



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

Proposta de um algoritmo para tomada de decisão de compra e venda visando à otimização de ativos

VICTOR ANDRÉS BESADA MOREIRA

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Prof. Eugenius Kaszkurewicz,
D.Sc

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Abril de 2016

Proposta de um algoritmo para tomada de decisão de compra e venda visando à otimização de ativos

Victor Andrés Besada Moreira

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO.

Aprovado por:

Prof. Eugenius Kaszkurewicz, D.Sc.

Prof. Amit Bhaya, Ph.D.

Prof. Maurício Bezerra de Souza Jr., D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Abril de 2016

Andrés Besada Moreira, Victor.

Proposta de um algoritmo para tomada de decisão de compra e venda visando à otimização de ativos/ Victor Andrés Besada Moreira - Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2016.

XV, 44, p.: il.; 29,7 cm.

Orientador:

Prof. Eugenius Kaszkurewicz, D.Sc

Projeto de Graduação - UFRJ/ Escola Politécnica/-
Curso de Engenharia de Controle e Automação, 2016.

Referências Bibliográficas: p.32 - 33.

1. Controle ótimo 2. Otimização 3. Carteira de ativos
4. Algoritmo de tomada de decisão

I. Kaszkurewicz, Eugenius. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia de Controle e Automação. III. Proposta de um algoritmo para tomada de decisão de compra e venda visando à otimização de carteira de ativos.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu professor orientador, Eugenius Kaszkurewicz, por todo o suporte dado na elaboração desse projeto, me deixando à vontade para fazer minhas próprias escolhas e me apoiando, em todas elas, com lições teóricas e entusiasmo. Agradeço aos professores membros da banca, Amit Bhaya e Maurício Bezerra de Souza Jr., por aceitarem avaliar este trabalho e pelas sugestões que ajudaram a aprimorar o texto.

Agradeço a todos os meus professores e colegas que me acompanharam durante meus anos de graduação, sempre compartilhando comigo os momentos de alegria e aflição.

Por fim agradeço aos meus familiares por todo o amor, carinho e apoio que foram necessários para que eu pudesse me tornar engenheiro.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Proposta de um algoritmo para tomada de decisão de compra e venda visando à otimização de ativos

Victor Andrés Besada Moreira

2016

Orientador:

Prof. Eugenius Kaszkurewicz, D.Sc

Curso: Engenharia de Controle e Automação

Neste projeto de graduação aborda-se o problema do desenvolvimento de um algoritmo para tomada de decisões visando à otimização de uma carteira de ativos. O trabalho foca primeiro em elaborar um mercado idealizado e, então, uma nova proposta de otimização de uma carteira de ativos é apresentada na forma de um problema de controle ótimo, sem utilização de qualquer previsão estocástica. Posteriormente os resultados obtidos são comparados aos indicadores de mercado.

Palavras Chaves: Controle ótimo, Otimização, Carteira de ativos, Algoritmo de tomada de decisão.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfilment of the requirements for the degree of Control and Automation Engineer.

Proposal of a decision making algorithm to optimize an asset portfolio

Victor Andrés Besada Moreira

2016

Advisor:

Prof. Eugenius Kaszkurewicz, D.Sc

Course: Engenharia de Controle e Automação

This work presents the development of a decision maker algorithm to optimize an asset portfolio. An idealized market is developed and then the proposed algorithm is presented in the form of an optimal control problem, in this paper we do not rely on any type of stochastic model for the asset price. The results are then compared with financial indexes.

Keywords: Optimal Control, Optimization, Asset portfolio, Decision maker algorithm.

Conteúdo

Resumo	4
Abstract	5
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	iv
Lista de Abreviaturas	v
Lista de Símbolos	vi
I Introdução	1
II Mercado Idealizado	1
III Modelo do sistema dinâmico representativo do processo	2
IV Descrição do princípio em que se baseia a proposta	5
V Formulação da proposta como um problema de controle ótimo	7
I Ponderação das variáveis do horizonte	9
II Ponderação das parcelas J_1 e J_2 (α e β)	10
III Diagrama clássico do controle do sistema	10
VI Lógica da implementação do algoritmo	11
VII Índices e indicadores de mercado	12
I CDI	12
II IBOVESPA	13
III Índice <i>Trader</i> inativo	14
IV Índices de rendimento comparativos com os resultados do algoritmo	14
VIII Simulações	15
I Simulação 1 - Representação da Janela móvel	17
II Simulação 2 - Utilização do algoritmo proposto durante um intervalo de 30 dias	21
III Simulação 3 - Comparação entre os resultados do algoritmo proposto e o caso em que o <i>Trader</i> é inativo	22
IV Simulação 4 - Comparação entre os resultados do algoritmo proposto e o caso em que o sinal de controle é randômico	24
V Simulação 5 - Resultados do algoritmo proposto sem a restrição no instante de tempo final	25
IX Resultados comparativos das simulações com os indicadores CDI, IBOVESPA e <i>Trader</i> inativo	26

I	Comparação ao indicador CDI	26
II	Comparação ao indicador IBOVESPA	27
III	Comparação ao índice <i>Trader</i> inativo	29
IV	Discussão crítica	29
X	Conclusão	31
XI	Trabalhos futuros	31
Bibliografia		31
Apêndices		34
A	BOVESPA e Bradesco ON - BBDC3	35
B	Carteira Ibovespa	37
C	Evolução do patrimônio financeiro nos instantes \hat{k}	39
D	Código em Madonna	41
E	Fluxograma das restrições à ferramenta de otimização	44

Lista de Figuras

1	Representação na forma de <i>Causal Loop</i>	3
2	Representação na forma de <i>Stocks and Flows</i>	3
3	Representação da janela móvel de tomada de decisão para três instantes consecutivos, \hat{k} , $\hat{k} + 1$ e $\hat{k} + 2$	6
4	Diagrama de controle representado na forma clássica.	11
5	Diagrama lógico da estrutura do algoritmo.	12
6	Variação do preço do ativo Bradesco ON - BBDC3 no intervalo de simulação.	15
7	Simulação 1 - Representação da janela móvel utilizando dados reais da simulação.	18
8	Simulação 1 - Representação dos sinais de controle $\{U^*(k)\}$ utilizados no processo de otimização.	19
9	Simulação 1 - Sobreposição (fora de escala) dos sinais de controle $\{U^*(k)\}$ sobre a função preço $p(k)$	20
10	Simulação 2 - Evolução da função $J_{alg}^*(\hat{k})$ em função dos sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$	21
11	Simulação 2 - Conjunto de sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$	22
12	Simulação 2 - Sobreposição do conjunto de sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$ sobre a função preço $p(\hat{k})$	23
13	Simulação 3 - Comparação entre a utilização do algoritmo proposto e o caso em que $\{U_0(k)\} = 0, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$ e $\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$	23
14	Simulação 4 - Comparação entre a utilização do algoritmo proposto e o caso em que o conjunto $\{U_{rnd}(k)\} = rnd, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$ e $\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$	24
15	Simulação 4 - Comparação entre o conjunto de sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$ e o conjunto de sinais de controle $\{U_{rnd}(k)\} = rnd, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$ e $\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$	25
16	Simulação 5 - Comparação entre a utilização do algoritmo proposto e o caso em que a restrição dada pela equação (9) não é respeitada.	26
17	Resultados Comparativos - Comparação da evolução de J_{alg}^* com a evolução de J_{CDI}	27
18	Resultados Comparativos - Comparação da evolução de J_{alg}^* com a evolução de J_{IBOV}	28
E.1	Fluxograma das restrições à ferramenta de otimização representadas pelas equações 11 e 12.	44

Lista de Tabelas

1	Índices de rendimentos comparativos	30
A.1	Variações diárias de $G_{IBOV}(\hat{k})$ e $J_{alg}^*(\hat{k})$	35
B.1	Ativos presentes na carteira IBOVESPA	37
C.1	Evolução de $J_{alg}^*(\hat{k})$, $G_{CDI}(\hat{k})$, $G_{IBOV}(\hat{k})$ e $G_0(\hat{k})$	39

Lista de Abreviaturas

CDI - Certificado de Depósito interbancário

IBOVESPA - Índice da Bolsa de Valores de São Paulo

Lista de Símbolos

- $C(\cdot)$: compra de cotas
 $g(\cdot), h(\cdot)$: restrições de estado
 $G(\cdot)$: patrimônio financeiro
 $J(\cdot)$: função objetivo
 $J_1(\cdot)$: primeira parcela da função objetivo
 $J_2(\cdot)$: segunda parcela da função objetivo
 k : instante de tempo
 \hat{k} : instante de tempo de tomada de decisão
 $l(\cdot)$: função de ponderação de decisões passadas
 $maximizar_{\{U(k)\}}$: maximização utilizando o conjunto de sinais de controle $\{U(k)\}$
 N : quantidade de instantes passados levados em consideração no processo de otimização
 $p(\cdot)$: função preço
 $Q(\cdot)$: quantidade de cotas
 $Q^C(\cdot)$: quantidade de cotas consolidadas
 r : taxa média de rendimento da caderneta de poupança por dia
 $S(\cdot)$: quantidade de dinheiro
 $S^C(\cdot)$: quantidade de dinheiro consolidado
 $U(\cdot)$: sinal de controle
 $U^*(\cdot)$: sinal de controle ótimo
 $U_0(\cdot)$: sinal de controle com valor zero
 $U_{alg}^*(\cdot)$: sinal de controle ótimo gerado pelo algoritmo
 $U_{rnd}(\cdot)$: sinal de controle com valores randômicos
 $V(\cdot)$: venda de cotas
 $x(\cdot)$: $[Q \ S]^T$
 $x^C(\cdot)$: $[Q^C \ S^C]^T$
 $x^*(\cdot)$: $[Q^* \ S^*]^T$
 $w(\cdot)$: restrição de estado
 α, β : parâmetros de ponderação das parcelas da função objetivo
 δ_{alg} : índice de retorno financeiro do algoritmo
 δ_0 : índice de retorno financeiro do *trader* inativo
 δ_{CDI} : índice de retorno financeiro do CDI
 δ_{IBOV} : índice de retorno financeiro da Ibovespa
 $\mu_{alg/0}$: índice de rendimento do algoritmo frente ao *trader* inativo, em relação ao instante inicial de simulação
 $\mu_{alg/CDI}$: índice de rendimento do algoritmo frente ao CDI, em relação ao instante inicial de simulação
 $\mu_{alg/IBOV}$: índice de rendimento do algoritmo frente à Ibovespa, em relação ao instante inicial de simulação

I Introdução

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver uma nova estratégia que possa ser suporte para a tomada de decisão de compra ou venda de ativos financeiros [1,2]. O trabalho segue uma linha com base na aplicação de teoria de controle ótimo [3,4].

Diferentemente de outros trabalhos sobre o assunto, não será utilizado nenhum tipo de previsão estocástica sobre o preço dos ativos, onde o ponto de partida seria o movimento geométrico Browniano [5]. Nem tampouco é tentado modelar o mercado financeiro, como por exemplo em [6]. Adota-se o preço de um ativo financeiro, $p(k)$, como uma variável de entrada externa, frente à qual serão tomadas as decisões de compra ou venda.

Outro ponto importante a ser levado em consideração é o mercado idealizado utilizado no trabalho, explicitado na seção II.

Para o desenvolvimento do trabalho foram utilizados dois softwares, o primeiro foi o *iThink* [7], importante para modelar e simular o sistema de compras e vendas, e criar uma visualização “amigável” de sistemas dinâmicos, o segundo foi o *Berkeley Madonna* onde pôde-se aprimorar o modelo proposto e utilizar ferramentas de otimização, como o *Optimize*.

No *iThink*, utilizando *Causal Loops diagrams* e *Stocks and Flows diagrams* (ver seção III) foi possível ter um modelo de referência do processo. Ainda nesse momento, utilizando ferramentas como *sliders* e *batch runs* foi desenvolvido o que viria a se constituir no algoritmo de otimização/decisão apresentado nesse trabalho.

Devido à falta de ferramentas mais específicas no *iThink*, porém utilizando as equações de *Stocks and Flows*, passou-se a utilizar o software *Berkeley Madonna* [8]. Nesse segundo software, pôde-se utilizar a ferramenta *Optimize* e aprimorar o modelo proposto.

O trabalho está dividido da seguinte forma, a seção II trata do mercado idealizado utilizado no contexto da proposta, mostrando as considerações e restrições adotadas para o desenvolvimento dessa. A seção III é destinada à representação do sistema dinâmico utilizado, com figuras dos *Causal Loops/ Stocks and Flows* e também do modelo referente a esse sistema. Nessa seção, são explicitadas as variáveis de controle e restrições para o desenvolvimento do algoritmo de otimização.

A seção IV é utilizada para explicar os conceitos que embasam o algoritmo de otimização. Segue a seção V, retomando as equações da seção III, e formulando matematicamente a proposta como um problema de controle ótimo. Na seção VI explica-se a lógica da implementação do algoritmo de otimização, utilizando um fluxograma para explicitar os argumentos.

A seção VII é destinada a explicar os índices e os indicadores financeiros utilizados no mercado financeiro e que servirão como critério de comparação para o desempenho do algoritmo proposto.

Na seção VIII são mostradas simulações do algoritmo enquanto na seção IX compara-se as simulações feitas com indicadores financeiros conhecidos no mercado a fim de comprovar sua eficiência. Finaliza-se o trabalho com as conclusões e futuros pontos a serem abordados na seção X.

II Mercado Idealizado

Nesta seção são discutidas as premissas para o desenvolvimento do modelo, sendo assim, o mercado idealizado é caracterizado pelas considerações que seguem.

Utilização de somente um ativo: Para o projeto, utiliza-se somente um ativo e sua função preço $p(k)$; esse ativo é escolhido de forma aleatória a partir de séries históricas de preço reais [9].

Função preço: Para esse trabalho, a hipótese importante a ser ressaltada é a forma como o preço do ativo será interpretada. Historicamente os preços de ativos são tratados como um movimento Browniano, assemelhando-se à movimentação de partículas do ar [5]. Para se assemelhar o máximo possível ao mercado real, essa premissa será mantida.

Além disso, não será feita nenhuma previsão futura quanto ao preço do ativo; esse será tratado como uma entrada externa conhecida no instante \hat{k} , em função da qual o sistema apontará decisões para serem tomadas nesse mesmo instante \hat{k} . Preços passados são conhecidos e são entradas para a tomada de decisão.

Liquidez de Mercado: Assume-se que o mercado tem alta liquidez, sendo possível comprar e vender o ativo a qualquer instante de tempo \hat{k} . Todas as efetivações e liquidações financeiras acontecerão no dia em que a ação de compra/venda for tomada, ou seja, no instante \hat{k} como utilizado no presente trabalho.

Taxas por movimentação financeira: Assume-se que não são aplicadas taxas, tais como taxa de administração, IOF ou Imposto de Renda, sobre as movimentações financeiras. Essa premissa, apesar de se distanciar do que ocorre no mercado real, é utilizada para simplificações de cálculos e não afeta a lógica do algoritmo de otimização proposto no projeto.

O preço do ativo é dado pelo mercado: O *Trader* (utilizador do algoritmo de decisão) não é capaz, por si só, de manipular o preço do ativo no mercado; ou seja, a quantidade negociada pelo *Trader* utilizando o algoritmo de decisão não é capaz de criar qualquer instabilidade econômica a ponto de alterar o preço do ativo.

Lógica de compra e venda: O algoritmo de suporte à decisão deverá indicar quando comprar ou vender e as quantidades ótimas a serem compradas ou vendidas.

Informações privilegiadas: Não se conhece como a função preço irá se comportar no futuro.

III Modelo do sistema dinâmico representativo do processo

O sistema dinâmico utilizado no projeto é simples, como pode-se ver pelo *Causal Loop Diagram*, figura 1.

A partir desse *Causal Loop Diagram*, tem-se a representação correspondente na forma de *Stocks and Flows*, figura 2.

Nessa representação, figura 2, é possível visualizar dois *Stocks*, ou seja, as variáveis de estado: Quantidade de cotas e Dinheiro em caixa. Além dos fluxos de Saida/Entrada de dinheiro e Saida/Entrada de cotas, os quatro em função do preço do ativo.

