Universidade Federal
do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

Um estudo comparativo de políticas de gestão de estoques utilizando técnicas de controle

Fernando Valladares Monteiro

Orientador
Amit Bhaya, Ph. D

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
2014

Universidade Federal
do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

Um estudo comparativo de políticas de gestão de estoques utilizando técnicas de controle

Fernando Valladares Monteiro

Projeto de Graduação apresentado ao
Curso de Engenharia de Controle e
Automação da Escola Politécnica,
Universidade Federal do Rio de Janeiro,
como parte dos requisitos necessários à
obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Amit Bhaya

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Agosto de 2014

Um estudo comparativo de políticas de gestão de estoques utilizando técnicas de controle

Fernando Valladares Monteiro

Projeto de Graduação submetido ao corpo docente do curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Controle e Automação

Aprovado por:

Prof. Amit Bhaya, Ph.D

Prof. Eugenius Kaszkurewicz, D.Sc

Prof. Alessandro Jacoud Peixoto, D.Sc

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
2014

Monteiro, Fernando Valladares.

Um estudo comparativo de políticas de gestão de estoques utilizando técnicas de controle / Fernando Valladares Monteiro. - Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2014

51 páginas

Orientador: Prof. Amit Bhaya, Ph.D

Projeto de Graduação - UFRJ/ Escola Politécnica/Curso de Engenharia de Controle e Automação, 2014.

Referências bibliográficas: p. 49-51

1. Teoria de Controle Clássico 2. Gestão de Estoque 3. Model Predictive Control 4. Economic Value Added

I. Bhaya, Amit. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia de Controle e Automação. III. Um estudo comparativo de políticas de gestão de estoques utilizando técnicas de controle.

Agradecimentos

Esse trabalho marca o fim de uma longa e proveitosa formação. Com isso, não poderia deixar de agradecer certas pessoas que a tornaram possível. Começo pelos bons professores que tive nesse percurso, pois souberam me passar não só o conhecimento necessário, mas também o gosto pela área que decidi estudar. Cito particularmente meu orientador, professor Amit Bhaya, pela sugestão do tema, que acabou por tanto me interessar, e pelos conselhos e correções ao longo do projeto.

Agradeço a minha turma por tornar os anos de faculdade mais agradáveis e divertidos. Não poderia deixar de mencionar em especial o colega e amigo Tiago C., cujo trabalho de fim de curso inspirou o meu próprio, e que esteve sempre esteve disposto a discutir modelos, equações e resultados.

Por fim, agradeço a meus pais e irmãos pelo suporte em momentos de estresse e dificuldade e pela boa vontade de ouvir atentamente elucubrações sobre um tema fora seus interesses comuns.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Um estudo comparativo de políticas de gestão de estoques utilizando técnicas de controle

Fernando Valladares Monteiro
Agosto/ 2014

Orientador:
Prof. Amit Bhaya, Ph.D
Curso: Engenharia de Controle e Automação

A necessidade de gerenciar o armazenamento e o transporte de produtos cresceu com o tempo e, atualmente, métodos cada vez mais elaborados são propostos com intuito de melhorar o desempenho desses processos, coletivamente denominados logística.

Além disso, evoluções na área de Tecnologia de Informação possibilitaram o acompanhamento de fluxos ao longo de cadeias de suprimentos. Assim, torna-se possível o uso de ferramentas computacionais que usam esses dados para auxiliar a tomada de decisão de gerentes dessa área.

Nesse projeto, são aplicadas técnicas de gestão de estoque baseados na teoria de controle. Essa abordagem permite a análise da dinâmica desses sistemas, contrastando com os primeiros estudos nesse campo, que se preocupavam somente com o regime em estado estacionário.

Três controladores diferentes são estudados assim como os níveis de estoque que eles geram. Os dois primeiros se baseiam nas técnicas de projeto polinomial de alocação de pólos e de realimentação de estados. O último usa uma técnica de controle preditivo. Seus desempenhos são avaliados pela perspectiva do *Economic Value Added*(EVA), que serve não somente para identificar qual dos três controladores propostos atinge o maior EVA, mas também para apontar para um problema otimização multiobjetivo cujo objetivo é encontrar um conjunto de controladores ótimos.

Palavras Chaves: Teoria de Controle Clássico, Controle de Estoque, Model Predictive Control

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

Comparative study of inventory management policies projected by control techniques

Fernando Valladares Monteiro
August/ 2014

Advisor:
Prof. Amit Bhaya, Ph.D
Course: Control and Automation Engineering

The need to manage stocking and transportation of products has grown with time and, nowadays, increasingly complex methods are being applied to improve the performances of these processes, usually referred to as logistics.

Moreover, advances in Information Technology have enabled the monitoring of flows in supply chains. As a result, it has become possible to use computational tools to analyse the monitored data to aid decision making for stock management.

In this project, stock management techniques based on control theory are applied. This approach allows the analysis of the dynamics of a basic supply chain model, contrasting with the first studies in this field, which were only concerned with the steady state.

Three different controllers are studied as well as the stock levels they generate. The first two are based on the techniques of polynomial project for pole placement and state feedback. The last one uses a predictive control technique. Their performance is evaluated from the perspective of Economic Value Added (EVA), which serves not only to identify which of the three proposed controllers achieves the largest EVA, but also to point to a multiobjective optimization problem which aimes to find a set of optimal controllers.

Keywords: Control Theory, Inventory Control, Model Predictive Control

Sumário

Resumo **VII**

Abstract **VIII**

Lista de Figuras **XI**

Lista de Tabelas **XIV**

1 Introdução **1**
1.1 Objetivo e organização do trabalho 1
1.2 Revisão bibliográfica 2
1.2.1 Logística 2
1.2.2 Aplicação de Teoria de Controle 4

2 Modelo de uma cadeia de suprimentos **6**
2.1 *Economic Value Added* (EVA) 8

3 Projeto polinomial para modelo simplificado de cadeia de suprimentos **11**
3.1 SDLITs em forma de função de transferência 11
3.2 Teoria de projeto polinomial 13
3.3 Aplicação à cadeia de suprimentos modelada 15
3.4 Simulações 16

4 Realimentação de Estados **21**
4.1 Representação em espaço de estados 21
4.2 Teoria de realimentação de estados 22
4.3 Aplicação à cadeia de suprimentos modelada 23
4.4 Simulações 24

5 *Model Predictive Control* **29**
5.1 Formulação do problema de Controle Ótimo 29
5.2 Teoria MPC 30
5.3 Ferramenta computacional 32
5.4 Simulações 33

6 Comparação dos controladores sob a perspectiva do EVA 40
6.1 Investigação heurística de mudanças nos controladores visando melhoria no EVA 43

7 Conclusão e Trabalhos Futuros 48
7.1 Conclusão 48
7.2 Trabalhos Futuros 49

Referências Bibliográficas 51

Lista de Figuras

2.1 Cadeia de suprimentos simplificada de três estágios. Flechas simbolizam fluxo de itens. 6
2.2 Representação gráfica do modelo de um estágio da cadeia de suprimentos. 8

3.1 Diagrama de blocos de um sistema discreto com distúrbio na saída e controladores *feedback* e *feedforward*, sendo, portanto, um estrutura de controle com dois graus de liberdade. 13
3.2 Diagrama de blocos canônico de um sistema de controle discreto com dois graus de liberdade. 13
3.3 Resultados com controlador calculado pelo projeto polinomial de alocação de pólos e demanda constante. Acima, a linha contínua mostra a quantidade de itens em estoque e a pontilhada a referência. Abaixo, pedidos feitos pelo sistema em linha contínua e demanda em pontilhado. 17
3.4 Resultados com controlador calculado pelo projeto polinomial de alocação de pólos e demanda em pulsos. Acima, em linha contínua, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha contínua, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda. 18
3.5 Resultados com controlador calculado pelo projeto polinomial de alocação de pólos e uma demanda seguindo distribuição de Poisson com média 3. Acima, em linha contínua, quantidade de itens em estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque. Abaixo pedidos feitos no sistema e por último a demanda à qual o sistema foi submetido. 19
3.6 Resultados com controlador calculado pelo projeto polinomial de alocação de pólos e demandas seguindo distribuição de Poisson. Acima, simulação com média 2, abaixo, simulação com média 5. Nos dois gráficos, em linha contínua está o estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque. 20

4.1 Resultados com controlador calculado por realimentação de estados sob demanda constante. Acima, a linha contínua mostra a quantidade de itens em estoque e a pontilhada a referência. Abaixo, pedidos feitos pelo sistema em linha contínua e demanda em pontilhado. 25
4.2 Resultados com controlador calculado por realimentação de estados e sob demanda em pulsos. Acima, em linha contínua, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha contínua, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda. 26
4.3 Resultados com controlador calculado por realimentação de estados e sob uma demanda seguindo distribuição de Poisson com média 3. Acima, em linha contínua, quantidade de itens em estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque. Abaixo pedidos feitos no sistema e por último a demanda à qual o sistema foi submetido. 27
4.4 Resultados com controlador calculado por realimentação de estados e sob demandas seguindo distribuição de Poisson. Acima, simulação com média 2, abaixo, simulação com média 5. Nos dois gráficos, em linha contínua está o estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque. 28

5.1 Resultados com controlador LQR e sob demanda em pulsos. Acima, em linha cheia, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha cheia, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda. 31
5.2 Resultados com controlador tipo MPC sob demanda constante. Acima, em linha cheia, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha cheia, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda. 35
5.3 Resultados com controlador tipo MPC e sob demanda em pulsos. Acima, em linha cheia, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha cheia, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda. 36
5.4 Resultados com controlador tipo MPC e sob uma demanda seguindo distribuição de Poisson com média 3. Acima, em linha cheia, quantidade de itens em estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque. Abaixo pedidos feitos no sistema e por último a demanda à qual o sistema foi submetido. 37

5.5 Resultados com controlador tipo MPC e sob demandas seguindo distribuição de Poisson. Acima, simulação com média 2, abaixo, simulação com média 5. Nos dois gráficos, em linha cheia está o estoque, em pontilhado a referência. O tracejado no primeiro gráfico é a média temporal do estoque. 38
5.6 Média das médias finais de estoque por média da distribuição de Poisson que regia as demandas mostrando que o *offset* entre média de estoque e referência cresce conforme aumenta a demanda. 39

6.1 Média de dez simulações do EVA a cada instante. Em linha contínua os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, pontilhado para o controlador calculado por realimentação de estado e tracejado para o MPC. 41
6.2 Valores do EVA a cada instante em uma única simulação. Em linha contínua os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, pontilhado para o controlador calculado por realimentação de estado e tracejado para o MPC. 42
6.3 *Out of stock cost* obtido para a simulação da figura 6.2. Acima os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, no meio para o controlador calculado por realimentação de estado e abaixo para o MPC. 43
6.4 Média de dez simulações do EVA a cada instante com média de demanda igual a 2. Em linha contínua os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, pontilhado para o controlador calculado por realimentação de estado e tracejado para o MPC. 44
6.5 Média de 50 simulações do EVA a cada instante com referência igual a 14. Em linha contínua os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, pontilhado para o controlador calculado por realimentação de estado e tracejado para o MPC. 46

Lista de Tabelas

3.1 Tabela de parâmetros do sistema no caso de controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos. 16
3.2 Valores de demanda 17

4.1 Tabela de parâmetros do sistema no caso de controlador calculado por realimentação de estados. 24
4.2 Valores de demanda 25

5.1 Tabela de parâmetros do sistema no caso de controlador LQR. 31
5.2 Tabela de parâmetros do sistema no caso de controlador tipo MPC. 34
5.3 Valores de demanda 34

6.1 Tabela de parâmetros do EVA. 40
6.2 Tabela de EVAs médios finais sem alterção dos parâmetros usados anteriormente 41
6.3 Tabela de EVAs médios finais com média de demanda igual a 2. 44
6.4 Parâmetros modificados nos controladores clássicos. 45
6.5 Tabela de EVAs médios finais com referência igual a 14. . . . 45
6.6 Tabela de *OoSCost* médio com referência igual a 14. 46

Capítulo 1

Introdução

O aumento dos custos de produção e transporte assim como a globalização de mercados e as mudanças nos padrões de consumo levaram empresas a mostrar um interesse crescente na gestão eficiente de sistemas logísticos [18]. A estratégia para armazenar e transportar produtos assume papel importante no cenário mundial e não pode ser ignorada por empresas qualquer que seja seu porte. Devido a esses fatores, estudos sobre o tema usando uma abordagem matemática datam desde 1934 [28].

