as transições possíveis em cada um dos estados definidos.

Tal como é possível ver em BASILIO *et al.* [4], explicita-se a definição de autônomo como segue:

Definição 5 *Um autômato determinístico G , será representado por uma sêxtupla $G = (Q, E, f, q_0, Q_M)$, em que Q é o espaço de estados, E é o conjunto de eventos, $f : Q \times E \rightarrow Q$ é a função de transição de estados, Γ a função de eventos ativos, q_0 o estado inicial do sistema e Q_M o conjunto de estados marcados.*

Um autômato é capaz de representar duas linguagens, denominadas de linguagem gerada e marcada pelo autômato.

A linguagem gerada L representa todas as sequências de eventos que podem ser seguidas a partir do estado inicial do diagrama de estados. A linguagem marcada L_M é subconjunto da linguagem gerada L e representa todas as sequências que terminam com um estado pertencente a Q_M . As definições formais da linguagem gerada L e marcada L_M são como em BASILIO *et al.* [4]

Definição 6 $L = \{s \in E^* : f(q_0, s) \text{ é definida}\}$ e $L_M = \{s \in E^* : f(q_0, s) \in Q_M\}$.

A seguir, se exemplifica um autômato determinístico, como visto em CASSANDRAS e LAFORTUNE [3].

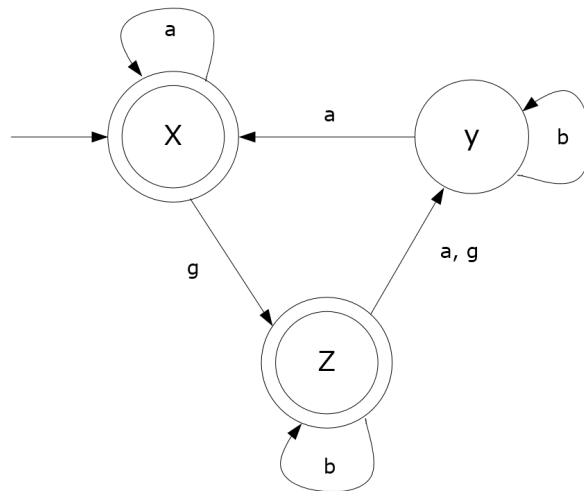


Figura 2.1: Autômato Simples

Exemplo 2 O autômato ilustrado na figura 2.1 possui $Q = \{x, y, z\}$, $E = \{a, b, g\}$, $q_0 = x$, $Q_M = \{x, z\}$. A função de transição de estados é definida $f(x, a) = x$, $f(x, g) = z$, $f(y, a) = x$, $f(y, b) = y$, $f(z, a) = y$, $f(z, b) = z$, $f(z, g) = y$. A função de eventos ativos $\Gamma(x) = \{a, g\}$, $\Gamma(y) = \{a, b\}$ e $\Gamma(z) = \{a, b, g\}$.

Em um autômato é possível a ocorrência de estados que não podem ser alcançados a partir do estado inicial do sistema, ou seja, não existe uma sequência de eventos que, começando do estado inicial, permita alcançar esses estados em questão. Ao conjunto de estados não alcançáveis dá-se o nome de parte não acessível ou até mesmo não alcançável do autômato e aqueles restantes, estados alcançáveis ou acessíveis.

Uma propriedade a se destacar entre autômatos é a composição. Dados dois autômatos, é possível realizar a composição para modelar o comportamento síncrono entre os mesmos. A composição pode acontecer de duas formas: i) Composição Paralela ($G_1 || G_2$), em que eventos comuns acontecem de modo conjunto enquanto que eventos privados ocorrem normalmente sem alterar o estado relativo ao outro autômato e ii) Composição Produto ($G_1 \times G_2$), em que somente transições comuns

aos dois autômatos podem ocorrer. Um estudo mais aprofundado sobre a teoria de Composição entre autômatos pode ser encontrada em BASILIO *et al.* [4].

A definição formal da composição paralela entre G_1 e G_2 , pode ser vista como segue:

$$G_1 || G_2 = Ac(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, f_{1||2}, \Gamma_{1||2}, (x_{01}, x_{02}, X_{m1} \times X_{m2}),),$$

em que \times denota o produto cartesiano, enquanto que Ac representa a parte do autômato formada pelos estados possíveis de serem alcançados a partir do estado inicial através de uma sequência de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, parte esta denotada por parte acessível.

A função de transição de estados também pode ser definida para a composição entre os autômatos como segue.

$$f_{1||2}((x_1, x_2), \sigma) = \begin{cases} (f_1(x_1, \sigma), f_2(x_2, \sigma)), & \text{se } \sigma \in \Gamma_1(x_1) \cap \Gamma_2(x_2), \\ (f_1(x_1, \sigma), x_2), & \text{se } \sigma \in \Gamma_1(x_1) \setminus \Sigma_2, \\ (x_1, f_2(x_2, \sigma)), & \text{se } \sigma \in \Gamma_2(x_2) \setminus \Sigma_1, \\ \text{não definido, caso contrário.} & \end{cases}$$

A segunda composição importante, a composição produto, permite apenas que ocorram transições com eventos comuns e pode ser definida como segue:

$$G_1 \times G_2 = Ac(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, f_{1 \times 2}, \Gamma_{1 \times 2}, (x_{01}, x_{02}, X_{m1} \times X_{m2}),),$$

em que

$$f_{1 \times 2}((x_1, x_2), \sigma) = \begin{cases} (f_1(x_1, \sigma), f_2(x_2, \sigma)), & \text{se } \sigma \in \Gamma_1(x_1) \cap \Gamma_2(x_2), \\ \text{não definido, caso contrário.} & \end{cases}$$

Caso $\Sigma_1 = \Sigma_2$, a composição paralela será idêntica à composição produto, já que

o conjunto de eventos é o mesmo.

Com relação à linguagem gerada pela composição entre os autômatos, pode-se mostrar que as linguagens gerada e marcada por $G_1||G_2$ são dadas por:

$$L(G_1||G_2) = P_1^{-1}(L_1) \cap P_2^{-1}(L_2)$$

$$L_m(G_1||G_2) = P_1^{-1}(L_{m1}) \cap P_2^{-1}(L_{m2})$$

Considerando $P_i : (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* \rightarrow \Sigma_i^*$, $i = 1, 2$. E ainda tomando $L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$,

É possível verificar que, com relação às linguagens gerada e marcada, formadas pela composição produto entre $G_1 \times G_2$:

$$L(G_1 \times G_2) = L_1 \cap L_2,$$

$$L_m(G_1 \times G_2) = L_{m1} \cap L_{m2}$$

2.3 Observabilidade

Pode-se particionar o conjunto E de eventos de um sistema em dois subconjuntos E_o e E_{uo} , quais sejam o subconjunto dos eventos observáveis e o subconjunto dos eventos não observáveis do sistema. O conjunto de eventos observáveis é formado pelos eventos cuja ocorrência é de conhecimento do observador, enquanto que o conjunto de eventos não observáveis se refere aos eventos que não são registrados por sensores ou que não tem sua ocorrência percebida dada as características distribuídas do sistema.

A existência de eventos não observáveis no conjunto de eventos do sistema caracteriza o autômato resultante em um autômato determinístico com eventos não observáveis. Para caracterização de seu comportamento dinâmico é possível utilizar um autômato determinístico chamado de observador.

Para a construção do observador, é preciso introduzir o conceito de alcance não-

observável, denotado por $UR(x)$, sendo x é o estado definido no conjunto de estados X , e ainda é preciso definir os eventos ativos e observáveis em cada estado definido.

$$UR(x) = \{y \in X : (\exists t \in \Sigma_{uo}^*) [f(x, t) = y]\}$$

O algoritmo a seguir explicita a construção do observador:

Algoritmo 1

Passo 1: Defina $x_{0_{obs}} = UR(x_0)$ e faça $X_{obs} = x_{0_{obs}}$ e $\tilde{X}_{obs} = X_{obs}$;

Passo 2: $\hat{X}_{obs} = \tilde{X}_{obs}$ e $\tilde{X}_{obs} = \emptyset$.

Passo 3: Para cada $B \in \hat{X}_{obs}$:

- $\Gamma_{obs}(B) = (\bigcup_{x \in B} \Gamma(x)) \cap \Sigma_o$
- Para cada $e \in \Gamma_{obs}(B)$, $f_{obs}(B, e) = UR(x \in X : (\exists y \in B)[x = f(y; e)])$;
- $\tilde{X}_{obs} \leftarrow \tilde{X}_{obs} \cup f_{obs}(B, e)$.

Passo 4: $X_{obs} \leftarrow X_{obs} \cup \tilde{X}_{obs}$

Passo 5: Repita os passos 2 a 4 até que toda a parte acessível de $Obs(G)$ tenha sido construída.

Passo 6: $X_{m_{obs}} = B \in X_{obs} : B \cap X_m \neq \emptyset$.

A partir da construção do observador, pode-se perceber que a linguagem gerada pelo $Obs(G)$ é a projeção observável da linguagem de G .

O seguinte exemplo ilustra a construção do autômato observador.

Exemplo 3 *Dado o autômato da figura 2.2, pode-se utilizar o algoritmo para construção do observador resultante, supondo o evento a não observável.*

Uma vez que o evento a é não observável, não se pode precisar se o estado inicial do sistema se mantém em 0 ou está em 1, logo, o alcance observável do estado inicial do observador leva ao estado $\{0, 1\}$. Seguindo o algoritmo é possível encontrar o autômato observador, mostrado na figura 2.3:

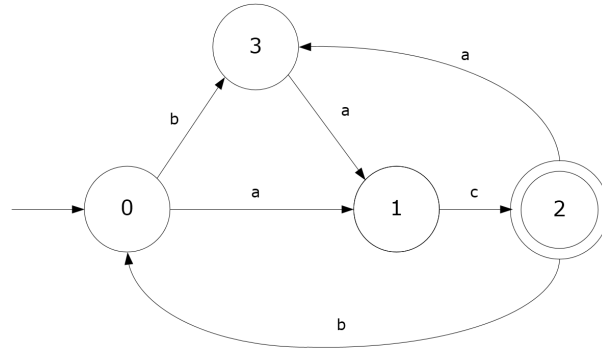


Figura 2.2: Autômato Utilizado no Exemplo 3

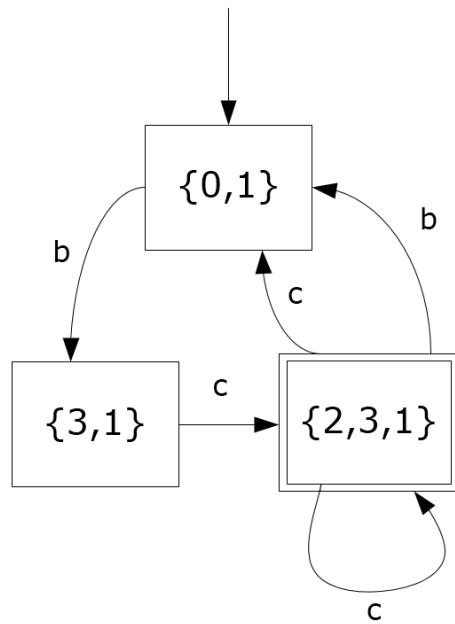


Figura 2.3: Autômato Observador

2.4 Diagnose de Falhas

Dada a possibilidade de existência de eventos não observáveis em um sistema, e tendo em mente que caso falhas ocorram durante a operação, as mesmas podem comprometer o funcionamento do sistema, a diagnose da ocorrência de eventos de falha se torna uma análise necessária e recentemente bastante estudada. Tal tópico é conhecido como diagnose de eventos ou diagnose de falhas.

2.4.1 Diagnosticabilidade de Falhas

Sendo E_f o conjunto de eventos de falha que poderão ser diagnosticados, geralmente E_f é particionado em conjuntos de tipos de falhas $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$ dessa forma,

$E_f = E_{f_1} \cap E_{f_2} \cap E_{f_3} \cap \dots \cap E_{f_m}$, o que significa dizer que se uma falha do tipo f_i aconteceu, uma falha pertencente ao conjunto E_{f_i} ocorreu. Por simplicidade, uma das premissas a serem seguidas em nosso estudo diz respeito a restrição de sistemas de apenas um tipo de falha, sendo assim, caso σ seja um evento de falha, $\sigma \in E_f$, no entanto, a teoria de diagnose de falhas pode contemplar falhas de múltiplos tipos, como pode ser visto em CASSANDRAS e LAFORTUNE [3].

A premissa acima descrita, ainda pode ser complementada com mais duas outras, que comumente são adotadas em trabalhos de diagnose de falhas. A primeira dá conta de que a linguagem gerada pelo autômato em estudo deve ser uma linguagem viva, ou seja não há estado em que não exista um evento ativo ao menos, e a segunda fala sobre a existência de ciclos de eventos não observáveis dentro da linguagem gerada pelo autômato, o que não pode ocorrer.

Uma sequência de falha então contém um evento de falha. Dado s_f o último evento de uma sequência s , adota-se a seguinte notação $\Psi(E_f) = \{s \in L : s_f \in E_f\}$, para o conjunto de todas as sequências que terminam com evento de falha.

Após estas considerações, é possível definir então a diagnosticabilidade da linguagem gerada por um autômato.

Definição 7 *Seja L uma linguagem gerada por $G = (Q, E, f, \Gamma, q_o, Q_M)$ e seja $P_{oL} : E^* \rightarrow E_o$ sua projeção da linguagem observável. L então será tomada por diagnosticável se*

$$(\exists n_o \in N)(\forall s \in \Psi(E_f))(\forall t \in L/s)(|t| > 0 \rightarrow (D(st) = 1))$$

em que a função Diagnosticabilidade $D: E^* \rightarrow \{0, 1\}$ é definida como segue:

$$D(st) = \begin{cases} 1, & \text{se } w \in P_L^{-1}(P_o(st)) \rightarrow E_f \in w \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

em que $E_f \in w$ representa a sequência w possuir um evento de falha de E_f .

Intuitivamente, a diagnosticabilidade de uma linguagem significa que para cada

sequência da linguagem gerada pelo autômato correspondente que termine com um evento de falha e para uma continuação suficientemente grande, toda sequência com mesma gravação observável deve conter um evento de falha também, ou seja, a ocorrência do evento de falha σ_f puder ser verificada utilizando apenas um número finito de transições de eventos observáveis. Assim sendo, caso a função diagnosticabilidade retorne 1, a linguagem gerada pelo autômato é diagnosticável, ou seja, enquanto que caso o retorno da função seja zero, a linguagem não permite a diagnose de falhas.

2.4.2 Autômato Diagnosticador

Embora a definição 7 acima resulte na caracterização de uma linguagem como diagnosticável ou não, é possível detectar condições necessárias e suficientes para a diagnosticabilidade de uma linguagem e a ocorrência de falhas pela observação do comportamento do sistema em tempo real, através de um autômato determinístico, construído com base no modelo do sistema. Tal autômato é conhecido como diagnosticador. No presente texto, serão utilizados apenas diagnosticadores centralizados, que têm acesso a todos os eventos observáveis do sistema, embora diagnosticadores com características descentralizada possam ser construídos para sistemas distribuídos.

O autômato diagnosticador pode ser dado a partir da parte observável do autômato resultante da composição paralela entre o autômato sob análise e um autômato chamado de rotulador. A sua construção pode ser realizada como visto abaixo:

Algoritmo 2

Dado G , autômato determinístico:

Passo 1: obtenha a composição paralela entre $G||A_l$, sendo A_l o autômato rotulador de dois estados mostrados em 2.4;

Passo 2: calcule $Obs(G||A_l)$.

Em tempo, o autômato rotulador é constituído de dois estados, como pode ser visto na figura 2.4. O estado Normal (sem falha ocorrida) e após a ocorrência do evento de falha σ , o estado F (com falha):

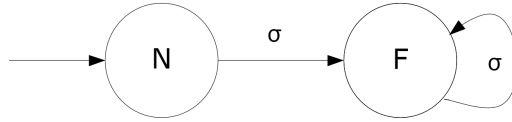


Figura 2.4: Autômetro Rotulador

O seguinte exemplo retirado de BASILIO *et al.* [4] ilustra a construção do diagnosticador para um autômetro determinístico:

Exemplo 4 Para ilustrar a construção de diagnosticadores, considere o autômetro cujo diagrama de transição de estados está representado na figura 2.5. As figuras 2.5b) e 2.5(c) mostram, respectivamente, a composição paralela $G \parallel A_l$ e o diagnosticador $G_d = Obs(G \parallel A_l)$. Note que o estado 5 de G se divide nos estados $(5,F)$ e $(5,N)$ de $G \parallel A_l$ devido à existência de duas seqüências distintas ($s_1 = \sigma_f ab$ e $s_2 = ba$), que levam $x_0 = 1$ a $x = 5$, das quais somente a seqüência 1 contém o evento de falha σ_f . Para simplificar a notação, é usual representar os estados de G_d como xN e xF ao invés de (x,F) e (x,N) , conforme mostrado na figura 2.5 c).