O diagrama da figura 2 corresponde às equações dinâmicas em tempo discreto, equações 1 e 2. Para essas equações representam-se as variáveis Quantidade de cotas de posse do *Trader* como $Q(k)$, Dinheiro em caixa como $S(k)$, Compra de cotas como $C(k)$, Venda de cotas como $V(k)$ e a taxa de rendimento média de uma poupança por dia r :

$$Q(k+1) = Q(k) + U(k) \quad (1)$$

$$S(k+1) = S(k)r - (U(k)p(k)) \quad (2)$$

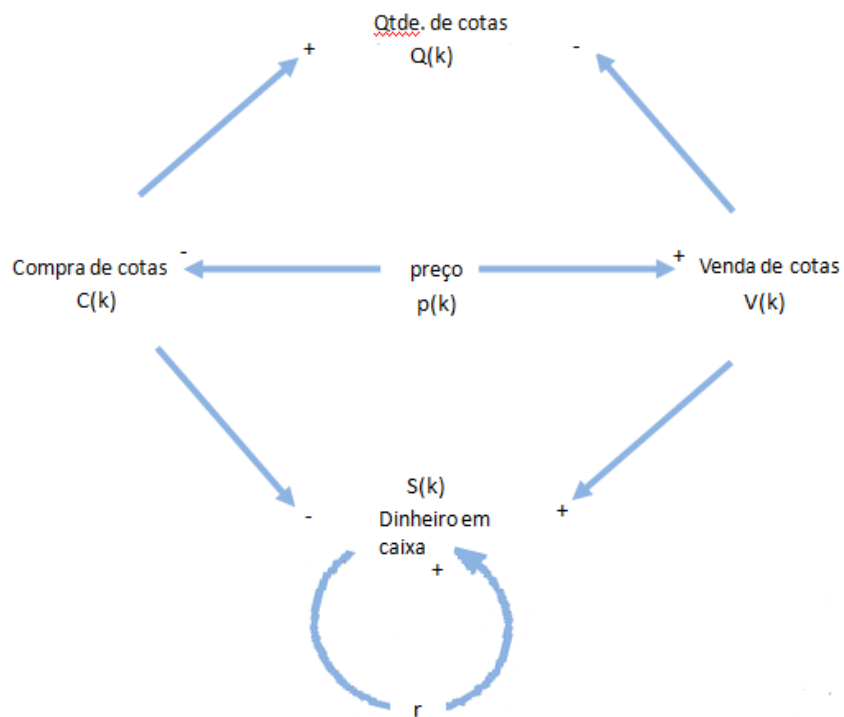


Figura 1: Representação na forma de *Causal Loop*.

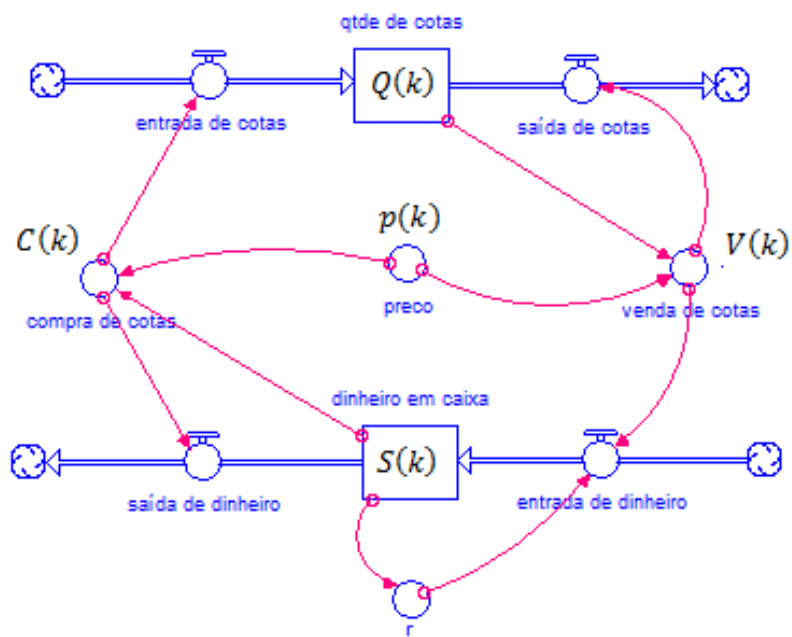


Figura 2: Representação na forma de *Stocks and Flows*.

A diferença $C(k) - V(k)$ corresponde à variável (unidimensional) de controle, ou seja:

$$U(k) = C(k) - V(k) \quad (3)$$

Expandindo tem-se:

$$\begin{aligned} Q(k+1) &= Q(k) + C(k) - V(k) \\ S(k+1) &= S(k)tax + (V(k) - C(k))p(k) \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Sendo $Q(k)$ e $S(k)$ as variáveis de estado, $U(k)$ representa a variável de controle manipulada e $p(k)$ a variável externa ao sistema.

O escalar r representa a taxa de rendimento média de uma poupança por dia. Essa taxa mostra que caso o montante $S(k)$ não seja utilizado na compra de cotas no instante k , ele irá render o valor de r até o instante $k + 1$. Segundo [9], o valor médio do rendimento de uma poupança por dia equivale à:

$$r = 1.000233$$

Na forma matricial:

$$x(k) = \begin{bmatrix} Q(k) \\ S(k) \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = Ax(k) + b(k)U(k)$$

Sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

e

$$b(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ -p(k) \end{bmatrix}$$

Logo, um sistema linear e variante no tempo.

São ressaltadas algumas restrições estabelecidas para o modelo, são elas: não pode-se vender, no instante k , mais cotas do que a quantidade de cotas que tem-se em estoque nesse mesmo instante, ou seja:

$$V(k) \leq Q(k)$$

Certamente não pode-se comprar cotas no instante k , além da quantidade de dinheiro em caixa naquele mesmo instante:

$$C(k)p(k) \leq S(k)$$

Outras restrições,

$$Q(k) \geq 0, k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\}$$

E

$$S(k) \geq 0, k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\}$$

Logo, $Q(k) = 0 \rightarrow V(k) = 0$ e $S(k) = 0 \rightarrow C(k) = 0, k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\}$

Na seção V, será descrito como essas equações serão utilizadas no processo de otimização e consequente tomada de decisão.

IV Descrição do princípio em que se baseia a proposta

A proposta tem como objetivo a criação de um algoritmo que indique qual a melhor decisão (quanto comprar ou vender) a ser tomada. Tal decisão é feita em cima de uma ação negociável em Bolsa de Valores e utiliza somente dados históricos, ou seja, em nenhum momento tenta-se prever o comportamento do mercado financeiro.

A ideia é fundada na seguinte situação: Um *trader* vem tomando decisões de compra/venda diariamente. No dia \hat{k} ele decide utilizar um algoritmo de otimização para ajudá-lo na tomada de decisão de compra/venda daquele dia.

O algoritmo proposto levará em consideração o histórico de preços até $\hat{k} - 1$, as ações tomadas no passado, até $\hat{k} - 1$, e o preço atual do ativo no instante \hat{k} para determinar qual seria o melhor movimento (quanto comprar ou quanto vender) a se fazer no instante atual \hat{k} .

Sendo N o número de instantes passados levados em consideração para a tomada de decisão nesse instante \hat{k} , tem-se N intervalos de tempo (horizonte ou janela) em que o algoritmo de tomada de decisão se baseará.

Como já explicado anteriormente, no instante \hat{k} foram levados em consideração os valores das variáveis dos N instantes passados, representados pela janela que inicia no instante $\hat{k} - N$ até o instante \hat{k} .

O algoritmo de otimização fornece como solução um conjunto de valores:

$$\{U^*(k)\}, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$$

Esse conjunto corresponde aos valores que otimizariam a carteira de ações, porém como todos os instantes, exceto o instante \hat{k} , são passados, somente interessa o sinal de controle $U^*(\hat{k})$ que indica qual decisão deve ser tomada no instante \hat{k} ; ou seja, os valores para $k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k} - 1\}$ são usados somente para achar $U^*(\hat{k})$.

Esse procedimento se repete para os dias \hat{k} subsequentes em que for utilizado o algoritmo de otimização, sempre levando em consideração os valores das variáveis dos N instantes anteriores; ou seja, tem-se uma janela móvel que se desloca de acordo com a utilização do algoritmo para os novos instantes de tempo \hat{k} . Observa-se a figura 3.

No instante $\hat{k} + 1$, dia seguinte ao dia \hat{k} , seguindo a ideia de janela móvel, será levado em consideração o intervalo que se inicia no instante $\hat{k} + 1 - N$ e se prolonga até o instante $\hat{k} + 1$.

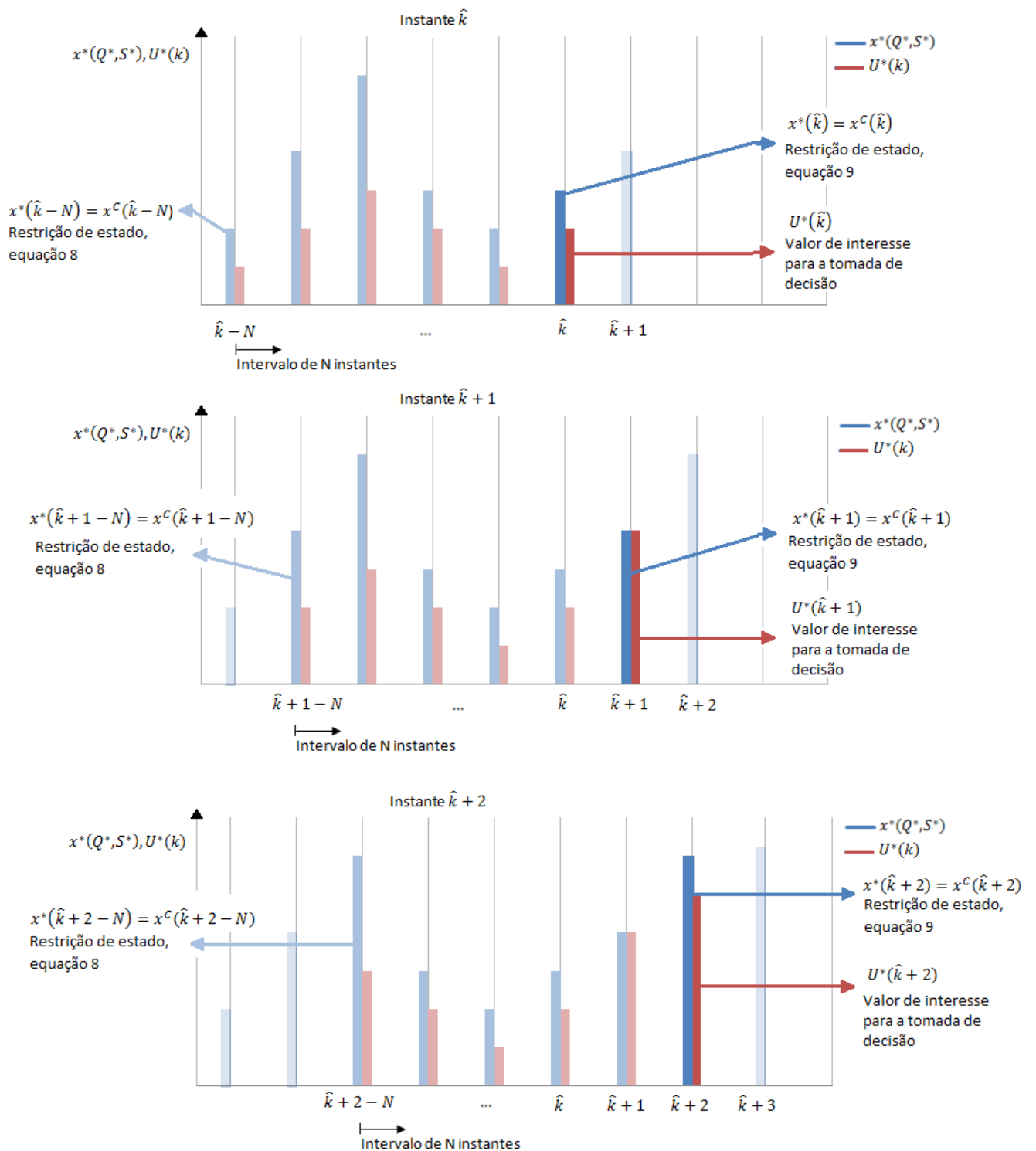


Figura 3: Representação da janela móvel de tomada de decisão para três instantes consecutivos, \hat{k} , $\hat{k} + 1$ e $\hat{k} + 2$.

V Formulação da proposta como um problema de controle ótimo

Como dito na seção IV, a tomada de decisão será feita em cima do histórico de tomadas de decisões passadas e também das variáveis de estado passadas, essas variáveis são chamadas de **consolidadas** e utiliza-se o sobre-escrito **C** para representá-las, assim $Q^C(k)$ e $S^C(k)$.

Pode-se ver na figura 3 os sinais de $\{U^*(k)\}$ e $\{x^*(Q^*, S^*)\}$ e a movimentação da janela móvel ao longo dos instantes \hat{k} . É importante ressaltar que o conjunto de valores mostrados de $\{U^*(k)\}$ e $\{x^*(Q^*, S^*)\}$ na figura 3 é apenas ilustrativos e não representa, de alguma forma, os valores obtidos no algoritmo de otimização.

Sendo N o número de instantes passados levados em consideração para a tomada de decisão no instante \hat{k} .

Pode-se formular o problema na forma de um problema de controle ótimo clássico em um horizonte finito (N instantes) com restrições, ou seja:

$$\text{maximizar}_{\{U(k)\}} (J(x, u, p)) \quad (4)$$

Sendo:

$$J(x, u, p) = \sum_{k=\hat{k}-N}^{\hat{k}} [S(k) + Q(k)p(k)]l(k) + [S(\hat{k}) + Q(\hat{k})p(\hat{k})]l(\hat{k})$$

$$J(x, u, p) = \sum_{k=\hat{k}-N}^{\hat{k}} [S(k) - U(k)p(k) + (Q(k) + U(k))p(k)]l(k) + [S(\hat{k}) - U(\hat{k})p(\hat{k}) + (Q(\hat{k}) + U(\hat{k}))p(\hat{k})]l(\hat{k}) \quad (5)$$

Restrições dinâmicas - a quantidade de cotas atual é a mesma do instante anterior somada ao sinal de controle daquele instante; a quantidade de dinheiro atual é a mesma do instante anterior subtraída do sinal de controle vezes o preço naquele instante:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), p(k)) \quad (6)$$

Onde

$$x(k) = \begin{bmatrix} Q(k) \\ S(k) \end{bmatrix}, k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\} \quad (7)$$

$$Q(k+1) = Q(k) + U(k)$$

$$S(k+1) = S(k)r - U(k)p(k)$$

Restrições de estado - a quantidade de cotas e dinheiro no primeiro e último instante da otimização devem ser compatíveis com as quantidades consolidadas nesses mesmos instantes e essas quantidades são positivas:

$$g(x(\hat{k}-N)) = \begin{bmatrix} g_1(Q(\hat{k}-N)) \\ g_2(S(\hat{k}-N)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8a)$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} Q(\hat{k} - N) \\ S(\hat{k} - N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^C(\hat{k} - N) \\ S^C(\hat{k} - N) \end{bmatrix} \quad (8b)$$

$$h(x(\hat{k})) = \begin{bmatrix} h_1(Q(\hat{k})) \\ h_2(S(\hat{k})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9a)$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} Q(\hat{k}) \\ S(\hat{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^C(\hat{k}) \\ S^C(\hat{k}) \end{bmatrix} \quad (9b)$$

$$w(x(k)) = \begin{bmatrix} w_1(Q(k)) \\ w_2(S(k)) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10a)$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} Q(k) \\ S(k) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\} \quad (10b)$$

Restrições de controle:

$$m(V(k)) = [m(V(k))] \leq [0] \quad (11a)$$

ou seja

$$[V(k)] \leq [Q(k)], k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\} \quad (11b)$$

$$o(C(k)) = [o(C(k))] \leq [0] \quad (12a)$$

ou seja

$$[C(k)] \leq [S(k)/p(k)], k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\} \quad (12b)$$

A solução do problema de controle ótimo com restrições fornece o conjunto de valores $\{U^*(k)\}$ que otimiza a carteira no intervalo de $k = \hat{k} - N$ à $k = \hat{k}$. Como dito na seção IV, o interesse recai somente sobre o valor $U^*(\hat{k})$ que indicará qual ação de compra ou venda deverá ser tomada no instante \hat{k} visando à otimização da carteira no horizonte estabelecido $\hat{k} - N \leq k \leq \hat{k}$.

Observa-se na figura 3, uma representação de como as restrições afetam a otimização.

Sendo, \hat{k} o instante de tomada de decisão, $x^C(\cdot)$ a trajetória histórica - aquela já realizada nos instantes passados ao instante \hat{k} ; $x^*(\cdot)$ a trajetória ótima no intervalo que deveria ter sido tomada visando à otimização de $J(\cdot)$.