A evolução de sistemas de Tecnologia da Informação permitiu o melhor acompanhamento de processos em cadeias de produção, tornando esses estudos ainda mais relevantes. No entanto, a maior parte dos trabalhos se concentrava sobre características de sistemas em estado estacionário, devido ao cenário industrial [16]. Atualmente, na situação em que a resposta rápida a mudanças inesperadas pode determinar o sucesso ou a falência de uma organização [23], é necessário levar em conta a dinâmica da logística. É nesse contexto que se insere esse projeto. A aplicação da Teoria de Controle ao problema de gestão de estoques, uma das principais áreas da logística, decorre naturalmente do fato que equações a diferenças são o modelo matemático para representar esses sistemas dinâmicos.

1.1 Objetivo e organização do trabalho

Esse trabalho tem como objetivo avaliar até que ponto técnicas clássicas de controle podem ser utilizadas com sucesso no problema mais básico de gestão de estoques sob demanda aleatória. A métrica de avaliação utilizada será o desempenho econômico, muito embora as técnicas de controle clássico utilizadas não tenham sido desenvolvidas com este objetivo em mente.

A formulação geral do problema de cadeias de suprimento abordado é um

problema de otimização multiobjetivo que pode ser descrito como:

$$\max f_1(p), f_2(p) \tag{1.1}$$

Sendo f_1 e f_2 funções objetivo que dependem de um vetor de parâmetros p.

Especificamente, f_1 é uma função objetivo que considera informações econômicas da cadeia de suprimentos, representada nesse trabalho pelo *Economic Value Added*(EVA), descrito na seção 2.1. A função f_2 leva em conta alguns objetivos mais comuns em teoria de controle, como rastreamento de uma referência (no caso dos projetos polinomial e por realimentação de estados) ou rastreamento combinado com *slew rate* (no caso do projeto *Model Predictive Control*).O vetor de parâmetros p contém todos os parâmetros do EVA e dos objetivos de controle.

Para apresentar o projeto desenvolvido, é feita uma revisão bibliográfica dando ênfase à importância da logística e aos artigos que dela tratam sob a ótica de sistemas dinâmicos. Em seguida, o modelo matemático utilizado durante todo o trabalho assim como a função de custo usada para analisar o desempenho dos controladores são definidos.

A abordagem escolhida para tratar do problema estudado evita o caso mais geral da formulação multiobjetivo dividindo-o em dois estágios. Nos capítulos 3, 4 e 5, que consideram o primeiro desses estágios, projetos polinomial, por realimentação de estados e MPC são estudados para o modelo simples de cadeia de suprimentos proposto. Em outras palavras, os controladores são projetados levando em conta somente a função objetivo f_2 relevante para o controlador sendo projetado.

O capítulo 6 examina o desempenho desses mesmos controladores em relação ao EVA. Através de simulações, é observado que os parâmetros p podem ser modificados para melhorar muito valores do EVA em relação aos obtidos usando somente a função objetivo f_2.

No final, uma conclusão geral é dada e trabalhos futuros são propostos.

1.2 Revisão bibliográfica

Para situar o trabalho descrito, é necessária uma revisão da bibliografia sobre o tema. As diferentes abordagens usadas em estudos anteriores são uma indicação da complexidade do problema.

1.2.1 Logística

Logística, de acordo com o *Council of Supply Chain Management Professionals* [1], é "Processo de planejar, implementar e controlar o procedimento

de transporte e estoque de bens, incluindo serviços, e informações relacionadas desde o ponto de origem até o ponto de consumo de forma eficiente e eficaz com o objetivo de estar conforme requerimentos do consumidor."Usando essa definição, não é difícil concluir que a logística faz parte da vida do ser humano há séculos, desde que surgiram as primeiras necessidades de estocagem ou transporte de alimentos. Também fica claro que ela está presente em maior ou menor escala em praticamente qualquer indústria e mesmo na vida do dia a dia.

A necessidade de preparação, estudo e técnica cresce rapidamente conforme a complexidade da operação aumenta. Uma logística ineficiente pode acarretar severos custos a uma empresa. Ao mesmo tempo, excelência em sua administração pode por si só determinar o sucesso de um negócio. Um dos casos mais emblemáticos encontrados atualmente é a empresa *Amazon*, com receitas brutas que atingiram quase 20 bilhões de dólares no início de 2014 [2]. Além disso, os muitos cursos oferecidos por diversas instituições de ensino tendo como foco o gerenciamento de cadeias de suprimento mostra uma resposta à busca do mercado por profissionais capazes nessa área, refletindo a crescente preocupação com logística.

Ademais, como a definição apresentada inicialmente deixa claro, a gestão da informação também tem papel importante na logística, tornando as duas áreas intimamente ligadas. A exploração da Tecnologia da Informação (TI) nesse contexto permite acompanhamento de toda uma cadeia de suprimentos, monitorando fluxos, registrando valores de estoques e adquirindo dados em geral. Com isso, ela pode se tornar uma ferramente importante de auxílio de tomada de decisão [27]. *Softwares* como *Material Requirements Planning* (MRP I e II) e *Enterprise Consumer Response* (ERP) são exemplos já consolidados dessas ferramentas no mercado [21].

Com a popularização de sistemas de TI, fica visível o interesse no estudo de algoritmos de gestão de estoques como aqueles apresentados nesse trabalho.

Gestão de estoques

O termo gestão de estoques se refere tanto ao estoque de itens quanto ao processamento de pedidos. Ambos são abordados nesse projeto e formam, juntamente com o transporte, os três principais componentes da logística [27]. O estoque aparece como elemento regulador para a defasagem entre produção e fornecimento de itens e a demanda.

O desafio surge na tentativa de otimizar o custo desse estoque. Ao mesmo tempo que o fornecedor quer evitar desabastecimento, que significa perda de vendas e de potenciais clientes, estoques representam gastos como energia

elétrica, local de armazenamento e segurança. Devido a isso, o gestor deve se preocupar com diversos fatores como preço do produto, níveis mínimos de segurança, quando comprar e quanto comprar. Nesse trabalho são contemplados os últimos dois.

A decisão em relação ao momento da compra passa principalmente por dois pontos, o tempo de entrega (intervalo entre fazer o pedido e receber o produto) e a previsão da demanda. A dificuldade na escolha da quantidade passa pelo equilíbrio entre a soma dos custos de fazer pedidos e estocá-los e o custo de falta de estoque.

Esse cenário de difícil análise gera interesse para um algoritmo como o proposto nesse trabalho.

1.2.2 Aplicação de Teoria de Controle

A situação da indústria no início do século passado, quando havia poucas companhias e menos competição permitia a análise de problemas de gestão de estoque através de modelos baseados em desempenho médio ou condições em estado estacionário [16]. No entanto, atualmente tornou-se necessário, para se manter competitivo, responder rapidamente a mudanças de demanda e se adaptar o quanto antes a avanços tecnológicos. Com isso, passa a ser interessante o estudo da dinâmica dos desses sistemas.

A ferramenta matemática que permite o estudo das características de sistemas dinâmicos contínuos é a equação diferencial. Para sistemas discretos, como é o modelo adotado ao longo desse trabalho, são usadas as equações a diferenças. A Teoria de Controle é o ramo da engenharia mais desenvolvido na aplicação dessas equações para estudo da dinâmica de sistemas físicos, tornando-a uma boa candidata para análise das novas propriedades de interesse de sistemas de gestão de estoque [18].

Utilizações de técnicas clássicas de controle datam da década de 50, inicialmente com [20] e posteriormente com modelos em tempo discreto por [26]. A metodologia chamada de "dinâmica de sistemas"surgiu pouco depois com [9, 10]. Dentre as suas muitas aplicações, vale ressaltar a área conhecida como *Business Dynamics*, que sugere o uso técnicas de modelagem de sistemas dinâmicos para analisar políticas e estratégias de decisão em sistemas logísticos. Metodologias de modelagem, ferramentas de análise, outros conceitos e problemas mais complexos podem ser encontrados em [14] e [24].

O *bullwhip*, estudado em [8] e [7], é um exemplo de fenômeno que decorre dos atrasos presentes na dinâmica de cadeias de suprimento. Ele é normalmente observado em cadeias de suprimento não integradas quando há aumento da demanda que gera aumentos sucessivos de estoque a montante na cadeia. Em outras palavras, ele se refere à ocorrência de picos de esto-

que de amplitude relativamente grande quando comparados à real variação da demanda. Esse fenômeno não é estudado especificamente nesse trabalho, cujo foco está na comparação de técnicas de controle pela perspectiva de uma função objetivo econômica.

Para realizar o controle desses sistemas com múltiplos estágios, estratégias do tipo *Model Predictive Control* (MPC) se baseando em modelos lineares determinísticos dentre outras são usadas [4, 17, 25]. No entanto, sistemas de estoque normalmente encontrados estão submetidos a distúrbios estocásticos.

O artigo [19] propõe controle de estoque de um único armazém e de uma cadeia de produção de três níveis usando técnicas de controle como *Internal Model Control* e MPC, respectivamente, sob influência de variáveis aleatórias. Além disso, é proposta a otimização desses controladores por um método de otimização por simulação chamado *simultaneous perturbation stochastic approximation* (SPSA) [22]. Esse artigo assim como o projeto de graduação [5], que se dedica à otimização do emprego de diversos tipos de controladores em um armazém simples, servem como principal base para o desenvolvimento desse trabalho.

Capítulo 2

Modelo de uma cadeia de suprimentos

O primeiro passo para o estudo de um sistema sob a ótica da Teoria de Controle é a obtenção de um modelo matemático adequado que o descreva. Esse deve ser o mais simples possível, a fim de facilitar sua análise e simulação, sem deixar de representar com detalhe suficiente os aspectos de interesse de um sistema real.

Esse projeto se propõe a trabalhar com o modelo discreto apresentado em [14]. Ele é utilizado em [5]. Seu equivalente contínuo é apresentado em [16] e utilizado em [19]. Ele representa um dos estágios de uma cadeia de suprimentos 2.1. Nela, um fornecedor recebe matéria prima para produzir itens de um certo tipo. Uma vez prontos, eles são estocados no armazém. Esse, por sua vez, os transfere para a loja que os vende para os consumidores finais. Para simplificar o problema, será considerado que o fornecedor nunca carece de matéria prima.

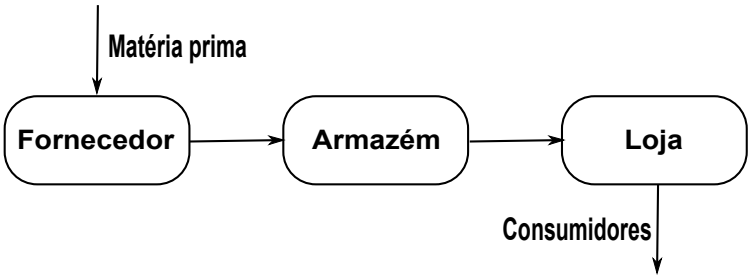

Figura 2.1: Cadeia de suprimentos simplificada de três estágios. Flechas simbolizam fluxo de itens.

Seguindo essas hipóteses, os comportamentos de cada um dos estágios podem ser descritos como:

- Fornecedor: recebe pedidos do armazém e, seguindo regras de decisão internas, produz itens para supri-lo. O tempo entre disparar a ordem de produção de x itens e sua disponibilização para entrega é chamado $\tau_{\text{fornecedor}}$ e, novamente por simplicidade, não dependerá da quantidade de itens;

- Armazém: recebe pedidos da loja e, seguindo regras de decisão internas, faz requerimento ao fornecedor. O tempo entre pedir x itens ao fornecedor e tê-los prontos para envio é $\tau_{\text{armazém}}$;

- Loja: recebe pedidos dos consumidores e, seguindo regras de decisão internas, faz solicitação ao armazém. O tempo entre pedir x itens ao armazém e tê-los prontos para venda é τ_{loja};

Se for considerado também que não há restrições de pedidos mínimos ou máximos e que é possível fazê-los qualquer dia, os três estágios podem ser descritos por:

$$\begin{aligned} I_i(k+1) &= I_i(k) + R_i(k) - S_i(k) \\ R_i(k) &= u_i(k-\tau_i) \ , \ i = \text{fornecedor, armazém, loja} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sendo k uma unidade de tempo discreto, como um dia, $I_i(k)$ a quantidade de itens disponíveis, $R_i(k)$ a quantidade de itens recebidos ou cuja produção está finalizada, $S_i(k)$ a quantidade de itens enviados ou vendidos e $u_i(k)$ a quantidade de itens pedidos, que representa a entrada de controle desse sistema. Para valores $k < \tau_i$, $R_i(k) = 0$. Como é estudado apenas um estágio, por simplicidade de notação, o índice i não será mais utilizado. Vale enfatizar que τ não depende de k, i.e., o atraso é constante. Sem essa consideração a complexidade do estudo aumentaria consideravelmente.