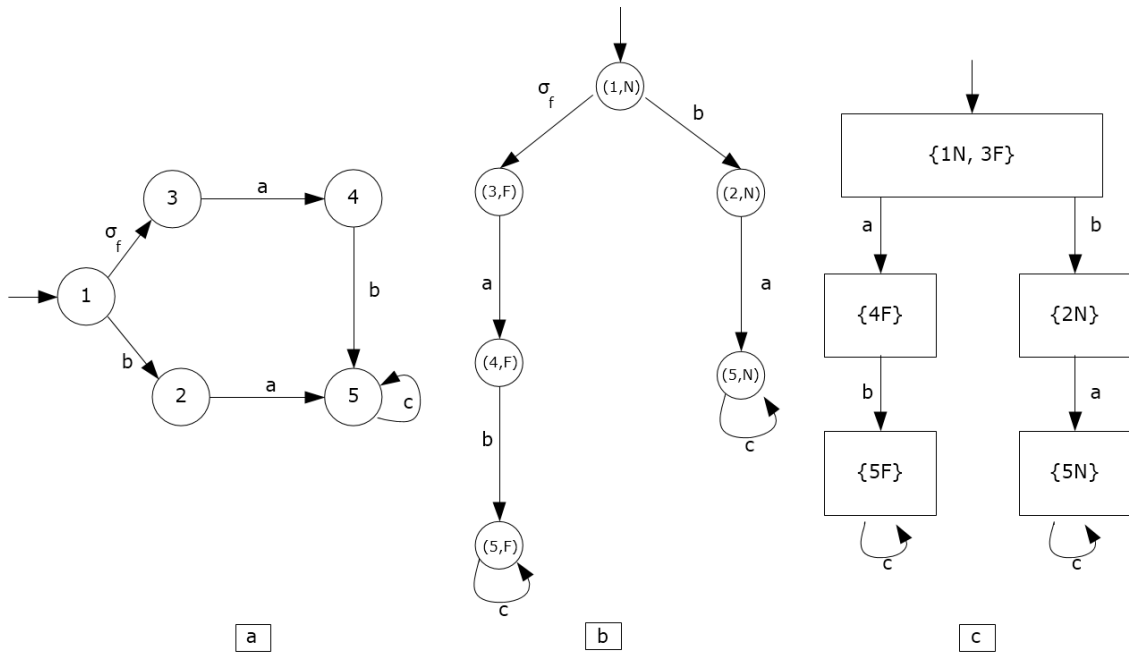


Figura 2.5: Autômetro Diagnosticador

Pode-se ainda definir o seguinte conjunto de estados referentes ao autômetro G $Q_{ob} = \{q_0\} \cup \{q \in Q : q \text{ advém de um evento observável}\}$. Um diagnosticador

pode ser então implementado computacionalmente e a partir da operação seguindo a função f_d de transição de estados. Ao se alcançar um estado com rótulo de falha, tem-se por certo que a falha ocorreu no sistema. Caso o sistema esteja em um estado no qual existem ambos os rótulos, não se pode comprovar a existência da falha no estado. Importante notar que após alcançado um estado de falhas o sistema não poderá voltar para um estado anterior.

Assim, pode-se abordar a definição da classificação dos estados:

Definição 8 *Um estado $q_d \in Q_d$ é denominado certo (de falha), se $l = F$ para todo $q_l \in q_d$, e normal (ou de não falha) se $l = N$ para todo $q_i \in q_d$. Se existir $q_1, q_2 \in q_d$, tal que $l_1 = F$ e $l_2 = N$, então q_d é um estado incerto de G_d .*

O seguinte lema pode ser enunciado relacionando os estados do diagnosticador com as relações da análise de diagnosticabilidade de uma linguagem:

Lema 1 *i) Seja $q_d = f_d(q_{0d}, s)$. Se q_d é um estado certo, então para todo $w \in P_{oL}^{-1}(s)$, $E_f \in w$.*

ii) Se q_d é um estado incerto, então existem $s_1, s_2 \in L$ tais que σ_f pertence a s_1 mas não a s_2 , porém $P_o(s_1) = P_o(s_2)$ e $f_d(q_{0d}, P_o(s_1)) = f_d(q_{0d}, P_o(s_2)) = q_d$

E dessa forma, ainda em BASILIO *et al.* [4] se conclui que a linguagem gerada por G será diagnosticável com relação a E_f e P_o se, e somente se, o diagnosticador sempre alcançar um estado certo para toda sequência arbitrariamente longa de L que contiver o evento σ_f . Isso não irá ocorrer se, e somente se, existir uma sequência de L que faça o diagnosticador ficar preso indefinidamente em um laço formado por estados incertos. Finaliza-se, portanto na enunciação do seguinte teorema:

Teorema 1 *Uma linguagem L gerada por um autômato G será diagnosticável com relação à projeção P_o e $E_f = \{\sigma_f\}$ se, e somente se, o seu diagnosticador G_d não tiver ciclos indeterminados.*

Em que ciclo indeterminado entende-se por um ciclo em G_d de estados incertos que possui associação no autômato original G um ciclo que inclui somente estados

normais com rótulo F nos estados incertos. A presença de ciclos indeterminados implica na violação da diagnosticabilidade da linguagem de um determinado autômato.

O exemplo a seguir considera a utilização do conceito de ciclos indeterminados para determinar diagnosticabilidade.

Exemplo 5 *Considere o diagnosticador construído no exemplo 4, na figura 2.5. O autômato resultante do processo de construção possui dois ciclos formados pelos estados $\{5F\}$ e $\{5N\}$, ambos estados certos da falha e da não-falha, respectivamente. Dessa forma, não existem ciclos indeterminados no autômato resultante e assim, pode se afirmar que a linguagem formada pelo autômato G é diagnosticável com relação à P_o e $E_f = \{\sigma_f\}$.*

Contudo, é simples notar que G_d não carrega em si todas as informações necessárias para determinação da diagnosticabilidade. A identificação de ciclos indeterminados no autômato diagnosticador G_d , precede a consulta ao autômato original para sua correta caracterização. Mais recentemente, em VIANA *et al.* [19], é apresentada uma nova condição necessária e suficiente para determinação da diagnosticabilidade de uma linguagem. Na nova abordagem, um autômato G_{scc} é definido e sobre o mesmo buscam-se componentes fortemente conexos, para determinação da diagnosticabilidade. A busca de tais elementos é mais simples de ser implementada computacionalmente, visto que a complexidade cresce linearmente com o número de transições do autômato original.

Assim, são necessárias duas conceituações para prosseguirmos com a condição proposta. Vamos definir $G_{scc} = G_d || G_l$, em que $G_l = G || A_l$ e, como visto anteriormente, $G_d = Obs(G_l)$. Já em relação aos componentes fortemente conexos, esse conceito advém da teoria de grafos e relaciona elementos em um autômato que possuem entre si uma disposição tal que nesse conjunto de estados, dois estados do autômato q_i e q_j possuem transições que permitam a evolução do sistema de q_i para q_j e também de q_j para q_i . Na figura 2.6, temos a representação de dois conjuntos

fortemente conexos, em cada retângulo, nos quais os estados 0 e 1 possuem transições que levam de 0 para 1 e de 1 para 0, bem como acontece com os estados 3 e 4.

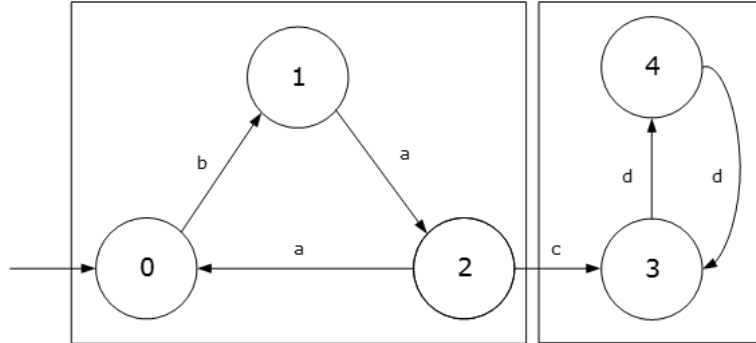


Figura 2.6: Elementos fortemente conexos

Dessa forma, o seguinte teorema é apresentado em [19]:

Teorema 2 *A linguagem L gerada por um autômato G é diagnosticável com relação à projeção P_o e $E_f = \{\sigma_f\}$, se e somente se, G_{scc} não possui componentes fortemente conexos com estados (x_d, x_l) , tal que x_d é incerto de falha e x_l é certo de falha.*

Para ilustrar tais condições necessárias e suficientes, iremos retomar o exemplo 4.

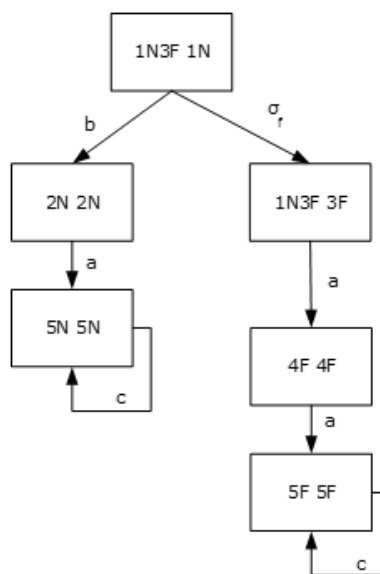


Figura 2.7: G_{scc} , obtido a partir do diagnosticador da figura

Na figura 2.7, temos o autômato G_{scc} , resultante da composição paralela entre os autômatos b e c da figura 2.5. Nele, podemos perceber que não existem componentes fortemente conexos em estados incertos, o que indica que o autômato G é diagnosticável com relação à P_o e $E_f = \{\sigma_f\}$.

Capítulo 3

Teoria Fuzzy

3.1 Introdução

A teoria fuzzy lida com problemas recorrentes nos dias atuais e que possuem uma causa em comum: a imprecisão de certas medidas, causadas durante o processo de aferição e até mesmo incertezas inatas do processo de medição. Informações, modelos e soluções associadas a sistemas reais sempre levam em consideração um dado nível de abstração que minimiza ou desconsidera imprecisões inatas dos sistemas em prol de simplicidade de implementação e da abordagem precisa de computadores. O termo fuzzy em si não possui uma tradução bem definida, sendo comumente utilizados os termos nebuloso ou difuso, que bem caracterizam o tipo de informações trabalhadas nesse contexto. Sua principal característica é possibilitar a modelagem de informações não precisas através de um arcabouço matemático.

A seguir, será apresentado um exemplo que ilustra o conceito de nebulosidade a que a teoria fuzzy se refere e, ainda, a abstração que o pensamento humano e variáveis linguísticas permitem, em contraponto ao trato digital dos computadores.

Exemplo 6 *Suponha que se deseja enumerar o conjunto das pessoas altas. Para tanto, pode-se definir um limite para o qual uma pessoa deixa de ser de estatura mediana para ser alta e considere que este limite seja 1,80m. Sendo assim, um computador definiria uma pessoa de 1,81m como alta e outra de 1,79m como de*

estatura média. Contudo, visualmente, os humanos não fazem tanta distinção entre a estatura dos dois indivíduos e tampouco podem afirmar com precisão, dada análise visual, que o segundo indivíduo não será alto. Pode-se intuitivamente dizer que o indivíduo de 1,79m não é alto, embora se aproxime bastante da categoria alto, ou ainda que existe uma proximidade à categoria dos indivíduos altos nele. Através de sentidos humanos não é possível perceber o limite preciso a partir do qual alguém passa a ser alto.

Estas variáveis linguísticas que caracterizam os indivíduos de um determinado conjunto possibilitam que regras de ação sejam criadas, regras essas baseadas no conhecimento e abstração do pensamento humano. Assim, aplicações tais como o controle de processos são possibilitadas, baseando-se nessas regras criadas a partir do conhecimento humano. Ilustrativamente, e se utilizando do exemplo 6, suponha que para um indivíduo 'alto' uma ação deve ser tomada, enquanto que para um indivíduo 'baixo' outra ação deverá ser tomada. Tais ações independem do valor exato da altura do indivíduo, mas serão realizadas baseando-se na classificação previamente realizada.

Na próxima seção iremos detalhar a teoria de conjuntos fuzzy, traçando um paralelo com a teoria de conjuntos clássicos.

3.2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Nesta seção os conjuntos fuzzy serão abordados, como início dos estudos sobre a teoria Fuzzy. Entretanto, previamente serão revisitados conceitos relacionados a conjuntos clássicos, que permitirá realizar um paralelo entre as visões tradicional/clássica e a visão fuzzy.

3.2.1 Conjuntos Clássicos

O universo de discurso ao qual os elementos e seus conjuntos pertencem caracteriza o tipo de conjunto a que se referem. Assim sendo, os conjuntos crisp, ou clássicos,

possuem elementos cuja fronteira é bem definida e pertinência precisa. O termo “crisp” denotará a partir de agora todas as grandezas e variáveis que possuem bem definidas as fronteiras entre elementos. Conceito importante na teoria a ser abordada neste texto é a função de pertinência (ou função indicadora), que mapeia os elementos do conjunto Universo em valores que relacionam a existência ou não do elemento dentro de um determinado conjunto, ou seja, a função $P : U \rightarrow \{0, 1\}$ pode ser enunciada como segue:

$$P(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na figura 3.1 tem-se uma ilustração de um conjunto crisp que exemplifica e facilita o entendimento da função de pertinência, em que percebe-se que a fronteira do conjunto A é bem definida e os elementos do conjunto Universo se dividem em pertencentes ou não ao conjunto A . Dessa forma, para os elementos a e b , a função indicadora pode ser calculada como $P(a) = 1$ e $P(b) = 0$.

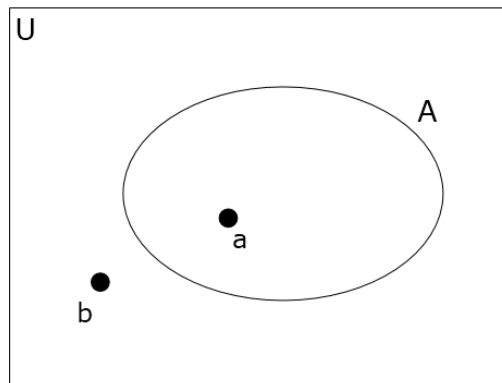


Figura 3.1: Conjuntos Crisp

3.2.2 Conjuntos Fuzzy

Realizando uma generalização para o caso crisp, é possível dizer que em relação aos conjuntos fuzzy, sua fronteira é pouco precisa e a pertinência ao conjunto é variável e nebulosa. De modo teórico, a principal característica a diferenciar os conjuntos crisp e fuzzy é o modo como a função de pertinência é definida.

Para os conjuntos fuzzy, a pertinência $\mu : U \rightarrow [0, 1]$ pode ser enunciada como se segue

Definição 9 *Pertinência ou Grau de pertinência fuzzy μ é o grau que mede o quanto um elemento pertence a um conjunto fuzzy, variando no intervalo $[0, 1]$, no qual $\mu(x) = 0$ denota que o elemento x não pertence ao conjunto \tilde{A} , $\mu(x) = 1$ denota que o elemento x é totalmente pertencente ao conjunto \tilde{A} e $\mu(x) = \lambda$, denota que o elemento x possui pertinência de grau λ , em relação ao conjunto fuzzy suposto.*

Na figura 3.2, ilustra-se um conjunto fuzzy \tilde{A} , cuja fronteira é nebulosa, diferente da figura 3.1, e os elementos pertencem ao conjunto com graus de pertinência diferentes. Como exemplo, percebe-se que $\mu(a) = 1$, uma vez que a pertence totalmente ao conjunto \tilde{A} , $\mu(d) = 0$, pois está totalmente fora do conjunto e $1 > \mu(b) > \mu(c) > 0$, dado que os elementos pertencem à fronteira e c está mais afastado do centro do conjunto. Assim, quanto maior a pertinência de um elemento a determinado conjunto, com maior certeza é possível dizer que aquele elemento pertence ao conjunto em questão.

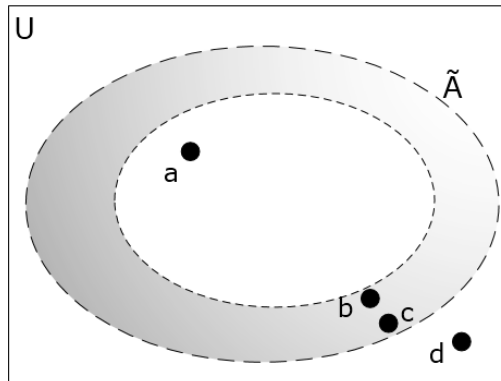


Figura 3.2: Conjuntos Fuzzy

Pode-se utilizar a seguinte notação para os conjuntos fuzzy, dado o conjunto universo U :

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu(x_1)}{x_1} + \frac{\mu(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu(x_n)}{x_n} \right\} = \sum_i \frac{\mu(x_i)}{x_i},$$

em que os pares $\frac{\mu(x_i)}{x_i}$ se referem a um elemento do universo de discurso, no denominador e sua pertinência associada ao conjunto em questão, no numerador e $i \in 1, 2, \dots, n$ em que n é o número de elementos. Importante pontuar que o sinal de $+$ não se refere a soma, e sim a uma notação que remete a união entre os pares ordenados, da mesma forma que a fração não significa uma divisão, mas sim a relação entre os elementos numerador e denominador como pertinência e elemento, respectivamente. A notação referencia um conjunto universo discreto. Estendendo o conceito para o caso contínuo, a união de elementos em um universo contínuo pode ser denotada pela representação do símbolo integral.

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu(x_1)}{x_1} + \frac{\mu(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu(x_n)}{x_n} \right\} = \int_i \frac{\mu(x_i)}{x_i}$$

De modo a facilitar a notação de pertinência de determinado elemento a um conjunto fuzzy, convém utilizar $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$, para representar a pertinência de um elemento x_i ao conjunto \tilde{A} .

Importante destacar que o conjunto vazio \emptyset possui pertinência zero associada a seus elementos e que o conjunto universo U possui pertinência 1 para todos os elementos do universo de discurso. De modo a ilustrar a ideia, suponha que o universo de discurso U possua os elementos $U = \{a, b, c\}$. Neste caso a pertinência associada a cada um dos elementos a, b e c ao conjunto U seria 1 e ao conjunto vazio \emptyset seria zero. Os conjuntos \emptyset e U não são fuzzy, mas crisp. Tal abstração é permitida dada a particularização que ocorre a partir da pertinência fuzzy e que resulta na pertinência crisp, uma vez que os conjuntos fuzzy são generalizados a partir do caso crisp.

Dados conjuntos fuzzy \tilde{A} , \tilde{B} e \tilde{C} , definidos no universo U , as operações e propriedades dos conjuntos fuzzy podem ser explicitadas e são, em geral, as mesmas dos conjuntos clássicos, salvo as leis do terceiro excluído e contradição.

