



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

CONTROLE SUPER-TWISTING COM GANHOS VARIÁVEIS USANDO
APENAS REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Timon Asch Keijock

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Eduardo Vieira Leão Nunes D.Sc.

Rio de Janeiro
Setembro de 2016

CONTROLE SUPER-TWISTING COM GANHOS VARIÁVEIS USANDO
APENAS REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Timon Asch Keijock

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO
CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO DA ESCOLA
POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE ENGENHEIRO DE AUTOMAÇÃO.

Examinado por:

Prof. Eduardo Vieira Leão Nunes, D.Sc.

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. Oumar Diene, D.Sc

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
SETEMBRO DE 2016

Keijock, Timon Asch

Controle Super-Twisting com ganhos variáveis usando apenas realimentação de saída/Timon Asch Keijock. – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2016.

XI, 81 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Eduardo Vieira Leão Nunes D.Sc.

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia de Controle e Automação, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 55 – 56.

1. Sistemas Incertos. 2. Controle por modos deslizantes. 3. Controle a Estrutura Variável. 4. Aproximação por Filtros de Primeira Ordem - FOAF. I. D.Sc., Eduardo Vieira Leão Nunes. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia de Controle e Automação. III. Título.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Eduardo Vieira Leão Nunes pela paciência, dedicação, e pela oportunidade de trabalhar com esse excelente tema de Projeto de Graduação.

Aos meus pais, Thirza Christiane Asch e Bahime Velasques Keijock, que me deram a visão de que estudo é prazeroso e que, mesmo com dificuldades da vida, sempre fizeram o melhor para que eu pudesse estudar e progredir.

A minha avó, Anna Maria Velasquez Keijock, que propiciou um local para que eu pudesse concluir minha graduação.

A todos os meus amigos que me incentivaram e foram compreensivos com minha dedicação e esforço para concluir esse projeto.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Automação.

Controle Super-Twisting com ganhos variáveis usando apenas realimentação de saída

Timon Asch Keijock

Setembro/2016

Orientador: Eduardo Vieira Leão Nunes D.Sc.

Curso: Engenharia de Controle e Automação

Neste trabalho, é apresentado, inicialmente, um estudo de técnicas de controle por modos deslizantes e modos deslizantes de ordem superior. Dentro desse contexto, foi dada ênfase ao estudo comparativo de dois controladores baseados em modos deslizante de segunda ordem, o *Super Twisting Control*(STC) e sua recente generalização, o *Variable Gain Super Twisting Control*(VGSTC). Em seguida, é proposto o desenvolvimento de um novo esquema de controle baseado no VGSTC usando apenas realimentação de saída, que pode ser aplicado em sistemas com estados não medidos. Para esse fim, o esquema de controle utiliza uma aproximação por filtro de primeira ordem capaz de gerar um majorante para a norma dos estados não medidos, e assim garantir rastreamento global e exato para sistemas monovariáveis incertos com grau relativo unitário.

Palavras-chave: Sistemas Incertos, Controle a Estrutura Variável, Controlador Super-Twisting, Aproximação por Filtros de Primeira Ordem - FOAF.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

VARIABLE GAIN SUPER TWISTING CONTROL VIA OUTPUT FEEDBACK

Timon Asch Keijock

September/2016

Advisor: Eduardo Vieira Leão Nunes D.Sc.

Course: Automation and Control Engineering

A study of sliding mode control and higher-order sliding modes is initially presented. In this framework, a detailed comparison of the Super Twisting Controller and its recent generalization, namely the Variable Gain Super-Twisting Controller is made. Both control techniques are based on second order sliding modes. Then, an output feedback version of the Variable Gain Super-Twisting Control is developed for plants with unmeasured states. This extension is achieved by using first order approximation filters to obtain an upper bound for the norm of unmeasured states. The proposed controller ensures global exact tracking for uncertain SISO systems with relative degree one.

Keywords: Uncertain Systems, Variable Structure Control, Super Twisting Control, First Order Approximation Filter - FOAF.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Tema	3
1.2 Delimitação	3
1.3 Justificativa	3
1.4 Objetivo	4
1.5 Metodologia	4
1.6 Descrição	5
2 Sistemas a Estrutura Variável	6
2.1 Controle por Modos Deslizantes	7
2.1.1 Existência de Modo Deslizante	7
2.1.2 Exemplos	9
2.2 Modos Deslizantes de Ordem Superior	14
2.2.1 Controlador Super Twisting - STC	15
2.2.2 Super Twisting Control - Análise de Convergência Baseada no Método Geométrico	16
2.2.3 Super Twisting Control - Análise de Convergência Baseada em Funções de Lyapunov	17
2.2.4 Controle por modo deslizante de segunda ordem modificado .	18
2.2.5 Exemplos de STC classico e STC geométrico	21
2.2.6 Controlador Variable Gain Super Twisting-VGSTC	28
3 VGSTC usando apenas realimentação de saída	31
3.1 introdução	31
3.2 Definição do problema	32
3.3 Margem de estabilidade	33
3.4 Aproximação por filtros de primeira ordem - FOAF	34
3.5 Realimentação de saída e VGSTA	35
3.6 Resultados e Simulações	41

3.6.1	Simulação 1: Realimentação de estados x Realimentação de saída	41
3.6.2	Simulação 2: Trailer com VGSTC por realimentação de saída	46
4	Conclusão e Trabalhos Futuros	53
	Referências Bibliográficas	55
A	Diagramas de blocos	57
A.1	Controlador Super Twisting	57
A.2	Controlador Variable Gain Super Twisting	58
B	Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior	59
B.1	Análise das Trajetórias do Controlador Super Twisting	59
B.2	Prova dos teoremas do Controlador Super Twisting	63
B.2.1	Prova do teorema 2.1	63
B.2.2	Prova do teorema 2.2	64
B.2.3	Prova do teorema 2.18	65
B.2.4	Prova do teorema 2.20	66
B.3	FOAF	68
B.3.1	Prova do lema 3.1	68
B.4	Função de Lyapunov para o Controlador Variable Gain Super Twisting	69
C	Lemas Auxiliares	73

Lista de Figuras

2.1	Plano de fase para o sistema (2.4).	10
2.2	Plano de fase para o sistema (2.5).	10
2.3	Trajétórias de estado do sistema (2.3): (a) atraso de 0.050s; (b) atraso de 0.025s; (c) atraso de 0.010s. Sinais de controle do sistema (2.3): (d) atraso de 0.2s; (e) atraso de 0.05s; (f) atraso de 0.01s.	12
2.4	Plano de fase para o sistema (2.3).	12
2.5	Plano de fase para o sistema (2.6).	14
2.6	Exemplo de trajetória no espaço de estados de um controlador Super Twisting.	15
2.7	Gráficos da variável de deslizamento s , da sua derivada \dot{s} , do sinal de controle u , para o sistema 2.21 utilizando um controlador STC 2.11, com os pares de ganhos $k_1=20$ e $k_3=15$ (—), e $k_1=30$ e $k_3=15$ (- - -).	25
2.8	Gráficos da variável de deslizamento s , da sua derivada \dot{s} , do sinal de controle u , para o sistema 2.21 utilizando um controlador STC 2.11, com os pares de ganhos $k_1=10$ e $k_3=80$ (—), e $k_1=10$ e $k_3=120$ (- - -).	26
2.9	Gráficos da variável de deslizamento s , da sua derivada \dot{s} , do sinal de controle u , para o sistema 2.21 utilizando um controlador STC 2.11, com os pares de ganhos $k_1=20$ e $k_3=15$ (—), e $k_1=10$ e $k_3=80$ (—).	27
3.1	Gráficos da variável de erro e , do sinal de controle u e saída y em relação a referência y_m para o sistema 3.24 utilizando um controlador VGSTC 3.17. Os sinais do sistema por realimentação de estados são representados por (—), do sistema com realimentação de saída utilizando FOAF por (- - -) e o sinal de referencia por (- - -)	44
3.2	Gráfico da norma do estado não disponível para controle η , representado por (—), e do majorante $\hat{\eta}$ obtido com o FOAF, representado por (- - -), e um zoom deste mesmo gráfico.	45
3.3	Cadeia de quatro trailers controlados por um atuador conectado no trailer ativo. O quarto trailer pode ou não estar conectado a cadeia	46

3.4	Gráficos do sinal de referencia y_m , representado por (---), e do sinal de saída do sistema 3.25 com controle VGSTC 3.17, por realimentação de estados (—), e com realimentação de saída utilizando FOAF (---). O trailer 4 está inicialmente desconectado e é conectado em $t = 0.5s$	50
3.5	Gráficos da variável de erro e , do sinal de controle u e saída y em relação a referência y_m para o sistema 3.25 utilizando um controlador VGSTC 3.17. Os sinais do sistema por realimentação de estados são representados por (—), e do sistema com realimentação de saída, utilizando FOAF, por (---) e o sinal de referencia por (---)	51
3.6	Gráfico da norma do estado não disponível para controle η , representado por (—), e do majorante $\hat{\eta}$ obtido com o FOAF, representado por (---), e um zoom deste mesmo gráfico.	52
A.1	Diagrama de blocos do controlador Super Twisting (B.3).	57
A.2	Diagrama de blocos do controlador Variable Gain Super Twisting (2.31).	58
B.1	(--) Trajetória no espaço de estados do controlador Super Twisting. (-) Curvas majorantes: C1, C2 e C3.	60

Capítulo 1

Introdução

Muitos sistemas possuem modelagem precária ou grandes incertezas, incluindo variação de parâmetros, dinâmicas não modeladas ou distúrbios externos. Para esses sistemas as principais estratégias de controle são o controle robusto e o controle adaptativo.

Porém o controle a estrutura variável por modos deslizantes, também abreviado por, controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* - SMC), é uma técnica que garante um bom desempenho, devido a sua robustez e estabilidade, sendo muito eficiente para controlar sistemas incertos em inúmeros problemas de engenharia como: controle de motores elétricos, sistemas espaciais, robótica, controle automático de vôos, processos químicos, dentre outros.

A utilização de uma lei de controle descontínua, característica desta estratégia de controle, segue uma dada regra para o chaveamento entre um conjunto de funções das variáveis de estado da planta. Assim, o controle é capaz de modificar a estrutura do sistema em malha fechada, gerando um novo movimento no espaço de estados com o intuito de seguir um comportamento desejado, denominado **modo deslizante** [1–3].

Uma característica notável dessa abordagem é a capacidade de combinar propriedades úteis de cada uma estruturas do sistema realimentado, ou obter novas propriedades que não pertencem a nenhuma das estruturas chaveadas. Durante o modo deslizante a trajetória dos estados podem não ser nenhuma das trajetórias que descrevem os sistemas que estão sendo chaveados.

A regra para o chaveamento das estruturas é projetada com o objetivo de que as trajetórias do sistema sempre alcancem e permaneçam em uma superfície específica do espaço de estados, denominada **superfície de deslizamento**.

Sistemas a estrutura variável (*Variable Structure Systems*-VSS) possuem diversas vantagens descritas na literatura, tais como: estabilidade exponencial global, capacidade de rejeitar perturbações não-modeladas, insensibilidade a não-linearidades da planta ou variações dos parâmetros, bom comportamento no transiente e robustez

com respeito a estabilidade e desempenho.

Porém, devem ser observadas duas dificuldades de se aplicar os controladores de estrutura variável. Primeiro é necessário ter acesso de todo o vetor de estados para implementação da superfície de chaveamento, segundo é possível que ocorra o indesejado efeito de trepidação (*chattering*) induzido por não-idealidades, como pequenos atrasos ou dinâmicas não-modeladas da planta ou do relé, levando ao conhecido **modo deslizante real** [4].

No *modo deslizante ideal* o estado permanece confinado na superfície de deslizamento, utilizando um sinal de controle com frequência infinita. Devido as não idealidades, no modo deslizante real, o sinal de controle chaveia com alta frequência porem finita. Este fenômeno é denominado *chattering*. Na prática uma frequência infinita não é realizável, sendo o deslizamento referido como ideal quando a frequência de chaveamento for muito maior do que a banda passante do sistema.

Em BONDAREV *et al.* [5] foi apresentado uma maneira de preservar os modos deslizantes ideais, utilizando observadores de estado assintóticos. Porém, essa abordagem requer um bom conhecimento do modelo da planta e das perturbações externas, para que se tenha uma estimação razoável.

A generalização do conceito de modos deslizantes convencionais, o modos deslizante de ordem superior (*Higher Order Sliding Mode - HOSM*), é apresentada em LEVANT [6], onde se propõem aumentar artificialmente o grau relativo do sistema, para que se tenha um sinal de controle suave e assim permita a remoção do efeito de *chattering*. Apesar de conseguirem remover o *chattering* completamente, estes controladores só apresentam estabilidade local, ou requerem condições que não são viáveis na prática.

Uma abordagem bastante promissora do HOSM é o Controlador Super Twisting (*Super Twisting Control - STC*). Esse controlador possui aspectos desejáveis por ser robusto, permitir controle suave para sistemas com grau relativo um, atenuando o problema do *chattering*, e não precisar de nenhuma informação sobre a derivada temporal da variável de deslizamento.

Em [7, 8] foi proposta uma generalização para o STC, denominada *Variable Gain Super Twisting Control* (VGSTC), que utiliza ganhos variáveis e da introdução de novos termos no controle para melhorar a robustez e o desempenho do controlador.

Os VSS necessitam do vetor de estados completo para implementação da superfície de chaveamento. Normalmente muitos sistemas não possuem todo o vetor de estados acessível, assim, para contornar essa dificuldade, deve-se estimar os estados inacessíveis. Uma possibilidade para a estimação dos estados, encontrada em inúmeros trabalhos na literatura, é a utilização de observadores. Porem as incertezas paramétricas do sistema podem impedir que os estados sejam estimados com precisão. Assim, uma alternativa viável é a utilização de aproximações por filtro de

primeira ordem (*First Order Approximation Filters - FOAF*), para obter a estimativa do estado, por possuírem uma síntese não baseada no modelo, sendo assim mais natural para sistemas incertos.

Recentemente, foi proposto em [9] a utilização de um esquema de controle com VGSTC por realimentação de saída, com um FOAF para estimação dos estados. Seu principal resultado é, apresentado no teorema 3.1.

Assim a proposta deste trabalho é apresentar tal esquema de controle, os conceitos necessários para seu entendimento e principalmente fazer um complemento de análise e validação deste resultado, observando a estabilidade global assintótica em sistemas incertos de grau relativo unitário.

1.1 Tema

Este trabalho tem como tema o estudo e desenvolvimento de técnicas de controle avançado para plantas incertas, isto é, plantas que possuem modelagem precária ou grandes incertezas, incluindo dinâmicas não modeladas, variação de parâmetros e distúrbios externos. Dentro desse contexto, são abordadas técnicas de controle a estrutura variável por modos deslizantes (*Sliding Mode Control - SMC*) e modos deslizantes de ordem superior (*Higher Order Sliding Modes - HOSM*).

1.2 Delimitação

O objeto de estudo são as técnicas de controle avançado, com ênfase em controle a estrutura variável e mais especificamente controle por modos deslizantes. Tais técnicas foram escolhidas por serem alternativas eficientes para o controle de sistemas incertos. Além disso, o estudo foi restrito a plantas incertas monovariáveis, lineares e invariantes no tempo.

1.3 Justificativa

O principal fator motivador para o estudo das técnicas de controle a estrutura variável é a sua eficiência no controle de sistemas incertos, principalmente por sua robustez com respeito a estabilidade e desempenho. Além disso, tais técnicas também apresentam vantagens como: bom comportamento no transiente, estabilidade exponencial global, capacidade de rejeitar perturbações não-modeladas e insensibilidade a não-linearidades da planta ou variações dos parâmetros.

Entretanto, o controle por modos deslizantes convencional tem como principal problema o chaveamento em alta frequência do sinal de controle, fenômeno denominado de *chattering*, que pode levar o sistema à instabilidade em alguns casos.

O controle por modos deslizantes de ordem superior é uma generalização do SMC, preservando suas principais vantagens. Além disso, é capaz de fornecer uma acurácia ainda maior, apresentando um controle suave, atenuando, assim, o problema de *chattering*.

1.4 Objetivo

O objetivo é ampliar a abrangência das técnicas de controle avançado baseadas em controle por modos deslizantes de ordem superior, com a finalidade de realizar um controle de alto desempenho e robustez de sistemas incertos que eventualmente possuam estados que não possam ser medidos.

1.5 Metodologia

Primeiramente, é realizado um estudo com ênfase no controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control*-SMC), sendo verificadas, por meio de simulações numéricas, as principais propriedades dessa técnica de controle. O estudo teve prosseguimento considerando o controle por modos deslizantes de ordem superior [10, 11], uma generalização do SMC convencional, que preserva suas principais vantagens e apresenta uma acurácia ainda maior.

Dentre os controladores baseados em modos deslizantes de ordem superior (*High order Sliding Mode*-HOSM), destacam-se o *Super Twisting Control* (STC) e sua generalização recentemente proposta, o *Variable Gain Super Twisting Control* (VGSTC) [7, 8], sobre os quais foi feito um estudo comparativo mais detalhado. Tais técnicas possuem aspectos desejáveis por serem robustas e também permitir controle suave para sistemas com grau relativo unitário, podendo assim atenuar o problema de *chattering*, que é ocasionado pelo chaveamento em alta frequência inerente ao SMC. Além disso, a partir do estudo comparativo realizado, verificou-se que o VGSTC apresenta um desempenho melhor, além de ser mais robusto que o STC com relação a incertezas/perturbações.

Assim, as características e propriedades das técnicas do VGSTC serviram de base para o desenvolvimento de uma proposta de modificação do esquema de controle VGSTC, [12] e [13], capaz de garantir rastreamento global e exato para sistemas incertos com grau relativo unitário. Essa modificação visa aumentar a abrangência desta técnica de controle para sistemas com estados não medidos. Tal esquema consiste em obter um substituto adequado para os estados não medidos utilizando para tanto uma aproximação por um filtro de primeira ordem (*First Order Approximation Filter*- FOAF). O FOAF adequado para o sistema é capaz de gerar um majorante para norma dos estados não medidos. O novo esquema de controle também é capaz

de assegurar rastreamento global e exato para sistemas incertos, apresentando uma melhora significativa da aplicabilidade desta técnica. Esta abordagem resultou em um artigo,[9], que foi publicado nos anais do *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente* (SBAI 2015).

1.6 Descrição

O presente trabalho é organizado da seguinte forma:

- No capítulo 2, são apresentadas as teorias, os principais conceitos, propriedades do controle a estrutura variável por modos deslizantes convencional, SMC, e modos deslizantes de ordem superior, dos controladores STC e VGSTC, sendo essas técnicas exemplificadas por meio de simulações numéricas.
- No capítulo 3, são mostrados detalhadamente os conceitos teóricos utilizados como base no novo esquema de controle, e que este é capaz de garantir rastreamento global e exato para sistemas incertos com grau relativo arbitrário. São ainda apresentadas simulações numéricas com o intuito de demonstrar as principais propriedades do controle VGSTC e também de fazer uma comparação de desempenho entre esse e o novo esquema proposto.
- As conclusões gerais sobre o estudo desenvolvido, além das perspectivas futuras, são apresentadas no capítulo 4.
- O apêndice A apresenta os diagramas de blocos dos controladores STC e VGSTC.
- O apêndice B apresenta uma análise sobre a convergência dos controladores STC e VGSTC.
- Por fim, o apêndice C apresenta as demonstrações dos lemas auxiliares cujos resultados são utilizados neste trabalho.

Capítulo 2

Sistemas a Estrutura Variável

O controle a estrutura variável por modos deslizantes, também chamado de controle por modos deslizantes (Sliding Mode Control - SMC), é uma técnica de controle não-linear proposta e elaborada no início da década de 1950 [2, 3, 14, 15].

A principal vantagem deste tipo de controlador é uma característica conhecida como **propriedade da invariância**, i.e., uma vez que o modo deslizante tenha sido alcançado, o desempenho do sistema torna-se insensível a incertezas paramétricas da planta e a algumas classes de perturbações externas, devido ao sistema estar sendo regido somente pela dinâmica da superfície de deslizamento.

No modo deslizante convencional a trajetória do sistema fica restrita a uma superfície de deslizamento definida por $s(x) = 0$. Este conceito foi generalizado com a introdução dos modos deslizantes de ordem superior (*Higher Order Sliding Modes* - HOSM) em [10]. Esta generalização preserva as principais vantagens do SMC convencional, sendo capaz de fornecer uma acurácia ainda maior. O controle por modo deslizante de ordem superior possibilita a redução do problema do chattering [16] e tem a superfície de deslizamento definida por $s(x) = \dot{s}(x) = \dots = s^{(r-1)}(x) = 0$, onde r é a ordem do deslizamento.

Neste capítulo serão apresentados inicialmente os principais conceitos, teorias e propriedades do controle a estrutura variável por modos deslizante convencional (SMC).

Em seguida é apresentado a generalização do SMC, o HOSM, dando enfoque ao Controlador Super Twisting (*Super Twisting Control* - STC) que permite um controle suave para sistemas com grau relativo um, atenua o problema do chattering, e não precisa de nenhuma informação sobre a derivada temporal da variável de deslizamento.

Por fim, neste capítulo, a generalização para o STC com ganhos variáveis, denominado *Variable Gain Super Twisting Control* (VGSTC), e que foi descrita em [7, 8], é apresentada, mostrando a introdução de novos termos no controle para melhorar a robustez e o desempenho do sistema.

2.1 Controle por Modos Deslizantes

Seja um sistema de controle dado por:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $f(t, x)$ e $g(t, x)$ são funções suaves e $u \in \mathbb{R}$ é uma lei de controle descontínua.

O objetivo central deste controle é assegurar, decorrido um tempo finito, uma dinâmica desejada, de modo que esta seja alcançada quando o sistema se encontrar dentro da superfície de deslizamento $\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}$. A lei de controle descontínua escolhida deve tornar esta superfície de deslizamento localmente atrativa, segundo uma condição de alcançabilidade.

Considera-se que $s(x)$ é continuamente diferenciável e que a superfície \mathcal{S} definida por $\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}$ é contínua em x , satisfazendo a seguinte condição de regularidade:

$$\nabla_x s(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathcal{S}$$

A superfície de deslizamento deve ser projetada de forma a atender a uma dinâmica desejada, ou seja, ao projetar a superfície deve-se observar o comportamento do sistema quando restrito a \mathcal{S} .

A escolha de \mathcal{S} para obter uma dinâmica específica pode não ser direta ou óbvia. Assim, sempre é válido tentar utilizar superfícies que já foram definidas na literatura ou tenham formas mais simples como, por exemplo, planos ou cascas de formas geométricas.

O controle descontínuo permite alternar entre sistemas de estruturas diferentes. O sinal de controle descontínuo é dado por:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \text{se } s(x) > 0 \\ u^-(x), & \text{se } s(x) < 0 \end{cases}$$

Onde $u^+(x)$ e $u^-(x)$ são funções contínuas. Note ainda que $u(x)$ não é definido em $s(x) = 0$. Porém, na prática é necessário definir como é o comportamento de $u(x)$, quando $s(x) = 0$.

2.1.1 Existência de Modo Deslizante

Para que o sistema entre em modo deslizante, as trajetórias dos sistemas chaveados devem apontar na direção da superfície de deslizamento para assegurar que esta seja pelo menos localmente atrativa para uma determinada vizinhança.

Um critério matemático sucinto para expressar este fato é dado por:

$$\dot{s}s < 0 \quad (2.1)$$

A condição (2.1), chamada de **condição de alcançabilidade**, apenas garante que a superfície de deslizamento seja alcançada assintoticamente, o que não é suficiente para assegurar que o sistema entre em modo deslizante.

Uma condição mais restritiva e que garante que a superfície de deslizamento seja alcançada em tempo finito é conhecida como **condição de alcançabilidade- η** . Esta condição é dada por:

$$\dot{s}s \leq -\eta|s| \quad (2.2)$$

onde η é uma constante positiva.

A desigualdade (2.2) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt} \leq -\eta|s|$$

ou ainda:

$$\frac{d(|s|^2)}{2\sqrt{(|s|^2)}} \leq -\eta dt$$

Integrando de 0 a t_s , tem-se:

$$\sqrt{|s(t_s)|^2} - \sqrt{|s(0)|^2} \leq -\eta t_s$$

que pode ser reescrito como:

$$|s(t_s)| - |s(0)| \leq -\eta t_s$$

Sendo assim, o tempo t_s necessário para se alcançar a superfície de deslizamento $\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}$ satisfaz:

$$t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta}$$

o que assegura uma convergência em tempo finito para a superfície de deslizamento.

2.1.2 Exemplos

De forma a ilustrar os conceitos do controle por modos deslizantes, é proposto o seguinte exemplo. Considere o sistema de controle a estrutura variável:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= +x_1 - 4x_2 + u \\ u &= -\text{sgn}(s) \\ s &= x_1 + x_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

A escolha da superfície de deslizamento depende da dinâmica desejada para o projeto. Neste exemplo a superfície é escolhida, por simplicidade mas sem perda de generalidade, como uma reta. A inclinação da reta também pode ser escolhida de forma genérica, definindo $s = x_1 + \alpha x_2$, o que implica numa dinâmica dependente de um parâmetro α :

$$\dot{s} = \dot{x}_1 + \alpha \dot{x}_2$$

Neste caso foi escolhida a reta com $\alpha = 1$.

Note que, dependendo da região do plano de fase, o sinal de controle descontínuo alterna entre dois valores constantes. Assim, o sistema (2.3) chaveia entre duas estruturas diferentes.

- Na região $s(x) < 0$, o sistema possui a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= +x_1 - 4x_2 + 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

- Na região $s(x) > 0$, o sistema possui a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= +x_1 - 4x_2 - 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Os planos de fase das duas estruturas isoladas são ilustrados nas figuras 2.1 e 2.2. Note que ambas as estruturas são instáveis quando consideradas isoladamente. Entretanto, na região considerada para cada sistema, todas as trajetórias apontam em direção à reta de chaveamento definida como $s(x) = x_1 + x_2$, e que é representada pela linha pontilhada em ambas as figuras. As trajetórias do sistema nessas figuras apenas foram ilustradas para representar o campo vetorial, não tendo interação com a reta de chaveamento.