A variável que representa a saída de itens é uma função da demanda $D(k)$ existente:

$$S(k) = f\big(D(k)\big) = \begin{cases} D(k) & \text{se } I(k-1) - D(k) \geq 1 \\ I(k-1) - 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.2}$$

Sendo $D(k)$ modelada como uma variável aleatória com distribuição de Poisson. O limite inferior de um item é usado para simular a necessidade de se ter ao menos um item na vitrine da loja. [1] Isso gera uma não-linearidade no

[1] A utilização do limite inferior igual a um em vez de zero, como seria esperado para os casos do fornecedor e do armazém, não tem influência significativa no problema.

sistema, pois tem-se $I(k) \geq 1, \forall k$. O modelo dinâmico da cadeia de suprimento (2.1), (2.2) pode ser visto como linear se o termo $S(k)$ de (2.1) for substituído pela demanda $D(k)$ e a equação (2.2) ignorada, resultando em:

$$I(k+1) = I(k) + R(k) - D(k) \tag{2.3}$$

Essa simplificação implica a possibilidade de valores de estoque negativos quando a demanda naquele instante excede a soma $I(k) + R(k)$. A maneira de tratar esse problema é descrita na introdução ao capítulo 3. Na figura 2.2 é mostrada uma representação gráfica do modelo (2.1), (2.2).

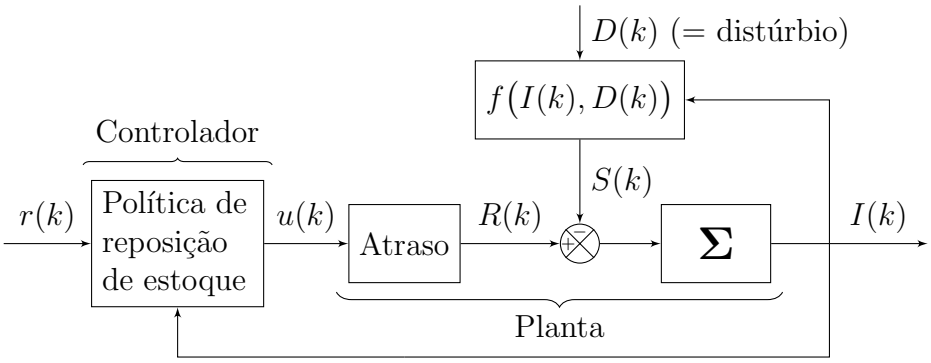

Figura 2.2: Representação gráfica do modelo de um estágio da cadeia de suprimentos.

Usando terminologia de controle, a planta estudada é um acumulador, submetido a um controle com atraso somado a um distúrbio aleatório na sua entrada. O objetivo de controle é alcançar uma referência de estoque e rejeitar o distúrbio. Essa última expressão significa atender a demanda sem desviar do valor de referência desejado para o estoque.

2.1 *Economic Value Added* (EVA)

A função de custo escolhida para avaliar o desempenho econômico dos controladores é o *Economic Value Added*, conhecido pelas suas iniciais como EVA. Esse índice, usado em [5], seguindo a proposta de [14], foi desenvolvido por Sloan e Stern para determinar quanto valor uma empresa gera a seus acionistas em um certo período. Ele é composto por *net operating profit after tax* [2], o lucro líquido após impostos, e *capital charge*, o capital investido

[2]Para manter facilmente o paralelo com a literatura usada, os termos nas equações serão mantidos em inglês

em bens multiplicado por seus custos ponderados. O EVA é a soma do *dailyEVA* ao longo de um horizonte $[k_0, k_f]$:

$$\text{EVA} = \sum_{k=k_0}^{k_f} \text{dailyEVA}(k) \tag{2.4}$$

Sendo:

$$\text{dailyEVA}(k) = \text{NetOperatingProfitAfterTax}(k) - \text{CapitalCharge}(k) \tag{2.5}$$

O primeiro termo de (2.5), chamado doravante por sua sigla NOPAT, pode ser expresso por:

$$\text{NOPAT}(k) = \big(\text{SalesProfit}(k) - \text{OperatingExpenses}(k)\big).(1 - \text{TaxRate}) \tag{2.6}$$

Sendo o lucro das vendas:

$$\text{SalesProfit}(k) = \text{Sales}(k) \cdot \text{SalesPrice} \tag{2.7}$$

Os custos operacionais (*operating expenses*) dependem de custos de manutenção de estoque (*handling cost*) e do capital necessário para realizar o pedido (ou compra) de itens (*buy cost*):

$$\text{OperatingExpenses} = \text{HandlingCost}(k) + \text{BuyCost}(k) \tag{2.8}$$

Para o primeiro termo:

$$\text{HandlingCost} = \text{UnitHC} \cdot R(k) \tag{2.9}$$

Sendo *UnitHC* o valor dispendido na manutenção dos produtos em estoque. Analogamente, o outro termo de (2.8) é:

$$\text{BuyCost}(k) = \text{UnitCost} \cdot R(k) \tag{2.10}$$

UnitCost é o custo unitário de um pedido (ou compra).

O segundo termo de (2.5) representa perdas para os acionistas, decorrente de capital comprometido, que poderia estar invesitdo de outra forma para gerar riquezas. Pode ser descrito por:

$$\text{CapitalCharge}(k) = \text{CostOfCapital} \cdot \text{TiedUpInCapital} \tag{2.11}$$

Há diversas possibilidades para o cálculo desse capital, que é influenciado pela forma de financiamento escolhida pela empresa para financiar seus investimentos. Isso pode ser feito por empréstimos bancários ou por investimento

do próprio lucro, que ocasiona diminuição do valor transferido aos acionistas. A equação escolhida para representá-lo nesse trabalho é:

$$\begin{aligned}\text{CapitalCharge}(k) = \big(&\text{InventoryCost}(k) + \text{StorageCost}(k)\big) \\ &\cdot \text{ExpectedReturn} + \text{OoSCost}(k)\end{aligned} \tag{2.12}$$

Os custos de estoque são:

$$\text{InventoryCost} = I(k) \cdot \big(\text{UnitCost} + \text{HandlingCost}(k)\big) \tag{2.13}$$

Evidentemente, a quantidade de itens em estoque influencia significantemente no EVA. Excesso de produtos leva a altos custos e, consequentemente, redução dos lucros.

O termo *StorageCost* é proporcional aos picos de estoque:

$$\text{StorageCost}(k) = \text{UnitStoreCost} \cdot \text{PeakStore}(k) \tag{2.14}$$

Sendo *UnitStoreCost* uma constante que descreve o capital gasto para cada item a mais acima do estoque máximo anterior e *PeakStore*(k):

$$\text{PeakStore}(k) = \begin{cases} I(k) & \text{se } I(k) > \text{PeakStore}(k-1) \\ \text{PeakStore}(k-1) & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.15}$$

Esse termo pode ser visto como uma forma de levar o efeito de *bullwhip* em conta no cálculo do EVA.

Ainda em (2.12), *ExpectedReturn* é a uma taxa de retorno esperada pelos acionistas sobre o capital investido. O último termo da equação descreve a perda de valor para a empresa ocasionada quando não é possível atender a demanda. Com isso, *OoSCost* é:

$$\text{OoSCost}(k) = \text{TurnAwayCost} \cdot \text{TurningAway}(k) \tag{2.16}$$

Sendo *TurnAwayCost* uma constante que estima a penalidade ao deixar de se vender um produto e *TurningAway*:

$$\text{TurningAway}(k) = D(k) - S(k) \tag{2.17}$$

É evidente que, com essa formulação, *OoSCost* vai a zero quando todos os pedidos são atendidos.

Com isso, termina a descrição da função objetivo f_1, mencionada na equação (1.1).

Capítulo 3

Projeto polinomial para modelo simplificado de cadeia de suprimentos

Para viabilizar a utilização de controladores lineares no controle do modelo de uma cadeia de suprimento, adota-se, neste e nos dois capítulos seguintes, o seguinte procedimento. Trabalha-se com o modelo linear (2.3) para projeto de um controlador linear. Em seguida, para avaliar o desempenho, seja em relação a função objetivo f_1 ou f_2, utiliza-se, nas simulações, o controlador projetado com a planta completa, isto é, descrita pelas equações (2.1), (2.2).

Dentre as dentre as diversas técnicas para se calcular um controlador *feedback* capaz de estabilizar um sistema, o projeto polinomial para alocação de pólos apresenta algumas vantagens. Essa abordagem, tipicamente utilizada em sistemas discretos lineares invariantes no tempos (SDLITs) permite a escolha precisa dos pólos do sistema em malha fechada de forma simples. Para isso, basta uma representação do modelo através de sua função de transferência e alguma manipulação matemática.

3.1 SDLITs em forma de função de transferência

Equações a diferenças, como a equação (2.1), representam a evolução temporal de sistemas e costumam ser, portanto, intuitivas e de fácil compreensão. No entanto, para diversas técnicas de análise de estabilidade e de síntese de controladores, elas não são a ferramenta mais útil. Diagramas muito frequentemente utilizados, como *root locus*, Nyquist e Bode e técnicas

como *Internal Model Controller* (IMC) e o próprio projeto polinomial requerem que a dinâmica estudada seja representada através de funções de transferência.

Para sistemas contínuos no tempo essa função é obtida pela relação das transformadas de Laplace de sua entrada e sua saída. Para sistemas discretos, deve ser usado o equivalente discreto da transformada de Laplace, a transformada Z (símbolo $\mathcal{Z}\{.\}$). Matematicamente, em um sistema com entrada $x(k)$ e saída $y(k)$, pode-se representar a função de transferência $G(z)$ como:

$$G(z) = Y(z)/X(z) \text{ , sendo } X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} \text{ e } Y(z) = \mathcal{Z}\{y(z)\} \tag{3.1}$$

Tendo conhecimento de $G(z)$, todo o comportamento do sistema a partir de condições iniciais nulas pode ser obtido. Nesta representação, estabilidade é facilmente caracterizada:

$$G(z) \text{ é assintóticamente estável } \Leftrightarrow \forall\lambda \in C(\text{ pólos de } G(z)\text{ }),\ |\lambda| < 1 \tag{3.2}$$

Em relação à transformada Z, deduções, noções mais aprofundadas e tabelas de propriedades podem ser encontrados em diversos livros de tratamento de sinais ou de teoria de controle, como por exemplo [15]. Para o estudo do sistema em questão, a propriedade de maior interesse é a que relaciona a transformada de um sinal com a transformada do mesmo sinal com atraso:

$$\mathcal{Z}\{x(k-\tau)\} = z^{-\tau} \cdot \mathcal{Z}\{x(k)\} \tag{3.3}$$

Com isso, a obtenção de $G(z)$ para SDLITs pode ser feita de forma algébrica a partir da equação a diferenças. Através de:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot y(k-i) + \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot x(k-i) \tag{3.4}$$

Obtém-se:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} z^{-i} \cdot b_i}{1 - \sum_{i=1}^{n} z^{-i} \cdot a_i} \tag{3.5}$$

É usual, para sistemas definidos por tais funções, utilizar uma represetação gráfica, o diagrama de blocos. Nele, blocos representam funções de transferência e setas indicam variáveis de entrada e saída de cada uma delas. O diagrama da figura 3.1 é um exemplo genérico de planta discreta ($G(z)$) que sofre um distúrbio na saída ($D(z).G_d(z)$) com controladores *feedback* (C_{fb}) e *feedforward* (C_{ff}). É considerado que essa estrutura apresenta dois graus de liberdade, pois duas funções de transferência (C_{ff} e C_{fb}) podem ser determinadas, permitindo escolhas independentes das funções de transferência entre referência e erro e distúrbio e erro.

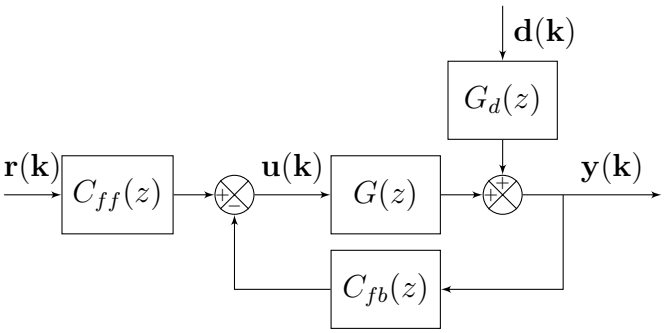

Figura 3.1: Diagrama de blocos de um sistema discreto com distúrbio na saída e controladores *feedback* e *feedforward*, sendo, portanto, um estrutura de controle com dois graus de liberdade.

3.2 Teoria de projeto polinomial

Tendo em mãos essas noções básicas, é possível começar a análise da técnica de síntese de controladores escolhida: o projeto polinomial para alocação de pólos. Um bom estudo desse método, feito com mais detalhes do que o apresentado na sequência dessa seção, pode ser encontrado em [12] e [3].

