



SOBRE A ESTABILIZAÇÃO DE UM PÊNDULO DE FURUTA COM CONTROLE
SIDA-PBC.

Rodrigo de Jesus Macedo

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Controle e Automação, da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Fernando Cesar Lizarralde

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2017

SOBRE A ESTABILIZAÇÃO DE UM PÊNDULO DE FURUTA COM CONTROLE
SIDA-PBC.

Rodrigo de Jesus Macedo

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO
DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO DA ESCOLA POLITÉCNICA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO
DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO.

Examinado por:

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, D.Sc.

Prof. Eduardo Vieira Leão Nunes, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2017

Macedo, Rodrigo de Jesus

Sobre a Estabilização de um Pêndulo de Furuta com Controle SIDA-PBC./Rodrigo de Jesus Macedo. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2017.

XIV, 73 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Fernando Cesar Lizarralde

Projeto de graduação – UFRJ/Escola Politécnica/Curso de Engenharia de Controle e Automação, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 72 – 73.

1. Estabilidade de sistemas não-lineares. 2. Controle baseado em passividade. 3. Sistema mecânico sub-atuado. 4. Modelagem de sistemas dinâmicos. 5. Linearização parcial. 6. Pêndulo de Furuta. I. Lizarralde, Fernando Cesar. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia de Controle e Automação. III. Título.

*Aos meus pais Walter e Maria
Cosmos, meu irmão Fabrício,
minha esposa Taís e minha
filhinha, o anjo que está por vir,
Lorena.*

Agradecimentos

Ao meu amigo e orientador Fernando Lizarralde por todo apoio, pelos ensinamentos, paciência, pela confiança, pela disponibilidade, pelos momentos de seriedade e pelos momentos de descontração durante toda a graduação, e em especial, durante o desenvolvimento desse trabalho.

Ao meu amigo e co-orientador João Monteiro por toda ajuda, pela disponibilidade, pelas conversas, pelos ensinamentos e pelos momentos de descontração.

A todos os professores do curso de engenharia de controle e automação, em especial os que trabalhei mais de perto, Liu Hsu, Alessandro Jacoud, Ramon R. Costa, Afonso Celso Del Nero, Eduardo V. L. Nunes e Maurício Bezerra, por tudo que me foi passado.

Aos meus amigos do curso de engenharia de controle e automação e todos os amigos conquistados durante esses anos de graduação.

Aos meus familiares que sempre me apoiaram, minha esposa por toda paciência, amor e por me dar o máximo dos presentes, nossa filhinha que está por nascer.

Aos meus amigos da Residência estudantil por todos os bons momentos.

Aos meus amigos de São Paulo que sempre me encorajaram e me deram forças.

Ao Sandro Barros, ao Alexandre Navarro e meus amigos do estágio na GT2 Energia por me dar a oportunidade de colocar em prática o que foi aprendido e pelos momentos de alegria.

A todos que contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento desse trabalho, para meu desenvolvimento profissional e pessoal, o meu muito obrigado.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à POLI/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Controle e Automação.

SOBRE A ESTABILIZAÇÃO DE UM PÊNULO DE FURUTA COM CONTROLE SIDA-PBC.

Rodrigo de Jesus Macedo

Fevereiro/2017

Orientador: Fernando Cesar Lizarralde

Curso: Engenharia de Controle e Automação

Este trabalho trata da modelagem e controle de um pêndulo invertido rotacional, conhecido também como pêndulo de Furuta. O enfoque que se dá é sobre o estudo e aplicação prática da teoria de controle SIDA-PBC (simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control). A aplicação desta técnica em sistemas mecânicos sub-atuados que atendem um conjunto de condições assegura que é possível se obter um sistema cuja dinâmica de um ponto de equilíbrio originalmente instável seja globalmente assintoticamente estável em malha fechada.

Busca-se, portanto, satisfazer as condições que enquadrem o sistema mecânico do pêndulo invertido rotacional na classe de sistemas compreendida pela técnica de controle SIDA-PBC, de modo que a estabilização assintótica global seja conferida.

Foram realizadas simulações de modo a validar o modelo dinâmico e a técnica de controle SIDA-PBC aplicada ao pêndulo de Furuta e, posteriormente, os resultados obtidos em simulação foram conferidos experimentalmente.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Control and Automation Engineer.

ABOUT THE STABILIZATION OF A FURUTA PENDULUM WITH SIDA-PBC
CONTROL.

Rodrigo de Jesus Macedo

February/2017

Advisor: Fernando Cesar Lizarralde

Course: Control and Automation Engineering

This work deals with the modeling and control of a rotational inverted pendulum, also known as the Furuta pendulum. The focus is on the study and practical application of the SIDA-PBC (simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control) control theory. The application of this technique in sub-actuated mechanical systems that meet a set of conditions ensures that it is possible to obtain a system whose dynamics of an originally unstable equilibrium is globally asymptotically stable in closed loop.

It is therefore sought to satisfy the conditions that fit the mechanical system of the rotational inverted pendulum in the system class comprised by the SIDA-PBC control technique, so that global asymptotic stabilization is conferred.

Simulations were performed in order to validate the dynamic model and the SIDA-PBC control technique applied to the Furuta pendulum and, later, the results obtained in simulation were checked experimentally.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Abreviaturas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Objetivo	2
1.3 Organização do Texto	3
2 Sistemas Port Hamiltonianos	4
2.1 Sistemas clássicos Hamiltonianos	4
2.2 IDA-PBC	7
2.2.1 Modelagem da Energia (Energy-shaping)	7
2.2.2 Injeção de Amortecimento (Damping Injection)	8
2.2.3 Determinação da Lei de Controle IDA-PBC	9
2.3 Conclusão	10
3 Modelo Dinâmico de um Pêndulo Invertido Rotacional	11
3.1 Descrição do pêndulo de Furuta da Quanser	12
3.2 Cálculo da energia cinética	13
3.3 Cálculo da energia potencial	20
3.4 Equações de Euler-Lagrange do movimento	21
3.5 Modelo do motor DC	24
3.6 Parâmetros do pêndulo invertido rotacional	25
3.7 Conclusão	26
4 Linearização Parcial por Realimentação	27
4.1 Linearização Colocada	27

4.2	Linearização Não-Colocada	29
4.3	Simulações	30
4.3.1	Simulação da Linearização Colocada	32
4.3.2	Simulação da Linearização Não-Colocada	34
4.4	Conclusão	38
5	Controle SIDA-PBC	39
5.1	Controle SIDA-PBC com Forças Dissipativas	39
5.2	Aplicação no Pêndulo Invertido	42
5.2.1	Simulações	49
5.2.2	Implementação	52
5.3	Conclusão	61
6	Conclusão	62
A	Algumas Demonstrações	64
A.1	Demonstração 1 - Derivada no tempo de H_d	64
A.2	Demonstração 2 - Condição de estabilidade do sistema	65
B	Sistemas implementados em Simulink®	66
B.1	Simulação do sistema em malha fechada com controle SIDA-PBC	66
B.2	Implementação do controle SIDA-PBC no Simulink® utilizando a plataforma QUARC® Real-Time Control Software	68
C	Projeto do controlador LQR	69
	Referências Bibliográficas	72

Lista de Figuras

3.1	Pêndulo Invertido Rotacional.	11
3.2	Pêndulo Invertido Rotacional - Descrição dos componentes.	13
3.3	Modelagem do pêndulo invertido rotacional: Cinemática Direta.	15
4.1	Cálculo aproximado das velocidades das juntas	30
4.2	Implementação do pêndulo invertido rotacional no SimMechanics.	31
4.3	Resposta ao degrau da FT entre a posição angular desejada e a medida.	31
4.4	Sem distúrbio	32
4.5	Distúrbio na junta não-atuada	33
4.6	Sem ação de controle	34
4.7	Sem distúrbio e sem ruído.	35
4.8	Distúrbio na junta não-atuada	36
4.9	Com ruído de medição dos ângulos das duas juntas.	37
4.10	Distúrbio na junta não-atuada e ruído de medição.	37
5.1	Sistema em malha fechada com controle SIDA-PBC implementado em Simulink®.	49
5.2	Teste do controle com condições iniciais $[\theta_a \ \theta_u \ \dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_u]^T = [0 \ \frac{-\pi}{12} \ 0 \ 0]^T$	50
5.3	Teste do controle com condições iniciais $[\theta_a \ \theta_u \ \dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_u]^T = [0 \ \frac{\pi}{6} \ 0 \ 0]^T$	50
5.4	Teste do controle com condições iniciais $[\theta_a \ \theta_u \ \dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_u]^T = [0 \ \frac{\pi}{4} \ 0 \ 0]^T$	51
5.5	Teste do controle com condições iniciais $[\theta_a \ \theta_u \ \dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_u]^T = [0 \ \frac{\pi}{5} \ 0 \ 0]^T$	51
5.6	Pêndulo de Furuta sob ação do controle SIDA-PBC.	52
5.7	Rotary Servo Base Unit.	53
5.8	Rotary Inverted Pendulum Module.	53
5.9	Rotary Inverted Pendulum.	53
5.10	Q8 Data Acquisition Board.	54
5.11	Universal Power Module 1503.	54
5.12	Controle SIDA-PBC - posição angular da junta atuada.	55
5.13	Controle SIDA-PBC - posição angular da junta não-atuada.	56
5.14	Controle SIDA-PBC - velocidade angular da junta atuada.	56
5.15	Controle SIDA-PBC - velocidade angular da junta não-atuada.	57

5.16	Sinal de controle - SIDA-PBC.	57
5.17	Comparação dos sinais de controle SIDA-PBC e LQR.	58
5.18	Pêndulo invertido rotacional com controle LQR - Posição angular θ_a . . .	59
5.19	Pêndulo invertido rotacional com controle LQR - Posição angular θ_u . . .	59
5.20	Pêndulo invertido rotacional com controle LQR - Velocidade angular $\dot{\theta}_a$. .	60
5.21	Pêndulo invertido rotacional com controle LQR - Velocidade angular $\dot{\theta}_u$. .	60
5.22	Sinal de controle - LQR.	61
B.1	Sistema implementado em Simulink.	66
B.2	Implementação do pêndulo invertido rotacional utilizando a ferramenta SimMechanics.	67
B.3	Implementação do motor DC.	67
B.4	Controle SIDA-PBC implementado em Simulink® utilizando a plata- forma QUARC® Real-Time Control Software.	68
C.1	Mapa de pólos e zeros do sistema em malha aberta	70
C.2	Mapa de pólos e zeros do sistema em malha fechada	71

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do Sistema	25
3.2	Parâmetros do Motor DC acoplado à junta 1	25

Lista de Símbolos

$0_{s \times m}$	Matriz de zeros de s linhas e m colunas, p. 9
B^\perp	Aniquilador à esquerda de posto completo da matriz B , p. 9
I	Operador identidade, p. 14
$I_{3 \times 3}$	Matriz identidade de ordem 3, p. 21
Σ_d	Sistema dinâmico desejado., p. 8
$\dot{\theta}_a$	Velocidade angular da junta atuada, p. 19
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais, p. 6
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais, p. 6
\mathbb{R}^m	Espaço euclidiano m -dimensional. É o produto cartesiano de m fatores iguais a \mathbb{R} , cujo $m \in \mathbb{N}$, p. 6
\mathfrak{X}	Espaço vetorial \mathfrak{X} de dimensão $2n$, p. 6
$\nabla H(q, p)$	Gradiente de H em relação a q e p ., p. 7
∇V	Gradiente da energia potencial V em relação a q ., p. 9
$\nabla_p H$	Derivada parcial de H com relação a coordenada generalizada p , p. 9
$\nabla_q H$	Derivada parcial de H com relação a coordenada generalizada q ., p. 9
θ_u	Posição angular da junta não-atuada, p. 17
\vec{h}_i	Eixo de rotação da junta i , p. 14
$\vec{p}_{i-1, i}$	Posição da junta i com relação à junta $i - 1$, p. 14

Lista de Abreviaturas

DC	Direct current (corrente contínua), p. 2
IDA-PBC	Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control, p. 3
KE-PDE	Kinetic Energy - Partial Differential Equations, p. 9
LQR	Linear Quadratic Regulator., p. 50
PE-PDE	Potential Energy - Partial Differential Equations, p. 9
PWM	Pulse Width Modulation, p. 52
SIDA-PBC	Simultaneous Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control, p. 3

Capítulo 1

Introdução

O avanço no poder computacional têm impulsionado amplo desenvolvimento na teoria e aplicação de técnicas de controle não-lineares. Essas técnicas são importantes uma vez que o foco principal de desenvolvimento está na propriedade de estabilidade do sistema. As técnicas de controle não-lineares visam, em grande maioria, utilizar de ferramentas de análise de sistemas não-lineares que possam garantir a estabilidade do sistema em malha fechada que antes, utilizando as conhecidas ferramentas de análise para sistemas lineares, não poderia ser verificada.

Utilizando as técnicas de análise de sistemas lineares, um primeiro passo no estudo de sistemas não-lineares pode ser linearizar o sistema em torno de um ponto de operação, de modo que o comportamento da dinâmica do sistema não-linear possa ser considerado aproximadamente igual ao comportamento do sistema linearizado em uma região próxima ao ponto de operação. Esta técnica é muito usada por projetistas de controle e dá uma boa ideia do comportamento do sistema não-linear, no entanto, uma análise de estabilidade do sistema em malha fechada só pode ser verificada na vizinhança do ponto de operação, sem garantia nenhuma de estabilidade fora dessa região. As técnicas de controle não-linear, no entanto, lidam com essa problemática de forma mais cuidadosa, onde o intuito é conseguir assegurar uma análise de estabilidade não somente ao redor de um ponto de operação, como também poder garantir uma análise de estabilidade mais afastado do ponto de operação, onde os efeitos de não-linearidades não são mais desprezíveis.

Uma gama de técnicas foi criada para o desenvolvimento de leis de controle para sistemas não-lineares, dentre elas incluem *feedback linearization*, controle por modo deslizante (Slotine et al. 1991), controle adaptativo, *backstepping* (Khalil 1996), dentre outras. Muitos desse métodos têm uma fundamentação em comum, são baseados na formulação de leis de controle utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov, a qual carrega propriedades fundamentais que garantem trajetórias de estado limitadas e convergência do sistema para um ponto de equilíbrio. Essa convergência para o equilíbrio pode se dar localmente, isto é, a estabilidade do sistema em malha fechada só é verificada para uma região do espaço de estados; ou globalmente, tal que a estabilidade é verificada para

todo o espaço de estados. Esse trabalho têm o principal foco no estudo de uma técnica de controle que possa levar um ponto de equilíbrio naturalmente instável de um sistema sub-atuado à estabilidade global.

1.1 Motivação

Uma primeira motivação no desenvolvimento desse projeto de graduação é o trabalho (Carvalho 2005), onde o objetivo era analisar o desempenho de alguns controladores frente a estabilização, não estritamente local e possivelmente global, de sistemas não-lineares para diversas condições iniciais. Um desses sistemas tratados é o de um pêndulo invertido rotacional, também conhecido por pêndulo de Furuta (Furuta 2003), um sistema não-linear de quarta ordem, onde pretende-se controlar a posição angular do pêndulo atuando em um motor DC acoplado ao outro grau de liberdade do sistema. Esse é o sistema que será estudado ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

Uma segunda motivação é o trabalho desenvolvido por Donaire et al. (2016b). Nesse trabalho, os autores desenvolvem uma técnica de controle não-linear para sistemas sub-atuados propondo que o sistema em malha fechada seja assintoticamente globalmente estável em um ponto de equilíbrio naturalmente instável desde que os sistemas satisfaçam algumas condições.

Os dois trabalhos, portanto, tratam da estabilidade global de sistemas não-lineares, especialmente falando, de sistemas sub-atuados, onde o número de graus de liberdade é maior do que o número de juntas atuadas.

Como citado anteriormente, o sistema tratado nesse trabalho é o do pêndulo invertido rotacional, devido a complexidade de se controlar por se tratar de um sistema de fase não-mínima. Além disso, o trabalho desenvolvido aqui pode ser testado e implementado no pêndulo invertido rotacional, modelo fabricado pela Quanser Consulting Inc.

1.2 Objetivo

O controle de posição de um pêndulo invertido é feito, em sua grande maioria, pela aplicação das técnicas conhecidas como *swing-up* e *balancing*, onde a primeira têm a função de 'instabilizar' o pêndulo, de modo que ele saia de sua posição de equilíbrio estável em direção a posição de equilíbrio instável (posição vertical para cima), e a segunda têm a função de manter o pêndulo equilibrado no ponto de equilíbrio instável. A junção das duas técnicas, portanto, faz o controle completo de equilíbrio do pêndulo invertido, no entanto, isso só é possível através de um chaveamento entre as leis de controle. Um problema bastante desafiador é criar uma lei de controle que estabilize o pêndulo na posição de equilíbrio instável sem que haja necessidade de fazer um chaveamento entre leis de

controle diferentes, de modo que seja possível garantir a estabilidade global do sistema. O trabalho desenvolvido em (Donaire et al. 2016b) mostra que é possível garantir estabilidade assintótica global para sistemas mecânicos sub-atuados com uma lei de controle baseada na passividade do sistema, e é baseado nessa afirmação que será desenvolvida uma investigação sobre a estabilidade do pêndulo invertido rotacional, um sistema sub-atuado não-linear, ao longo desse trabalho, utilizando a técnica desenvolvida naquele trabalho.

1.3 Organização do Texto

O presente trabalho foi organizado da seguinte forma:

No **Capítulo 2** é feita uma revisão bibliográfica sobre a teoria de sistemas clássicos Hamiltonianos e sistemas port-Hamiltonianos. Esses sistemas carregam um conceito chave no desenvolvimento da lei de controle apresentada em (Donaire et al. 2016b). Além disso, neste capítulo é introduzida a teoria IDA-PBC (*Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control*).

No **Capítulo 3** é feita a modelagem das equações dinâmicas do pêndulo invertido rotacional, baseada no modelo real desenvolvido pela Quanser, utilizando o método de Euler-Lagrange.

No **Capítulo 4** é demonstrada a teoria de linearização parcial por realimentação, desenvolvida em (Spong 1994), onde é apresentada uma técnica de linearização de uma porção da dinâmica (por isso parcial) de um sistema não-linear sub-atuado por uma realimentação não-linear. Essa técnica é subdividida em duas: *Linearização Colocada* e *Linearização Não-Colocada*, onde uma faz a linearização da dinâmica referente a parte atuada do sistema, e a outra faz a linearização da dinâmica referente a parte não atuada. Para demonstrar a eficiência da técnica, são feitas algumas simulações em Simulink utilizando a toolbox *SimMechanics* para desenvolvimento de um modelo dinâmico visual do pêndulo invertido rotacional.

No **Capítulo 5** é apresentada a teoria SIDA-PBC (Simultaneous Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control). Nesse capítulo é feita uma forte afirmação acerca da estabilidade de um sistema mecânico sub-atuado realimentado com uma lei de controle SIDA-PBC, desde que algumas condições sejam satisfeitas. São feitas algumas simulações da aplicação no pêndulo invertido rotacional e, por fim, apresentam-se os resultados obtidos em experimentos realizados em laboratório.

No **Capítulo 6** é apresentada uma conclusão sobre o desenvolvimento e os resultados obtidos com esse trabalho.

Capítulo 2

Sistemas Port Hamiltonianos

Sistemas físicos compartilham de uma propriedade fundamental, base da modelagem física através da formalização de leis generalizadas de interconexão, que é o princípio da conservação de energia (a exemplo de uma lei generalizada de interconexão têm-se a lei de Kirchhoff para circuitos elétricos). Um sistema pode ser considerado, dentro do contexto da teoria de redes, como uma interconexão entre elementos que armazenam energia com elementos que dissipam energia através de interconexões físicas. A estrutura Port Hamiltoniana formaliza essa interconexão preservando a estrutura geométrica e define uma função Hamiltoniana como sendo igual a energia total armazenada em um sistema, de maneira que sistemas Port Hamiltonianos tenham uma interpretação física direta. Modelos baseados na abordagem sobre a energia do sistema são muito interessantes no contexto de análise e projeto de controle, uma vez que uma função que representa a energia de um sistema em malha fechada é uma boa candidata a função de Lyapunov para controle não linear, particularmente adequado a métodos de controle baseados na passividade do sistema.

Pelo fato de tratar a modelagem de sistemas baseado no contexto energético, enfatizando *energia e potência* como características em comum entre diferentes domínios físicos, sistemas Port Hamiltonianos viabilizam o tratamento matemático sistemático de sistemas multi-físicos, entre outras palavras, sistemas compostos de interconexões entre subsistemas de diferentes domínios físicos, a exemplo, mecânico, químico, hidráulico, eletromagnético, etc.

2.1 Sistemas clássicos Hamiltonianos

A dinâmica de um sistema físico pode ser descrita, de maneira totalmente equivalente ao formalismo baseado nas leis de Newton para o movimento, pela solução das *equações de Euler-Lagrange*, com a vantagem de que para qualquer sistema de coordenadas gene-

realizadas o procedimento toma a mesma forma e, portanto, pode ser mais adequado para generalizações. As *equações de Euler-Lagrange* são escritas como ¹

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) \right)^T = \tau, \quad (2.1)$$

onde $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ são coordenadas generalizadas para o sistema com k graus de liberdade, o Lagrangiano L é igual a diferença entre a energia cinética $K(q, \dot{q})$ e a energia potencial $V(q)$, tal que $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$, e $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)^T$ é o vetor de forças generalizadas atuando sobre o sistema. A energia cinética K de um sistema mecânico é escrita da forma

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (2.2)$$

Como o sistema tem n graus de liberdade, a matriz $M(q)$ é uma matriz $n \times n$ simétrica e positiva definida para todo q . Neste caso, o vetor de *momentos* generalizados $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ é definido como

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M(q) \dot{q}, \quad (2.3)$$

que denota o vetor-coluna de derivadas parciais de $L(q, \dot{q})$ com respeito às velocidades generalizadas $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$.

Definindo uma função $H(q, p)$, que é função das coordenadas e dos momentos generalizados, temos

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q), \quad (2.4)$$

nota-se que

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = M^{-1}(q) p, \quad (2.5)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) + \tau, \quad (2.6)$$

assim,

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + V(q), \quad (2.7)$$

é a função que representa a energia total do sistema, dada pela soma da energia cinética $K(q, \dot{q})$ mais a energia potencial $V(q)$. As equações (2.5) e (2.6) são chamadas de *equações Hamiltonianas* do movimento, e H é chamado de *Hamiltoniano*.

¹Siciliano et al. (2010)

Tomando a derivada no tempo da equação (2.4) e substituindo as equações (2.5) e (2.6), têm-se

$$\frac{d}{dt}H(q, \dot{q}) = \frac{\partial^T H}{\partial q}(q, p)\dot{q} + \frac{\partial^T H}{\partial p}(q, p)\dot{p} = \frac{\partial^T H}{\partial p}(q, p)\tau = \dot{q}^T \tau, \quad (2.8)$$

Este resultado demonstra a conservação de energia, uma vez que o aumento da energia do sistema é igual ao trabalho fornecido. Portanto, definindo $u = \tau$ como a *entrada* do sistema e $y := \dot{q}$ como a *saída*, têm-se um sistema *passivo*, tal que

$$\frac{d}{dt}H = y^T u \quad (2.9)$$

O sistema definido pelas equações (2.5) e (2.6) com entradas $u = \tau$ e saídas $y := \dot{q}$ é um exemplo de um sistema Hamiltoniano com entradas e saídas *colocadas*, e pode ser reescrito como:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = M^{-1}(q)p,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) + B(q)u, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (2.10)$$

$$y = B^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = B^T(q)\dot{q}, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

onde $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ e $p = (p_1, \dots, p_n)^T$, e $B(q)$ é a matriz forças de entrada, de modo que $B(q)u$ denota as forças generalizadas resultantes do sinal de controle $u \in \mathbb{R}^m$. Se a matriz $B(q)$ não tem posto completo, isto é, se $m < n$, então o sistema é dito sub-atuado, ou seja, o número de juntas atuadas é menor do que o número total de juntas do sistema. Por outro lado, se $B(q)$ tem posto completo, então $m = n$ e $B(q)$ é invertível para todo q , portanto, o sistema é dito completamente atuado.