Considerando a condição de alcançabilidade- η para este caso:

$$\dot{s}s = -s \text{sgn}(s) = -|s| \leq -\eta|s|, \quad \text{se } \eta \leq 1$$

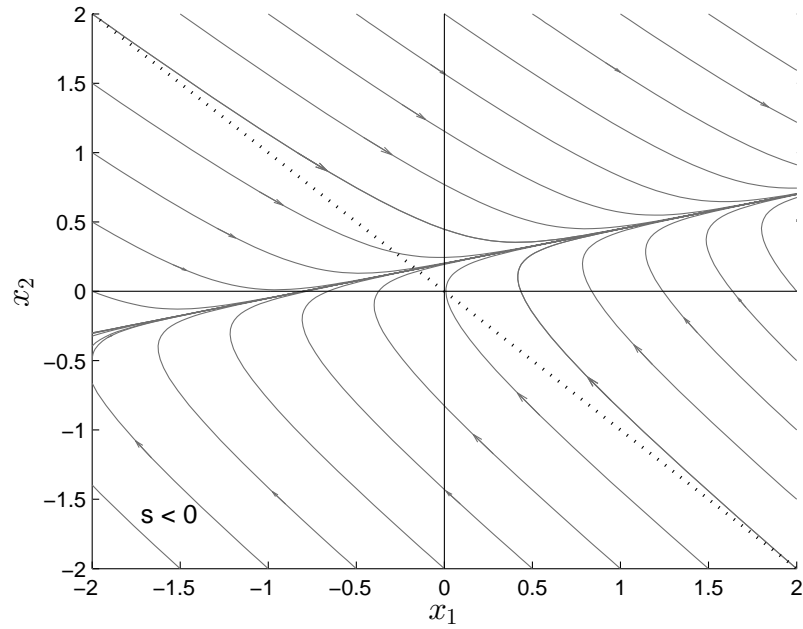


Figura 2.1: Plano de fase para o sistema (2.4).

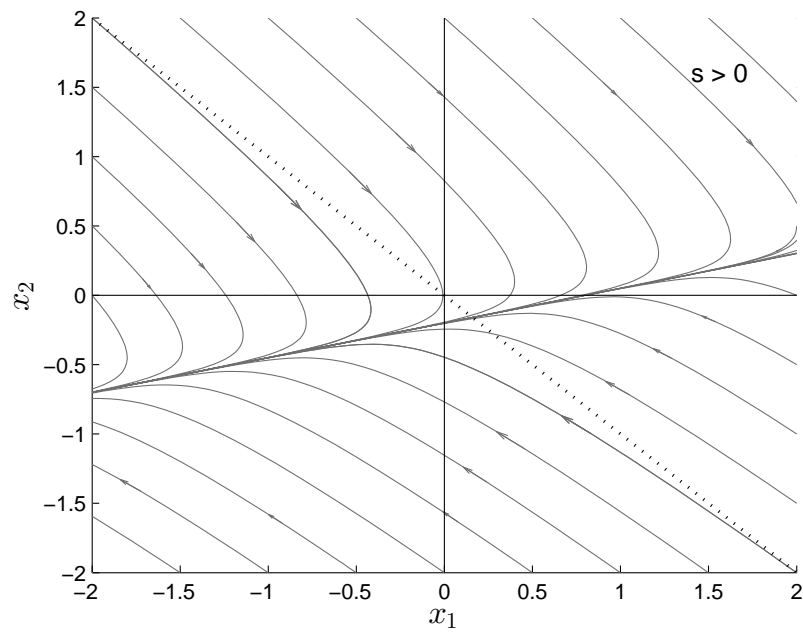


Figura 2.2: Plano de fase para o sistema (2.5).

A superfície de deslizamento é globalmente atrativa, sendo alcançada após um tempo finito.

Como o sinal de controle $u(x)$ não é definido em $s(x) = 0$, o plano de fase do sistema (2.3), para esta região, não é diretamente definido pelas estruturas 2.4 e 2.5. Para saber o comportamento desse sistema na superfície de deslizamento $s(x) = 0$, será considerado um atraso no chaveamento, de modo que a mudança do sinal de controle ocorra um tempo depois de a trajetória do sistema ultrapassar a reta de chaveamento.

A figura 2.3 ilustra a trajetória do sistema 2.3, para diferentes tempos de atraso e para mesma condição inicial. Note que a frequência de chaveamento do sinal de controle é inversamente proporcional a quantidade de atraso, e que a semelhança entre a trajetória do sistema com a reta de chaveamento é maior para um menor atraso. Sendo assim, pode-se concluir que em um deslizamento ideal, onde não se tem atrasos, a trajetória do sistema fica confinada à superfície deslizante, gerando um novo tipo de movimento no plano de fase, que não pertencem a nenhuma das duas estruturas consideradas.

Devido à impossibilidade de um chaveamento instantâneo em sistemas reais, o problema de *chattering* torna-se inerente na aplicação do SMC, pois sempre ocorrerá um chaveamento em frequência alta e finita do sinal de controle. O *chattering* é considerado indesejável, pois pode levar o sistema à instabilidade ao excitar modos rápidos ignorados durante a modelagem do sistema.

No deslizamento, o sistema será governado pela equação:

$$s(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 + 5x_1 = 0$$

O plano de fase do sistema (2.3) é ilustrado na figura 2.4. Além das regiões $s(x) < 0$ e $s(x) > 0$, este plano de fase apresenta uma trajetória, também globalmente atrativa, que é coincidente com a reta de chaveamento e leva o sistema para a origem do espaço de estados.

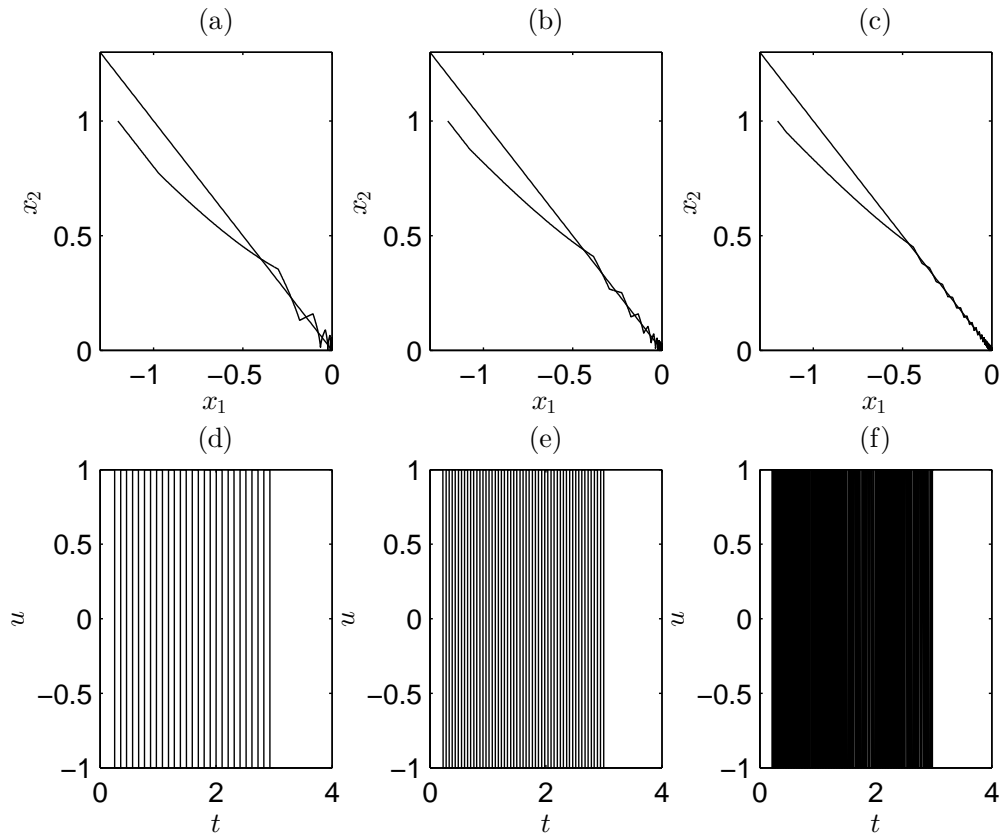


Figura 2.3: Trajetórias de estado do sistema (2.3): (a) atraso de $0.050s$; (b) atraso de $0.025s$; (c) atraso de $0.010s$. Sinais de controle do sistema (2.3): (d) atraso de $0.2s$; (e) atraso de $0.05s$; (f) atraso de $0.01s$.

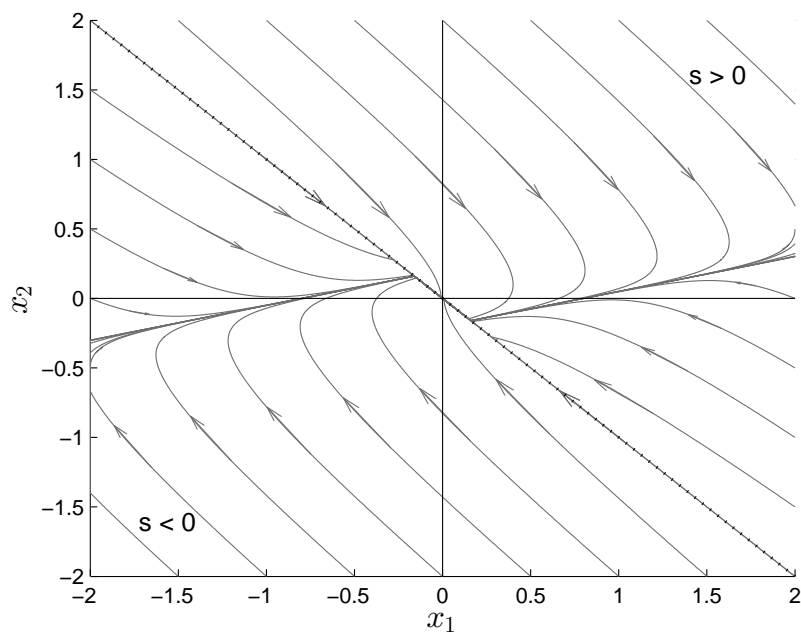


Figura 2.4: Plano de fase para o sistema (2.3).

Agora, como forma de demonstrar as características de robustez do controle por modos deslizantes, considere o sistema (2.3) operando com uma perturbação de entrada senoidal:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= +x_1 - 4x_2 + u + 0.5 \text{sen}(x_1) \\ u &= -\text{sgn}(s) \\ s &= x_1 + x_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Aplicando ao sistema com perturbação a condição de alcançabilidade- η :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -|s| + 0.5 \text{sen}(x_1)s \\ &\leq -|s|(1 - 0.5 \text{sen}(x_1)) \end{aligned}$$

Logo:

$$\dot{s} \leq -0.5|s| \leq -\eta|s|, \quad \text{se } \eta \leq 0.5$$

o que prova que, mesmo com a perturbação, a superfície de deslizamento permanece sendo globalmente atrativa, e que o modo deslizante é alcançado em tempo finito.

A figura 2.5 apresenta o plano de fase para o sistema (2.6), ilustrando a robustez do controle por modos deslizantes. Note que tanto para região $s(x) < 0$ quanto para $s(x) > 0$, apesar da perturbação senoidal, a superfície de deslizamento continua sendo globalmente atrativa e na região $s(x) = 0$, quando o modos deslizantes é alcançado, o sistema se torna insensível à perturbação.

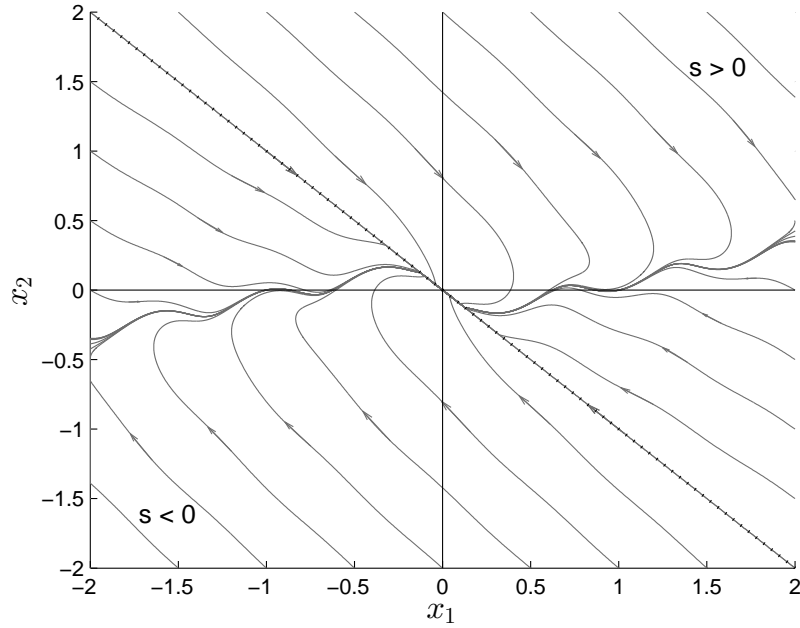


Figura 2.5: Plano de fase para o sistema (2.6).

2.2 Modos Deslizantes de Ordem Superior

Anteriormente, foi mostrado como o SMC utiliza um controle suficientemente intenso para reagir instantaneamente aos desvios da variável de deslizamento, de modo a conduzir o sistema de volta à restrição. Embora essa característica de reação imediata do sinal de controle tenda a gerar resultados com grande acurácia e robustez para diversas classes de perturbações, o controlador pode apresentar o indesejável efeito de *chattering*.

O conceito do SMC foi generalizado com a introdução modos deslizantes de ordem superior em [10]. Nessa abordagem, o controlador atua também em função das derivadas temporais de ordem superior do desvio em relação à restrição da variável de deslizamento. Esta generalização preserva principais características do SMC convencional e também possibilita a redução do *chattering* [16]. O HOSM tende a ter mais acurácia que o SMC, porém tem sido observado na literatura de controle que alguns casos observados por Utkin [17], que isso não se verifica sempre.

Esta nova estrutura utiliza uma superfície de deslizamento de ordem r dada por:

$$\mathcal{S} = \{x : s(x) = \dot{s}(x) = \dots = s^{(r-1)}(x) = 0\}$$

para um deslizamento de ordem r a derivada $s^{(r)}(x)$ não é uma função contínua das variáveis de estado do sistema

Note que devido a derivada $s^{(r)}(x)$ não ser uma função contínua das variáveis de estado do sistema, a ordem do deslizamento r pode ser relacionada com a suavidade do controlador.

2.2.1 Controlador Super Twisting - STC

Desenvolvido com o objetivo de remover o problema do *chattering* em sistemas com grau relativo unitário, este controlador, baseado em modos deslizantes de segunda ordem, não necessita de nenhuma informação sobre a derivada temporal da variável de deslizamento, sendo caracterizado por um movimento em espiral ao redor da origem do plano de deslizamento de segunda ordem $(s-\dot{s})$, conforme pode ser visto na figura 2.6.

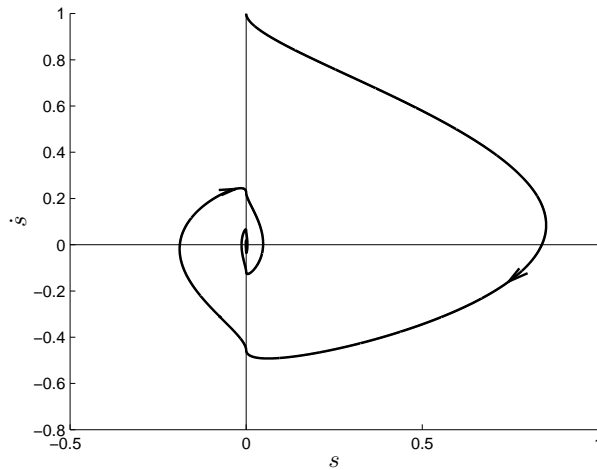


Figura 2.6: Exemplo de trajetória no espaço de estados de um controlador Super Twisting.

Os principais pontos analisados no STC são a convergência em tempo finito e a robustez para perturbações limitadas. Inicialmente o desenvolvimento das provas de convergência em tempo finito eram baseadas em majorar as trajetórias do sistema por curvas limites, sendo a convergência válida em apenas uma determinada vizinhança em torno do ponto de equilíbrio [18].

Recentemente, a utilização da teoria de estabilidade de Lyapunov auxiliou na ampliação da aplicabilidade do STC propiciando uma abordagem global da convergência do sistema. Foram formuladas funções de Lyapunov compostas por funções que dependiam dos termos de controle. Assim, ao derivar essas funções candidatas de Lyapunov para provar estabilidade, foi possível obter relações de restrições que garantiam estabilidade e dependiam desses termos de controle. A comprovação de convergência global por essas restrições auxiliaram o desenvolvimento de modifica-

ções nos esquemas de controle, e nas funções de Lyapunov associadas. Tais modificações, como a introdução dos novos termos no controle, permitiram considerar classes mais gerais de perturbações e incertezas.

A seguir serão apresentados dois métodos de análises de convergência do STC. A primeira análise, baseada no método geométrico, possui estrutura e conceitos já bem estabelecidos na literatura, tendo seus principais resultados apresentados na subseção 2.2.2. A segunda análise, baseada em funções de Lyapunov, é mais recente e possui algumas variações. Assim, na subseção 2.2.3 serão apresentados os conceitos específicos contidos em [7], nos quais esse trabalho dá enfoque. São apresentados ainda algumas outras estruturas e suas características.

2.2.2 Super Twisting Control - Análise de Convergência Baseada no Método Geométrico

Nesta subseção será apresentado o principal teorema da análise de convergência do STC baseada no método geométrico, bem como a estrutura de controle STC utilizado em [18].

Considere que dinâmica de um sistema seja do tipo:

$$\dot{x} = a(t) + b(t)u \quad (2.7)$$

e suponha que para algumas constantes positivas C, K_M, K_m, U_M, q

$$|\dot{a}| + U_M|\dot{b}| \leq C, \quad 0 \leq K_m \leq b(t, x) \leq K_M, \quad |a/b| < qU_M, \quad 0 < q < 1. \quad (2.8)$$

Assim, o controle STC é descrito como:

$$u = -k_1|x|^{1/2} \operatorname{sgn}(x) + u_1, \quad u_1 = \begin{cases} -u, & |u| > U_M, \\ -k_3 \operatorname{sgn}(x), & |u| \leq U_M. \end{cases} \quad (2.9)$$

Lema 2.1. [18] *Quando $K_mk_3 > C$ e k_1 são suficientemente grandes o controle assegura o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem, $x = \dot{x} = 0$, que atrai as trajetórias em tempo finito. O controle u entra em tempo finito no segmento $[-U_M, U_M]$ permanecendo nele, e nunca sai do segmento se o valor inicial está contido no segmento desde o início.*

Uma condição suficiente para validar o lema 2.1 é :

$$k_1 > \sqrt{\frac{2}{K_mk_3 - C}} \frac{(K_mk_3 + C)K_M(1 + q)}{K_m^2(1 - q)}. \quad (2.10)$$

e o tempo de convergência é estimado como:

$$T \leq \sum \frac{|\dot{x}_i|}{(K_m k_3 - C)}$$

onde $\sum |\dot{x}_i| = Var(\dot{x}(\cdot))$, representa a variância total da função $\dot{x}(t)$.

Demonstração. Ver a prova apresentada em [18] □

Note que as desigualdades 2.10 e 2.8 restringem bastante os valores k_1 e k_3 a serem escolhidos no controlador. Normalmente, os sistemas reais não são totalmente conhecidos, o modelo não é tão preciso e os parâmetros K_M, K_m, C , a serem estimados, são muito maiores do que o valor real. Na prática, quanto maior os parâmetros do controlador, mais sensível o controlador será a imperfeições no chaveamento e a ruídos de medição. Assim, em algumas implementações deve-se ajustar os parâmetros do controlador durante a simulação.

No apêndice B.1 é apresentado de forma detalhada uma análise das trajetórias do controlador *Super Twisting*, mostrando uma propriedade de contração e convergência em tempo finito.

2.2.3 Super Twisting Control - Análise de Convergência Baseada em Funções de Lyapunov

O STC apresentado em [7] tem sua forma diferencial dado pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 |x_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_1) + x_2 + d_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= -k_3 \operatorname{sgn}(x_1) + d_2(x, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Onde x_i é um escalar representando a variável de estado, k_i são os ganhos a serem projetados e d_i são termos da perturbação.

O diagrama de blocos do controlador pode ser visto no apêndice, na figura A.1

A ideia principal é utilizar uma função de Lyapunov para garantir a convergência para zero em tempo finito de todas as trajetórias, quando os ganhos são ajustados adequadamente e para algumas classes de perturbações. Utilizando uma função de Lyapunov forte, isto é, que possui uma derivada temporal negativa definida, pode-se provar as propriedades de estabilidade do sistema. Além disso, tirando proveito deste resultado é possível mostrar que para certas classes de perturbações, a função de Lyapunov continua tendo uma derivada negativa.

A função de Lyapunov dada por:

$$V(x) = 2k_3 |x_1| + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} (k_1 |x_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_1) - x_2)^2 \quad (2.12)$$

é contínua em todo lugar mas não diferenciável em $x_1 = 0$, e será mostrado que é uma função de Lyapunov forte para o sistema 2.11 sem perturbação.

Teorema 2.1. [7] *Suponha que $k_1, k_3 > 0$. Então todas as trajetórias do sistema 2.11 sem perturbação, $d_1 = d_2 = 0$, convergem em tempo finito para origem $x = 0$, em um tempo $t(x_0)$ menor que $T = 2V^{1/2}(x_0)/\gamma$, onde x_0 é o estado inicial e γ é uma constante que depende dos ganhos k_1 e k_3 . Além disso, $V(x)$, definida em 2.12, é uma função de Lyapunov forte e garante essas propriedades.*

Demonstração. A prova apresentada em [7] é também apresentada no apêndice B.2.1 □

Considerando que existam perturbações no sistema 2.11, para garantir a robustez, e assegurar que o sistema continue globalmente assintoticamente estável e com convergência em tempo finito, os ganhos devem ser escolhidos suficientemente grandes segundo o seguinte teorema.

Teorema 2.2. [7] *Suponha que os termos de perturbação do sistema 2.11, são limitados globalmente por*

$$|d_1| \leq \delta_1 |x_1|^{1/2}, \quad |d_2| \leq \delta_2, \quad (2.13)$$

para algumas constantes $\delta_1, \delta_2 \geq 0$. Então a origem $x = 0$ é um ponto de equilíbrio e globalmente assintoticamente estável se os ganhos satisfazem:

$$k_1 > 2\delta_1$$

$$k_3 > k_1 \frac{5\delta_1 k_1 + 6\delta_2 + 4(\delta_1 + \delta_2/k_1)^2}{2(k_1 - 2\delta_1)} \quad (2.14)$$

Além disso, todas as trajetórias convergem em tempo finito para origem, limitado por $\tilde{T} = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\tilde{\gamma}}$, onde x_0 é o estado inicial e $\tilde{\gamma}$ é uma constante que depende dos ganhos k_1, k_3 e dos coeficientes dos limitantes da perturbação δ_1, δ_2 .

Demonstração. A prova é apresentada no apêndice B.2.2 □

2.2.4 Controle por modo deslizante de segunda ordem modificado

A seguir serão apresentados algoritmos de controle com estruturas parecidas com as do STC .

Algoritmo de controle linear

O sistema STC 2.11 é uma versão não linear do seguinte sistema linear de controle:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_2x_1 + x_2 + d_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= -k_4x_1 + d_2(x, t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

O sistema 2.15 possui diferentes propriedades em relação ao 2.11, e a seguinte função suave de Lyapunov servirá para demonstrá-las:

$$V(x) = k_4x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(k_2x_1 - x_2)^2 \quad (2.16)$$

Note que $V(x)$ é positiva definida e radialmente ilimitada se $k_4 > 0$. Sua derivada tem a forma:

$$\dot{V} = -x^T P_0 x + d_1 q_0^T x + d_2 q_1^T x$$

Onde

$$\begin{aligned} P_0 &= k_2 \begin{bmatrix} (k_2^2 + k_4) & -k_2 \\ -k_2 & 1 \end{bmatrix} \\ q_0^T &= \begin{bmatrix} (k_2^2 + 2k_4) & -k_2 \end{bmatrix} \\ q_1^T &= \begin{bmatrix} -k_2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para o caso nominal, sem perturbação, do sistema 2.15, o estado x converge esponencialmente rápido para zero se $P_0 > 0$, o que ocorre com $k_2 > 0$ e $k_4 > 0$.

Admitindo que a perturbação seja limitada globalmente, e seus termos possam ser escritos por:

$$\begin{aligned} |d_1| &\leq \delta_3 |x_1|, \\ |d_2| &\leq \delta_4 |x_1|, \end{aligned}$$

para algumas constantes $\delta_3, \delta_4 \geq 0$, então:

$$\dot{V} \leq -x^T (P_0 - \tilde{Q}) x$$

Onde:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} (k_2^2 + 2k_4)\delta_3 + k_2\delta_4 & \star \\ \frac{1}{2}(k_2\delta_3 + 2\delta_4) & 0 \end{bmatrix}$$

A convergência exponencial existe quando $(P_0 - \tilde{Q}) > 0$, ou seja, se:

$$\begin{aligned} k_2 &> 2\delta_3 \\ k_4 &> \frac{2\delta_3 k_2^3 + (\frac{1}{4}\delta_3^2 + 3\delta_4)k_2^2 + \delta_3\delta_4 k_2 + \delta_4^2}{k_2(k_2 - 2\delta_3)} \end{aligned}$$

Algoritmo de controle não linear e sem perturbação

Em [7] é proposto uma variação do algoritmo de controle que utiliza termos de correção lineares e não lineares visando adquirir as propriedades dos dois tipos de controle. Considere estrutura de controle descrita da seguinte forma :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_1) - k_2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_3 \operatorname{sgn}(x_1) - k_4x_1\end{aligned}\quad (2.17)$$

onde x_i são variáveis de estado escalares e k_i são os ganhos constantes a serem projetados. O seguinte teorema mostra que, assim como no caso convencional, esta formulação também possui convergência em tempo finito, assegurado por uma função de Lyapunov forte.