Vale ressaltar que a trajetória $x^*(\cdot)$ é diferente para cada intervalo de tempo \hat{k} em que o algoritmo é utilizado; isso ocorre devido ao deslocamento da janela móvel de N instantes passados e também aos novos valores da função preço $p(k)$.

Observa-se o Exemplo 1 abaixo:

Exemplo 1 Suponha que $N = 10$. No instante \hat{k} decide-se utilizar o algoritmo de tomada de decisão para saber qual ação deve ser tomada $U(\hat{k})$. Utiliza-se então o horizonte de 11 instantes de tempo (o atual mais os 10 anteriores).

Para simplificar chama-se o primeiro instante “histórico” ($\hat{k} - N$) de instante 1 e o instante \hat{k} de instante 11. Para esse exemplo, tem-se: $\begin{bmatrix} Q(1) - Q^C(1) \\ S(1) - S^C(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} Q(11) - Q^C(11) \\ S(11) - S^C(11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que representam as restrições devido as ações $U(k)$, $k < \hat{k}$ tomadas no passado.

O algoritmo fornecerá valores de $U^*(k)$, $k \in \{1, 2, \dots, 11\}$, que otimizam a carteira no intervalo, porém somente interessa o valor $U^*(11)$ (ação de compra/venda que deve ser tomada no instante atual \hat{k}), já que todos os outros valores para $1 \leq k \leq 10$, que fazem parte do processo que gerou $U^*(\hat{k})$, são relativos à instantes passados.

Voltando agora à formulação matemática, desenvolve-se a equação (6). Retoma-se as equações (1), (2) e (7) e tem-se:

$$Q(k+1) = Q(k) + U(k), k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\}$$

e

$$S(k+1) = S(k)r - U(k)p(k), k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\}$$

Desenvolvendo agora a equação (4). A função objetivo será composta de duas parcelas diferentes, assim:

$$J_1(\hat{k}) = \sum_{k=\hat{k}-N}^{\hat{k}} [S(k) + Q(k)p(k)]l(k) \quad (13)$$

A primeira parcela leva em consideração todos os instantes de tempo entre $k = \hat{k} - N$ e \hat{k} , e a segunda parcela leva em consideração somente o último instante de tempo (condição terminal):

$$J_2(\hat{k}) = [S(\hat{k}) + Q(\hat{k})p(\hat{k})]l(\hat{k}) \quad (14)$$

Sendo assim, pode-se proceder a uma ponderação das duas parcelas:

$$J(\bullet) = \alpha J_1(\bullet) + \beta J_2(\bullet) \quad (15)$$

Tanto a função $l(\bullet)$, nas equações (5), (13) e (14) quanto as constantes α e β na equação (15) serão explicados nas seções seguintes; ainda assim, ressalta-se desde então que $l(\hat{k}) = 1$ na equação (14).

I Ponderação das variáveis do horizonte

Como visto na seção V, a função $l(\bullet)$ é utilizada como um multiplicador nas equações (5), (13) e (14).

Essa função tem o intuito de ponderar os valores, atuando como um "fator de esquecimento"; ou seja, tanto mais antigo o instante de tempo menor o valor de k , e menor será o valor de $l(\cdot)$, diminuindo assim a influência (do passado) daquele instante de tempo na função objetivo; conseqüentemente na tomada de decisão no instante \hat{k} .

Essa ponderação é feita de forma exponencial, tendo seu menor valor arbitrado em $l(\hat{k} - N) = 0.5$ e seu maior valor em $l(\hat{k}) = 1$. Representa-se a expressão de $l(\cdot)$ a seguir:

$$l(k) = \frac{1}{2} 2^{(-1+k)/(\hat{k}-N)} \quad (16)$$

II Ponderação das parcelas J_1 e J_2 (α e β)

A primeira parte da função objetivo, equação (13), é o somatório das variáveis correspondentes a todos instantes de tempo e a segunda parte, equação (14), leva em consideração somente o instante de tempo final. Nesse contexto, α e β podem ser entendidos como o grau de imediatismo do *Trader* utilizando o algoritmo, ou seja, dependendo dos valores α e β o sinal de controle $U^*(\hat{k})$ será mais ou menos importante.

Entende-se por grau de imediatismo do *Trader*, quanto esse espera lucrar no instante \hat{k} ; ou seja, uma estratégia mais imediatista implicará em sinais de controle maiores no instante \hat{k} .

Por outro lado, uma estratégia menos imediatista, implicará em sinais de controle menores no instante \hat{k} .

Ao utilizar $\alpha > \beta$, prioriza-se o rendimento do algoritmo proposto ao longo de todo o intervalo de tempo $k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\}$, por mais que os instantes $k < \hat{k}$ sejam passado. Isso faz com que o algoritmo tenha sinais de controle $U^*(\hat{k})$ moderados em relação à $U^*(k)$, $k < \hat{k}$.

No caso inverso, quando $\alpha < \beta$, prioriza-se a ação no instante final, gerando sinais de $U^*(\hat{k})$ mais importantes em relação à $U^*(k)$, $k < \hat{k}$.

III Diagrama clássico do controle do sistema

Observa-se agora o diagrama na forma clássica na qual o sinal de controle $U(k)$ é gerado pelo processo de otimização representado pela função Φ .

A função de otimização, como já explicado, utiliza valores atuais e passados das variáveis k , $Q(k)$, $S(k)$ e $p(k)$ e assim tem-se:

$$U(k) = \Phi_M(k, Q(k), S(k), p(k)), k \in \{1, 2, \dots, \hat{k}\}$$

Observa-se na figura 4 o diagrama de controle escrito na forma clássica. É possível notar que tanto o acoplamento das variáveis $Q(k)$ e $S(k)$ quanto o feedback acontecem pela variável $U(k)$ gerada pela função de otimização Φ .

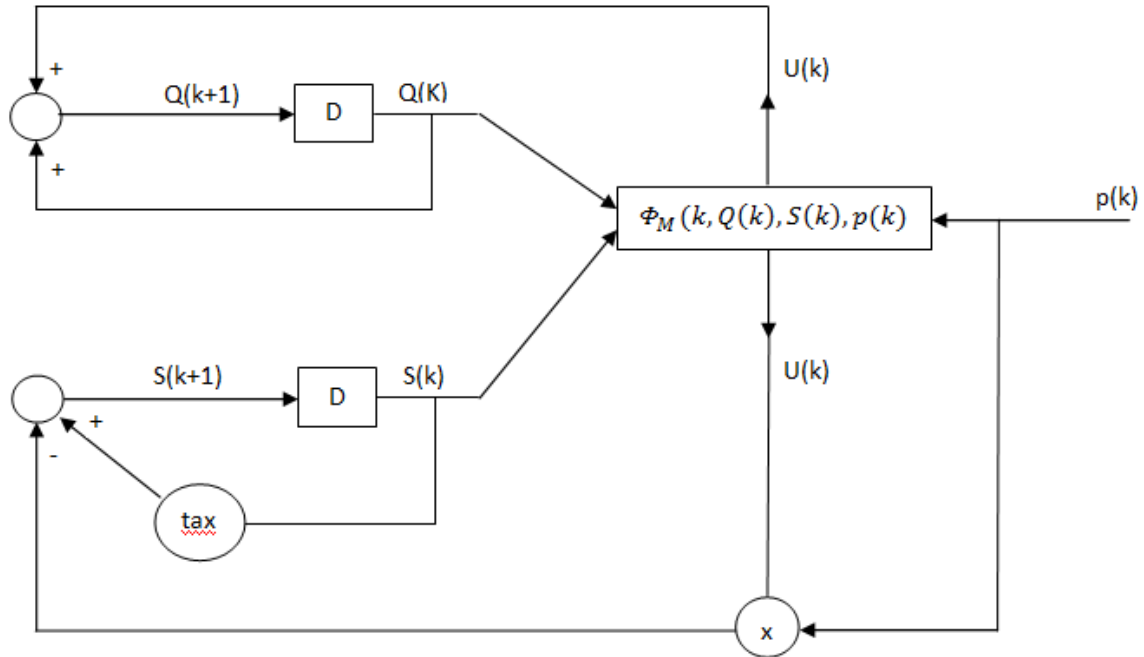


Figura 4: Diagrama de controle representado na forma clássica.

VI Lógica da implementação do algoritmo

Apresenta-se a seguir o modelo lógico da implementação do algoritmo. Analisando a figura 5 percebe-se que o primeiro bloco *Optimize* é o responsável por gerar os valores de $U^*(k)$, $k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$ como solução do problema de otimização dinâmica (os controles ótimos). O bloco seguinte de *Simulações* tem como variáveis de entrada N (a quantidade de instantes passados levados em consideração para a tomada de decisão no instante \hat{k}), o histórico de preços do ativo, $p(k)$, $k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$ e as variáveis de estado consolidadas $x^C(Q^C, S^C)$, referentes às restrições de estado listadas nas equações (8) e (9) e mostradas na figura 3.

Os valores de $U^*(k)$ gerados pelo bloco *Optimize* representam os comandos de compra e venda que deveriam ter sido tomados nos instantes $\hat{k} - N \leq k \leq \hat{k}$ para maximizar a função objetivo (15). Enfatiza-se que apesar de somente o valor $U^*(\hat{k})$ interessar, uma vez que é a ação que deve ser tomada no instante \hat{k} , todos os outros valores $U^*(k)$ para $\hat{k} - N \leq k < \hat{k}$ são levados em consideração para a otimização do funcional (15).

O conjunto de valores $\{U(k)\}$ gerados pelo bloco *Optimize* corresponde à entrada do bloco de *Simulações* que vem seguido do bloco de *Cálculo de $J(\cdot)$* . Utilizando as equações (1), (2) e (5) é calculado o valor da função objetivo (15).

O bloco *Optimize* "verifica" se a função objetivo $J(\cdot)$ atingiu o valor máximo. Caso a função tenha atingido o valor máximo, tem-se então o conjunto $\{U^*(k)\}$ que maximiza $J(\cdot)$, e portanto o valor $J^*(\cdot)$ máximo da função objetivo. Caso o conjunto $\{U(k)\}$ não maximize a função objetivo $J(\cdot)$, um novo $\{U(k)\}$ é gerado e testado. O raciocínio segue até achar-se o conjunto $\{U^*(k)\}$.

O método utilizado pelo módulo *Optimize* não é informado nos manuais *Berkeley-Madonna*, no entanto, até onde se sabe, ele é baseado em algum tipo de método gradiente.

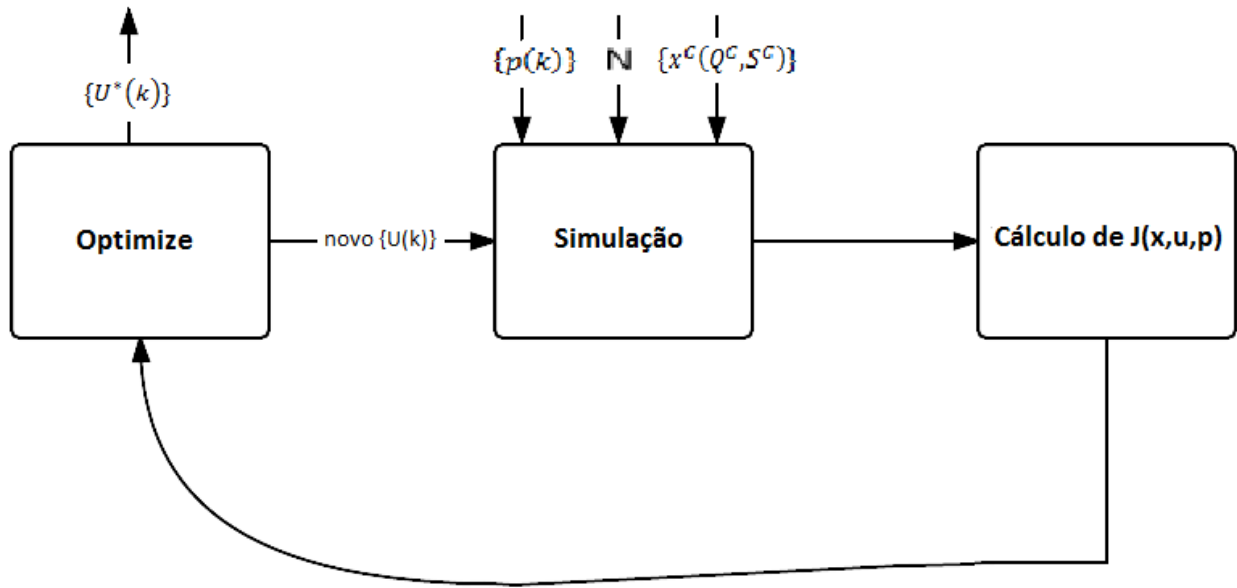


Figura 5: Diagrama lógico da estrutura do algoritmo.

VII Índices e indicadores de mercado

Indicadores financeiros são taxas utilizadas como parâmetros de comparação para avaliar a performance de investimentos, fundos de investimento, carteiras de ativos, entre outros, ao longo do tempo.

Cada tipo de investimento possui um indicador mais adequado a ser utilizado; por exemplo, não seria justo comparar um investimento voltado para a poupança com um indicador voltado para uma carteira de ações devido à rentabilidade, risco, montante, etc.

Como critério de avaliação e de comparação para o algoritmo proposto, utiliza-se três indicadores de comparação, o primeiro será o **CDI**, voltado a investimentos de renda fixa, como os juros aplicados ao montante de capital $S(\hat{k})$ não consumido no instante \hat{k} .

O segundo indicador será o **IBOVESPA**, voltado a investimentos em carteiras de ações.

O terceiro indicador, diferente dos outros dois utilizados no mercado, foi criado para representar o caso em que nenhuma ação de compra ou venda é tomada em nenhum instante de simulação. Apelida-se esse índice de **Trader inativo**.

Para analisar a evolução dos índices foi criada a variável $G(\cdot)$ que representa o patrimônio financeiro em cada instante de tempo de simulação \hat{k} .

Por motivos de confidencialidade, não serão comparadas as decisões de compra e venda tomadas no presente trabalho com aquelas feitas por pessoas físicas ou jurídicas na Bolsa de Valores.

I CDI

CDI é o Certificado de Depósito Interbancário, é um título de emissão das instituições financeiras que lastreia as operações do mercado interbancário, ou seja, transações entre bancos.

É esse certificado que permite que os bancos emprestem dinheiro e, também, o tomem emprestado de outras instituições financeiras; o CDI pode render uma taxa de juros variável ou

fixa.

A taxa de juros CDI é calculada com base nas operações de emissão de depósitos entre bancos pré-fixados e representa as condições de liquidez do mercado. A taxa do CDI tem como característica acompanhar de perto a variação da taxa Selic, a taxa básica de juros do país. Tanto a taxa do CDI quanto a Selic são estabelecidas diariamente.

Para representar o índice CDI, utiliza-se a notação: δ_{CDI} .

O índice δ_{CDI} será a área embaixo da curva do CDI, ou seja, no instante inicial de simulação aplicar-se-á o valor de $S(1)$ e o equivalente financeiro de $Q(1)$ em qualquer investimento que renda a taxa CDI, assim:

$$G_{CDI}(1) = S(1) + Q(1) * p(1)$$

Durante o período de simulação não existirão ações de compra ou venda relativas a esse investimento e, por isso, a variável $G(\cdot)$ terá um ganho equivalente ao CDI em todos os instantes de tempo \hat{k} .

Para um simulação de 30 dias consecutivos:

$$\delta_{CDI} = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} G_{CDI}(\hat{k}) - G_{CDI}(1) \quad (17)$$

O índice δ_{CDI} é afetado exclusivamente pelo rendimento do indicador CDI.

II IBOVESPA

O Ibovespa é o resultado de uma carteira teórica de ativos, elaborada de acordo com os critérios estabelecidos em sua metodologia.

O objetivo do Ibovespa é ser o indicador do desempenho médio das cotações dos ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro, ou seja, o indicador da melhor carteira teórica de ativos no dia.

Para mais informações sobre os ativos na carteira Ibovespa, vide apêndice B.

Para representar o índice Ibovespa durante uma simulação de 30 dias consecutivos, utiliza-se a notação: δ_{IBOV} .