- 1) União: $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$
- 2) Interseção: $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$
- 3) Complemento: $\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$

4) Diferença: $\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}$

5) Lei de De Morgan:

$$\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cup \overline{\tilde{B}}$$
$$\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{B}}$$

6) Pertinência: $\tilde{A} \subset \tilde{B} \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)$

7) Associatividade:

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C}$$
$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C}$$

8) Comutatividade:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$$
$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$$

9) Distributividade:

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$$
$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$$

10) Identidade:

$$\tilde{A} \cap \emptyset = \emptyset$$
$$\tilde{A} \cup U = U$$
$$\tilde{A} \cap U = \tilde{A}$$

Cabe observar que as seguintes propriedades importantes para os conjuntos clássicos não se aplicam aos conjuntos fuzzy:

1) $A \cup \overline{A} = U$ (lei dos terceiros excluídos)

2) $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (lei da contradição)

O seguinte exemplo ilustra algumas propriedades dos conjuntos fuzzy e a notação utilizada:

Exemplo 7 Tem-se para $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ os seguintes conjuntos fuzzy:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,2}{5} \right\} \text{ e } \tilde{B} = \left\{ \frac{0,5}{2} + \frac{0,7}{3} + \frac{0,2}{4} + \frac{0,4}{5} \right\}:$$

O complemento dos conjuntos \tilde{A} e \tilde{B} pode ser encontrado como segue:

$$\overline{\tilde{A}} = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,7}{4} + \frac{0,8}{5} \right\} \text{ e } \overline{\tilde{B}} = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{0,6}{5} \right\}$$

Em relação à união dos conjuntos, tem-se:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{0,7}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,4}{5} \right\}$$

Pode-se exemplificar ainda a diferença entre \tilde{A} e \tilde{B} .

$$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,2}{5} \right\} \cap \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{0,6}{5} \right\} =$$

$$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,2}{5} \right\}$$

Conforme mencionado, a interseção entre um conjunto fuzzy e seu complemento não é vazio, uma vez que, como é possível ver, a interseção entre \tilde{A} e $\overline{\tilde{A}}$ possui pertinências diferente de zero para elementos do conjunto de domínio.

$$\tilde{A} \cap \overline{\tilde{A}} = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,2}{5} \right\}$$

$$\tilde{B} \cup \overline{\tilde{B}} = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{0,7}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{0,6}{5} \right\}$$

As pertinências associadas aos elementos de um determinado conjunto fuzzy \tilde{A} geralmente são explicitadas em um mapeamento gráfico que relaciona o grau de pertinência com o elemento associado, resultando na função de pertinência do conjunto fuzzy.

Para cada elemento x_i do domínio, o gráfico retorna o μ_i relacionado, formando a curva da função de pertinência. Importante notar que este caso é de uma função de pertinência contínua, embora seja possível criarmos uma função de pertinência discreta, dependendo da natureza do domínio.

Ainda, uma função de pertinência pode ser representada de maneira analítica, como ilustrado no exemplo seguinte.

Exemplo 8 Na figura 3.3, é possível verificar um exemplo de função de pertinência relacionando x a uma pertinência $\mu_{\tilde{A}}(x)$. É possível discriminar as seguintes funções

representando a pertinência:

$$0 < x \leq 0,5 : \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$$

$$0,5 < x \leq 1 : \mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5x + 0,5$$

$$1 < x \leq 2 : \mu_{\tilde{A}}(x) = -x + 2$$

$$x > 2 : \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$$

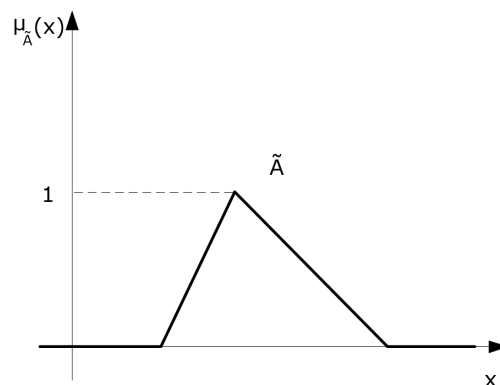


Figura 3.3: Gráfico Função de Pertinência

As funções de pertinência possibilitam a modelagem de variáveis físicas em um ambiente fuzzy. Para ilustrar esse fato, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 9 Considere um indivíduo dentro de uma sala com um condicionador de ar que não exibe a temperatura de operação devido a um visor danificado. O homem, dada sua capacidade sensível à temperatura e sua experiência, avalia que a temperatura da sala, em termos linguísticos, pode se encontrar nas seguintes faixas: Sala muito fria, Sala fria, Sala com temperatura agradável, Sala quente, Sala muito quente.

Pode-se encarar cada uma das faixas de temperatura indicadas pelo homem como um conjunto fuzzy, que possui uma função de pertinência associada.

O gráfico de função de pertinência presente na figura 3.4 poderia ser utilizado para modelar o sistema de temperaturas acima elencado pelo indivíduo.

Do gráfico, é possível perceber que cada classificação de sensações térmicas resulta em um conjunto fuzzy, sendo possível representar mais de um conjunto fuzzy ao mesmo tempo.

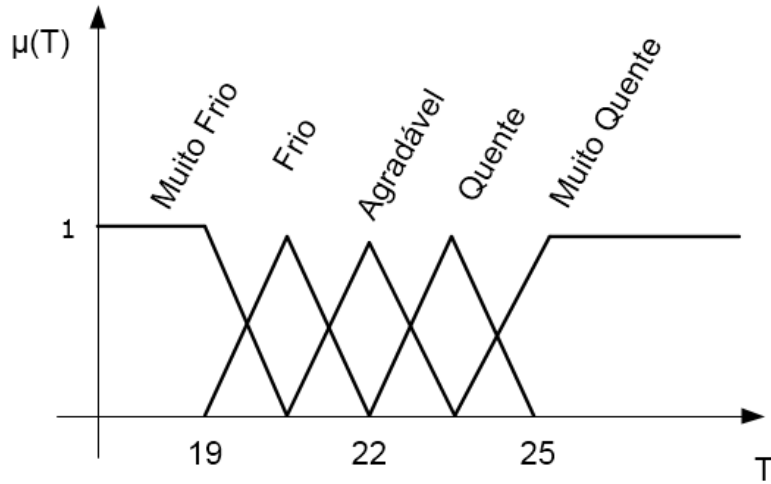


Figura 3.4: Funções de Pertinência

O conjunto fuzzy de temperaturas frias possui grau de pertinência 1 para uma temperatura em torno de 20° C e para demais temperaturas próximas ele segue uma função rampa até a temperatura de 22° C, a partir da qual, todas as temperaturas possuem grau de pertinência zero, ou seja, a temperatura de 25° C possui pertinência zero ao conjunto das temperaturas frias. É possível perceber ainda que existem sobreposições das temperaturas em relação aos conjuntos fuzzy. Dessa forma, a temperatura de 21° C pode pertencer tanto ao conjunto das temperaturas agradáveis quanto ao conjunto das temperaturas frias, com pertinências diferentes. Neste caso, a pertinência da temperatura 21° C ao conjunto agradável é em torno de 0,8 enquanto que a sua pertinência ao conjunto frio é de 0,2.

3.3 Teoria das Relações Fuzzy

Da mesma forma que foi conduzido o estudo de conjuntos fuzzy, será traçado um paralelo entre relações crisp e fuzzy, tendo o cuidado de explicitar separadamente cada uma das teorias de modo a possibilitar um melhor entendimento.

3.3.1 Relações Clássicas

Segundo a literatura de conjuntos crisp, dados r conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$, o produto cartesiano, denotado por $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_r$ pode ser entendido pelo conjunto de ordenações de elementos do tipo $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ em que $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \dots, a_r \in A_r$.

Para o caso de se limitar o número de conjuntos a dois, é possível chamar cada um dos elementos da ordenação por par ordenado. De modo a ilustrar o conceito de par ordenado, considere dois conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1\}$, e o conjunto de pares ordenado resultante no produto cartesiano $A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$

Para conjuntos clássicos, relações são subconjuntos do produto cartesiano formado por um número r de universos que mantém um tipo de característica comum entre seus elementos determinando uma interação entre os mesmos. De modo a simplificar o conceito, é possível particularizar a análise para relações binárias, que são mais frequentes na literatura, tendo apenas dois conjuntos associados. Entretanto, é possível estender os conceitos a relações com um número r de conjuntos.

Dados dois conjuntos clássicos X e Y , a relação $R \subset X \times Y$ é um subconjunto do produto cartesiano, em que a interação entre os elementos dos conjuntos é determinada pela função característica, $\chi_R : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$ na qual, se algum $x \in X$ e $y \in Y$ estiverem relacionados, $\chi_R(x, y) = 1$ e, caso contrário, $\chi_R(x, y) = 0$. Tal mapeamento é conhecido como força da relação e, no caso crisp, é restrito a 0 ou 1, em que pode-se ilustrar um par sem relacionamento ou totalmente relacionado, respectivamente. A relação pode ser expressa através de uma matriz chamada de matriz de relação M_R , na qual as linhas se relacionam com o primeiro conjunto (X) e as colunas se relacionam com o outro conjunto (Y) e para cada elemento (x, y) atribuímos valor 1 para os elementos que possuem interação.

Exemplo 10 *Dados os conjuntos $X = \{10, 20, 30\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$, pode-se ilustrar*

a seguinte relação:

$$\chi_R(x, y) = 0, \quad \text{se } x \leq 10y$$

$$\chi_R(x, y) = 1, \quad \text{se } x > 10y$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O diagrama de Sagittal, na figura 3.5, descreve a relação entre os elementos dos conjuntos X e Y . O mapeamento da relação pode ser percebido pelas linhas interligando os pontos no diagrama e pelos valores 1 na matriz de relação.

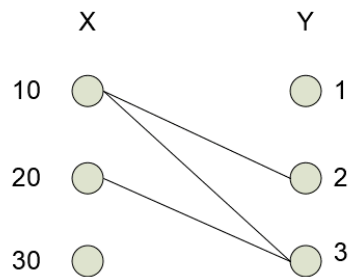


Figura 3.5: Diagrama de Sagittal - Relações

A seguir é apresentado mais um exemplo, para mostrar a relação entre os elementos de um conjunto:

Exemplo 11 *Sejam dois viajantes os quais possuem as cidades de um possível roteiro previsto descritas pelos conjuntos X e Y a seguir: $X = \{\text{Campinas, Recife}\}$ e $Y = \{\text{Rio de Janeiro, Salvador, João Pessoa}\}$. Seja R a relação cidades próximas, em que duas cidades são consideradas próximas se a distância entre as mesmas é menor que 150km. Tal relação possibilita os dois viajantes planejarem em que cidades poderão fazer contato.*

A relação R pode ser descrita pela seguinte matriz de relação.

$$RJ \quad SA \quad JP$$

$$\begin{matrix} CPS \\ RCF \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O seguinte diagrama Sagittal, figura 3.6, permite ilustrar em termos gráficos o relacionamento entre os elementos dos conjuntos. Do exemplo, percebe-se que apenas as cidades Recife e João Pessoa são cidades próximas, segundo a relação em questão.

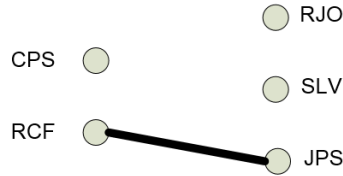


Figura 3.6: Relações de Proximidade entre Cidades

3.3.2 Operações e Propriedades de Relações Clássicas

A partir da definição de relação dada na seção anterior, é possível enumerar operações e propriedades das relações clássicas. Inicialmente, definem-se as matrizes correspondentes às relações nula e completa, como N e C , como segue:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que as matrizes de relação nula e completa são análogas aos conjuntos vazio e universo, dos conjuntos clássicos, uma vez que a relação nula e o conjunto vazio representam a ausência da pertinência em relação a qualquer elemento do conjunto domínio e a relação completa e o conjunto universo representam a completudo em relação ao domínio.

Abaixo, são listadas as operações e propriedades 1) União: $\chi_{R \cup S}(x, y) = \max(\chi_R(x, y), \chi_S(x, y))$

2) Interseção: $\chi_{R \cap S}(x, y) = \min(\chi_R(x, y), \chi_S(x, y))$

3) Complemento: $\chi_{\bar{R}}(x, y) = 1 - \chi_R(x, y)$

4) Continência: $R \subseteq S \rightarrow \chi_R(x, y) \leq \chi_S(x, y)$

Vale ressaltar ainda que da mesma maneira que os conjuntos, as relações clássicas mantêm as propriedades comutativa, associativa, distributiva, involução e idempotência. O teorema de DeMorgan também é válido para as relações clássicas, assim como a lei das metades excluídas também se aplicam, como visto em ROSS [11].

3.3.3 Composição de Relações Clássicas

Sejam X , Y e Z três conjuntos universos e $R \subset X \times Y$ e $S \subset Y \times Z$ duas relações. Suponha agora que se deseja estabelecer uma relação entre os conjuntos X e Z . Essa relação pode ser obtida através da composição entre as relações R e S , o seguinte exemplo ajuda a ilustrar o seu conceito.

Exemplo 12 Considere duas relações $R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_4)\}$ e $S = \{(y_1, z_2), (y_3, z_2)\}$, representados pelo diagrama de Sagittal na figura 3.7. Afim de discriminar a relação entre os elementos de dos conjuntos universos X e Z , pode-se perceber de maneira visual pelo diagrama que os únicos caminhos existentes entre os elementos de X e Z são as rotas começando em x_1 e terminando em z_2 . Assim, a relação entre os elementos de X e Z deve considerar as rotas que permitem relacionar os elementos.

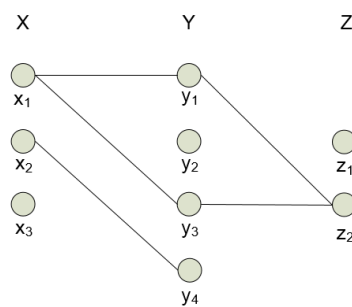


Figura 3.7: Composição entre Relações

Analiticamente, é possível obter a força da relação entre elementos dos conjuntos X e Z através de duas formas e denota-se como $T = R \circ S$

1. Composição max-min: busca o máximo dentre todos os caminhos que levam de elementos de x até determinado elemento de z em que a pertinência do caminho

é a mínima entre cada uma das etapas, sendo o operador \bigvee representa o máximo valor possível:

$$\chi_T(x, z) = \bigvee_{y \in Y} \min[(\chi_R(x, y), \chi_S(y, z))]$$

2. Composição max-prod: busca o máximo dentre todos os caminhos que levam de elementos de x até determinado elemento de z em que a pertinência do caminho é o produto das etapas, conforme segue:

$$\chi_T(x, z) = \bigvee_{y \in Y} [(\chi_R(x, y) \cdot \chi_S(y, z))]$$

Exemplo 13 Considere as relações R e S , definidas no exemplo 12 e representadas matricialmente como abaixo:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A composição maxmin pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} \chi_T(x_1, z_1) &= \max[\min(\chi_R(x_1, y_1), \chi_S(y_1, z_1)), \min(\chi_R(x_1, y_2), \chi_S(y_2, z_1)), \\ &\quad , \min(\chi_R(x_1, y_3), \chi_S(y_3, z_1), \min(\chi_R(x_1, y_4), \chi_S(y_4, z_1))] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_T(x_1, z_2) &= \max[\min(\chi_R(x_1, y_1), \chi_S(y_1, z_2)), \min(\chi_R(x_1, y_2), \chi_S(y_2, z_2)), \\ &\quad , \min(\chi_R(x_1, y_3), \chi_S(y_3, z_2), \min(\chi_R(x_1, y_4), \chi_S(y_4, z_2))] = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_T(x_2, z_1) &= \max[\min(\chi_R(x_2, y_1), \chi_S(y_1, z_1)), \min(\chi_R(x_2, y_2), \chi_S(y_2, z_1)), \\ &\quad , \min(\chi_R(x_2, y_3), \chi_S(y_3, z_1), \min(\chi_R(x_2, y_4), \chi_S(y_4, z_1))] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_T(x_2, z_2) &= \max[\min(\chi_R(x_2, y_1), \chi_S(y_1, z_2)), \min(\chi_R(x_2, y_2), \chi_S(y_2, z_2)), \\ &\quad , \min(\chi_R(x_2, y_3), \chi_S(y_3, z_2), \min(\chi_R(x_2, y_4), \chi_S(y_4, z_2))] = 1 \end{aligned}$$

$$\chi_T(x_3, z_1) = \max[\min(\chi_R(x_3, y_1), \chi_S(y_1, z_1)), \min(\chi_R(x_3, y_2), \chi_S(y_2, z_1)), \\ , \min(\chi_R(x_3, y_3), \chi_S(y_3, z_1), \min(\chi_R(x_3, y_4), \chi_S(y_4, z_1)))] = 0$$

$$\chi_T(x_3, z_2) = \max[\min(\chi_R(x_3, y_1), \chi_S(y_1, z_2)), \min(\chi_R(x_3, y_2), \chi_S(y_2, z_2)), \\ , \min(\chi_R(x_3, y_3), \chi_S(y_3, z_2), \min(\chi_R(x_3, y_4), \chi_S(y_4, z_2)))] = 0$$

O resultado da operação é a seguinte relação T :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O resultado da composição $\max\text{prod}$ é o mesmo da composição $\max\text{min}$ para o caso *crisp*, uma vez que o mínimo entre os valores 0 e 1 é igual ao seu produto,

É possível estender o conceito acima para conjuntos nebulosos, conforme será apresentado na seção seguinte.

3.3.4 Relações Fuzzy

Da mesma forma como os conjuntos *crisp*, as relações fuzzy são uma extensão do conceito de relações *crisp*, ao passo que o mapeamento da força das relações não se limita a valores 0 ou 1, mas variam em um intervalo de 0 a 1, conforme definição a seguir.