Uma outra generalização mais aprofundada da classe de sistemas Hamiltonianos que pode ser feita é considerar sistemas que são descritos em coordenadas locais, tal que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u, \quad x \in \mathfrak{X}, u \in \mathbb{R}^m \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x), \quad y \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $J(x)$ é uma matriz $2n \times 2n$ antissimétrica

$$J(x) = -J^T(x) \quad (2.12)$$

É fácil provar que o balanço de energia se mantém, de maneira que $\frac{dH}{dt}(x(t)) = y^T(t)u(t)$.

Definindo $x := (q, p)$, $J := \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -I_n & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$, $J \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, onde I_n é uma matriz identidade $n \times n$, $0_{n \times n}$ é uma matriz de zeros $n \times n$, e $g(x) = g(p, q) := \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ B(q) \end{bmatrix}$, temos que o sistema definido por (2.10) é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -I_n & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \nabla H(q, p) + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ B(q) \end{bmatrix} u, \quad (2.13)$$

tal que $\nabla H(q, p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \end{bmatrix}$ é o vetor que representa as derivadas parciais de $H(q, p)$ com relação às coordenadas generalizadas e aos momentos generalizados.

2.2 IDA-PBC

O termo IDA-PBC é uma sigla para *Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control* e foi primeiramente introduzida em (Ortega et al. 2002). A teoria IDA-PBC desenvolvida nesse capítulo foi baseada no trabalho apresentado em (Donaire et al. 2016b). A técnica é utilizada para controlar sistemas mecânicos sub-atuados descritos na forma port-Hamiltoniana.

Considerando um sistema descrito como na Equação (2.13), onde $q, p \in \mathbb{R}^n$ são os vetores que definem as coordenadas generalizadas e os momentos generalizados, respectivamente, $u \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, a função $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, como definido na Equação (2.4), é função da energia total com $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, a matriz de inércia do sistema positivo-definida, e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a energia potencial, o objetivo do controle é gerar um controle por realimentação de estados que leve o sistema em malha fechada atingir o ponto de equilíbrio $(q, p) = (q^*, 0)$, $q^* \in \mathbb{R}^n$. Este objetivo é atingido na metodologia IDA-PBC em dois passos, definidos: *energy shaping* e *damping injection*. Em português, *modelagem de energia* e *injeção de amortecimento*. Esses dois passos serão explicados nas duas seções seguintes.

2.2.1 Modelagem da Energia (Energy-shaping)

O primeiro passo, chamado *energy-shaping*, têm o objetivo de modificar a função de energia para uma função de energia desejada e determina um controle por realimentação

de estados de forma que o novo sistema em malha fechada mantenha as propriedades de um sistema port-Hamiltoniano, tal que o novo sistema, chamado agora de sistema desejado e designado por Σ_d , seja definido por:

$$\Sigma_d : \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & M^{-1}(q)M_d(q) \\ -M_d(q)M^{-1}(q) & J_2(q, p) \end{bmatrix} \nabla H_d(q, p) \quad (2.14)$$

com a nova função de energia total $H_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$H_d(q, p) := \frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q) p + V_d(q), \quad (2.15)$$

onde $M_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ é positivo-definida e $V_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verifica

$$q^* = \operatorname{argmin} V_d(q), \quad (2.16)$$

e $J_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ atende a condição de anti-simetria, tal que,

$$J_2(q, p) = -J_2^T(q, p). \quad (2.17)$$

Neste caso, $(q^*, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável do sistema (2.14) com função de Lyapunov definida por H_d . Entretanto, tomando a derivada no tempo da função de Lyapunov do sistema desejado, verifica-se que²,

$$\dot{H}_d = p^T M_d^{-1} J_2 M_d^{-1} p \equiv 0. \quad (2.18)$$

Desta forma, pela teoria de estabilidade de Lyapunov, não se pode garantir estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Assim, o segundo passo da metodologia IDA-PBC têm o objetivo de garantir estabilidade ao sistema em malha fechada.

2.2.2 Injeção de Amortecimento (Damping Injection)

Para atingir o objetivo de levar o sistema em malha fechada à estabilidade assintótica, o segundo passo, chamado *damping injection*, consiste em realimentar a saída naturalmente passiva adicionando à modelagem da energia um termo da forma $-K_p B^T M_d^{-1} p$, com $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positivo-definido.

Com esse novo termo, a derivada da função de energia do sistema em malha fechada é reescrita como,

$$\dot{H}_d = -K_p \|B^T M_d^{-1} p\|^2 \leq 0. \quad (2.19)$$

Assim, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada é garantida se a saída $B^T M_d^{-1} p$ é detectável (van der Schaft & Jeltsema 2014).

²A demonstração é feita no Apêndice A: Algumas demonstrações.

2.2.3 Determinação da Lei de Controle IDA-PBC

Para determinar a lei de controle, deve-se igualar o lado direito da Equação (2.13) com o lado direito da Equação (2.14), tal que se obtém as chamadas *matching equations*.

$$\nabla_q H - Bu = M_d M^{-1} \nabla_q H_d - J_2 M_d^{-1} p \quad (2.20)$$

Desta forma, a lei de controle u , para atender a Equação (2.20) deve ser definida como,

$$u = (B^T B)^{-1} B^T [\nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p] \quad (2.21)$$

Como demonstrado em (Ortega et al. 2002), a solução das *matching equations* é equivalente a solução da lei de controle u , juntamente da solução das (p -dependente) Equações Diferenciais Parciais com respeito à Energia Cinética (KE-PDE)

$$B^\perp \{ \nabla_q (p^T M^{-1} p) - M_d M^{-1} \nabla_q (p^T M_d^{-1} p) + 2J_2 M_d^{-1} p \} = 0_s, \quad (2.22)$$

e da solução das (p -independente) Equações Diferenciais Parciais com respeito à Energia Potencial (PE-PDE)

$$B^\perp \{ \nabla V - M_d M^{-1} \nabla V_d \} = 0_s \quad (2.23)$$

onde $B^\perp : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{s \times n}$ é o aniquilador à esquerda de posto completo de B , isto é, $B^\perp B = 0_{s \times m}$ e o posto de B^\perp , $\rho(B^\perp) = s$, $s := n - m$.

O sucesso da metodologia IDA-PBC está na possibilidade de se resolver as Equações Diferenciais Parciais (2.22) e (2.23).

A adição do termo J_2 referente às forças dissipativas, no entanto, afeta apenas a resolução das KE-PDE's (2.22). A determinação de J_2 , para ser consistente com (2.22), a qual seus elementos são quadráticos em p , deve ser linear em p . Assim, sem perda de generalidade, pode-se definir J_2 da seguinte forma,

$$J_2(q, p) = \sum_{i=1}^n e_i^T M_d^{-1} p U_i(q), \quad (2.24)$$

onde $U_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ verifica a condição $U_i(q) = -U_i^T(q)$, e e_i é o i -ésimo vetor da base canônica $e = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$.

Denota-se as colunas da matriz B^\perp como

$$B^\perp =: [v_1(q) \quad \dots \quad v_s(q)] \quad (2.25)$$

onde $v_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, k \in \bar{s} := \{1, \dots, s\}$ é dado por $v_k = \text{col}(v_{k_i})$.

A definição da matrix B^\perp como citado em 2.25 têm uma aplicação importante acerca

da não-dependência em p das KE-PDE's, o qual pode ser verificado em forma de lema em (Donaire et al. 2016b) e (Crasta et al. 2012).

2.3 Conclusão

Neste capítulo foram abordadas as teorias de sistemas clássicos Hamiltonianos, sistemas port Hamiltonianos e a técnica de controle IDA-PBC. Esses temas são fundamentais na formulação da teoria de controle SIDA-PBC, a qual será tratada no decorrer deste trabalho.

Capítulo 3

Modelo Dinâmico de um Pêndulo Invertido Rotacional



Figura 3.1: Pêndulo Invertido Rotacional.

Fonte: Quanser.com ¹

O modelo dinâmico de um sistema mecânico proporciona uma descrição da relação entre os torques aplicados nas juntas atuadas e o movimento resultante da estrutura. Uma das formas mais utilizadas para se desenvolver as equações do movimento de um sistema mecânico é utilizar a formulação de Lagrange, que dá uma descrição das equações do mo-

¹Disponível em: <http://www.quanser.com/products/rotary_pendulum>. Acessado em nov. 2016.

vimento do sistema, de uma forma sistemática independente do sistema de coordenadas de referência, no espaço das juntas.

Tendo definido o sistema de coordenadas generalizadas $q = (q_1, \dots, q_n)^T$, o qual define efetivamente a posição dos elos de um sistema mecânico de n graus de liberdade, o *Lagrangiano* de um sistema mecânico pode ser definido como uma função das coordenadas generalizadas:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q) \quad (3.1)$$

As equações de Euler-Lagrange são expressadas de acordo com (2.1), que estabelecem uma relação existente entre as forças generalizadas aplicadas no sistema com as posições, velocidades e acelerações das juntas. Deste modo, o desenvolvimento do modelo dinâmico começa pela descrição do sistema, seguido da determinação das energias cinética e potencial.

O desenvolvimento do modelo dinâmico do pêndulo invertido rotacional apresentado nesse capítulo foi feito com base nas notas de aula utilizadas na disciplina de Robótica e Automação ministrada ao curso de engenharia de controle e automação da UFRJ pelo professor Fernando Cesar Lizarralde.

3.1 Descrição do pêndulo de Furuta da Quanser

O pêndulo invertido rotacional desenvolvido pela Quanser é constituído, basicamente, de uma base metálica onde são fixados um motor DC, um encoder, um potenciômetro e um braço rotativo, no qual, na outra ponta é acoplado o pêndulo. O braço rotativo é acoplado ao motor por meio de dois conjuntos de engrenagens que dão uma redução total K_r do movimento do motor DC para o movimento do braço. O primeiro conjunto de engrenagens fica na caixa de redução acoplada ao motor que dá uma redução de $k_{r1} = 14$. O segundo conjunto de engrenagens fica na parte superior da base metálica e é composto por duas engrenagens de 120 e 24 dentes, das quais se obtêm redução de $k_{r2} = 5$. Assim, a redução total é igual a $K_r = 70$. No braço rotativo é fixado também um encoder que faz a medição da posição angular do pêndulo, a qual chamaremos de junta não-atuada. O encoder fixado na base metálica mede, portanto, a posição angular do braço rotativo, o qual chamaremos de junta atuada. O modelo desenvolvido pela Quanser com a descrição de seus componentes pode ser visto na Figura 3.2.

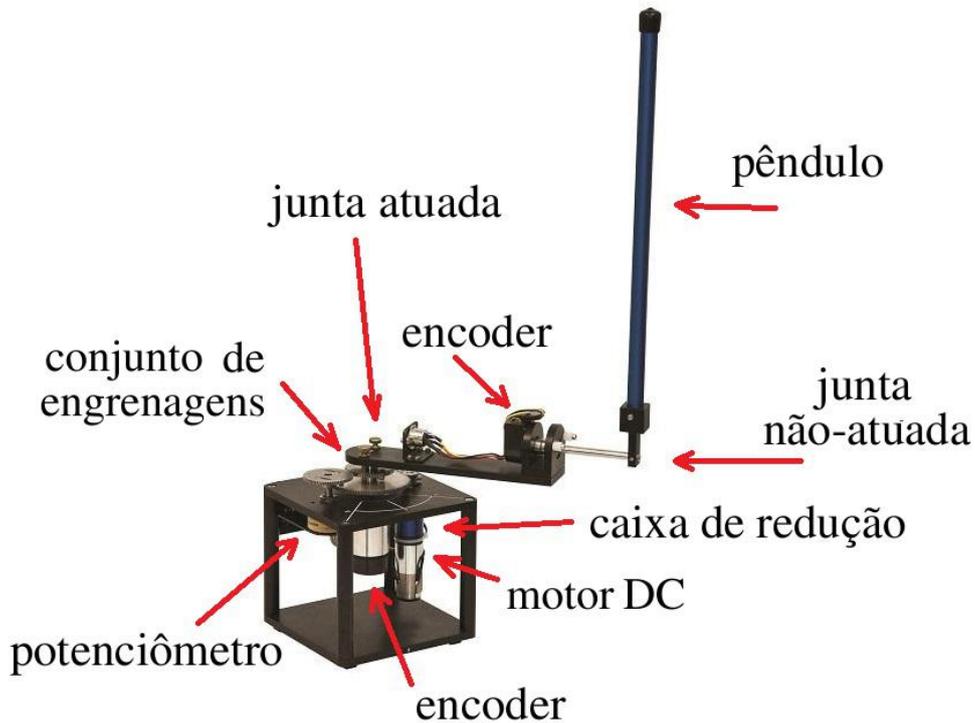


Figura 3.2: Pêndulo Invertido Rotacional - Descrição dos componentes.

Fonte: Quanser.com ²

3.2 Cálculo da energia cinética

A energia cinética total de um sistema é dada pela soma das contribuições relativas ao movimento de cada elo e de cada junta atuada, tal que, para um sistema com n elos rígidos

$$K = \sum_{i=1}^n (K_{l_i} + K_{m_i}), \quad (3.2)$$

A energia cinética referente aos elos, somando as contribuições translacional e rotacional com relação ao sistema de coordenadas base, é dada por:

$$K_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(m_i \|\vec{v}_i^c\|^2 + \vec{\omega}_i \cdot I_i^c \vec{\omega}_i \right), \quad (3.3)$$

onde m_i é a massa do elo i , I_i^c é a inércia do elo i com respeito ao seu centro de massa, \vec{v}_i^c é a velocidade linear do elo i com respeito ao seu centro de massa e $\vec{\omega}_i$ é a velocidade angular do elo i .

A Equação (3.3) é escrita em forma matricial como:

²Adaptado de: <http://www.quanser.com/products/rotary_pendulum>. Acessado em nov. 2016.

$$K_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \vec{v}_i^c \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_i \mathfrak{S} & 0 \\ 0 & I_i^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_i^c \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Pode-se exprimir a Equação (3.4) em função do sistema de coordenadas i , tal que:

$$K_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \vec{v}_i \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_i \mathfrak{S} & -m_i \vec{r}_{ci} \times \\ m_i \vec{r}_{ci} \times & I_i^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_i \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde \vec{r}_{ci} representa a posição do centro de massa do elo i com relação ao sistema de coordenadas i , I_i^i é a inércia do elo i com relação ao sistema de coordenadas i , e é expressado como:

$$I_i^i = I_i^c - m_i (\vec{r}_{ci} \vec{r}_{ci} \cdot - \|\vec{r}_{ci}\|^2 \mathfrak{S}) \quad (3.6)$$

É necessário, no entanto, expressar a energia cinética como uma função das coordenadas generalizadas do sistema. As velocidades linear e angular do elo i estão relacionadas com as velocidades angular das juntas através do *Jacobiano parcial* $J_i(\theta)$, de tal maneira que, para juntas de revolução:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_i \\ \vec{\omega}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \times \vec{p}_{1i} & \cdots & \vec{h}_{i-1} \times \vec{p}_{i-1,i} & 0 & 0 \\ \vec{h}_1 & \cdots & \vec{h}_{i-1} & \vec{h}_i & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (3.7)$$

onde,

$$J_i(\theta) = \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \times \vec{p}_{1i} & \cdots & \vec{h}_{i-1} \times \vec{p}_{i-1,i} & 0 & 0 \\ \vec{h}_1 & \cdots & \vec{h}_{i-1} & \vec{h}_i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Desta forma, substituindo a Equação (3.7) na Equação (3.5), têm-se que a energia cinética total pela contribuição de todas as juntas é dada por:

$$K_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}^T J_i^*(\theta) \bar{M}_i J_i(\theta) \dot{\theta} \quad (3.9)$$

onde,

$$\bar{M}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathfrak{S} & -m_i \vec{r}_{ci} \times \\ m_i \vec{r}_{ci} \times & I_i^i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Nota-se que, na Equação (3.9), a seguinte propriedade é verificada:

$$J \dot{\theta} \cdot \bar{M} V = \dot{\theta} \cdot J^* \bar{M} V \quad (3.11)$$

Além disso, $\dot{\theta}$ podem sair do somatório e, portanto:

$$K_l = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \left(\sum_{i=1}^n J_i^*(\theta) \bar{M}_i J_i(\theta) \right) \dot{\theta} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} \quad (3.12)$$

A matriz $M(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia do sistema, simétrica e positivo-definida.

Para o prosseguimento do cálculo da energia cinética, portanto, foram definidos os sistemas de coordenadas da base e das juntas do pêndulo como pode ser visto na Figura 3.3.

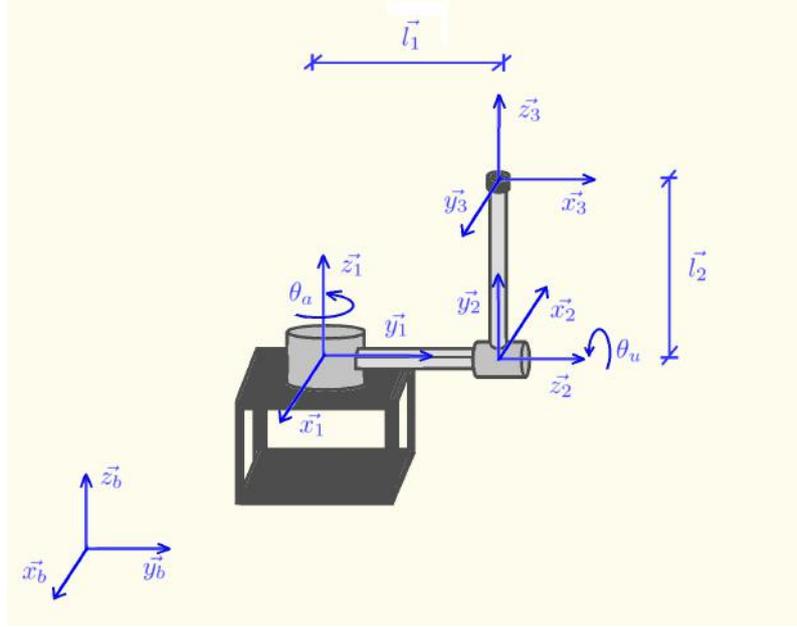


Figura 3.3: Modelagem do pêndulo invertido rotacional: Cinemática Direta.

O sistema que estamos tratando têm duas juntas, sendo uma atuada e outra não atuada e, portanto, a matriz de inércia do sistema é dada por:

$$M(\theta) = J_1^* \bar{M}_1 J_1 + J_2^* \bar{M}_2 J_2 \quad (3.13)$$

De acordo com a Equação (3.8), o cálculo do *Jacobiano parcial* de cada junta resulta em:

$$J_1(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vec{z}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$J_2(\theta) = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \times \vec{p}_{12} & 0 \\ \vec{z}_1 & \vec{z}_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde $\vec{h}_1 = \vec{z}_1$ e $\vec{h}_2 = \vec{z}_2$ são os eixos de rotação das juntas 1 e 2, respectivamente, e $\vec{p}_{12} = l_1 \vec{y}_1$ é o vetor que dá a posição da junta 2 com relação ao sistema de coordenadas da junta 1.

O cálculo de cada um dos termos da Equação (3.13) é mostrado separadamente a seguir:

1.

$$\begin{aligned} J_1^* \bar{M}_1 J_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{z}_1 \cdot \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \mathfrak{S} & -m_1 \bar{r}_{c1} \times \\ m_1 \bar{r}_{c1} \times & I_1^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{z}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \cdot I_1^1 \bar{z}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde \bar{r}_{c1} é o vetor que dá a posição do centro de massa do elo 1, definido como $\bar{r}_{c1} = r_1 \bar{y}_1$.

De acordo com a Equação (3.6), o termo $\bar{z}_1 \cdot I_1^1 \bar{z}_1$ é calculado como segue:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 \cdot I_1^1 \bar{z}_1 &= \bar{z}_1 \cdot [I_1^c - m_1 (\bar{r}_{c1} \bar{r}_{c1} \cdot - \|\bar{r}_{c1}\|^2 \mathfrak{S})] \bar{z}_1 \\ &= \bar{z}_1 \cdot I_1^c \bar{z}_1 - m_1 \bar{z}_1 \cdot \bar{r}_{c1} \bar{r}_{c1} \cdot \bar{z}_1 + m_1 \|\bar{r}_{c1}\|^2 \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_1 \\ &= \bar{z}_1 \cdot I_1^c \bar{z}_1 - m_1 r_1^2 \bar{z}_1 \cdot \bar{y}_1 \bar{y}_1 \cdot \bar{z}_1 + m_1 r_1^2 \\ &= I_{1zz}^c + m_1 r_1^2 \end{aligned}$$

Desta forma,

$$J_1^* \bar{M}_1 J_1 = \begin{bmatrix} I_{1zz}^c + m_1 r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

2.

$$\begin{aligned} J_2^* \bar{M}_2 J_2 &= \begin{bmatrix} (\bar{z}_1 \times \bar{p}_{12}) \cdot & \bar{z}_1 \cdot \\ 0 & \bar{z}_2 \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \mathfrak{S} & -m_2 \bar{r}_{c2} \times \\ m_1 \bar{r}_{c2} \times & I_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \times \bar{p}_{12} & 0 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_{211} & M_{212} \\ M_{221} & M_{222} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} M_{211} &= m_2 (\bar{z}_1 \times \bar{p}_{12}) \cdot [(\bar{z}_1 \times \bar{p}_{12}) - (\bar{r}_{c2} \times \bar{z}_1)] + \bar{z}_1 \cdot [m_2 \bar{r}_{c2} \times (\bar{z}_1 \times \bar{p}_{12}) + I_2^2 \bar{z}_1], \\ M_{212} &= -m_2 (\bar{z}_1 \times \bar{p}_{12}) \cdot (\bar{r}_{c2} \times \bar{z}_2) + \bar{z}_1 \cdot I_2^2 \bar{z}_2, \\ M_{221} &= \bar{z}_2 \cdot [m_2 \bar{r}_{c2} \times (\bar{z}_1 \times \bar{p}_{12}) + I_2^2 \bar{z}_1], \\ M_{222} &= \bar{z}_2 \cdot I_2^2 \bar{z}_2 \end{aligned}$$

e \bar{r}_{c2} é o vetor que dá a posição do centro de massa do elo 2, definido como $\bar{r}_{c2} =$

$r_2\vec{y}_2$.