Como o índice CDI, o índice Ibovespa será a área embaixo da curva Ibovespa, assim no instante inicial de simulação é feita a seguinte equivalência:

$$G_{IBOV}(1) = S(1) + Q(1) * p(1)$$

O ganho de $G(\cdot)$ em todos os instantes de tempo \hat{k} será igual ao ganho do indicador Ibovespa; ou seja, não existe ação de compra ou venda e o valor de δ_{IBOV} é afetado exclusivamente pela variação do próprio indicador Ibovespa.

$$\delta_{IBOV} = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} G_{IBOV}(\hat{k}) - G_{IBOV}(1) \quad (18)$$

III Índice *Trader* inativo

Esse índice representa o caso em que nenhuma ação de compra ou venda é tomada durante os instantes \hat{k} de simulação.

Sendo:

$$G_0(1) = S(1) + Q(1) * p(1)$$

Observa-se, portanto, que a variação de $G(\cdot)$ em todos os instantes de tempo \hat{k} será igual à variação da função preço $p(\hat{k})$.

Para representar o índice durante uma simulação de 30 dias consecutivos, utiliza-se a notação: δ_0 .

$$\delta_0 = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} G_0(\hat{k}) - G_0(1) \quad (19)$$

IV Índices de rendimento comparativos com os resultados do algoritmo

Uma vez apresentados os índices δ_{CDI} , δ_{IBOV} e δ_{CDI} , especifica-se o índice do algoritmo como δ_{alg} :

$$\delta_{alg} = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} G_{alg}^*(\hat{k}) - G_{alg}^*(1)$$

Para esse caso específico, como a variação de $G(\cdot)$ é devida a utilização das ações de controle geradas pelo algoritmo, tem-se:

$$G_{alg}^*(\hat{k}) = J_{alg}^*(\hat{k}) \quad (20)$$

Para enfatizar a diferença entre os índices, o CDI, o Ibovespa e o *Trader* inativo, formados sem que sejam tomadas ações de controle, terão seus ganhos representados nos gráficos pela variável $G(\cdot)$.

Por outro lado o índice do algoritmo, formado tomando as ações de controle geradas pela otimização, será representado por sua função objetivo $J(\cdot)$. Como já visto, $G_{alg}^*(\hat{k}) = J_{alg}^*(\hat{k})$.

Sendo assim, criam-se os seguintes índices de rendimento comparativos, em relação ao instante inicial de simulação:

Sendo:

$$J_{alg}^*(1) = G_{CDI}(1) = G_{IBOV}(1) = G_0(1) = G(1)$$

Índice de rendimento do algoritmo sobre o CDI, em relação ao instante inicial de simulação:

$$\mu_{alg/CDI} = \frac{\delta_{alg} - \delta_{CDI}}{G(1)} \quad (21)$$

O índice de rendimento do algoritmo do o Ibovespa, em relação ao instante inicial de simulação:

$$\mu_{alg/IBOV} = \frac{\delta_{alg} - \delta_{IBOV}}{G(1)} \quad (22)$$

E por último, o índice de rendimento do algoritmo *Trader* inativo, em relação ao instante inicial de simulação:

$$\mu_{alg/0} = \frac{\delta_{alg} - \delta_0}{G(1)} \quad (23)$$

Os índices de rendimento apresentados representam a diferença (financeira) entre as curvas $J(\hat{k})$ sobre o montante inicial, mostra a porcentagem de rendimento do algoritmo proposto frente aos outros indicadores de mercado.

VIII Simulações

Com o intuito de comprovar a eficiência do algoritmo proposto, sob os parâmetros/índices acima, diferentes simulações foram realizadas. Para as simulações utiliza-se a função preço $p(k)$ equivalente a uma ação negociada na Bolsa de Valores.

O ativo utilizado como base para a função preço $p(k)$ foi o **Bradesco ON - BBDC3**, escolhido de maneira aleatória [9]. Pode-se observar a variação do preço do ativo citado no gráfico 6, no intervalo dos dias 22/09/2015 até 19/11/2015.

Observação: Ressalta-se que tanto o ativo quanto o intervalo de dias desse foram escolhidos de maneira aleatória. Observa-se também que o ativo segue as mesmas tendências de queda e alta do índice Ibovespa, de forma que os resultados obtidos na simulação não possuem qualquer forma de viés devido a movimentos contrários do ativo em relação ao índice.

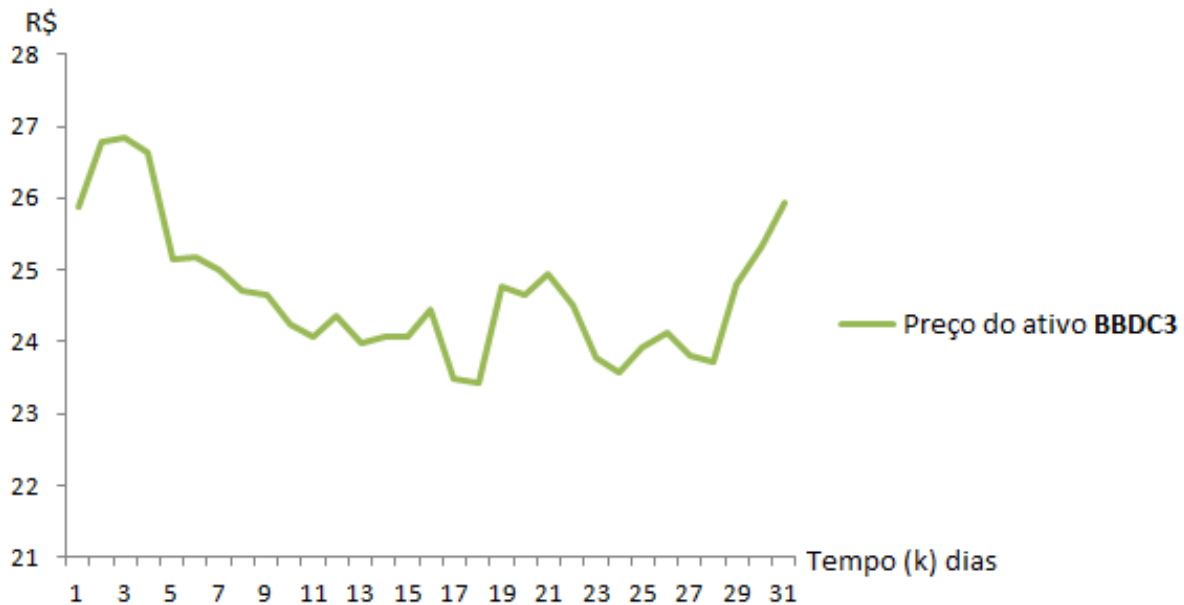


Figura 6: Variação do preço do ativo Bradesco ON - BBDC3 no intervalo de simulação.

As simulações foram organizadas da seguinte forma:

- Simulação 1 - Representação da Janela móvel: Essa simulação tem o objetivo de re-representar a figura 3, novamente para três instantes consecutivos de tempo, ilustrando o funcionamento da janela móvel.

Utiliza-se para a simulação a seguinte função:

$$f(k) + f(\hat{k})$$

Sendo:

$$f(k) = S(k) + Q(k)p(k)$$

A função $f(k)$ representa o fator do somatório, equação 5, em cada instante de tempo k . Nessa simulação também será apresentado o conjunto de sinais de controle $\{U^*(k)\}$, $k - N \leq k \leq \hat{k}$, gerado pelo algoritmo no processo de otimização da função objetivo, equação (5).

- Simulação 2 - Utilização do algoritmo proposto durante um intervalo de 30 dias: Mostrará o desempenho do algoritmo proposto, durante 30 dias seguidos; em que para cada dia é feita uma nova utilização do algoritmo, obtendo os valores de $J_{alg}^*(\hat{k})$ e $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$.

Serão feitas 30 rodadas de simulações diferentes, uma para cada novo instante \hat{k} e novo valor de $p(\hat{k})$. Mostra-se a evolução da função $J_{alg}^*(\hat{k})$, equação (5), nos instantes de tempo \hat{k} e também o conjunto de sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$, $\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$ gerado pelo algoritmo proposto.

Sendo assim, pegando por exemplo o instante $\hat{k} = 15$, conhece-se os valores $p(15)$ e os valores $p(k)$, $k < 15$; nesse instante tem-se $J_{alg}^*(15)$ e o algoritmo indicará $U_{alg}^*(15)$, plotados nas figuras 10 e 11 respectivamente. Já para o instante seguinte $\hat{k} = 16$, conhece-se os valores $p(16)$ e os valores $p(k)$, $k < 16$; nesse instante tem-se $J_{alg}^*(16)$ e o algoritmo indicará $U_{alg}^*(16)$, também plotados nas figuras 10 e 11

É importante apontar a diferença entre essa segunda simulação e a primeira. Enquanto na primeira, mostra-se o comportamento do algoritmo proposto, ao longo dos instantes k até o instante \hat{k} , demonstrando o processo do algoritmo para achar $U_{alg}^*(\hat{k})$ em um instante \hat{k} ; nessa segunda simulação é mostrado somente o resultado nos trinta instantes \hat{k} diferentes.

Essa simulação tem o intuito de reproduzir uma situação real em que um *Trader* decide utilizar o algoritmo proposto durante trinta dias consecutivos e qual resultado ele obterá.

- Simulação 3 - Comparação entre os resultados do algoritmo proposto e o caso em que o sinal de controle é sempre nulo, *Trader* inativo: Retoma os resultados obtidos na segunda simulação e os compara ao caso em que não é tomada nenhuma ação de controle nos instante de tempo, ou seja, para cada instante de tempo \hat{k} :

$$\{U_0(k)\} = 0, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$$

e

$$\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$$

$$Q(1) = Q(30)$$

$$S(1) = S(30)$$

- Simulação 4 - Comparação entre os resultados do algoritmo proposto e o caso em que o sinal de controle é randômico: Retoma os resultados obtidos na segunda simulação e os compara ao caso em que os valores de $\{U_{rnd}(k)\}$ são gerados de forma randômica porém seguem o sinal de $\{U_{alg}^*(k)\}$:

$$U_{alg}^*(k) > 0 \rightarrow U_{rnd}(k) > 0, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$$

$$U_{alg}^*(k) < 0 \rightarrow U_{rnd}(k) < 0, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$$

e

$$\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$$

Sendo assim, os sinais dos valores de $\{U_{rnd}(k)\}$ serão os mesmos de $\{U_{alg}^*(k)\}$ porém sua amplitude será gerada de forma randômica.

- Simulação 5 - Resultados do algoritmo proposto sem a restrição no instante de tempo final: Visa a mostrar o comportamento do algoritmo proposto sem restrições impostas nos instantes \hat{k} devido às variáveis de estado $Q(\hat{k})$ e $S(\hat{k})$, liberando a otimização da restrição de estado dada pela equação (9).

Essa simulação servirá para mostrar a otimização plena da função objetivo pelo algoritmo proposto caso esse não estivesse sujeito às restrições do instante \hat{k} (que representam o estado real do sistema).

Após as simulações feitas, essas serão comparadas, na seção seguinte, com os indicadores de mercado já citados, **CDI** e **IBOVESPA** e **Trader inativo**. O intuito dessa comparação é mostrar a eficiência do algoritmo proposto frente aos parâmetros já estabelecidos no mercado.

I Simulação 1 - Representação da Janela móvel

Essa primeira simulação será destinada a representar a utilização da janela móvel com valores reais do processo de otimização. Para a simulação foi usada a função preço $p(k)$ do ativo **Bradesco ON - BBDC3**, figura 6. Adota-se $N = 10$ e especifica-se as condições iniciais $Q(1) = 200$ e $S(1) = 10000$; utiliza-se $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Nos gráficos, mostra-se o comportamento da função $f(k) + f(\hat{k})$, já explicada anteriormente.

Pode-se observar pela figura 7 que são utilizados três instantes de tempo \hat{k} : $\hat{k} = 12$, $\hat{k} = 13$ e $\hat{k} = 14$. Como foi adotado $N = 10$, percebe-se pelos gráficos, figura 7 e 8, a utilização, no processo de otimização, de 10 instantes de tempo k anteriores ao instante \hat{k} .

Por exemplo, para o instante $\hat{k} = 12$ a janela móvel começa em $k = 2$.

Observando agora os sinais de controle $\{U^*(k)\}$ obtidos durante o processo de otimização, figura 8, e comparando à função preço $p(k)$, figura 6, nota-se que o algoritmo compra ativos quando o preço desse está baixo e vende-os quando o preço está alto.

Pegando por exemplo os instantes $k = 3, 4$ em que os valores de $p(k)$ são os mais altos, percebe-se pela figura 8 que nesses instantes o sinal de controle $U^*(3, 4)$ foi o mais negativo, ou seja, o algoritmo propôs a venda de mais ativos.

Analisando os instantes $k = 10, 11$ em que os valores de $p(k)$ são os mais baixos, percebe-se que nesses instantes o sinal $U^*(10, 11)$ foi o mais positivo, ou seja, o algoritmo propôs a compra de mais ativos.

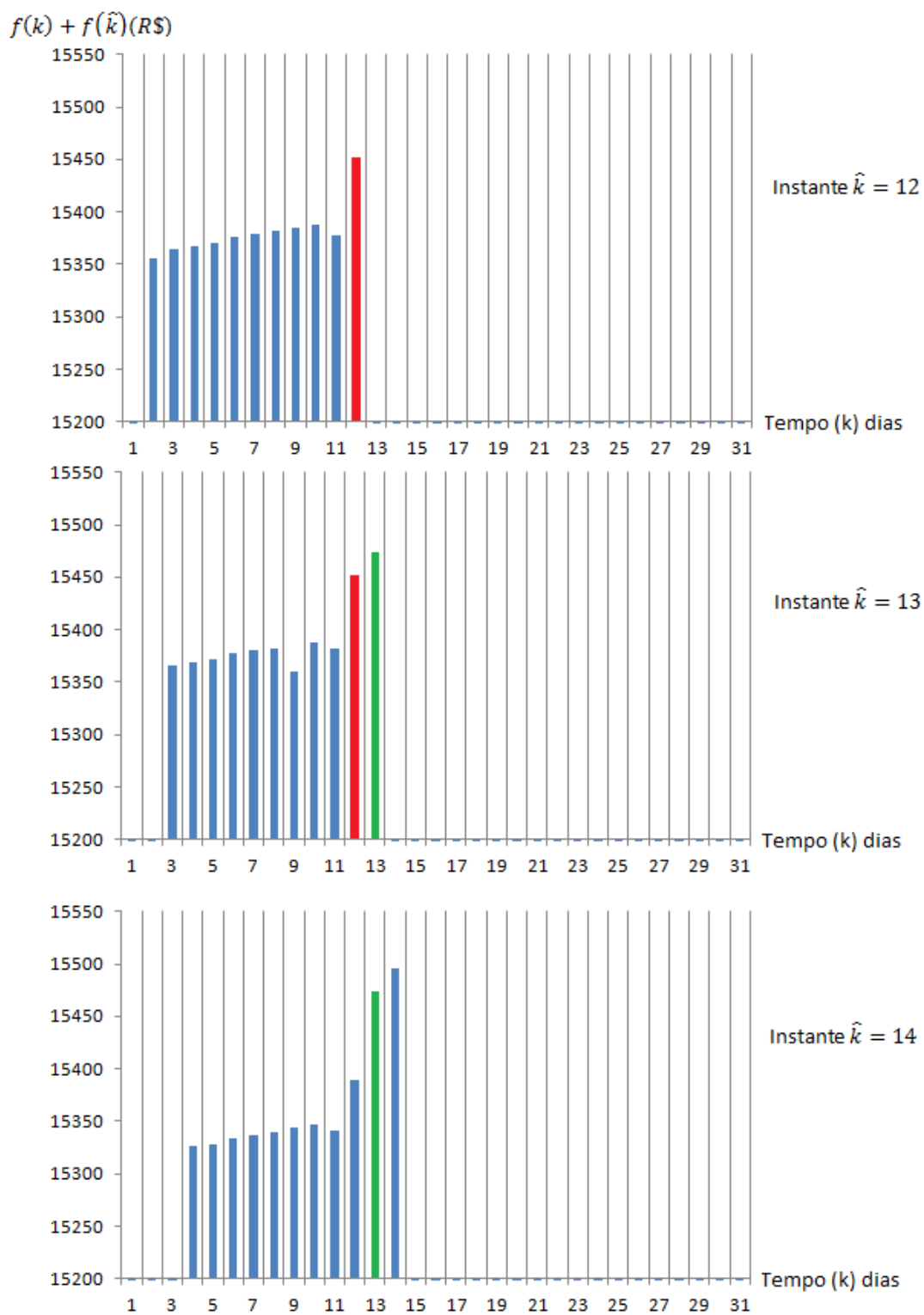


Figura 7: Simulação 1 - Representação da janela móvel utilizando dados reais da simulação.