Definição 10 *Relações fuzzy são subconjuntos do produto cartesiano que possuem um relacionamento entre si, tal que $X \times Y \rightarrow [0, 1]$, em que a força do mapeamento, isto é, a quantificação da interação existente entre os elementos de \tilde{X} e \tilde{Y} é expressa pela função de pertinência dos pares ordenados da relação $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$*

Assim, de modo a exemplificar o conceito de relações fuzzy, considere o exemplo a seguir:

Exemplo 14 *Suponha novamente o caso dos dois viajantes, conforme descrito no exemplo 11, que pretendem se encontrar dado o roteiro planejado de suas viagens.*

Considere que a relação \tilde{R} que dita quais as cidades próximas, dentre as cidades previamente escolhidas por eles é fuzzy e, dessa forma, cidades com mais de 150km possuem um grau de pertinência associado à relação, diferente do caso crisp no qual apenas as cidades relacionadas possuem valor diferente de zero.

Assim, tome a matriz de relação, que ilustra os graus de pertinência associados a cada par de elementos na relação \tilde{R} fuzzy sobre cidades próximas, os graus de pertinência se baseiam numa função que considera valores de distância menores que 150km como pertinência 1 e a pertinência decresce linearmente até 2000km, a partir do qual todas cidades são consideradas totalmente distantes, grau de pertinência 0. A seguir representamos a matriz da relação \tilde{R} .

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} RJ & SA & JP \end{array} \\ \begin{array}{c} CPS \\ RCF \end{array} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A adaptação do diagrama Sagittal, exibida na figura 3.8, permite ilustrar a força da relação em termos gráficos, uma vez que quão mais espessa a linha que une os elementos do conjunto, maior será a força da relação proposta, ilustrando a pertinência do par.

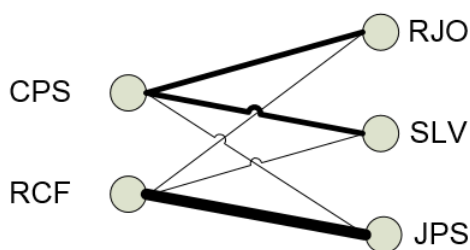


Figura 3.8: Relações Fuzzy

Note que no exemplo 11 remete a um tipo de relação binária, uma vez que as cidades são próximas ou não (possuem menos de 150km de distância ou não). No ambiente de relações fuzzy, tem-se uma liberdade maior, permitida dado que os pesos da relação variam de 0 a 1. Assim, cidades com uma distância de 151 km, não

é considerada próxima no caso crisp, enquanto que, no caso fuzzy teria um grau de pertinência ao conjunto das cidades próximas bem elevado.

3.3.5 Operações e Propriedades de Relações Fuzzy

É importante observar que as operações e propriedades das relações fuzzy são definidas da mesma maneira como para o caso crisp, relacionando apenas relações fuzzy \tilde{R} e \tilde{S} . Esta equivalência acontece para União, Interseção, Complemento, Continência e para as propriedades comutativa, associativa, distributiva, involução e idempotência e o teorema de DeMorgan, que são definidas de maneira semelhante. Entretanto as propriedades $\tilde{R} \cup \overline{\tilde{R}} = F$ e $\tilde{R} \cap \overline{\tilde{R}} = N$ não se aplicam nas relações fuzzy.

3.3.6 Composição de Relações Fuzzy

Também é possível definir o produto cartesiano fuzzy, uma vez que as relações se assemelham à estrutura de um conjunto fuzzy, mapeando uma pertinência ao par de elementos. Assim, dado um conjunto fuzzy \tilde{A} definido para um universo X e um conjunto fuzzy \tilde{B} sobre um universo Y , o produto cartesiano fuzzy será uma relação entre elementos dos conjuntos fuzzy \tilde{A} e \tilde{B} contida no produto cartesiano entre X e Y , tal que a pertinência do par à relação é definida pela menor pertinência dentre os elementos do par, ou seja, $\tilde{A} \times \tilde{B} = \tilde{R} \subset X \times Y$, em que

$$\chi_{\tilde{R}}(x, y) = \chi_{\tilde{A} \times \tilde{B}}(x, y) = \min(\chi_{\tilde{A}}(x, y), \chi_{\tilde{B}}(x, y))$$

Podem ser enunciadas também a composição max-min e max-prod entre dois conjuntos fuzzy. Considere duas relações fuzzy \tilde{R} e \tilde{S} tal que \tilde{R} seja definida no produto cartesiano $X \times Y$ e \tilde{S} sobre o produto cartesiano $Y \times Z$. A composição entre as duas relações fuzzy gera uma terceira relação fuzzy \tilde{T} definida no produto cartesiano $X \times Z$ e pode ser escrita, em função das pertinências associadas aos pares das relações, $\tilde{T} = \tilde{R} \circ \tilde{S}$

Da mesma forma que em relações clássicas, a composição max-min busca o má-

ximo dentre todos os caminhos que levam de elementos de x até determinado elemento de z , sendo a pertinência do caminho a mínima entre cada uma das etapas. É possível ver que

$$\chi_{\tilde{T}}(x, z) = \chi_{\tilde{R} \circ \tilde{S}}(x, z) = \bigvee_{y \in Y} [\min(\chi_{\tilde{R}}(x, y), \chi_{\tilde{S}}(y, z))]$$

Da mesma forma, a composição max-prod busca o máximo dentre todos os caminhos que levam de elementos de x até determinado elemento de z , em que a pertinência do caminho é o produto das etapas, conforme segue:

$$\chi_{\tilde{T}}(x, z) = \chi_{\tilde{R} \circ \tilde{S}}(x, z) = \bigvee_{y \in Y} [(\chi_{\tilde{R}}(x, y) \cdot \chi_{\tilde{S}}(y, z))]$$

Como ilustração, segue o exemplo de cálculo da composição entre duas relações adaptado de ROSS [11].

Exemplo 15 *Sejam os seguintes conjuntos universo $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ e $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, sobre os quais se definem as seguintes relações \tilde{R} sobre $X \times Y$ e \tilde{S} sobre $Y \times Z$, tal como segue:*

$$\begin{array}{cc} & y_1 & y_2 \\ \tilde{R} = & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,7 & 0,5 \\ 0,8 & 0,4 \end{bmatrix} \\ & z_1 & z_2 & z_3 \\ \tilde{S} = & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,9 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,5 \end{bmatrix} \end{array}$$

A relação \tilde{T} resulta do relacionamento entre elementos de X e Z , através da composição fuzzy max-min, como segue:

$$\begin{aligned}\chi_{\tilde{T}}(x_1, z_1) &= \max[\min(\chi_{\tilde{R}}(x_1, y_1), \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_1)), \min(\chi_{\tilde{R}}(x_1, y_2), \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_2))] = \\ &= \max[\min(0.7, 0.9), \min(0.5, 0.1)] = \max[0.7, 0.1] = 0.7\end{aligned}$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_1, z_2) = \max[\min(\chi_{\tilde{R}}(x_1, y_1), \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_2)), \min(\chi_{\tilde{R}}(x_1, y_2), \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_2))] = 0.6$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_1, z_3) = \max[\min(\chi_{\tilde{R}}(x_1, y_1), \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_3)), \min(\chi_{\tilde{R}}(x_1, y_2), \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_3))] = 0.5$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_2, z_1) = \max[\min(\chi_{\tilde{R}}(x_2, y_1), \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_1)), \min(\chi_{\tilde{R}}(x_2, y_2), \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_1))] = 0.8$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_2, z_2) = \max[\min(\chi_{\tilde{R}}(x_2, y_1), \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_2)), \min(\chi_{\tilde{R}}(x_2, y_2), \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_2))] = 0.6$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_2, z_3) = \max[\min(\chi_{\tilde{R}}(x_2, y_1), \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_3)), \min(\chi_{\tilde{R}}(x_2, y_2), \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_3))] = 0.4$$

Assim, a seguinte relação \tilde{T} é retornada:

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Também é possível encontrar a relação \tilde{T} , que resulta do relacionamento entre elementos de X e Z através da composição fuzzy max-prod:

$$\chi_{\tilde{T}}(x_1, z_1) = \max[(\chi_{\tilde{R}}(x_1, y_1) \times \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_1)), \chi_{\tilde{R}}(x_1, y_2) \times \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_2)] = 0.63$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_1, z_2) = \max[(\chi_{\tilde{R}}(x_1, y_1) \times \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_2)), \chi_{\tilde{R}}(x_1, y_2) \times \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_2)] = 0,6$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_1, z_3) = \max[\chi_{\tilde{R}}(x_1, y_1) \times \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_3), \chi_{\tilde{R}}(x_1, y_2) \times \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_3)] = 0,5$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_2, z_1) = \max[\chi_{\tilde{R}}(x_2, y_1) \times \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_1), \chi_{\tilde{R}}(x_2, y_2) \times \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_1)] = 0,8$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_2, z_2) = \max[\chi_{\tilde{R}}(x_2, y_1) \times \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_2), \chi_{\tilde{R}}(x_2, y_2) \times \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_2)] = 0,6$$

$$\chi_{\tilde{T}}(x_2, z_3) = \max[\chi_{\tilde{R}}(x_2, y_1) \times \chi_{\tilde{S}}(y_1, z_3), \chi_{\tilde{R}}(x_2, y_2) \times \chi_{\tilde{S}}(y_2, z_3)] = 0,4$$

Assim, resulta na seguinte relação \tilde{T} :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0,63 & 0,42 & 0,25 \\ 0,72 & 0,48 & 0,20 \end{bmatrix}$$

Diferente do caso crisp, o resultado das composições maxmin e maxprod são relações com diferenças nos valores da força da relação entre os elementos. O uso de uma ou outra é facultada, obtendo resultados semelhantes, entretanto.

Capítulo 4

Diagnosticabilidade de Sistemas a Eventos Discretos Fuzzy

Neste capítulo serão abordados os conceitos relacionados a diagnosticabilidade de Sistemas a Eventos Discretos Fuzzy (SEDF), que perpassam a conceituação de diagnosticabilidade fuzzy e método de construção de diagnosticadores. Além disso, para permitir a adequada formulação matemática da modelagem de um SEDF, é realizado uma reformulação do conceito de autômato, como visto na primeira seção.

4.1 Sistemas a Eventos Discretos Fuzzy

Na teoria de sistemas a eventos discretos, os eventos e estados associados a modelagem dos sistemas reais são discretos e bem definidos. No entanto, para considerar determinadas classes de sistemas em que algumas variáveis possuem características como vagueza, imprecisão e subjetividade, tal qual a biomedicina, economia, entre outros, uma teoria baseada em sistemas a eventos discretos fuzzy (SEDF) foi apresentada em LIN e YING [20], combinando a teoria de conjuntos fuzzy com a teoria de SED. Apesar do conceito de autômato fuzzy ter sido proposto há décadas atrás, a utilização do autômato fuzzy combinado à teoria de SED ainda está em desenvolvimento. Dessa forma, conceitos relativos a modelagem, supervisão, observabilidade e controlabilidade estão sendo desenvolvidos, como visto recentemente em [21–24].

4.1.1 Formulação alternativa de SED

Inicialmente, será apresentada uma formulação alternativa de SEDs, representando autômatos em notação matricial. Essa nova forma irá possibilitar representar um SEDF de maneira a permitir levar em conta as imprecisões.

Seja Q o conjunto de estados de um sistema e n a cardinalidade deste conjunto. Então, é possível representar um vetor linha de estados de dimensão $1 \times n$, $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$, em que q_i representa o i -ésimo estado do sistema.

O estado atual do sistema é representado então, através do mapeamento da condição de cada estado no vetor de estados através da função indicadora $\mathcal{Y}(q)$. A função indicadora $\mathcal{Y} : q \rightarrow \{0, 1\}$ atribui peso 1, caso q seja o estado atual do sistema e peso 0, caso o sistema não se encontre no estado referido. Assim, de modo a ilustrar a formulação será tomado o autômato abordado no exemplo 3, representado novamente na figura 4.1.

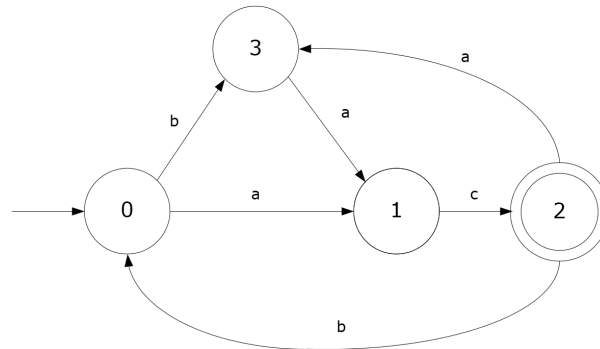


Figura 4.1: Autômato Utilizado no Exemplo 3

O vetor $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]$ representa o espaço de estados Q . A representação do sistema no estado inicial 0 é dada por $q = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, que, por simplicidade, pode ser denotado por $q_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$. Analogamente, representam-se os demais estados por $q_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$, $q_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ e $q_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$.

O conjunto associado a todos os eventos no autômato é representado por E . Cada elemento do conjunto de eventos E será representado por uma relação entre os elementos do conjunto de estados. Esta relação explicita quais pares de estados possuem transição levando de um estado a outro. Dessa forma, nesta abordagem,

o evento e pode ser descrito a partir da relação $R_e : Q \times Q \rightarrow \{0, 1\}$ e visualmente é representado através da matriz de relação associada M_e , na qual a existência ou não da transição se utiliza da força da relação $\chi_{(q_i, q_j)}$, que retorna 1 caso exista a transição entre q_i e q_j e 0, caso contrário. Assim, no exemplo ilustrativo são dadas as seguintes representações para os eventos.

$$a = M_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = M_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, percebe-se que para o evento a , representado em M_a , o elemento a_{12} tem valor 1, o que significa que existe uma transição entre q_1 e q_2 , rotulada pelo evento a . Os elementos a_{23} e a_{31} também possuem valor 1 e indicam que a leva de q_2 para q_3 e q_3 para q_1 . Da mesma forma, existe uma ocorrência do evento b levando do estado q_3 para q_1 e q_1 para q_4 e o evento c apenas ocorre levando o estado q_2 para q_3 .

Adicionalmente, pode-se definir a função de transição $f(q_i, e) = q_j$ que explicita a evolução dos estados do sistema mediante a ocorrência de eventos através da multiplicação matricial entre o estado atual e a matriz do evento correspondente, resultando no estado alcançado. Assim, dado o estado atual q_1 , a ocorrência do evento a gerará o seguinte estado alcançado:

$$f(q_1, a) = q_1 \times a = q_2,$$

$$f(q_1, a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = q_2$$

Isto é, a partir do estado q_1 , dada a ocorrência do evento a , alcança-se o estado q_2 .

4.1.2 SEDF - Sistemas e Eventos Discretos Fuzzy

No contexto de SEDF, o estado atual do sistema é representado por um conjunto fuzzy, ou seja, existe uma pertinência associada a todos os estados crisp do espaço de estados. Assim, o estado atual \tilde{q} é um conjunto fuzzy que relaciona a possibilidade dos estados crisp do sistema serem o estado atual, tendo esta possibilidade descrita pelo grau de pertinência a_i .

$$\tilde{q} = \left\{ \frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2} + \dots + \frac{a_n}{q_n} \right\}$$

$$a_i \in [0, 1]$$

Similarmente, os eventos fuzzy $\tilde{\sigma}$ podem ser representados por uma relação no universo cartesiano entre os estados crisp do sistema, para a qual o grau de pertinência a_{ij} representa a possibilidade de ocorrência da transição entre os pares de estados, quando do acontecimento de σ .

$$\tilde{\sigma} : Q \times Q \rightarrow [0, 1]$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{M}_\sigma = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A partir dos conceitos de evento e estado fuzzy, define-se autômato fuzzy como em LIU e QIU [14]:

Definição 11 (Autômato Fuzzy [14]) *Um autômato finito fuzzy é definido por $\tilde{G} = (\tilde{Q}, \tilde{E}, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{Q}_m)$ em que \tilde{Q} é o conjunto de distribuição de possibilidades (estados fuzzy) sobre o conjunto de estados crisp Q , \tilde{q}_0 é o estado fuzzy inicial e \tilde{Q}_m é um conjunto fuzzy sobre os estados crisp de Q , representando os estados marcados. \tilde{E} representa o conjunto de eventos fuzzy e a relação de transição $\tilde{\delta}$ entre os estados é dada por $\tilde{\delta} : \tilde{Q} \times \tilde{E} \rightarrow \tilde{Q}$ em que $\tilde{\delta}(\tilde{q}, \tilde{\sigma}) = \tilde{q} \circ \tilde{\sigma}$, para $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ e $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}$.*

No presente texto, será utilizada a composição maxmin, visto que para efeito da

evolução do sistema, os métodos de composição de relação maxmin e maxprod são capazes de representar adequadamente a evolução do sistema, como visto na seção 3.3.

Considere o seguinte exemplo, adaptado de MOHUN [7] que ilustra o conceito de autômato fuzzy.

Exemplo 16 *Suponha uma esteira transportadora que possui um botão knob para alteração de sua velocidade permitindo as faixas de velocidade “Baixa” (B), “Média” (M) e “Alta” (A). Dessa forma, considere Q o conjunto das velocidades possíveis no sistema, tal que $Q = \{B, M, A\}$ e o conjunto de eventos $E = \{a_1, a_2, a_3, d_1, d_2, d_3\}$, em que a_i representa um aumento da velocidade através do botão knob e os eventos d_i representam um decréscimo na velocidade. O diagrama que representa esse relacionamento pode ser visto na figura 4.2.*

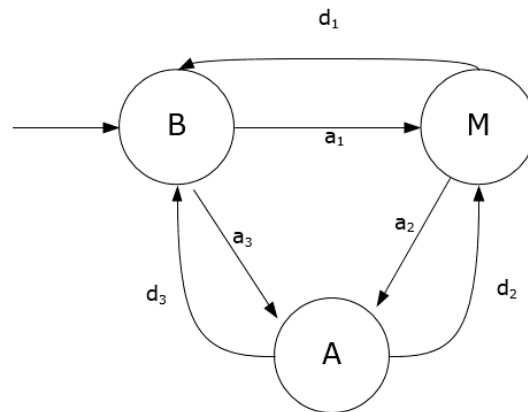


Figura 4.2: Autômato do Exemplo 14

A modelagem de tal sistema por um SEDF pode ser realizada considerando-se o autômato $\tilde{G} = (\tilde{Q}, \tilde{E}, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{Q}_m)$, em que \tilde{Q} é o conjunto de estados fuzzy, conforme funções de pertinência ilustradas na figura 4.3. \tilde{E} é o conjunto de estados fuzzy representando as variações de velocidade e denotado por $\tilde{E} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3\}$ e \tilde{Q}_m é o conjunto vazio.