Inicialmente, para fins de formalidade e generalidade de soluções, é interessante definir uma estrutura canônica para o sistema na qual cada bloco do diagrama contém um polinômio único, isto é, que não aparece em nenhum dos outros blocos. A figura 3.2 mostra uma estrutura de controle equivalente à da figura 3.1, na qual o denominador comum R de C_{ff} e C_{fb} está destacado em um bloco à parte.

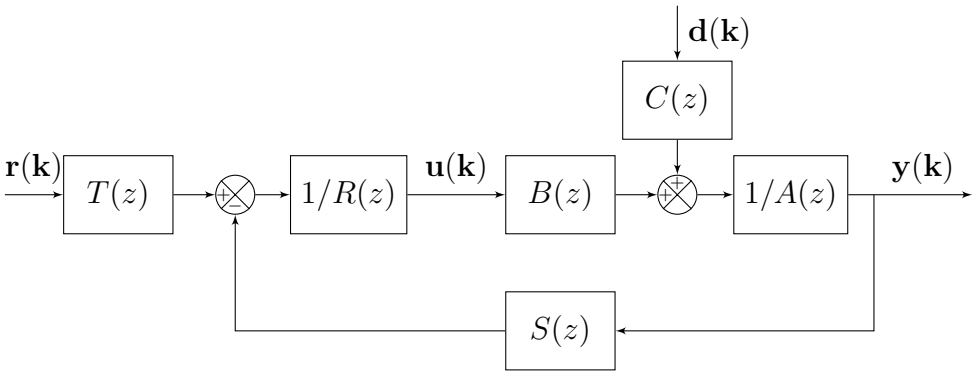

Figura 3.2: Diagrama de blocos canônico de um sistema de controle discreto com dois graus de liberdade.

As equações desse sistema são (omitindo a variável independente z por

simplicidade):

$$y = \frac{B \cdot T}{A_c} \cdot r + \frac{R \cdot C}{A_c} \cdot d \tag{3.6}$$

$$u = \frac{A \cdot T}{A_c} \cdot r - \frac{S \cdot C}{A_c} \cdot d \tag{3.7}$$

Sendo

$$A_c = A \cdot R + B \cdot S \tag{3.8}$$

Para a síntese de um controlador capaz de estabilizar o sistema, é necessário definir as raízes de A_c, que serão os pólos desejados para o sistema em malha fechada, seguindo (3.2). Em seguida, deve-se resolver a equação polinomial (3.8) em R e S. Para isso, ela pode ser reescrita como um sistema de equações igualando os coeficientes que multiplicam potências iguais de z.

$$\sum_{i+j=k} a_i \cdot r_j + \sum_{i+j=k} b_i \cdot s_j = a_{c_k} \text{ , com } k = 0, \ldots, n \tag{3.9}$$

sendo $n = \max[\deg(A \cdot R), \deg(B \cdot S)]$. Em forma matricial:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & a_0 & b_2 & \ddots & b_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}}^{\deg(R)+1+\deg(S)+1} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ s_0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} a_{c_0} \\ a_{c_1} \\ \vdots \\ a_{c_n} \end{pmatrix}\right\} n+1 \tag{3.10}$$

Para que haja solução, essa matriz deve ser inversível. Em outras palavras, é necessário um número de equações igual ao de variáveis. Logo, $n+1 = \deg(R) + \deg(S) + 2$ e, consequentemente, $\deg(A_c) = \deg(R) + \deg(S) + 1$.

Após análise dos dois casos possíveis, $n = \deg(A \cdot R)$ ou $n = \deg(B \cdot S)$, encontra-se uma escolha padrão para os graus desses polinômios:

$$\begin{aligned} \deg(A_c) \leq & \deg(A) + \deg(B) - 1 \\ \deg(R) = & \deg(B) - 1 \\ \deg(S) = & \deg(A) - 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Finalmente, com a utilização de uma ferramenta como MATLAB, o sistema de equações (3.9) é resolvido e os controladores são encontrados.

3.3 Aplicação à cadeia de suprimentos modelada

A aplicação do projeto polinomial para alocação de pólos ao caso estudado começa com a escrita de suas funções de trasferência partindo da equação (2.1). Para isso, é necessário desconsidar a não-linearidade da equação (2.2). A demanda é vista como um distúrbio a ser rejeitado pelo sistema, mantendo o estoque no nível desejado de referência. Seguindo a notação de 3.1:

$$G = \frac{z^{-\tau}}{-z^{-1}+1} \tag{3.12}$$

$$G_d = \frac{1}{-z^{-1}+1} \tag{3.13}$$

Usando a notação do diagrama de blocos mostrado na figura 3.2:

$$A = -\,z^{-1}+1; \tag{3.14}$$

$$B = -\,z^{-\tau}; \tag{3.15}$$

$$C = 1; \tag{3.16}$$

Para os polinômios R e S, que definem o controlador *feedback*, seguindo o grupo de equações (3.11), pode ser encotrado:

$$R = r_0 + r_1 \cdot z^{-1} + \cdots + r_{\tau-1} \cdot z^{-(\tau-1)} \tag{3.17}$$

$$S = s_0 \tag{3.18}$$

Uma escolha simples e eficaz é ter um único pólo de grau τ para o sistema. Assim, a equação característica se torna $A_c = (-\lambda \cdot z^{-1}+1)^{\tau}$.

Fazendo os produtos polinomiais, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_{\tau-1} \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{c_0} \\ a_{c_1} \\ \vdots \\ a_{c_n} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

É interessante fazer uso do Teorema do Valor Final para saber se o controlador é capaz rastrear uma referência em degrau e, ao mesmo tempo, rejeitar distúrbios de mesmo tipo. Substituindo as equações de (3.14) a (3.18) em (3.6):

$$\begin{aligned} y(z) = & \frac{-z^{-\tau} \cdot T(z)}{(-z^{-1}+1) \cdot \sum_{i=0}^{\tau-1} r_i \cdot z^{-i} - z^{-\tau} \cdot s_0} \cdot \frac{r_e}{(-z^{-1}+1)} \\ & + \frac{\sum_{i=0}^{\tau-1} r_i \cdot z^{-i} \cdot 1}{(-z^{-1}+1) \cdot \sum_{i=0}^{\tau-1} r_i \cdot z^{-i} - z^{-\tau} \cdot s_0} \cdot \frac{d}{(-z^{-1}+1)} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Sendo r_e e d as amplitudes da referência e do distúrbio respectivamente. Ao aplicar o TVF:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot y(z) \tag{3.21}$$

Obtém-se:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \frac{T(1)}{(-1)^{\tau+1}\cdot s_0}\cdot r_e + \frac{\sum_{i=0}^{\tau-1} r_i}{-s_0}\cdot d \tag{3.22}$$

Observando (3.22), fica claro que, para cada dupla r_e, d é possível fazer uma escolha de pólos e de $T(z) = const$ que leve $\lim_{k\to\infty} y(k) = 0$.

3.4 Simulações

Usando os coeficientes dados pela resolução do sistema de equações (3.19), resultados para aplicação do método são obtidos. O polinômio $T(z)$ é definido como sendo igual a 1 por simplicidade.

Primeiramente, o sistema foi submetido a uma demanda constante. Os gráficos da figura 3.3 mostram resultados para o sistema com parâmetros definidos na tabela 3.1. O valor de λ foi definido empiricamente através de sucessivas simulações.

Tabela 3.1: Tabela de parâmetros do sistema no caso de controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos.

Parâmetro	**Valor**
Tempo total	365
$D(k)$	3
τ	7
Referência	7
$I(0)$	7
λ	0.2
$T(z)$	1

É visível que nesse caso simplificado o controlador apresenta comportamento satisfatório, i.e., $I(k)$ ficou estável e sem *offset* enquanto $u(k)$ se manteve com valor igual ao da demanda.

Posteriormente, o sistema é submetido a uma demanda que varia em pulsos, ou seja, que assume valores constantes durante diferentes intervalos de tempo. A figura 3.4 mostra como ele se comportou para o caso especificado na tabela 3.2. Nesse gráfico, são mostrados também a referência do estoque e a demanda, que pode ser vista como a referência da número de itens pedidos.

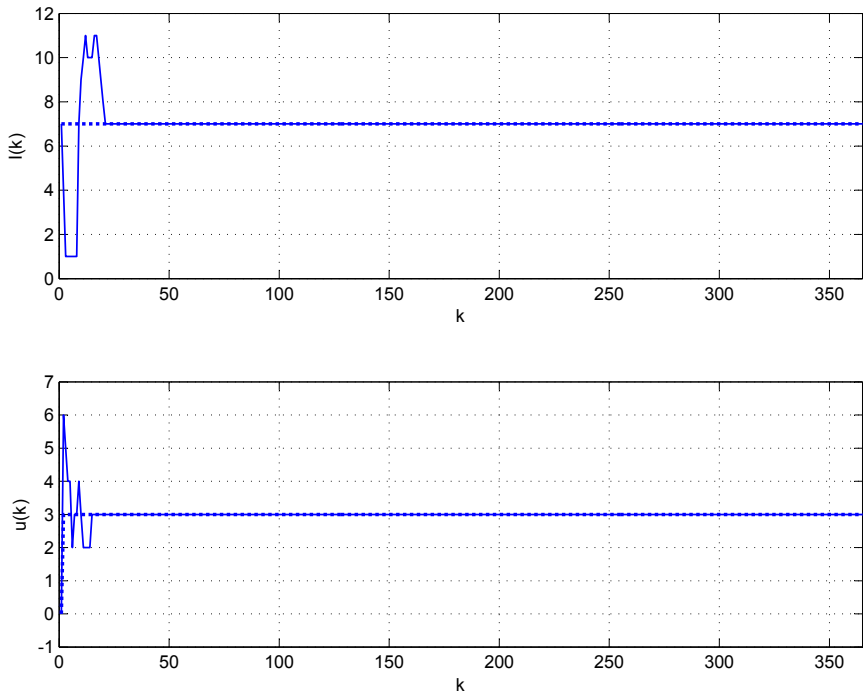

Figura 3.3: Resultados com controlador calculado pelo projeto polinomial de alocação de pólos e demanda constante. Acima, a linha contínua mostra a quantidade de itens em estoque e a pontilhada a referência. Abaixo, pedidos feitos pelo sistema em linha contínua e demanda em pontilhado.

Tabela 3.2: Valores de demanda

Tempo	0	50	100	150	200
Demanda	3	5	3	1	7

Através dessa simulação, percebe-se que a escolha inicial de parâmetros satisfaz apenas o caso bastante particular analisado primeiramente. Nos casos de demanda acima daquela para a qual o sistema foi ajustado (nesse caso, o valor 3), há oscilação em torno de uma média que não é a referência. Para demandas abaixo desse valor, há grande *offset* e o estoque se mantém acima do nível desejado (quase 4 vezes maior para o caso apresentado).

Na figura 3.5, é mostrada uma simulação do sistema controlado para o mesmo conjunto de parâmetros com excessão da demanda, que agora assume valores aleatórios na forma $D(k) = poisson(3)$. Novamente a referência para o estoque é representada. É apresentada também a média temporal do

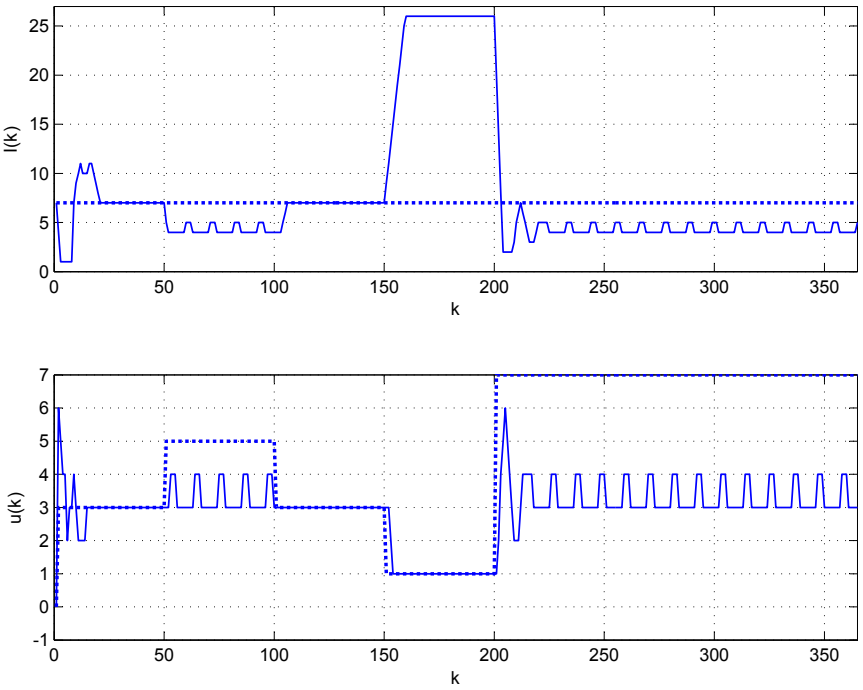

Figura 3.4: Resultados com controlador calculado pelo projeto polinomial de alocação de pólos e demanda em pulsos. Acima, em linha contínua, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha contínua, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda.

estoque.