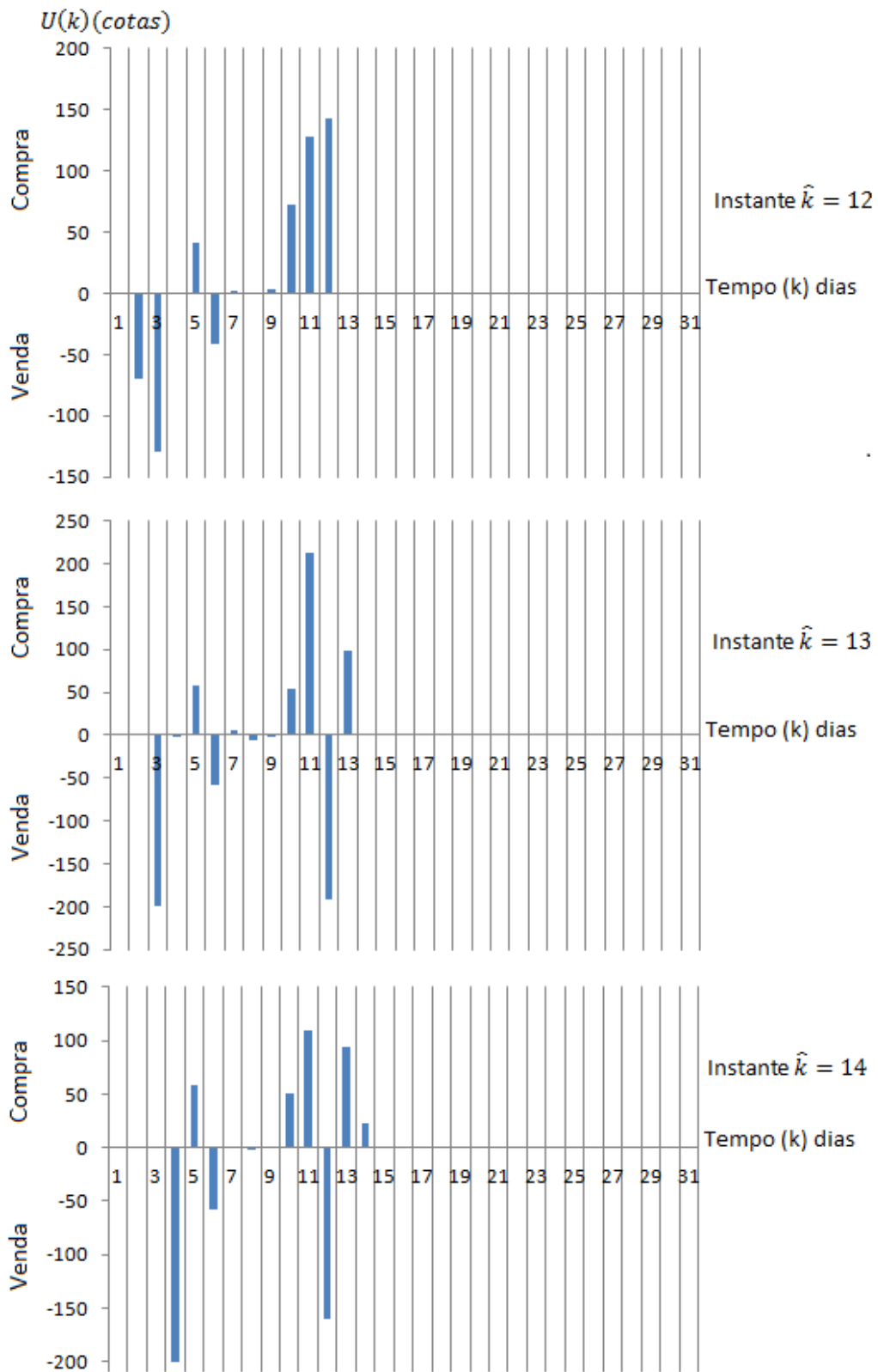


Figura 8: Simulação 1 - Representação do sinais de controle $\{U^*(k)\}$ utilizados no processo de otimização.

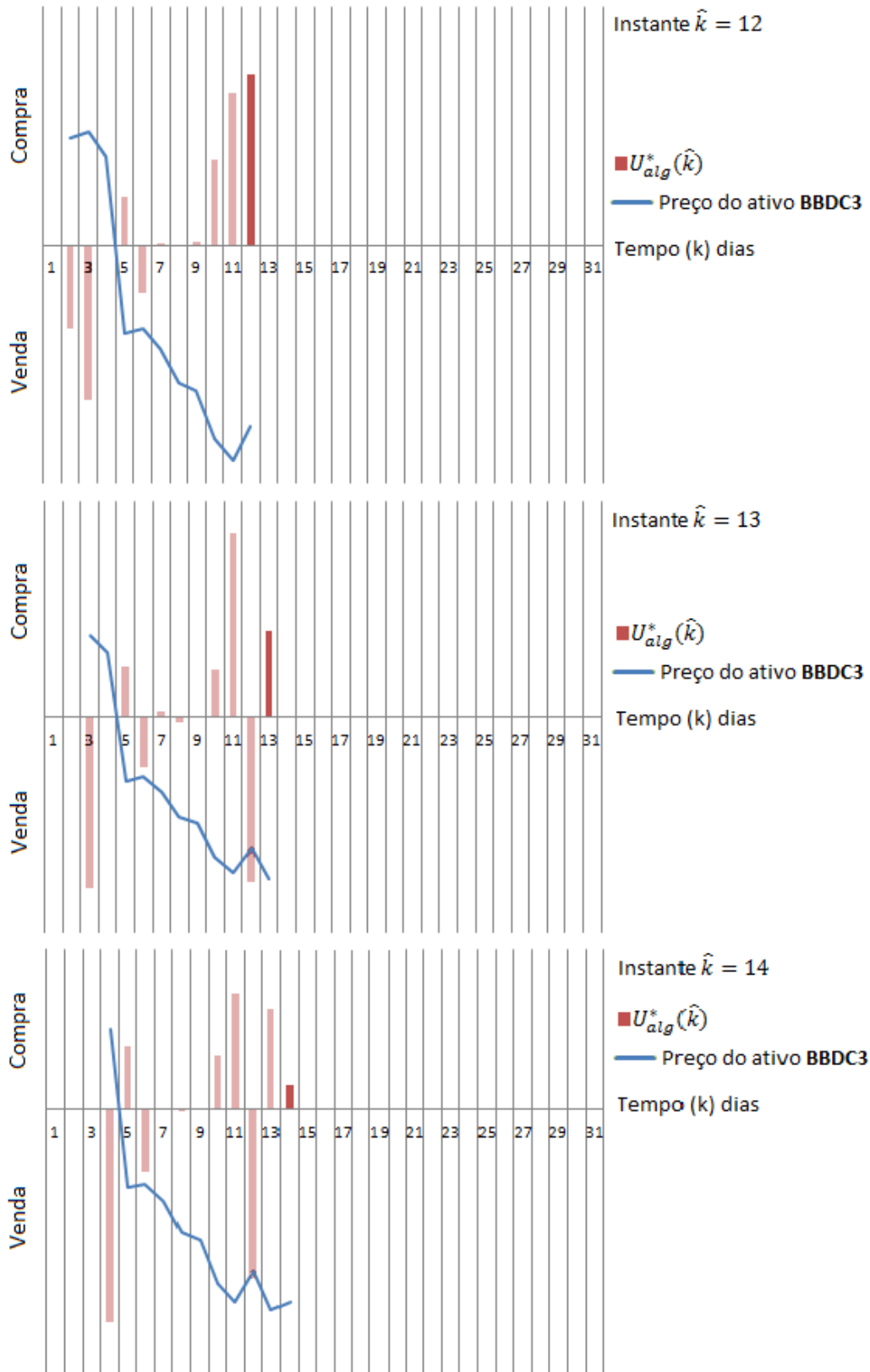


Figura 9: Simulação 1 - Sobreposição (fora de escala) dos sinais de controle $\{U^*(k)\}$ sobre a função preço $p(k)$.

Agora analisando o instante $k = 12$. Na primeira simulação $\hat{k} = 12$, percebe-se que o sinal $U(12)$ era positivo, de compra, já que comparando a todos os outros instantes passados, $p(12)$ era baixo e porque não tinha-se informação de $p(k)$, $k > 12$.

No segundo momento da simulação, $\hat{k} = 13$, percebe-se que $U(12)$ passa a ser negativo, de venda. Isso acontece porque $p(13) < p(12)$, logo, o algoritmo proposto entende que será melhor, no lugar de comprar em $k = 12$, vender por um preço mais alto em $k = 12$ e comprar por um preço mais baixo em $k = 13$.

Observa-se por último na figura 9, a sobreposição dos sinais de controle $\{U^*(k)\}$ sobre a função preço $p(k)$.

II Simulação 2 - Utilização do algoritmo proposto durante um intervalo de 30 dias

Para a segunda simulação, é usada como base a função preço $p(k)$ do ativo **Bradesco ON - BBDC3**, figura 6, no intervalo de datas do dia 22/09/2015 até 19/11/2015. Para essa simulação, adota-se $N = 10$ e especificam-se as condições iniciais $Q(1) = 200$ e $S(1) = 10000$; utiliza-se $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Percebeu-se que a utilização da variável r alterava de forma ínfima o resultado final; por isso essa variável não foi utilizada nem no momento da simulação nem na posterior coleta de dados.

Observa-se na figura 10 a evolução da função $J_{alg}^*(\hat{k})$ nos instantes de tempo \hat{k} da simulação.

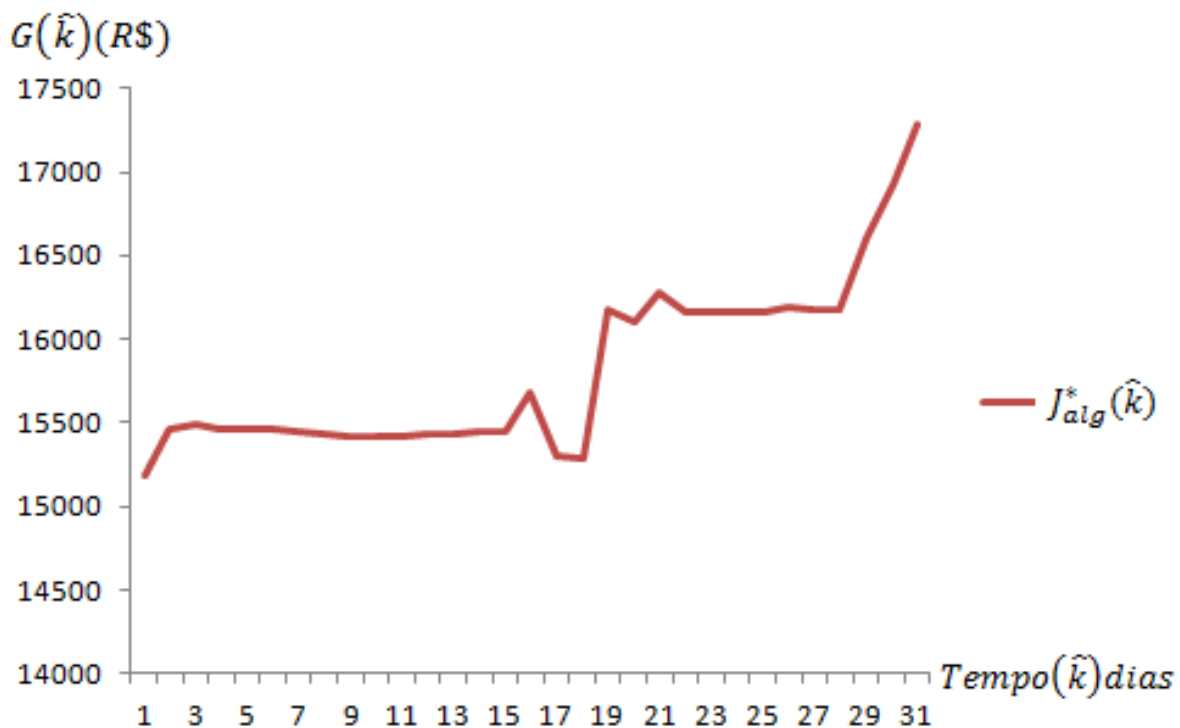


Figura 10: Simulação 2 - Evolução da função $J_{alg}^*(\hat{k})$ em função dos sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$.

Observa-se agora na figura 11, o conjunto de sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$ que otimizou $J_{alg}^*(\hat{k})$.

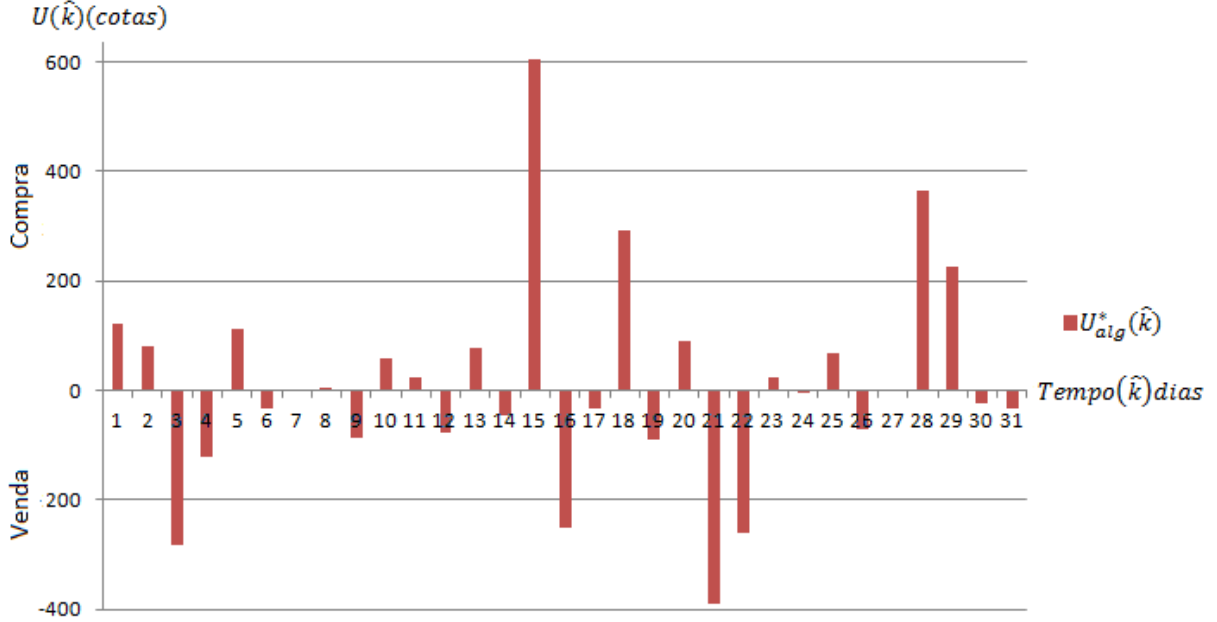


Figura 11: Simulação 2 - Conjunto de sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$.

Na figura 12, observa-se a sobreposição do conjunto de sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$ sobre a função preço $p(\hat{k})$.

Observa-se que o algoritmo tende a comprar ativos quando a função $p(k)$ tem valores baixos e os vende quando $p(k)$ tem valores mais altos; obtendo lucro com a variação do preço. Não é possível observar esse comportamento em todos os instantes de tempo \hat{k} por se tratar de um processo de otimização em que nem sempre os resultados são intuitivos.

III Simulação 3 - Comparação entre os resultados do algoritmo proposto e o caso em que o *Trader* é inativo

Para essa simulação, foram mantidos os mesmos parâmetros utilizados nas simulações passadas, ou seja, mesma função $p(k)$ para o mesmo intervalo de tempo, figura 6, $N = 10$, condições iniciais $Q(1) = 200$ e $S(1) = 10000$ e $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Essa simulação é destinada a mostrar a comparação da função $J_{alg}^*(\hat{k})$ utilizando o conjunto de sinais de controle gerado pelo algoritmo $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$ e o caso em que não é tomada nenhuma ação de controle em nenhum instante de tempo, ou seja $\{U_0(k)\} = 0, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$ e $\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$.

Percebe-se pela figura 13 que enquanto a função $G_0(\hat{k})$, obtida utilizando como sinais de controle $\{U_0(\hat{k})\}$ variava somente de acordo com a variação de $p(\hat{k})$ ($Q(\hat{k})$ e $S(\hat{k})$ são constantes pois $\{U_0(\hat{k})\} = 0, \forall \hat{k}$), a função J_{alg}^* era sempre maximizada devido à $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$.