Seja o estado inicial representado pelo vetor $\tilde{q}_0 = [0,8 \ 0,3 \ 0]$, cujo significado indica que o sistema pertence simultaneamente aos estados B com pertinência 0,8 e M com pertinência 0,3. Considere ainda que o evento a_1 pode ser representado

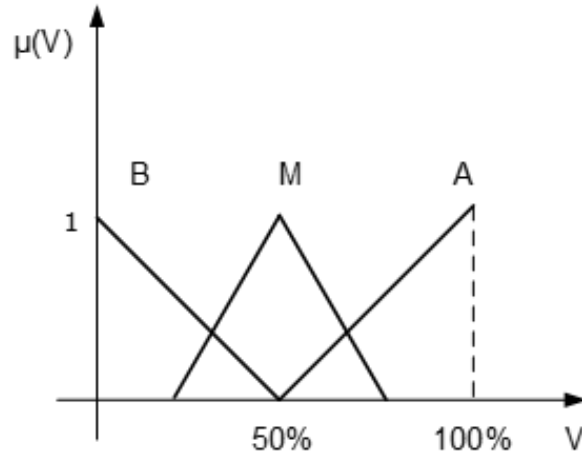


Figura 4.3: Funções de Pertinência associadas ao exemplo 13

por uma matriz relacionando as transições possíveis. A extensão para o caso fuzzy, permite que os elementos do evento fuzzy \tilde{a}_1 tenham valores entre 0 e 1, tal como representado por:

$$\tilde{a}_1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Na representação, podemos observar que a ocorrência do evento \tilde{a}_1 é capaz de levar o estado B para o estado M, com uma probabilidade de ocorrência da transição de grau 0,9. Interessante notar que existe a probabilidade do sistema se manter no estado B e até mesmo de chegar ao estado A, embora a probabilidade de ocorrência de tais transições é bem baixa. O mesmo acontece com a probabilidade de transição acontecer a partir dos estados M e A, dada a ocorrência de \tilde{a}_1 , que chega a ser nula.

A ocorrência de \tilde{a}_1 , a partir do estado q_0 do sistema, resulta no seguinte estado:

$$\tilde{\delta}(\tilde{q}_0, \tilde{a}_1) = \tilde{q}_0 \circ \tilde{a}_1 = \tilde{q}$$

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Assim, após a ocorrência do evento \tilde{a}_1 , o novo estado do sistema possui possibilidade 0,8 de estar no estado M , enquanto que possui pertinência aos estados B e A com 0,1 em ambos os casos.

Cabe ainda observar que a modelagem dessas pertinências com relação aos estados e eventos fuzzy se baseiam no conhecimento empírico que o indivíduo tem a respeito do sistema em questão, o que resulta nos graus de pertinência que irão descrever a dinâmica do modelo.

4.2 Diagnosticabilidade Fuzzy

A teoria de diagnosticabilidade fuzzy proposta por LIU e QIU [14] é baseada na teoria clássica de diagnosticabilidade tal qual apresentada em Sampath et al. em [2]. Para o avanço de tal teoria são necessárias algumas definições prévias que permitam formular adequadamente a diagnosticabilidade fuzzy.

Inicialmente, é possível definir dois conjuntos fuzzy importantes, cujos elementos são os eventos fuzzy de um dado autômato, que são o conjunto de eventos fuzzy observáveis e não observáveis. No caso crisp, os eventos são divididos binariamente entre eventos observáveis e não observáveis. No caso fuzzy, o conjunto fuzzy observável $\tilde{\Sigma}_o$ relaciona através do grau de pertinência ao conjunto o quão observável cada evento fuzzy será, ou seja, a pertinência de cada elemento será o grau de observabilidade daquele elemento, denotado por $\mu_{\tilde{\Sigma}_o}(\tilde{\sigma})$ e representado por $\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma})$ por simplicidade, enquanto que o conjunto fuzzy não observável $\tilde{\Sigma}_{uo}$ relaciona o grau de não observabilidade para cada evento fuzzy, através da pertinência associada ao conjunto. Interessante perceber que a pertinência associada a tais conjuntos deve seguir a regra $\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma}) + \tilde{\Sigma}_{uo}(\tilde{\sigma}) = 1$

Nesse ponto, para melhor elucidação, cabe observar que o evento fuzzy possui pertinências associadas:

- à força da relação entre os pares de estados, caracterizando a possibilidade de ocorrência da transição;
- ao conjunto fuzzy observável;
- ao conjunto fuzzy não observável.

Como ilustração, o evento fuzzy \tilde{a}_1 relaciona estado a estado a força da relação entre os mesmos, caracterizando a possibilidade da transição ocorrer entre os estados (i) e possui ainda a pertinência associada ao conjunto fuzzy de eventos observáveis $\tilde{\Sigma}_o(\tilde{a}_1)$ (ii) e a pertinência associada ao conjunto fuzzy de eventos não observáveis $\tilde{\Sigma}_{uo}(\tilde{a}_1)$ (iii).

Outro conjunto importante para a definição da diagnosticabilidade de sistemas a eventos discretos fuzzy é o conjunto fuzzy de falhas. No caso crisp, os eventos serão segregados binariamente em dois grupos, eventos que geram falha e eventos que não geram falhas. O conjunto fuzzy de falhas associa um grau de pertinência para os eventos fuzzy do conjunto de eventos do autômato, à possibilidade de uma falha ocorrer dado o acontecimento do evento fuzzy. Dessa forma, percebe-se que todos eventos são possíveis candidatos a gerar uma falha, uma vez que todos possuem uma pertinência associada ao conjunto de falhas, uns eventos com maior grau de falha e outros com menos.

Pode-se entender cada um dos eventos fuzzy do conjunto de estados do SEDF como pertencente simultaneamente a cada um dos três conjuntos acima definidos, ou seja, um evento fuzzy do SEDF possui pertinência aos conjuntos fuzzy observáveis, fuzzy não observáveis e fuzzy de falha, tendo variação apenas quanto ao grau de pertinência relacionado a cada um destes conjuntos. Além deste ponto, é possível observar ainda que a pertinência de uma sequência de eventos fuzzy à cada um dos eventos acima é dada através da lógica seguinte:

$$\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_m) = \min\{\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma}_i) : i = 1, 2 \dots m\}$$

$$\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_m) = \max\{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}_i) : i = 1, 2 \dots m\}$$

Tais pertinências são devidas, uma vez que o evento menos observável é o limitante para a definição do grau de observabilidade da sequência, enquanto que o evento com maior grau de falha seria o limitante para definir quanto mais falho seria o grau resultante da sequência.

Outro conceito importante para a definição de diagnosticabilidade fuzzy é o de conjunto de eventos observáveis máximo, o qual é composto pelos eventos fuzzy com o maior grau de observabilidade possível. A seguir, é apresentada a definição formal do conjunto observável máximo:

$$\tilde{E}_{Mo} = \{\tilde{\sigma} \in \tilde{E} : \forall \tilde{\sigma}' \in \tilde{E} | \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma}) > \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma}')\}.$$

A linguagem gerada pelo SEDF \tilde{G} , L é definida como:

$$L = \{\tilde{s} \in \tilde{E}^* : (\exists \tilde{q} \in \tilde{Q})[\tilde{\delta}(\tilde{q}_0, \tilde{s}) = \tilde{q}]\};$$

e a pós-linguagem de L , a partir de \tilde{s} sobre \tilde{G} poderá ser definida como:

$$L/\tilde{s} = \{\tilde{t} \in \tilde{E}^* : (\exists \tilde{q} \in \tilde{Q})[\tilde{\delta}(\tilde{q}_0, \tilde{s}\tilde{t}) = \tilde{q}]\}$$

Seja $L(\tilde{q})$ o conjunto de todas as sequências que se originam a partir de \tilde{q} em \tilde{G} . Define-se $L_1(\tilde{q}, \tilde{\sigma})$ como o conjunto de todos os eventos fuzzy de \tilde{q} , que são mais observáveis que $\tilde{\sigma}$ em \tilde{G} , ou seja, possuem grau de pertinência ao conjunto dos observáveis maior que $\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma})$ ou o grau máximo, que pode ser comparado ao alcance observável crisp. Define-se também $L_2(\tilde{q}, \tilde{\sigma})$ o conjunto de todas as sequências em L , que partindo de \tilde{q} , contém sequência menos observável que $\tilde{\sigma}$ com exceção do último evento, ou seja os estados alcançados por evento observável logo após o alcance não observável do estado.

$$L_1(\tilde{q}, \tilde{\sigma}) = \tilde{E}_{Mo} \cup \{\tilde{a} \in \tilde{E} : \tilde{\Sigma}_o(\tilde{a}) > \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma})\}$$

$$L_2(\tilde{q}, \tilde{\sigma}) = \{\tilde{u}\tilde{a} \in L(\tilde{q}) : \tilde{u}\tilde{a} \in L_1(\tilde{q}, \tilde{\sigma}) \text{ e } \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma}) \geq \tilde{M}_o(\tilde{u})\}$$

em que $M_o(\tilde{u}) = \max\{\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma}) : \tilde{\sigma} \in \tilde{u}\}$ e $L(\tilde{q}, \tilde{\sigma}) = L_1(\tilde{q}, \tilde{\sigma}) \cup L_2(\tilde{q}, \tilde{\sigma})$

Como no caso de SED clássicos, em que a operação de projeção P apaga de uma sequência todos os eventos não observáveis, estende-se o conceito para o caso fuzzy, em que a operação projeção $P_{\tilde{\sigma}}$ apaga de uma sequência de eventos fuzzy os eventos cujo grau de observabilidade são menores que $\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma})$. A projeção $P_{\tilde{\sigma}}$ pode ser definida como segue:

Definição 12 Para $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}$, a projeção $P_{\tilde{\sigma}} : \tilde{E}^* \rightarrow \tilde{E}^*$ é definida como segue:

$$P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{a}) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{se } \tilde{a} = \varepsilon \\ \tilde{a}, & \text{se } \tilde{a} \in \tilde{E}_{M_o} \text{ ou } \tilde{\Sigma}_o(\tilde{a}) > \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma}) \\ \varepsilon, & \text{se } \tilde{a} \in \tilde{\Sigma}_o(\tilde{a}) < \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma}) \end{cases}$$

$$P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{a}) = P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s})P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{a}), \forall \tilde{s} \in L \text{ e } \tilde{a} \in \tilde{E}.$$

A sequência fuzzy ε é entendida como sendo a sequência fuzzy nula.

A projeção inversa é um operador definido como segue:

$$P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(\tilde{t}) = \{\tilde{s} \in \tilde{E}^* : (\exists \tilde{q} \in \tilde{Q})[\tilde{\delta}(\tilde{q}_0, \tilde{s}) = \tilde{q}] \text{ e } P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}) = \tilde{t}\}$$

A projeção- $\tilde{\sigma}$ apaga de uma sequência todos os eventos fuzzy cuja observabilidade é menor do que $\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma})$. Em um caso específico no qual o grau de observabilidade dos eventos seja restrito a 0 ou 1, a projeção- $\tilde{\sigma}$ se torna a projeção conforme definida para o caso crisp, que apaga os eventos não observáveis do conjunto de estados.

Ainda convém definir um limite que determine que caso a pertinência ao conjunto de falhas de determinada sequência exceda esse limite, é dito que a sequência é uma sequência de falha e que gera um estado de falha. A diagnosticabilidade fuzzy deve então gerar condições para se definir caso determinada sequência atingiu ou não o limite superior de falha.

Considere $\tilde{E}_{falha} = \{\tilde{\sigma} \in \tilde{E} : \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}) > 0\}$. Para cada $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, seja $\Psi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\Sigma}_f)$ o conjunto de todas as sequências que terminam com um evento cuja possibilidade de

falha exceda ou iguale $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$, como definida:

$$\Psi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\Sigma}_f) = \{\tilde{s} \in \tilde{E}^* : (\exists \tilde{q} \in \tilde{Q}) \tilde{\delta}(\tilde{q}_0, \tilde{s}) = \tilde{q}, \tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_l) > \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})\}$$

Definição 13 (Função diagnosticabilidade [14]) Para $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, a função diagnosticabilidade fuzzy é definida como uma função parcial $FD_{\tilde{\sigma}} : \tilde{E}^* \rightarrow [0, 1]$ em que para $\tilde{s} \in \Psi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\Sigma}_f)$ e $\tilde{t} \in L/\tilde{s}$,

$$FD_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}) = \frac{\min(\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}), \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega})) : \tilde{\omega} \in P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}))}{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})}.$$

Importante observar que a sequência $\tilde{\omega}$ contém o evento de falha $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$ na definição de $FD_{\tilde{\sigma}}$, seguindo o mesmo raciocínio do caso crisp, presente na definição 7.

A função de diagnosticabilidade fuzzy FD pode ser degenerada à função de diagnosticabilidade para sistemas crisp, dada a particularização na qual as pertinências associadas aos conjuntos observáveis e de falha sejam $\{0, 1\}$, como segue:

$$\begin{aligned} FD_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}) &= \frac{\min(\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}), \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega})) : \tilde{\omega} \in P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}))}{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})} \\ &= \frac{\min(1, \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega})) : \tilde{\omega} \in P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}))}{1} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } \tilde{\omega} \in P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t})) \rightarrow \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}) = 1 \\ 0, & \text{se não} \end{cases} \end{aligned}$$

No contexto da diagnosticabilidade fuzzy, em comparação ao caso crisp no qual a diagnosticabilidade da linguagem gerada pelo autômato pode ser caracterizada binariamente a partir da função diagnosticabilidade, como realizada por Sampath et al. em [2], a extensão para sistemas fuzzy da função FD retorna o grau de diagnosticabilidade que a linguagem gerada pelo FDES \tilde{G} possui, em uma escala $[0, 1]$, variando desde não diagnosticável até completamente diagnosticável como definido:

Definição 14 *Seja L uma linguagem gerada pelo SEDF \tilde{G} . \tilde{G} é dito completamente f -diagnosticável com relação a $\tilde{\sigma}$ se o grau de diagnosticabilidade associado a \tilde{G} for igual a 1.*

$$(\exists n_o \in N)(\forall \tilde{s} \in \Psi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\Sigma}_f))(\forall \tilde{t} \in L/\tilde{s})(|\tilde{t}| > n_o \rightarrow FD_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}) = 1$$

\tilde{G} é dito f -diagnosticável com grau τ em relação a $\tilde{\sigma}$ se o grau de diagnosticabilidade associado a \tilde{G} for igual a τ , em que $0 < \tau < 1$.

$$\min\{FD_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}) : \tilde{s} \in \Psi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\Sigma}_f), \tilde{t} \in L/\tilde{s}, |\tilde{t}| > n_o\} = \tau$$

Se $\tau = 0$, tem-se então um caso em que \tilde{G} é dito não f -diagnosticável com relação a $\tilde{\sigma}$, uma vez que o grau de diagnosticabilidade associado à FD é igual a 0.

Dada tal definição, interpreta-se o resultado de FD como o grau de diagnosticabilidade associado à linguagem gerada por \tilde{G} em relação a $\tilde{\sigma}$. Dessa interpretação, segue:

Caso 1. Se o grau de diagnosticabilidade de \tilde{G} , em relação a $\tilde{\sigma}$ é igual a 1, então para todo \tilde{s} em que $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_l) > \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$ e para toda continuação \tilde{t} , tem-se $FD_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}) = 1$, o que gera a seguinte inequação: $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}) \leq \min(\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}) : \tilde{\omega} \in P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t})))$, ou seja, se $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_l) > \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$, então para toda sequência $\tilde{\omega}$ que tenha a mesma gravação observável que $\tilde{s}\tilde{t}$, a possibilidade de falha ocorrer em $\tilde{\omega}$ é maior ou igual que $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$.

Caso 2. Se o grau de diagnosticabilidade de \tilde{G} em relação a $\tilde{\sigma}$ é igual a τ , $0 < \tau < 1$, então existe \tilde{s} e continuação \tilde{t} , que definem um valor mínimo de $FD_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}) = \tau$ e que há $\tilde{\omega} \in P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}))$ que satisfaça $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}) = \tau\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$, e $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}') \geq \tau\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$ para outro $\tilde{\omega}' \in P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}))$.

Caso 3. Para o caso em que $\tau = 0$, então existe \tilde{s} e continuação \tilde{t} tal que $FD_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}) = 0$, que significa que $P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{t}))$ contém um traço $\tilde{\omega}$ em que $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}) = 0$, que indica que a falha não pode ocorrer em $\tilde{\omega}$, embora $\tilde{\omega}$ possua a mesma gravação observável que $\tilde{s}\tilde{t}$.

Assim, dadas tais definições, é possível generalizar e conceituar a diagnosticabi-

lidade em relação a um SEDF, como segue.

Definição 15 Dado um SEDF \tilde{G} :

1. Se \tilde{G} é completamente f -diagnosticável com relação a todo $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, então \tilde{G} é dito completamente f -diagnosticável.
2. Caso exista um $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, tal que \tilde{G} seja f -diagnosticável com grau τ em relação a $\tilde{\sigma}$, e o grau de diagnosticabilidade em relação aos demais eventos do conjunto de falha sejam maiores ou iguais a τ , então \tilde{G} é dito f -diagnosticável com grau τ .
3. Se \tilde{G} é completamente não f -diagnosticável para algum $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, então \tilde{G} é dito completamente não f -diagnosticável.