Apesar das oscilações no estoque, pode ser visto que, após passar pelo período inicial de transitório a média não está muito distante do valor desejado. Essa pode ser considerada uma boa resposta para um sistema sob esse tipo de distúrbio. No entanto, é necesário ser lembrado que os parâmetros foram ajustados para responder bem ao valor dessa média de demanda. Sendo assim, torna-se interessante ver os gráficos na figura 3.6.

O mesmo problema visto para o caso constante é verificado para o caso de demanda aleatória. Quando a média de demanda é menor que o valor para o qual o sistema foi ajustado, a média de estoque fica consideravelmente acima da referência (mais de duas vezes maior) e quando ela é superior a esse valor, a média do estoque fica abaixo da referência. Com isso, pode ser concluído que o controlador é relativamente robusto para oscilações em torno de uma média conhecida, mas não o é para mudanças desconhecidas dessa média.

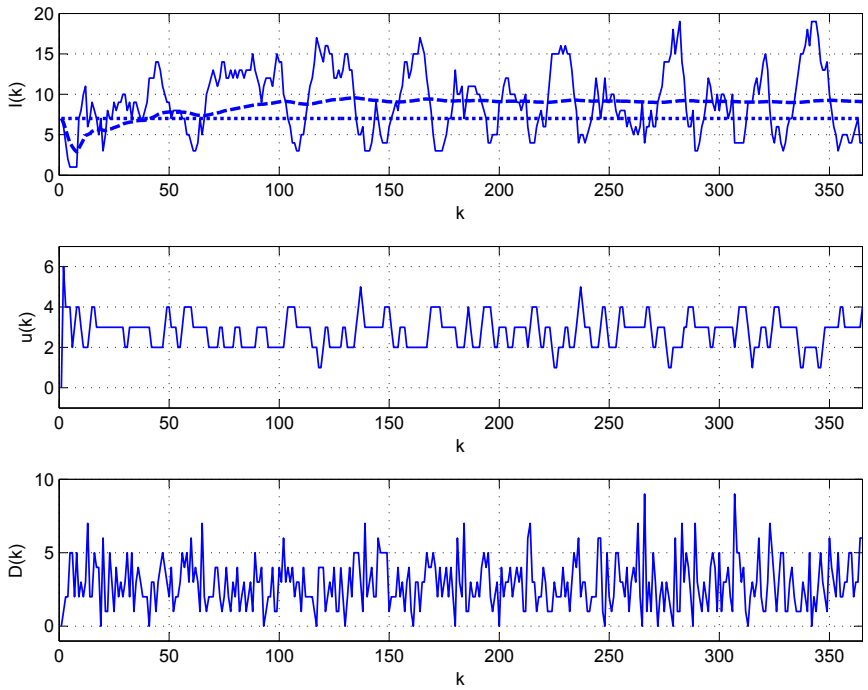

Figura 3.5: Resultados com controlador calculado pelo projeto polinomial de alocação de pólos e uma demanda seguindo distribuição de Poisson com média 3. Acima, em linha contínua, quantidade de itens em estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque. Abaixo pedidos feitos no sistema e por último a demanda à qual o sistema foi submetido.

Observa-se, portanto, que, o projeto polinomial baseado em uma planta linear com referência e demanda constantes, alcança funções de transferência independentes e estáveis tanto entre referência r e saída y como entre distúrbio d e saída y. Assim, o controlador polinomial pode ser visto como minimizador da soma dos erros $(r - y)$ e $(d - u)$. Quando a demanda é aleatória seguindo distribuição de Poisson e a planta é não-linear as simulações (figuras 3.5 e 3.6) mostram que o controlador polinomial procura manter este comportamento minimizador. Dessa forma, no contexto do problema (1.1), ao adotar o projeto polinomial, se considera apenas uma função objetivo f_2 que pode ser considerada como a soma dos erros de rastreamento e demanda. No capítulo 6, é investigado o efeito de variar parâmetros que não influenciam diretamente em f_2 (no caso, a relação entre referência e demanda esperada) com objetivo de maximizar f_1.

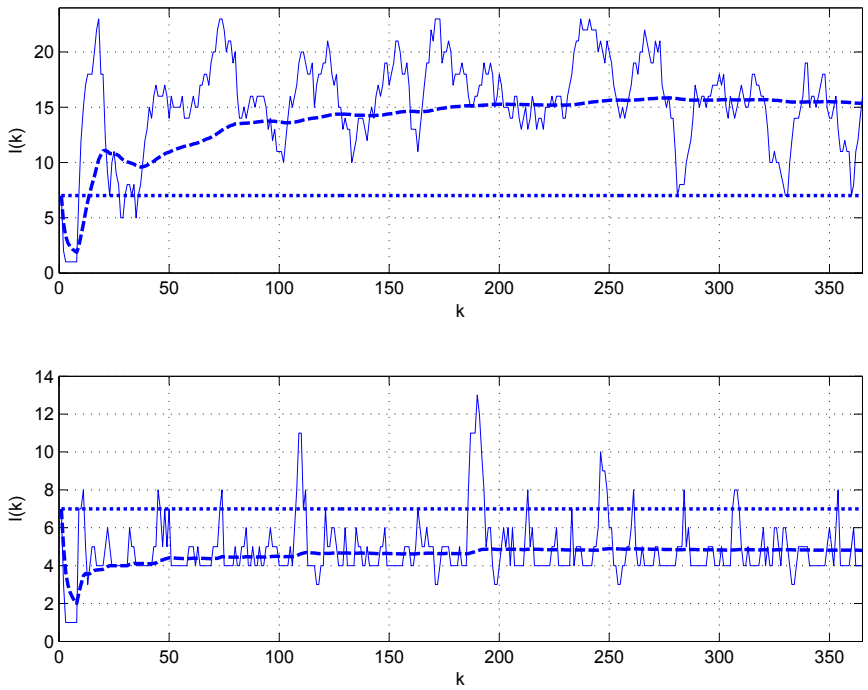

Figura 3.6: Resultados com controlador calculado pelo projeto polinomial de alocação de pólos e demandas seguindo distribuição de Poisson. Acima, simulação com média 2, abaixo, simulação com média 5. Nos dois gráficos, em linha contínua está o estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque.

Capítulo 4

Realimentação de Estados

Invocando os mesmos argumentos utilizados no capítulo 3, neste capítulo é utilizada a realimentação de estados, uma técnica padrão de projeto de controlador linear se baseando no modelo linear (2.3). Em seguida, para avaliar o seu desempenho, seja em relação a função objetivo f_1 ou f_2, utiliza-se, nas simulações, o controlador projetado com a planta completa, isto é, descrita pelas equações (2.1), (2.2). Através dessa técnica também é possível definir arbitrariamente a posição dos pólos do sistema controlado. Essa escolha de pólos deve, como de costume, ser acompanhada de uma análise das entradas de controle geradas, que possuem limites inferiores e superiores.

Essa abordagem abre um leque de possibilidades de técnicas de síntese de controladores. Devido à natureza relativamente simples da planta estudada, elas não são estudadas a fundo e somente princípios básicos são apresentados. Apresentações mais completas podem ser encontradas em diversos livros dedicados ao estudo de controle de sistemas, como por exemplo [11].

4.1 Representação em espaço de estados

O modelo de estados de um sistema pode ser derivado de um conjunto de equações que definem seu comportamento. No caso contínuo, são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que permitem essa representação. No caso discreto, são necessárias equações a diferenças que não contenham atrasos maiores que 1. A ordem de um sistema pode ser definida como a soma dos atrasos em suas equações a diferenças. Com isso, pode-se representar o espaço de estados de um SDLIT de grau n que possua m entradas, representadas pelo vetor $\mathbf{u}$, na forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}.\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}.\mathbf{u}(k) \tag{4.1}$$

Onde o vetor coluna $\mathbf{x}$ é chamado de vetor de estados e contém n elementos, $\mathbf{\Phi}$ é uma matriz $n \times n$ e $\mathbf{\Gamma}$ é uma matriz $n \times m$. Essa equação é conhecida como equação de estados.

Suas p saídas são:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}.\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}.\mathbf{u}(k) \tag{4.2}$$

Onde $\mathbf{C}$ é uma matriz $p \times n$ e $\mathbf{D}$ é uma matriz $p \times m$ chamada usualmente de termo de transmissão direta.

Novamente, para estabilidade assintótica basta $\forall \lambda_i, |\lambda_i| < 1$, onde $i = 1, \ldots, n$, sendo λ_i os pólos do sistema. Eles são encontrados aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ a (4.1):

$$z.\mathbf{X}(z) = \mathbf{\Phi}.\mathbf{X}(z) + \mathbf{\Gamma}.\mathbf{U}(z) \tag{4.3}$$

$$\mathbf{X}(z) = (z.\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}.\mathbf{\Gamma}.\mathbf{U}(z) \tag{4.4}$$

E depois substituindo-a na transformada $\mathcal{Z}$ da (4.2), chegando a uma ou diversas funções de transferência (dependendo do número de entradas e saídas) do tipo:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}.(z.\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}.\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D} \tag{4.5}$$

Conclui-se então que os pólos do sistema em malha aberta são os autovalores de $\mathbf{\Phi}$.

4.2 Teoria de realimentação de estados

A partir do modelo da equação (4.1), é possível usar a chamada realimentação de estados, que nada mais é do que um controle *feedback* usando todos os estados do sistema, para estabilizá-lo. Para isso, escolhem-se entradas $\mathbf{u}$ na forma:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}.\mathbf{x}(k) \tag{4.6}$$

Onde $\mathbf{K}$ é uma matriz $m \times n$.

Fazendo a substituição na equação de estados, obtém-se:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}.\mathbf{K}).\mathbf{x}(k) \tag{4.7}$$

Com isso, faz-se necessário determinar $\mathbf{K}$ para que o sistema em malha fechada tenha os pólos desejados, i.e., para que os autovalores da matriz $(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}.\mathbf{K})$ sejam iguais a esses pólos. Para o caso de uma única entrada, como acontece no sistema estudado, isso gera um polinômio de ordem n em z contendo os ganhos $K_1, K_2, \ldots, K_n$ do vetor $\mathbf{K}$.

Esse não é um problema trivial, mas, através do teorema de Cayley–Hamilton e alguma manipulação matemática, é possível chegar à fórmula de Ackermann:

$$\mathbf{K} = \mathbf{e_n}.\mathcal{C}_\mathbf{o}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma})^{-\mathbf{1}}.\mathbf{P_d}(\mathbf{\Phi}) \tag{4.8}$$

Sendo $\mathbf{e_n}$ um vetor de dimensão n com 1 no último elemento e todos os outros iguais a zero, $\mathcal{C}_\mathbf{o}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma})$ a matriz de controlabilidade do sistema e P_d o polinômio característico desejado.

Após estabilizar o sistema, é necessário também introduzir a referência a ser seguida. A forma mais simples e direta de possibilitar o rastreamento é fazer:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}.\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k) \tag{4.9}$$

No entanto, isso leva muito frequentemente a *offset* para entradas do tipo degrau. Para evitá-lo, é possível introduzir um ganho *feedforward* que deve ser ajustado dependendo de r:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}.\mathbf{x}(k) + G_{ff}.\mathbf{r}(k) \tag{4.10}$$

4.3 Aplicação à cadeia de suprimentos modelada

O primeiro passo para controlar o sistema (2.1) através desse método, é representá-lo no espaço de estados. Para isso, é possível definir o vetor de estados como:

$$\mathbf{x}(k) = [I(k) \;\; R_0(k) \;\; R_1(k) \ldots R_{\tau-1}(k)]^T \tag{4.11}$$

sendo $R_i(k) = u(k - \tau + i)$, de forma que $R_{\tau-1}(k+1) = u(k)$. Dessa forma a determinação de todos os estados no instante $k+1$ depende apenas de seus valores no instante k. O sistema tem grau $n = \tau + 1$, número de entradas $m = 1$ e número de saídas $p = \tau + 1$. O valor de p decorre do fato de serem conhecidos todos estados do sistema, visto que o primeiro é o estoque em si e os outros τ estados são os pedidos feitos.

Com isso, a matriz $\mathbf{\Phi}$ de (4.1) se torna:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

E a matriz $\mathbf{\Gamma}$ se torna um vetor com valores:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

As matrizes de (4.2) são $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade, e $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. O cálculo da matriz de controlabilidade permite verificar que esse sistema é controlável, como já era esperado.