Teorema 2.3. [7] *A origem, $x = 0$, é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema 2.17, se $k_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$, e $4k_3k_4 > (8k_3 + 9k_1^2)k_2^2$. Considerando essas condições,*

$$V(x) = 2k_3|x_1| + k_4x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(k_1|x_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_1) + k_2x_1 - x_2)^2 \quad (2.18)$$

é uma função de Lyapunov contínua que garante essa propriedade. Além disso, todas as trajetórias convergem em tempo finito para a origem com um tempo limite de $T^ = \frac{2V^1/2(x_0)}{\gamma_1}$, onde x_0 é o estado inicial e γ_1 é uma constante que depende dos ganhos k_i .*

Demonstração. A prova é apresentada em [7] e também no apêndice B.2.3 □

Algoritmo de controle não linear e com perturbação

Quando são consideradas perturbações no sistema 2.17, i.e.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_1) - k_2x_1 + x_2 + d_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= -k_3 \operatorname{sgn}(x_1) - k_4x_1 + d_2(x, t)\end{aligned}\quad (2.19)$$

o seguinte teorema assegura que essa estrutura de controle modificada é capaz de suportar fortes perturbações perto da origem e perturbações com crescimento linear quando longe do equilíbrio, por possuir as propriedades de robustez dos dois tipos de estrutura de controle, a com termos de correção linear e não linear.

Teorema 2.4. [7] *Suponha que os termos de perturbação do sistema 2.19 sejam globalmente limitados por*

$$\begin{aligned}|d_1| &\leq \delta_1|x_1|^{1/2} + \delta_3|x_1| \\ |d_2| &\leq \delta_2 + \delta_4|x_1|\end{aligned}\quad (2.20)$$

para algumas constantes $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \geq 0$. Então os ganhos k_i podem ser escolhidos suficientemente grandes para que a origem, $x = 0$, seja um ponto globalmente assintoticamente estável e todas as trajetórias converjam em tempo finito para a origem.

Demonstração. A prova é apresentada em [7] e também no apêndice B.2.4 \square

2.2.5 Exemplos de STC classico e STC geométrico

Para observar as características de convergência em tempo finito e robustez do STC, serão utilizadas simulações cujas análises são baseadas em um método geométrico [18] e função de Lyapunov [7], que foram anteriormente descritas.

Note que para o controlador STC, definido em 2.9, é possível assumir um valor U_M suficientemente grande para que sempre se tenha $|u| \leq U_M$. Neste caso, este controlador se reduz ao mesmo tipo de controle descrito em 2.11. Assim, essas duas formas de análises podem ser entendidas e interpretadas como diferentes formas de ajuste dos ganhos do controlador, segundo diferentes restrições dadas por suas respectivas desigualdades.

Considere um sistema de primeira ordem cuja a dinâmica em malha aberta pode ser descrito por:

$$\dot{y} = u + f(t), \quad (2.21)$$

onde y é a saída da planta e u é a entrada da planta e a função $f(t)$ é uma perturbação.

Será utilizado o controlador definido em 2.11, novamente apresentado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_1) + x_2 + d_1(x, t), \\ \dot{x}_2 &= -k_3 \operatorname{sgn}(x_1) + d_2(x, t), \end{aligned}$$

onde a saída do controlador, x_1 , será utilizada na entrada da planta, i. e., para esse sistema $u = x_1$

O método geométrico é uma abordagem mais restrita do que a de Lyapunov, pois tem sua convergência válida apenas localmente. Além disso, essa abordagem requer que a derivada da perturbação seja limitada, enquanto por Lyapunov a perturbação pode ser majorada pela raiz quadrada de seu módulo.

Para atender os requisitos da perturbação dessas duas abordagens, $f(t)$ é tal que:

$$f(t) = \frac{x^2}{1+x^2} + 2 \cos(5t) \quad (2.22)$$

$$\dot{f}(t) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} - 10 \sin(5t)$$

$$\max \left| \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cong 0,65 \quad , \quad \max |-10 \sin(5t)| = 10.$$

Assim, a perturbação escolhida é dependente do estado e com derivada temporal limitada, permitindo comparar os resultados obtidos pelo ajustes dos dois métodos.

Definindo a variável de deslizamento como a saída do sistema, $s = y$, pretende-se criar um modo deslizante de segunda ordem $y = \dot{y} = 0$. Para isso, é utilizado o controlador STC definido em 2.9, e seus ganhos devem seguir as restrições 2.8 e as apresentadas no lema 2.1, para que se possa garantir a convergência em tempo finito.

Comparando os sistemas 2.7 e 2.21, essas restrições são dadas por :

$$|\dot{f}(t)| + U_M |\dot{1}| \leq C \rightarrow 10, 65 \leq C$$

$$0 \leq K_m \leq 1 \leq K_M$$

$$K_m k_3 > C$$

$$|f(t)| < q U_M$$

$$0 < q < 1$$

Considerando essas restrições e que, nesta análise, U_M deve ser suficientemente grande para que $|u| \leq U_M, \forall u$, as seguintes constantes podem ser escolhidas:

$$U_M = 10^6, q = 10^{-3}, K_m = 1, K_M = 1, C = 11$$

o que permite a escolha de k_3 , ainda que restrito a $k_3 > C/K_m = 11$. A escolha de k_3 foi feita de forma a minimizar o valor de k_1 , segundo a desigualdade 2.10, e assim:

$$k_3 = 15 \rightarrow k_1 > 18.7562.$$

Esses valores e condições obtidas foram utilizados em uma na simulação e terão seus resultados apresentados mais à frente.

Outra forma de escolher esses ganhos para o STC é utilizando as restrições da análise baseada em função de Lyapunov. Nesse caso o sistema 2.21, deve ter perturbações globalmente limitadas e com limites conhecidos. Para analisar a perturbação 2.22 será considerado que esta possui duas partes uma em cada canal do controle de 2.11, i.e., uma em \dot{x}_1 e outra em \dot{x}_2 , sendo :

$$d_1(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad d_2(t) = 2\cos(5t).$$

Assim, os limites 2.13 são obtidos:

$$|d_1(x)| \leq \delta_1 |x_1|^{1/2} \rightarrow \left| \frac{x^{3/2}}{1+x^2} \right| \leq \delta_1, \text{ onde } \max \left| \frac{x^{3/2}}{1+x^2} \right| = 0.57 \rightarrow 0.6 \leq \delta_1$$

$$|d_2(t)| \leq \delta_2 \rightarrow 2 \leq \delta_2$$

Utilizando $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 2$, as desigualdades 2.14 se tornam:

$$k_1 > 2 \rightarrow k_1 = 10,$$

$$k_3 > 42.35,$$

onde k_1 foi escolhido de forma a tentar minimizar k_3 , e se aproximar dos pares anteriormente obtidos.

Assim, foram escolhidos pares de constantes, k_1 e k_3 , para comparar os métodos de escolha de ganhos baseados nas duas diferentes análises, a geométrica e de função de Lyapunov. Os ganhos escolhidos foram:

$$k_1 = 20 \quad e \quad k_3 = 15 \quad (\text{Análise Geométrica}) \quad (2.23)$$

$$k_1 = 10 \quad e \quad k_3 = 80 \quad (\text{Análise Lyapunov}) \quad (2.24)$$

Para efeitos de simulação foram consideradas as seguintes condições iniciais do controlador 2.11:

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1$$

A simulação obtida é apresentada em duas partes, uma para analisar o efeito da variação dos ganhos, e outra que compara a utilização dos ganhos obtidos por diferentes métodos de análise.

Com o objetivo de comparar os efeitos das escolhas dos ganhos k_1 e k_3 de cada método de análise, foram simulados pares de ganhos diferentes. O ganho k_1 foi aumentado em cinquenta por cento do ganho escolhido do valor em 2.23, gerando os pares ($k_1 = 20$ e $k_3 = 15$) e ($k_1 = 30$ e $k_3 = 15$), sendo os resultados desta simulação apresentado na figura 2.7. O ganho k_3 foi aumentado em cinquenta por cento do valor em em 2.24 gerando os pares ($k_1 = 10$ e $k_3 = 80$) e ($k_1 = 10$ e $k_3 = 120$), sendo os resultados desta simulação apresentado na figura 2.8.

A figura 2.7 apresenta os resultados da simulação para os dois valores diferentes para k_1 enquanto k_3 é fixo. Em seus gráficos é possível notar que a variável s tende mais rapidamente para zero com o aumento de k_1 , o que já era esperado. A variável \dot{s} também tende mais rápido para zero, mas possui aproximadamente o dobro do valor

inicial, indicando que a velocidade inicial de aproximação do sistema em relação a superfície s também seja maior com um aumento de k_1 . Esse aumento de velocidade inicial implica em um maior esforço de controle no transitório, como indicado no último gráfico da figura 2.7.

A figura 2.8 apresenta os resultados da simulação para os dois valores de k_3 enquanto k_1 é fixo. Os gráficos mostram que o aumento do ganho k_3 gera uma maior oscilação na variável de deslizamento s e que quase não afeta o tempo de estabilização em zero. Além disso, sua derivada, \dot{s} , possui limites superiores e inferiores maiores, indicando que as velocidades máximas atingidas pelo sistema, e consequentemente o sinal de controle, aumentam conforme k_3 aumenta. Assim, estas devem ser observadas com mais cautela no caso da utilização de um k_3 grande.

A figura 2.9 compara os resultados das simulações utilizando os pares de ganhos obtidos pelas restrições e desigualdades baseadas nas análises geométrica e por função de Lyapunov, 2.23 e 2.24 respectivamente. O par de ganhos 2.24 fez o sistema ter uma estabilização mais lenta e com características oscilatória, enquanto o outro par fez o sistema estabilizar mais rápido e de maneira amortecida. Porém, o par 2.23 fez o sistema ter, em módulo, um valor inicial de \dot{s} maior, e consequentemente, fez \dot{s} ir para zero mais rápido e o valor inicial, em módulo, do sinal de controle ser maior para este par de ganhos.

Observando esses resultados, é possível ver que ao variar os parâmetros do controlador STC, é possível alterar algumas características da resposta do sistema, e que se os ganhos obedecerem as restrições teóricas de estabilidade o sistema converge para $s = \dot{s} = 0$, ou seja, atinge o modo deslizante de segunda ordem, utilizando um sinal de controle suave.

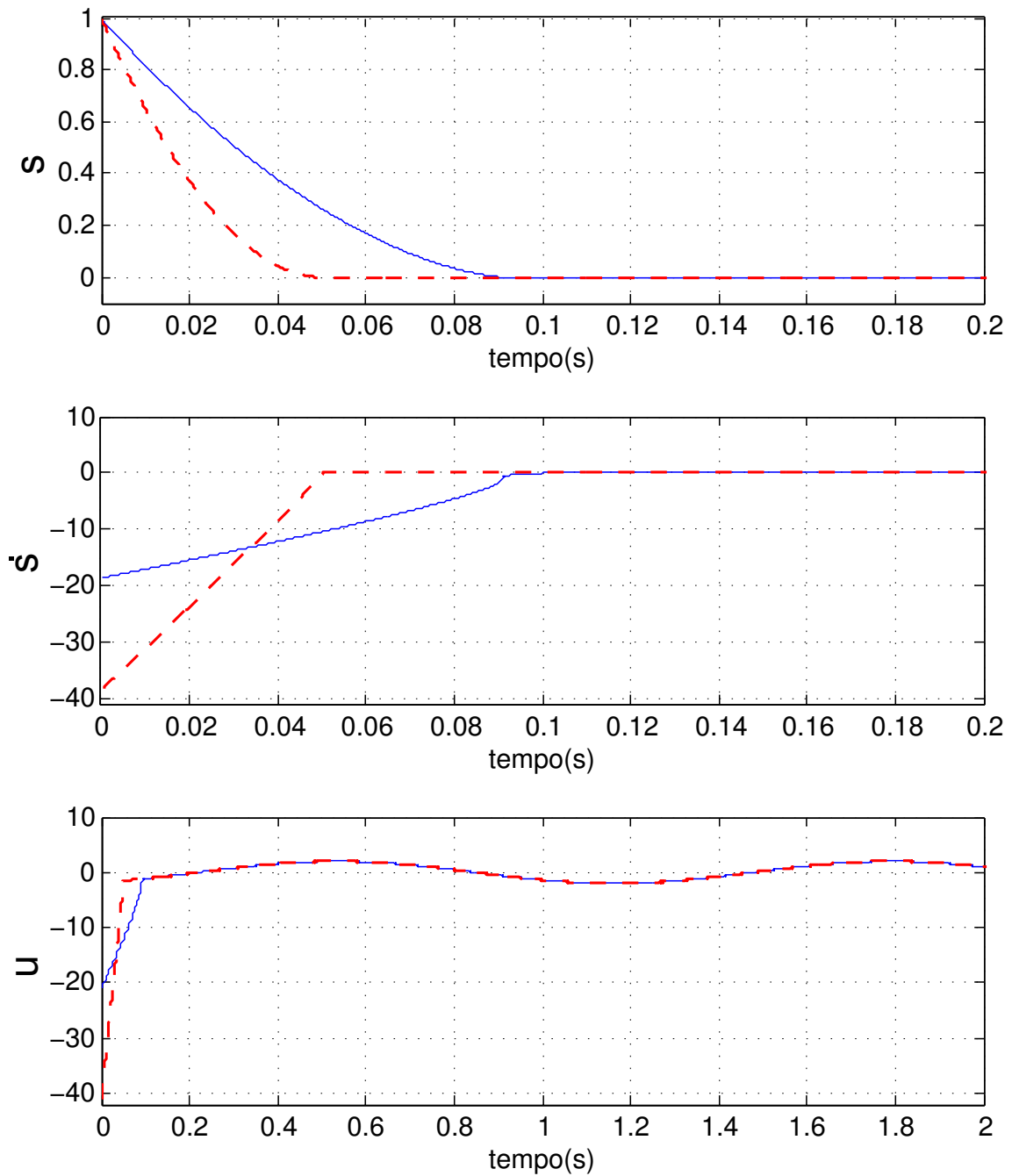


Figura 2.7: Gráficos da variável de deslizamento s , da sua derivada \dot{s} , do sinal de controle u , para o sistema 2.21 utilizando um controlador STC 2.11, com os pares de ganhos $k_1=20$ e $k_3=15$ (—), e $k_1=30$ e $k_3=15$ (- - -).

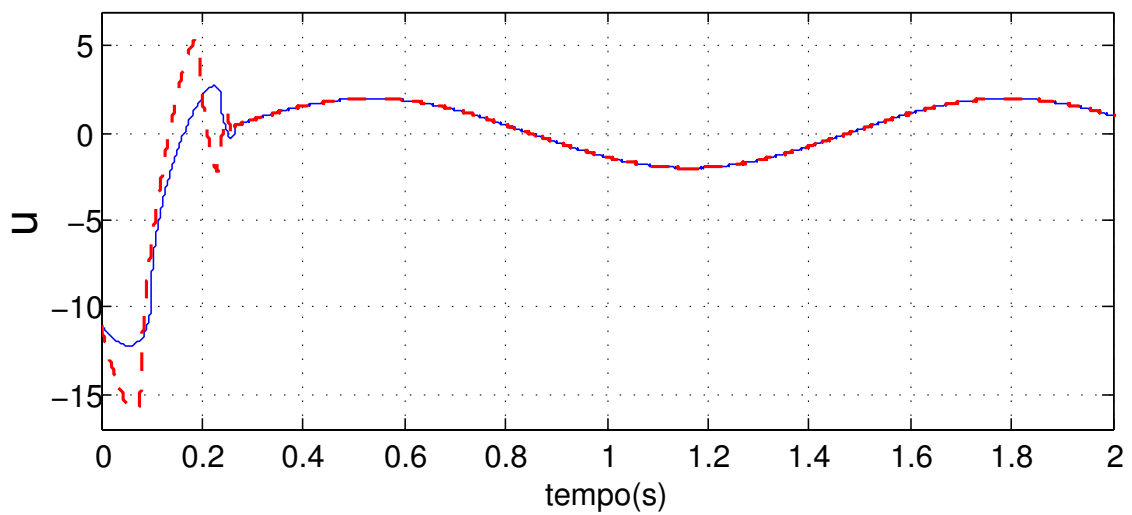
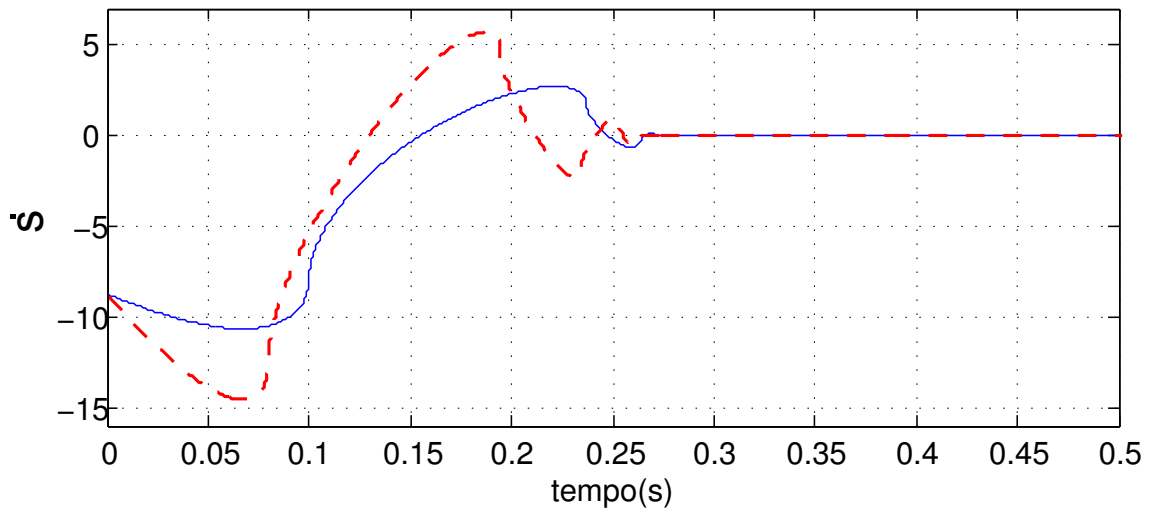
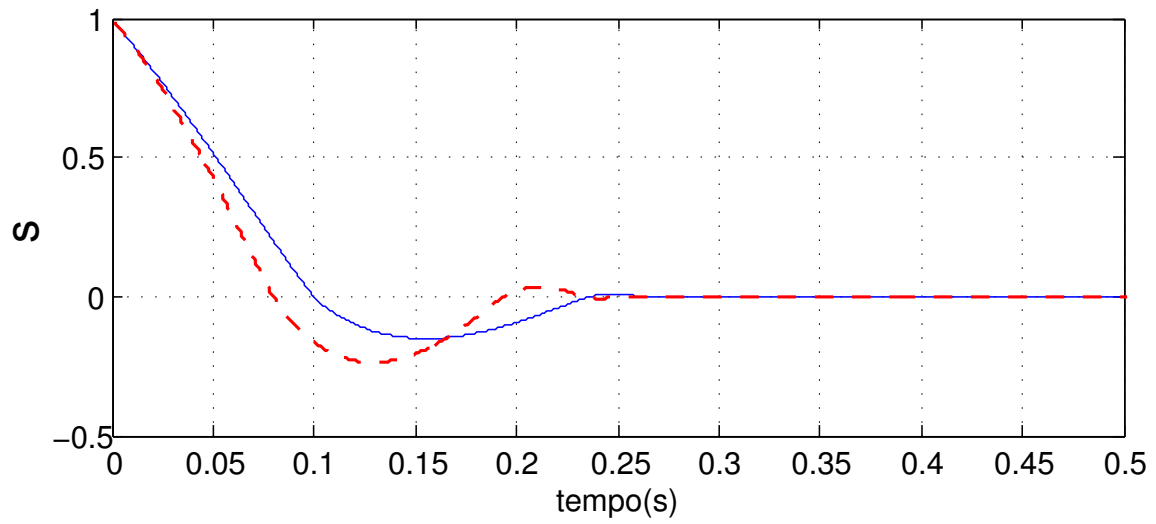


Figura 2.8: Gráficos da variável de deslizamento s , da sua derivada \dot{s} , do sinal de controle u , para o sistema 2.21 utilizando um controlador STC 2.11, com os pares de ganhos $k_1=10$ e $k_3=80$ (—), e $k_1=10$ e $k_3=120$ (- - -).

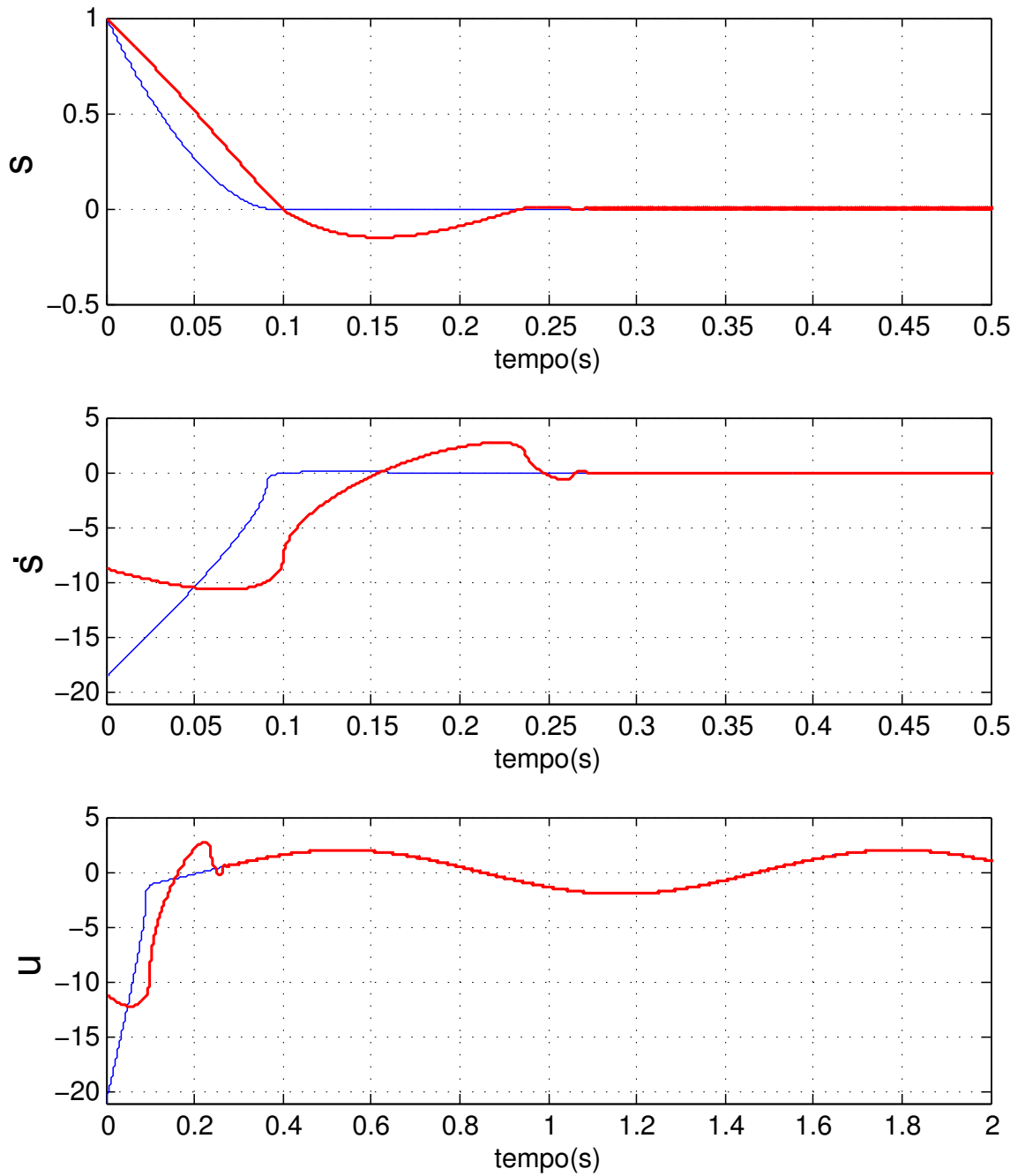


Figura 2.9: Gráficos da variável de deslizamento s , da sua derivada \dot{s} , do sinal de controle u , para o sistema 2.21 utilizando um controlador STC 2.11, com os pares de ganhos $k_1=20$ e $k_3=15$ (—), e $k_1=10$ e $k_3=80$ (—).

2.2.6 Controlador Variable Gain Super Twisting-VGSTC

Devido aos ganhos serem constantes e limitados no SMC convencional de primeira ordem, somente era possível compensar uma perturbação limitada se esse limite era conhecido previamente. Com o objetivo de reduzir a magnitude do efeito de *chattering* e/ou compensar perturbações, cuja o limite da perturbação só possa ser conhecido em execução ou dependa do estado, foi introduzido em [4] , [17] o SMC de primeira ordem de ganho variável, onde os ganhos são ajustados de acordo com o limite atual da perturbação.

Assim, quando a perturbação é limitada por uma função conhecida $\varrho(x)$

$$|f(x, t)| \leq \varrho(x), \quad (2.25)$$

o modo deslizante de primeira ordem pode ser forçado por um ganho variável no controlador:

$$v = -(\varrho(x) + \varrho_0) \text{sign}(s) \quad (2.26)$$

com $\varrho_0 > 0$.

Seguindo a mesma ideia, o *Variable Gain Super-Twisting Control – VGSTC* , proposto em [7, 8], utiliza como base o STC convencional e atribui ganhos variáveis ao controle para que o sistema possa rejeitar uma classe maior de incertezas/perturbações, tais como as que tenham os limites dos gradientes dependentes do estado, somente sejam conhecidas em execução ou o limite não seja conhecido previamente.