O exemplo a seguir, adaptado de LIU e QIU [14] permite ilustrar os conceitos de diagnosticabilidade, a partir da função diagnosticabilidade.

Exemplo 17 Considere o SEDF \tilde{G} representado na figura 4.4, em que os estados fuzzy e os eventos fuzzy são, respectivamente, dados como segue:

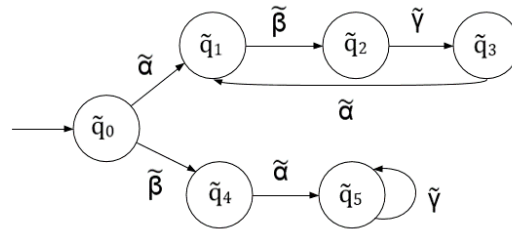


Figura 4.4: FDES do exemplo de Qiu

$$\tilde{q}_0 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,9 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}_4 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}_5 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,9 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

E suponha um grau de observabilidade de eventos e possibilidade de falha ocorrer sendo definida como:

$$\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\alpha}) = 0,6; \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\beta}) = 0,4; \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\gamma}) = 0,6$$

$$\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\alpha}) = 0,1; \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\beta}) = 0,2; \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\gamma}) = 0,3$$

Vamos considerar que $\tilde{\alpha} \in \tilde{E}_{falha}$ e supor que desejemos determinar a diagnosticabilidade de \tilde{G} com relação a $\tilde{\alpha}$. Considerando uma sequência $\tilde{s}\tilde{t} = \{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\}$, tal que $\tilde{s} = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}$ e $\tilde{t} = \tilde{\gamma}$, calculamos $P_{\tilde{\alpha}}^{-1}(P_{\tilde{\alpha}}(\tilde{s}\tilde{t}))$ obtendo $\tilde{\alpha}^n\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^n\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^n$. Para calcular $FD_{\tilde{\alpha}}(\tilde{s}\tilde{t})$, em que $\tilde{\omega} \in P_{\tilde{\alpha}}^{-1}(P_{\tilde{\alpha}}(\tilde{s}\tilde{t}))$, obtemos a seguinte equação

$$FD_{\tilde{\alpha}}(\tilde{s}\tilde{t}) = \frac{\min(\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\alpha}), \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}))}{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\alpha})} = \frac{\min(0,1;0,3)}{0,1} = 1$$

Se para todos os eventos contidos no conjunto \tilde{E}_{falha} , as sequências que terminam com eventos de falha e sua continuação mantiverem o valor 1 para $FD_{\tilde{\alpha}}(\tilde{s}\tilde{t})$, então \tilde{G} será f -diagnósticável com relação a $\tilde{\alpha}$.

4.3 Autômato Diagnosticador Fuzzy

Os diagnosticadores permitem rastrear o comportamento do sistema e a diagnose da ocorrência de falha, se possível. Na teoria de SED crisp, a principal ferramenta para testar diagnosticabilidade é o diagnosticador proposto por SAMPATH *et al.* [2].

Na literatura, existem alguns métodos para a definição da diagnose fuzzy em SEDF, como visto em [15], [5], [14] dentre outros. Em particular, será melhor estudado o modelo de construção de diagnosticadores, como proposto por LIU e QIU [14].

O diagnosticador como proposto por LIU e QIU [14] traz uma extensão do modelo teórico apresentado por Sampath em [2], que, por construção, leva em conta apenas os estados alcançados a partir de um evento observável, apagando de seu resultado

demais estados. E o presente método de construção de diagnosticadores é restrito ao caso particular de sistemas SEDF com apenas um tipo de falha, podendo ser estendido com apoio teórico para caso de falhas múltiplas, conforme LIU e QIU [14]. Sendo $\tilde{G} = (\tilde{Q}, \tilde{E}, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{Q}_m)$ um SEDF, cujos estados serão rotulados conforme a possibilidade de falha ter ocorrido ou não para cada $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, o conjunto de rótulos de falha associado pode ser denotado por:

$$\Delta = \{F\} \cup \{N^\mu : \mu = \tilde{\Sigma}_f(\tilde{a}), \tilde{a} \in \tilde{E}\},$$

em que F indica a possibilidade da falha ocorrer excedeu o grau especificado $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$, e o sistema se encontra em um estado de falha, enquanto que N^μ rotula os estados cuja possibilidade de falha ocorrer é menor que o grau especificado, dessa forma, o sistema se encontra em estado normal.

De forma a possibilitar a construção do diagnosticador, pode-se definir como $\tilde{Q}_{\tilde{\sigma}}$ o subconjunto dos estados fuzzy que são alcançáveis através de eventos cujo grau de observabilidade é maior do que $\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma})$, mais o estado inicial \tilde{q}_0 . Assim, para $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}$ segue :

$$\tilde{Q}_{\tilde{\sigma}} = \{\tilde{q}_0\} \cup \{\tilde{q} \in \tilde{Q} : (\exists \tilde{q}' \in \tilde{Q})(\exists \tilde{a} \in \tilde{E}_{\tilde{\sigma}})\tilde{\delta}(\tilde{q}', \tilde{a}) = \tilde{q}\};$$

$$\text{em que } \tilde{E}_{\tilde{\sigma}} = (\tilde{E}_{Mo} \cup \{\tilde{a} \in \tilde{E} : \tilde{\Sigma}_o(\tilde{a}) > \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma})\}).$$

Definição 16 *Seja \tilde{G} um SEDF e $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$. O diagnosticador com relação a $\tilde{\sigma}$ pode ser construído como um autômato fuzzy finito $\tilde{G}_d = (\tilde{Q}_d, \tilde{E}_d, \tilde{\delta}_d, \tilde{\rho}_0)$ em que \tilde{Q}_d é o conjunto de estados do diagnosticador, \tilde{E}_d se refere ao conjunto de eventos, $\tilde{\delta}_d$ é a função de transição do diagnosticador e $\tilde{\rho}_0$ seu estado inicial.*

O espaço de estados do diagnosticador é baseado no subconjunto $\tilde{Q}_{\tilde{\sigma}}$, definido anteriormente, tal que $\tilde{Q}_d = 2^{(\tilde{Q}_{\tilde{\sigma}} \times \Delta)}$. Ou seja, o estado é baseado em pares ordenados compostos pelos estados de $\tilde{Q}_{\tilde{\sigma}}$ e rótulos de Δ , como segue:

$$\tilde{\rho} = \{(\tilde{q}_0, l_0), (\tilde{q}_1, l_1), (\tilde{q}_2, l_2), \dots, (\tilde{q}_n, l_n)\},$$

e o estado inicial do sistema é definido como sendo normal e $\tilde{\rho}_0 = \{(\tilde{q}_0, N^0)\}$.

O conjunto de eventos \tilde{E}_d do diagnosticador possui os mesmos eventos que $\tilde{E}_{\tilde{\sigma}}$, o conjunto dos eventos com observabilidade maior que $\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\sigma})$ ou máxima.

Para a adequada definição da função de transição do diagnosticador deve ser enunciada a função de propagação de rótulo, que permite mapear o comportamento dos rótulos dos estados do diagnosticador frente a ocorrência dos eventos.

Definição 17 *A função de propagação de rótulo (do inglês Label Propagation function) LP: $\tilde{Q}_{\tilde{\sigma}} \times \Delta \times \tilde{E}^* \rightarrow \Delta$ é definida como segue. Seja $\tilde{q} \in \tilde{Q}_{\tilde{\sigma}}, l \in \Delta$ e $\tilde{s} \in \tilde{E}^*$:*

$$\text{Se } l = F, \text{ então } LP(\tilde{q}, l, \tilde{s}) = F;$$

$$\text{Se } l = N^\mu \text{ e } \tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}) \geq \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}), \text{ então } LP(\tilde{q}, l, \tilde{s}) = F;$$

$$\text{Se } l = N^\mu \text{ e } \tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}) < \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}) \text{ e } \tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}) > \mu, \text{ então } LP(\tilde{q}, l, \tilde{s}) = N^{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s})};$$

$$\text{Se } l = N^\mu \text{ e } \tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}) < \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}) \text{ e } \tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}) \leq \mu, \text{ então } LP(\tilde{q}, l, \tilde{s}) = N^\mu.$$

Assim, todas as possíveis combinações de propagação de rótulo são mapeadas pela função LP. Cabe uma representação das possíveis transições para melhor ilustrar as mudanças de rótulos.

Sejam dois estados do diagnosticador \tilde{q} e \tilde{q}' , tal que $\tilde{\delta}(\tilde{q}_0, \tilde{s}_0) = \tilde{q}$, $\tilde{\delta}(\tilde{q}, \tilde{s}) = \tilde{q}'$.

1. Se o estado \tilde{q} possui rótulo F , então a sequência \tilde{s}_0 é tal que $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_0) \geq \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$. Assim, para qualquer novo estado a partir de \tilde{q} , independente da sequência \tilde{s} $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_0\tilde{s}) \geq \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$, o rótulo F será mantido;

2. Se o estado \tilde{q} é um estado normal com rótulo N^μ , então $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_0) = \mu < \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$. Se para a sequência \tilde{s} , o grau de pertinência da sequência exceder o grau especificado em relação ao evento $\tilde{\sigma}$, o novo estado \tilde{q}' será rotulado com F , uma vez que $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_0\tilde{s}) \geq \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$;

3. Se o estado \tilde{q} é um estado normal com rótulo N^μ , porém, se para a sequência \tilde{s} , o grau de pertinência da sequência não exceder $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$, mas for maior que μ , o novo estado será normal, entretanto o rótulo será atualizado para $N^{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s})}$;

4. Se o estado \tilde{q} é um estado normal com rótulo N^μ , e a sequência s possui grau de pertinência $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}) \leq \tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_0)$, então o novo estado \tilde{q}' manterá o rótulo N^μ .

Definição 18 A função de transição do diagnosticador \tilde{G}_d pode ser definida como uma função parcial $\tilde{\delta}_d : \tilde{Q}_d \times \tilde{E}_d \rightarrow \tilde{Q}_d$, tendo $\tilde{\rho} \in \tilde{Q}_d, \tilde{a} \in \tilde{E}_d$

$$\tilde{\delta}_d(\tilde{\rho}, \tilde{a}) = \cup_{(\tilde{q}_i, l_i) \in \tilde{\rho}} \cup_{(\tilde{s} \in L_{\tilde{a}}(\tilde{q}_i, \tilde{\sigma}))} \{ \tilde{\delta}(\tilde{q}_i, \tilde{s}), LP(\tilde{q}_i, l_i, \tilde{s}) \}$$

em que $L_{\tilde{a}}(\tilde{q}_i, \tilde{\sigma})$ contém todas as sequências em $L(\tilde{q}_i, \tilde{\sigma})$ terminadas em \tilde{a} .

Dessa forma, pode-se construir um diagnosticador fuzzy para um SEDF \tilde{G} , com relação a $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, a partir do método enunciado por LIU e QIU [14]. Para tal, será utilizado o exemplo abordado no texto.

Exemplo 18 Considere o SEDF \tilde{G} representado no exemplo 17.

Inicialmente, consideremos o diagnosticador \tilde{G}_d com relação a $\tilde{\alpha}$. O estado inicial do diagnosticador será $\{(\tilde{q}_0, N^0)\}$ e o conjunto \tilde{E}_d , será composto pelos eventos fuzzy pertencentes a \tilde{G} , cuja observação seja maior ou máxima em relação a $\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\alpha})$, resultando em $\tilde{E}_d = \{\tilde{\gamma}\}$. Após isso, as sequências contendo evento pertencente a \tilde{E}_d irão gerar um estado $\tilde{\rho}$ que possui os estados $\{(\tilde{q}_3)\}$ e $\{(\tilde{q}_5)\}$ de \tilde{Q} . Averiguando o grau de pertinência ao conjunto de falhas, e aplicando a propagação do rótulo é possível perceber que ambos estados em $\tilde{\rho}$ possuem o rótulo de falha, pois a pertinência resultante das sequências ao conjunto de falhas é maior que o limite $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\alpha})$. O diagnosticador construído pode ser visto na figura 4.5, parte a.

Para o diagnosticador \tilde{G}_d com relação a $\tilde{\gamma}$, tem-se $\tilde{E}_d = \{\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}\}$. O estado inicial será $\{(\tilde{q}_0, N^0)\}$ e a função de transição gerará para $\tilde{\alpha}$, o estado $\tilde{\rho} = \{(\tilde{q}_1, N^{0,1}), (\tilde{q}_5, F)\}$, uma vez que a sequência que gera \tilde{q}_1 , não ultrapassa o valor da pertinência limite ao conjunto de falhas, ou seja $\mu < \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\gamma})$, enquanto que a sequência que gera \tilde{q}_5 possui $\mu > \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\gamma})$. Assim, após dar prosseguimento à função de transição, o diagnosticador resultante pode ser visto na figura 4.5, parte b.

A partir das condições necessárias e suficientes propostas por LIU e QIU [14], pode-se determinar diagnosticabilidade do SEDF a partir do diagnosticador fuzzy,

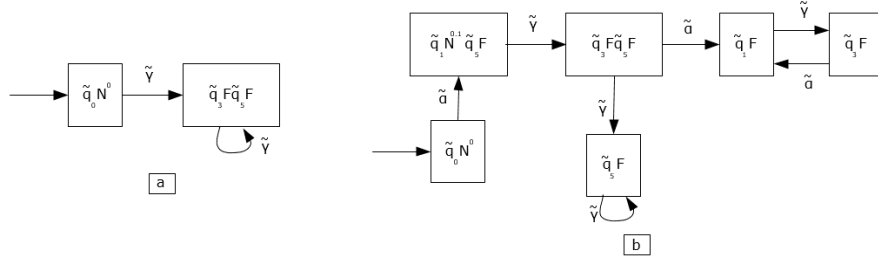


Figura 4.5: Diagnosticador Fuzzy

e ainda estimar o grau de diagnosticabilidade fuzzy associado em relação a um $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$.

Para tal, é necessário apresentar as propriedades que auxiliam a definir as condições necessárias e suficientes para diagnosticabilidade fuzzy:

Propriedade 1 *Seja $\tilde{G}_d = (\tilde{Q}_d, \tilde{E}_d, \tilde{\delta}_d, \tilde{\rho}_0)$ um diagnosticador com relação a $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$. Para $\tilde{\rho} \in \tilde{Q}_d, \{(\tilde{q}_1, l_1), (\tilde{q}_2, l_2)\} \in \tilde{\rho}$ se e somente se existe \tilde{s}_1 e $\tilde{s}_2 \in \tilde{E}^*$ tal que $(\tilde{s}_1)_l = (\tilde{s}_2)_l \in \tilde{E}_d, P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}_1) = P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}_2), \tilde{\delta}_d(\tilde{\rho}_0, P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}_1)) = \tilde{\rho}$ e $\tilde{\delta}(\tilde{q}_0, \tilde{s}_k) = \tilde{q}_k, LP(\tilde{q}_0, N^0, \tilde{s}_k) = l_k$, para $k = 1, 2$.*

A propriedade 1 garante que para o diagnosticador em relação a $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, um estado $\tilde{\rho}$ possua dois pares ordenados $(\tilde{q}_1, l_1), (\tilde{q}_2, l_2)$ é necessário e suficiente dizer que existem duas sequências com mesma terminação e gravação observável, que levam ao mesmo estado do diagnosticador e sua transição no autômato original levam aos respectivos estados e rótulos propagados. Tal propriedade pode ser provada como visto em LIU e QIU [14].

Definição 19 *Seja \tilde{G}_d um diagnosticador com relação a $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$. Um estado $\tilde{\rho} \in \tilde{Q}_d$ é dito *f-certo* se $l = F$ para todo $(\tilde{q}_i, l_i) \in \tilde{\rho}$ ou se $l \neq F$ para todo $(\tilde{q}_i, l_i) \in \tilde{\rho}$. No entanto, se existe $(\tilde{q}_i, l_i), (\tilde{q}_j, l_j) \in \tilde{\rho}$ tal que $l_i = F$ e $l_j \neq F$ então $\tilde{\rho}$ é dito *f-incerto*.*

Tal definição possibilita declarar um estado certo ou incerto quanto a possibilidade da ocorrência de falha. Caso o rótulo de todos os pares que compõe o estado do diagnosticador sejam marcados com falha, o sistema é dito certo. Caso os rótulos

sejam diferentes de falha, o sistema é dito certo, neste caso no sentido de que não ocorreu uma falha. Entretanto, caso haja duplicidade com relação aos rótulos no estado, o sistema é dito incerto, visto que, possivelmente existem duas sequências diferentes que resultam no estado de falha e no estado normal, no autômato original com a mesma gravação observável, como visto na propriedade 1.

Propriedade 2 *Seja $\tilde{G}_d = (\tilde{Q}_d, \tilde{E}_d, \tilde{\delta}_d, \tilde{\rho}_0)$ um diagnosticador com relação a $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$ e $\tilde{\delta}_d(\tilde{\rho}_0, u) = \tilde{\rho}$. $\tilde{\rho}$ é F-incerto se e somente se existem \tilde{s}_1 e $\tilde{s}_2 \in \tilde{E}^*$ tal que $(\tilde{s}_1)_l = (\tilde{s}_2)_l \in \tilde{E}_d, P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}_1) = P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}_2), \tilde{\delta}_d(\tilde{\rho}_0, P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}_1)) = \tilde{\rho}$, e $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_1) \geq \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}) > \tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}_2)$.
 $\tilde{\rho}$ é F-certo se e somente $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{s}) < \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$ para todo $\tilde{s} \in P_{\tilde{\sigma}}^{-1}(\tilde{u})$, em que $\tilde{s}_l \in \tilde{E}_d$.*

Como acima, a prova da propriedade pode ser encontrada no texto-base de LIU e QIU [14], entretanto é possível observar que, de fato, para que o estado seja incerto, são necessárias duas sequências que alcancem o mesmo estado no diagnosticador e que uma possua pertinência ao conjunto de falhas maior que o limite estabelecido por $\tilde{\sigma}$ e outra possua pertinência menor.