Para calcular os elementos da matriz $J_2^* \vec{M}_2 J_2$, no entanto, antes são definidos alguns termos:

$$\begin{aligned}\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12} &= l_1(\vec{z}_1 \times \vec{y}_1) \\ &= -l_1\vec{x}_1,\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$\vec{r}_{c2} \times \vec{z}_1 = r_2(\vec{y}_2 \times \vec{z}_1)\tag{3.18}$$

Para calcular a Equação (3.18), deve-se expressar o vetor \vec{y}_2 no sistema de coordenadas da junta 1 por uma transformação de coordenadas. Essa transformação de coordenadas é dada pela matriz de rotação R_{12} , definida como:

$$R_{12} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_u) & \sin(\theta_u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin(\theta_u) & \cos(\theta_u) & 0 \end{bmatrix}\tag{3.19}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{c2} \times \vec{z}_1 &= r_2(\mathbf{R}_{12}(\vec{y}_2)_2 \times \vec{z}_1) \\ &= \begin{bmatrix} -r_2 \cos(\theta_u) & r_2 \sin(\theta_u) & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \\ r_2 \sin(\theta_u) & r_2 \cos(\theta_u) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_2 \sin(\theta_u) \\ 0 \\ r_2 \cos(\theta_u) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -r_2 \sin(\theta_u)\vec{y}_1\end{aligned}\tag{3.20}$$

A partir da Equação (3.20), têm-se:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{c2} \times (\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12}) &= r_2[\mathbf{R}_{12}(\vec{y}_2)_2 \times (\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12})] \\ &= \begin{bmatrix} -r_2 \cos(\theta_u) & r_2 \sin(\theta_u) & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \\ r_2 \sin(\theta_u) & r_2 \cos(\theta_u) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_2 \sin(\theta_u) \\ 0 \\ r_2 \cos(\theta_u) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -l_1 r_2 \cos(\theta_u)\vec{y}_1\end{aligned}\tag{3.21}$$

Portanto, a partir das Equações (3.17), (3.20) e (3.21)

$$\begin{aligned}
M_{2_{11}} &= m_2(-l_1\vec{x}_1) \cdot (-l_1\vec{x}_1 + r_2 \sin(\theta_u)\vec{y}_1) + \vec{z}_1 \cdot (-m_2 l_1 r_2 \cos(\theta_u)\vec{y}_1) + \vec{z}_1 \cdot I_2^c \vec{z}_1 \\
&= m_2 l_1^2 + \vec{z}_1 \cdot I_2^c \vec{z}_1 \\
&= m_2 l_1^2 + \vec{z}_1 \cdot [I_2^c - m_2 (\vec{r}_{c2} \vec{r}_{c2} \cdot - \|\vec{r}_{c2}\|^2 \mathfrak{S})] \vec{z}_1 \\
&= m_2 l_1^2 + \vec{z}_1 \cdot I_2^c \vec{z}_1 - m_2 (\vec{z}_1 \cdot \vec{r}_{c2}) (\vec{r}_{c2} \cdot \vec{z}_1) + m_2 r_2^2 \\
&= m_2 l_1^2 + I_{2_{zz}}^c - m_2 r_2^2 \cos(\theta_u)^2 + m_2 r_2^2 \\
&= m_2 l_1^2 + I_{2_{zz}}^c + m_2 r_2^2 \sin^2(\theta_u)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
M_{2_{12}} &= -m_2 (\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12}) \cdot (\vec{r}_{c2} \times \vec{z}_2) + \vec{z}_1 \cdot I_2^c \vec{z}_2 \\
&= -m_2 r_2 (-l_1 \vec{x}_1) \cdot R_{12}(\vec{x}_2) + \vec{z}_1 \cdot I_2^c R_{12}(\vec{z}_2)_2 \\
&= -m_2 r_2 (-l_1 \vec{x}_1) \cdot (-\cos(\theta_u) \vec{x}_1) + \vec{z}_1 \cdot I_2^c \vec{y}_1 \\
&= -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
M_{2_{21}} &= \vec{z}_2 \cdot [m_2 \vec{r}_{c2} \times (\vec{z}_1 \times \vec{p}_{12}) + I_2^c \vec{z}_1], \\
&= m_2 \vec{z}_2 \cdot (l_1 r_2 \cos(\theta_u) \vec{y}_1) + \vec{z}_2 \cdot I_2^c \vec{z}_1 \\
&= m_2 R_{12}(\vec{z}_2)_2 \cdot (l_1 r_2 \cos(\theta_u) \vec{y}_1) + R_{12}(\vec{z}_2)_2 \cdot I_2^c \vec{z}_1 \\
&= m_2 \vec{y}_1 \cdot (l_1 r_2 \cos(\theta_u) \vec{y}_1) + \vec{y}_1 \cdot I_2^c \vec{z}_1 \\
&= -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
M_{2_{22}} &= \vec{z}_2 \cdot I_2^c \vec{z}_2 \\
&= \vec{z}_2 \cdot [I_2^c - m_2 (\vec{r}_{c2} \vec{r}_{c2} \cdot - \|\vec{r}_{c2}\|^2 \mathfrak{S})] \vec{z}_2 \\
&= \vec{z}_2 \cdot I_2^c \vec{z}_2 - m_2 (\vec{z}_2 \cdot \vec{r}_{c2}) (\vec{r}_{c2} \cdot \vec{z}_2) + m_2 r_2^2 \\
&= I_{2_{zz}}^c + m_2 r_2^2
\end{aligned} \tag{3.25}$$

o que resulta em:

$$J_2^* \bar{M}_2 J_2 = \begin{bmatrix} m_2 l_1^2 + I_{2_{zz}}^c + m_2 r_2^2 \sin^2(\theta_u) & -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) \\ -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) & I_{2_{zz}}^c + m_2 r_2^2 \end{bmatrix}$$

Desta forma, portanto, o cálculo da matriz de inércia, e posteriormente, da energia cinética total pela contribuição de todas as juntas do sistema em questão, resulta:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} I_{1zz}^c + m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + I_{2zz}^c + m_2 r_2^2 \sin^2(\theta_u) & -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) \\ -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) & I_{2zz}^c + m_2 r_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} K_l &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a & \dot{\theta}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + m_2 r_2^2 \sin^2(\theta_u) & -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) \\ -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) & I_{2zz}^c + m_2 r_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde,

$$A = I_{1zz}^c + m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + I_{2zz}^c$$

A contribuição das juntas no cálculo da energia cinética total é computada da mesma maneira que a contribuição dos elos. Considerando as juntas como motores elétricos, no qual pode ser dividido em estator e rotor, pode ser considerado que a contribuição da parte fixa do motor (estator) é incluída no cálculo da contribuição do elo no qual ele está localizado e, portanto, é computada apenas a contribuição do rotor. Desta forma, têm-se:

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_{m_i} \|v_{m_i}^c\|^2 + \vec{\omega}_{m_i} \cdot I_{m_i}^c \vec{\omega}_{m_i}), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} v_{m_i}^c \\ \vec{\omega}_{m_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{m_i} \mathfrak{S} & -m_{m_i} \vec{r}_{c_{m_i}} \times \\ m_{m_i} \vec{r}_{c_{m_i}} \times & I_{m_i}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{m_i}^c \\ \vec{\omega}_{m_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde m_{m_i} é a massa do motor da junta i , $I_{m_i}^c$ é a inércia do rotor da junta i com respeito ao seu centro de massa, $v_{m_i}^c$ é a velocidade linear do centro de massa do rotor da junta i e $\vec{\omega}_{m_i}$ é a velocidade angular do rotor da junta i .

No caso do pêndulo invertido rotacional, existe uma única junta atuada e esta é fixa com relação ao sistema de coordenadas da base, isto é, a velocidade linear de seu centro de massa é nula. Além disso, seu centro de massa está situado na direção do eixo de rotação, desta forma, o vetor $\vec{r}_{c_{m_i}}$ é nulo. Então, a parcela do cálculo da energia cinética proveniente da contribuição das juntas é dada por:

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{1}{2} \dot{\omega}_{m_1}^T I_{m_1}^1 \dot{\omega}_{m_1} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\omega}_{m_1}^T \left[I_{m_1}^c - m_{m_1} \left(\vec{r}_{c_{m_1}} \vec{r}_{c_{m_1}} \cdot - \|\vec{r}_{c_{m_1}}\|^2 \mathfrak{S} \right) \right] \dot{\omega}_{m_1} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_a^T K_r^2 I_{m_1 z z}^c \dot{\theta}_a \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde K_r representa a taxa de redução da engrenagem acoplada ao motor, a qual transmite o movimento ao elo.

Desta forma, a matriz de inércia da Equação (3.26), e a energia cinética total são

reescritas como:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} B + m_2 r_2^2 \sin^2(\theta_u) & -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) \\ -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) & I_{2zz}^c + m_2 r_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} K &= K_l + K_m = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a & \dot{\theta}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B + m_2 r_2^2 \sin^2(\theta_u) & -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) \\ -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u) & I_{2zz}^c + m_2 r_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde,

$$B = I_{1zz}^c + m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + I_{2zz}^c + K_r^2 I_{m_1 zz}^c$$

3.3 Cálculo da energia potencial

Da mesma forma que para a energia cinética, o cálculo da energia potencial é dado pela soma das contribuições relativas de cada elo e de cada junta, tal que:

$$U = \sum_{i=1}^n (U_{l_i} + U_{m_i}) \quad (3.32)$$

Considerando que os elos são corpos rígidos, não há contribuição de forças elásticas no cálculo da energia potencial, portanto, as contribuições são somente devido às forças gravitacionais e são expressadas por:

$$U_{l_i} = - \int_{V_{l_i}} \vec{g}_0^T \vec{p}_i^* \rho dV = -m_{l_i} \vec{g}_0^T \vec{p}_{l_i} \quad (3.33)$$

onde \vec{g}_0 é o vetor de aceleração da gravidade no sistema de coordenadas da base, tal que:

$$\vec{g}_0 = [0 \quad 0 \quad -g]^T \quad (3.34)$$

e \vec{p}_{l_i} é o vetor que dá a posição do centro de massa do elo i , tal que:

$$\vec{p}_{l_i} = \frac{1}{m_{l_i}} \int_{V_{l_i}} \vec{p}_i^* \rho dV \quad (3.35)$$

onde \vec{p}_i^* denota o vetor de posição da partícula elementar de volume dV do elo i .

Similarmente para as juntas, têm-se que a contribuição do rotor i é dada por:

$$U_{m_i} = -m_{m_i} \vec{g}_0^T \vec{p}_{m_i} \quad (3.36)$$

Portanto, a energia potencial é dada por:

$$U = - \sum_{i=1}^n (m_{l_i} \vec{g}_0^T \vec{p}_{l_i} + m_{m_i} \vec{g}_0^T \vec{p}_{m_i}) \quad (3.37)$$

Para o prosseguimento dos cálculos da energia potencial, mais uma vez, tomamos os sistemas de coordenadas definidos na Figura 3.3. Assim, a energia potencial do pêndulo invertido rotacional é dada por:

$$\begin{aligned}
U &= -(m_1 \vec{g}_0 \cdot \vec{p}_{l_1} + m_2 \vec{g}_0 \cdot \vec{p}_{l_2} + m_{m_1} \vec{g}_0 \cdot \vec{p}_{m_1}) \\
&= m_1 r_1 g (\vec{z}_b \cdot \vec{y}_1) + m_2 g [\vec{z}_b \cdot (l_1 \vec{y}_1 + r_2 \vec{z}_b + r_2 \vec{y}_2)] + m_{m_1} r_2 g (\vec{z}_b \cdot \vec{z}_b) \\
&= m_1 r_1 g (\vec{z}_b \cdot \vec{y}_1) + m_2 l_1 g (\vec{z}_b \cdot \vec{y}_1) + m_2 r_2 g (\vec{z}_b \cdot \vec{z}_b) + m_2 r_2 g (\vec{z}_b \cdot \vec{y}_2) + m_{m_1} r_2 g (\vec{z}_b \cdot \vec{z}_b) \\
&= (m_2 + m_{m_1}) r_2 g + m_2 r_2 g (\vec{z}_b \cdot R_{b1} R_{12} \vec{y}_2) \\
&= m_{m_1} r_2 g + m_2 r_2 g (1 + \cos(\theta_u))
\end{aligned} \tag{3.38}$$

onde R_{b1} é uma matriz identidade, tal que, $R_{b1} = I_{3 \times 3}$.

Vale lembrar que o pêndulo invertido rotacional só tem atuação na primeira das juntas.

3.4 Equações de Euler-Lagrange do movimento

O cálculo das equações do movimento segue a partir das Equações (3.1) e (2.1). Uma vez calculadas as energias cinética e potencial, nota-se que a energia potencial não depende da velocidade das juntas, desta forma, têm-se:

$$\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial K(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = M(\theta) \dot{\theta}, \tag{3.39}$$

Tomando a derivada no tempo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \right)^T = M(\theta) \ddot{\theta} + \dot{M}(\theta) \dot{\theta}, \tag{3.40}$$

A derivada parcial com relação as posições das juntas é dada por:

$$\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}) \right) - \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta}, \tag{3.41}$$

Portanto, a Equação (2.1) que dá as equações do movimento é reescrita como:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) \right)^T = \tau \\
M(\theta) \ddot{\theta} + \dot{M}(\theta) \dot{\theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}) \right)^T + \left(\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} \right)^T &= \tau \\
M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + G(\theta) &= \tau
\end{aligned} \tag{3.42}$$

onde,

$$C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = \dot{M}(\theta) \dot{\theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}) \right)^T, \tag{3.43}$$

e,

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \left(\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} \right)^T \\ &= \left[0 \quad -m_2 r_2 g \sin(\theta_u) \right]^T \end{aligned} \quad (3.44)$$

A escolha da matriz $C(\theta, \dot{\theta})$, por sua vez, não é única desde que seus elementos satisfaçam a Equação (7.43) em (Siciliano et al. 2010), reproduzida na Equação (3.45)

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{\theta}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j, \quad (3.45)$$

onde c_{ij} é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e o elemento h_{ijk} é definido, de acordo com a Equação (7.41) em (Siciliano et al. 2010), na Equação (3.46), cujo sentido físico representa o efeito induzido das forças centrífugas e de *Coriolis* de uma junta na outra.

$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial \theta_i} \quad (3.46)$$

onde b_{ij} são os elementos da matriz de inércia $M(\theta)$. O cálculo dos elementos c_{ij} podem, então, após alguns algebrismos, ser resumido a:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{\theta}_k \quad (3.47)$$

onde,

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial \theta_i} \right) \quad (3.48)$$

tal que os coeficientes c_{ijk} são denominados *Símbolos de Christoffel* e sua definição, dessa forma, carrega uma propriedade notável das equações do movimento do sistema, tal que a matriz

$$N(\theta, \dot{\theta}) = \dot{M}(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta}) \quad (3.49)$$

é *anti-simétrica*.

Portanto, de acordo com as Equações (3.47) e (3.48), têm-se:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{111} \dot{\theta}_1 + c_{112} \dot{\theta}_2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_u} \dot{\theta}_u \\ &= m_2 r_2^2 \sin(\theta_u) \cos(\theta_u) \dot{\theta}_u, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
c_{12} &= c_{121}\dot{\theta}_1 + c_{122}\dot{\theta}_2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial b_{21}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_u} \dot{\theta}_a + \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_u} \dot{\theta}_u \\
&= m_2 r_2^2 \sin(\theta_u) \cos(\theta_u) \dot{\theta}_a + l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_u) \dot{\theta}_u, \tag{3.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{21} &= c_{211}\dot{\theta}_1 + c_{212}\dot{\theta}_2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{21}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial b_{21}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_2} \right) \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{21}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial b_{22}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_2} \right) \dot{\theta}_2 \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_u} \dot{\theta}_a \\
&= -m_2 r_2^2 \sin(\theta_u) \cos(\theta_u) \dot{\theta}_a, \tag{3.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{22} &= c_{221}\dot{\theta}_1 + c_{222}\dot{\theta}_2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, a matriz $C(\theta, \dot{\theta})$ é reescrita como:

$$\begin{aligned}
C(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \tag{3.53} \\
&= \begin{bmatrix} m_2 r_2^2 \sin(\theta_u) \cos(\theta_u) \dot{\theta}_u & m_2 r_2^2 \sin(\theta_u) \cos(\theta_u) \dot{\theta}_a + l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_u) \dot{\theta}_u \\ -m_2 r_2^2 \sin(\theta_u) \cos(\theta_u) \dot{\theta}_a & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por fim, considera-se o efeito de forças não conservativas provenientes do atrito viscoso no cálculo das equações do movimento do pêndulo invertido rotacional, as quais realizam trabalho em suas juntas. Os coeficientes do atrito viscoso formam uma matriz diagonal $F_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que, o torque do atrito viscoso é definido por $F_v \dot{\theta}$.

$$F_v = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

Assim, as equações do movimento definidas em (3.42) podem ser reescritas como:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + F_v\dot{\theta} + G(\theta) = \tau \tag{3.55}$$

3.5 Modelo do motor DC

A Equação (3.55) fornece as equações dinâmicas do pêndulo invertido rotacional considerando que a entrada externa é um torque. No entanto, esse torque é gerado por um motor DC acoplado à junta atuada por meio de um conjunto de engrenagens, o qual têm atuação por meio de tensão. Desta forma, o modelo dinâmico do motor DC deve ser incluído ao modelo dinâmico do pêndulo invertido rotacional, tal que, agora, o sinal de entrada a ser considerado será não mais um torque e sim uma tensão.

O torque entregue pelo motor DC, cujo campo magnético do estator é estabilizado por ímã permanente, é proporcional à sua corrente de armadura (Dorf & Bishop 2011), tal que

$$\tau_m = K_m K_r i_a \quad (3.56)$$

onde K_m é função da permeabilidade magnética do material e K_r é a taxa de redução das engrenagens que acoplam o motor ao elo.

A corrente de armadura i_a é relacionada à tensão aplicada na armadura por:

$$v_a = \left(R_a + L_a \frac{d}{dt} \right) i_a + v_b \quad (3.57)$$

onde v_b é a tensão de força contra-eletromotriz, a qual é proporcional à velocidade angular do motor. Desta forma,

$$v_b = K_b \omega_m \quad (3.58)$$

onde $\omega_m = \dot{\theta}_m$ é a velocidade angular do motor. A velocidade do motor é relacionada diretamente com a velocidade angular da junta atuada pela taxa de redução das engrenagens, tal que, $\dot{\theta}_m = K_r \dot{\theta}_a$. Assim, a corrente de armadura é, no domínio da frequência

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b K_r s \theta_a(s)}{R_a + L_a s} \quad (3.59)$$

e, portanto, o torque é definido por

$$\tau_m(s) = K_m K_r \frac{V_a(s) - K_b K_r s \theta_a(s)}{R_a + s L_a} \quad (3.60)$$

Para fins de modelagem, o efeito da indutância de armadura é negligenciado. Desta forma, o modelo dinâmico da Equação (3.55) é reescrito, em termos de tensão de armadura, como:

$$\begin{bmatrix} m_{aa} & m_{au} \\ m_{au}^T & m_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_a \\ \ddot{\theta}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} + \frac{K_m K_b K_r^2}{R_a} & c_{12} \\ c_{21} + \frac{K_m K_b K_r^2}{R_a} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_m K_r}{R_a} \\ 0 \end{bmatrix} v_a \quad (3.61)$$

3.6 Parâmetros do pêndulo invertido rotacional

Os parâmetros do pêndulo invertido rotacional foram retirados do site de seu fabricante Quanser³, e estão listados na Tabela 3.1:

Parâmetros do Sistema		
Parâmetro	Valor	Unidade
l_1	0.216	m
r_1	0.108	m
m_1	0.257	kg
l_2	0.337	m
r_2	0.169	m
m_2	0.127	kg
I_{1zz}^c	7.6×10^{-4}	Kgm^2
I_{2zz}^c	1.4×10^{-3}	Kgm^2

Tabela 3.1: Parâmetros do Sistema

O motor acoplado à junta 1 têm os seguintes parâmetros, listados na Tabela 3.2:

Parâmetros do Motor DC		
Parâmetro	Valor	Unidade
Constante de Torque K_m	0.00767	Nm/A
Constante de Força Contra Eletromotriz K_b	0.00767	$V/(rad/s)$
Resistência de Armadura R_a	2.6	Ω
Indutância de Armadura L_a	0.18	mH
Mom. de inércia do motor com relação ao centro de massa $I_{m_1zz}^c$	1.9×10^{-3}	Kgm^2
Redução total K_r	70	-

Tabela 3.2: Parâmetros do Motor DC acoplado à junta 1

A matriz F_v referente ao atrito viscoso é dada por:

$$F_v = \begin{bmatrix} 5 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{kg m}^2 \text{rad / s} \quad (3.62)$$

Estes valores foram obtidos experimentalmente de modo que a simulação tivesse resposta mais próxima possível da resposta obtida no pêndulo da Quanser largado da posição de equilíbrio instável com velocidades angulares aproximadamente iguais a zero.

³Disponível em: <http://www.quanser.com/Products/rotary_pendulum>. Acessado em dez. 2016.

3.7 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma descrição do sistema mecânico utilizado, o pêndulo invertido rotacional, modelo desenvolvido pela Quanser Consulting Inc., bem como o desenvolvimento baseado na metodologia de Euler-Lagrange, do qual se possibilitou encontrar as equações que descrevem a dinâmica do sistema.

Capítulo 4

Linearização Parcial por Realimentação

As equações do movimento do pêndulo invertido rotacional mostram, dentre outras coisas, que o sistema é não linear. Apesar de não ser possível linearizar completamente a dinâmica do sistema por realimentação devido o fato do sistema ser sub-atuado, é ainda possível que uma parte do sistema seja linearizada. Este capítulo apresenta a técnica de *Linearização parcial por realimentação*, apresentada em (Spong 1994), a qual leva o sistema em malha fechada a se comportar como um *sistema port-Hamiltoniano*.

A técnica é dividida em duas vertentes, as quais define-se: *Linearização Colocada* e *Linearização Não-colocada*. A primeira técnica desenvolve uma lei de controle que lineariza a dinâmica da junta atuada. Já a segunda, desenvolve uma lei de controle que linearizada a dinâmica da junta não-atuada.

4.1 Linearização Colocada

Como mencionado anteriormente, a técnica de linearização colocada lineariza a dinâmica relacionada com o grau de liberdade ativo do sistema, isto é, a dinâmica da junta atuada, e será apresentada nesta seção.

Pode-se escrever a Equação (3.55), de forma equivalente, como:

$$\begin{bmatrix} m_{aa}(\theta_u) & m_{au}(\theta_u) \\ m_{au}^T(\theta_u) & m_{uu}(\theta_u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_a \\ \ddot{\theta}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{aa} & c_{au} \\ c_{ua} & c_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\theta_u) \\ g_2(\theta_u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Como o sistema em questão é sub-atuado, isto é, o número de juntas atuadas é menor do que o número total de juntas, o torque externo aplicado na segunda junta é nulo, tal que $\tau_2 = 0$. Assim, são duas as equações que descrevem o movimento do sistema e, de (4.1), têm-se:

$$m_{aa}(\theta_u)\ddot{\theta}_a + m_{au}(\theta_u)\ddot{\theta}_u + c_{11}\dot{\theta}_a + c_{12}\dot{\theta}_u + g_1 = \tau_1 \quad (4.2)$$

$$m_{au}^T(\theta_u)\ddot{\theta}_a + m_{uu}(\theta_u)\ddot{\theta}_u + c_{21}\dot{\theta}_a + c_{22}\dot{\theta}_u + g_2 = 0 \quad (4.3)$$

Levando em conta o modelo dinâmico do motor DC, de maneira que as equações se enquadrem na formulação apresentada em (3.61), as Equações (4.2) e (4.3) são reescritas como:

$$m_{aa}(\theta_u)\ddot{\theta}_a + m_{au}(\theta_u)\ddot{\theta}_u + c_{aa}\dot{\theta}_a + c_{au}\dot{\theta}_u + g_1 = v_1 \quad (4.4)$$

$$m_{au}^T(\theta_u)\ddot{\theta}_a + m_{uu}(\theta_u)\ddot{\theta}_u + c_{ua}\dot{\theta}_a + c_{uu}\dot{\theta}_u + g_2 = 0 \quad (4.5)$$

Considerando que o termo $m_{uu}(\theta)$ é invertível, como consequência da propriedade da matriz de inércia do sistema ser positivo-definida, pode-se reescrever a Equação (4.5) como:

$$\ddot{\theta}_u = -m_{uu}^{-1}(\theta_u) [m_{au}^T(\theta_u)\ddot{\theta}_a + c_{ua}\dot{\theta}_a + c_{uu}\dot{\theta}_u + g_2] \quad (4.6)$$

E substituindo a Equação (4.6) na Equação (4.4), obtêm-se:

$$v_1 = -m_{au}(\theta_u)m_{uu}^{-1}(\theta_u) [m_{au}^T(\theta_u)\ddot{\theta}_a + c_{ua}\dot{\theta}_a + c_{uu}\dot{\theta}_u + g_2] + m_{aa}(\theta_u)\ddot{\theta}_a + c_{aa}\dot{\theta}_a + c_{au}\dot{\theta}_u + g_1$$

$$v_1 = \bar{m}_{aa}\ddot{\theta}_a + \bar{c} + \bar{g} \quad (4.7)$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{m}_{aa} &= m_{aa}(\theta_a) - m_{au}(\theta_u)m_{uu}^{-1}(\theta_u)m_{au}^T(\theta_u) \\ \bar{c} &= [c_{aa} - m_{au}(\theta_u)m_{uu}^{-1}(\theta_u)c_{ua}] \dot{\theta}_a + [c_{au} - m_{au}(\theta_u)m_{uu}^{-1}(\theta_u)c_{uu}] \dot{\theta}_u \\ \bar{g} &= g_1 - m_{au}(\theta_u)m_{uu}^{-1}(\theta_u)g_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Uma lei de controle linearizadora pode ser, então, definida pela Equação (4.7), tal que

$$v_1 = \bar{m}_{aa}v + \bar{c} + \bar{g} \quad (4.9)$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$ é uma lei controle adicional a ser definida.