Considere o seguinte sistema incerto linear e invariante no tempo (*Linear Time Invariant - LTI*), proposto em [12] e [13] :

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_{11}\eta + A_{12}y \\ \dot{y} &= A_{21}\eta + A_{22}y + u + \bar{f}(\eta, y, t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Onde $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $y \in \mathbb{R}$ são os estados do sistema, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada do sistema e $\bar{f}(\eta, y, t)$ é uma incerteza / perturbação, absolutamente contínua e limitada, assim como seu gradiente, por funções contínuas conhecidas.

O objetivo principal do controle por modos deslizantes é projetar uma variável de deslizamento s e fazer o sistema convergir e se manter em uma superfície de deslizamento. Quando essa superfície é restrita à $s = 0$, temos para o sistema 2.27, a seguinte equação :

$$s = y - K\eta = 0 \rightarrow y = K\eta$$

Assim, o sistema tem sua ordem reduzida, podendo ser descrito como:

$$\dot{\eta} = (A_{11} + A_{12}K)\eta$$

Utilizando η e s como variáveis de estado, o sinal de controle é definido como:

$$\begin{aligned} u = & -(A_{21} + A_{22}K - K(A_{11} + A_{12}K))\eta \\ & -(A_{22} - KA_{12})s + v \end{aligned} \quad (2.28)$$

Onde $v \in \mathbb{R}$ é a entrada do sistema com as novas variáveis de estado :

$$\begin{aligned} \dot{\eta} = & (A_{11} + A_{12}K)\eta + A_{12}s \\ \dot{s} = & v + \bar{f}(\eta, y, t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

O sistema 2.29 , esta no formato a ser utilizado pelo controlador VGSTC que será apresentado a seguir. Assim, pode-se considerar a derivada da variável de deslizamento, \dot{s} , com a forma alternativa de um sistema de grau relativo unitário:

$$\dot{s} = u + \tilde{f}(s, t) \quad (2.30)$$

onde $s \in \mathbb{R}$ é a variável de deslizamento, $u \in \mathbb{R}$ é a lei de controle, e $\tilde{f}(s, t)$ é uma incerteza/perturbação absolutamente contínua e limitada, assim como seu gradiente, por funções contínuas conhecidas.

A introdução dos termos do VGSTC ao controlador é proposto com a seguinte forma:

$$v = -k_1(t, x)\phi_1(s) - \int_0^t k_2(t, x)\phi_2(s)dt \quad (2.31)$$

que pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} v &= -k_1(t, x)\phi_1(s) + z \\ \dot{z} &= -k_2(t, x)\phi_2(s) \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= |s|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(s) + k_3s, \quad k_3 > 0 \\ \phi_2(s) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(s) + \frac{3}{2}k_3|s|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(s) + k_3^2s \end{aligned}$$

e o seu diagrama de blocos é ilustrado na figura A.2.

Introduzindo termos de ordem mais alta ao controlador, o VGSTC permite que incertezas/perturbações que aumentam junto com a variável de deslizamento sejam compensadas, assegurando o deslizamento em sistemas cuja a parte linear não seja exatamente conhecida. Além disso, garante uma convergência mais rápida quando o sistema se encontra longe do equilíbrio. Considerando uma vizinhança suficientemente pequena em torno da superfície de deslizamento, os termos de mais alta

ordem podem ser desprezados, quando comparados com os termos convencionais, conservando assim a característica de convergência assintótica e em tempo finito. Porém, neste controle, é pressuposto que todo o vetor de estados esteja disponível para os objetivos de controle, o que restringe sua aplicabilidade.

A incerteza/perturbação $\tilde{f}(s, t)$ pode ser redefinida na forma:

$$\tilde{f}(s, t) = g_1(s, t) + g_2(t) \quad (2.32)$$

Assume-se que as funções $g_1(s, t)$ e $g_2(t)$ obedecem às seguintes condições:

$$|g_1(s, t)| \leq \varrho_1(s, t) |\phi_1(s)| \quad \text{e} \quad \left| \frac{dg_2}{dt}(t) \right| \leq \varrho_2(t) |\phi_2(s)| \quad (2.33)$$

onde $\varrho_1(s, t) \geq 0$ e $\varrho_2(t) \geq 0$ são funções contínuas conhecidas.

Considerando a equação (2.32) e o sistema (2.30), o sistema 2.29 em termos do controlador (2.31) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= (A_{11} + A_{12}K)\eta + A_{12}s, \\ \dot{s} &= -k_1(s, t)\phi_1(s) + z + g_1(s, t), \\ \dot{z} &= -k_2(s, t)\phi_2(s) + \frac{d}{dt}g_2(t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Essas diferenças, introdução de termos lineares e ganhos variáveis no VGSTC, tornam as provas de convergência do STC convencional não aplicáveis, criando uma necessidade do seguinte teorema.

Teorema 2.5. [8]: *Considere o sistema (2.34). Suponha que a incerteza/perturbação satisfaça as condições (2.33) para algumas funções contínuas conhecidas $\varrho_1(s, t) \geq 0$ e $\varrho_2(t) \geq 0$. Então, para quaisquer condições iniciais (s_0, z_0) a superfície de deslizamento $s = 0$ será alcançada em tempo finito se os ganhos variáveis forem escolhidos como:*

$$\begin{aligned} k_1(s, t) &= \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon\varrho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \varrho_1](\beta + 4\epsilon^2) \right\} \\ k_2(s, t) &= \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(s, t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $\beta > 0$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ são constantes positivas arbitrárias.

Demonstração. ver Apêndice B.4. □

Sendo essa definição uma generalização do STC convencional, que consiste no controlador acima descrito considerando ganho $k_3 = 0$ e ganhos k_1 e k_2 constantes. A técnica de controle VGSTC e suas características são exploradas de forma mais aprofundada nesse trabalho, onde é analisado sua aplicação em plantas incertas que possuem estados não disponíveis. Essa aplicação e características básicas do VGSTC são apresentadas no próximo capítulo.

Capítulo 3

VGSTC usando apenas realimentação de saída

3.1 introdução

Como mencionado, a utilização do VGSTC pressupõe que todo o vetor de estado está disponível para o controle. No entanto, a sua implementação pode ser feita com auxílio de algumas técnicas de controle para a obtenção de substitutos dos estados não medidos.

A seguir é proposta uma realimentação de saída para uma planta incerta de fase mínima e com grau relativo igual a um, onde se tem um vetor de estados parcialmente disponível. A obtenção dos substitutos dos estados não disponíveis, será feita por uma aproximação por filtro de primeira ordem (*First Order Approximation Filters* - FOAF)(Hsu et al., 2003), que gera uma norma do estado não medido e possibilita a obtenção de um majorante para as perturbações, o que é necessário na implementação do *Variable Gain Super Twisting Algorithm* - VGSTA. Neste capítulo também é apresentado o teorema 3.1, que garante o funcionamento do esquema de controle de VGSTC por realimentação de saída.

Assim, o foco neste capítulo é apresentar as hipóteses e condições necessárias do teorema 3.1, apresentar as características principais do VGSTC e validar o novo esquema de controle proposto.

A seguir serão apresentados alguns conceitos necessários para o entendimento da implementação do VGSTC desse caso.

3.2 Definição do problema

Considera-se uma planta linear invariante no tempo (*Linear Time Invariant- LTI*), incerta e monovariável

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[u + d(x, t)], \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, e $d(x, t) \in \mathbb{R}$ é uma incerteza não linear dependente do estado. São feitas as seguintes hipóteses:

- (A1) A função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ é de fase mínima, ou seja, todos os zeros estão no semiplano lateral esquerdo [19, p. 515].
- (A2) O sistema é controlável e observável.
- (A3) $G(s)$ tem grau relativo 1, i. e., $\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = k_p = CB \neq 0$.
- (A4) O sinal do ganho de alta frequência ($\text{sgn}(k_p)$) é conhecido e suposto como positivo, por simplicidade e sem perda de generalidade, pois se $k_p < 0$, é possível inverter o sinal do controlador e trocar k_p por $|k_p|$.

Pelas hipóteses (A2) e (A3), e do fato que $CB = k_p \neq 0$, pode ser mostrado que aplicando a seguinte transformação linear:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^\perp \\ C \end{bmatrix} x, \quad \text{onde } B^\perp B = 0, \quad (3.2)$$

O sistema 3.1 pode ser transformado para sua forma normal apresentada em 2.27. Considerando o sistema com uma saída, y , temos:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_{11}\eta + A_{12}y, \\ \dot{y} &= A_{21}\eta + a_{22}y + k_p(u + d), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ é um estado não medido e a dinâmica dos zeros, dada por $\dot{\eta} = A_{11}\eta$, é estável, pois $G(s)$ é de fase mínima pela hipótese (A1). O objetivo principal é desenvolver uma lei de controle u que faça com que y rastreie em tempo finito um sinal de referência y_m . Note que, o sistema 2.27 não possui a variável η disponível é o mesmo que dizer que $K = 0$, i. e., a superfície de deslizamento é dada por

$$s = e - K\eta = e - 0\eta = e.$$

Note que neste caso a superfície não pode ser projetada, pois é definida diretamente pela dinâmica do erro $\dot{s} = \dot{e}$, que no caso SISO é dado pela dinâmica dos zeros da função de transferência do sistema.

Onde o erro de rastreamento é dado por

$$e = y - y_m$$

e sua dinâmica é descrita por

$$\dot{e} = k_p u + f(\eta, e, t),$$

onde

$$f(\eta, e, t) = A_{21}\eta + a_{22}e + k_p d(\eta, e, t) + a_{22}y_m - \dot{y}_m,$$

pode ser considerado um distúrbio e reescrito como

$$\begin{aligned} f(\eta, e, t) &= \overbrace{[f(\eta, e, t) - f(\eta, 0, t)]}^{g_1(\eta, e, t)} + \overbrace{f(\eta, 0, t)}^{g_2(\eta, t)} \\ &= g_1(\eta, e, t) + g_2(\eta, t), \end{aligned}$$

onde $g_1(\eta, e, t) = 0$, se $e = 0$. Com isso,

$$g_1(\eta, e, t) = a_{22}e + k_p \{d(\eta, e, t) - d(\eta, 0, t)\}, \quad (3.4)$$

e

$$g_2(\eta, t) = A_{21}\eta + k_p d(\eta, 0, t) + a_{22}y_m - \dot{y}_m. \quad (3.5)$$

Para desenvolver um algoritmo de controle baseado em STC, o (*Super Twisting Algorithm - STA*), deve-se conhecer alguns majorantes dos elementos da perturbação e suas derivadas. Como η é um estado não medido, é necessário que ao menos esteja disponível um majorante para a norma de η . Esse majorante, $\hat{\eta}$, pode ser obtido por uma aproximação por filtro de primeira ordem (*First Order Approximation Filter - FOAF*).

3.3 Margem de estabilidade

A margem de estabilidade é um conceito fundamental para as aproximações por filtro de primeira ordem que serão apresentados posteriormente.

A margem de estabilidade de $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ é dada por:

$$\gamma_0 := \min_j \{-\Re(p_j)\} \quad (3.6)$$

onde $\{p_j\}$ são os pólos de $G(s)$. O sistema com matriz de transferência $G(s)$ é *BIBO* estável se e somente se $\gamma_0 > 0$ (Kailath 1980, Seção 2.6.1)

A margem de estabilidade de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dada por:

$$\lambda_0 := \min_j \{-\Re(\lambda_j)\} \quad (3.7)$$

onde $\{\lambda_j\}$ são os autovalores de A . Se $\lambda_0 > 0$ então A é denominado Hurwitz

A margem de estabilidade de um polinômio $p(s) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}[s]$ é dada por:

$$\gamma_0 := \min_j \{-\Re(z_j)\} \quad (3.8)$$

onde $\{z_j\}$ são as raízes de $p(s)$, i.e., $p(z_j) = 0$. Se $\lambda_0 > 0$ então $p(s)$ é denominado polinômio Hurwitz.

3.4 Aproximação por filtros de primeira ordem - FOAF

Para sistemas nos quais nem todos os estados estão disponíveis, normalmente são utilizados observadores para estimar os estados não observáveis. Porém as incertezas nos parâmetros do sistema podem impedir que os estados possam ser estimados com precisão. Alternativamente, aproximações por filtro de primeira ordem (*First Order Approximation Filters* - FOAF) podem ser utilizados para obter uma estimativa desses estados.

A utilização do FOAF torna-se mais vantajosa uma vez que sua realização é mais simples e sua síntese não é baseada no modelo, i.e., é mais natural para sistemas incertos.

Uma realização de um FOAF, para sistemas lineares é:

$$\dot{\bar{y}}(t) = -\gamma \bar{y}(t) + c_1 \|u(t)\| \quad (3.9)$$

onde $\bar{y}(t) \geq \|g(t) * u(t)\|, \forall t \geq 0$, desde que $\bar{y}(0) \geq 0$

Definição Um filtro, com função de transferência $c_1/(s + \gamma)$, é considerado um FOAF para uma $G(s)$, estritamente própria e estável, se:

$$\|g(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t), \forall t \geq 0 \quad (3.10)$$

onde $g(t)$ é a resposta impulsiva correspondente à função de transferência $G(s)$ e $c_1, \gamma > 0$ são constantes do filtro.

Lema 3.1. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. Seja γ_0 a margem de estabilidade da matriz de transferência $G(s) := C(sI - A)^{-1}B$ e seja $\gamma := \gamma_0 - \delta$ com $\delta > 0$ sendo uma constante arbitrária. Seja $\bar{u}(t)$ um majorante instantâneo de $u(t)$, i.e., $\|u(t)\| \leq \bar{u}(t)$, $\forall t \geq 0$. Então, $\exists c_1, c_2 > 0$ tais que a resposta impulsiva $g(t)$ do sistema 3.11 satisfaça

$$\|g(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t), \forall t \geq 0 \quad (3.12)$$

e as seguintes desigualdades sejam satisfeitas:

$$\|g(t) * u(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \bar{u}(t) \quad (3.13)$$

$$\|y(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \bar{u}(t) + c_2 \exp[-(\lambda_0 - \delta)t] \|x(0)\| \quad (3.14)$$

$\forall t \geq 0$, onde λ_0 é a margem de estabilidade de A

Demonstração. Prova apresentada em [20], e também no apêndice B.3.1 □

3.5 Realimentação de saída e VGSTA

Considerando o modelo de VGSTC apresentado na subseção 2.2.6, nesta seção é proposta uma extensão utilizando apenas realimentação de saída e assumindo uma disponibilidade parcial dos estados do sistema. Para esta finalidade, um FOAF é utilizado no sistema em malha fechada. Algumas hipóteses necessárias para esse esquema serão apresentadas previamente.

Considerando o sistema definido em 3.3, para obter um majorante para a norma de η , é feita a seguinte hipótese:

(A5) O limite inferior, $\lambda_1 > 0$, para a margem de estabilidade de A_{11} é conhecido.

Considerando o resultado do Lema 3.1 é possível obter um majorante, $\hat{\eta}(t)$ para norma do estado não medido $\eta(t)$, i.e. :

$$\|\eta(t)\| \leq \hat{\eta}(t) + \pi_\eta(t),$$

onde $\pi_\eta(t)$ é uma exponencial decrescente proveniente das condições iniciais, e que tende a ficar desprezível, quando comparado com o outro termo da desigualdade, conforme t aumenta. O outro termo é obtido por :

$$\hat{\eta}(t) := \frac{c_1}{s + \gamma} |y(t)|, \quad (3.15)$$

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = -\gamma \hat{\eta} + c_1 |y(t)|$$

com $c_1, \gamma > 0$ sendo constantes apropriadas e calculadas por métodos de otimização descritos em CUNHA *et al.* 21.

A perturbação utilizada no esquema de controle é considerada um pouco diferente da considerada no esquema original GONZALEZ *et al.* 12 e DÁVILA *et al.* 13 :

(A6) A perturbação $f(\eta, e, t)$ satisfaz as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} |g_1(\eta, e, t)| &\leq \{\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_1(t)|\} |\phi_1(e)|, \\ \left| \frac{d}{dt} g_2(\eta, t) \right| &\leq \{\varrho_2(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_2(t)|\} |\phi_2(e)|, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) \geq 0$ e $\varrho_2(t, \hat{\eta}, e) \geq 0$ são funções contínuas e conhecidas, e $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$ são exponenciais decrescentes proveniente das condições iniciais, e que tendem a ficarem desprezíveis, quando comparado com o outro termo da desigualdade, conforme t aumenta. Note que essa alteração amplia a definição da desigualdade, pois quando as exponenciais se tornam desprezíveis, essa definição se torna semelhante a apresentada em [12] e [13].

O VGSTA, considerado em DÁVILA *et al.* 13 e GONZALEZ *et al.* 12, para o sistema definido em 3.2, assume a seguinte forma:

$$u = -k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) - \int_0^t k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e)dt, \quad (3.17)$$

podendo ser reescrito como:

$$\begin{aligned} u &= -k_1(t, x)\phi_1(e) + z \\ \dot{z} &= -k_2(t, x)\phi_2(e) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_1(e) &= |e|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e) + k_3 e, \quad k_3 > 0, \\ \phi_2(e) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(e) + \frac{3}{2} k_3 |e|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e) + k_3^2 e, \end{aligned}$$

Considerando o sistema 3.3, o controle 3.17 e o o FOAF 3.5, o sistema em malha fechada pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_{11}\eta + A_{12}(e + y_m), \\ \dot{e} &= -k_p k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) + z + g_1(\eta, e, t), \\ \dot{z} &= -k_p k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e) + \frac{d}{dt} g_2(\eta, t), \\ \dot{\hat{\eta}}(t) &= -\gamma \hat{\eta} + c_1 |y(t)|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Considerando o sistema 3.18, será detalhado o Teorema 3.1, desenvolvido por VIDAL *et al.* 9 e apresentado em [9], que contém as restrições das escolhas dos ganhos para que o modos deslizantes $s = e = 0$ e o modos deslizantes de segunda ordem $\dot{s} = \dot{e} = 0$ sejam alcançados em tempo finito.

O teorema 3.1 foi uma contribuição recente para a literatura de controle, por isso o presente trabalho é um complemento de análise do teorema e valida a eficácia do esquema de controle proposto por meio de uma simulação numérica de uma aplicação prática, sendo assim uma ampliação da literatura de controle por modos deslizantes.

Teorema 3.1. [9] *Considere o sistema 3.5,3.18 sob as hipóteses (A1)–(A6). Suponha que a perturbação satisfaz 3.16 para algumas funções contínuas $\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) \geq 0$, $\varrho_2(t, \hat{\eta}, e) \geq 0$. Então para qualquer condição inicial $[\eta_0^T, e_0, z_0]^T$, a superfície de deslizamento $\dot{e} = e = 0$ será alcançada em tempo finito se os ganhos forem escolhidos como :*

$$k_1(t, \hat{\eta}, e) \geq \delta + \frac{1}{k_p^2 \beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [4\epsilon^2 + 2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon(\varrho_2 + k_p\beta) + \epsilon + \varrho_1(k_p\beta + 4\epsilon^2) \right\}, \quad (3.19)$$

$$k_2(t, \hat{\eta}, e) = \beta + 2\epsilon k_1(t, \hat{\eta}, e),$$

onde $\beta > 0$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ são constantes positivas e arbitrárias.

Demonstração. Considere a seguinte função candidata de Lyapunov:

$$V(e, z) = \zeta^T P \zeta, \quad (3.20)$$

onde

$$\zeta = \begin{bmatrix} \phi_1(e) \\ z \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} (k_p\beta + 4\epsilon^2) & -2\epsilon \\ -2\epsilon & 1 \end{bmatrix},$$

$\beta > 0$ e $\epsilon > 0$. Note que a função $V(e, z)$ é contínua em todo o espaço, e diferenciável em todo lugar exceto no subespaço $\mathcal{S} = \{(e, z) \in \mathbb{R}^2 | e = 0\}$.

Considere a seguinte derivada

$$\phi_1'(e) = \frac{d\phi_1}{de} = \frac{1}{2|e|^{1/2}} + k_3,$$

onde $\phi_1' \in \mathbb{R}$ possui a seguinte propriedade:

$$\phi_2 = \phi_1' \phi_1 = \left(\frac{1}{2|e|^{1/2}} + k_3 \right) \phi_1.$$

Sendo assim, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} \phi_1'(e) \{ -k_p k_1(t, \hat{\eta}, e) \phi_1(e) + z + g_1(\eta, e, t) \} \\ -k_p k_2(t, \hat{\eta}, e) \phi_2(e) + \frac{d}{dt} g_2(\eta, t) \end{bmatrix} \\ &= \phi_1'(e) \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e) \zeta + \gamma(\eta, e, t), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e) &= \begin{bmatrix} -k_p k_1(t, \hat{\eta}, e) & 1 \\ -k_p k_2(t, \hat{\eta}, e) & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma(\eta, e, t) &= \begin{bmatrix} \phi'_1(e) g_1(\eta, e, t) \\ \frac{d}{dt} g_2(\eta, t) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

em todo o $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$, onde existe a derivada. A derivada de $V(e, z)$ pode ser calculada como:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e, z) &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\ &= \phi'_1(e) \zeta^T (\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)^T P + P \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)) \zeta \\ &\quad + 2 \zeta^T P \gamma(\eta, e, t) \\ &= -\phi'_1(e) \zeta^T \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) \zeta + 2 \zeta^T P \gamma(\eta, e, t),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) &= -(\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)^T P + P \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)) \\ &= \begin{bmatrix} 2\beta k_p^2 k_1 + 4\epsilon k_p (2\epsilon k_1 - k_2), & \star \\ k_p (k_2 - 2\epsilon k_1 - \beta) - 4\epsilon^2, & 4\epsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\beta k_p^2 k_1 - 4\epsilon k_p \beta, & \star \\ -4\epsilon^2, & 4\epsilon \end{bmatrix},\end{aligned}$$

é a parte da última igualdade obtida, considerando k_2 segundo (3.19). Além disso, por

$$\zeta^T P \gamma(\eta, e, t)$$

$$\begin{aligned}&= \{(k_p \beta + 4\epsilon^2) \phi_1 - 2\epsilon z\} \phi'_1 g_1 + \{-2\epsilon \phi_1 + z\} \frac{d}{dt} g_2 \\ &\leq (k_p \beta + 4\epsilon^2) \phi'_1 |\phi_1| |g_1| + 2\epsilon \phi'_1 |z| |g_1| \\ &\quad + \{2\epsilon |\phi_1| + |z|\} \left| \frac{d}{dt} g_2 \right| \\ &\leq \phi'_1 \{[(\varrho_1 + |\pi_1|)(k_p \beta + 4\epsilon^2) + 2\epsilon(\varrho_2 + |\pi_2|)] |\phi_1|^2 \\ &\quad + [(\varrho_2 + |\pi_2|) + 2\epsilon(\varrho_1 + |\pi_1|)] |z| |\phi_1|\},\end{aligned}$$

é obtido que

$$2\zeta^T P \gamma \leq \phi'_1 \{ \bar{\zeta}^T \Gamma(t, \hat{\eta}, e) \bar{\zeta} + \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \},$$

onde

$$\Gamma(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} 2\varrho_1 (k_p \beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon \varrho_2, & \star \\ \varrho_2 + 2\epsilon \varrho_1, & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Pi(t) = \begin{bmatrix} 2|\pi_1|(k_p\beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon|\pi_2|, & \star \\ |\pi_2| + 2\epsilon|\pi_1|, & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{e } \bar{\zeta} = \begin{bmatrix} |\phi_1|, & |z| \end{bmatrix}^T.$$

Considerando a desigualdade $\zeta^T Q \zeta \geq \bar{\zeta}^T Q \bar{\zeta}$, é possível ver que :

$$\dot{V}(e, z) \leq -\phi_1' \{ \bar{\zeta}^T Q(t, \hat{\eta}, e) \bar{\zeta} - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \},$$

onde

$$Q(t, \hat{\eta}, e) = \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) - \Gamma(t, \hat{\eta}, e),$$

e

$$Q - 2\epsilon I = \begin{bmatrix} 2\beta k_p^2 k_1 - 2\varrho_1(k_p\beta + 4\epsilon^2) - 4\epsilon(\varrho_2 + k_p\beta) - 2\epsilon, & \star \\ -(4\epsilon^2 + \varrho_2 + 2\epsilon\varrho_1), & 2\epsilon \end{bmatrix}.$$

Escolhendo k_1 segundo (3.19), então a matriz $Q - 2\epsilon I$ é positiva definida. Portanto,

$$\dot{V}(e, z) \leq - \left(\frac{1}{2|e|^{1/2}} + k_3 \right) \{ 2\epsilon \|\zeta\|^2 - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \}, \quad (3.21)$$

uma vez que $\|\bar{\zeta}\| = \|\zeta\|$. Como $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$ são limitados

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, z) &\leq \left(\frac{1}{2|e|^{1/2}} + k_3 \right) \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \\ &\leq \left(\frac{1}{2|e|^{1/2}} + k_3 \right) |\phi_1| \{ c_{\phi_1} |\phi_1| + c_z |z| \} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} k_3 |e|^{1/2} + k_3^2 |e| \right) \{ c_\zeta \|\zeta\| \} \\ &\leq c_1 \|\zeta\| + c_2 \|\zeta\|^2, \end{aligned}$$

onde

$$\|\zeta\|^2 = |\phi_1|^2 + |z|^2 = |e| + 2k_3|e|^{3/2} + k_3^2|e|^2 + |z|^2$$

é a norma Euclidiana de ζ . Segundo

$$\lambda_{\min} \{P\} \|\zeta\|^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \|\zeta\|^2 \quad (3.22)$$

obtem-se que a desigualdade

$$\dot{V}(e, z) \leq \bar{c}_1 V^{1/2}(e, z) + \bar{c}_2 V(e, z),$$

e $V(e, z)$ não possuem trajetórias que vão para o infinito em um tempo finito. Além disso,

$$\bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \leq \lambda_{\max} \{ \Pi(t) \} \|\bar{\zeta}\|^2 \leq |\pi_\zeta(t)| \|\bar{\zeta}\|^2,$$

e a equação (3.21) implicam que

$$\dot{V}(e, z) \leq -(2\epsilon - |\pi_\zeta(t)|) \left(\frac{1}{2|e|^{1/2}} + k_3 \right) \|\bar{\zeta}\|^2.$$

Como $|\pi_\zeta(t)|$ é uma função exponencial decrescente, depois de algum tempo finito t_1

$$(2\epsilon - |\pi_\zeta(t)|) \geq 2\mu, \quad t \geq t_1,$$

onde $\mu < \epsilon$ é uma constante positiva. Portanto,

$$\dot{V}(e, z) \leq -2\mu \left(\frac{1}{2|e|^{1/2}} + k_3 \right) \|\zeta\|^2, \quad t \geq t_1.$$

Pela equação (3.22) e

$$|e|^{1/2} \leq \|\zeta\| \leq \frac{V^{1/2}(e, z)}{\lambda_{\min}^{1/2}\{P\}},$$

obtem-se

$$\dot{V} \leq -\kappa_1 V^{1/2}(e, z) - \kappa_2 V(e, z), \quad t \geq t_1,$$

onde

$$\kappa_1 = \frac{\mu \lambda_{\min}^{1/2}\{P\}}{\lambda_{\max}\{P\}}, \quad \kappa_2 = \frac{2\mu k_3}{\lambda_{\max}\{P\}}. \quad (3.23)$$

Observando que as trajetórias do VGSTA não podem ficar no subconjunto $\mathcal{S} = \{(e, z) \in \mathbb{R}^2 | e = 0\}$, pode-se concluir pelo teorema de estabilidade de Zubov que o ponto de equilíbrio $(e, z) = 0$ é alcançado em tempo finito para qualquer condição inicial.