Percebe-se que para todos os instantes de tempo utilizados na simulação foi obtido $J_{alg}^*(\hat{k}) > G_0(\hat{k})$, comprovando que, para esse intervalo de simulação, um *Trader* utilizando o algoritmo

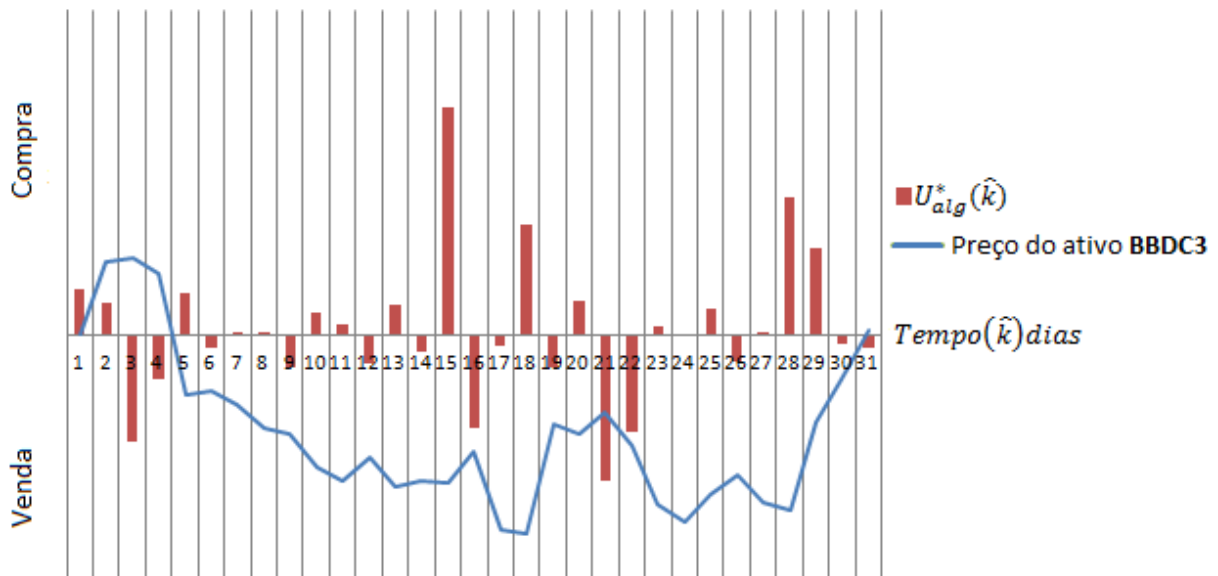


Figura 12: Simulação 2 - Sobreposição do conjunto de sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$ sobre a função preço $p(\hat{k})$.

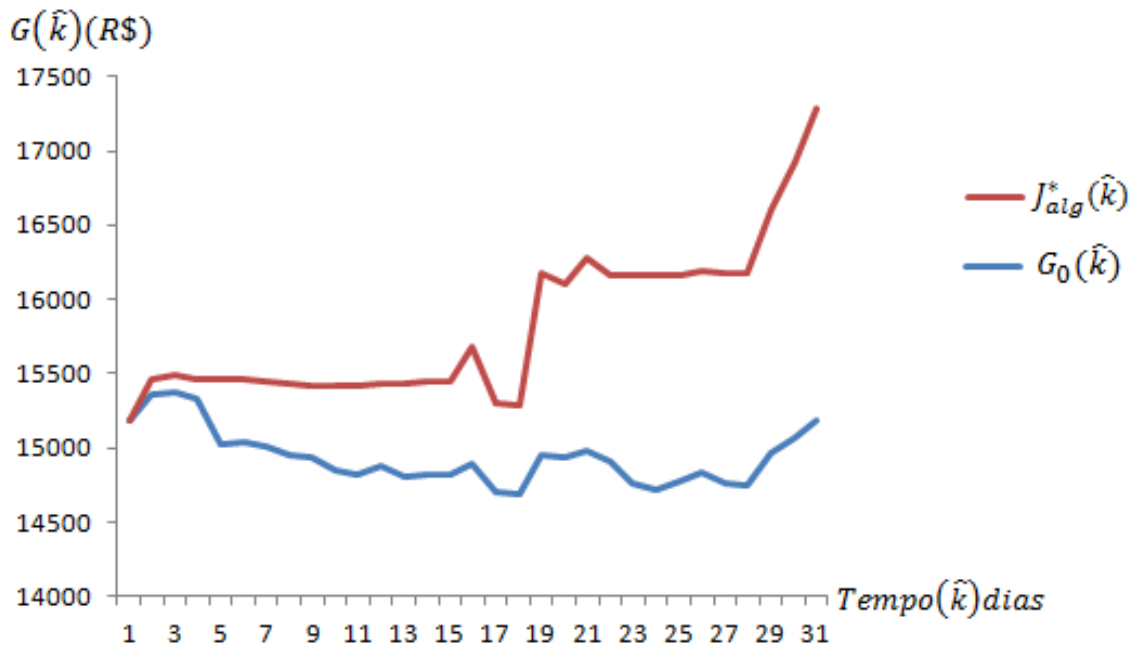


Figura 13: Simulação 3 - Comparação entre a utilização do algoritmo proposto e o caso em que $\{U_0(k)\} = 0, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$ e $\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$.

proposto obteria mais sucesso que caso decidisse não tomar nenhuma ação de compra ou venda frente à variação de $p(\hat{k})$.

IV Simulação 4 - Comparação entre os resultados do algoritmo proposto e o caso em que o sinal de controle é randômico

Ainda com todos os parâmetros das simulações anteriores mantidos iguais, a seguinte simulação é destinada a mostrar a comparação da função $J_{alg}^*(\hat{k})$ utilizando o conjunto de sinais de controle gerado pelo algoritmo $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$ e o caso em que os valores de $\{U_{rnd}(\hat{k})\}$ são gerados de forma randômica porém respeitam:

$$U_{alg}^*(\hat{k}) > 0 \rightarrow U_{rnd}(\hat{k}) > 0$$

$$U_{alg}^*(\hat{k}) < 0 \rightarrow U_{rnd}(\hat{k}) < 0$$

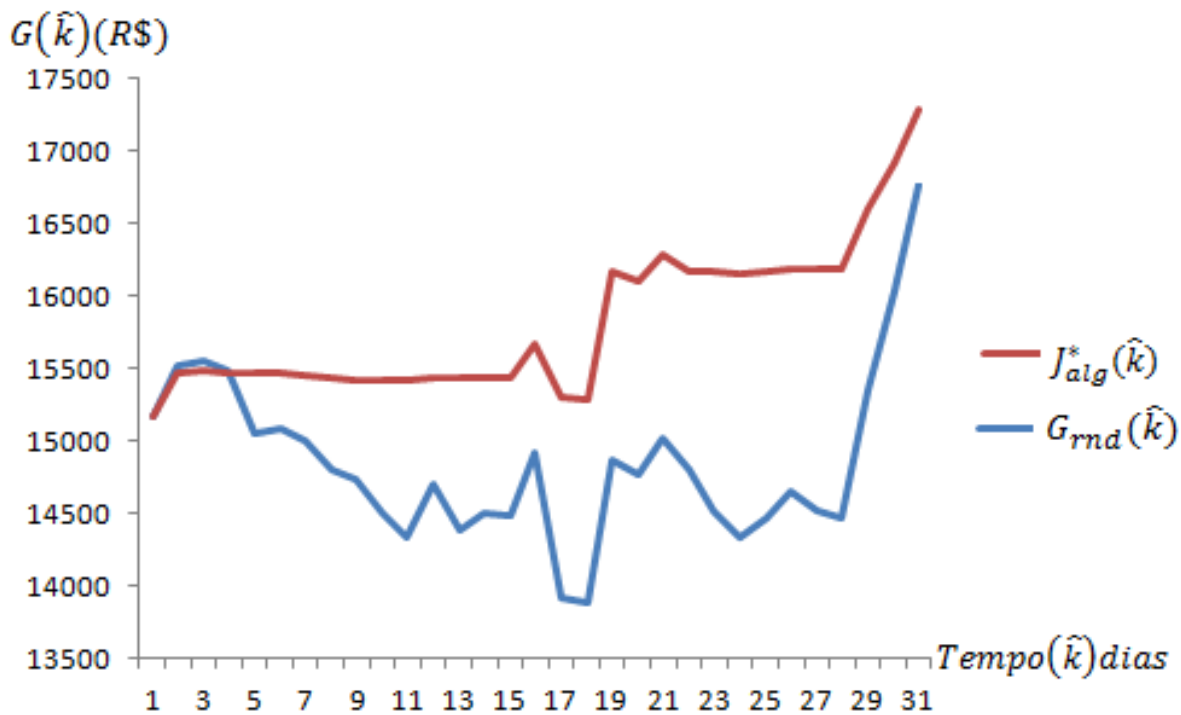


Figura 14: Simulação 4 - Comparação entre a utilização do algoritmo proposto e o caso em que o conjunto $\{U_{rnd}(k)\} = rnd, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$ e $\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$.

Assim como nas duas primeiras simulações, nesta terceira $J_{alg}^*(\hat{k}) > G_{rnd}(\hat{k})$ para a maioria dos instantes de tempo, figura 14, comprovando que, para esse intervalo de simulação, um *Trader* utilizando o algoritmo proposto obteria mais sucesso que caso decidisse adotar valores randômicos de compra ou venda de cotas frente à variação de $p(\hat{k})$.

Observa-se na figura 15, a comparação entre o conjunto de sinais de controle gerado pelo algoritmo proposto $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$ e o conjunto de sinais de controle randômico $\{U_{rnd}(\hat{k})\}$.

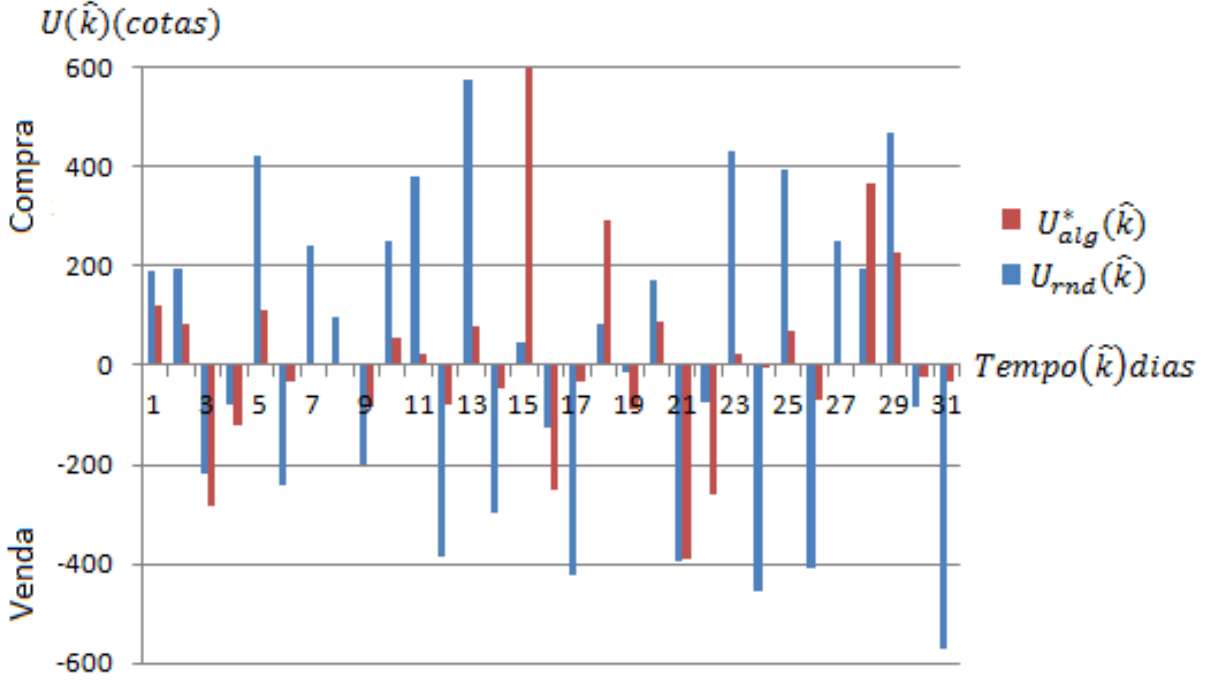


Figura 15: Simulação 4 - Comparação entre o conjunto de sinais de controle $\{U_{alg}^*(\hat{k})\}$ e o conjunto de sinais de controle $\{U_{rnd}(k)\} = rnd, k \in \{\hat{k} - N, \dots, \hat{k}\}$ e $\hat{k} \in \{1, 2, \dots, 30\}$.

V Simulação 5 - Resultados do algoritmo proposto sem a restrição no instante de tempo final

Para essa simulação, os parâmetros $p(k)$, $N = 10$, condições iniciais $Q(1) = 200$ e $S(1) = 10000$ e $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ foram mantidos iguais porém a restrição de estado dada pela equação (9) foi relaxada.

O objetivo dessa simulação é mostrar a otimização plena do algoritmo sem que no instante \hat{k} seja preciso respeitar $Q(\hat{k}) = Q^C(\hat{k})$ e $S(\hat{k}) = S^C(\hat{k})$.

Pode-se observar na figura 16 que a curva $J_{alg-NR}^*(\hat{k})$, representando os resultados obtidos quando a restrição da equação (9) foi relaxada, é sempre maior que a curva $J_{alg}^*(\hat{k})$.

Esses resultados mostram, como esperado, que caso não seja necessário respeitar as restrições de estado do instante \hat{k} , ou seja, se existe algum *estoque extra* que possa ser utilizado de $Q(\hat{k})$ e $S(\hat{k})$, o rendimento do algoritmo proposto é ainda maior.

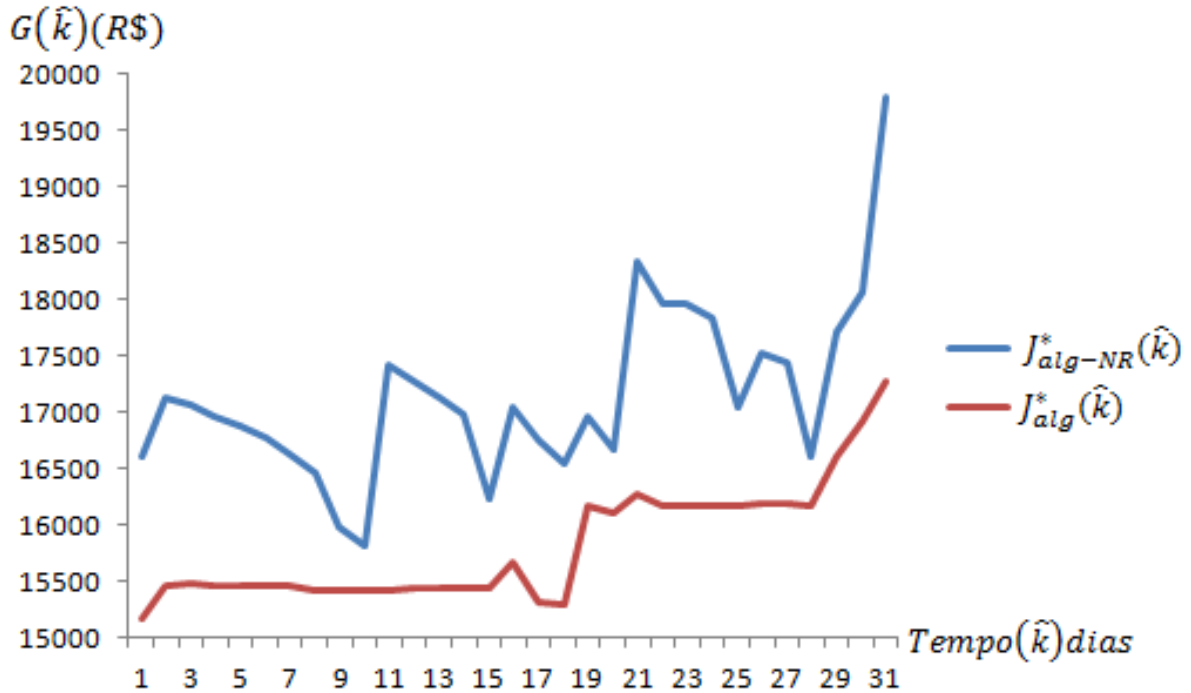


Figura 16: Simulação 5 - Comparação entre a utilização do algoritmo proposto e o caso em que a restrição dada pela equação (9) não é respeitada.