Desta forma, podemos reescrever o sistema, tal que:

$$\ddot{\theta}_a = v \quad (4.10)$$

$$m_{uu}(\theta_u)\ddot{\theta}_u + c_{ua}\dot{\theta}_a + c_{uu}\dot{\theta}_u + g_2 = -m_{au}^T(\theta_u)v \quad (4.11)$$

$$y = \theta_a \quad (4.12)$$

Observa-se que, com essa lei de controle, o sistema é linear da entrada v para a saída y como um sistema de segunda ordem, e a Equação (4.11) representa as dinâmicas internas, não lineares, as quais não puderam ser linearizadas.

4.2 Linearização Não-Colocada

Ao invés de linearizar a junta ativa, agora deseja-se linearizar o grau de liberdade passivo por uma realimentação não-linear. Neste caso, existe um compromisso com a condição de controlabilidade do sistema. Considerando o sistema (4.10) - (4.12), uma lei de controle que linearize a junta não-atuada requer que a matriz $m_{au}^T(\theta_u)$ tenha posto dado por:

$$\rho(m_{au}^T(\theta_u)) = l \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^n \quad (4.13)$$

onde l é o número de graus de liberdade passivos no sistema.

Uma condição importante é que o número de graus de liberdade ativos deve ser maior ou igual o número de graus de liberdade passivos, isto é, $m \geq l$.

A condição do posto dada pela Equação (4.13) é chamada de propriedade de *Strong Inertial Coupling* (Spong 1994) e é essencialmente uma condição de controlabilidade, uma vez que para calcular a inversa da matriz $m_{au}^T(\theta_u)$ deve-se computar, na verdade, sua pseudo-inversa, e esse cálculo tem uma única solução quando a condição do posto é atendida.

Podemos, então, calcular a pseudo-inversa da matriz $m_{au}^T(\theta_u)$, de acordo com:

$$(m_{au}^T(\theta_u))^\dagger = m_{au}(\theta_u)(m_{au}^T(\theta_u)m_{au}(\theta_u))^{-1} \quad (4.14)$$

e definir a lei de controle v , na Equação (4.10), como:

$$v = -(m_{au}^T(\theta_u))^\dagger (m_{uu}(\theta_u)u + c_{ua}\dot{\theta}_a + c_{uu}\dot{\theta}_u + g_2) \quad (4.15)$$

onde $u \in \mathbb{R}^l$ é um sinal de controle adicional, a ser definido.

Desta forma, o sistema em malha fechada torna-se:

$$\ddot{\theta}_u = u \quad (4.16)$$

$$m_{au}^T(\theta_u)\ddot{\theta}_a + c_{ua}\dot{\theta}_a + c_{uu}\dot{\theta}_u + g_2 = -m_{uu}(\theta_u)u \quad (4.17)$$

$$w = \theta_u \quad (4.18)$$

Agora, portanto, é observado que o grau de liberdade passivo foi linearizado e desacoplado do restante do sistema, e que agora, a Equação (4.17) é a que representa as dinâmicas internas do sistema.

4.3 Simulações

Foram realizadas algumas simulações para demonstrar o funcionamento da linearização parcial por realimentação. Nas simulações foram inclusos, também, efeitos de distúrbio e ruídos de medição para que os resultados sejam os mais próximos dos que obteríamos caso fosse implementado no pêndulo físico.

Uma maneira de estimar as velocidades angular das juntas sem que haja necessidade de se conhecer a dinâmica do sistema é lançar mão de uma aproximação por derivada suja utilizando os valores dos ângulos, tal que, no domínio de Laplace:

$$s \approx \frac{s}{\alpha s + 1} \quad (4.19)$$

Então, para $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{s}{\alpha s + 1} \rightarrow s$. Desta forma, escolhendo um valor de α pequeno, têm-se uma aproximação da derivada, que no domínio de Laplace é uma função de transferência imprópria, por uma função de transferência própria.

Assim, faz-se a seguinte aproximação, onde o valor de α utilizado é $\alpha = 0.05$, como se pode observar na Figura 4.1:

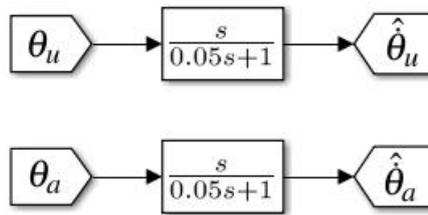


Figura 4.1: Cálculo aproximado das velocidades das juntas

Essa função de transferência é, no fundo, um filtro passa-altas. É fácil verificar que para baixas frequências, isto é, $s \rightarrow 0$, $\frac{s}{\alpha s + 1} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$; e para altas frequências, isto é, $s \rightarrow \infty$, $\frac{s}{\alpha s + 1} \rightarrow \frac{s}{\alpha s} = \frac{1}{\alpha}$. Portanto, para altas frequências a aproximação é bastante razoável. Em contrapartida, para baixas frequências a aproximação não é tão satisfatória.

Para que a simulação se aproxime o máximo do real, os valores das velocidades das juntas utilizados no controle foram calculados como acima.

As simulações foram implementadas em Simulink utilizando a toolbox de simulações mecânicas *SimMechanics* para criar o modelo do pêndulo e facilitar a visualização. A Figura 4.2 ilustra o modelo do pêndulo invertido rotacional implementado no SimMechanics sob ação de algum controle.

Este modelo está disponível na plataforma QuanserShare¹ e pode ser encontrado facilmente procurando por *rotary inverted pendulum*.

¹Disponível em: <http://www.quansershare.com>

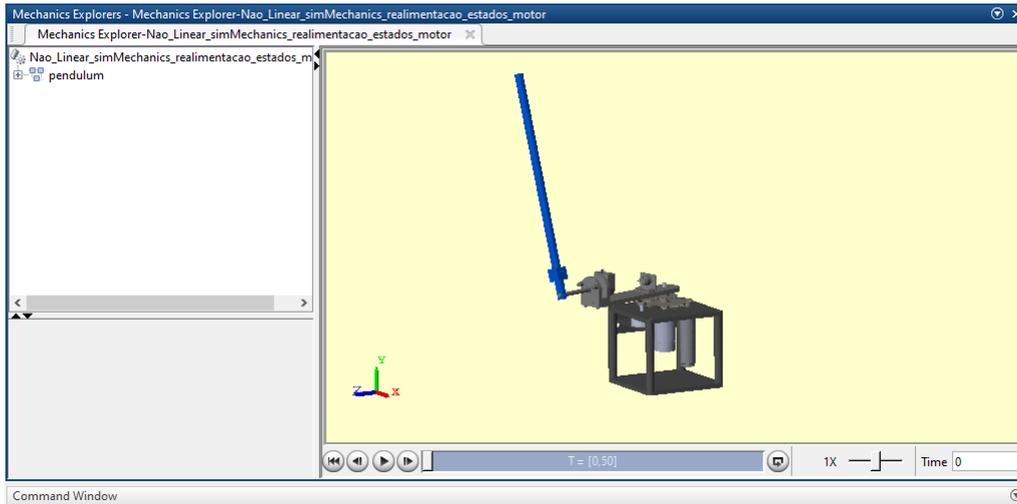


Figura 4.2: Implementação do pêndulo invertido rotacional no SimMechanics.

Nos dois casos a lei de controle utilizada foi a de um controlador proporcional derivativo, cujos ganhos foram definidos: $K_p = 10$ e $K_d = 4$. Desta forma, como trata-se de um sistema "duplo-integrador" após a linearização, então a dinâmica da junta em questão será descrita por:

$$\ddot{\theta} = -K_d \dot{\theta} - K_p \theta + K_p \theta_d$$

Portanto, a função de transferência da posição angular desejada para a posição angular medida é:

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{10}{s^2 + K_d s + K_p} = \frac{10}{s^2 + 4s + 10} \quad (4.20)$$

Cujos pólos estão em $-2 \pm \sqrt{6}i$, e a resposta ao degrau é mostrada na Figura 4.3.

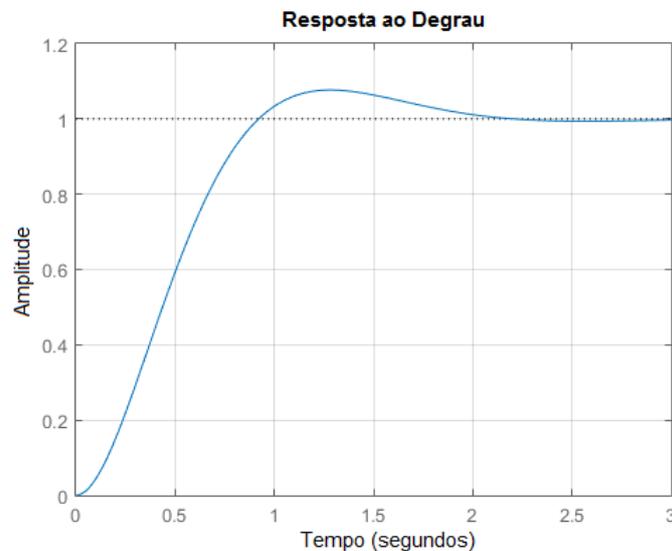


Figura 4.3: Resposta ao degrau da FT entre a posição angular desejada e a medida.

É visto que o tempo de subida está na ordem de 0.5 segundo, o tempo de assentamento na ordem de 3 segundos e o sobrepasso na ordem de 10%. As simulações estão detalhadas nas seções 4.3.1 e 4.3.2.

4.3.1 Simulação da Linearização Colocada

A Figura 4.4 ilustra a simulação da linearização colocada, onde o objetivo do controle era manter a junta atuada em zero, isto é, a posição angular desejada $\theta_{ad} = 0$. As condições iniciais utilizadas nesta simulação estão definidas na Equação (4.21):

$$\begin{bmatrix} \theta_{a_0} \\ \dot{\theta}_{a_0} \\ \theta_{u_0} \\ \dot{\theta}_{u_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{12}\pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

onde as posições angulares estão dadas em radianos e as velocidades angulares em radiano por segundo.

Essas condições iniciais, portanto, mostram que o pêndulo está na posição vertical para cima ($\theta_u = 0$) com velocidade zero, isto é, no ponto de equilíbrio instável, e qualquer perturbação mínima fará com que ele saia do ponto de equilíbrio instável em direção ao ponto de equilíbrio estável ($\theta_u = \pi$).

É visto que apesar da forte influência da dinâmica da junta não-atuada, o controle é capaz de levar a posição da junta atuada para a posição desejada.

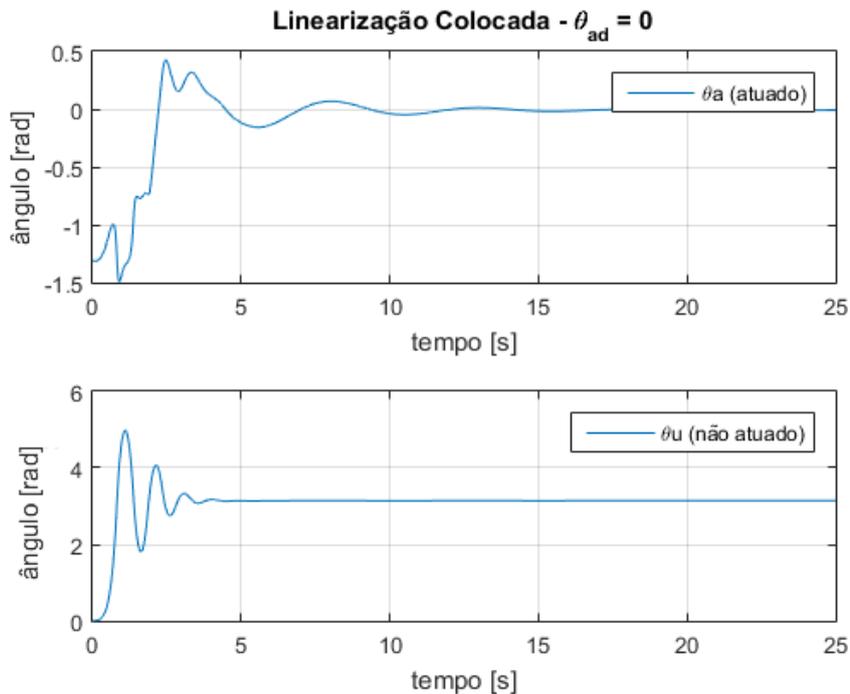


Figura 4.4: Sem distúrbio

A Figura 4.5 ilustra o mesmo caso de simulação, porém, agora foi adicionado um distúrbio na junta não-atuada. O distúrbio é dado na forma de degraus na medição da posição da junta não-atuada. Mais uma vez o controle age de forma a levar a posição da junta-atuada para zero apesar dos distúrbios que tentam tirá-la da posição desejada.

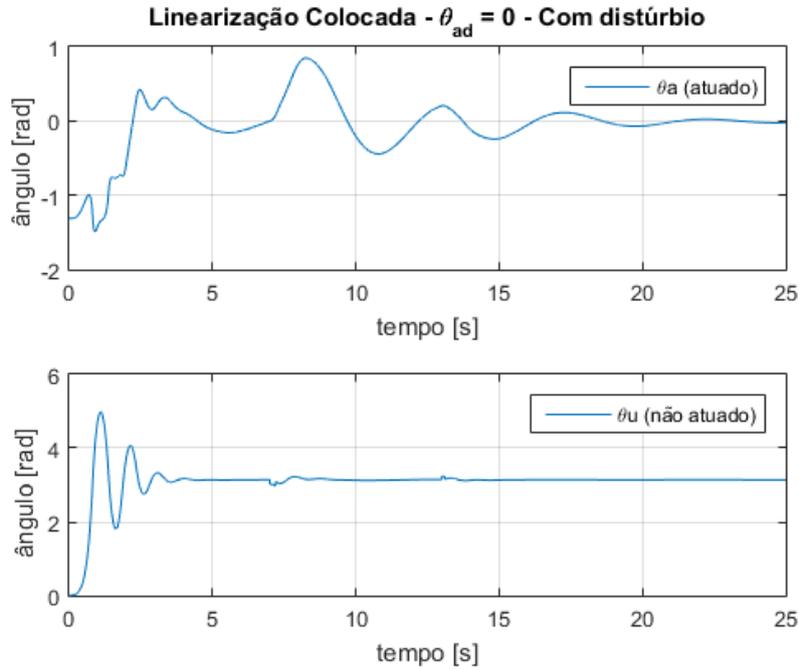


Figura 4.5: Distúrbio na junta não-atuada

Para fins de comparação, a Figura 4.6 ilustra o caso do pêndulo sujeito às mesmas condições iniciais, porém, agora sem ação de controle. Vale lembrar que, ao contrário do usual, a posição vertical para cima corresponde a medição $\theta_u = 0$ e a posição vertical para baixo $\theta_u = \pi$.

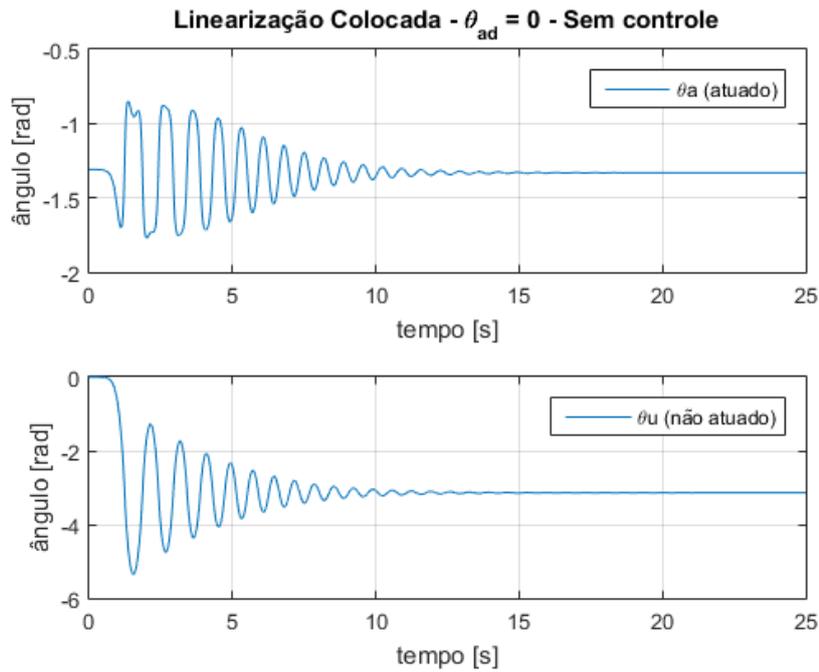


Figura 4.6: Sem ação de controle

O que se pode notar é que, sem ação de controle, o pêndulo tende a oscilar mais, tanto na junta atuada quanto na junta não atuada, tal que as oscilações são cessadas em aproximadamente 15s. Além disso, a posição angular da junta atuada oscila em torno da posição inicial e a posição da junta não-atuada, como esperado, oscila em torno de π (180°), isto é, em torno da posição vertical para baixo.

4.3.2 Simulação da Linearização Não-Colocada

Foram feitas quatro simulações para fazer a demonstração da linearização não-colocada, onde é possível notar os efeitos de eventuais distúrbios, efeitos de ruídos de medição e até os efeitos conjuntos. Mais uma vez, a ideia era fazer com que a junta em questão (nesse caso, a junta não-atuada) siga a posição desejada $\theta_{u_d} = 0$, em um problema de regulação.

As condições iniciais foram definidas iguais para as quatro simulações e podem ser vistas na Equação (4.22).

$$\begin{bmatrix} \theta_{a_0} \\ \dot{\theta}_{a_0} \\ \theta_{u_0} \\ \dot{\theta}_{u_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

onde as posições angulares estão dadas em radianos e as velocidades angulares em radiano por segundo.

Na primeira simulação não foram adicionados efeitos de distúrbio e de ruído de medição. O resultado pode ser visto na Figura 4.7. Observa-se que o controle é capaz de equilibrar o pêndulo na posição vertical sem maiores problemas.

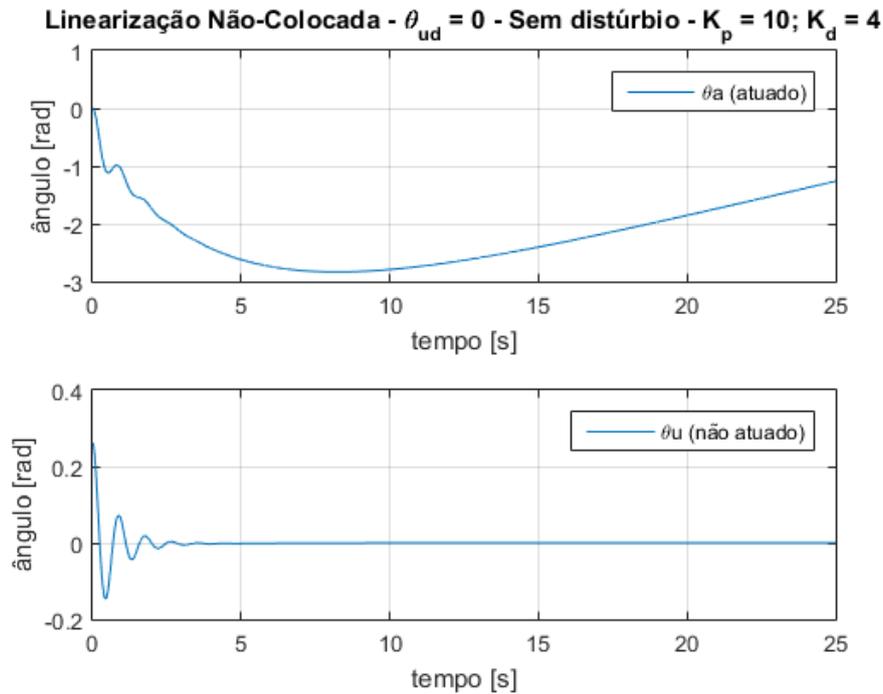


Figura 4.7: Sem distúrbio e sem ruído.

Na segunda simulação foram adicionados alguns distúrbios na junta não-atuada nos instantes $t = 7s$ e $t = 13s$. Mais uma vez, os distúrbios foram dados em forma de degraus na medida da posição angular da junta não-atuada. O resultado pode ser visto na Figura 4.8. Nota-se que o controle é capaz de reagir aos distúrbios e levar o pêndulo novamente à posição de equilíbrio instável.

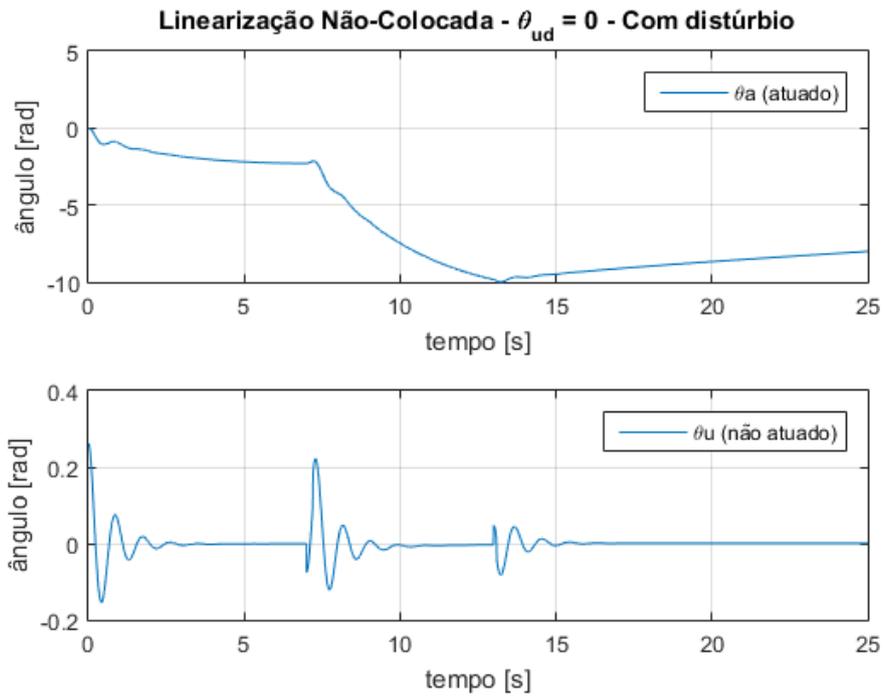


Figura 4.8: Distúrbio na junta não-atuada

Na terceira simulação foi adicionado o efeito de ruído de medição. Para simular um ruído, foi adicionado um sinal de ruído branco de média zero na medição da posição da junta não-atuada. O resultado é mostrado na Figura 4.9. Pode-se observar que o pêndulo fica oscilando em torno da posição zero com frequência alta devido os efeitos do ruído. Essa amplitude de oscilação é de aproximadamente $\pm 0.05 \text{ rad}$ ($\pm 3^\circ$), no entanto, ainda assim o controle é capaz de equilibrar o pêndulo.