4.4 Simulações

Usando ganhos calculados pela fórmula de Ackermann (4.8) e como lei de controle (4.10), é possível testar como o sistema se comporta sob um controlador determinado pelo método de realimentação de estados.

A apresetação dos resultados segue a mesma lógica do capítulo 3. Primeiramente, os valores λ_i, sendo $i = 1 \ldots \tau + 1$, são definidos empiricamente para obtenção de boa resposta sob um certo valor de demanda constante. Parâmetros podem ser encontrados na tabela 4.1. Vale notar que, diferentemente do caso de alocação de pólos por projeto polinomial, os pólos escolhidos para calcular os ganhos nesse método não devem ter multiplicidade maior que o rank do vetor Γ para poder ser utilizada a função `place` do MATLAB.

Tabela 4.1: Tabela de parâmetros do sistema no caso de controlador calculado por realimentação de estados.

Parâmetro	**Valor**
Tempo total	365
$D(k)$	3
τ	7
Referência	7
$I(0)$	7
λ_i	$0.233 - 0,01.i$
G_{ff}	1

Na figura 4.1 pode ser vista a resposta do sistema sob a demanda para a qual seus pólos foram ajustados. O valor do estoque fica estável e não há *offset*. Em estado estacionário, $u(k)$ assume valor igual à demanda.

Em seguida, uma demanda que varia em pulsos é aplicada ao sistema. Na figura 4.2 é possível ver o seu comportamento para o caso descrito na tabela 4.2, igual à tabela 3.2 e repetida aqui por conveniência. Valor de

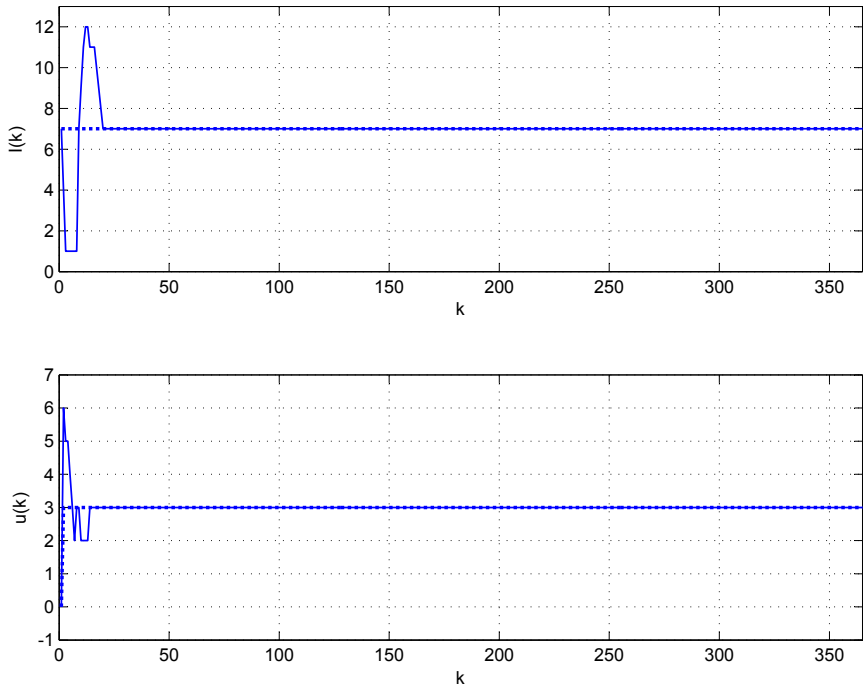

Figura 4.1: Resultados com controlador calculado por realimentação de estados sob demanda constante. Acima, a linha contínua mostra a quantidade de itens em estoque e a pontilhada a referência. Abaixo, pedidos feitos pelo sistema em linha contínua e demanda em pontilhado.

referência do estoque e demanda também são mostrados. Como previsto, o rastreamento não é perfeito para valores fora daquele para o qual o sistema foi ajustado. Demanda maior do que esse valor gera oscilações em torno de uma média abaixo da referência e demanda menor leva a valor estável, mas com grande *offset* (valor em torno de 4 vezes o da referência).

Tabela 4.2: Valores de demanda

Tempo	0	50	100	150	200
Demanda	3	5	3	1	7

Os resultados para demanda com valores aleatórios obedecendo uma distribuição de Poisson com média igual ao valor inicial utilizado (numericamente, 3) são vistos na figura 4.3. Como no caso anterior, a média, após período inicial de transitório, apresenta um valor satisfatório em relação à

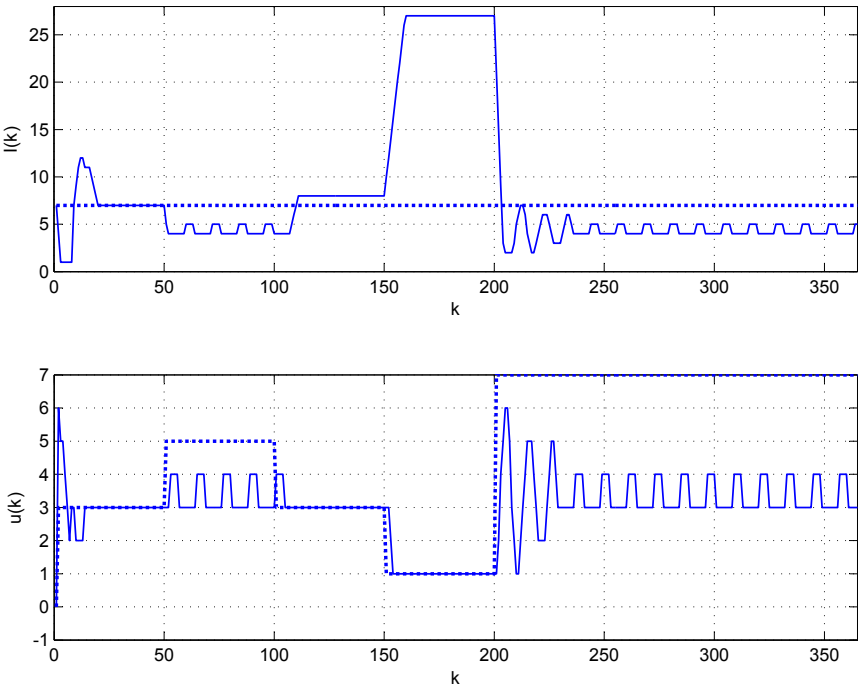

Figura 4.2: Resultados com controlador calculado por realimentação de estados e sob demanda em pulsos. Acima, em linha contínua, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha contínua, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda.

referência dada.

Finalmente, na figura 4.4 pode ser visto o comportamento do sistema sob demandas aleatórias com distribuição de Poisson com médias acima ou abaixo do valor de demanda inicialmente utilizado. No primeiro caso, a média do estoque fica sensivelmente acima da referência. No segundo, ela fica abaixo.

Dessa forma, é possível concluir que o projeto por realimentação de estados baseado em uma planta linear (2.3) com referência e demandas constantes e previamente conhecidas permite a estabilização do sistema não-linear (2.1), (2.2). Além disso, com um ganho *feedforward* G_{ff} dependente do valor da demanda, o sistema chega a valor em estado estacioário igual ao da referência. Em caso de demanda aleatória seguindo distribuição de Poisson com a mesma planta não-linear, o controlador leva o sistema a apresentar comportamento médio semelhante, isto é, média de estoque não muito distante da referência dada. Fica claro que, no contexto explicitado em (1.1), esse projeto levou em

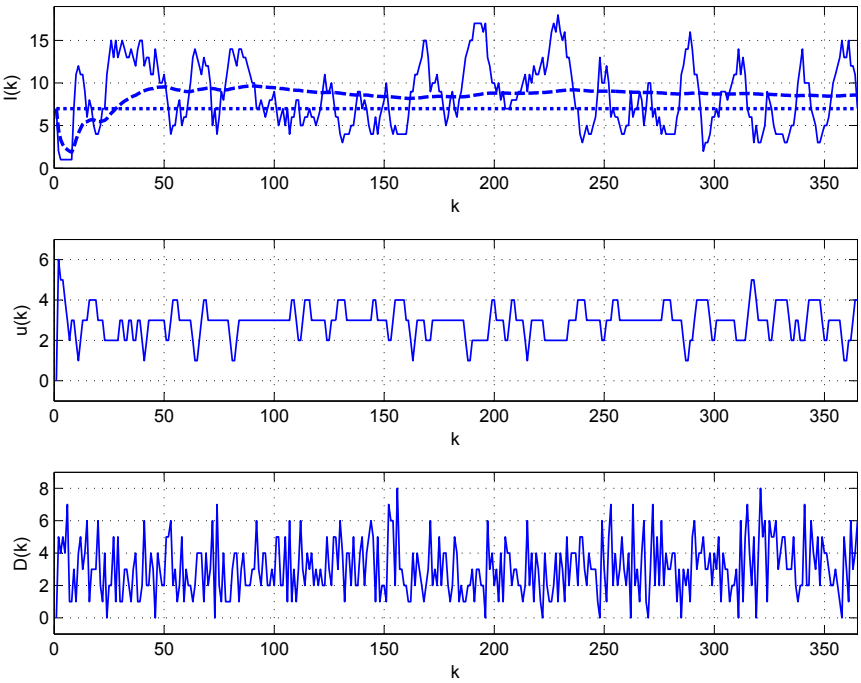

Figura 4.3: Resultados com controlador calculado por realimentação de estados e sob uma demanda seguindo distribuição de Poisson com média 3. Acima, em linha contínua, quantidade de itens em estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque. Abaixo pedidos feitos no sistema e por último a demanda à qual o sistema foi submetido.

conta somente f_2, representada pelo erro entre saída do sistema (estoque) e a referência dada. Assim como com o controlador desenvolvido no capítulo 3, no capítulo 6, é investigado o efeito de variar parâmetros que não influenciam diretamente em f_2 (no caso, a relação entre referência e demanda esperada) com objetivo de maximizar f_1.

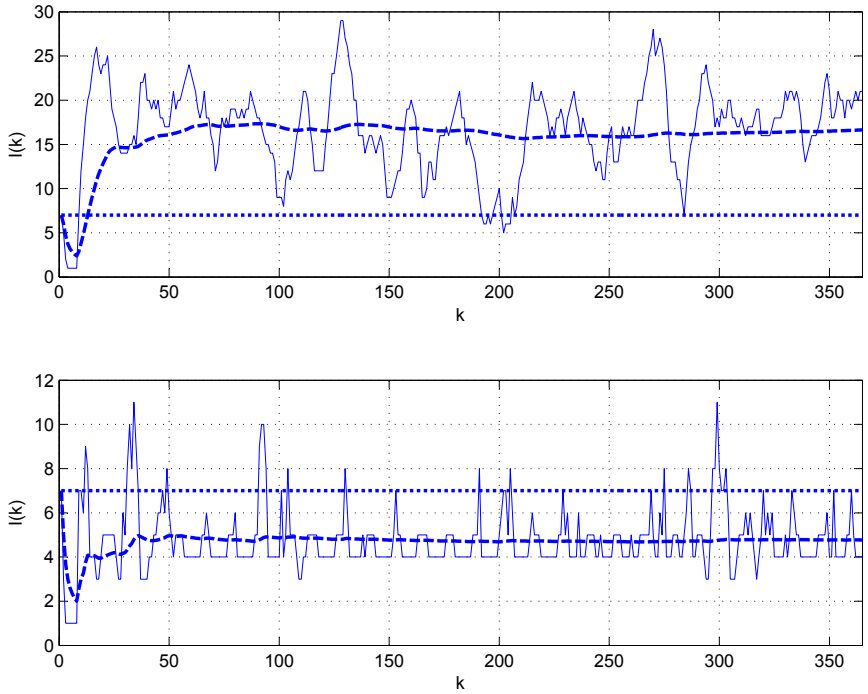

Figura 4.4: Resultados com controlador calculado por realimentação de estados e sob demandas seguindo distribuição de Poisson. Acima, simulação com média 2, abaixo, simulação com média 5. Nos dois gráficos, em linha contínua está o estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque.

Capítulo 5

Model Predictive Control

Ambas as técnicas de síntese de controladores apresentadas anteriormente são capazes de estabilizar o sistema. No entanto, nenhuma das duas permite, com uma única configuração, rejeitar distúrbios em pulsos de iuamplitude arbitrária. Como foi visto que, nos casos estudados, essa capacidade permite manter a média do estoque em torno da referência mesmo sob a demanda aleatória simulada, é interessante ter um método mais robusto. Para isso se torna necessária a utilização de técnicas mais avançadas de controle.

Esse capítulo estuda a aplicação de uma técnica de controle ótimo, o *Model Predictive Controler* (MPC), ao sistema analisado.