Como a solução de

$$\dot{v} = -\kappa_1 v^{1/2} - \kappa_2 v, \quad t \geq t_1, \quad v(t_1) = v_{t_1} \geq 0$$

é dada por

$$v(t) = \frac{\left[v_{t_1}^{1/2} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} (1 - \exp[\frac{\kappa_2}{2}(t - t_1)]) \right]^2}{\exp[\kappa_2(t - t_1)]},$$

segue que $(e(t), z(t))$ convergem para zero no mais tardar em um tempo finito

$$T = t_1 + \frac{2}{\kappa_2} \ln \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} V^{1/2}(\sigma_{t_1}, z_{t_1}) + 1 \right).$$

□

3.6 Resultados e Simulações

Esta seção tem como objetivo demonstrar as principais características e propriedades do controlador VGSTC proposto em [[12]] utilizando somente realimentação de saída, técnica proposta nesse capítulo. A primeira simulação é feita em duas partes, a primeira considera a simulação de uma planta onde todos os estados estão disponíveis para esquema de controle, e a segunda parte considera que a planta tem somente parte do estados disponível e utiliza um FOAF para obter um majorante da norma dos estados não medidos. A segunda simulação apresenta um caso prático, a fim de validar o esquema de controle proposto

Nas simulações a seguir, o controlador VGSTC é da forma 3.17. No esquema de controle em que se supõem que a planta tem todos os estados disponíveis, o vetor de estados, η , é utilizado diretamente na entrada $\hat{\eta}$ do controlador. Para a planta com disponibilidade parcial de estados é utilizado um FOAF, descrito por 3.5, para obtenção do majorante $\hat{\eta}$.

3.6.1 Simulação 1: Realimentação de estados x Realimentação de saída

Considere a seguinte planta LTI incerta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u + d(x, t)], \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x, \end{aligned} \quad (3.24)$$

com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s + 2}{(s - 2)^2},$$

e ganho de alta frequência $k_p = CB = 1$. A perturbação dependente do estado é dada por

$$\begin{aligned} d(x, t) &= |Cx| + 0.5 \sin(10\pi t) \\ &= |y| + 0.5 \sin(10\pi t). \end{aligned}$$

Aplicando a transformação linear definida em 3.2:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^\perp \\ C \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x,$$

o sistema é transformado para sua forma normal:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -2\eta - y, \\ \dot{y} &= -16\eta + 6y + u + d(x, t),\end{aligned}$$

e a norma para o estado não medido η pode ser obtido pelo seguinte FOAF

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{s+1}|y(t)|.$$

O objetivo é garantir que a saída da planta y , rastreie em tempo finito o sinal de referencia:

$$y_m = \sin(2\pi t).$$

Nesse caso, considerando as equações 3.4 e 3.5, temos:

$$\begin{aligned}g_1(\eta, e, t) &= 6e + |e + y_m| - |y_m|, \\ g_2(\eta, t) &= -16\eta + |y_m| + 0.5 \sin(10\pi t) + 6y_m - \dot{y}_m,\end{aligned}$$

e

$$\frac{dg_2}{dt} = 32\eta + 16y + \dot{y}_m \operatorname{sgn}(y_m) + 5\pi \cos(10\pi t) + 6\dot{y}_m - \ddot{y}_m.$$

Assim, para satisfazer as desigualdades 3.16, as funções contínuas devem obedecer:

$$\begin{aligned}|g_1| &\leq 6|e| + |e| \\ &\leq \frac{7}{k_3}|\phi_1(e)|, \\ \left| \frac{dg_2}{dt} \right| &\leq 32|\eta| + 16|e + y_m| + 5\pi + 7|\dot{y}_m| + |\ddot{y}_m| \\ &\leq 32[\hat{\eta} + \pi_\eta(t)] + 16|e| + 16|y_m| + 19\pi + 4\pi^2 \\ &\leq \max \left\{ \frac{16}{k_3^2}, 64\hat{\eta} + 32|y_m| + 38\pi + 8\pi^2 + |\pi_2(t)| \right\} |\phi_2(e)|,\end{aligned}$$

onde $|\pi_2(t)| = |64\pi_\eta(t)|$, e os limites superiores $|\dot{y}_m| \leq 2\pi$ e $|\ddot{y}_m| \leq 4\pi^2$ foram considerados. Como o sistema é incerto, somente os limites inferiores e superiores de A , B , C e k_p são conhecidos para efeito de controle. Assim, para levar em conta as incertezas nas matrizes do sistema e no ganho de alta frequência, as funções majorantes do VGSTA são escolhidas de forma mais conservadora. Para os cálculos das funções majorantes foram considerados que as incertezas do sistema poderiam ser próximas de cinquenta por cento. Assim, os valores das funções majorantes são

dados por:

$$\begin{aligned}\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) &= \frac{10.5}{k_3} \\ \varrho_2(t, \hat{\eta}, e) &= \max \left\{ \frac{36}{k_3^2}, 144\hat{\eta} + 72|y_m| + 85.5\pi + 8\pi^2 \right\}\end{aligned}$$

Assim, os ganhos do VGSTA k_1 e k_2 são escolhidos de forma que satisfaçam as inequações 3.19:

$$\begin{aligned}k_1(t, \hat{\eta}, e) &= \delta + \frac{1}{k_i^2\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [4\epsilon^2 + 2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\epsilon(\varrho_2 + k_i\beta) + \epsilon + \varrho_1(k_i\beta + 4\epsilon^2) \right\}, \\ k_2(t, \hat{\eta}, e) &= \beta + 2\epsilon k_1(t, \hat{\eta}, e),\end{aligned}$$

onde $\delta = 10^{-3}$, $\epsilon = 1$, $\beta = 7000$, e $k_i = 0.5$ é um limite inferior de k_p . Além disso, é fixado $k_3 = 0.5$. Nessa simulação, foram escolhidas as seguintes condições iniciais, para a planta $x(0) = [0.5, 0.5]^T$, para o FOAF e para os dois integradores do VGSTA foram escolhidas condições iniciais nulas. Foi utilizado um método de integração de Euler com passo fixo de 10^{-6} .

Com a finalidade de comparação, é considerado outra simulação onde todos os estados estariam disponíveis. Assim, é utilizado uma realimentação de estados onde, no lugar do estado obtido $\hat{\eta}$, é utilizado o estado da planta η para o cálculo das funções majorantes do VGSTA. Os resultados são apresentados nas figuras 3.1 e 3.2.

Embora o uso do FOAF gere um sinal de controle mais conservativo, nesse caso os resultados obtidos pelo esquema de realimentação de saída no VGSTA são bastante similares aos obtidos pelo esquema de realimentação de estados. Note que existe convergência do erro de rastreamento para zero em tempo finito, mesmo a planta tendo incertezas e o sistema perturbações dependentes do estado. Assim, esse resultado ilustra a efetividade e robustez da estratégia de controle adotada. Note que o sinal de controle, apresentado na figura 3.1, também é um sinal suave e que é livre de *chattering*.

Pela figura 3.2 pode-se ver que $\hat{\eta} > |\eta|$ depois de um tempo finito, o que está de acordo com a teoria desenvolvida, justamente por causa das condições iniciais da planta. Portanto a utilização do FOAF foi capaz de gerar um majorante da norma do estado não medido, e conseqüentemente capaz de gerar um substituto do estado não medido para o controlador VGSTC.

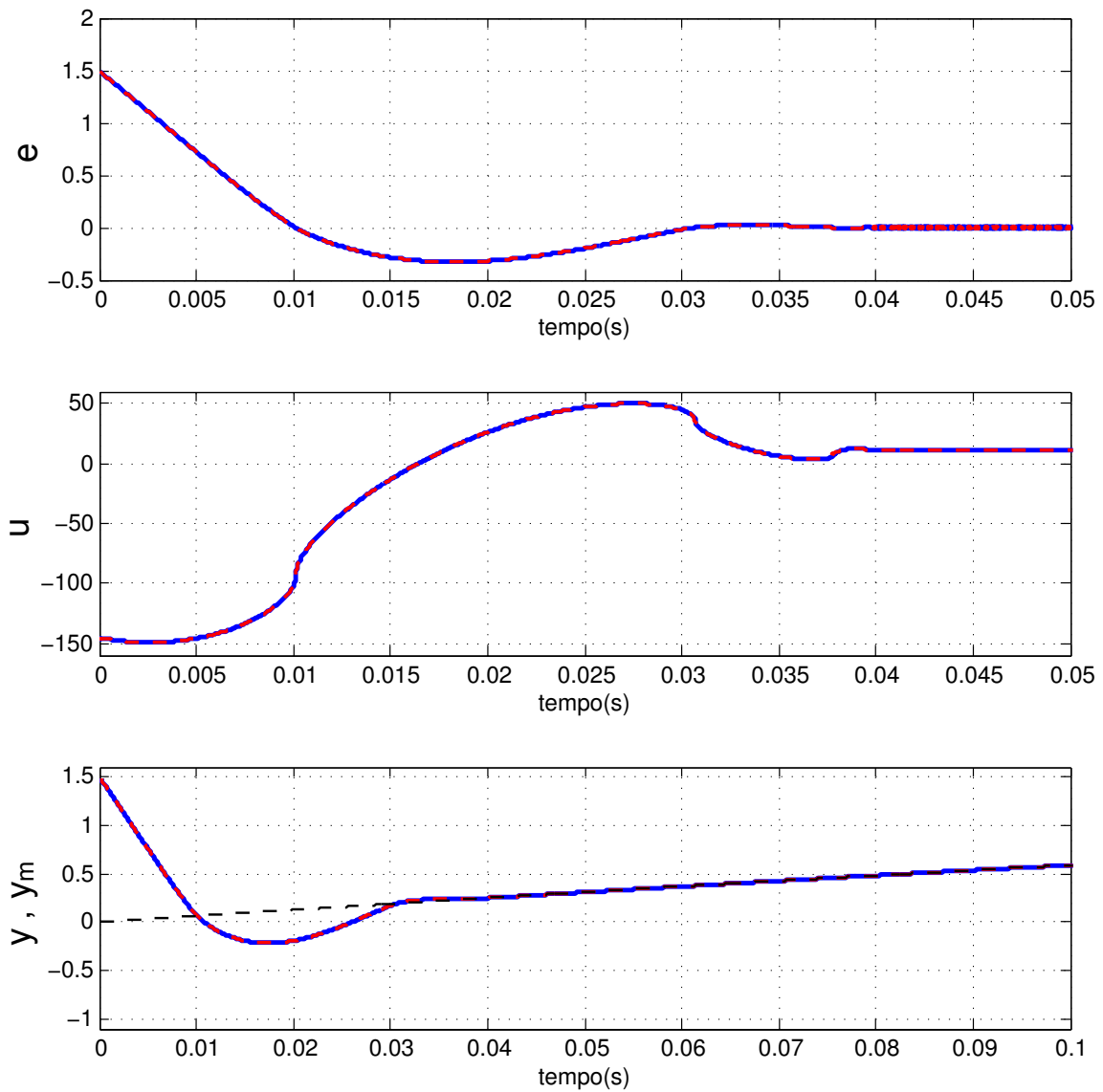


Figura 3.1: Gráficos da variável de erro e , do sinal de controle u e saída y em relação a referência y_m para o sistema 3.24 utilizando um controlador VGSTC 3.17. Os sinais do sistema por realimentação de estados são representados por (—), do sistema com realimentação de saída utilizando FOAF por (- - -) e o sinal de referencia por (- - -)

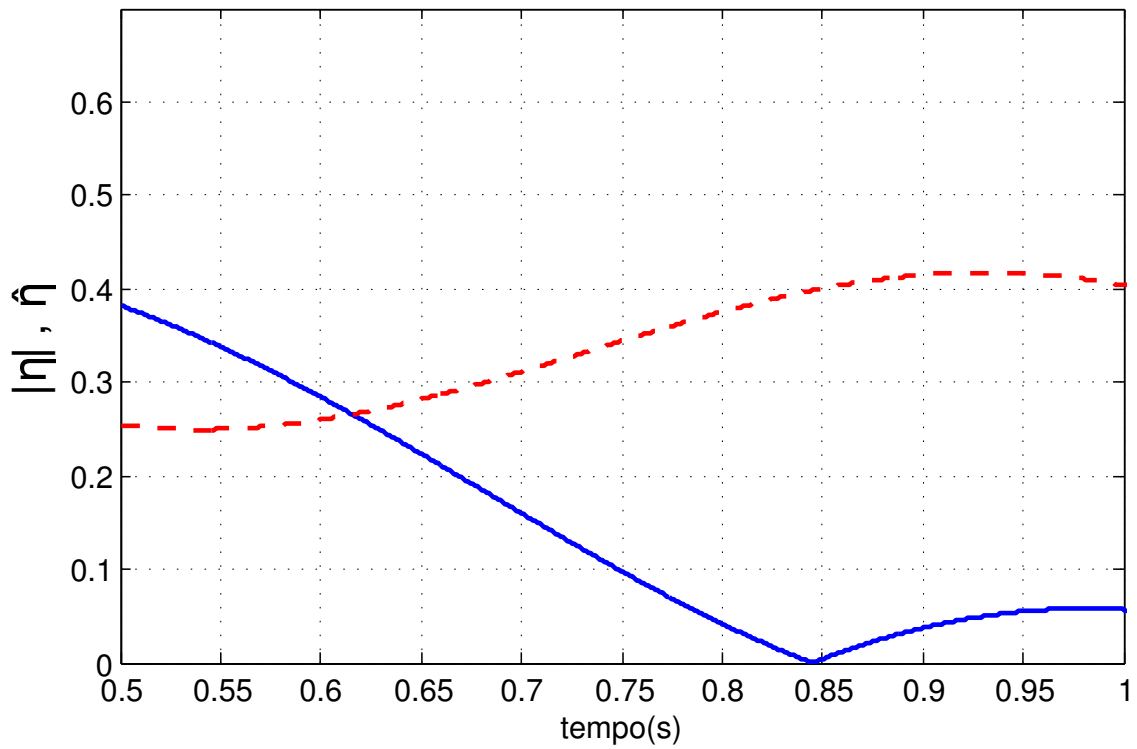
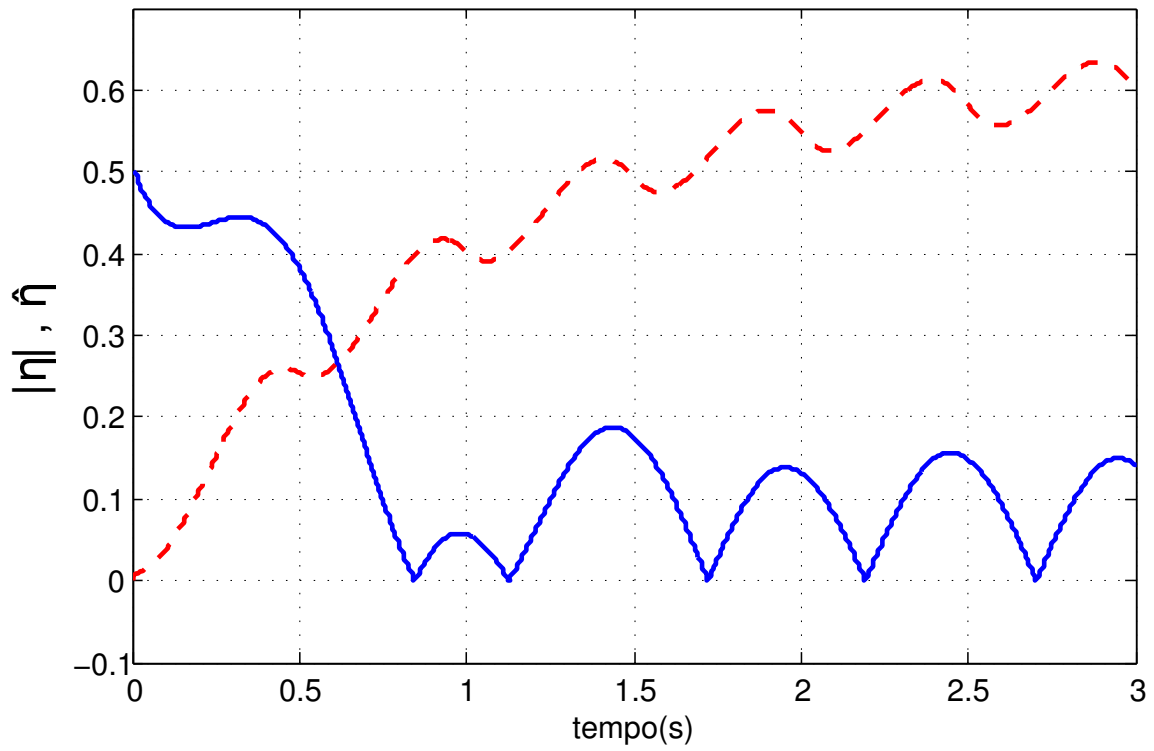


Figura 3.2: Gráfico da norma do estado não disponível para controle η , representado por (—), e do majorante $\hat{\eta}$ obtido com o FOAF, representado por (- - -), e um zoom deste mesmo gráfico.

3.6.2 Simulação 2: Trailer com VGSTC por realimentação de saída

Para validar os resultados teóricos e a aplicabilidade do esquema de controle VGSTC por realimentação de saída, será considerada uma simulação baseada em um sistema real de uma cadeia de trailers, apresentado em [22] e representado na figura 3.3.

Na modelagem do sistema em questão foi considerado um sistema *SISO*, apenas uma entrada e uma saída, onde $u = F_1$ é a entrada dada pela força do atuador 1, $y = v_1$ é a saída dada pela velocidade do trailer 1, e o estado não medido é dado por $\eta = [l_{31} \ v_3 \ l_{42} \ v_4 \ v_2]^T$, sendo l_{31} a distância entre os trailers 3 e 1, v_3 a velocidade do trailer 3, l_{42} a distância entre os trailers 4 e 2, v_4 a velocidade do trailer 4 e v_2 é a velocidade do trailer 2.

Os parâmetros do sistema são $m_1 = 1.2\text{kg}$, $m_2 = 2.5\text{kg}$, $m_3 \in [0.5, 1.5]\text{kg}$, $m_4 = 1.0\text{kg}$, $k_{24} = 100\text{N/m}$, $k_{31} \in [25, 35]\text{N/m}$, $b_{23} \in [2.5, 6.0]\text{Ns/m}$ e $b_{24} = 3.0\text{Ns/m}$, com valores nominais $m_3^{nom} = 1.0\text{kg}$, $k_{31}^{nom} = 30\text{N/m}$, e $b_{23}^{nom} = 4.0\text{Ns/m}$. Além disso, também é considerado que o trailer 4 pode ou não estar conectado. Quando o trailer 4 está desconectado é considerado que $b_{24} = 0\text{Ns/m}$, e $k_{24} = 0\text{N/m}$ e o estado não medido se reduz a $\eta = [l_{31} \ v_3 \ v_2]^T$.

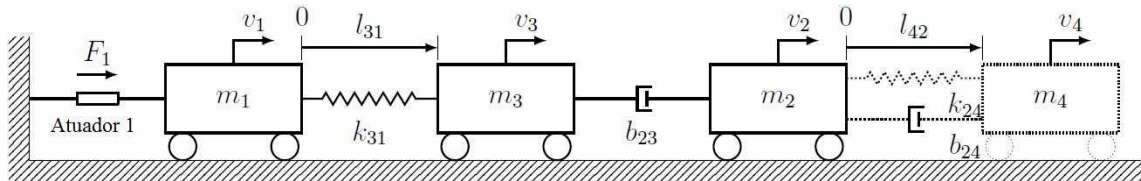


Figura 3.3: Cadeia de quatro trailers controlados por um atuador conectado no trailer ativo. O quarto trailer pode ou não estar conectado a cadeia

Assim o sistema na forma 3.3 é representado pelas seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{31}}{m_3} & -\frac{b_{23}}{m_3} & 0 & 0 & \frac{b_{23}}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{24}}{m_4} & -\frac{b_{24}}{m_4} & \frac{b_{24}}{m_4} \\ 0 & \frac{b_{23}}{m_2} & \frac{k_{24}}{m_2} & \frac{b_{24}}{m_2} & -\frac{b_{23}+b_{24}}{m_2} \end{bmatrix} & A_{12} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 A_{21} &= \begin{bmatrix} -\frac{k_{31}}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & A_{22} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & kp &= \frac{1}{m_1}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

O objetivo é garantir que a saída da planta y , rastreie em tempo finito o sinal de referência:

$$y_m = \sin(2\pi t),$$

mesmo com uma perturbação de atrito dependente do estado medido e dos estados não medidos. A presença dessa perturbação é modelada da seguinte forma :

$$\begin{aligned}
 d(x, t) &= 0.3v_1 + 0.3v_2 \\
 &= 0.3y + 0.3x_5,
 \end{aligned}$$

que leva em consideração a saída da planta y e da velocidade do trailer 2, x_5 , devido a este ser o mais pesado.

A norma para o estado não medido η pode ser obtido pelo seguinte FOAF:

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1.7}{s + 1.5}|y(t)|.$$

Seguindo as equações 3.4, é possível obter para g_1 :

$$g_1(\eta, e, t) = a_{22}e + \frac{0.3(e)}{m_1},$$

Assim, para satisfazer as desigualdades 3.16, a função continua deve obedecer:

$$|g_1| \leq \frac{0.3}{m_1 k_3} |e|$$

Seguindo as equações 3.5, é possível obter para g_2 :

$$g_2(\eta, t) = A_{21}\eta + \left(\frac{1}{m_1}\right)\{0.3(y_m + x_5)\} + a_{22}y_m - \dot{y}_m,$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{dg_2}{dt} &= A_{21}A_{11}\eta + A_{21}A_{12}y + (0.3k_p)\dot{y}_m + \\
&+ (0.3k_p)\dot{x}_5 + a_{22}\dot{y}_m - \ddot{y}_m. \\
&= \left[0 \quad \frac{k_{31}}{m_1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \eta - \frac{k_{31}}{m_1}y + \frac{1}{m_1} \{ 0.3\dot{y}_m + \\
&+ 0.3 \left[\frac{1}{m_2} (b_{23}x_2 + k_{24}x_3 + b_{24}x_4 - (b_{23} + b_{24})x_5) \right] \} - \ddot{y}_m,
\end{aligned}$$

Note que $\frac{dg_2}{dt}$ depende de estados que não são acessíveis para efeito de controle. Assim, para majorar esses termos, será utilizado o majorante da norma de η , i. e. ,

$$\begin{aligned}
b_{23}x_2 + k_{24}x_3 + b_{24}x_4 - (b_{23} + b_{24})x_5 &\leq b_{23}|x_2| + k_{24}|x_3| + b_{24}|x_4| + (b_{23} + b_{24})|x_5| \\
&\leq b_{23}|\hat{\eta}| + k_{24}|\hat{\eta}| + b_{24}|\hat{\eta}| + (b_{23} + b_{24})|\hat{\eta}| \\
&\leq (b_{23} + k_{24} + b_{24} + b_{23} + b_{24})|\hat{\eta}| \\
&\leq k_b|\hat{\eta}|
\end{aligned}$$

Onde é possível assumir $k_b = b_{23} + k_{24} + b_{24} + b_{23} + b_{24}$. Assim, para satisfazer a desigualdade referente a $|\frac{d}{dt}g_2|$, 3.16 :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{dg_2}{dt} \right| &\leq |A_{21}A_{11}| |\eta| + |A_{21}A_{12}| |e + y_m| + k_p(0.3|\dot{y}_m| + 0.3|\dot{x}_5|) + a_{22}|\dot{y}_m| + |\ddot{y}_m| \\
&\leq \frac{k_{31}}{m_1}|\eta| + \frac{k_{31}}{m_1}|e + y_m| + \frac{0.3}{m_1}|\dot{y}_m| + \frac{0.3k_b}{m_1m_2}|\eta| + |\ddot{y}_m| \\
&\leq \frac{k_{31}m_2 + 0.3k_b}{m_1m_2} [\hat{\eta} + \pi_\eta(t)] + \frac{k_{31}}{m_1}|e| + \frac{k_{31}}{m_1}|y_m| + \frac{0.3}{m_1}|\dot{y}_m| + |\ddot{y}_m| \\
&\leq \max \left\{ \frac{k_{31}}{k_3^2m_1}, \frac{k_{31}m_2 + 0.3k_b}{m_1m_2} \hat{\eta} + \frac{k_{31}}{m_1}|y_m| + \frac{0.3(2\pi)}{m_1} + 4\pi^2 + |\pi_2(t)| \right\} |\phi_2(e)|,
\end{aligned}$$

onde $|\pi_2(t)| = \frac{k_{31}m_2 + 0.3k_b}{m_1m_2} |\pi_\eta(t)|$, e os limites superiores $|\dot{y}_m| \leq 2\pi$ e $|\ddot{y}_m| \leq 4\pi^2$ foram considerados.