Linearização Não-Colocada - $\theta_{ud} = 0$ - Sem distúrbio; Com ruído de medição

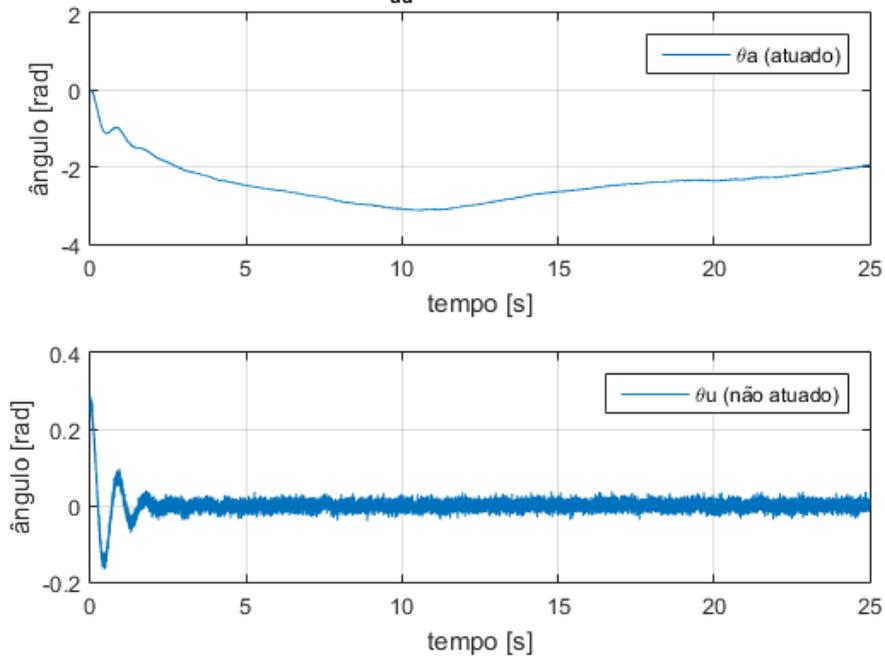


Figura 4.9: Com ruído de medição dos ângulos das duas juntas.

Por último, foi considerado o efeito conjunto de ruído de medição e distúrbios. O resultado dessa simulação é vista na Figura 4.10. Como nos outros casos, o pêndulo é equilibrado sem muitas dificuldades e o controle é capaz de rejeitar distúrbios.

Linearização Não-Colocada - $\theta_{ud} = 0$ - Com distúrbio; Com ruído de medição

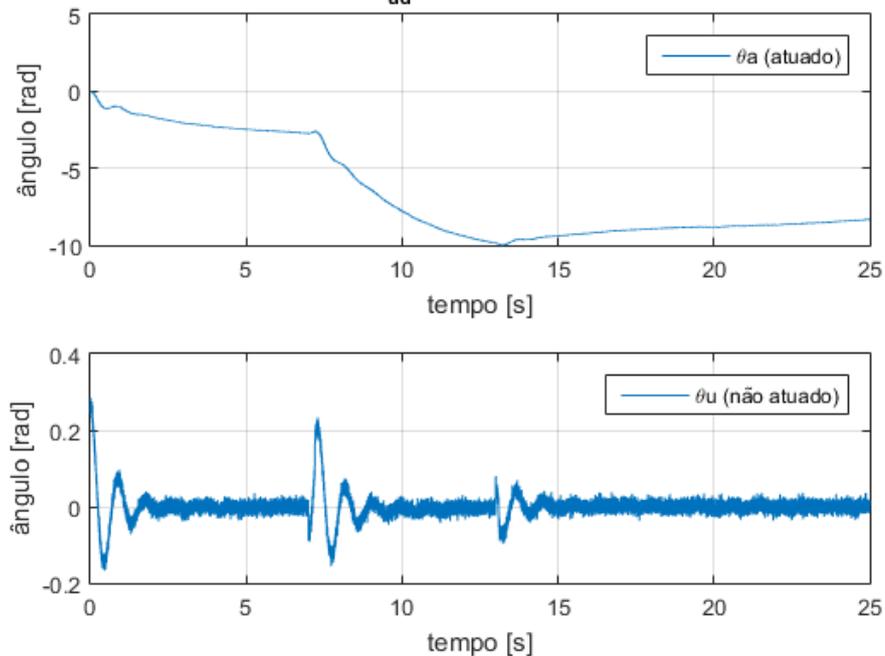


Figura 4.10: Distúrbio na junta não-atuada e ruído de medição.

Os efeitos do ruído de medição no modelo real são minimizados pelo fato de que as posições angulares são obtidas através de encoders, no entanto, poderiam também ser utilizados potenciômetros e, neste caso, o ruído de medição teria efeitos mais significativos.

Os efeitos do ruído podem ser minimizados utilizando de um filtro passa-baixas de primeira ordem na medição das posições das juntas.

4.4 Conclusão

Neste capítulo foi abordada a técnica de linearização parcial por realimentação, que pode ser subdividida em duas vertentes: linearização colocada e linearização não-colocada. Foram realizadas simulações no modelo do pêndulo invertido rotacional de modo a validar a teoria apresentada.

Capítulo 5

Controle SIDA-PBC

Esse capítulo apresenta a teoria desenvolvida em (Donaire et al. 2016b) designada por *Simultaneous Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control* (SIDA-PBC). Em contraste com a metodologia IDA-PBC, onde o procedimento de projeto é feito em duas etapas chamadas *energy-shaping* e *damping injection*, nesta nova formulação as duas etapas são carregadas simultaneamente.

5.1 Controle SIDA-PBC com Forças Dissipativas

Em (Donaire et al. 2016b) investiga-se a possibilidade de se estender o domínio de aplicações da metodologia IDA-PBC considerando uma classe mais geral de forças externas. Propõem-se substituir a dinâmica do sistema Σ_d em (2.14) por

$$\Sigma_T : \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & M^{-1}(q)M_d(q) \\ -M_d(q)M^{-1}(q) & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \nabla H_d(q, p) + \begin{bmatrix} 0 \\ C(q, p) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

onde $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função mapeamento a ser definida, a qual referimos como *força dissipativa*.

Assim, como demonstrado na seção 2.2.2, para garantir que a função energia H_d é uma função de Lyapunov do sistema em malha fechada, isto é, $\dot{H}_d \leq 0$, a função mapeamento C deve satisfazer a condição¹

$$p^T M_d^{-1} C \leq 0. \quad (5.2)$$

Nota-se que, para uma escolha particular de C , tal que $C = J_2 M_d^{-1} p$, os sistemas Σ_d e Σ_T coincidem. Desta forma, é possível notar que ao considerar essas forças mais gerais o conjunto de comportamento dinâmico desejado da malha fechada pode ser estendido.

¹A demonstração é feita no Apêndice A: Algumas demonstrações.

Igualando o lado direito das Equações (2.13) e (5.1) obtêm-se a nova forma das *matching equations*

$$-\frac{1}{2}\nabla_q(p^T M^{-1}p) - \nabla V + Bu = -M_d M^{-1} \left[\frac{1}{2}\nabla_q(p^T M_d^{-1}p) + \nabla V_d \right] + C \quad (5.3)$$

Assim, as Equações Diferenciais Parciais com respeito à Energia Cinética (2.22) se tornam

$$B^\perp \{ \nabla_q(p^T M^{-1}p) - M_d M^{-1} \nabla_q(p^T M_d^{-1}p) + 2C \} = 0_s \quad (5.4)$$

Vale notar que, como as Equações Diferenciais Parciais com respeito à Energia Potencial são independentes do momento (p -independentes), a Equação (2.23) permanece inalterada.

Avaliando a Equação (5.4), pode-se destacar duas observações importantes com respeito a C .

1. C pode ser sempre expressada na forma

$$C(q, p) = \Lambda(q, p) M_d^{-1}(q) p. \quad (5.5)$$

desde que $C(q, 0) = 0_s$, para alguma função de mapeamento $\Lambda : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$.

2. Em contraste com J_2 , que é linear em p , C deve ser quadrática em p . Desta forma, por conveniência e sem perda de generalidade, define-se

$$2C(q, p) = \sum_{i=1}^n (p^T M_d^{-1}(q) Q_i(q) M_d^{-1}(q) p) e_i \quad (5.6)$$

onde $Q_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes de escolha livre.

Portanto, analisando as duas observações citadas, têm-se que

$$\Lambda(q, p) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i p^T M_d^{-1}(q) Q_i(q). \quad (5.7)$$

A partir da Equação (5.5), o sistema em malha fechada Σ_T pode ser reescrito como

$$\Sigma_T : \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & M^{-1}(q) M_d(q) \\ -M_d(q) M^{-1}(q) & \Lambda(q, p) \end{bmatrix} \nabla H_d(q, p), \quad (5.8)$$

Uma outra consequência dessa nova formulação é a respeito da condição de estabilidade. Assim, a condição de estabilidade dada por (5.2) é reescrita como

$$p^T M_d^{-1}(q) \Lambda(q, p) M_d^{-1}(q) p \leq 0. \quad (5.9)$$

Como a matriz de inércia desejada $M_d(q)$ é positiva-definida, então para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada lançamos mão de uma condição *suficiente*, no entanto *não necessária*, de que

$$\Lambda + \Lambda^T \leq 0. \quad (5.10)$$

Por outro lado, com essa nova formulação, é fácil mostrar que a Equação (5.4) pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^n [(v_k^T M_d M^{-1} e_i) \nabla_{q_i} M_d - (v_k^T e_i) M_d \nabla_{q_i} M^{-1} M_d] = - \sum_{i=1}^n e_i v_k^T Q_i(q), \quad (5.11)$$

onde $k \in \bar{s}, \bar{s} := \{1, \dots, s\}$

E a lei de controle u toma a forma

$$u = (B^T B)^{-1} B^T \{ \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + \Lambda M_d^{-1} p \}. \quad (5.12)$$

Para finalizar esta seção, é feita uma proposição (Donaire et al. 2016b) acerca da estabilidade do sistema em malha fechada, a qual será explorada mais afundo nas seções seguintes:

Proposição: Considerando o sistema mecânico sub-atuado, descrito pela Equação (2.13), em malha fechada com o controle dado pela Equação (5.12), de tal maneira que as seguintes condições são satisfeitas:

- H_d e Λ são dados pelas Equações (2.15) e (5.7), respectivamente.
- M_d e Λ satisfazem a condição de estabilidade imposta pela Equação (5.9)
- M_d , V_d e Q satisfazem as matching equations definidas pelas Equações (2.23) e (5.11)
- M_d é positivo-definida e V_d satisfaz a Equação (2.16)

O sistema em malha fechada assume a forma dada pela Equação (5.8) e tem um ponto de equilíbrio globalmente estável no ponto desejado $(q, p) = (q^, 0)$, com função de Lyapunov H_d . O ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável se*

$$y_D := (\Lambda + \Lambda^T)^{\frac{1}{2}} M_d^{-1} p$$

é uma saída detectável do sistema em malha fechada.

A prova dessa proposição segue a prova apresentada em (Ortega et al. 2002) acerca da estabilidade da metodologia IDA-PBC.

Desta forma, pode-se concluir com a seguinte definição (Donaire et al. 2016b):

Definição: Uma lei de controle $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ para um sistema mecânico descrito pela Equação (2.13) é dito SIDA-PBC com forças dissipativas se as condições apresentadas na proposição acima são satisfeitas e se a seguinte identidade se mantém

$$-\nabla_q H(q, p) + B(q)u(q, p) = -M_d(q)M^{-1}(q)\nabla_q H_d(q, p) + \Lambda(q, p)M_d^{-1}(q)p \quad (5.13)$$

5.2 Aplicação no Pêndulo Invertido

No trabalho apresentado por (Donaire et al. 2016a)(Donaire et al. 2016a) é proposta uma lei de controle a qual satisfaz, em malha fechada com certa classe de sistemas mecânicos, a função de Lyapunov dada pela Equação (2.15), no entanto, essa mesma lei de controle não satisfaz as *matching equations* dadas pela Equação (2.20), portanto, a mesma não pertence a classe IDA-PBC. Por outro lado, é possível provar que essa lei de controle satisfaz a Equação (5.13), provando, assim, que pertence a classe SIDA-PBC com forças dissipativas.

O projeto da lei de controle segue duas etapas bem definidas (Donaire et al. 2016a). A primeira consiste na aplicação da técnica de linearização parcial por realimentação, apresentada no Capítulo 4, e a segunda etapa consiste na identificação das condições sobre a matriz de inércia e a função energia potencial que garantam que a estrutura Lagrangiana é preservada, seguida do projeto de um controlador proporcional-integral, o qual atua sobre duas novas saídas passivas.

Considerando o sistema pêndulo + motor DC, as equações dinâmicas que descrevem o sistema são dadas pelas Equações (4.4) e (4.5):

$$\begin{aligned} m_{aa}(\theta_u)\ddot{\theta}_a + m_{au}(\theta_u)\ddot{\theta}_u + c_{aa}\dot{\theta}_a + c_{au}\dot{\theta}_u + g_1 &= v_1 \\ m_{au}^T(\theta_u)\ddot{\theta}_a + m_{uu}(\theta_u)\ddot{\theta}_u + c_{ua}\dot{\theta}_a + c_{uu}\dot{\theta}_u + g_2 &= 0 \end{aligned}$$

No Capítulo 4 foi visto que, aplicada a técnica de linearização parcial colocada, o sistema pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_a &= v \\ m_{uu}(\theta_u)\ddot{\theta}_u + [0_{(n-m) \times m} \quad I_{n-m}]C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \nabla_u V(\theta) &= -m_{au}^T(\theta_u)v, \quad (5.14) \end{aligned}$$

onde $\nabla_u V(\theta) = \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta_u}$, $n = 2$ e $m = 1$.

A lei de controle empregada é dada pela Equação (4.9)

$$v_1 = \bar{m}_{aa}v + \bar{c} + \bar{g},$$

onde \bar{m}_{aa} , \bar{c} e \bar{g} são definidos por (4.11) e v é um sinal de controle a ser definido. Esse sinal de controle é definido na segunda etapa de desenvolvimento, como mencionado anteriormente.

No trabalho apresentado por (Sarras et al. 2013) (Sarras et al. 2013), é proposto que o sistema (5.14) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_a &= v \\ m_{uu}(\theta_u)\ddot{\theta}_u + c_{uu}\dot{\theta}_u + \nabla_u V_u(\theta_u) &= -m_{au}^T(\theta_u)v \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde a propriedade chave de anti-simetria

$$\dot{m}_{uu}(\theta_u) = c_{uu}(\theta_u, \dot{\theta}_u) + c_{uu}^T(\theta_u, \dot{\theta}_u)$$

é satisfeita. Aqui é usada a proposição de que a energia potencial do sistema $V(\theta)$ pode ser expressada como $V(\theta) = V_a(\theta_a) + V_u(\theta_u)$.

Desta forma, o sistema satisfaz as equações de Euler-Lagrange (Donaire et al. 2016a), com o *Lagrangiano* definido por:

$$\tilde{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a^T & \dot{\theta}_u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & m_{uu}(\theta_u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_u \end{bmatrix} - V_u(\theta_u) \quad (5.16)$$

e a matriz de entrada:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} I_m \\ -m_{au}^T(\theta_u) \end{bmatrix}$$

A proposição apresentada em (Sarras et al. 2013), no entanto, requer que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. A matriz de inércia do sistema é função apenas da coordenada não-atuada e a submatriz m_{aa} é constante.

2. As linhas da sub-matriz $m_{au}(\theta_u)$ satisfazem

$$\nabla(m_{au})^i = [\nabla(m_{au})^i]^T, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Isto é, as linhas de $m_{au}(\theta_u)$ formam um campo vetorial gradiente, o qual é equivalente a existência de uma função $V_N : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\dot{V}_N(\theta_u) = -m_{au}(\theta_u)\dot{\theta}_u \quad (5.17)$$

3. A função energia potencial é função apenas da coordenada não-atuada.

A função *Hamiltoniana* (ou função armazenamento) que determina a energia total do sistema é dada por

$$\tilde{H}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a^T & \dot{\theta}_u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & m_{uu}(\theta_u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_u \end{bmatrix} + V_u(\theta_u) \quad (5.18)$$

Pode-se tratar a função armazenamento como uma soma de outras duas funções, uma dependente apenas de $\dot{\theta}_a$ e outra dependente de θ_u e $\dot{\theta}_u$, como nas Equações (5.19) e (5.20) abaixo:

$$\tilde{H}_a = \frac{1}{2} \|\dot{\theta}_a\|^2 \quad (5.19)$$

$$\tilde{H}_u = \frac{1}{2} \dot{\theta}_u^T m_{uu}(\theta_u) \dot{\theta}_u + V_u(\theta_u) \quad (5.20)$$

Derivando cada uma das equações acima citadas, têm-se

$$\dot{\tilde{H}}_a = \dot{\theta}_a^T \dot{\theta}_a \quad (5.21)$$

e,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{H}}_u &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{H}_u}{\partial \theta_u}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{H}_u}{\partial \dot{\theta}_u}\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_u \\ \ddot{\theta}_u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{\theta}_u^T \nabla_u^T m_{uu}(\theta_u) \dot{\theta}_u + \nabla_u^T V_u & m_{uu}^T(\theta_u) \dot{\theta}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_u \\ \ddot{\theta}_u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{\theta}_u^T \dot{m}_{uu}^T + \nabla_u^T V_u & m_{uu}^T(\theta_u) \dot{\theta}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_u \\ \ddot{\theta}_u \end{bmatrix} \\ &= c_{uu}^T \dot{\theta}_u + \nabla_u^T V_u \dot{\theta}_u + \ddot{\theta}_u m_{uu}^T \dot{\theta}_u \end{aligned} \quad (5.22)$$

Observa-se que a Equação (5.22) é equivalente, de acordo com a Equação (5.15), à

$$\dot{\tilde{H}}_u = -v^T m_{au}(\theta_u) \dot{\theta}_u \quad (5.23)$$

Consequentemente, a Equação (5.21) é equivalente à

$$\dot{\tilde{H}}_a = v^T \dot{\theta}_a \quad (5.24)$$

Portanto,

$$\dot{\tilde{H}} = v^T (\dot{\theta}_a - m_{au}(\theta_u) \dot{\theta}_u) \quad (5.25)$$

Desta forma, pode-se definir duas novas saídas $y_a := \dot{\theta}_a$ e $y_u := -m_{au}(\theta_u) \dot{\theta}_u$, e uma função mapeamento $v \mapsto \dot{\theta}_a - m_{au}^T(\theta_u) \dot{\theta}_u$ ciclo-passivas.

Então, para modificar a energia do sistema em malha aberta e atingir com maior flexibilidade a função de Lyapunov objetivo, é adicionada uma soma ponderada das funções armazenamento \tilde{H}_a e \tilde{H}_u juntamente com um controlador PI sobre uma soma ponderada das saídas ciclo-passivas.

A função armazenamento desejada, portanto, é escrita como segue

$$\begin{aligned} H_d(\theta, \dot{\theta}) &= k_e [k_a \tilde{H}_a(\dot{\theta}_a) + k_u \tilde{H}_u(\theta_u, \dot{\theta}_u)] \\ &+ \frac{1}{2} \|k_a y_a + k_u y_u\|_{K_k}^2 + \frac{1}{2} \|k_a \theta_a + k_u V_N(\theta_u)\|_{K_I}^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Derivando a função armazenamento no tempo, têm-se

$$\begin{aligned} \dot{H}_d &= k_e k_a v^T \dot{\theta}_a - k_e k_u v^T m_{au}(\theta_u) \dot{\theta}_u \\ &+ (k_a y_a + k_u y_u)^T \left[K_k (k_a v + k_u \dot{y}_u) + K_I \int (k_a y_a + k_u y_u) \right] \\ &= (k_a y_a + k_u y_u)^T \left[k_e v + K_k (k_a v + k_u \dot{y}_u) + K_I \int (k_a y_a + k_u y_u) \right] \\ &= (k_a y_a + k_u y_u)^T \left\{ (k_e I_m + k_a K_k + k_u K_k m_{au}(\theta_u) m_{uu}^{-1}(\theta_u) m_{au}^T(\theta_u)) v \right. \\ &\quad \left. + k_u K_k [-\dot{m}_{au} \dot{\theta}_u + m_{au} m_{uu}^{-1} (c_{uu} \dot{\theta}_u + \nabla_u V_u)] \right\} + K_I (k_a \theta_a + k_u V_N) \\ &= (k_a y_a + k_u y_u)^T [K(\theta_u) v + S(\theta, \dot{\theta})] \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para demonstrar o principal resultado, é necessário, então, que a seguinte suposição seja satisfeita:

Existem,

$$k_e, k_a, k_u \in \mathbb{R}, \quad K_k, K_I \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad K_k, K_I \geq 0$$

de modo que se pode definir uma função $K : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$

$$K(\theta_u) := k_e I_m + k_a K_k + k_u K_k m_{au}(\theta_u) m_{uu}^{-1}(\theta_u) m_{au}^T(\theta_u) \quad (5.28)$$

tal que,

1. $\det [K(\theta_u)] \neq 0, \quad \forall \theta_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$

2. A matriz

$$M_d(\theta_u) := \begin{bmatrix} k_e k_a I_m + k_a^2 K_k & -k_a k_u K_k m_{au}(\theta_u) \\ -k_a k_u m_{au}^T(\theta_u) K_k^T & k_e k_u m_{uu}(\theta_u) + k_u^2 m_{au}^T(\theta_u) K_k m_{au}(\theta_u) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

é positivo-definida e a função

$$V_d(\theta_u) := k_e k_u V_u(\theta_u) + \frac{1}{2} \|k_a \theta_a + k_u V_N(\theta_u)\|_{K_I}^2 \quad (5.30)$$

satisfaz $\theta^* = \operatorname{argmin} V_d(\theta)$ e o mínimo é isolado.

Assim, pode-se definir a lei de controle

$$v = -K(\theta_u)^{-1} [S(\theta, \dot{\theta}) + K_p (k_a y_a + k_u y_u)] \quad (5.31)$$

com $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $K_p > 0$.

Substituindo na Equação (5.27), têm-se que

$$\dot{H}_d = -\|k_a y_a + k_u y_u\|_{K_p}^2. \quad (5.32)$$

então, desta forma prova-se que a função energia total desejada $H_d(\theta, \dot{\theta})$ é uma função de Lyapunov.

Análise sobre a estabilidade do sistema

As equações dinâmicas do pêndulo invertido rotacional, no entanto, violam uma das condições propostas. É observado na Equação (3.32) que a sub-matriz m_{aa} não é constante, portanto, a Equação (5.15) não pode ser escrita da forma apresentada e o desenvolvimento sobre a função armazenamento desejada não segue a risca o que foi apresentado nesta seção. Entretanto, o desenvolvimento deste trabalho continua com o intuito, agora, de identificar a (possível) faixa de estabilidade que se pode ser conseguida com a aplicação do controle acima citado.

A análise sobre a região de estabilidade e atratividade do pêndulo para a posição desejada começa com a identificação das condições para que a matriz de inércia desejada $M_d(\theta_u)$ seja positivo-definida.

Para garantir que a matriz $M_d(\theta_u)$ seja positiva definida, uma condição suficiente é demonstrar que seus menores principais são ambos positivos. Desta forma, da Equação (5.29), têm-se que:

$$\det(M_{d_{11}}) = k_e k_a I_m + k_a^2 K_k > 0 \quad (5.33)$$

$$\det(M_d) = k_e k_a k_u (k_e m_{uu}(\theta_u) + k_u K_k m_{au}^2(\theta_u) + k_a K_k m_{uu}(\theta_u)) > 0 \quad (5.34)$$

Da análise da função energia potencial desejada V_d , têm-se que para que a posição $\theta_u = 0$ seja um mínimo, as seguintes equações devem ser satisfeitas:

$$\frac{\partial V_d(\theta_u)}{\partial \theta_u} = 0, \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial^2 V_d(\theta_u)}{\partial \theta_u^2} > 0. \quad (5.36)$$

Essas condições são satisfeitas quando,

$$k_e k_u < 0 \quad (5.37)$$

Por fim, deve-se garantir que o determinante da função $K(\theta_u) \neq 0$. Como o sistema é de ordem 2 e têm-se uma junta não-atuada ($n = 2$ e $m = 1$), a função $K(\theta_u)$ é escalar e, portanto, deve-se garantir que ela seja não-nula. Assim,

$$K(\theta_u) = k_e + k_a K_k + k_u K_k m_{au}^2(\theta_u) m_{uu}^{-1} \neq 0 \quad (5.38)$$

Desta forma, deve-se projetar os ganhos k_a , k_e , k_u , e K_k de forma que as Equações 5.33, 5.34, 5.37 e 5.38 sejam conferidas.