5.1 Formulação do problema de Controle Ótimo

A teoria de controle ótimo abrange sistemas dinâmicos, que podem ser descritos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k) \\ \mathbf{x}(k_0) &= \mathbf{x_0} \end{aligned} \tag{5.1}$$

A abordagem consiste em encontrar leis de controle que otimizem uma função de custo do tipo:

$$J(\mathbf{u}) = g[\mathbf{x}(k_0), k_0, \mathbf{x}(k_f), k_f] + \sum_{k_0}^{k_f} \mathcal{L}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \tag{5.2}$$

Sendo $\mathbf{g}(\cdot)$ chamado custo no ponto final e $\mathcal{L}(\cdot)$ o lagrangiano.

Uma simplificação do caso geral, usada frequentemente para SDLITs, é o *Linear Quadratic Regulator* (LQR). O instante inicial é assumido como zero

e a função é otimizada para um horizonte infinito de tempo, i.e., $k_f \to \infty$ no qual $\mathbf{g}(\cdot) \to 0$. Isso leva a função de custo de (5.2) a:

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{0}^{\infty} [\mathbf{x}(k)^T.\mathbf{Q}.\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)^T.\mathbf{R}.\mathbf{u}(k)] \tag{5.3}$$

A lei de controle que minimiza J leva o estado $\mathbf{x}$ a zero ao mesmo tempo em que evita valores elevados de $\mathbf{u}$. O compromisso entre essas grandezas (estados e entradas de controle) é definido pelas matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$, que devem ser constantes e semipositiva definida e positiva definida, respectivamente. Para que haja solução é necessário também que o sistema seja controlável.

A solução de (5.3) é dada por:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}.\mathbf{u}(k) \tag{5.4}$$

Ou seja, o LQR pode ser visto como um método de síntese por realimentação de estados em que o polinômio característico não precisa ser escolhido. Os ganhos $\mathbf{K}$ são, nesse caso e usando a mesma notação de (4.1), determinados por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R^{-1}}.\mathbf{\Gamma^T}.\mathbf{S} \tag{5.5}$$

E $\mathbf{S}$ é a solução positiva definida da equação algébrica de Riccati:

$$\mathbf{0} = -\mathbf{S}.\mathbf{A} - \mathbf{A^T}.\mathbf{S} + \mathbf{S}.\mathbf{B}.\mathbf{R^{-1}}.\mathbf{B^T}.\mathbf{S} - \mathbf{Q} \tag{5.6}$$

Usando uma ferramenta como MATLAB a lei de controle é facilmente calculada.

Como pode ser visto na figura 5.1, apesar do LQR ser muito eficiente para estabilização de sistemas, ele também não permite que o sistema estudado siga pulsos de amplitude arbitrária. A demanda varia ao longo do tempo segundo a tabela 4.2. Na tabela 5.1 podem ser encontrados os parâmetros da simulação.

5.2 Teoria MPC

Nesse cenário, fica evidente que uma lei de controle mais flexível é interessante. Dentro desse contexto, isso pode ser oferecido pelo *Model Predictive Control*. Essa técnica tem como principais características [6]:

1. Uso explícito do modelo para prever saídas futuras;

2. Cálculo de uma trajetória de controle que minimize uma função de custo;

Tabela 5.1: Tabela de parâmetros do sistema no caso de controlador LQR.

Parâmetro	**Valor**
Tempo total	365
τ	7
setpoint	7
$I(0)$	7
$\mathbf{Q_{11}}$	1
$\mathbf{Q_{ij}}, i \vee j \neq 1$	0
$\mathbf{R}$	1

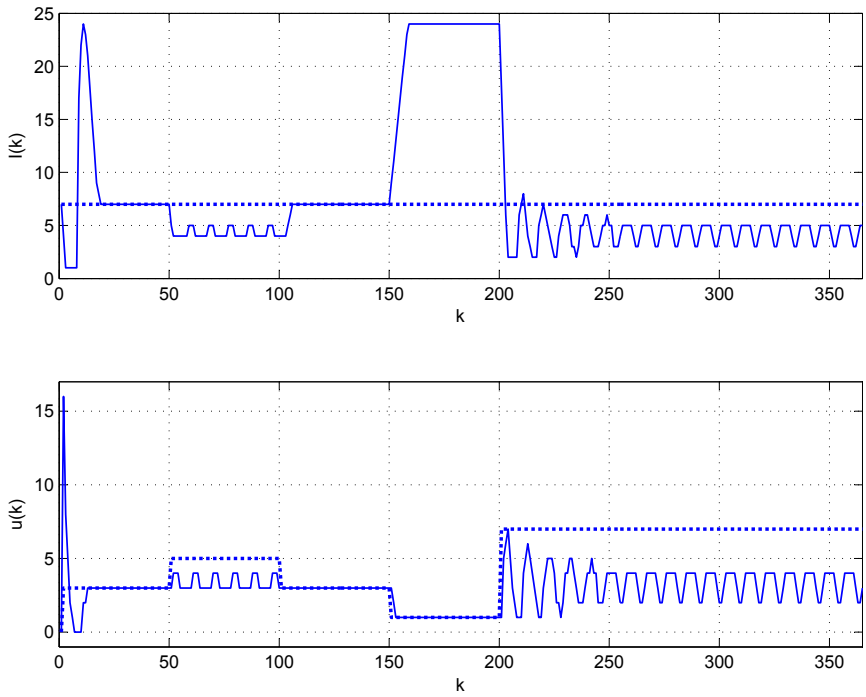

Figura 5.1: Resultados com controlador LQR e sob demanda em pulsos. Acima, em linha cheia, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha cheia, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda.

3. Uso de um horizonte finito de tempo, que é deslocado a cada instante de tempo, dentro do qual se calcula essa trajetória ótima;

4. Aplicação somente do primeiro ponto da trajetória ótima de controle a

cada instante e repetição dos passos de 2 a 4.

Matematicamente, isso pode ser visto como:

$$\min_{\mathbf{\Delta u}(k|k)\ldots\mathbf{\Delta u}(k+M-1|k)} J \tag{5.7}$$

Sendo $\Delta u(k)\ldots\Delta u(k+M-1)$ a sequência de entradas calculada para o intervalo M a ser escolhido, chamado de horizonte de controle. Para SDLITs a função de custo normalmente usada é semelhante à do LQR. Sendo assim:

$$J = \sum_{l=1}^{P} \mathbf{Q_e}(l)(\hat{\mathbf{y}}(k+l|k) - \mathbf{r}(k+l))^2 + \sum_{l=1}^{M} \mathbf{Q_{\Delta u}}(l)(\mathbf{\Delta u}(k+l-1|k))^2 \tag{5.8}$$

Sendo P o horizonte de previsão. A principal diferença em relação ao LQR, além do horizonte finito, é o primeiro termo de J, que, em vez de minimizar o valor dos estados, minimiza diretamente o valor do erro. Decorrente do horizonte finito, há também a possibilidade de usar $\mathbf{Q_e}$ e $\mathbf{Q_{\Delta u}}$ (equivalentes a $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$) não constantes. Como no LQR, essas matrizes definem o compromisso entre a qualidade do rastramento e grandes variações nas entradas de controle.

O problema de otimização (5.7) não tem solução tão simples como nos casos de projeto polinomial, realimentação de estados ou LQR. O horizonte finito de previsão, ao mesmo tempo que representa uma das grandes vantagens dessa técnica, dificulta demonstrações de estabilidade e robustez [13].

5.3 Ferramenta computacional

Os resultados apresentados nessa seção são obtidos graças a funções específicas de MPC existentes em MATLAB. Há duas formas de simular sistemas com esse tipo de controlador no *software*. Ambas exigem como um dos parâmetros um objeto do tipo `MPCobj`. Esse, por sua vez, é facilmente definido com a função `mpc`, que recebe como parâmetros uma variável do tipo `sys`, obtida através das matrizes ou das funções de transferência de um sistema, o tempo de amostragem e os horizontes de previsão e de controle. O objeto criado pode ter então seus diversos parâmetros ajustados, como valores mínimos e máximos dos estados e da entrada de controle. Ainda mais importante é a definição de quais das suas entradas são entradas de controle e quais são distúrbios medidos ou não.

A função `sim` recebe, além do `MPCobj`, o número de instantes a simular, um vetor de referências de dimensão igual à do vetor de saída e um objeto `SimOptions`, no qual são definidos valores como estado inicial e o vetor de

distúrbios não medidos. Esse último é, no caso do projeto, a demanda. A função retorna valores das saídas, entradas e estados. Se ela for chamada sem variáveis para receber esses vetores, gráficos de todos são automaticamente feitos. Fica claro que esse método é muito cômodo e simples. No entanto, essa facilidade tem como custo menor controle em alguns aspectos da simulação. Primeiro, é impossível dizer que $u(k) \in \mathbb{Z}$. Segundo, e limitante para o projeto, é o não respeito à não-linearidade do sistema. Mesmo definindo-se $I_{min} = 1$, como não há forma de explicitar a equação (2.2), os valores de $I(k)$ tornam-se negativos, modificando a dinâmica modelada.

Por isso, é necessário usar a outra função disponível, a `mpcmove`. Essa retorna somente a entrada de controle calculada a partir do `MBCobj`, de um objeto do tipo `mpcstate`, que descreve não só $x(k)$, mas também $u(k-1)$ e os distúrbios não medidos. Além disso são parâmetros também as saídas medidas, as referências (de mesma dimensão que as saídas) e um vetor de distúrbios medidos. Essa função é, portanto, chamada dentro de um loop e antes de utilizá-la os valores corretos dos estados, do controle passado e do distúrbio são inserido no objeto `mpcstate`. A não-linearidade é respeitada pois fica a cargo do programador a atualização de todas as variáveis com exceção da entrada de controle.

5.4 Simulações

Os perfis de demanda utilizados nos capítulos anteriores são repetidos para o sistema com esse novo controlador. A tabela 5.2 mostra os parâmetros escolhidos para as simulações. São escolhidos pesos $\mathbf{Q_e}$ e $\mathbf{Q_{\Delta u}}$ constantes. Valores dos horizontes de controle (M) e previsão (P) foram escolhidos empiricamente através de sucessivas simulações.

Na figura 5.2, encontra-se o caso com demanda constante em toda a simulação. Há rastreamento perfeito. No entanto, esse controlador já apresenta uma desvantagem em relação aos descritos anteriormente: um grande pico no período transitório. O estoque chega a um valor mais que três vezes o da referência, enquanto nos outros casos esse valor não era nem duas vezes maior.

O caso em que a demanda varia em pulsos, como descrito na tabela 5.3, é apresentado na figura 5.3. Fica claro que essa abordagem é capaz de seguir perfeitamente pulsos de qualquer amplitude abaixo da referência. Para valores de demanda acima da referência, há oscilações que aumentam em amplitude e em torno de uma média mais elevada conforme aumenta a demanda. Esse fenômeno, no entanto, não deve ser interpretado como uma grande falha do controlador. Uma referência de estoque de valor inferior ao da demanda

Tabela 5.2: Tabela de parâmetros do sistema no caso de controlador tipo MPC.

Parâmetro	**Valor**
Tempo total	365
$D(k)$	3
τ	7
setpoint	7
$I(0)$	7
$\mathbf{Q_{e_{11}}}$	1
$\mathbf{Q_{e_{ij}}}, \forall i, j \neq 1$	0
$\mathbf{Q_{\Delta u}}$	**0**
P	30
M	2

de um dia pode ser visto como uma má escolha de referência. Grandes picos (valores em torno de três a cinco vezes a referência) são constatados quando há mudança de demanda. Quando essa aumenta, há ainda um vale antes dos picos, o que demonstra o comportamento típico de um sistema de fase não-mínima (ocasionado pelo atraso).

Tabela 5.3: Valores de demanda

Tempo	0	50	100	150	200	250
Demanda	3	5	3	1	7	10

Os gráficos da figura 5.4 mostram estoque, pedidos e demanda na simulação em que essa última assume valores segundo uma distribuição de Poisson com média igual ao valor da demanda inicialmente aplicada ao sistema (numericamente, 3). A média do estoque fica visivelmente acima do valor da referência, em torno de três vezes seu valor, e há grandes oscilações, variando entre períodos de falta de estoque e períodos com estoque cinco vezes acima do desejado. Pode ser concluído assim que, ao contrário do que foi observado nos casos anteriores, para o MPC, capacidade de rejeitar pulsos de uma certa amplitude não está atrelada a uma boa resposta em caso de demanda com distribuição de Poisson com média de valor igual ao do degrau.