Propriedade 3 *Seja $\tilde{G}_d = (\tilde{Q}_d, \tilde{E}_d, \tilde{\delta}_d, \tilde{\rho}_0)$ um diagnosticador com relação a $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$. Se $\tilde{\delta}_d(\tilde{\rho}_1, \tilde{a}) = \tilde{\rho}_2$, em que $\tilde{a} \in \tilde{E}_d, \tilde{\rho}_1$ e $\tilde{\rho}_2$ são f-incertos e $(\tilde{q}_1, F), (\tilde{q}'_1, N^\mu) \in \tilde{\rho}_1$, então existe $\tilde{s}\tilde{a} \in L(\tilde{q}_i, \tilde{\sigma}), \tilde{t}\tilde{a} \in L(\tilde{q}'_1, \tilde{\sigma})$ e $(\tilde{q}_2, F), (\tilde{q}'_2, N^\mu) \in \tilde{\rho}_2$ satisfazendo $P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}\tilde{a}) = P_{\tilde{\sigma}}(\tilde{t}\tilde{a}) = \tilde{a}; \tilde{\delta}(\tilde{q}_1, \tilde{s}\tilde{a}) = \tilde{q}_2; \tilde{\delta}(\tilde{q}'_1, \tilde{t}\tilde{a}) = \tilde{q}'_2$.*

Além disso, se $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{t}\tilde{a}) \leq \mu$, então $\mu' = \mu$; Se $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{t}\tilde{a}) > \mu$, então $\mu' = \tilde{\Sigma}_f(\tilde{t}\tilde{a})$.

Propriedade 4 *Seja \tilde{G}_d o diagnosticador com relação a $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$. Se o conjunto de estados forma um ciclo em \tilde{G}_d , então todos os estados do ciclo tem o mesmo rótulo de falhas.*

Assim sendo, dadas as propriedades enunciadas, é possível retomar a definição das condições necessárias e suficientes para determinar a diagnosticabilidade fuzzy de SEDF, como segue:

Definição 20 *Seja $\tilde{G}_d = (\tilde{Q}_d, \tilde{E}_d, \tilde{\delta}_d, \tilde{\rho}_0)$ o diagnosticador de \tilde{G} com relação a $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$. Um conjunto $\{\tilde{\rho}_1, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\rho}_k, \tilde{\sigma}_k, \tilde{\rho}_1\}$ forma um ciclo μ -F-indeterminado em \tilde{G}_d , se*

1. $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \dots, \tilde{\rho}_k \in \tilde{Q}_d$ são estados F-incertos e o conjunto $\{\tilde{\rho}_1, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\rho}_k, \tilde{\sigma}_k, \tilde{\rho}_1\}$ forma um ciclo em \tilde{G}_d isto é, $\tilde{\delta}_d(\tilde{\rho}_j, \tilde{\sigma}_j) = \tilde{\rho}_{j+1}$ para $j = 1, \dots, K - 1$, e $\tilde{\delta}_d(\tilde{\rho}_k, \tilde{\sigma}_k) = \tilde{\rho}_1$.

2. Para cada $\tilde{\rho}_j$ existe $(\tilde{x}_j^h, \tilde{l}_j^h), (\tilde{y}_j^r, \tilde{d}_j^r) \in \tilde{\rho}_j$ ($j = 1, \dots, k; h = 1, \dots, m; r = 1, \dots, n$) satisfazendo

a. $\tilde{l}_j^h = F$ e $\tilde{d}_j^r = N$ para todo j, h, r ; e

b. As sequências de estados $\{\tilde{x}_j^h\}$ e $\{\tilde{y}_j^r\}$ formam ciclo em \tilde{G} com $\tilde{\delta}(\tilde{x}_j^h, \tilde{s}_j^h \tilde{\sigma}_j) = \tilde{x}_{j+1}^h$, ($j = 1, \dots, k - 1; h = 1, \dots, m$)

$\tilde{\delta}(\tilde{x}_k^h, \tilde{s}_k^h \tilde{\sigma}_k) = \tilde{x}_1^{h+1}$, ($h = 1, \dots, m - 1$), $\tilde{\delta}(\tilde{x}_k^m, \tilde{s}_k^m \tilde{\sigma}_k) = \tilde{x}_1^1$ e $\tilde{\delta}(\tilde{y}_j^r, \tilde{t}_j^r \tilde{\sigma}_j) = \tilde{y}_{j+1}^r$, ($j = 1, \dots, k - 1; r = 1, \dots, m$)

$\tilde{\delta}(\tilde{y}_k^r, \tilde{t}_k^r \tilde{\sigma}_k) = \tilde{y}_1^{r+1}$, ($r = 1, \dots, n - 1$), $\tilde{\delta}(\tilde{y}_k^n, \tilde{t}_k^n \tilde{\sigma}_k) = \tilde{y}_1^1$

em que $\tilde{s}_j^h \tilde{\sigma}_j \in L(\tilde{x}_j^h, \tilde{\sigma})$, $\tilde{t}_j^r \tilde{\sigma}_j \in L(\tilde{y}_j^r, \tilde{\sigma})$

Intuitivamente, um ciclo μ -F-indeterminado em \tilde{G}_d é um ciclo composto por estados F-incertos, e correspondente a esse ciclo, existem duas sequências $\{\tilde{x}_j^h\}$ e $\{\tilde{y}_j^r\}$ em \tilde{G} formando ciclos, nos quais um carrega o rótulo de falhas F, o qual será chamado de ciclo de estados de falha, enquanto o outro carrega rótulo N^μ , que será o ciclo de estados normais.

Teorema 3 *Seja L uma linguagem gerada por um SEDF $\tilde{G} = (\tilde{Q}, \tilde{E}, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0)$ e $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$. Se o diagnosticador \tilde{G}_d com relação a $\tilde{\sigma}$ contém um ciclo μ -F-indeterminado, então o grau de diagnosticabilidade de \tilde{G} em relação a $\tilde{\sigma}$, denotado por λ , satisfaz a seguinte inequação:*

$$\lambda \leq \frac{\mu}{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})}$$

Pelo teorema observamos que o grau de diagnosticabilidade de \tilde{G} em relação a $\tilde{\sigma}$ depende da existência de ciclos μ -F-indeterminado no diagnosticador correspondente. Entretanto, para a adequada definição da diagnosticabilidade de \tilde{G} , precisamos observar o ciclo mínimo μ -F-indeterminado, conforme definição.

Definição 21 Um ciclo μ - F -indeterminado em um diagnosticador \tilde{G}_d é chamado mínimo se, para cada ciclo μ' - F -indeterminado em \tilde{G}_d $\mu' > \mu$.

Assim, é possível definir as condições necessárias e suficientes para a diagnosticabilidade de SEDF.

Teorema 4 Seja L uma linguagem gerada por um SEDF \tilde{G} e $\tilde{G}_d = (\tilde{Q}_d, \tilde{E}_d, \tilde{\delta}_d, \tilde{\rho}_0)$ o seu diagnosticador com relação a $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$. \tilde{G} é f -diagnosticável com grau λ em relação a $\tilde{\sigma}$, se e somente se existe um ciclo μ - F -indeterminado em \tilde{G}_d , em que $\mu = \lambda \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$.

Dessa forma, enuncia-se a necessidade e suficiência da existência de um ciclo μ - f -indeterminado para garantir a f -diagnosticabilidade de um SEDF \tilde{G} com grau λ .

Teorema 5 Seja L uma linguagem gerada por um SEDF \tilde{G} .

1. \tilde{G} é f -diagnosticável com grau λ se e somente se as seguintes condições se mantêm:

a. Existe $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$ tal que o diagnosticador \tilde{G}_d com relação a $\tilde{\sigma}$ contém um ciclo μ - f -indeterminado em que $\mu = \lambda \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})$;

b. Para todo $\tilde{\sigma}' \in \tilde{E}_{falha}$, se o diagnosticador com relação a $\tilde{\sigma}'$ contém um ciclo μ' - f -indeterminado então $\mu' \geq \lambda \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma}')$;

2. \tilde{G} é completamente não- f -diagnosticável, se e somente se existe $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, tal que o diagnosticador \tilde{G}_d com relação a $\tilde{\sigma}$ contém um ciclo 0- f -indeterminado;

3. \tilde{G} é completamente f -diagnosticável, se e somente se para todo $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, o diagnosticador \tilde{G}_d com relação a $\tilde{\sigma}$ não contém nenhum ciclo f -indeterminado.

Assim, em LIU e QIU [14] é proposto o seguinte algoritmo para checar a diagnosticabilidade de SEDF, dado os teoremas 4 e 5.

Algoritmo 3 1. Construção do diagnosticador para cada $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$: Seja L a linguagem gerada por um SEDF \tilde{G} . Para cada $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, construa o diagnosticador $\tilde{G}_d = (\tilde{Q}_d, \tilde{E}_d, \tilde{\delta}_d, \tilde{\rho}_0)$.

2. *Busca de ciclos indeterminados:* Se o diagnosticador \tilde{G}_d com relação a um $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$ não contém ciclos indeterminados, então, \tilde{G} é completamente *f*-diagnosticável; senão, é necessário o passo seguinte.

3. *Cálculo do grau de diagnosticabilidade de \tilde{G} :* Para cada $\tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}$, denote o ciclo *f*-indeterminado mínimo como ciclo μ -*f*-indeterminado. Seja $\lambda = \min\{\frac{\mu}{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\sigma})} : \tilde{\sigma} \in \tilde{E}_{falha}\}$. Se $\lambda = 0$, então \tilde{G} é completamente não-*f*-diagnosticável. Caso $0 < \lambda < 1$, então \tilde{G} é diagnosticável com grau λ .

A seguir, é dada a continuação do exemplo 18, proposto por LIU e QIU [14] para ilustrar o cheque da diagnosticabilidade de um SEDF:

Exemplo 19 *Pode-se perceber a partir do exemplo 18 que os diagnosticadores relacionados ao autômato fuzzy da figura 4.4, ilustrados na figura 4.5 contém ciclos, porém nenhum deles é um ciclo indeterminado. Para $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\gamma}$, o ciclo formado em $\{(\tilde{q}_3, F)(\tilde{q}_5, F)\}$ é certo de falha, enquanto que para $\tilde{\beta}$, os ciclos em (\tilde{q}_5, F) e $\{(\tilde{q}_1, F), (\tilde{q}_3, F)\}$ os ciclos também são certos de falha.*

*Dessa forma, podemos garantir, pelo 5 que \tilde{G} é completamente *f*-diagnosticável.*

O primeiro passo do algoritmo de verificação foi realizado a partir da construção dos diagnosticadores relacionados a cada $\sigma \in \tilde{E}_{falha}$.

O passo seguinte, que seja a busca por ciclos *f*-indeterminados em cada diagnosticador dado, retorna a inexistência de qualquer ciclo *f*-indeterminado. Assim sendo, a partir do teorema 5, é possível concluir que o SEDF \tilde{G} é completamente *f*-diagnosticável.

Em LIU e QIU [14] é ilustrada a aplicação da diagnosticabilidade a SEDF com mais um exemplo, desta vez baseado em um tratamento médico modelado por um SEDF.

Exemplo 20 *Suponha que exista um animal adoecendo a partir de uma enfermidade não identificada. O veterinário responsável não tem completo conhecimento a respeito dessa doença, mas acredita, por experiência, que determinados medica-*

mentos como teofilina, bromida ipratropina, etilsutinato de eritromicina e dopamina (denotados por α, β, γ e θ , respectivamente), possam ser úteis no tratamento.

Por simplicidade, pode se assumir que o doutor avalie a condição do animal, de modo não apurado, resultando em três possíveis estados para a condição boa, razoável e ruim, dada a característica vaga da avaliação e que em situações da vida real, a condição do animal não estabelece um limite claro entre os estados, podendo ser modelado por um SEDF. Assim, um estado fuzzy é naturalmente denotado através dos estados possíveis

$$\begin{array}{ccc} \text{boa} & \text{razoável} & \text{ruim} \\ \tilde{q} = & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \right] \end{array}$$

que representa a distribuição de possibilidades da condição do animal sobre os estados bom (posição a_1), razoável (posição a_2) e ruim (posição a_3).

Logo, é impreciso dizer a que ponto exatamente a condição do animal mudou de um estado para outro, após a administração de uma medicação (evento), porque a ocorrência de evento relacionado a cada droga pode levar um estado a vários estados com sua respectiva possibilidade. Assim, no processo de tratamento modelado por um SEDF, um evento fuzzy é representado por uma relação fuzzy 3×3 , em que cada elemento representa a possibilidade de transição entre os estados, a partir da administração da medicação:

$$\begin{array}{ccc} \text{boa} & \text{razoável} & \text{ruim} \\ \tilde{\sigma} = & \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \end{array}$$

Suponha que o processo de tratamento do animal seja modelado por um SEDF $\tilde{G}_d = (\tilde{Q}_d, \tilde{E}_d, \tilde{\delta}_d, \tilde{q}_0)$, como mostrado na figura 4.6, no qual o vetor estado inicial é $\tilde{q}_0 = [0, 90, 10]$. Esse vetor inicial representa que a condição atual do paciente possui alta probabilidade de ser razoável, enquanto ainda possui possibilidade de estar

na categoria ruim, dadas características vagas dos estados e método de avaliação. Os eventos de aplicação de medicação são avaliados como se segue, por teoria e experiência do doutor, ao que LIU e QIU [14] explicita a existência de diversos métodos para estimar grau de pertinência na literatura.

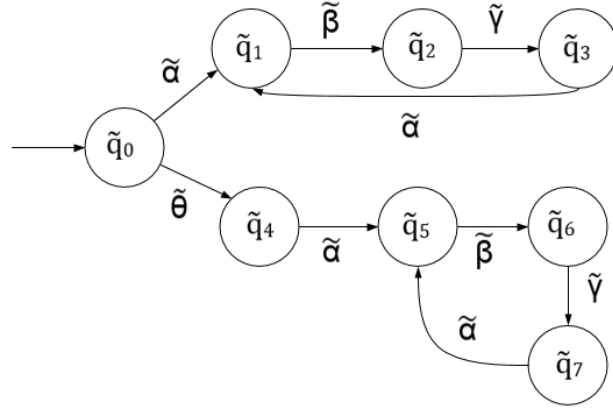


Figura 4.6: Automôto fuzzy do Exemplo de Qiu

$$\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,9 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Pela operação *max-min*, calculam-se os novos estados alcançados:

$$\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,9 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}_3 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,9 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q}_4 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}_5 = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \tilde{q}_6 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q}_7 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Cada evento fuzzy é observável com certo grau de pertinência no framework de SEDF. Por exemplo, alguns sintomas da aplicação das drogas como palidez podem ser claramente percebidas pelo doutor, entretanto alguns sintomas são identificados apenas por instrumentos médicos específicos, como por exemplo alta contagem de glóbulos brancos, que são considerados efeitos colaterais, portanto falhas indesejadas. Suponha que alta contagem de glóbulos brancos seja um falha indesejada neste modelo, e o grau de observabilidade e a possibilidade de falha ocorrer são avaliados como segue pelo doutor:

$$\tilde{\Sigma}_o(\tilde{\alpha}) = 0,5; \quad \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\beta}) = 0,4; \quad \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\gamma}) = 0,6; \quad \tilde{\Sigma}_o(\tilde{\theta}) = 0,3$$

$$\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\alpha}) = 0,1; \quad \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\beta}) = 0,2; \quad \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\gamma}) = 0,3; \quad \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\theta}) = 0,4$$

O problema da diagnose para SEDF \tilde{G} se baseia em como detectar a falha em tempo e computar a possibilidade da falha ocorrer durante a aplicação do tratamento.

De modo a ilustrar a determinação de diagnosticabilidade de SEDF pelos métodos apresentados no presente texto, utilizam-se as condições necessárias e suficientes para determinar diagnosticabilidade e também a abordagem via diagnosticadores.

Abordagem da definição: Primeiro, investiga-se o problema da diagnose para o processo de tratamento \tilde{G} pela definição de diagnosticabilidade de SEDF. Para o evento fuzzy $\tilde{\alpha}$, note que $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\alpha})$ é o menor entre os demais $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\alpha}) : \tilde{\alpha} \in \tilde{\Sigma}$, e assim para todo $\tilde{s} \in \Psi_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\Sigma}_f)$ e $\tilde{t} \in L/\tilde{s}$ tal que $|\tilde{t}| \geq n_0$ ($n_0 \in N$), tem-se

$$FD_{\tilde{\alpha}}(\tilde{s}\tilde{t}) = \frac{\min\{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\alpha}), \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}) : \tilde{\omega} \in P_{\tilde{\alpha}}^{-1}(P_{\tilde{\alpha}})(\tilde{s}\tilde{t})\}}{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\alpha})} = 1$$

que significa que a possibilidade de falha ocorrer em cada estratégia de tratamento $\tilde{\omega}$ não é menor que a de $\tilde{\alpha}$ (isto é, tratamento com a medicação teofilina).

Para o evento fuzzy $\tilde{\beta}$, tome $n_0 = 3$. Então para qualquer $\tilde{s} \in \Psi_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\Sigma}_f)$ e $\tilde{t} \in L/\tilde{s}$ tal que $|\tilde{t}| \geq n_0$, tem-se $FD_{\tilde{\beta}}(\tilde{s}\tilde{t}) = 1$ porque toda sequência $\tilde{\omega}$ pertencente $P_{\tilde{\beta}}^{-1}(P_{\tilde{\beta}}(\tilde{s}\tilde{t})) \subset \tilde{\gamma}$ ou $\tilde{\theta}$. Por simplicidade, apenas são calculados os casos em que $\tilde{s} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ e $\tilde{t} = \tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \in L/\tilde{s}$ como segue (os outros casos são calculados de maneira

similar):

$$P_{\tilde{\beta}}^{-1}(P_{\tilde{\beta}}(\tilde{s}\tilde{t})) = \{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \tilde{\theta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}, \tilde{\theta}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\}.$$

Assim, $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}) = 0,4$ ou $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}) = 0,3$ para os casos que as sequências possuem ou não θ , respectivamente. É possível calcular

$$FD_{\tilde{\beta}}(\tilde{s}\tilde{t}) = \frac{\min\{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\beta}), \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}) : \tilde{\omega} \in P_{\tilde{\beta}}^{-1}(P_{\tilde{\beta}}(\tilde{s}\tilde{t}))\}}{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\beta})} \geq \frac{\min\{0,2;0,3\}}{0,2} = 1$$

o que indica que detecta-se a ocorrência de eventos cuja possibilidade de falha ocorrer não é menor que a de beta com 3 eventos de delay (isto é, $n_0=3$).