O projeto dos ganhos leva em conta duas suposições. A primeira é de que $k_e > 0$ e $k_u < 0$, satisfazendo, assim, a Equação (5.37). A segunda suposição é de que o ganho K_k é proporcional ao ganho k_e pela relação $K_k = \alpha k_e$, onde α é um valor a ser determinado.

Assim, a inequação (5.38) é reescrita como,

$$1 + \alpha (k_a + k_u m_{au}^2(\theta_u) m_{uu}^{-1}) \neq 0 \quad (5.39)$$

Para fins de projeto, é considerado que $m_{au}(\theta) = -m_2 r_2 l_1 \cos(\theta_u)$ é constante e igual a $m_{au} = m_2 r_2 l_1$. Assim, a Equação (5.39) é reescrita como

$$\begin{aligned} k_a + 0.004 k_u &\neq \frac{-1}{\alpha} \\ \Rightarrow k_u &\neq (0.004)^{-1} \left(\frac{-1}{\alpha} - k_a \right) \\ \Rightarrow k_u &\neq -250 \left(\frac{1 + \alpha k_a}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Por uma convenção adotada, considerou-se que $k_u > -250 \left(\frac{1+\alpha k_a}{\alpha} \right)$.

Os valores de α e k_a foram retirados do gráfico da função $K(\theta_u)$ considerando que $k_u \approx -255$ e $K_k = \alpha k_e$. Além disso, o valor de k_e foi definido igual a 1, de modo a facilitar o cálculo dos ganhos que satisfaçam as inequações impostas. Assim, foram encontrados valores para k_a e α , tais que o valor da função $K(\theta_u)$ é negativo. Os valores selecionados foram $k_a = 3$ e $\alpha = 3$. Portanto,

$$k_u > -250 \left(\frac{1+3 \times 3}{3} \right) = -833.33 \quad (5.41)$$

Assim, os ganhos projetados são:

$$k_e = 1, \quad (5.42)$$

$$k_a = 3, \quad (5.43)$$

$$K_k = 3, \quad (5.44)$$

$$k_u = -800. \quad (5.45)$$

Vale notar que esses ganhos foram projetados considerando que $\theta_u = 0$. É fácil mostrar que não é possível encontrar uma solução que satisfaça o conjunto de inequações para todo o espaço de estados ($\theta_u \in [-\pi, \pi]$), sendo possível, teoricamente, apenas para $\theta_u \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$. A próxima seção, no entanto, têm o intuito de mostrar os resultados do controle com os ganhos projetados e identificar qual a faixa para θ_u onde a estabilidade no ponto de equilíbrio desejado é conferida.

5.2.1 Simulações

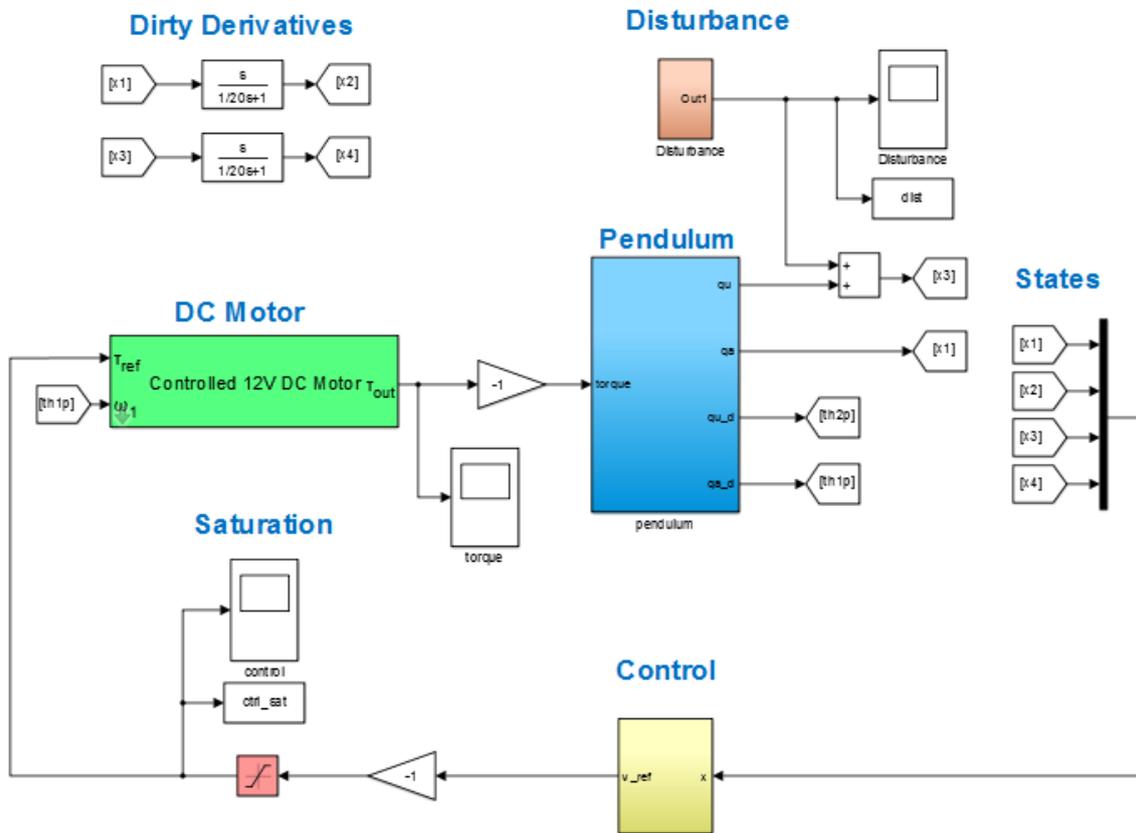


Figura 5.1: Sistema em malha fechada com controle SIDA-PBC implementado em Simulink®.

Com os ganhos k_a , k_e , k_u e K_k definidos, basta agora projetar os ganhos K_p e K_I . Foi visto que os ganhos K_p e K_I deveriam satisfazer a condição de serem maiores do que zero, desta forma, iniciou-se a tentativa de estabilização definindo $K_p = 1$ e $K_I = 1$ com condições iniciais definidas por $[\theta_a \ \theta_u \ \dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_u]^T = [0 \ \frac{\pi}{12} \ 0 \ 0]^T$. No entanto, foi notado que os ganhos não foram suficientes para manter o pêndulo equilibrado. Assim, alguns ganhos foram testados chegando, finalmente, aos valores de $K_p = 10$ e $K_I = 10$. Os resultados das simulações podem ser conferidos abaixo. Vale notar que foram adicionados efeitos de distúrbios nos instantes $t = 7s$, $t = 13s$ e $t = 21s$.

Inicialmente, foram testados os resultados de simulações cujas condições iniciais para velocidade eram nulas, assim como para a posição da junta atuada, e condições iniciais da junta não-atuada definidas por $\theta_u = -\frac{\pi}{12}$ rad (-15°) e $\theta_u = \frac{\pi}{6}$ rad (30°). Os resultados são vistos nas Figuras 5.2 e 5.3. Observa-se que o controle é capaz de equilibrar o pêndulo sem maiores problemas.

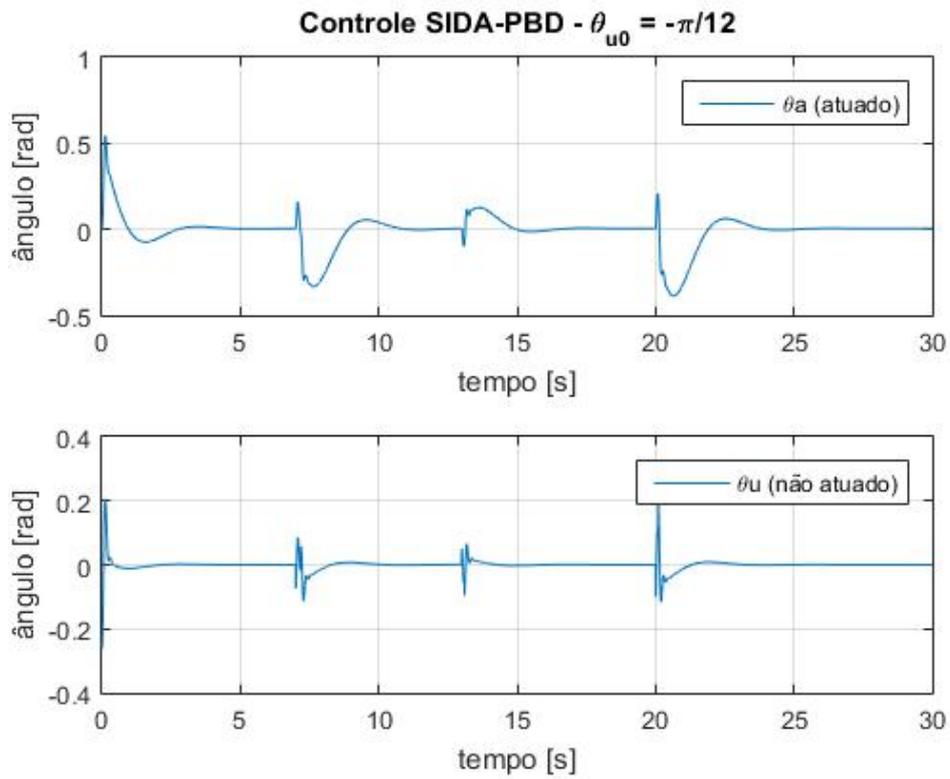


Figura 5.2: Teste do controle com condições iniciais $[\theta_a \ \theta_u \ \dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_u]^T = [0 \ \frac{\pi}{12} \ 0 \ 0]^T$

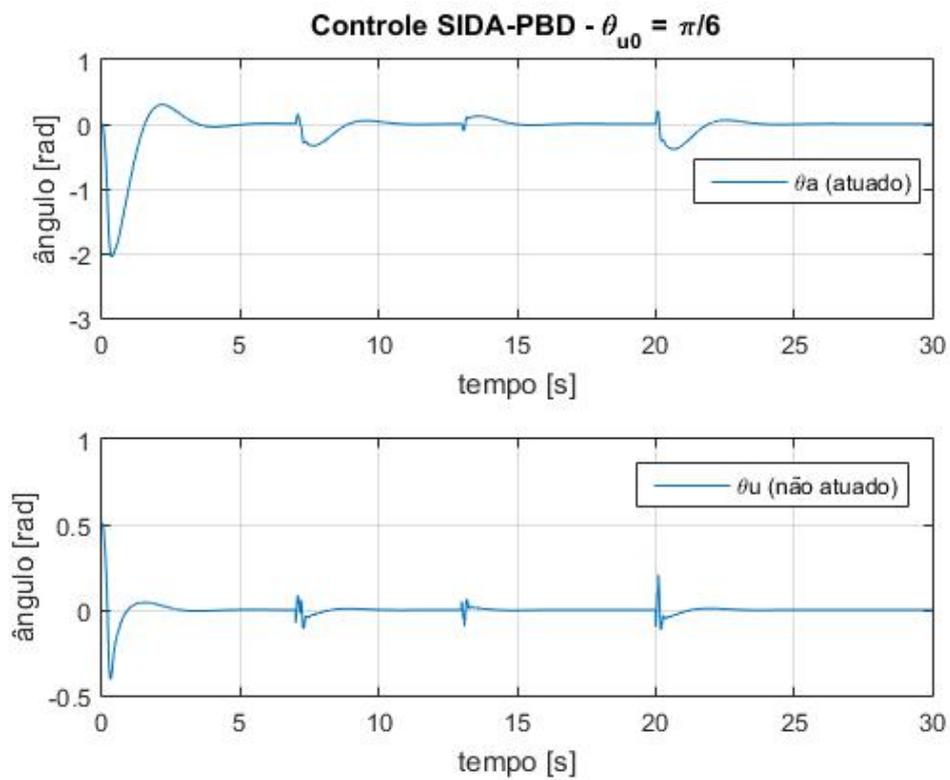


Figura 5.3: Teste do controle com condições iniciais $[\theta_a \ \theta_u \ \dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_u]^T = [0 \ \frac{\pi}{6} \ 0 \ 0]^T$

Para identificar a faixa de valores de condição inicial para a junta não-atuada tal que o sistema estabiliza na posição vertical apontado para cima, foram testados os ângulos $\theta_u = \frac{\pi}{4}\text{rad}$ (45°), onde já não foi possível estabilizá-lo, e $\theta_u = \frac{\pi}{5}\text{rad}$ (36°), também sem sucesso, como pode ser visto nas Figuras 5.4 e 5.5.

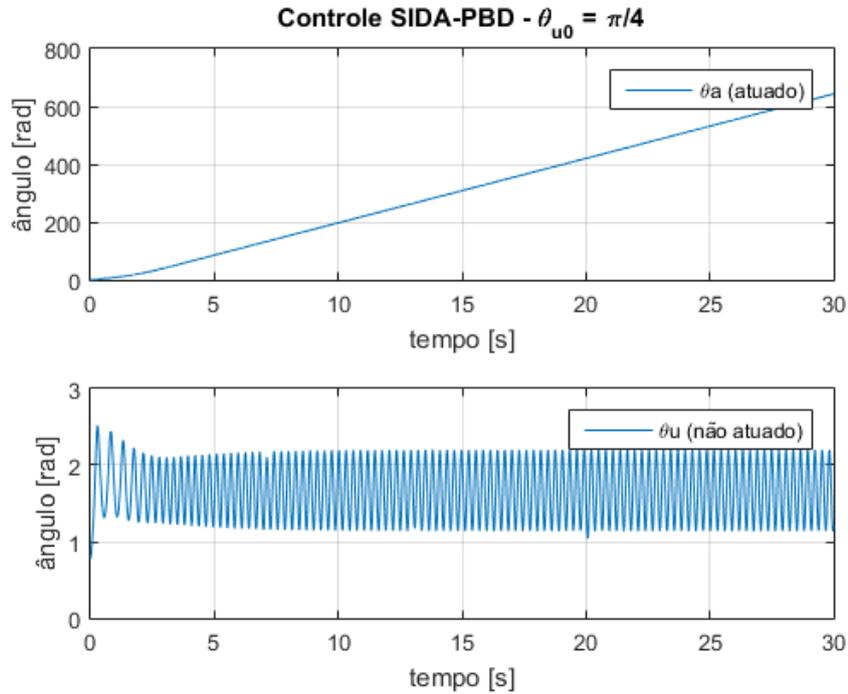


Figura 5.4: Teste do controle com condições iniciais $[\theta_a \ \theta_u \ \dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_u]^T = [0 \ \frac{\pi}{4} \ 0 \ 0]^T$

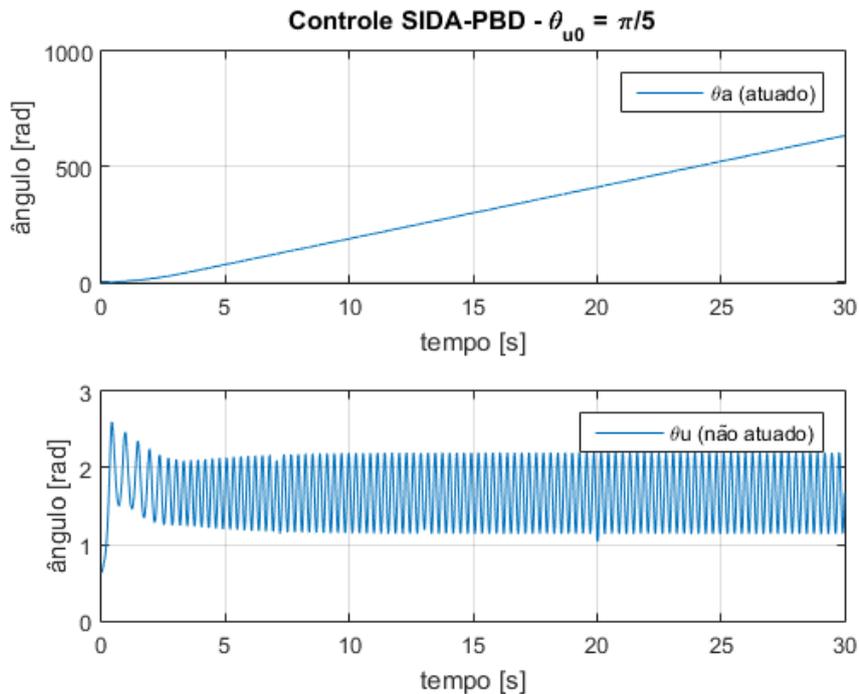


Figura 5.5: Teste do controle com condições iniciais $[\theta_a \ \theta_u \ \dot{\theta}_a \ \dot{\theta}_u]^T = [0 \ \frac{\pi}{5} \ 0 \ 0]^T$

Resultados posteriores demonstraram que o limiar da região de atratividade está na faixa de $|\frac{\pi}{6}|$ rad. Assim, pode-se dizer que o controle SIDA-PBC aplicado a um pêndulo invertido rotacional cujos parâmetros são iguais aos definidos neste trabalho garante uma estabilidade local para $\theta_u \in (-30^\circ, 30^\circ)$.

5.2.2 Implementação



Figura 5.6: Pêndulo de Furuta sob ação do controle SIDA-PBC.

O controle projetado no decorrer desse capítulo foi implementado em laboratório no modelo real do pêndulo invertido rotacional desenvolvido pela Quanser. Os equipamentos utilizados no experimento são detalhados na seção **Set-Up do Experimento** e os resultados obtidos são vistos na seção **Resultados Experimentais**. Além disso, é feita uma comparação com um controle LQR.

Set-Up do Experimento

O experimento foi realizado utilizando um computador com Matlab versão R2014a e com a ferramenta QUARC® Real-Time Control Software instalados. Esta ferramenta possibilita gerar código em tempo real diretamente de controladores projetados no Simulink e que rodam em tempo real na placa de aquisição e escrita de dados. O controlador foi, portanto, desenvolvido no Simulink® e sua implementação pode ser vista no Apêndice B, seção B.2.

A planta é composta, basicamente, de duas partes, todas desenvolvidas pela *Quanser Inc.* A primeira é o *Rotary Servo Base Unit*, um servo-sistema engrenado composto de um motor DC, um encoder, um potenciômetro e um tacômetro. A segunda parte é o *Rotary Inverted Pendulum Module*, que consiste em um braço plano de metal, um pêndulo e um encoder. O braço é acoplado na engrenagem na parte superior do *Rotary Servo Base Unit*, onde na outra extremidade fica o pêndulo, sem atuação em seu eixo de rotação. As duas partes são vistas separadamente nas Figuras 5.7 e 5.8 e o sistema montado é visto na Figura 5.9.



Figura 5.7: Rotary Servo Base Unit.

Fonte: Quanser.com ²



Figura 5.8: Rotary Inverted Pendulum Module.

Fonte: Quanser.com ³



Figura 5.9: Rotary Inverted Pendulum.

Fonte: Quanser.com ⁴

²Disponível em: <http://www.quanser.com/products/rotary_servo>. Acessado em jan. 2017.

³Adaptado de: <http://www.quanser.com/products/rotary_pendulum>. Acessado em nov. 2016.

⁴Disponível em: <http://www.quanser.com/products/rotary_pendulum>. Acessado em nov. 2016.

A placa de aquisição e escrita de dados é o modelo *Q8 Data Acquisition Board*, também produzida pela Quanser Inc e pode ser vista na Figura 5.10. Essa placa é equipada com 8 canais de entrada analógicos $\pm 10V$, 8 canais de saída analógicos $\pm 10V$ (bipolar) ou 0 – 10V (unipolar), 8 entradas para encoders, 32 linhas de entrada e saída digitais e 2 saídas PWM. Essa placa recebe os dados dos encoders e envia para o Simulink; e envia o sinal de controle vindo do Simulink por uma de suas saídas analógicas para o drive de potência.

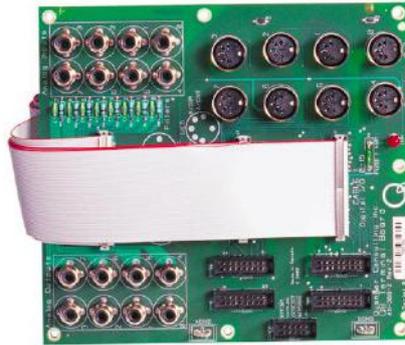


Figura 5.10: Q8 Data Acquisition Board.

Fonte: Quanser.com ⁵

O drive amplificador de potência utilizado é o *Universal Power Module 15-03*, modelo produzido pela Quanser Inc. Esse equipamento conta com uma saída analógica $\pm 15V$ e corrente máxima contínua de 3A, cujo ganho é linear e é definido pela escolha do cabo. Melhor dizendo, o cabo faz uma realimentação no amplificador operacional que amplifica o sinal analógico de entrada, então, dependendo do valor de resistência dos resistores do cabo, o ganho é modificado. O cabo utilizado proporcionou ganho unitário. O *Universal Power Module 15-03* pode ser visto na Figura 5.11.



Figura 5.11: Universal Power Module 1503.

Fonte: Ece.usu.edu ⁶

⁵Disponível em: <<http://www.quanser.com/products/q8>>. Acessado em jan. 2017.

⁶Disponível em: <http://www.ece.usu.edu/ece_store/equip_detail.php?id=33>. Acessado em jan. 2017.

Resultados Experimentais

O resultado do experimento com o controle SIDA-PBC aplicado no pêndulo invertido é mostrado nas Figuras 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15. As duas primeiras mostram a posição angular das juntas atuada e não-atuada e as outras duas mostram a velocidade angular das juntas atuada e não-atuada, respectivamente. Por segurança, a fim de evitar que o pêndulo pudesse instabilizar e se comportar como um "ventilador" caso algum erro ocorresse, foi aplicado um módulo de segurança no controle que o desliga caso a posição angular da junta não atuada ultrapasse o valor absoluto de $\frac{\pi}{4}$ rad. Além disso, o controle só é ligado após a junta não-atuada ultrapassar o valor de $\frac{\pi}{18}$ rad, como pode ser visto no Apêndice B, seção B.2.

Observa-se, na Figura 5.13, que o controle é capaz de estabilizar o pêndulo na posição vertical para cima mesmo sujeito a perturbações, e, além disso, a posição angular do pêndulo não ultrapassa em módulo o valor de 5° .

Vale notar que as velocidades angular das juntas foram calculadas por meio da derivada suja, como demonstrado na seção 4.3.

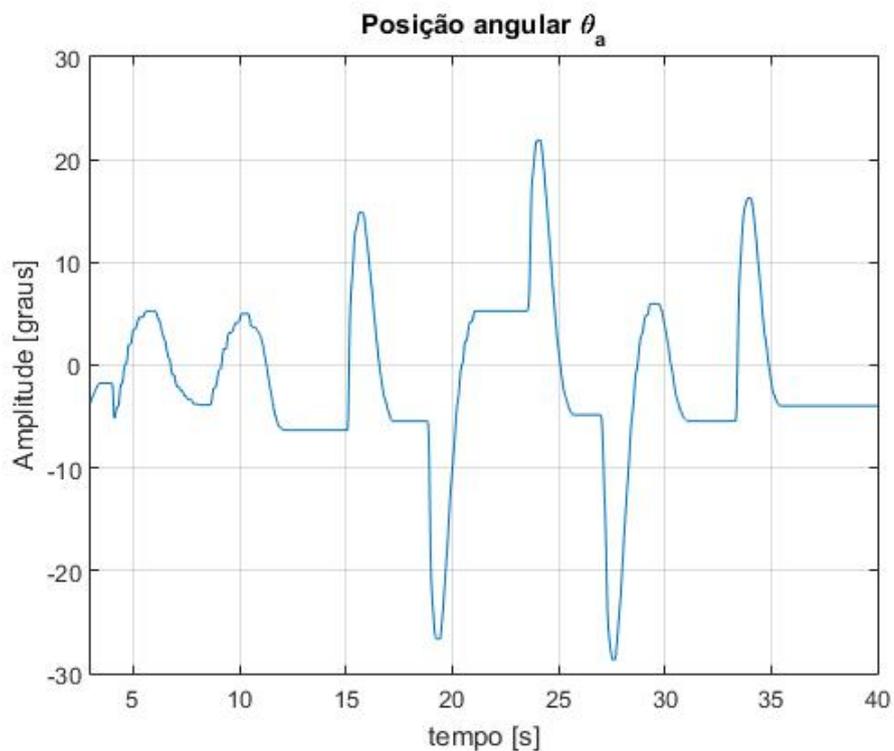


Figura 5.12: Controle SIDA-PBC - posição angular da junta atuada.