Considerando as incertezas nas variáveis k_{31} e b_{23} , é utilizado uma abordagem mais conservativa do VGSTA, sendo consideradas nas funções majorantes os valores limites dessas variáveis, e exigindo assim um maior esforço de controle.

Observando as desigualdades 3.19, os ganhos k_1 e k_2 do VGSTA são escolhidos

da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
k_1(t, \hat{\eta}, e) &= \delta + \frac{1}{k_i^2 \beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [4\epsilon^2 + 2\epsilon \varrho_1 + \varrho_2]^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\epsilon(\varrho_2 + k_i \beta) + \epsilon + \varrho_1(k_i \beta + 4\epsilon^2) \right\}, \\
k_2(t, \hat{\eta}, e) &= \beta + 2\epsilon k_1(t, \hat{\eta}, e),
\end{aligned}$$

onde $\delta = 10^{-1}$, $\epsilon = 2$, $\beta = 900$, e $k_i = 0.5k_p$ é um limite inferior de k_p . Além disso, é fixado $k_3 = 0.4$. Nessa simulação foram escolhidas as seguintes condições iniciais: para a planta $\eta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -3]^T$, $y(0) = [3]$, para o FOAF e para os integradores do VGSTA foram escolhidas condições iniciais nulas. Foi utilizado um método de integração de Euler com passo fixo de 10^{-6} .

Com a finalidade de comparação, novamente é considerado que todos os estados estariam disponíveis para implementação de uma realimentação de estados, onde no lugar do estado estimado, $\hat{\eta}$, é utilizado o estado η da planta no VGSTA.

A simulação inicial foi feita com o trailer 4 inicialmente desconectado, e sendo conectado em $t = 0.5s$. O resultado, apresentado na figura 3.4, mostra que o sistema de controle gera um rastreamento exato para o modelo de referência após $t = 0.2s$, quando o sistema entra em modo deslizante. Além disso, o erro de rastreamento é insensível a conexão do trailer 4 em $t = 0.5s$, que representa uma variação na dinâmica da planta.

Na segunda simulação, é considerado que o trailer 4 sempre está conectado. A figura 3.5 mostra que existe convergência em tempo finito do erro de rastreamento mesmo com os elevados parâmetros incertos e com perturbações dependentes da dinâmica interna. O sinal de controle gerado com o estado estimado $\hat{\eta}$, é um pouco mais conservativo, fazendo com que o rastreamento seja exato um pouco depois quando comparado com a realimentação de estados. Note que o sinal de controle é um sinal suave e menos propício ao *chattering*. Este resultado verifica a efetividade e robustez da estratégia de controle adotada.

A figura 3.6 mostra, como previsto, que depois de um transitório devido as condições iniciais, $\hat{\eta}$ majora $|\eta|$, e portanto o FOAF é capaz de gerar um majorante da norma do estado não medido.

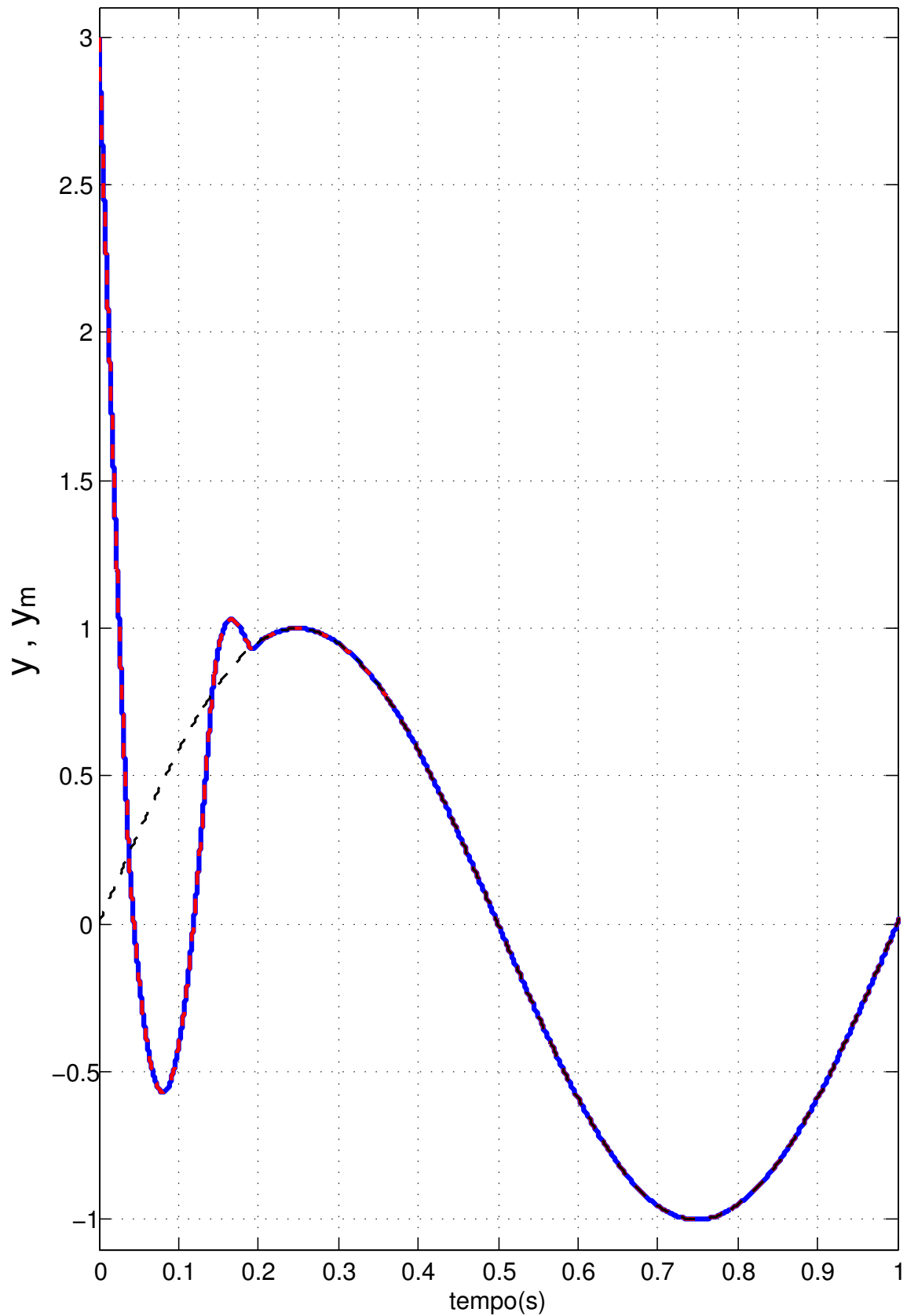


Figura 3.4: Gráficos do sinal de referencia y_m , representado por (- - -), e do sinal de saída do sistema 3.25 com controle VGSTC 3.17, por realimentação de estados (—), e com realimentação de saída utilizando FOAF (- - -). O trailer 4 está inicialmente desconectado e é conectado em $t = 0.5s$

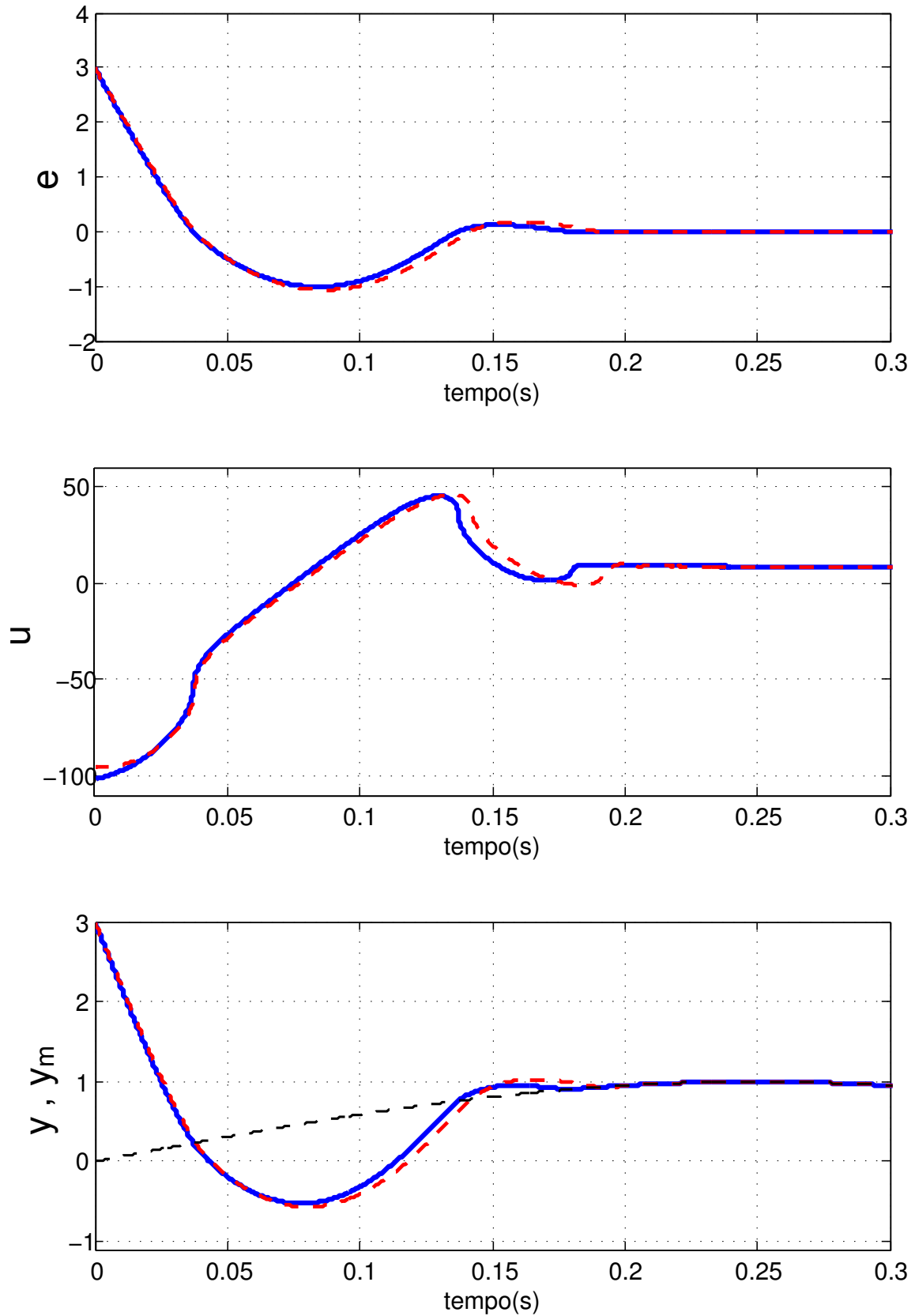


Figura 3.5: Gráficos da variável de erro e , do sinal de controle u e saída y em relação a referência y_m para o sistema 3.25 utilizando um controlador VGSTC 3.17. Os sinais do sistema por realimentação de estados são representados por (—), e do sistema com realimentação de saída, utilizando FOAF, por (- - -) e o sinal de referencia por (- - -)

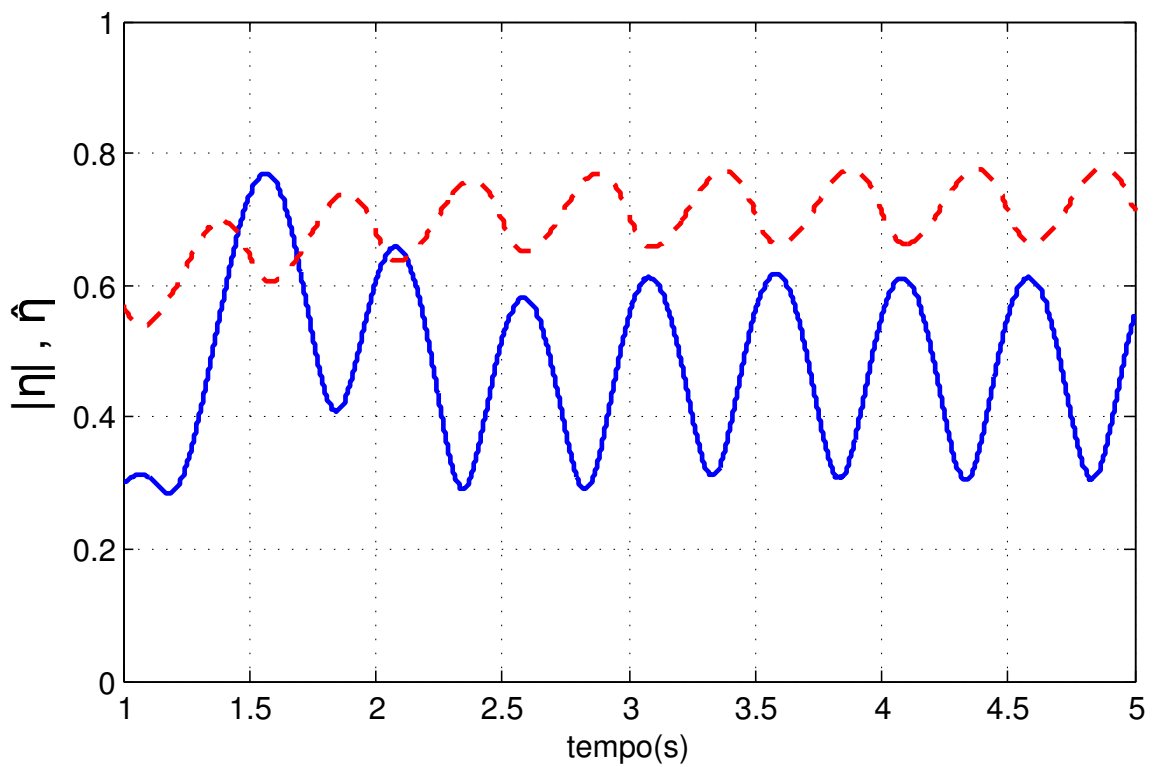
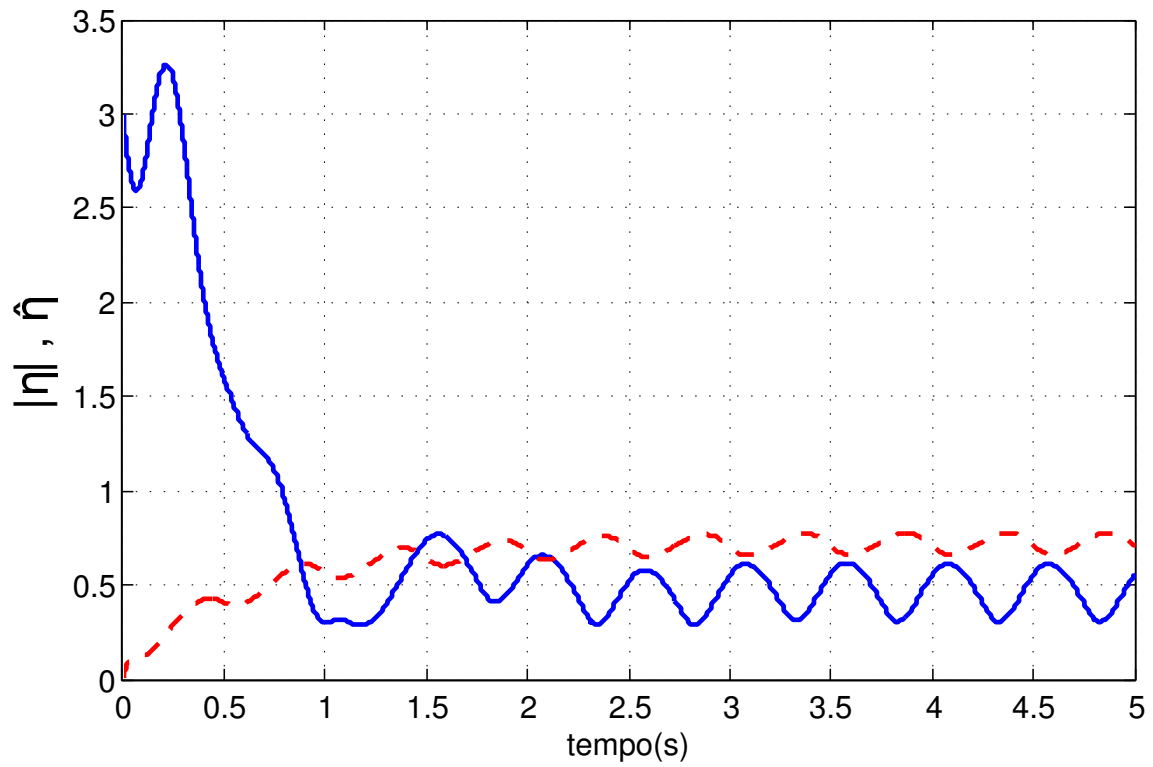


Figura 3.6: Gráfico da norma do estado não disponível para controle η , representado por (—), e do majorante $\hat{\eta}$ obtido com o FOAF, representado por (- - -), e um zoom deste mesmo gráfico.

Capítulo 4

Conclusão e Trabalhos Futuros

Este trabalho apresentou primeiramente um estudo sobre técnicas de controle a estrutura variável, sendo verificadas as principais propriedades e vantagens do controle por modos deslizantes e do controle por modos deslizantes de ordem superior.

Inicialmente foram apresentadas duas análises de estabilidade sobre STC contidas na literatura de controle. Tanto a primeira análise, baseada em convergência por métodos geométricos, quanto a segunda, baseada em convergência por função de Lyapunov, consideram algoritmos de controle STC semelhantes. Assim foi feita uma comparação mais detalhada, por meio de simulações numéricas, entre esses algoritmos de controle. A seguir, foram apresentadas formas diferentes do STC convencional, onde se incluiu diferentes termos no controlador. Na apresentação do VGSTC foi mostrado a possibilidade de utilizar ganhos variantes no tempo, permitindo que o sistema possa rejeitar uma classe maior de incertezas/perturbações e garantindo uma maior robustez ao controlador, e a adição de termos de ordem mais alta, o que resulta em uma convergência mais rápida quando o sistema se encontra longe do equilíbrio.

Esses resultados motivaram a proposta de um novo esquema de controle por VGSTC para a classe de sistemas incertos com grau relativo unitário e com disponibilidade parcial de estados. O novo esquema proposto consistiu em utilizar uma realimentação de saída, onde um filtro FOAF foi utilizado para gerar um majorante da norma dos estados não medidos, a fim de produzir um substituto dos estados não medidos. Essa proposta resultou em um artigo, [9], publicado nos anais do Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2015), que foi publicado nos anais desse evento.

No presente trabalho, as principais propriedades do novo esquema de controle foram verificadas por meio de simulações numéricas e sua eficiência comparada com o esquema de controle VGSTC convencional baseado em realimentação de estados. Essas simulações mostraram que o esquema de controle VGSTC baseado em realimentação de saída apresenta um desempenho similar ao baseado em realimentação

de estados, implicando no aumento de classes de sistemas abrangidos pelo VGSTC. Além disso, foi apresentado a prova do teorema 3.1 para controle VGSTC por realimentação de saída para plantas LTI incertas de grau relativo unitário. Neste Teorema, são apresentadas as condições necessárias para que superfície de deslizamento de primeira e segunda ordem seja alcançada em tempo finito, i. e., tenha uma convergência em tempo finito nesse novo esquema de controle.

Referências Bibliográficas

- [1] EMELYANOV, S. V. *Theory of variable structure systems*. Nauka, 1970.
- [2] ITKIS, U. *Control Systems of Variable Structure*. John Wiley, 1976.
- [3] UTKIN, V. I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. MIR, 1978.
- [4] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [5] BONDAREV, A. G., BONDAREVA, S. A., KOSTYLEVA, N., et al. “Slidin modes in systems with asymptotic state observers”, *Autom. Remote Control*, v. 46, n. 6, pp. 679–684. Pt. 1.
- [6] LEVANT, A. “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control”, *Int. J. Contr.*, v. 76, n. 9, pp. 924–941, 2003.
- [7] MORENO, J. A., OSORIO, M. “A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers”. In: *IEEE Conference on Decision and Control CDC’08*, pp. 2856–2861, 2008.
- [8] DÁVILA, A., MORENO, J., FRIDMAN, L. “Variable gains super-twisting algorithm: A Lyapunov based design”. In: *Proc. American Contr. Conf.*, Baltimore, MD, 2010.
- [9] VIDAL, P. V. N. M., KEIJOCK, T. A., NUNES, E. V. L., et al. “Variable Gain Super- twisting Control using only output feedback”, *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2016.
- [10] LEVANT, A. “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control”, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, v. 58, n. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [11] BARTOLINI, G., LEVANT, A., PISANO, A., et al. “Higher-order sliding modes for output-feedback control of nonlinear uncertain systems”. In: Yu, X., Xu, J.-X. (Eds.), *Variable Structure Systems: Towards the 21st Century*, Springer-Verlag, cap. 4, 2002.

- [12] GONZALEZ, T., MORENO, J. A., FRIDMAN, L. “Variable Gain Super-Twisting Sliding Mode Control”, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 57, n. 8, pp. 2100–2105, 2012.
- [13] DÁVILA, A., MORENO, J., FRIDMAN, L. “Variable gains super-twisting algorithm: A Lyapunov based design”. In: *Proc. American Contr. Conf.*, Baltimore, MD, 2010.
- [14] HUNG, J. Y., GAO, W., HUNG, J. C. “Variable structure control: a survey”, *IEEE Trans. on Ind. Electronics*, v. 40, n. 1, pp. 2–22, 1993.
- [15] EDWARDS, C., SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control - Theory and Applications*. Taylor and Francis, 1998.
- [16] FRIDMAN, L., LEVANT, A. “Higher Order Sliding Modes”. In: Perruquetti, W., Barbot, J. (Eds.), *Sliding Mode Control in Engeneering*, Marcel Dekker Inc., pp. 53–101, 2002.
- [17] UTKIN, V. I., GULDNER, J., SHI, J. *Sliding Mode control in Electro-Mechanical Systems*. CRC, 2009.
- [18] LEVANT, A. “Introduction to high-order sliding modes”, *School of Mathematical Sciences, Israel*, v. 58, n. 6, pp. 1–55, 2003.
- [19] KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [20] HSU, L., COSTA, R. R., CUNHA, J. P. V. S. “Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems”, *Asian Journal of Control*, v. 5, n. 4, pp. 543–556.
- [21] CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R., HSU, L. “Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems”, *IEEE Trans. on Ind. Electronics*, v. 55, n. 11, pp. 4037–4046, 2008.
- [22] VIDAL, P. V. N. M., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Output-Feedback Multivariable Global Variable Gain Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. PP, n. Issue: 99, pp. 1–1, 2016.
- [23] LEVANT, A. “Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique”, *Automatica*, v. 34, n. 3, pp. 379–384, 1998.
- [24] KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. Upsaddle River, New Jersey, Prentice-Hall, 2002.
- [25] IOANNOU, P., SUN, K. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, 1996.

Apêndice A

Diagramas de blocos

A.1 Controlador Super Twisting

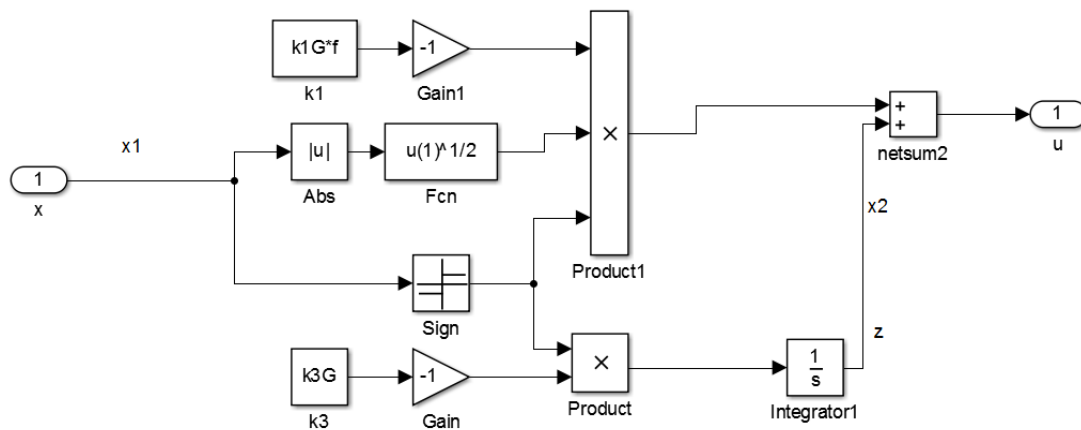


Figura A.1: Diagrama de blocos do controlador Super Twisting (B.3).