IX Resultados comparativos das simulações com os indicadores CDI, IBOVESPA e *Trader* inativo

Essa seção foca em comparar os resultados obtidos na simulação 2 com os indicadores de mercado já explicitados na seção VII.

Utiliza-se nas comparações os valores de δ e μ ; sendo o primeiro o rendimento financeiro do algoritmo frente aos indicadores de mercado e o segundo, o índice de rendimento percentual do algoritmo frente aos indicadores de mercado no período de simulação.

O objetivo da comparação é mostrar a eficiência do algoritmo proposto frente aos indicadores de mercado. Essa comparação tem o intuito de indicar quanto melhor ou o pior o algoritmo é em relação ao mercado e se sua utilização é plausível na prática.

I Comparação ao indicador CDI

Analisando o instante $\hat{k} = 1$:

$$J_{alg}^*(1) = G_{CDI}(1) = G(1) = R\$15176,398$$

Isso dá:

$$\delta_{alg} = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} J_{alg}^*(\hat{k}) - J_{alg}^*(1) = 19786,976$$

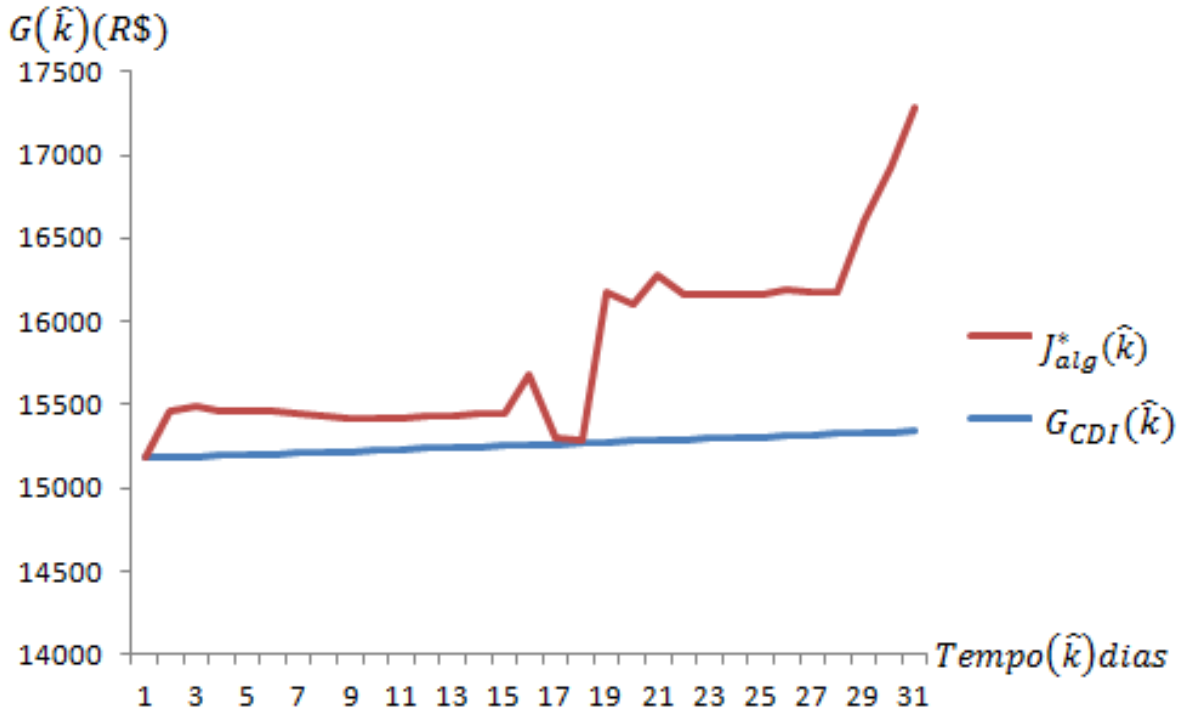


Figura 17: Resultados Comparativos - Comparação da evolução de J_{alg}^* com a evolução de J_{CDI} .

Sabe-se que o indicador CDI rendeu juros com uma taxa de 1,1077% ao mês no intervalo de simulação [9].

Isso dá:

$$\delta_{CDI} = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} G_{CDI}(\hat{k}) - G_{CDI}(1) = 2614,912$$

Pode-se observar pela demonstração acima e pela figura 17 que a utilização do algoritmo proposto gerou um rendimento, em relação ao instante inicial, maior que o indicador CDI:

$$\mu_{alg/CDI} = \frac{\delta_{alg} - \delta_{CDI}}{G(1)} = \frac{19786,976 - 2614,912}{15176,398}$$

$$\mu_{alg/CDI} = 1,132$$

II Comparação ao indicador IBOVESPA

Compara-se agora o desempenho do algoritmo proposto frente ao indicador Ibovespa.

A comparação será feita com os resultados obtidos na simulação com a função $p(k)$ referente ao ativo **Bradesco ON - BBDC3**, figura 6, no intervalo de datas do dia 22/09/2015 até 19/11/2015, vide simulação 2.

Analisando o instante $\hat{k} = 1$:

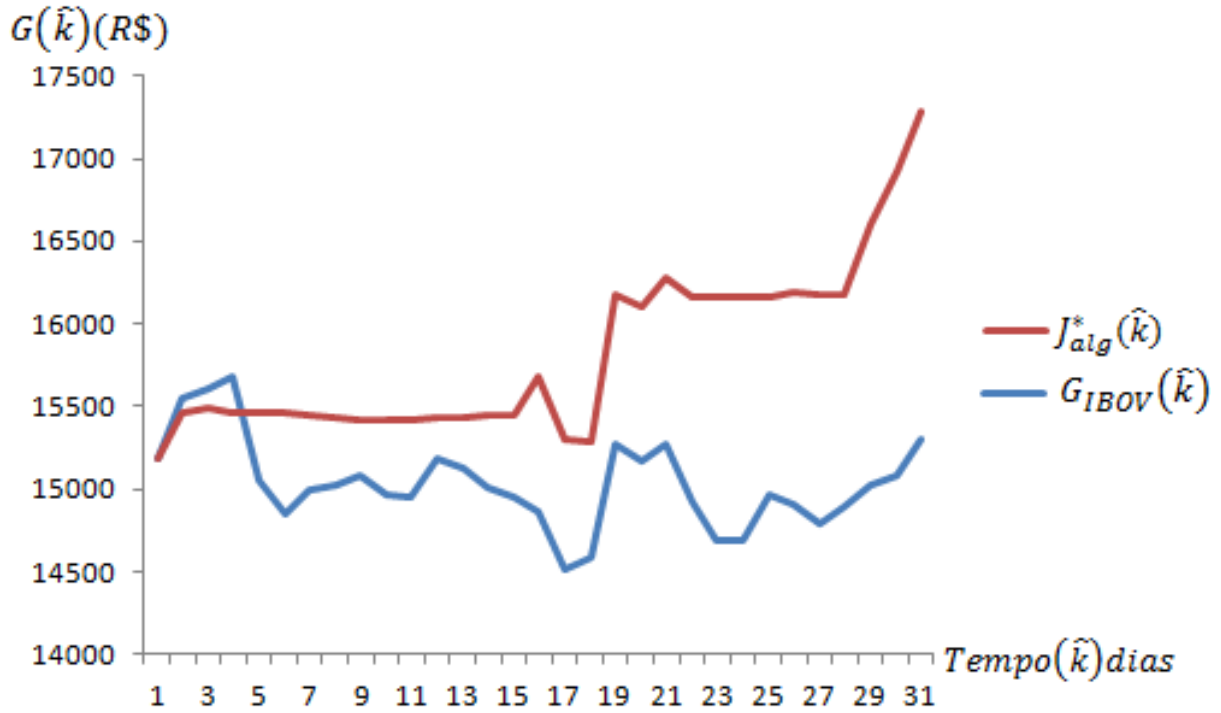


Figura 18: Resultados Comparativos - Comparação da evolução de J_{alg}^* com a evolução de J_{IBOV} .

$$J_{alg}^*(1) = G_{IBOV}(1) = J(1) = R\$15176,398$$

Isso dá:

$$\delta_{alg} = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} J_{alg}^*(\hat{k}) - J_{alg}^*(1) = 19786,976$$

E, segundo a tabela A.1, do apêndice A tem-se:

$$\delta_{IBOV} = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} G_{IBOV}(\hat{k}) - G_{IBOV}(1) = -13549,790$$

Proporcionando um rendimento do algoritmo frente ao índice Ibovespa de:

$$\mu_{alg/IBOV} = \frac{\delta_{alg} - \delta_{IBOV}}{G(1)} = \frac{19786,976 - (-13549,790)}{15176,398}$$

$$\mu_{alg/IBOV} = 2,197$$

Pode se observar pelos resultados acima e pelo gráfico da figura 18 que, para o mesmo intervalo de simulação, enquanto o índice Ibovespa desvalorizou o algoritmo proposto valorizou, em relação ao instante inicial.

Observa-se na tabela A.1 do apêndice A as variações de $G_{IBOV}(\hat{k})$ frente ao instante \hat{k} anterior e também $J_{alg}^*(\hat{k})$ frente ao instante \hat{k} anterior, para todos os instantes \hat{k} da simulação.

III Comparação ao índice *Trader* inativo

Retomando os valores da simulação 3 para esta comparação:

$$J_{alg}^*(1) = G_0(1) = G(1) = R\$15176,398$$

Novamente:

$$\delta_{alg} = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} J_{alg}^*(\hat{k}) - J_{alg}^*(1) = 19786,976$$

Segundo a figura 13:

$$\delta_0 = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=30} G_0(\hat{k}) - G_0(1) = -7495,954$$

Tem-se um índice de rendimento maior que o índice *Trader* inativo, em relação ao instante inicial, de:

$$\mu_{alg/0} = \frac{\delta_{alg} - \delta_0}{G(1)} = \frac{19786,976 - (-7495,954)}{15176,398}$$

$$\mu_{alg/0} = 1,798$$

Retomando a figura 6 da evolução de $p(k)$ é possível verificar que essa função tende a cair na maior parte do intervalo de simulação e por isso $\delta_0 < 0$. Ao observar que $\delta_{alg} > 0$ comprova-se a eficiência do algoritmo proposto uma vez que, apesar da função $p(k)$ tender a cair, $J_{alg}^*(\hat{k})$ tende a subir.

IV Discussão crítica

Essa seção foi reservada para fazer uma análise crítica dos resultados comparativos mostrados acima.

Primeiramente a comparação com o índice CDI mostra que, frente ao instante inicial de simulação, o algoritmo proposto rendeu 113,2% acima do CDI.

Isso mostra que o algoritmo é mais rentável que um índice próximo à taxa de juros do país.

Comparando agora com o segundo índice, o Ibovespa. Observa-se que, apesar da função $p(k)$ ter uma tendência de queda, o algoritmo rendeu, frente ao instante inicial de simulação, 219,7% acima do Ibovespa, ou seja, foi obtido um resultado mais importante que a melhor carteira de ações teórica da Bolsa de Valores de São Paulo.

Esse resultado é extremamente importante para mostrar que a eficiência do algoritmo não se restringe somente aos momentos em que a função $p(k)$ possui uma tendência de subida; nas simulações, tanto a função $p(k)$ quanto o índice Ibovespa tiveram uma tendência de queda semelhante.

Por último é discutido o índice de *Trader* inativo, que representa puramente quanto a utilização do algoritmo rentabiliza acima da variação da função $p(k)$. Observa-se que o algoritmo, frente ao instante inicial de simulação, rendeu 179,8% acima do índice.

Esse último resultado mostra que a utilização das ações de controle proposta pelo algoritmo rentabilizou acima do caso em que nenhuma ação de controle de compra ou venda tivesse sido feita.

Observa-se ainda que $\delta_0 < 0$ enquanto $\delta_{alg} > 0$; ou seja, caso nenhuma ação de controle tivesse sido tomada, o *Trader* teria prejuízo, porque $p(k)$ tende a cair, por outro lado, teria lucro utilizando o algoritmo proposto.

É importante lembrar que tanto o ativo quanto o intervalo de dias desse foram escolhidos de maneira aleatória. Observa-se também que o ativo segue as mesmas tendências de queda e alta do índice Ibovespa, de forma que os resultados obtidos na simulação não possuem qualquer forma de viés devido a movimentos contrários do ativo em relação ao índice.

Tabela 1: Índices de rendimentos comparativos

$\mu_{alg/CDI}$	$\mu_{alg/IBOV}$	$\mu_{alg/0}$
113, 2%	219, 7%	179, 8%

Observando a tabela 1, é possível chegar a algumas constatações: $\mu_{alg/CDI}$ foi o menor entre os três índices pois o indicador CDI sempre possui um rendimento positivo, enquanto os outros dois podem possuir rendimentos negativos.

Observa-se que $\mu_{alg/IBOV}$ é maior que $\mu_{alg/0}$ porque o indicador Ibovespa passou por uma desvalorização mais importante no período de simulação que o preço do ativo BBDC3; ou seja, o índice δ_{alg} é maior em relação ao δ_{IBOV} que em relação ao δ_0 .

Essas constatações não podem sempre ser tomadas como verdadeiras, é possível que o indicador Ibovespa possua um rendimento maior que o indicador CDI e que o preço do ativo representativo da função $p(k)$, isso faria com que $\mu_{alg/IBOV}$ fosse o menor entre os três índices de rendimento.

X Conclusão

Pôde-se observar pela seção de resultados comparativos um desempenho positivo do algoritmo, em que esse se comportou de maneira lucrativa tanto para os momentos em que o preço do ativo utilizado na otimização caía, mas principalmente para os momentos em que o preço do ativo utilizado subia.

O algoritmo proposto, como visto na seção IX proporcionou um rendimento maior que o índice CDI e o índice Ibovespa, ou seja, ele teve melhor desempenho que o rendimento da taxa de juros e da suposta melhor carteira de ações negociada na Bolsa de Valores de São Paulo.

E ainda proporcionou um rendimento maior que caso nenhuma ação de controle de compra ou venda tivesse sido tomada nos instantes de simulação.

Uma explicação para o bom rendimento do algoritmo proposto é devido a utilização de instantes de tempo passados no processo de tomada de decisão. Ao criar um intervalo de N instantes passados ótimos durante o processo de otimização, a função $p(\hat{k})$ foi avaliada de forma relativa a seus instantes $k < \hat{k}$, sendo o sinal $U^*(\hat{k})$ gerado em um cenário ótimo.

Acredita-se, por isso, que seja possível a utilização desse algoritmo para tomadas de decisões sobre a compra e venda de ativos, porém não se deve descartar a necessidade do fator humano como decisão final.

Observa-se ainda o crescimento, na área de negócios, da utilização de algoritmos de suporte para tomadas de decisão, como pode ser lido em [14].

XI Trabalhos futuros

Pretende-se melhorar o modelo proposto acrescentando a possibilidade de empréstimo, esse é um ponto importante porque abriria a possibilidade de maiores lucros no caso em que valha mais a pena comprar o ativo em um instante \hat{k} porém não tem-se recursos financeiros para tal; em contra-partida, o capital emprestado representa uma dívida que aumenta com juros.

O segundo ponto é a incorporação de outros ativos no processo de otimização, dessa maneira será possível escolher qual melhor ativo a se comprar ou vender, podendo até mesmo tomar decisões diferentes para cada ativo no mesmo instante \hat{k} ; essa melhoria aumentaria, possivelmente, o lucro obtido por essa proposta.

Para aprimorar o processo de otimização, pretende-se ainda estudar a utilização de diferentes valores de N e analisar como o tamanho da janela móvel irá influenciar no conjunto de sinais de controle $\{U^*(k)\}$. Também fazer simulações com outros ativos em que a tendência da função preço seja diferente.