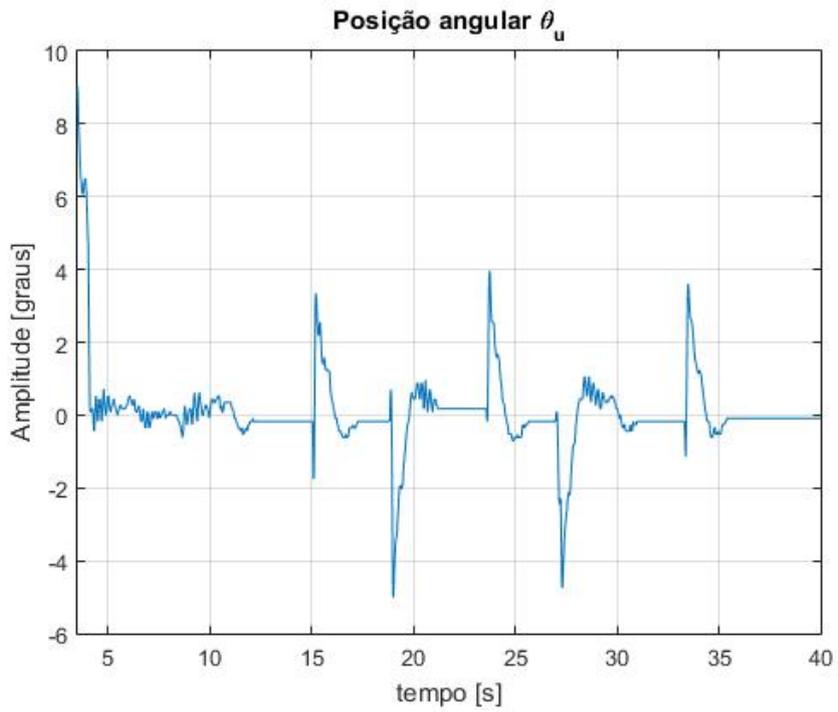


Figura 5.13: Controle SIDA-PBC - posição angular da junta não-atuada.

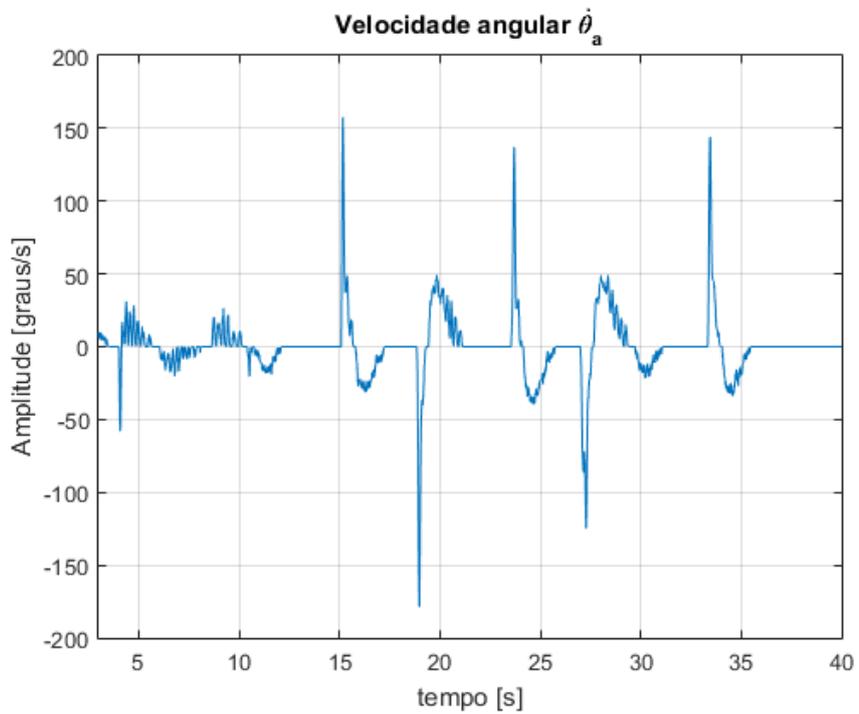


Figura 5.14: Controle SIDA-PBC - velocidade angular da junta atuada.

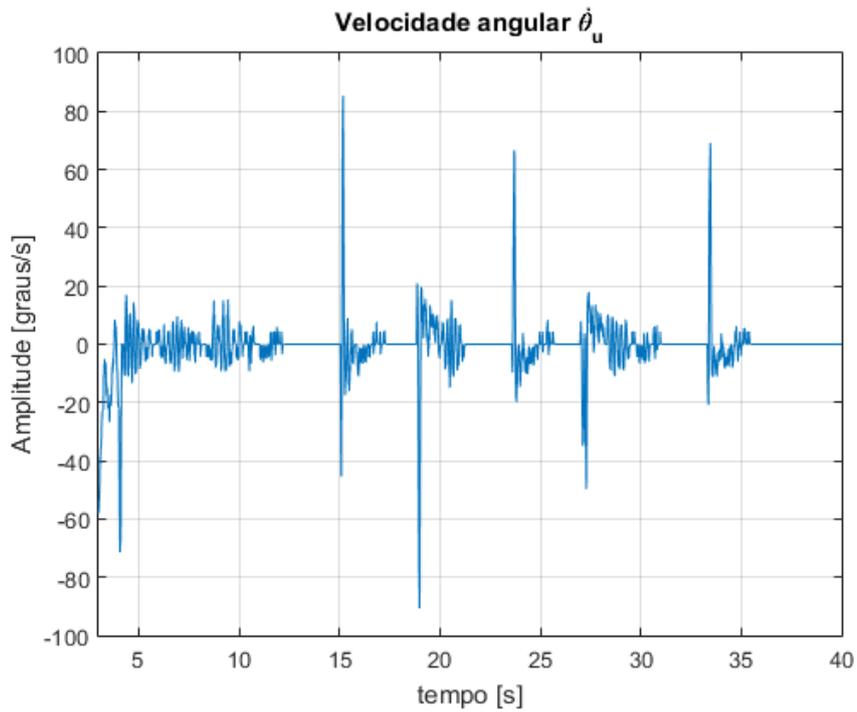


Figura 5.15: Controle SIDA-PBC - velocidade angular da junta não-atuada.

O sinal de controle é visto na Figura 5.16. Nota-se que o sinal de controle não ultrapassa ± 3 volts. O motor DC acoplado a junta pode receber sinal de tensão de até 15 volts, portanto, esse controle não requer um esforço prejudicial ao equipamento.

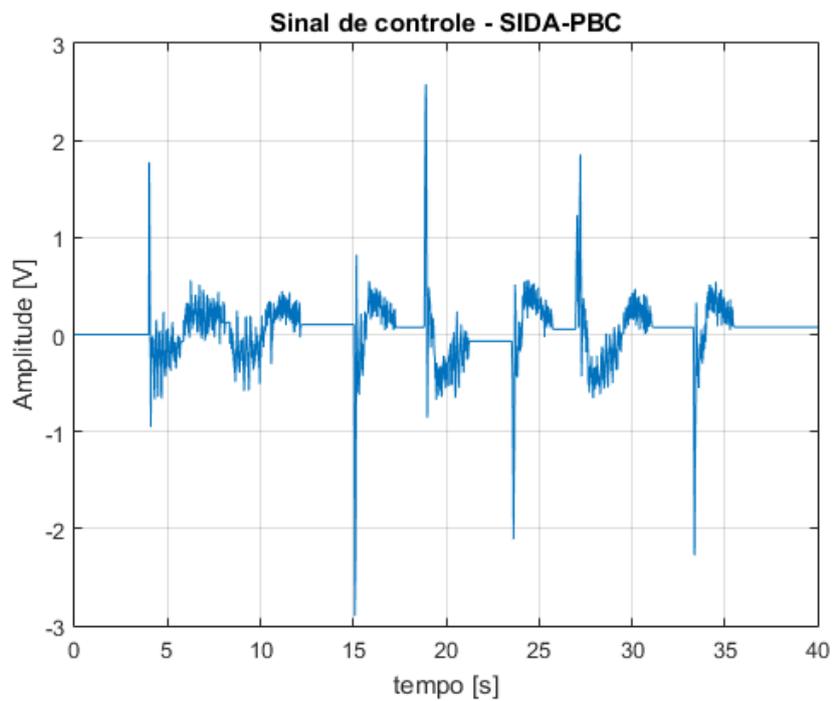


Figura 5.16: Sinal de controle - SIDA-PBC.

Para fins de comparação, foi projetado um controlador LQR, como pode ser visto no Apêndice C. Os dois sinais de controle, sujeitos ao mesmo teste, onde o sinal utilizado é o sinal de controle SIDA-PBC, são mostrados na Figura 5.17.

Apesar de não se poder fazer uma comparação qualitativa por se tratarem de duas estratégias de controle diferentes, onde a eficiência de cada um depende dos parâmetros escolhidos pelo projetista, vale destacar que os dois sinais são bastante parecidos.

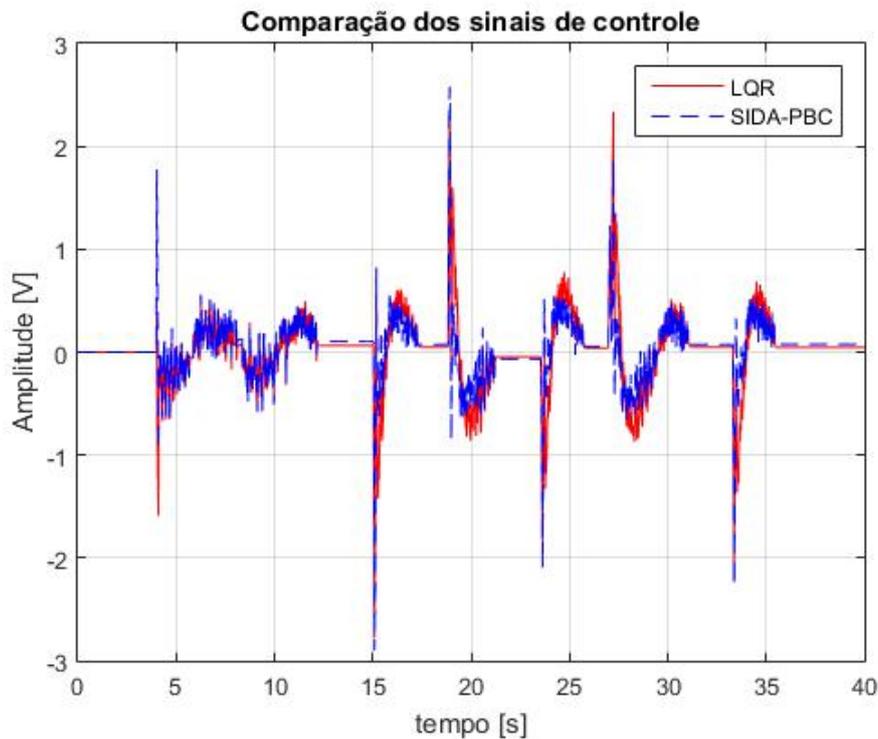


Figura 5.17: Comparação dos sinais de controle SIDA-PBC e LQR.

Por segurança e de modo a garantir a integridade dos equipamentos utilizados, não foi testado o limiar para o qual a posição angular da junta atuada deixar de ser atrativa e, portanto, o controle não é mais capaz de estabilizar o pêndulo na posição vertical para cima. No entanto, isto não altera em muito os resultados apresentados na simulação, onde foi mostrado que a região atrativa, na qual é garantida a estabilidade local, é definida por $\theta_u \in (-30^\circ, 30^\circ)$.

Para finalizar, foi testada também a estratégia de controle LQR. Tentou-se fazer um teste o mais parecido com o anterior possível, inclusive na aplicação das perturbações. Mais uma vez, esse teste não pode ser encarado como uma comparação qualitativa entre os dois controles, por se tratarem de estratégias diferentes, simulações diferentes e sintonia dos controladores dependentes da sensibilidade do projetista, no entanto, vale notar o comportamento das juntas atuada e, principalmente, da não-atuada. O resultado desse experimento pode ser visto nas Figuras 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21.

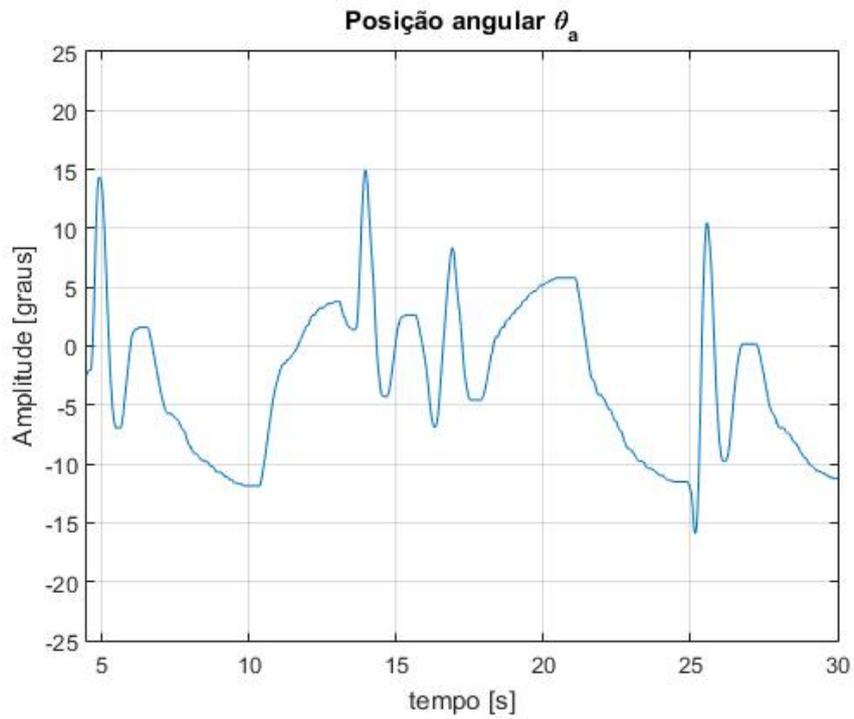


Figura 5.18: Pêndulo invertido rotacional com controle LQR - Posição angular θ_a .

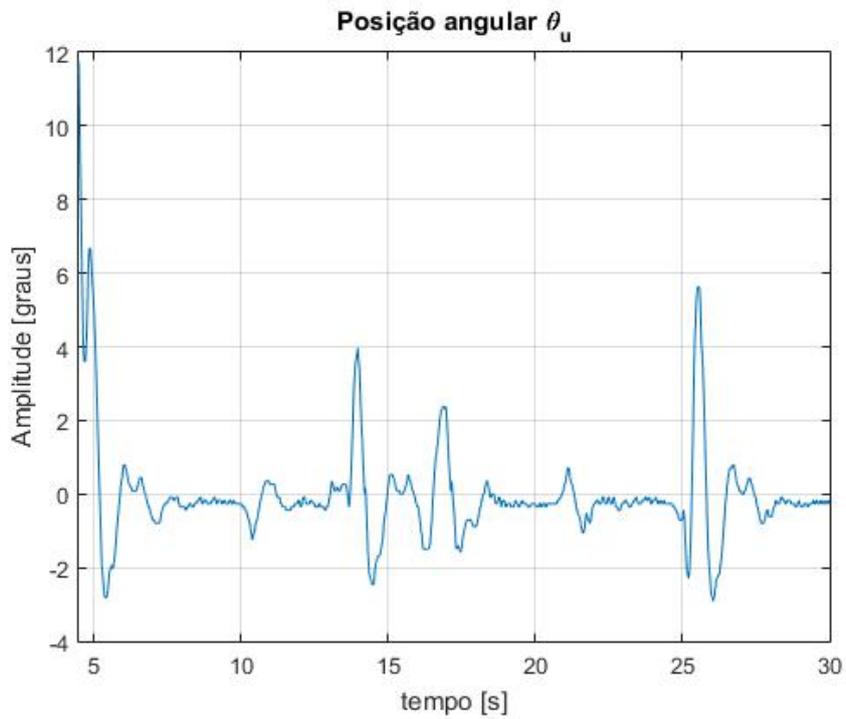


Figura 5.19: Pêndulo invertido rotacional com controle LQR - Posição angular θ_u .

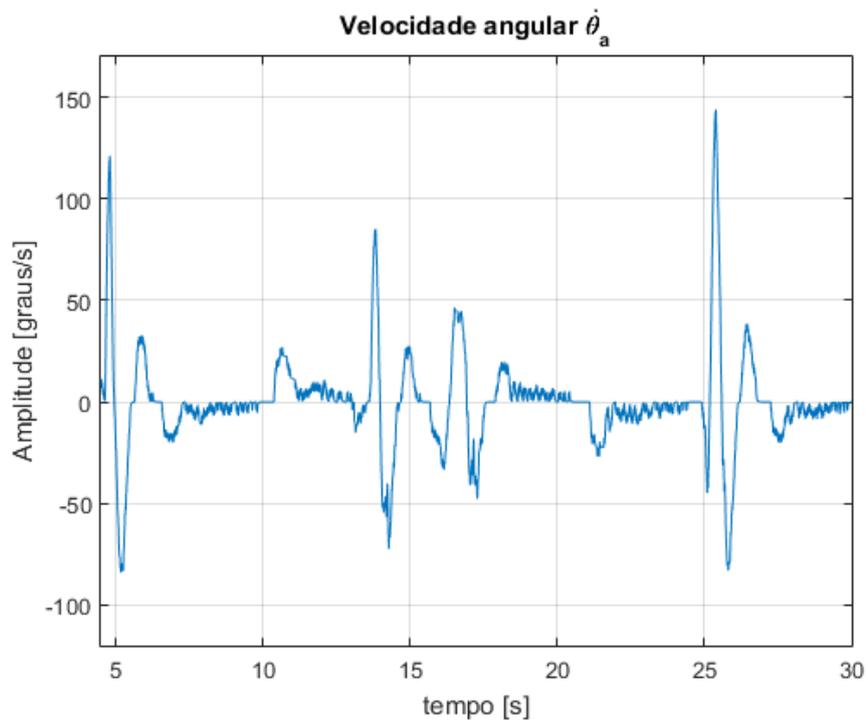


Figura 5.20: Pêndulo invertido rotacional com controle LQR - Velocidade angular $\dot{\theta}_a$.

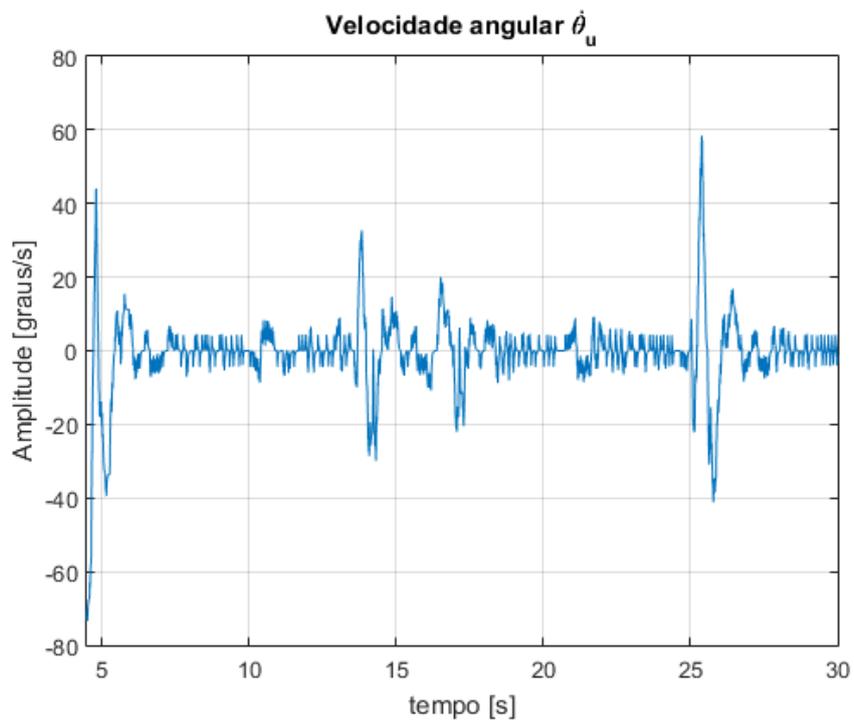


Figura 5.21: Pêndulo invertido rotacional com controle LQR - Velocidade angular $\dot{\theta}_u$.

O sinal de controle é mostrado na Figura 5.22.

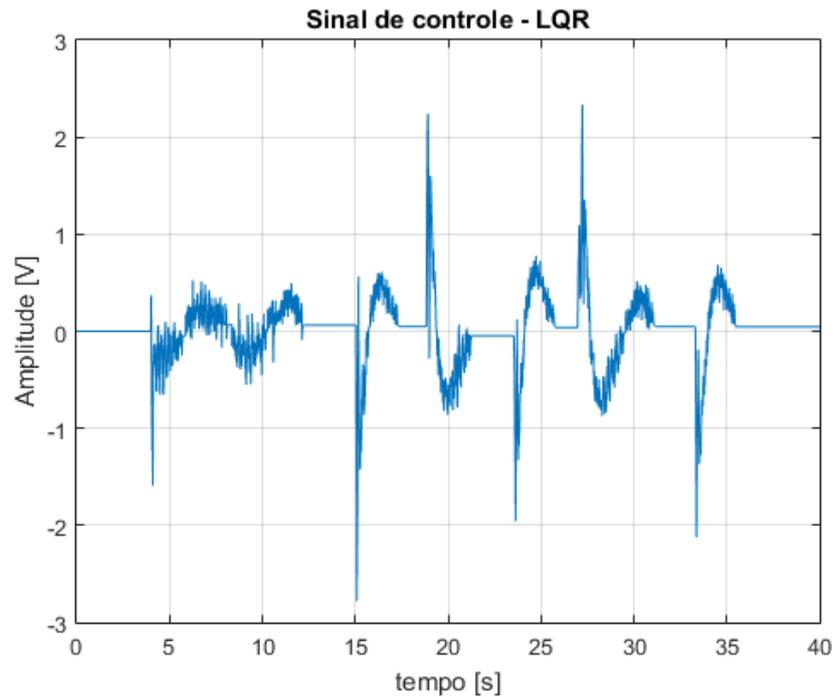


Figura 5.22: Sinal de controle - LQR.

Como na aplicação do controle SIDA-PBC, o controlador LQR foi capaz de estabilizar o pêndulo em torno da posição de equilíbrio naturalmente instável e de rejeitar perturbações.

5.3 Conclusão

Neste capítulo foi abordada a teoria de controle SIDA-PBC com forças dissipativas. Foram apresentadas todas as condições necessárias que enquadram um sistema mecânico sub-atuado na classe de sistemas compreendida pela técnica de controle SIDA-PBC. Notou-se que a dinâmica do pêndulo invertido rotacional não atende uma das condições necessárias para que fosse garantida a estabilidade assintótica global em torno do ponto de equilíbrio naturalmente instável, no entanto, foi desenvolvido, simulado e implementado um controle de modo a testar e descobrir a região no espaço de estados da junta não-atuada tal que a estabilidade em torno desse ponto de equilíbrio fosse assegurada. Além disso, foi projetado um controlador LQR para fins de comparação.