A.2 Controlador Variable Gain Super Twisting

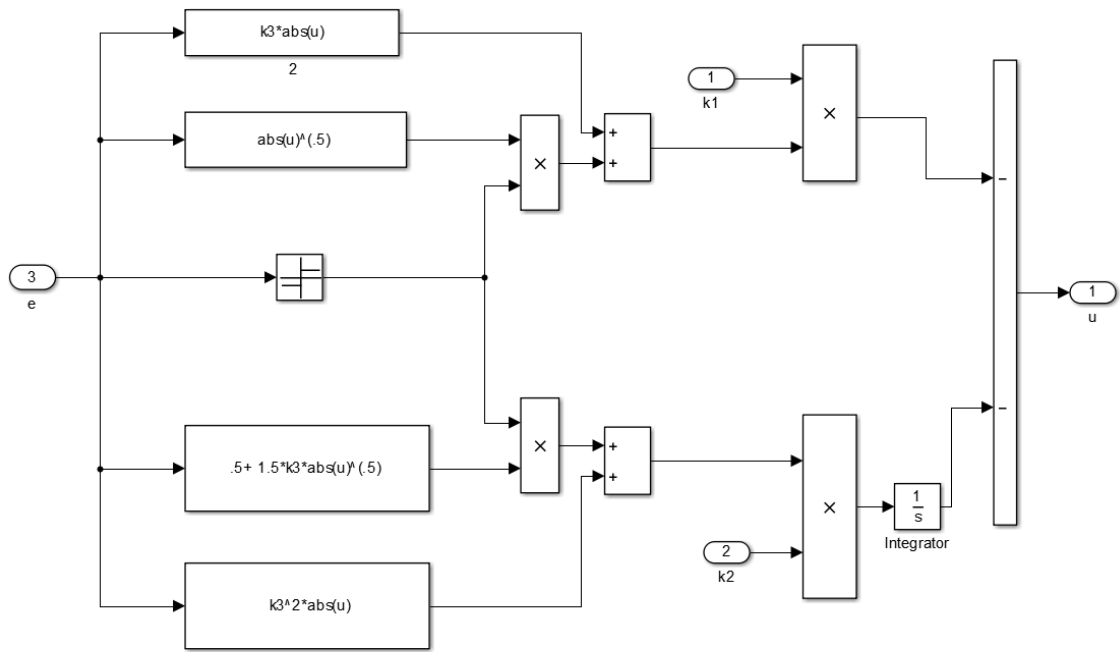


Figura A.2: Diagrama de blocos do controlador Variable Gain Super Twisting (2.31).

Apêndice B

Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior

B.1 Análise das Trajetórias do Controlador Super Twisting

Considera-se o seguinte sistema dinâmico de grau relativo unitário:

$$\dot{s} = u + \tilde{f}(t) \quad (\text{B.1})$$

onde $s \in \mathbb{R}$ é a variável de deslizamento, $u \in \mathbb{R}$ é a lei de controle, e $\tilde{f}(t)$ é uma função incerta suficientemente suave, cuja derivada temporal obedece à condição:

$$\left| \dot{\tilde{f}}(t) \right| \leq C \quad (\text{B.2})$$

Sendo assim, o controlador Super Twisting é definido como:

$$\begin{cases} u = -k_1 |s|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(s) + k_2 z \\ \dot{z} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(s) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Teorema B.1. *Seja o sistema (B.1). Considere que a condição (B.2) seja satisfeita. Se $k_2 > 2C$ e se k_1 for suficientemente grande, então o controlador STC (B.3) garante, para quaisquer condições iniciais, uma convergência em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $s = \dot{s} = 0$.*

Demonstração. ver [23]. □

De modo a analisar as trajetórias do controlador (B.3) com respeito ao plano de fase $(s-\dot{s})$, deriva-se a equação (B.1). Sabendo que $\frac{d}{dt}|s| = \dot{s} \operatorname{sgn}(s)$, tem-se o seguinte sistema dinâmico:

$$\ddot{s} = \dot{f}(t) - \frac{k_1}{2} \frac{\dot{s}}{|s|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_2}{2} \text{sgn}(s) \quad (\text{B.4})$$

Considera-se que, em um instante inicial t_0 , o sistema possua as condições iniciais dadas por $s(t_0) = 0$ e $\dot{s}(t_0) = \dot{s}_0 > 0$. Nessas condições, como a derivada \dot{s}_0 é positiva, a variável de deslizamento s tende a crescer, levando a trajetória no espaço de estado do sistema para primeiro quadrante do plano de fase, como mostra a figura B.1.

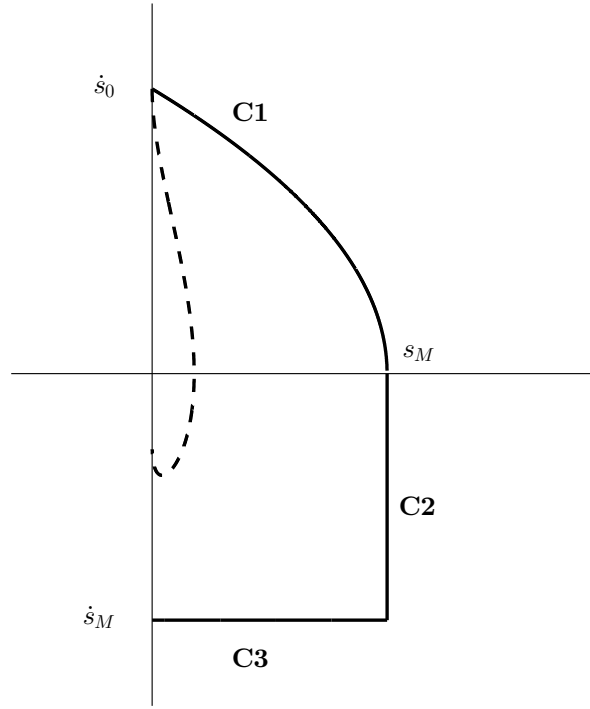


Figura B.1: (---) Trajetória no espaço de estados do controlador Super Twisting. (—) Curvas majorantes: C1, C2 e C3.

No primeiro quadrante, uma vez que a condição $k_2 > 2C$ seja satisfeita e sabendo que s e \dot{s} são positivos, pode-se concluir pela equação (B.4) que \ddot{s} será negativo. Desta forma, o módulo de \dot{s} irá decrescer, levando o sistema ao quarto quadrante. Ao mesmo tempo, o módulo de s crescerá até que alcance seu valor máximo quando $\dot{s} = 0$. Uma curva majorante para a trajetória real do sistema no primeiro quadrante pode ser obtida considerando a inequação:

$$\ddot{s} \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right)$$

Multiplicando por \dot{s} e reescrevendo:

$$\dot{s}\ddot{s} \leq -\left(\frac{k_2}{2} - C\right)\dot{s} \quad \Rightarrow \quad \dot{s}\frac{d\dot{s}}{dt} \leq -\left(\frac{k_2}{2} - C\right)\frac{ds}{dt}$$

Integrando de t_0 até t :

$$\frac{\dot{s}^2(t)}{2} - \frac{\dot{s}_0^2}{2} \leq -\left(\frac{k_2}{2} - C\right)s(t)$$

Sabendo que o valor máximo de $s(t)$ ocorre quando $\dot{s}(t) = 0$, define-se:

$$s_M = \frac{\dot{s}_0^2}{(k_2 - 2C)} \geq s(t)$$

Desta forma, uma curva majorante C1 para a trajetória real do sistema no primeiro quadrante pode ser definida como:

$$\dot{s}^2 = (k_2 - 2C)(s_M - s)$$

Ao passar ao quarto quadrante, uma vez que a derivada $\dot{s} < 0$, a variável de deslizamento s irá decrescer até que se torne nula. Além disso, observando a equação (B.4), nota-se que a derivada \ddot{s} inicia o quarto quadrante com o valor negativo igual a $-\left(\frac{k_2}{2} - \dot{f}(t)\right)$, o que fará \dot{s} decrescer até que \ddot{s} se iguale a zero, situação em que \dot{s} terá o seu valor máximo.

De modo a facilitar a análise no quarto quadrante, para $\dot{s} < 0$ e $s > 0$, a equação (B.4) pode ser reescrita como:

$$\ddot{s} = \frac{k_1}{2} \frac{|\dot{s}|}{s^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{k_2}{2} - \dot{f}(t)\right)$$

Igualando \ddot{s} a zero:

$$|\dot{s}| = \frac{1}{k_1} \left(k_2 - 2\dot{f}(t)\right) s^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{k_1} (k_2 + 2C) s_M^{\frac{1}{2}}$$

Pode-se então definir um limitante inferior \dot{s}_M para \dot{s} no quarto quadrante, sendo este limitante dado por:

$$\dot{s}_M = -\frac{1}{k_1} (k_2 + 2C) s_M^{\frac{1}{2}}$$

Portanto, uma curva majorante que envolve a trajetória real do sistema no primeiro e quarto quadrantes pode ser definida a partir dos seguintes segmentos:

$$\begin{aligned} \text{Segmento C1: } & \dot{s}^2 = (k_2 - 2C)(s_M - s), & \text{para } \dot{s} > 0 \\ \text{Segmento C2: } & s = s_M, & \text{para } \dot{s}_M < \dot{s} < 0 \\ \text{Segmento C3: } & \dot{s} = \dot{s}_M, & \text{para } 0 < s < s_M \end{aligned}$$

Um exemplo de trajetória de estados de um controlador Super Twisting, com suas respectivas curvas majorantes é ilustrado na figura B.1. Note que a trajetória

real é envolvida pelas curvas C1, C2 e C3, que funcionam como limitantes para essa trajetória.

Uma vez que a análise para a trajetória no terceiro e segundo quadrantes é análoga à feita anteriormente, uma condição suficiente para que haja convergência do algoritmo é que $|\dot{s}_M/\dot{s}_0| < 1$. Essa condição implica que:

$$\left| \frac{\dot{s}_M}{\dot{s}_0} \right| = \frac{(k_2 + 2C)}{k_1 \sqrt{(k_2 - 2C)}} < 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 > \frac{(k_2 + 2C)}{\sqrt{(k_2 - 2C)}}$$

Analisando no domínio do tempo, considera-se novamente a equação (B.4). A partir dessa equação e da condição (B.2), considerando que a análise é feita no primeiro e quarto quadrantes ($s > 0$), chega-se à seguinte inequação:

$$\ddot{s} \leq C - \frac{k_1}{2} \frac{\dot{s}}{s^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_2}{2}$$

Reescrevendo:

$$\frac{d\dot{s}}{dt} + k_1 \frac{1}{2s^{\frac{1}{2}}} \frac{ds}{dt} \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right)$$

Integrando do instante inicial t_0 até o instante t_1 , em que a trajetória volta a cruzar o eixo \dot{s} :

$$\dot{s}(t_1) - \dot{s}_0 \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right) T_0$$

onde $T_0 = t_1 - t_0$ é o tempo que a trajetória leva para percorrer o primeiro e quarto quadrantes. Sabendo que $\dot{s}_M \leq \dot{s}(t_1)$, tem-se:

$$\dot{s}_M - \dot{s}_0 \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right) T_0$$

Considerando que $|\dot{s}_M| < |\dot{s}_0|$, ou seja, que $-\dot{s}_0 < \dot{s}_M$, tem-se:

$$-2\dot{s}_0 \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right) T_0$$

Reescrevendo em termos de T_0 :

$$T_0 \leq \frac{4\dot{s}_0}{(k_2 - 2C)}$$

O tempo total de convergência do STC é então dado pela soma dos tempos de cada meia volta sobre a origem e é limitado pela inequação:

$$T \leq \frac{4}{(k_2 - 2C)} \sum_{i=0}^{\infty} |\dot{s}_i|$$

onde os termos \dot{s}_i correspondem às intersecções da trajetória real com o eixo \dot{s} . Considerando a condição $|\dot{s}_M/\dot{s}_0| \leq K < 1$, onde K é uma constante positiva, conclui-se que esses termos decrescem em módulo. Sendo assim, a soma desses termos é limitada pela soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, cuja razão é menor do que 1. Sabe-se que tal soma possui um valor finito, o que implica que o tempo de convergência T também deve ser finito.

B.2 Prova dos teoremas do Controlador Super Twisting

B.2.1 Prova do teorema 2.1

Como 2.11 é uma equação diferencial descontínua, suas soluções são interpretadas como as de uma inclusão diferencial $\dot{x} \in f(x)$ obtidas quando $\text{sgn}(z)$ assume o intervalo $[-1, 1]$ para $z = 0$. Como $0 \in f(0)$, então conseqüentemente $x = 0$ é um ponto de equilíbrio. A função de Lyapunov proposta pode ser escrita em sua forma quadrática $V(x) = \zeta^T P \zeta$, onde

$$\zeta = [|x_1|^{1/2} \text{sgn}(x_1), x_2]$$

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (4k_3 + k_1^2) & -k_1 \\ -k_1 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que $V(x)$ é contínua mas não diferenciável em $x_1 = 0$. É positiva definida e radialmente não limitada se $k_3 > 0$, i.e.

$$\lambda_{\min}\{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\zeta\|_2^2, \quad (\text{B.5})$$

onde $\|\zeta\|_2^2 = |x_1| + x_2^2$ é a norma euclidiana de ζ . Sua derivada temporal em relação a solução do sistema é

$$\dot{V} = -\frac{1}{|x_1|^{1/2}} \zeta^T Q \zeta \leq -\frac{1}{|x_1|^{1/2}} \lambda_{\min}\{Q\} \|\zeta\|_2^2, \quad (\text{B.6})$$

onde

$$Q = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} (2k_3 + k_1^2) & -k_1 \\ -k_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

\dot{V} is negativa definida se $Q > 0$, que acontece se $k_1, k_3 > 0$. Usando B.5 e B.6 e o fato de que

$$|x_1|^{1/2} \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V^{1/2}(x)}{\lambda_{\min}^{1/2}\{P\}}$$

então pode-se concluir que

$$\dot{V} \leq -\gamma V^{1/2}(x),$$

onde

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}^{1/2}\{P\}\lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\{P\}}.$$

Como a solução da equação diferencial

$$\dot{v} = -\gamma v^{1/2}, \quad v(0) = v_0 \geq 0$$

é dada por

$$v(t) = \left(v_0^{1/2} - \frac{\gamma}{2}t\right)^2, \quad (\text{B.7})$$

pelo princípio de comparação [24] tem-se que $V(x) \leq v(t)$ quando $V(x_0) \leq v_0$. Por B.7 obtém-se que $V(x(t))$, e conseqüentemente $x(t)$, convergem para zero em tempo finito e que alcança esse valor em no máximo $T = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\gamma}$ unidades de tempo.

B.2.2 Prova do teorema 2.2

Usando 2.12 como a função candidata de Lyapunov para o sistema com perturbação 2.11, a derivada temporal em relação a solução é:

$$\dot{V} = -\frac{1}{|x_1|^{1/2}}\zeta^T Q \zeta + \frac{\varrho_1}{|x_1|^{1/2}}q_1^T \zeta + \varrho_2 q_2^T \zeta,$$

onde

$$q_1^T = \left[\left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2}\right) \quad -\frac{k_1}{2} \right], \quad q_2^T = \left[-k_1 \quad 2 \right].$$

Usando os limitantes da perturbação 2.13, é possível mostrar que:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|x_1|^{1/2}}\zeta^T \tilde{Q} \zeta,$$

onde

$$\tilde{Q} = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} 2k_3 + k_1^2 - \left(\frac{4k_3}{k_1} + k_1\right)\delta_1 - \delta_2 & \star \\ -\left(k_1 + 2\delta_1 + \frac{2\delta_2}{k_1}\right) & 1 \end{bmatrix}.$$

\dot{V} é negativa definida se $\tilde{Q} > 0$, o que ocorre quando os ganhos são como em 2.14. Pelos mesmos argumentos utilizados no caso sem a perturbação, o estado também converge para zero em tempo finito e no máximo em $\tilde{T} = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\tilde{\gamma}}$ unidades de

tempo onde $\tilde{\gamma} = \frac{\lambda_{min}^{1/2}\{P\}\lambda_{min}\{\tilde{Q}\}}{\lambda_{max}\{P\}}$.

B.2.3 Prova do teorema 2.18

A função de Lyapunov proposta pode ser escrita em forma quadrática $V(x) = \xi^T \Pi \xi$, onde

$$\xi = \begin{bmatrix} |x_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_1) \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (4k_3 + k_1^2) & k_1 k_2 & -k_1 \\ k_1 k_2 & (2k_4 + k_2^2) & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que $V(x)$ é contínuo mas não diferenciável em $x_1 = 0$. Além disso, satisfaz

$$\lambda_{min}\{\Pi\}\|\xi\|_2^2 \leq V(x) \leq \lambda_{max}\{\Pi\}\|\xi\|_2^2 \quad (\text{B.8})$$

onde $\|\xi\|_2^2 = |x_1| + x_1^2 + x_2^2$ é a norma Euclidiana de ξ .

A derivada temporal em relação as trajetórias do sistema é

$$\dot{V} = -\frac{1}{|x_1|^{1/2}} \xi^T \Omega_1 \xi - \xi^T \Omega_2 \xi$$

onde

$$\Omega_1 = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} (2k_3 + k_1^2) & 0 & -k_1 \\ 0 & (2k_4 + 5k_2^2) & -3k_2 \\ -k_1 & -3k_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = k_2 \begin{bmatrix} (k_3 + 2k_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & (k_4 + k_2^2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

\dot{V} é negativa definida se $\Omega_1 > 0$ e $\Omega_2 > 0$, o que ocorre quando

$$\begin{aligned} k_i &> 0 & i = 1, \dots, 4 \\ 4k_3 k_4 &> (8k_3 + 9k_1^2)k_2^2. \end{aligned}$$

como

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|x_1|^{1/2}} \lambda_{min}\{\Omega_1\}\|\xi\|_2^2 - \lambda_{min}\{\Omega_2\}\|\xi\|_2^2,$$

usando B.8 e o fato

$$|x_1|^{1/2} \leq \|\xi\|_2 \leq \frac{V^{1/2}(x)}{\lambda_{min}^{1/2}\{\Pi\}}$$

obtém-se

$$\dot{V} \leq -\gamma_1 V^{1/2}(x) - \gamma_2 V(x),$$

onde

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_{min}^{1/2}\{\Pi\}\lambda_{min}\{\Omega_1\}}{\lambda_{max}\{\Pi\}}, \quad \gamma_2 = \frac{\lambda_{min}\{\Omega_2\}}{\lambda_{max}\{\Pi\}}$$

Pelo princípio de comparação [24] obtém-se que $V(x(t))$, e consequentemente

$x(t)$, convergem para zero em tempo finito e que alcança esse valor em no máximo $T^* = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\gamma_1}$ unidades de tempo.

B.2.4 Prova do teorema 2.20

Usando a função de Lyapunov:

$$V(x) = 2k_3|x_1| + k_4x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(k_1|x_1|^{1/2}/2 \operatorname{sgn}(x_1) + k_2x_1 - x_2)^2 \quad (\text{B.9})$$

sua derivada pode ser escrita como

$$\dot{V} = -\frac{1}{|x_1|^{1/2}}\xi^T\Omega_1\xi - \xi^T\Omega_2\xi + \omega_1^T\xi + \frac{1}{|x_1|^{1/2}}\omega_2^T\xi$$

onde

$$\omega_1^T = \left[k_1 \left(\frac{3k_2}{2}d_1 - d_2 \right), [(k_2^2 + 2k_4)d_1 - k_2d_2], -k_2d_1 \right]$$

$$\omega_2^T = d_1 \left[\left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \right), 0, \frac{-k_1}{2} \right].$$

Usando os limitantes 2.20 da perturbação tem-se que

$$\frac{1}{|x_1|^{1/2}}\omega_2^T\xi \leq \frac{\delta_1}{|x_1|^{1/2}}\xi^T\Delta_1\xi + \delta_3\xi^T\Delta_1\xi$$

onde

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} (2k_3 + \frac{k_1^2}{2}) & 0 & \frac{k_1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e também

$$\omega_1^T\xi \leq \frac{1}{|x_1|^{1/2}}\xi^T\Delta_2\xi + \xi^T\Delta_3\xi$$

onde

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \delta_2k_1 & 0 & 0 \\ 0 & [k_1(\frac{3k_2}{2}\delta_3 + \delta_4) + (k_2^2 + 2k_4)\delta_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} k_2(\delta_2 + \frac{3}{2}k_1\delta_1) & 0 & \frac{1}{2}k_2\delta_1 \\ 0 & (k_2^2 + 2k_4)\delta_3 + k_2\delta_4 & \frac{1}{2}k_2\delta_3 \\ \frac{1}{2}k_2\delta_1 & \frac{1}{2}k_2\delta_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

A derivada da função de Lyapunov pode ser reescrita como:

$$\dot{V} = -\frac{1}{|x_1|^{1/2}}\xi^T(\Omega_1 - \Delta_2 - \delta_1\Delta_1)\xi - \xi^T(\Omega_2 - \Delta_3 - \delta_3\Delta_1)\xi$$

O termo $(\Omega_1 - \Delta_2 - \delta_1 \Delta_1) > 0$, se

$$\begin{aligned}
k_1 &> 2 \max(\delta_1, \sqrt{\delta_2}) \\
k_2 &> \frac{3}{8} \delta_3 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{9}{4} \delta_3^2 + 8 \delta_4} \\
k_3 &> k_1 \frac{\delta_1 k_1 + \frac{1}{8} \delta_1^2 + \delta_2}{2(\frac{1}{2} k_1 - \delta_1)} \\
k_4 &> \frac{k_1 \left[\frac{1}{2} k_1 (k_1 + \frac{1}{2} \delta_1)^2 (2k_2^2 - \frac{3}{2} \delta_3 k_2 - \delta_4) + (\frac{5}{2} k_2^2 + \frac{3}{2} \delta_3 k_2 + \delta_4) p_1 \right]}{2 \left(p_1 - \frac{1}{2} k_1 (k_1 + \frac{1}{2} \delta_1)^2 \right) (\frac{1}{2} k_1 - \delta_1)}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

onde

$$p_1 \triangleq k_1 \left(\frac{1}{4} k_1^2 - \delta_2 \right) + \left(\frac{1}{2} k_1 - \delta_1 \right) \left(2k_3 + \frac{1}{2} k_1^2 \right)$$

O segundo termo de \dot{V} , pode ser escrito como:

$$\xi^T (\Omega_2 - \Delta_3 - \delta_3 \Delta_1) \xi = \zeta^T \Gamma_1 \zeta + x^T \Gamma_2 x,$$

onde

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \begin{bmatrix} k_2((k_3 + 2k_1^2) - \delta_2 - \frac{3}{2} k_1 \delta_1) - \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \right) \delta_3 & -\frac{1}{2}(k_2 \delta_1 + \frac{1}{2} k_1 \delta_3) \\ -\frac{1}{2}(k_2 \delta_1 + \frac{1}{2} k_1 \delta_3) & \frac{1}{2} k_2 \end{bmatrix} \\
\Gamma_2 &= \begin{bmatrix} k_2(k_4 + k_2^2) - (k_2^2 + 2k_4) \delta_3 - k_2 \delta_4 & \star \\ -k_2(k_2 + \frac{1}{2} \delta_3) & \frac{1}{2} k_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

são positivos definidos se

$$\begin{aligned}
k_2 &> 2\delta_3 \\
k_3 &> \frac{(k_2 \delta_1 + \frac{1}{2} k_1 \delta_3)^2}{2k_2(k_2 - 2\delta_3)} + \frac{(\delta_2 + \frac{3}{2} \delta_1 k_1) k_2 - 2(k_2 - \frac{1}{4} \delta_3) k_1^2}{(k_2 - 2\delta_3)} \\
k_4 &> k_2 \frac{[k_2(k_2 + 3\delta_3) + \frac{1}{2} \delta_3^2 + \delta_4]}{k_2 - 2\delta_3}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Note que sempre é possível escolher $k_i > 0$, $i=1, \dots, 4$, para que ambos os conjuntos de desigualdades B.10 e B.11 sejam satisfeitas para todo $\delta_i > 0$, $i= 1, \dots, 4$.

Segundo as condições anteriores temos

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|x_1|^{1/2}} \xi^T (\Omega_1 - \Delta_2 - \delta_1 \Delta_1) \xi$$

e portanto, pelo princípio de comparação [24], também são obtidos estabilidade global assintótica e tempo finito de convergência.

B.3 FOAF

B.3.1 Prova do lema 3.1

A resposta impulsiva do sistema 3.11 é dada por :

$$g(t) = \begin{cases} C \exp(At)B & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

A exponencial matricial $\exp(At)$ e a resposta impulsiva $g(t)$ podem ser representadas como as somas de termos exponenciais $A_{jl} t^l \exp(\lambda_j t)$ e $G_{jl} t^l \exp(\lambda_j t)$, respectivamente, onde $j \in \{1, \dots, n\}$, $l \in \{0, \dots, m_j - 1\}$, m_j é a multiplicidade do autovalor λ_j de A e $A_{jl} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $G_{jl} \in \mathbb{C}^{p \times m}$ são matrizes apropriadas. Assim se conclui que $\exists c_1, c_3 > 0$ tais que $\|\exp(At)\| \leq c_3 \exp[-(\lambda_0 - \delta)t]$, $\|g(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t)$, $\forall t \geq 0$. Consequentemente a seguinte desigualdade é válida

$$\|g(t) * u(t)\| \leq \|g(t)\| * \|u(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \bar{u}(t),$$

de onde resulta a desigualdade 3.13.

Uma vez que o sinal de saída do sistema 3.11 é dado por

$$y(t) = g(t) * u(t) + C \exp(At)x(0), \quad t \geq 0,$$

então a norma do sinal de saída $\|y(t)\|$ pode ser majorada pela soma dos majorantes 3.13 e $\{\|C\|c_3 \exp[-(\lambda_0 - \delta)t]\|x(0)\|\}$. Escolhendo-se $c_2 = \|C\|c_3$, obtém-se a 3.14, completando-se a prova.

Obs1: Se o sistema 3.11 for não-controlável ou não-observável, alguns autovalores de A não serão pólos de $G(s)$, então as margens de estabilidade obedecerão $\lambda_0 \leq \gamma_0$. Se o sistema for controlável ou observável, então $\lambda_0 = \gamma_0$. Além disso, se o sistema autônomo for assintoticamente estável, então $0 < \lambda_0 \leq \gamma_0$.

Obs2: Se a equação de saída do sistema 3.11 for $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, então a matriz de transferência do sistema é dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e o lema 3.1 se verifica adicionando-se o termo $c_4 \bar{u}(t)$ ($c_4 \leq \|D\|$) aos majorantes 3.13 e 3.14. Naturalmente a resposta impulsiva $g(t)$ deve ser modificada adequadamente.