O caso do evento de falha $\tilde{\gamma}$ é similar ao de $\tilde{\beta}$, e todas as sequências $\tilde{\omega}$ pertencentes $P_{\tilde{\gamma}}^{-1}(P_{\tilde{\gamma}}(\tilde{s}\tilde{t}))$ contém $\tilde{\gamma}$ ou $\tilde{\theta}$. Assim, resulta que $FD_{\tilde{\gamma}}(\tilde{s}\tilde{t}) = 1$.

Para o evento fuzzy $\tilde{\theta}$, ao se considerar $\tilde{s} = \tilde{\theta}$ e $\tilde{t} = \tilde{\alpha}(\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha})^{n_0} \in L/\tilde{s}$, então $P_{\tilde{\theta}}^{-1}(P_{\tilde{\theta}}(\tilde{s}\tilde{t})) = P_{\tilde{\theta}}^{-1}(\tilde{\alpha}(\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha})^{n_0}) = \{\tilde{\alpha}(\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha})^{n_0}, \tilde{\theta}\tilde{\alpha}(\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha})^{n_0}\}.$

Assim, o grau de diagnosticabilidade de \tilde{G} é igual a 0,75 com relação a $\tilde{\theta}$ como segue

$$FD_{\tilde{\theta}}(\tilde{s}\tilde{t}) = \frac{\min\{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\theta}), \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\omega}) : \tilde{\omega} \in P_{\tilde{\theta}}^{-1}(P_{\tilde{\theta}}(\tilde{s}\tilde{t}))\}}{\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\theta})} \geq \frac{\min\{0,4;0,3;0,4\}}{0,4} = 0,75$$

Pelo teorema 5, \tilde{G} é f -diagnosticável com grau 0,75. O resultado mostra que não é possível detectar a falha ocorrendo na estratégia de tratamento $\tilde{\omega}$ cuja possibilidade de falha ocorrer seja maior que $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\theta})$, entretanto pode-se garantir que a possibilidade de falha ocorrendo em todas as estratégias de tratamento são ao menos 0,75 vezes a de $\tilde{\theta}$.

Abordagem via diagnosticador:

Primeiro, construímos os diagnosticadores relativos a cada evento fuzzy do conjunto de falhas $\tilde{E}_{falha} = \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}$.

Para $\tilde{\alpha}$, o conjunto de eventos do diagnosticador com relação a $\tilde{\alpha}$ é $\tilde{E}_d = \{\tilde{\gamma}\}$. Os estados do diagnosticador com relação a $\tilde{\alpha}$ são $\tilde{\rho}_0 = (\tilde{q}_0, N^0)$ e $\tilde{\rho}_1 = (\tilde{q}_3, F), (\tilde{q}_7, F)$. O diagnosticador com relação a $\tilde{\alpha}$ é mostrado na figura 4.7.

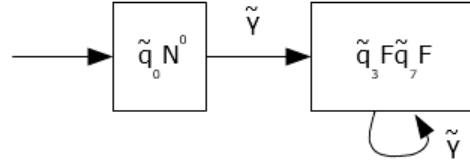


Figura 4.7: Diagnosticador Fuzzy com relação a $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\gamma}$

Para $\tilde{\beta}$, o conjunto de eventos do diagnosticador com relação a $\tilde{\beta}$ é $\tilde{E}_d = \{\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}\}$ e os estados do diagnosticador com relação a $\tilde{\beta}$ são os que seguem

$$\tilde{\rho}_0 = \{(\tilde{q}_0, N^0)\} \quad \tilde{\rho}_1 = \{(\tilde{q}_1, N^{0,1}), (\tilde{q}_5, F)\} \quad \tilde{\rho}_2 = \{(\tilde{q}_3, F), (\tilde{q}_7, F)\} \quad \tilde{\rho}_3 = \{(\tilde{q}_1, F), (\tilde{q}_5, F)\}$$

Pelo método em discussão, o diagnosticador com relação a $\tilde{\beta}$ é mostrado na figura 4.8.

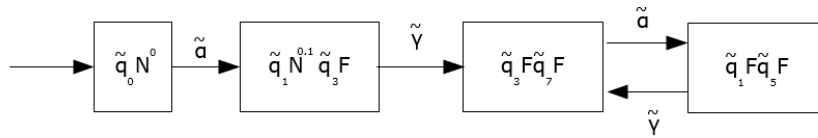


Figura 4.8: Diagnosticador Fuzzy com relação a $\tilde{\beta}$

Para $\tilde{\gamma}$, é possível verificar pela definição 20 que o diagnosticador com relação a $\tilde{\gamma}$ é o mesmo que com relação a $\tilde{\alpha}$, mostrado na figura 4.7.

Para $\tilde{\theta}$, o conjunto de eventos do diagnosticador é $\tilde{E}_d = \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}$ e os estados do diagnosticador com relação a $\tilde{\theta}$ são como segue: $\tilde{\rho}_0 = \{(\tilde{q}_0, N^0)\}$ $\tilde{\rho}_1 = \{(\tilde{q}_1, N^{0,1}), (\tilde{q}_5, F)\}$ $\tilde{\rho}_2 = \{(\tilde{q}_2, N^{0,2}), (\tilde{q}_6, F)\}$ $\tilde{\rho}_3 = \{(\tilde{q}_3, N^{0,3}), (\tilde{q}_7, F)\}$

$$\tilde{\rho}_4 = \{(\tilde{q}_1, N^{0,3}), (\tilde{q}_5, F)\} \quad \tilde{\rho}_5 = \{(\tilde{q}_2, N^{0,3}), (\tilde{q}_6, F)\}$$

O diagnosticador com relação a $\tilde{\theta}$ é mostrado na figura 4.9.

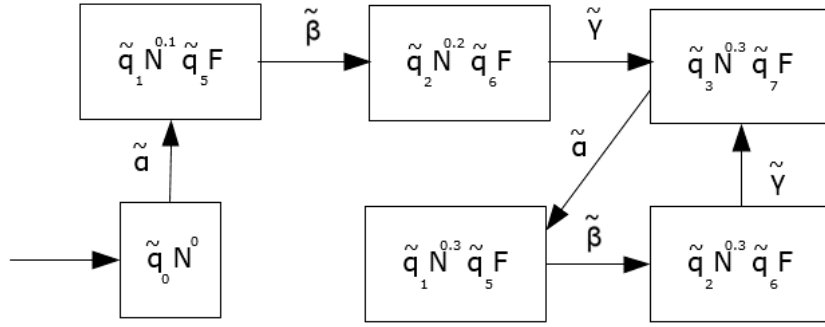


Figura 4.9: Diagnosticador Fuzzy com relação a $\tilde{\theta}$

Embora não exista nenhum ciclo f -indeterminado na figura 4.7 e 4.8, para o diagnosticador fuzzy com relação a $\tilde{\theta}$ existe um ciclo $0,3$ - f -indeterminado mínimo $\{\tilde{\rho}_3, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho}_4, \tilde{\beta}, \tilde{\rho}_5, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho}_3\}$ conforme figura 4.9, em que $\tilde{\rho}_3 = (\tilde{q}_3, N^{0,3}), (\tilde{q}_7, F)\tilde{\rho}_4 = (\tilde{q}_1, N^{0,3}), (\tilde{q}_5, F)\tilde{\rho}_5 = (\tilde{q}_2, N^{0,3}), (\tilde{q}_6, F)$

Assim, existe um ciclo f -indeterminado apenas em $\tilde{\theta} \in \tilde{E}_{falha}$, e o diagnosticador \tilde{G}_d com relação a $\tilde{\theta}$ contém um ciclo μ - f -indeterminado, em que $\mu = \lambda \tilde{\Sigma}_f(\tilde{\theta})$. Convém notar que que $\mu = 0,3$ e $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\theta}) = 0,4$ então pode-se obter $\lambda = 0,75$.

Assim, pelo teorema 5, \tilde{G} é f -diagnosticável com grau $0,75$.

De fato, da figura 4.9, é sabido que correspondente ao ciclo f -indeterminado $\{\tilde{\rho}_3, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho}_4, \tilde{\beta}, \tilde{\rho}_5, \tilde{\gamma}, \tilde{\rho}_3\}$, o ciclo de estado de falhas $\{(\tilde{q}_7, F), (\tilde{q}_5, F), (\tilde{q}_6, F), (\tilde{q}_7, F)\}$ carrega o rótulo de falhas F , que mostra que a possibilidade de falha ocorrer na estratégia de tratamento excede $0,4$. Contudo o ciclo de estados normais $\{(\tilde{q}_3, N^{0,3}), (\tilde{q}_1, N^{0,3}), (\tilde{q}_2, N^{0,3})\}$ carrega o rótulo $N^{0,3}$, o que significa que a possibilidade de falha ocorrer na estratégia de tratamento correspondente não excede $0,4$. Assim, não é possível detectar falhas que ocorram na estratégia de tratamento cuja possibilidade de falha ocorrer não é menor que $\tilde{\Sigma}_f(\tilde{\theta})$, contudo é possível garantir que a possibilidade de falha ocorrer em todo tratamento é no mínimo $0,3$. O resultado obtido coincide com o encontrado através da abordagem por definição. E dessa forma, LIU e QIU [14] exemplifica a utilização da teoria de diagnosticabilidade fuzzy, após propor uma abordagem de diagnosticabilidade fuzzy, formalizado a construção de diagnosticadores fuzzy e propondo condições necessárias e suficientes

para a determinação do grau de diagnosticabilidade fuzzy.

Como ocorre com o caso crisp, em que alternativamente ao método de determinação de diagnosticabilidade proposto por SAMPATH *et al.* [2], é apresentada uma nova formulação das condições necessárias e suficientes para determinação da diagnosticabilidade de falhas em SED [19], espera-se que para o caso de um FDES, possa existir um paralelo que corresponda à essa nova formulação.

Embora na literatura ainda não tenha sido encontrada tal extensão da teoria, entende-se que alguns conceitos são necessários para que a extensão seja realizada de maneira adequada. Desse modo, será necessário se utilizar da definição de composição paralela fuzzy presente em QIU [25], na qual é detalhado o método para realização da composição entre dois autômatos fuzzy \tilde{G}_1 e \tilde{G}_2 , resultando em $\tilde{G}_1 ||' \tilde{G}_2$. Além disso, também deve ser formulada uma alternativa para o autômato rotulador. Entende-se que tal autômato não será padrão, como no caso fuzzy, mas deverá se basear no modelo do sistema \tilde{G} correspondente, que para todos os eventos de seu conjunto atribui pertinências ao conjunto de falha $\tilde{\Sigma}_f$. Assim, o autômato rotulador fuzzy deverá ter transições que levem ao estado F para cada um dos eventos de falhas contidos em $\tilde{\Sigma}_f$ que excedam o grau de falha aceito. Assim, supõe-se que seria viável replicar e estender o teorema tal qual formulado por VIANA *et al.* [19], que busca componentes fortemente conexos no autômato resultante entre o paralelo do diagnosticador e a composição paralela entre o sistema e o autômato rotulador.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho foi realizada revisão teórica relacionada à SED, de maneira a apresentar os conceitos principais que são envolvidos e que permitiram a caracterização de sistemas a eventos discretos fuzzy. De maneira análoga, foi abordada a teoria fuzzy, explicitando o conceito do termo fuzzy, bem como a generalização possível em termos de conjuntos e relações, de modo que ficasse mais familiar para o leitor a transição do formalismo de SED para a abordagem fuzzy.

Dada essa transição, para ilustrar essa nova abordagem, foi apresentado o problema de diagnosticabilidade de falhas em sistemas a eventos discretos fuzzy, no qual foi estendido o conceito de uma linguagem diagnosticável, definindo uma função diagnosticabilidade e graus de diagnosticabilidade, com relação a cada uma das falhas possíveis de serem diagnosticadas. Adicionalmente, também foi verificado o algoritmo para criação de autômatos diagnosticadores fuzzy, os quais são responsáveis pela diagnose de falhas de maneira online, além de permitir setar condições suficientes e necessárias para a diagnosticabilidade de uma linguagem.

É possível verificar que tal exemplo é o mesmo abordado em tantos outros artigos relacionados à teoria de diagnosticabilidade de falhas em SEDF, e acontece pois existe uma escassez de modelos que relacionam falhas em SEDF. É possível que tal fato se deva em parte à necessidade de avanço na modelagem de SEDF e na teoria de diagnosticabilidade de falhas em SEDF. Entretanto, o exemplo apresentado é útil para ilustrarmos esse novo formalismo e abrirmos espaço para novos estudos no que

tange a modelagem de SEDF, assim como em outras áreas relacionadas a SED como controle e supervisão.

Referências Bibliográficas

- [1] LIN, F. “Diagnosability of discrete event systems and its applications”, *Discrete Event Dynamic Systems*, v. 4, n. 2, pp. 197–212, 1994.
- [2] SAMPATH, M., SENGUPTA, R., LAFORTUNE, S., et al. “Diagnosability of discrete-event systems”, *IEEE Transactions on automatic control*, v. 40, n. 9, pp. 1555–1575, 1995.
- [3] CASSANDRAS, C. G., LAFORTUNE, S. *Introduction to discrete event systems*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [4] BASILIO, J. C., CARVALHO, L. K., MOREIRA, M. V. “Diagnose de falhas em sistemas a eventos discretos modelados por autômatos finitos”, *Revista Controle & Automação*, v. 21, n. 5, pp. 510–533, 2010.
- [5] KILIC, E., KARASU, C., LEBLEBICIOGLU, K. “Fault diagnosis with dynamic fuzzy discrete event system approach”, *Lecture notes in computer science*, pp. 117–124, 2006.
- [6] ZADEH, L. A. “Fuzzy sets”, *Information and control*, v. 8, n. 3, pp. 338–353, 1965.
- [7] MOHUN, M. “Modelling of fuzzy discrete event dynamic systems”. In: *Intelligent Sensing and Information Processing, 2005. Proceedings of 2005 International Conference on*, pp. 278–283, 2005.
- [8] YING, H., LIN, F., MACARTHUR, R. D., et al. “A fuzzy discrete event system approach to determining optimal HIV/AIDS treatment regimens”, *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, v. 10, n. 4, pp. 663–676, 2006.
- [9] THORSLEY, D., TENEKETZIS, D. “Diagnosability of stochastic discrete-event systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 4, pp. 476–492, 2005.

- [10] CAO, Y., YING, M. “Observability and decentralized control of fuzzy discrete-event systems”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 14, n. 2, pp. 202–216, 2006.
- [11] ROSS, T. J. *Fuzzy logic with engineering applications*. John Wiley & Sons, 2009.
- [12] SCHMIDT, K. W., BOUTALIS, Y. S. “Fuzzy discrete event systems for multiobjective control: Framework and application to mobile robot navigation”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 20, n. 5, pp. 910–922, 2012.
- [13] HUQ, R., MANN, G. K., GOSINE, R. G. “A Behavior-based Control of an Object-pulling Robot Using Fuzzy Discrete Event System”, pp. 4145–4150, 2006.
- [14] LIU, F., QIU, D. “Diagnosability of fuzzy discrete-event systems: A fuzzy approach”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 17, n. 2, pp. 372–384, 2009.
- [15] LIU, F., ZHANG, Q., CHEN, X., et al. “Safe diagnosability of fuzzy discrete-event systems”. In: *Control Automation Robotics & Vision (ICARCV), 2012 12th International Conference on*, pp. 252–257, 2012.
- [16] LIU, F., ZHANG, Q., HUANG, R. “A polynomial verification algorithm for safe diagnosability of fuzzy discrete-event systems”. In: *Control Conference (CCC), 2014 33rd Chinese*, pp. 3915–3920. IEEE, 2014.
- [17] LIU, F. “Safe diagnosability of fuzzy discrete-event systems and a polynomial-time verification”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 23, n. 5, pp. 1534–1544, 2015.
- [18] RAMADGE, P. J., WONHAM, W. M. “The control of discrete event systems”, *Proceedings of the IEEE*, v. 77, n. 1, pp. 81–98, 1989.
- [19] VIANA, G. S., BASILIO, J. C., MOREIRA, M. V. “Computation of the maximum time for failure diagnosis of discrete-event systems”. In: *American Control Conference (ACC), 2015*, pp. 396–401. IEEE, 2015.
- [20] LIN, F., YING, H. “Modeling and control of fuzzy discrete event systems”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 32, n. 4, pp. 408–415, 2002.
- [21] NIE, M., TAN, W. W. “Theory of generalized fuzzy discrete-event systems”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 23, n. 1, pp. 98–110, 2015.

- [22] MEKKI, A. O., LIN, F., YING, H., et al. “Fuzzy detectabilities for fuzzy discrete event systems”. In: *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2017 IEEE International Conference on*, pp. 1–6. IEEE, 2017.
- [23] YIN, X. “A Belief-Evolution-Based Approach for Online Control of Fuzzy Discrete-Event Systems under Partial Observation”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2016.
- [24] ZHANG, L., LIU, R., YUE, M. “Shared control of robot based on fuzzy discrete event system”. In: *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2014 11th World Congress on*, pp. 537–542. IEEE, 2014.
- [25] QIU, D. “Supervisory control of fuzzy discrete event systems: a formal approach”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 35, n. 1, pp. 72–88, 2005.