Bibliografia

- [1] Jung-Hua Wang, Shiu-an-Ming Chen, and Jia-Yann Leu, "Stock trading decision support system using a rule selector based on sliding window". In: *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, volume 1, pages 559-564, Orlando, FL, 12.-15.
- [2] Björn-Christopher Witte, Christian Suchan, "Improving the Support for Investment Decisions in Financial Markets Using the System Dynamics Methodology," MKWI 2010: 1857 - 1869
- [3] B. R. Barmish, "On Performance Limits of Feedback Control-Based Stock Trading Strategies," *Proceedings of the American Control Conference*, pp.3874-3879, San Francisco, July 2011
- [4] B.R. Barmish, J. A. Primbs, "On Market-Neutral Stock Trading Arbitrage Via Linear Feedback," *Proceedings of the American Control Conference*, pp.3693-3698, Montréal, June 2012
- [5] Baxter, M. and A.Rennie, **Financial Calculus: An Introduction to Derivatives Pricing**. Cambridge University Press, 1996
- [6] Mindaugas Leika, *System Dynamics, Market Microstructure and Asset Pricing*. M.Sc. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, Cambridge, USA, 2013
- [7] Ithink Modelling and Simulation Software for Business. Disponível em: <http://www.iseesystems.com/Softwares/Business/ithinkSoftware.aspx>. Acesso em 16 mar. 2016
- [8] Berkeley Madonna Modelling and Analysis of Dynamics Systems. Disponível em: <http://www.berkeleymadonna.com/>. Acesso em 16 mar. 2016
- [9] Cotação On-line dos indicadores e ações. Disponível em: <http://pregao-online.bmfbovespa.com.br/>. Acesso em 16 mar. 2016
- [10] Becerra, V. M., "Solving optimal control problems with state constraints using nonlinear programming and simulation tools". In: *Proceedings of IEEE Transactions, Volume:47, Issue:3, pages 377-384, Aug.2004*
- [11] Utama, G., *A New System Dynamics Modeling Framework For The Financial System with a case study of Keen-Minsky model* M.Sc. dissertation, Rotterdam School of Management, Burgemeester Oudlaan, Rotterdam, Holanda, 2012

- [12] Brown, D. P. and R. H. Jennings, "On Technical Analysis," *Review of Financial Studies*, vol. 2, no. 4, pp. 527-551, 1989
- [13] Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, vol. 81, pp. 637-654, 1973
- [14] Landon, Thomas Jr., Corretoras aliam intelecto à inteligência. *Folha de São Paulo / NY Times*, São Paulo, p. 3, 19 mar. 2016.
- [15] Sethi, SP. and Thompson, GL. **Optimal Control Theory: Applications to Management Science**. M. Nijhoff, Boston (1981)
- [16] Bryson, AE. and Ho, Y. **Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control**. Hesmiphere, Washington, DC (1975)

Apêndices

Apêndice A

BOVESPA e Bradesco ON - BBDC3

Na tabela A.1 é possível observar o preço dos ativos da BOVESPA somados na coluna *Ibovespa* e o preço do ativo **Bradesco ON - BBDC3** na coluna *Preço $p(\hat{k})$* no intervalo de datas do dia 22/09/2015 até 19/11/2015, além das variações diárias de $G_{IBOV}(\hat{k})$ e $J_{alg}^*(\hat{k})$.

Tabela A.1: Variações diárias de $G_{IBOV}(\hat{k})$ e $J_{alg}^*(\hat{k})$.

Ibovespa	Preço $p(\hat{k})$	$VarG_{IBOV}(\hat{k})$	$VarJ_{alg}^*(\hat{k})$
47735.11	25.8819736	0	0
48914.32	26.7813472	1.024703201	1.00917135
49106.55	26.8313124	1.003929933	1.003370012
49338.41	26.6314516	1.00472157	1.010682494
47362.63	25.14248864	0.959954526	1.016803339
46710.43	25.1824608	0.98622965	0.984943251
47161.15	25.01257912	1.009649237	1.015628226
47236.1	24.72278096	1.001589232	1.011778773
47447.31	24.65282968	1.004471368	1.006929531
47076.55	24.25310808	0.992185858	1.008533497
47025.86	24.07323336	0.998923243	1.005708282
47772.14	24.36303152	1.015869566	1.005354677
47596.58	23.99328904	0.996325055	1.011562955
47209.32	24.07323336	0.991863701	0.988990291
47042.94	24.06324032	0.996475696	0.996865656
46740.84	24.4329828	0.993578207	0.993573667
45628.35	23.483644	0.976198759	0.991624348
45868.81	23.42368576	1.005269969	1.006429431
48053.66	24.7827392	1.047632585	1.047566424
47710.09	24.65	0.992850284	0.993581112
48046.75	24.93	1.007056369	1.00705204
46918.51	24.5	0.976517871	0.986787849
46194.92	23.79	0.984577728	1.013910817
46206.56	23.58	1.000251976	1.00883089
47065.01	23.91	1.018578531	1.004931847

Ibovespa	Preço $p(\hat{k})$	$VarG_{IBOV}(\hat{k})$	$VarJ_{alg}^*(\hat{k})$
46883.57	24.14	0.996144907	0.987910692
46517.03	23.8	0.992181909	1.005942024
46846.87	23.71	1.007090736	1.010796532
47247.8	24.8	1.008558309	0.989290443
47435.57	25.33	1.003974153	1.002218941
48138.88	25.94	1.014826637	1.012003092

Apêndice B

Carteira Ibovespa

Tabela B.1: Ativos presentes na carteira IBOVESPA

Código	Ação	Qtde. Teórica	Part.(%)
ABEV3	AMBEV S/A	3.135.013.367,00	8,628
BBAS3	BRASIL	839.653.556,00	1,676
BBDC3	BRADESCO	578.294.019,00	1,841
BBDC4	BRADESCO	2.510.973.464,00	7,442
BBSE3	BBSEGURIDADE	674.972.311,00	2,394
BRAP4	BRADESPAR	221.328.102,00	0,122
BRFS3	BRF SA	660.902.889,00	5,146
BRKM5	BRASKEM	264.585.622,00	0,933
BRML3	BR MALLS PAR	462.652.489,00	0,873
BVMF3	BMFBOVESPA	1.778.324.029,00	2,772
CCRO3	CCR SA	861.253.436,00	1,601
CESP6	CESP	181.964.945,00	0,365
CIEL3	CIELO	772.547.017,00	3,47
CMIG4	CEMIG	758.373.518,00	0,676
CPFE3	CPFL ENERGIA	308.487.239,00	0,754
CPLE6	COPEL	100.961.998,00	0,347
CSAN3	COSAN	152.149.931,00	0,551
CSNA3	SID NACIONAL	601.218.004,00	0,371
CTIP3	CETIP	252.173.097,00	1,413
CYRE3	CYRELA REALT	241.564.476,00	0,289
ECOR3	ECORODOVIAS	198.834.559,00	0,129
EMBR3	EMBRAER	511.190.197,00	2,214
ENBR3	ENERGIAS BR	232.602.876,00	0,428
EQTL3	EQUATORIAL	197.784.403,00	1,089
ESTC3	ESTACIO PART	269.026.552,00	0,486
FIBR3	FIBRIA	222.307.680,00	1,311
GGBR4	GERDAU	856.830.567,00	0,493
GOAU4	GERDAU MET	598.483.000,00	0,119
HGTX3	CIA HERING	127.749.285,00	0,243

Código	Ação	Qtde. Teórica	Part.(%)
HYPE3	HYPERMARCAS	372.954.664,00	1,341
ITSA4	ITAUSA	3.454.979.424,00	3,528
ITUB4	ITAUUNIBANCO	2.882.711.804,00	10,789
JBSS3	JBS	1.676.252.804,00	2,587
KLBN11	KLABIN S/A	498.464.534,00	1,542
KROT3	KROTON	1.615.275.745,00	2,362
LAME4	LOJAS AMERIC	424.844.953,00	1,135
LREN3	LOJAS RENNER	632.852.470,00	1,574
MRFG3	MARFRIG	339.576.742,00	0,309
MRVE3	MRV	269.738.473,00	0,368
MULT3	MULTIPLAN	78.663.321,00	0,515
NATU3	NATURA	171.984.796,00	0,7
OIBR3	OI	519.746.688,00	0,177
PCAR4	P.ACUCAR-CBD	155.874.755,00	0,981
PETR3	PETROBRAS	2.708.739.869,00	2,625
PETR4	PETROBRAS	4.037.695.282,00	2,759
QUAL3	QUALICORP	216.334.932,00	0,409
RADL3	RAIADROGASIL	198.046.365,00	1,296
RENT3	LOCALIZA	149.615.920,00	0,484
RUMO3	RUMO LOG	229.464.223,00	0,075
SANB11	SANTANDER BR	348.409.690,00	0,717
SBSP3	SABESP	339.985.584,00	1,112
SMLE3	SMILES	56.503.753,00	0,269
SUZB5	SUZANO PAPEL	388.624.563,00	0,824
TBLE3	TRACTEBEL	203.848.427,00	1,054
TIMP3	TIM PART S/A	808.255.142,00	0,745
UGPA3	ULTRAPAR	347.953.682,00	3,126
USIM5	USIMINAS	481.380.035,00	0,063
VALE3	VALE	1.469.201.955,00	2,313
VALE5	VALE	1.945.837.689,00	2,259
VIVT4	TELEF BRASIL	473.532.117,00	2,534
WEGE3	WEG	568.316.152,00	1,252
Quantidade Teórica total	-	46.637.869.181,00	100,000

Apêndice C

Evolução do patrimônio financeiro nos instantes \hat{k}

Tabela C.1: Evolução de $J_{alg}^*(\hat{k})$, $G_{CDI}(\hat{k})$, $G_{IBOV}(\hat{k})$ e $G_0(\hat{k})$.

$J_{alg}^*(\hat{k})$	$G_{CDI}(\hat{k})$	$G_{IBOV}(\hat{k})$	$G_0(\hat{k})$
15176,40	15176,39	15176,40	15176,39
15465,73	15182,00	15551,30	15356,27
15485,95	15187,60	15612,42	15366,26
15461,79	15193,21	15686,13	15326,29
15461,78	15198,82	15057,98	15028,50
15466,16	15204,43	14850,62	15036,49
15452,79	15210,05	14993,92	15002,52
15429,14	15215,66	15017,75	14944,56
15423,14	15221,28	15084,90	14930,57
15423,07	15226,90	14967,02	14850,62
15412,66	15232,52	14950,91	14814,65
15436,75	15238,15	15188,17	14872,61
15434,98	15243,78	15132,36	14798,66
15441,55	15249,40	15009,23	14814,65
15441,18	15255,03	14956,34	14812,65
15678,37	15260,67	14860,29	14886,60
15307,31	15266,30	14506,60	14696,73
15285,84	15271,94	14583,05	14684,74
16171,71	15277,58	15277,67	14956,55
16096,93	15283,22	15168,44	14930,00
16279,70	15288,86	15275,48	14986,00
16167,17	15294,51	14916,78	14900,00
16166,35	15300,15	14686,73	14758,00
16161,08	15305,80	14690,43	14716,00
16167,70	15311,45	14963,35	14782,00
16188,29	15317,11	14905,67	14828,00
16181,63	15322,76	14789,13	14760,00

$J_{alg}^*(\hat{k})$	$G_{CDI}(\hat{k})$	$G_{IBOV}(\hat{k})$	$G_0(\hat{k})$
16179,76	15328,42	14894,00	14742,00
16600,27	15334,08	15021,47	14960,00
16925,39	15339,74	15081,17	15066,00
17284,76	15345,41	15304,77	15188,00

Apêndice D

Código em Madonna

```
1 #Declaracoes
2
3 init DINHEIRO_CAIXA = D[1]
4 init QTDE_COTAS = C[1]
5 init INDICE1=D[1]+C[1]*PRECO[1]
6 PRECO = GRAPH(TIME)
7
8 DINHEIRO_CAIXA(t + dt) =
9     if time=N+1
10    |         D[N] - (CONTROLE*PRECO)
11    else
12    |         DINHEIRO_CAIXA - (CONTROLE*PRECO)
13
14 QTDE_COTAS(t + dt) =
15     if time= N+1
16     |         C[N]+(CONTROLE)
17     else
18     |         QTDE_COTAS + (CONTROLE)
19
20 INDICE1(t+dt)= INDICE1 + (DINHEIRO_CAIXA + QTDE_COTAS*PRECO)
21
22 INDICE2 =
23     if time=N+1
24     |         DINHEIRO_CAIXA + QTDE_COTAS*PRECO
25     else
26     |         0
27
28 INDICE = a*INDICE1 + b*INDICE2
29
30 #Declaracoes
31
32
33 #Logica de controle
```

```

34
35 CONTROLE =
36     if (time=N+1)
37         if C[N+1]>0
38             if (DINHEIRO_CAIXA)<=0
39                 |
40                 |         0
41             else
42                 if C[N+1]>D[N]/PRECO
43                 |
44                 |         D[N]/PRECO
45                 else
46                 |
47                 |         C[N+1]
48             else
49                 if (QTDE_COTAS)<=0
50                 |
51                 |         0
52             else
53                 if abs(C[N+1])>C[N]
54                 |
55                 |         C[N]
56             else
57                 |
58                 |         C[N+1]
59
60     else if (time=N)
61         if C[N]>0
62             if (DINHEIRO_CAIXA)<=0
63                 |
64                 |         0
65             else
66                 if C[N]>DINHEIRO_CAIXA/PRECO
67                 |
68                 |         DINHEIRO_CAIXA/PRECO
69                 else
70                 |
71                 |         C[N]
72             else
73                 if (QTDE_COTAS)<=0
74                 |
75                 |         0
76             else
77                 if abs(C[N])>QTDE_COTAS
78                 |
79                 |         QTDE_COTAS
80             else
81                 |
82                 |         C[N]
83
84     ...
85
86     else if (time=N-(N-1))
87         if C[N-(N-1)]>0
88             if (DINHEIRO_CAIXA)<=0
89                 |
90                 |         0
91             else
92                 if 0>DINHEIRO_CAIXA/PRECO

```


Apêndice E

Fluxograma das restrições à ferramenta de otimização

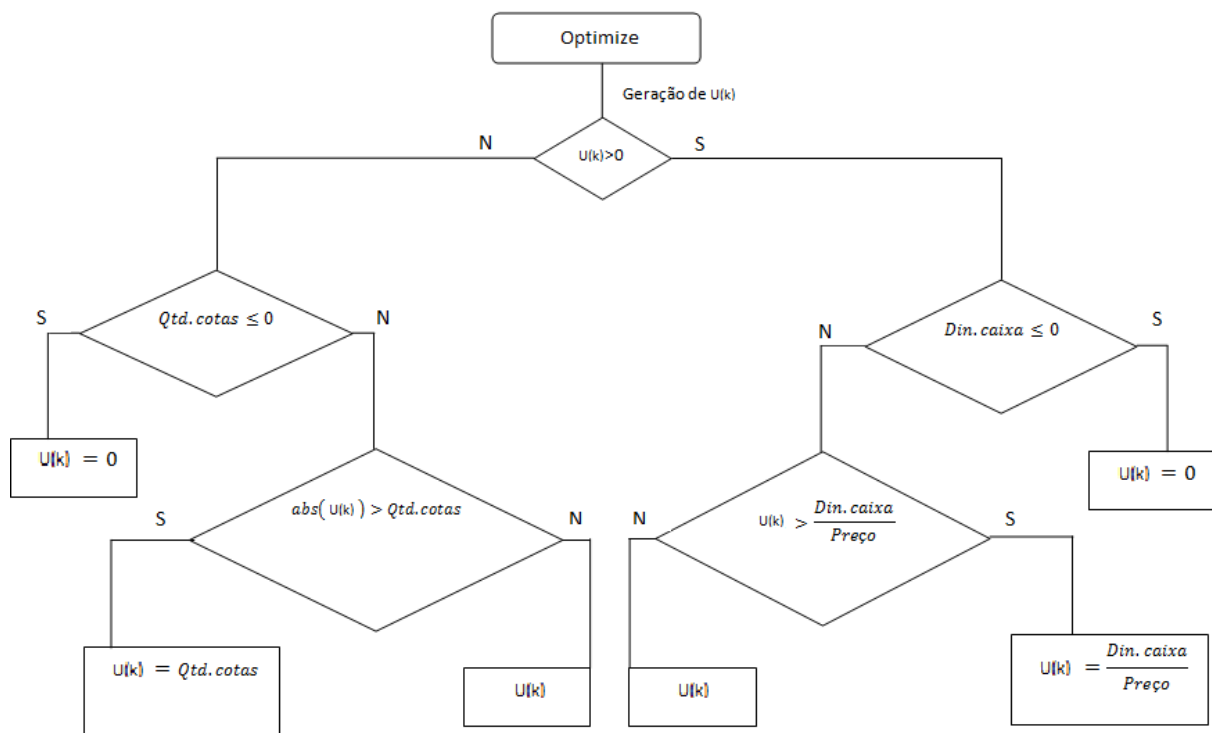


Figura E.1: Fluxograma das restrições à ferramenta de otimização representadas pelas equações 11 e 12.