B.4 Função de Lyapunov para o Controlador Variable Gain Super Twisting

Foi proposta em [8] uma função de Lyapunov para o sistema (2.34), representada pela seguinte forma quadrática:

$$V(s, z) = \zeta^T P \zeta$$

onde

$$\zeta = \begin{bmatrix} \phi_1(s) \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \beta + 4\epsilon^2 & -2\epsilon \\ -2\epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

Note que tal função é de fato positiva definida, uma vez que:

$$\begin{aligned} V(s, z) &= \zeta^T P \zeta \\ &= (\beta + 4\epsilon^2)\phi_1^2 - 4\epsilon\phi_1 z + z^2 \\ &= \beta\phi_1^2 + (2\epsilon\phi_1 - z)^2 \end{aligned}$$

que é igual a zero apenas quando $\phi_1(s) = z = 0$, ou seja, $s = z = 0$. Além disso, a função $V(s, z)$ é também contínua e diferenciável, exceto para o conjunto $\mathcal{S} = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 \mid s = 0\}$.

Derivando a variável ζ :

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \frac{d\phi_1}{ds} \dot{s} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\phi_1}{ds} \{-k_1(s, t)\phi_1(s) + z + g_1(s, t)\} \\ -k_2(s, t)\phi_2(s) + \frac{d}{dt}g_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Note que, de acordo com as condições (2.33), pode-se representar $g_1(s, t) = \alpha_1(s, t)\phi_1(s)$ e $\frac{d}{dt}g_2(t) = \alpha_2(t)\phi_2(s)$, considerando funções $\alpha_1(s, t)$ e $\alpha_2(t)$ que obedecem às condições $|\alpha_1(s, t)| \leq \varrho_1(s, t)$ e $|\alpha_2(t)| \leq \varrho_2(t)$. Além disso, tem-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{ds} \phi_1 &= \left(\frac{1}{2|s|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \left(|s|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(s) + k_3 s \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(s) + \frac{3}{2} k_3 |s|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(s) + k_3^2 s \\ &= \phi_2(s) \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (B.13):

$$\dot{\zeta} = \frac{d\phi_1}{ds} \begin{bmatrix} -(k_1(s, t) - \alpha_1(s, t)) & 1 \\ -(k_2(s, t) - \alpha_2(t)) & 0 \end{bmatrix} \zeta = \frac{d\phi_1}{ds} \mathcal{A}(s, t) \zeta$$

para todo ponto em \mathbb{R}^2 , exceto para conjunto \mathcal{S} . Sendo assim, derivando a função de Lyapunov $V(s, z)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(s, z) &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\ &= \frac{d\phi_1}{ds} \zeta^T (\mathcal{A}^T(s, t) P + P \mathcal{A}(s, t)) \zeta \\ &= -\frac{d\phi_1}{ds} \zeta^T Q(s, t) \zeta \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} Q &= -(\mathcal{A}^T(s, t) P + P \mathcal{A}(s, t)) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} -(\beta+4\epsilon^2)(k_1-\alpha_1)+2\epsilon(k_2-\alpha_2) & \cdot \\ \beta+4\epsilon^2 & -2\epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\beta+4\epsilon^2)(k_1-\alpha_1)+2\epsilon(k_2-\alpha_2) & \cdot \\ 2\epsilon(k_1-\alpha_1)-(k_2-\alpha_2) & -2\epsilon \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2(\beta+4\epsilon^2)(k_1-\alpha_1)-4\epsilon(k_2-\alpha_2) & \cdot \\ -2\epsilon(k_1-\alpha_1)+(k_2-\alpha_2)-(\beta+4\epsilon^2) & 4\epsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\{\beta k_1+2\epsilon\alpha_2-[2\epsilon+\alpha_1](\beta+4\epsilon^2)\}-4\epsilon(k_2-\beta-4\epsilon^2-2\epsilon k_1) & \cdot \\ (k_2-\beta-4\epsilon^2-2\epsilon k_1)+2\epsilon\alpha_1-\alpha_2 & 4\epsilon \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo Q uma matriz simétrica, uma vez que P é simétrica e $Q = -(\mathcal{A}^T P + P \mathcal{A}) = -(\mathcal{A}^T P + P^T \mathcal{A}) = Q^T$. Substituindo pelos ganhos k_1 e k_2 da equação (2.35), tem-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 2\{\beta\delta + \frac{1}{4\epsilon}[2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon[\varrho_2 + \alpha_2] + \epsilon + [\varrho_1 - \alpha_1](\beta + 4\epsilon^2)\} & \cdot \\ 2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2 & 4\epsilon \end{bmatrix}$$

Subtraindo $2\epsilon I$:

$$Q - 2\epsilon I = \begin{bmatrix} 2\{\beta\delta + \frac{1}{4\epsilon}[2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon[\varrho_2 + \alpha_2] + [\varrho_1 - \alpha_1](\beta + 4\epsilon^2)\} & \cdot \\ 2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2 & 2\epsilon \end{bmatrix}$$

que é uma matriz positiva definida, uma vez que:

$$2\left\{\beta\delta + \frac{1}{4\epsilon}[2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon[\varrho_2 + \alpha_2] + [\varrho_1 - \alpha_1](\beta + 4\epsilon^2)\right\} > 0$$

e

$$4\epsilon \{ \beta\delta + 2\epsilon[\varrho_2 + \alpha_2] + [\varrho_1 - \alpha_1](\beta + 4\epsilon^2) \} + [2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 - [2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2]^2 > 0$$

$$\det(Q - 2\epsilon I) > 0$$

Logo, tem-se que:

$$\zeta^T(Q - 2\epsilon I)\zeta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta^T Q \zeta \geq 2\epsilon \zeta^T \zeta \quad \Rightarrow \quad -\frac{d\phi_1}{ds} \zeta^T Q \zeta \leq -2\epsilon \frac{d\phi_1}{ds} \zeta^T \zeta$$

ou seja

$$\dot{V}(s, z) \leq -2\epsilon \frac{d\phi_1}{ds} \zeta^T \zeta = -2\epsilon \left(\frac{1}{2|s|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\zeta\|_2^2 \quad (\text{B.14})$$

onde $\|\zeta\|_2^2$ é a norma Euclidiana de ζ , e é dada por:

$$\|\zeta\|_2^2 = \phi_1^2 + z^2 = |s| + 2k_3|s|^{\frac{3}{2}} + k_3^2 s^2 + z^2$$

Pelo lema C.3:

$$\lambda_{\min} \{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq V \leq \lambda_{\max} \{P\} \|\zeta\|_2^2$$

o que resulta nas seguinte relações:

$$\|\zeta\|_2^2 \geq \frac{V}{\lambda_{\max} \{P\}} \quad \text{e} \quad |s|^{\frac{1}{2}} \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}} \{P\}}$$

Substituindo na equação (B.14):

$$\dot{V}(s, z) \leq -2\epsilon \left(\frac{1}{2|s|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\zeta\|_2^2 \leq -2\epsilon \left(\frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}} \{P\}}{2V^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \frac{V}{\lambda_{\max} \{P\}}$$

Portanto:

$$\dot{V}(s, z) \leq -\gamma_1 V^{\frac{1}{2}} - \gamma_2 V \quad (\text{B.15})$$

onde

$$\gamma_1 = \frac{\epsilon \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}} \{P\}}{\lambda_{\max} \{P\}} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{2\epsilon k_3}{\lambda_{\max} \{P\}}$$

Conclui-se então que $\dot{V}(s, z)$ é negativa definida, o que garante a convergência do algoritmo para o equilíbrio $(s, z) = 0$, para qualquer condição inicial. Reescrevendo a equação (B.15):

$$\frac{dV}{dt} \leq -\gamma_1 V^{\frac{1}{2}} - \gamma_2 V \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V^{\frac{1}{2}}(\gamma_1 + \gamma_2 V^{\frac{1}{2}})} = \frac{2d(V^{\frac{1}{2}})}{(\gamma_1 + \gamma_2 V^{\frac{1}{2}})} \leq -dt$$

Integrando do instante inicial t_0 até o instante t_1 em que a função de Lyapunov $V(s, z)$ se torna nula:

$$\frac{2}{\gamma_2} \ln \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2 V_0^{\frac{1}{2}}} \right) = -\frac{2}{\gamma_2} \ln \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} V_0^{\frac{1}{2}} \right) \leq -(t_1 - t_0)$$

o que permite que se estime o tempo de convergência $T = (t_1 - t_0)$ do algoritmo:

$$T \leq \frac{2}{\gamma_2} \ln \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} V_0^{\frac{1}{2}} \right)$$

provando a convergência global para a superfície de deslizamento $\dot{s} = s = 0$ em tempo finito, como enuncia o teorema 2.5.

Apêndice C

Lemas Auxiliares

Lema C.1. *Se uma matriz real P é simétrica, seus autovalores são reais.*

Demonstração. Suponha que $Pv = \lambda v$, $v \neq 0$, $v \in \mathbb{C}^n$. Então:

$$\bar{v}^T Pv = \bar{v}^T (Pv) = \lambda \bar{v}^T v = \lambda \sum_{i=1}^n |v_i|^2$$

onde \bar{v} representa o conjugado de v . Mas também tem-se que:

$$\bar{v}^T Pv = \bar{v}^T P^T v = (\overline{Pv})^T v = \overline{(\lambda v)}^T v = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |v_i|^2$$

Portanto, tem-se que $\lambda = \bar{\lambda}$, ou seja, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Lema C.2. *Seja P uma matriz simétrica real, então deve existir uma matriz ortogonal V , formada por um conjunto de autovetores ortonormais de P , e uma matriz diagonal Λ , formada pelos autovalores de P , de modo que se possa fazer a decomposição $P = V\Lambda V^T$.*

Demonstração. $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica, logo deve possuir n autovalores reais, como diz o lema C.1. Seja λ_1 um autovalor de P , e v_1 o seu autovetor normalizado correspondente. É então construída uma base ortonormal qualquer a partir do autovetor v_1 , dada por $\{v_1, u_2, \dots, u_n\}$, que também corresponderá às colunas de uma matriz U . Por ser uma matriz ortogonal, tem-se que $U^T U = I$ e, portanto, $U^{-1} = U^T$. Define-se então a matriz P_0 como:

$$P_0 = U^T P U = \begin{bmatrix} v_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P v_1 & P u_2 & \dots & P u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & P u_2 & \dots & P u_n \end{bmatrix}$$

Tem-se portanto que a primeira coluna de P_0 será $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$. Como P_0 também é uma matriz simétrica, uma vez que $P_0^T = (U^T P U)^T = \tilde{U}^T P^T U = U^T P U = P_0$, então a primeira linha de P_0 será dada por $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Portanto:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}$$

onde $P_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Assuma que o lema C.2 seja válido para a dimensão $n - 1$. Sendo assim, tem-se que $P_1 = \tilde{V} \tilde{\Lambda} \tilde{V}^T$, onde $\tilde{\Lambda}$ é uma matriz diagonal com os autovalores de P_1 e \tilde{V} é ortogonal, e também:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{V}^T \end{bmatrix} = U_0 \Lambda U_0^T$$

Tem-se ainda que:

$$P = U P_0 U^T = U (U_0 \Lambda U_0^T) U^T = (U U_0) \Lambda (U U_0)^T = V \Lambda V^T$$

onde Λ é uma matriz diagonal e V é uma matriz ortogonal, uma vez que $V^T V = (U U_0)^T (U U_0) = U_0^T U^T U U_0 = I$.

Os autovalores de P são obtidos igualando a zero seu determinante, que é dado por:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - P) &= \det(\lambda I - V \Lambda V^T) \\ &= \det(\lambda V V^{-1} - V \Lambda V^{-1}) \\ &= \det(V(\lambda I - \Lambda)V^{-1}) \\ &= \det(V) \det(\lambda I - \Lambda) \frac{1}{\det(V)} \\ &= \det(\lambda I - \Lambda) \end{aligned}$$

ou seja

$$\det(\lambda I - P) = \det \begin{bmatrix} (\lambda - \lambda_1) & 0 \\ 0 & (\lambda I - \tilde{\Lambda}) \end{bmatrix} = (\lambda - \lambda_1) \det(\lambda I - \tilde{\Lambda})$$

Sendo assim, é provado que os autovalores de P compõe a matriz diagonal Λ . Desta forma, pode-se escrever:

$$P V = V \Lambda \quad \Rightarrow \quad P v_i = \lambda_i v_i$$

ou seja, a matriz V é formada por autovetores ortonormais de P . Portanto, o lema C.2 é válido para uma dimensão n , desde que ele seja válido para uma dimensão $n - 1$.

Considere então a dimensão $n = 1$. Neste caso, a decomposição $P = V \Lambda V^T$ é

válida, considerando $V = 1$ e $\Lambda = P$. Portanto, se o lema C.2 é válido para $n = 1$, como de fato é, ele também o será para $n = 2$, e assim sucessivamente. Prova-se portanto, por indução matemática, que o lema C.2 é válido para toda matriz simétrica P real, de qualquer dimensão. □

Lema C.3. *Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica real, então, para todo vetor $\zeta \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, a seguinte relação é verdadeira:*

$$\lambda_{\min} \{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \|\zeta\|_2^2$$

onde λ_{\min} e λ_{\max} representam os autovalores mínimo e máximo de P .

Demonstração. Pelo lema C.2, $P = V\Lambda V^T$. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \zeta^T P \zeta &= \zeta^T V \Lambda V^T \zeta \\ &= (V^T \zeta)^T \Lambda (V^T \zeta) \\ &= \sum_{i=1}^n (v_i^T \zeta)^T \lambda_i (v_i^T \zeta) \\ &= \zeta^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T \right) \zeta \end{aligned}$$

Sendo assim, pode-se obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} \{P\} \zeta^T \left(\sum_{i=1}^n v_i v_i^T \right) \zeta &\leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \zeta^T \left(\sum_{i=1}^n v_i v_i^T \right) \zeta \\ \lambda_{\min} \{P\} \zeta^T (VIV^T) \zeta &\leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \zeta^T (VIV^T) \zeta \\ \lambda_{\min} \{P\} \zeta^T \zeta &\leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \zeta^T \zeta \\ \lambda_{\min} \{P\} \|\zeta\|_2^2 &\leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \|\zeta\|_2^2 \end{aligned}$$

Prova-se então o lema C.3. □

Lema C.4. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Sejam u e v dois vetores de \mathbb{R}^n . Então a seguinte desigualdade será válida:*

$$u^T v \leq \|u\| \|v\|$$

Demonstração. Considere a variável $t \in \mathbb{R}$. Defina-se a função:

$$f(t) = (u - tv)^T (u - tv) \geq 0, \quad \forall t$$

ou seja

$$f(t) = (v^T v)t^2 - (2u^T v)t + u^T u \geq 0, \quad \forall t$$

Como a função quadrática $f(t)$ deve ser maior ou igual a zero, ela só poderá possuir no máximo uma raiz real. Ou seja, seu discriminante deverá ser menor ou igual a zero:

$$\Delta = 4(u^T v)^2 - 4u^T u v^T v = 4(u^T v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

Tem-se, portanto a desigualdade:

$$u^T v \leq \|u\|\|v\|$$

□

Lema C.5. *Seja Q uma matriz quadrada $\mathbb{R}^{n \times n}$. Então a seguinte igualdade será válida:*

$$\|Q\| = \sqrt{\lambda_{\max}\{Q^T Q\}}$$

Demonstração. A norma de uma matriz é definida como:

$$\|Q\| = \max_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|Qx\|}{\|x\|} \right\}$$

Elevando ao quadrado os dois lados da equação:

$$\|Q\|^2 = \max_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2} \right\} = \max_{x \neq 0} \left\{ \frac{x^T Q^T Q x}{\|x\|^2} \right\}$$

Pelo lema C.3, tem-se que:

$$\frac{x^T Q^T Q x}{\|x\|^2} \leq \lambda_{\max}\{Q^T Q\}, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{C.1})$$

Segundo o lema C.2, deve existir uma matriz ortogonal V , formada por um conjunto de autovetores ortonormais de $Q^T Q$, e uma matriz diagonal Λ , formada pelos autovalores de $Q^T Q$, de modo que se possa fazer a decomposição $Q^T Q = V\Lambda V^T$. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned} x^T Q^T Q x &= x^T V \Lambda V^T x \\ &= (V^T x)^T \Lambda (V^T x) \\ &= \sum_{i=1}^n (v_i^T x)^T \lambda_i (v_i^T x) \end{aligned}$$

Escolhendo x igual ao autovetor ortonormal v_{\max} correspondente ao autovalor

máximo λ_{\max} de $Q^T Q$, tem-se:

$$\frac{x^T Q^T Q x}{\|x\|^2} = \lambda_{\max} \{Q^T Q\}, \quad \text{para } x = v_{\max}$$

Logo, considerando a equação (C.1):

$$\|Q\| = \sqrt{\max_{x \neq 0} \left\{ \frac{x^T Q^T Q x}{\|x\|^2} \right\}} = \sqrt{\lambda_{\max} \{Q^T Q\}}$$

□

Lema C.6. *Sejam u e v dois vetores de \mathbb{R}^n e Q uma matriz quadrada $\mathbb{R}^{n \times n}$. Então a seguinte desigualdade será válida:*

$$u^T Q v \leq \|u\| \|Q\| \|v\|$$

Demonstração. De acordo com o lema C.4:

$$u^T Q v \leq \|u\| \|Q v\|$$

Da definição de norma matricial:

$$\frac{\|Q v\|}{\|v\|} \leq \max_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|Q x\|}{\|x\|} \right\} = \|Q\|$$

ou seja:

$$\|Q v\| \leq \|Q\| \|v\|$$

Logo:

$$u^T Q v \leq \|u\| \|Q\| \|v\|$$

□

Lema C.7. *Sejam $a(s)$ e $b(s)$ dois polinômios, então existirá uma matriz $U(s)$ unimodular, ou seja, cujo determinante seja dado por uma constante diferente de zero, tal que:*

$$U(s) \begin{bmatrix} b(s) \\ a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

se e somente se $r(s)$ for um m.d.c. de $a(s)$ e $b(s)$.

Demonstração. Sabendo que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para matrizes quadradas A e B , tem-se que a matriz unimodular $U(s)$ pode ser dada pela multiplicação de matrizes unimodulares. Considere, sem perda de generalidade, que o grau do polinômio $b(s)$ seja maior que o grau de $a(s)$, e que $\frac{b(s)}{a(s)} = q(s) + \frac{c(s)}{a(s)}$, onde $q(s)$ é

o quociente e $c(s)$ é o resto da divisão polinomial. Sendo assim, é feita inicialmente a multiplicação:

$$U_1(s) \begin{bmatrix} b(s) \\ a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(s) \\ c(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(s) \\ a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(s) \\ c(s) \end{bmatrix}$$

onde $U_1(s)$ é uma matriz unimodular, já que $\det(U_1) = -1$, e o grau dos polinômios do vetor $\begin{bmatrix} a(s) \\ c(s) \end{bmatrix}$ é menor que o grau dos polinômios do vetor $\begin{bmatrix} b(s) \\ a(s) \end{bmatrix}$. Sendo assim, seguindo a ideia acima apresentada e fazendo sucessivas multiplicações por matrizes unimodulares, é possível reduzir a ordem dos polinômios até que o de menor ordem seja igual a zero, e portanto se tenha a igualdade:

$$U(s) \begin{bmatrix} b(s) \\ a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $U(s)$ é uma matriz unimodular, então $V(s) = U^{-1}(s)$ é uma matriz polinomial. Sendo assim, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} b(s) \\ a(s) \end{bmatrix} = V(s) \begin{bmatrix} r(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

e também:

$$b(s) = V_{11}(s)r(s) \quad \text{e} \quad a(s) = V_{21}(s)r(s)$$

sendo portanto $r(s)$ um divisor comum de $a(s)$ e $b(s)$.

Considere agora $\tilde{r}(s)$ um novo divisor comum de $a(s)$ e $b(s)$, ou seja:

$$b(s) = \tilde{b}(s)\tilde{r}(s) \quad \text{e} \quad a(s) = \tilde{a}(s)\tilde{r}(s)$$

onde $\tilde{b}(s)$ e $\tilde{a}(s)$ são polinômios. A igualdade (C.2) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(s) \\ a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$U_{11}(s)b(s) + U_{12}(s)a(s) = U_{11}(s)\tilde{b}(s)\tilde{r}(s) + U_{12}(s)\tilde{a}(s)\tilde{r}(s) = r(s)$$

e portanto:

$$p(s)\tilde{r}(s) = [U_{11}(s)\tilde{b}(s) + U_{12}(s)\tilde{a}(s)]\tilde{r}(s) = r(s)$$

onde $p(s)$ é um polinômio. Logo, $\tilde{r}(s)$ é um divisor de $r(s)$, e portanto $r(s)$ é um m.d.c. entre $a(s)$ e $b(s)$. Como os m.d.c.'s entre dois polinômios diferem apenas pela multiplicação por uma constante, então a igualdade (C.2) é válida para todo polinômio $r(s)$ que for um m.d.c. entre $a(s)$ e $b(s)$. □

Lema C.8. (*Identidade de Bezout*) *Dois polinômios $a(s)$ e $b(s)$ são coprimos, ou seja, cujos m.d.c.'s sejam dados por constantes, se e somente se existirem polinômios $c(s)$ e $d(s)$ tais que:*

$$c(s)a(s) + d(s)b(s) = 1 \tag{C.3}$$

Demonstração. Se $a(s)$ e $b(s)$ são coprimos, então de acordo com o lema C.7 tem-se:

$$\begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(s) \\ a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde r é uma constante. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned} U_{11}(s)b(s) + U_{12}(s)a(s) &= r \\ c(s)a(s) + d(s)b(s) &= \frac{U_{11}(s)}{r}b(s) + \frac{U_{12}(s)}{r}a(s) = 1 \end{aligned}$$

onde $c(s)$ e $d(s)$ são polinômios. Portanto, se $a(s)$ e $b(s)$ são coprimos, a igualdade (C.3) é válida.

Considere agora que existam polinômios $c(s)$ e $d(s)$ tais que a igualdade (C.3) seja válida. Seja $r(s)$ um polinômio dado por um m.d.c. de $a(s)$ e $b(s)$, então:

$$b(s) = \tilde{b}(s)r(s) \quad \text{e} \quad a(s) = \tilde{a}(s)r(s)$$

e também:

$$c(s)\tilde{a}(s)r(s) + d(s)\tilde{b}(s)r(s) = \left[c(s)\tilde{a}(s) + d(s)\tilde{b}(s) \right] r(s) = 1$$

Logo, tem-se que:

$$\frac{1}{r(s)} = \left[c(s)\tilde{a}(s) + d(s)\tilde{b}(s) \right]$$

onde $\frac{1}{r(s)}$ é um polinômio. Como $r(s)$ também é um polinômio, então conclui-se que $r(s)$ é uma constante e, conseqüentemente, $a(s)$ e $b(s)$ são coprimos. Logo, se a igualdade (C.3) é válida, então $a(s)$ e $b(s)$ são coprimos. □

Lema C.9. [25]: *Se dois polinômios $a(s)$ e $b(s)$ forem coprimos e de graus n_a e n_b , respectivamente, onde $n_a > n_b$, então para qualquer polinômio arbitrário $a^*(s)$ de*

grau $n_{a^*} \geq n_a$, a equação polinomial:

$$a(s)l(s) + b(s)p(s) = a^*(s) \quad (\text{C.4})$$

possui uma solução única $l(s)$ e $p(s)$, cujos graus n_l e n_p , respectivamente, satisfazem as restrições $n_p < n_a$ e $n_l \leq \max(n_{a^*} - n_a, n_b - 1)$.

Demonstração. ver [25].

Do lema C.8, tem-se que existem polinômios $c(s)$ e $d(s)$ tais que:

$$c(s)a(s) + d(s)b(s) = 1$$

Multiplicando a equação por $a^*(s)$:

$$a^*(s)c(s)a(s) + a^*(s)d(s)b(s) = a^*(s) \quad (\text{C.5})$$

Considere a seguinte divisão polinomial:

$$\frac{a^*(s)d(s)}{a(s)} = q(s) + \frac{p(s)}{a(s)}$$

onde $q(s)$ e $p(s)$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão, cujos graus são dados por $n_q = n_{a^*} + n_d - n_a$ e $n_p < n_a$, onde n_a , n_d e n_{a^*} são, respectivamente, os graus dos polinômios $a(s)$, $d(s)$ e $a^*(s)$. Utilizando a igualdade $a^*(s)d(s) = a(s)q(s) + p(s)$ na equação (C.5), tem-se:

$$[a^*(s)c(s) + q(s)b(s)]a(s) + p(s)b(s) = a^*(s)$$

ou seja, tem-se a equação (C.4) onde:

$$l(s) = a^*(s)c(s) + q(s)b(s)$$

e os polinômios $q(s)$ e $p(s)$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão polinomial $\frac{a^*(s)d(s)}{a(s)}$. Prova-se portanto a existência de solução para a equação (C.4).

Considerando a equação (C.4), tem-se que o grau máximo do polinômio $a(s)l(s) = a^*(s) - b(s)p(s)$ será dado por $\max(n_{a^*}, n_b + n_p)$, e portanto o grau do polinômio $l(s)$ será $n_l \leq \max(n_{a^*} - n_a, n_b + n_p - n_a)$. Além disso, como $n_p < n_a$, então $n_p \leq n_a - 1$ e $n_l \leq \max(n_{a^*} - n_a, n_b - 1)$.

Admite-se agora que existam duas soluções (l_1, p_1) e (l_2, p_2) para a equação (C.4), de modo que:

$$a(s)l_1(s) + b(s)p_1(s) = a(s)l_2(s) + b(s)p_2(s) = a^*(s)$$

e também:

$$a(s) [l_1(s) - l_2(s)] + b(s) [p_1(s) - p_2(s)] = 0 \quad (\text{C.6})$$

logo:

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{l_2(s) - l_1(s)}{p_1(s) - p_2(s)}$$

Como $n_p < n_a$, então a equação acima implica que deve haver um cancelamento de termos entre $a(s)$ e $b(s)$. Entretanto, isso não pode ocorrer, uma vez que $a(s)$ e $b(s)$ são coprimos. Desta forma, de modo que a equação (C.6) seja satisfeita, conclui-se que $l_1(s) = l_2(s)$ e $p_1(s) = p_2(s)$. Portanto, tem-se que a solução da equação (C.4) existe e é única, provando a validade do lema C.9.

□