Capítulo 6

Conclusão

Este trabalho teve como principal objetivo fazer um estudo sobre a estabilidade de um sistema mecânico sub-atuado sujeito a um controle SIDA-PBC. O sistema mecânico utilizado foi o pêndulo de Furuta, um pêndulo de base rotativa de quarta ordem e de fase não-mínima.

A maneira clássica de se obter um sistema em malha fechada atrativo e estável na posição de equilíbrio desejada (posição vertical para cima) é a aplicação de dois controles diferentes denominados de *swing-up* e *balancing*. O primeiro tem a função de instabilizar o pêndulo da posição naturalmente estável e, quando entrado em certa faixa de ângulo próximo da posição vertical para cima, tal que seja uma região atrativa para o segundo controle, é feita uma troca para o modo de controle *balancing*, o qual é responsável pelo equilíbrio do pêndulo na posição desejada.

A técnica de controle SIDA-PBC, apresentada em (Donaire et al. 2016b), afirma que é possível conseguir estabilidade assintótica global em uma posição de equilíbrio desejada para sistemas mecânicos sub-atuados, desde que os sistemas em questão satisfaçam algumas condições supostas. Ou seja, essa afirmação abriu caminho para o estudo dessa técnica de controle, aplicada ao pêndulo invertido rotacional, tal que não fosse necessário a aplicação de dois controles tendo que ser feita a troca entre eles, e tal que a estabilidade seja garantida para todo espaço de estados.

As equações que regem a dinâmica do pêndulo, no entanto, mostraram que a matriz de inércia do sistema quebra uma condição crucial no desenvolvimento do controle, e assim, portanto, foi quebrada a hipótese de que a estabilidade assintótica global fosse garantida. Assim, restava-se apenas avaliar qual a faixa do espaço da junta do pêndulo podia garantir uma estabilidade local. As equações mostravam que era possível encontrar ganhos do controlador de modo que a estabilidade fosse garantida na faixa $\theta_u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rad, no entanto, nas simulações só foi possível estabilizar o pêndulo para a faixa $\theta_u \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ rad.

Esse controle foi implementado no modelo do pêndulo de Furuta fabricado pela Quanser onde pôde ser colocado em prática a teoria apresentada, porém, não foi testado o limiar da faixa de valores no qual a estabilidade é conseguida por motivos de segurança,

e também porque o principal objetivo, a estabilização assintótica global, já não podia ser conferida. Além disso, foi implementado um controle LQR para fins de comparação. Os resultados dos dois controles foram satisfatórios e o sistema em malha fechada era bastante robusto com relação a distúrbios nas juntas para os dois casos.

A técnica de controle SIDA-PBC não pôde garantir estabilidade assintótica global para o sistema mecânico utilizado, no entanto, os resultados obtidos demonstram que a técnica é promissora e funciona para os sistemas mecânicos sub-atuados cujas condições supostas são satisfeitas.

Apêndice A

Algumas Demonstrações

A.1 Demonstração 1 - Derivada no tempo de H_d

Da Equação 2.14, têm-se que

$$\dot{q} = M^{-1}M_d\nabla_p H_d \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{p} = -M_d M^{-1}\nabla_q H_d + J_2\nabla_p H_d \quad (\text{A.2})$$

\dot{H}_d é definida, pela regra da cadeia, por

$$\dot{H}_d = \begin{bmatrix} (\nabla_q H_d)^T & (\nabla_p H_d)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A derivada parcial de H_d com relação a p é definida como

$$\nabla_p H_d = M_d^{-1}p \quad (\text{A.4})$$

Assim, a Equação A.3 torna-se

$$\begin{aligned} \dot{H}_d &= \nabla_q^T H_d M^{-1}M_d\nabla_p H_d - \nabla_p^T H_d M_d M^{-1}\nabla_q H_d + \nabla_p^T H_d J_2\nabla_p H_d \\ &= \nabla_q^T H_d M^{-1}M_d M_d^{-1} - p^T M_d^{-1}M_d M^{-1}\nabla_q H_d + p^T M_d^{-1}J_2 M_d^{-1}p \\ &= p^T M_d^{-1}J_2 M_d^{-1}p \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Nota-se que na Equação A.5 as propriedades de simetria foram utilizadas. \square

A.2 Demonstração 2 - Condição de estabilidade do sistema

Da Equação 5.1, têm-se que

$$\dot{q} = M^{-1}M_d \nabla_p H_d \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{p} = -M_d M^{-1} \nabla_q H_d + C(q, p) \quad (\text{A.7})$$

De forma similar que a Equação A.5, têm-se que

$$\begin{aligned} \dot{H}_d &= \nabla_q^T H_d M^{-1} M_d \nabla_p H_d - \nabla_p^T H_d M_d M^{-1} \nabla_q H_d + \nabla_p^T H_d C(q, p) \\ &= \nabla_q^T H_d M^{-1} M_d M_d^{-1} - p^T M_d^{-1} M_d M^{-1} \nabla_q H_d + p^T M_d^{-1} C(q, p) \\ &= p^T M_d^{-1} C(q, p) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Assim, para garantir a estabilidade do sistema pelo critério de estabilidade de Lyapunov, é preciso que a derivada no tempo da função H_d seja negativa, portanto

$$\dot{H}_d < 0 \quad \text{se e somente se} \quad p^T M_d^{-1} C(q, p) < 0. \quad \square$$

Apêndice B

Sistemas implementados em Simulink®

B.1 Simulação do sistema em malha fechada com controle SIDA-PBC

O sistema em malha fechada é compreendido principalmente pelo modelo do pêndulo invertido rotacional, modelo do motor DC e o controle, como pode ser visto na Figura B.1. Adicionalmente foram adicionados ruídos e um bloco que simula alguns distúrbios.

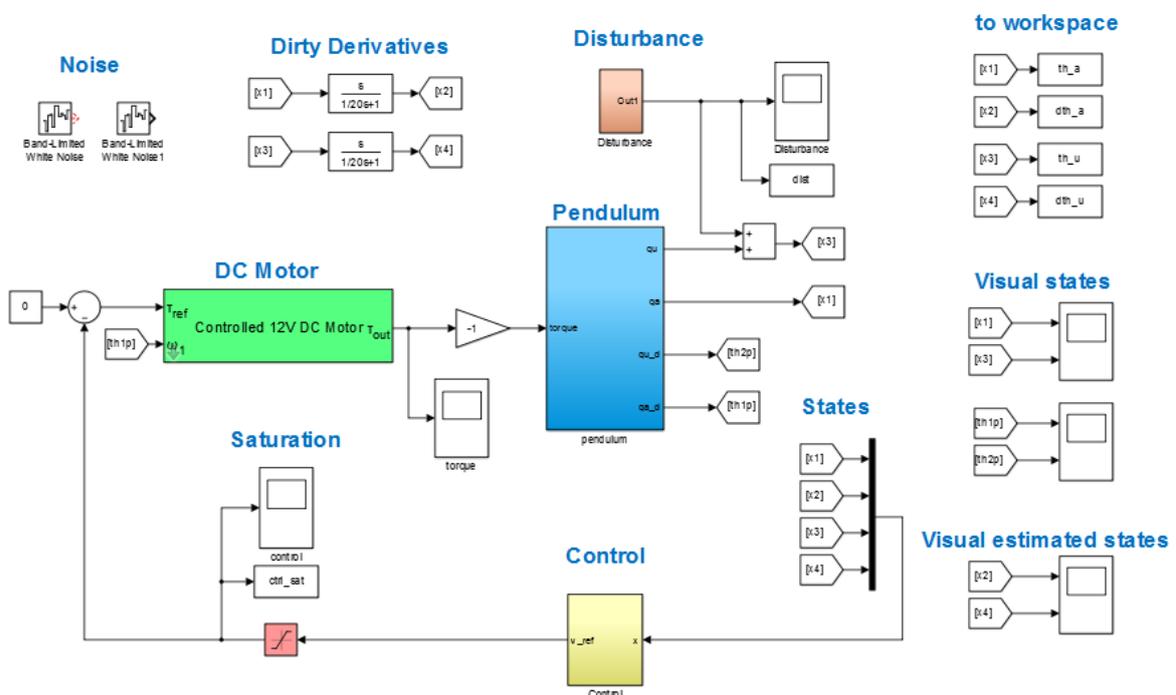


Figura B.1: Sistema implementado em Simulink.

O modelo do pêndulo de Furuta foi implementado utilizando a *toolbox* SimScape, mais especificamente, o módulo SimMechanics, do Matlab®, e pode ser visto na Figura

B.2.

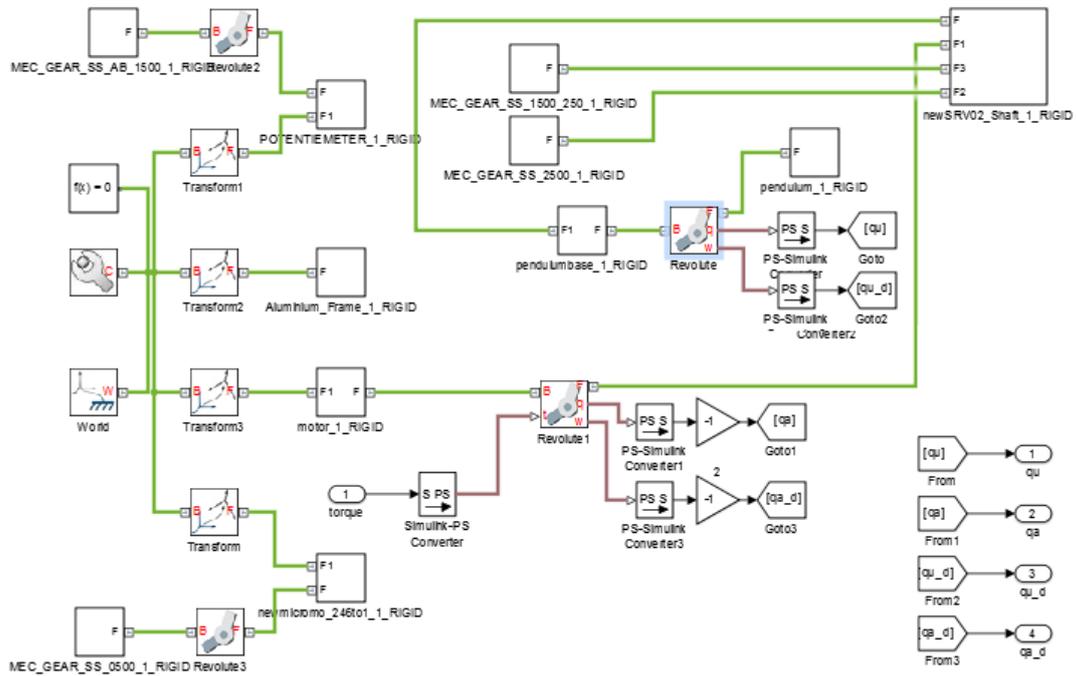


Figura B.2: Implementação do pêndulo invertido rotacional utilizando a ferramenta Sim-Mechanics.

O modelo do motor DC foi implementado como pode ser visto na Figura B.3. Nota-se que, dentro do modelo do motor não foi adicionada uma saturação, no entanto, o sinal de tensão enviado ao motor pelo controle é saturado em $\pm 12V$, como pode ser visto na Figura B.1 acima. Esta saturação foi adicionada de modo a conferir com o máximo de tensão que pode ser enviado ao motor real.

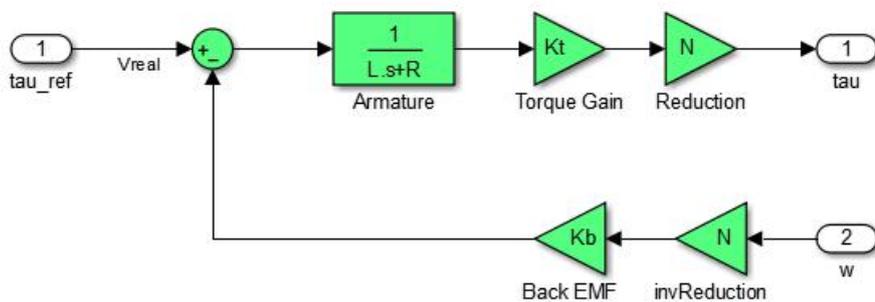


Figura B.3: Implementação do motor DC.

B.2 Implementação do controle SIDA-PBC no Simulink® utilizando a plataforma QUARC® Real-Time Control Software

A implementação do controle SIDA-PBC pode ser dividido, basicamente, em quatro módulos: o módulo que faz a aquisição das posições angulares do motor e do pêndulo pelos encoders; o módulo que faz a escrita do sinal de controle na placa de aquisição de dados, o qual posteriormente passa por um drive de potência até chegar no motor; o módulo de segurança, que garante que o pêndulo não comece a girar descontroladamente; e o módulo do controle, onde de fato é implementado o controle SIDA-PBC. A Figura B.4 ilustra a implementação do controle.

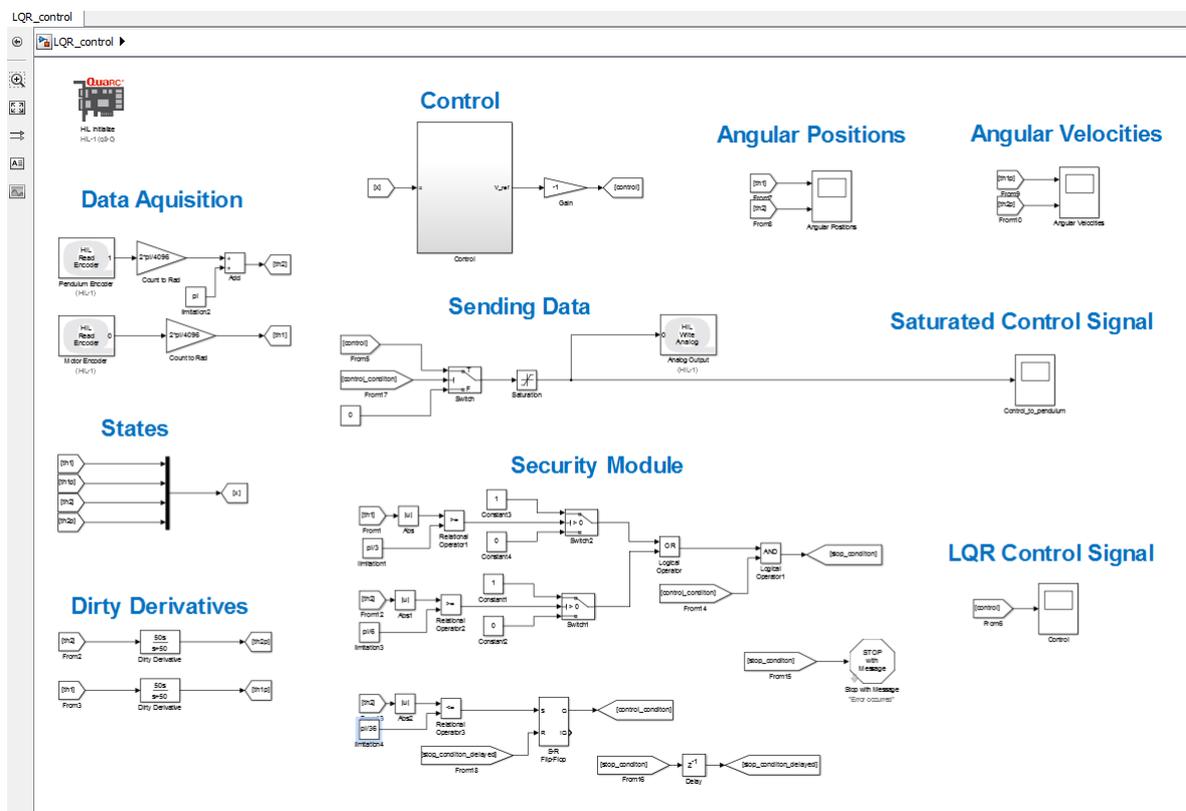


Figura B.4: Controle SIDA-PBC implementado em Simulink® utilizando a plataforma QUARC® Real-Time Control Software.

Apêndice C

Projeto do controlador LQR

Para o projeto do controlador LQR é necessário, primeiro, linearizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio $([\theta_a \dot{\theta}_a \theta_u \dot{\theta}_u]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T)$, de modo a poder escrever o sistema como,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{C.1})$$

Então, para um sistema contínuo no tempo, a lei de controle $u = -Kx$ minimiza a função custo quadrática,

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru + 2x^T Nu) dt \quad (\text{C.2})$$

Essa função custo está intimamente associada a energia das variáveis de estado e dos sinais de controle. A escolha das matrizes Q e R é, portanto, um compromisso entre as energias de estado e de controle, onde Q e R são matrizes de ponderação, tipicamente diagonais, e $Q - NR^{-1}N^T \geq 0$ e $R > 0$. Quanto maior o peso da matriz Q , mais preciso será o rastreamento. Por outro lado, quanto maior o peso da matriz R , maior é a economia de energia de controle.

O ganho K é dado por,

$$K = R^{-1} (B^T P N^T) \quad (\text{C.3})$$

onde P é encontrado pela solução da Equação Algébrica de Riccati

$$A^T P + PA - (PB + N) R^{-1} (B^T P + N^T) + Q = 0 \quad (\text{C.4})$$

O modelo dinâmico do pêndulo invertido rotacional linearizado no ponto de equilíbrio mencionado acima, considerando o modelo do motor DC, é descrito pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18.92 & 33.92 & -0.68 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15.73 & 71.78 & -1.43 \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 33.71 \\ 0 \\ 28.03 \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.8)$$

O mapa de pólos e zeros do sistema em malha aberta é visto na Figura C.1.

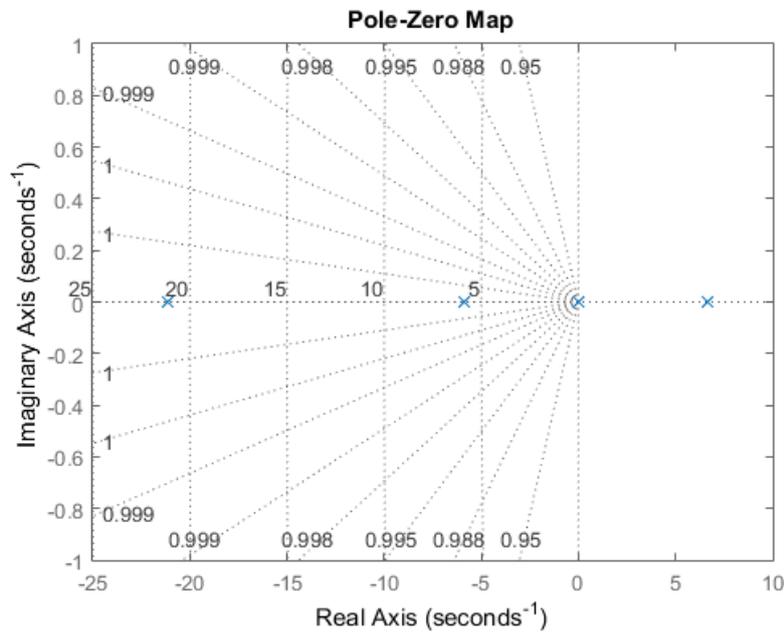


Figura C.1: Mapa de pólos e zeros do sistema em malha aberta

Nota-se pelo pólo do lado direito do plano S que, como esperado, é um sistema instável ao redor desse ponto de equilíbrio.

O ganho K foi calculado no matlab utilizando o comando `lqr`, onde as matrizes Q e R utilizadas foram definidas como,

$$Q = \begin{bmatrix} 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$R = 5 \quad (\text{C.10})$$

resultando em,

$$K = [-0.85 \quad -1.45 \quad 17.33 \quad 2.29] \quad (\text{C.11})$$

O mapa de pólos e zeros do sistema em malha fechada é visto na Figura C.2.

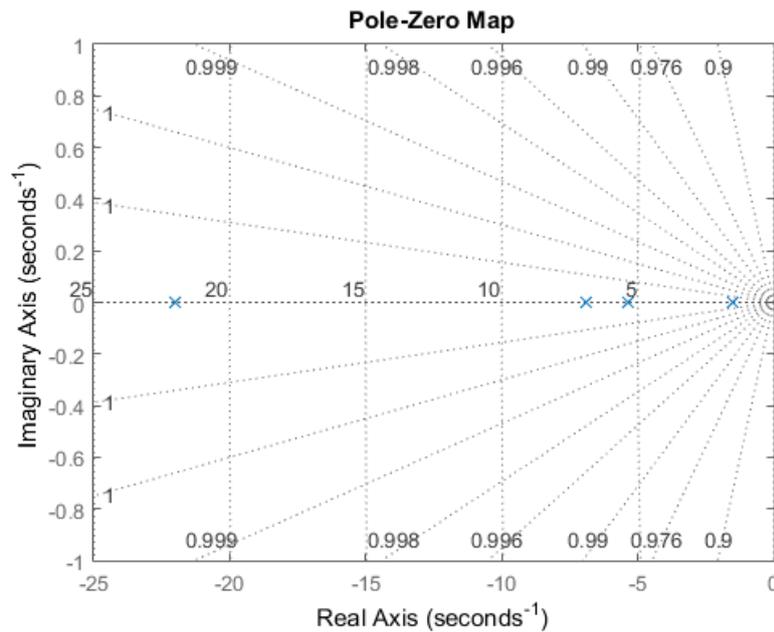


Figura C.2: Mapa de pólos e zeros do sistema em malha fechada

Observa-se que o sistema linearizado em malha fechada com o controle $u = -Kx$ é estável, com dinâmica dominada pelo pólo mais próximo da origem, onde os outros três pólos são colocados meia década e duas décadas mais longe, aproximadamente.

Referências Bibliográficas

- Carvalho, L. K. (2005), Sobre a estabilização global de sistemas não lineares via equação de riccati dependente do estado, Master's thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Crasta, N., Ortega, R., Pillai, H. & Velazquez, J. G. (2012), 'The matching equations of energy shaping controllers for mechanical systems are not simplified with generalized forces', *IFAC Proceedings Volumes* **45**(19), 48–53.
- Donaire, A., Mehra, R., Ortega, R., Satpute, S., Romero, J. G., Kazi, F. & Singh, N. M. (2016a), 'Shaping the energy of mechanical systems without solving partial differential equations', *IEEE Transactions on Automatic Control* **61**(4), 1051–1056.
- Donaire, A., Ortega, R. & Romero, J. G. (2016b), 'Simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems using dissipative forces', *Systems & Control Letters* **94**, 118–126.
- Dorf, R. C. & Bishop, R. H. (2011), *Modern control systems*, Prentice Hall.
- Furuta, K. (2003), Control of pendulum: From super mechano-system to human adaptive mechatronics, in 'Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on', Vol. 2, IEEE, pp. 1498–1507.
- Khalil, H. K. (1996), *Nonlinear systems*, Vol. 3, Prentice hall New Jersey.
- Ortega, R., Spong, M. W., Gómez-Estern, F. & Blankenstein, G. (2002), 'Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment', *IEEE transactions on automatic control* **47**(8), 1218–1233.
- Sarras, I., Acosta, J. Á., Ortega, R. & Mahindrakar, A. D. (2013), 'Constructive immersion and invariance stabilization for a class of underactuated mechanical systems', *Automatica* **49**(5), 1442–1448.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L. & Oriolo, G. (2010), *Robotics: modelling, planning and control*, Springer Science & Business Media.

Slotine, J.-J. E., Li, W. et al. (1991), *Applied nonlinear control*, prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.

Spong, M. W. (1994), Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems, in 'Intelligent Robots and Systems' 94.'Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS'94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on', Vol. 1, IEEE, pp. 314–321.

van der Schaft, A. & Jeltsema, D. (2014), 'Port-hamiltonian systems theory: An introductory overview', *Foundations and Trends in Systems and Control* **1**(2-3), 173–378.