Continuando a sequência de testes feita para os controladores anteriores, as respostas quando o sistema é submetido a demandas que seguem distribuições de Poisson com médias abaixo e acima da inicialmente utilizada podem ser vistas na figura 5.5. Novamente, as médias de estoque se apresentam sensivelmente acima da referência. No entanto, o primeiro gráfico

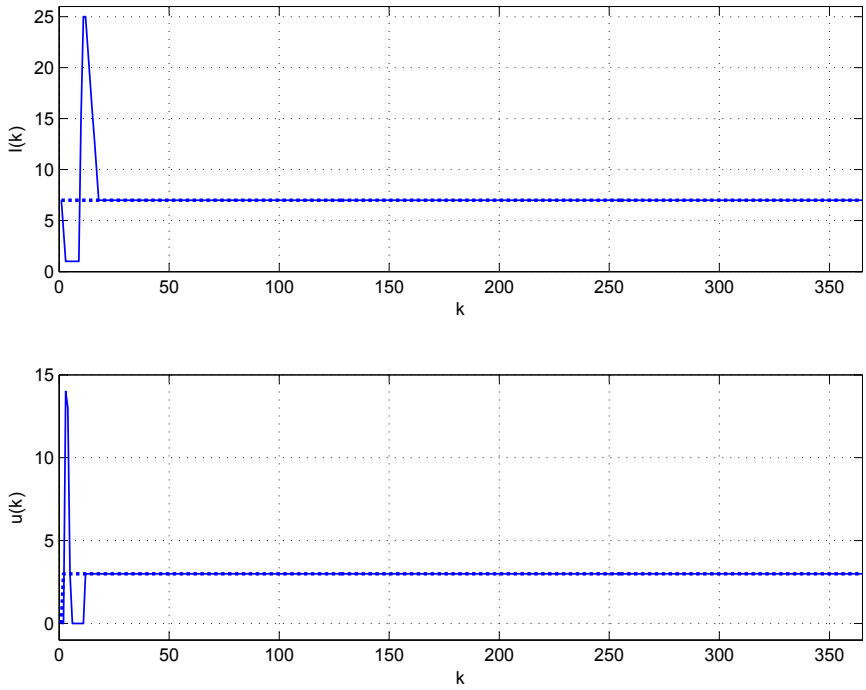

Figura 5.2: Resultados com controlador tipo MPC sob demanda constante. Acima, em linha cheia, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha cheia, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda.

em 5.4 e os dois em 5.5 dão a impressão de que o *offset* é aproximadamente constante para diferentes demandas.

Para melhor analisar esse possível ponto positivo do controlador tipo MPC, foram testadas demandas seguindo distribuição de Poisson com médias variando de 1 a 10. Para cada média de demanda, foram feitas 10 simulações. As médias das médias finais de estoque para cada um dos casos são mostradas na figura 5.6. Com esses resultados, se torna visível que, na realidade, o *offset* entre média de estoque e referência aumenta conforme a demanda aumenta.

Com isso, pode ser concluído que a aplicação direta da técnica MPC considerando a planta linear (2.3) gerou um controlador capaz de estabilizar a planta não-linear (2.1), (2.2) em torno de uma referência fixa sob demandas de diferentes amplitudes sem necessidade de reajuste de parâmetros, como é o caso dos controladores estudados nos capítulos 3 e 4. Sob a ótica do

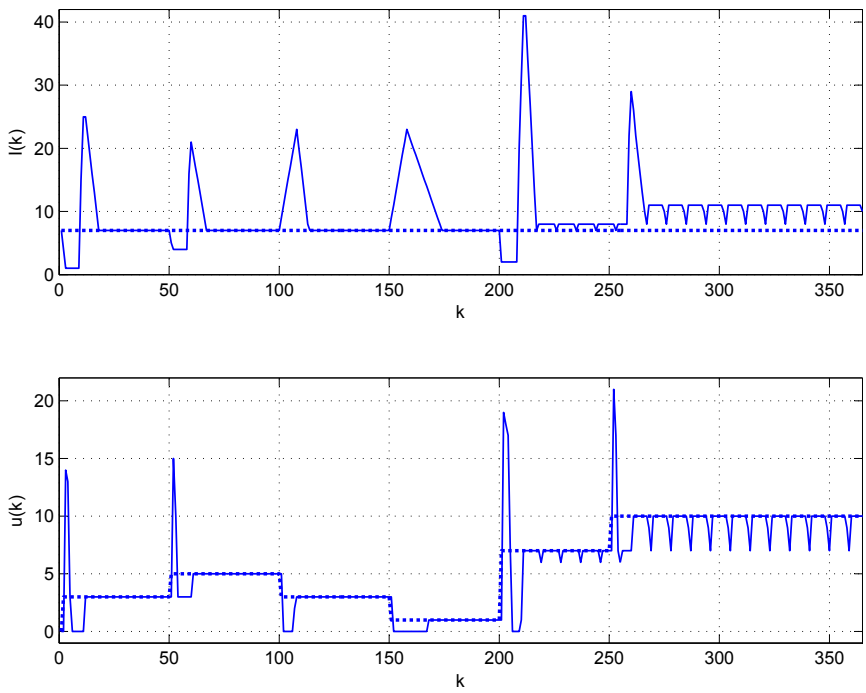

Figura 5.3: Resultados com controlador tipo MPC e sob demanda em pulsos. Acima, em linha cheia, quantidade de itens em estoque e em pontilhado a referência. Abaixo, em linha cheia, pedidos feitos pelo sistema e em pontilhado a demanda.

problema (1.1), o controlador proposto, mais uma vez, considera somente a função objetivo f_2, representada por (5.8). Como foi utilizado $\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta u}} = \mathbf{0}$, o termo referente ao *slew rate* desaparece e f_2 é reduzida a um integrador do erro de rastreamento. No entanto, o sistema não se mostrou robusto a distúrbios (demanda) aleatórios com distribuição de Poisson. Seguindo a mesma abordagem do que foi proposto anteriormente, no capítulo 6, é investigado o efeito de variar parâmetros que não influenciam diretamente em f_2 (no caso, a relação entre referência e demanda esperada) com objetivo de maximizar f_1.

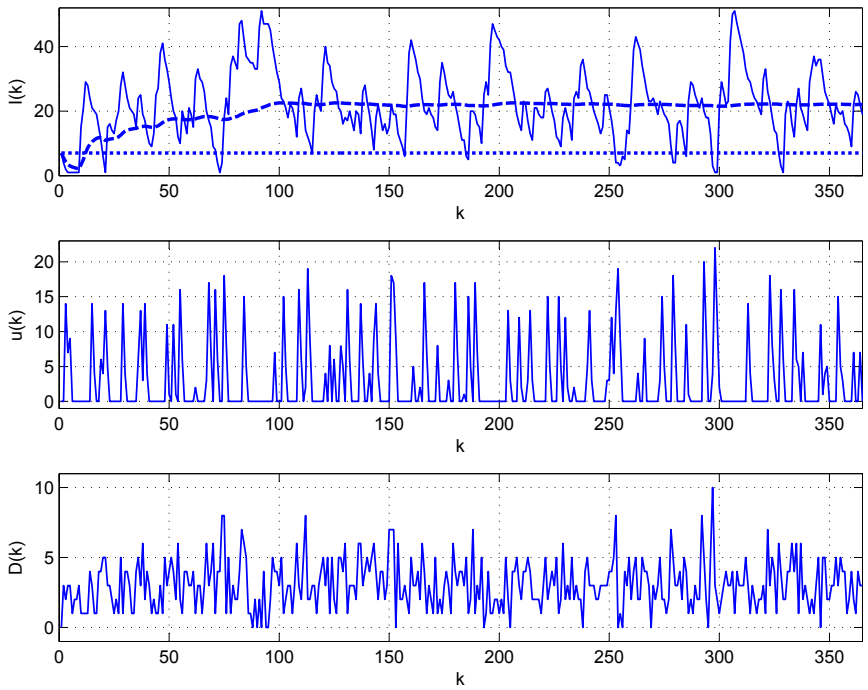

Figura 5.4: Resultados com controlador tipo MPC e sob uma demanda seguindo distribuição de Poisson com média 3. Acima, em linha cheia, quantidade de itens em estoque, em pontilhado a referência e tracejado a média temporal do estoque. Abaixo pedidos feitos no sistema e por último a demanda à qual o sistema foi submetido.

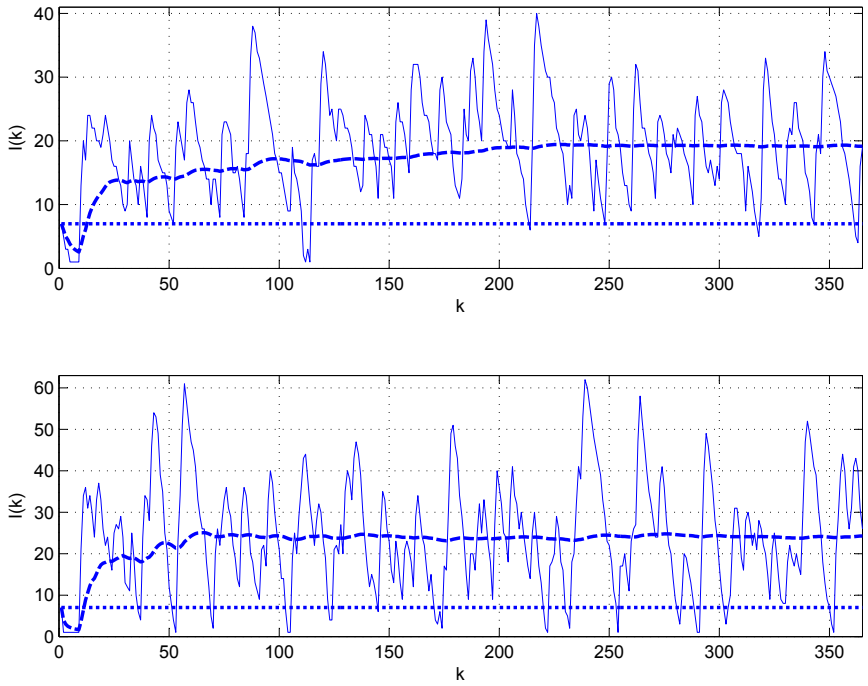

Figura 5.5: Resultados com controlador tipo MPC e sob demandas seguindo distribuição de Poisson. Acima, simulação com média 2, abaixo, simulação com média 5. Nos dois gráficos, em linha cheia está o estoque, em pontilhado a referência. O tracejado no primeiro gráfico é a média temporal do estoque.

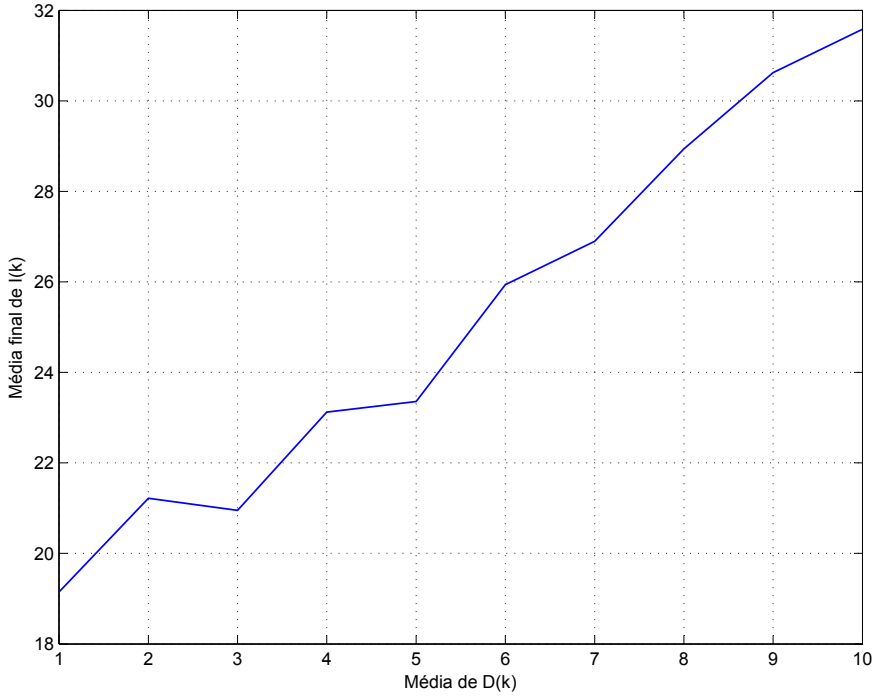

Figura 5.6: Média das médias finais de estoque por média da distribuição de Poisson que regia as demandas mostrando que o *offset* entre média de estoque e referência cresce conforme aumenta a demanda.

Capítulo 6

Comparação dos controladores sob a perspectiva do EVA

Neste capítulo, inicia-se uma comparação utilizando a função EVA (ou f_1 na equação (1.1)) dos controladores lineares que foram projetados utilizando as respectivas funções f_2 descritas nos capítulos 3, 4 e 5. Em outras palavras, inicia-se uma comparação do desempenho econômico (EVA) dos controladores lineares aplicados a planta não linear (2.1), (2.2). Com base nos resultados preliminares, investiga-se de maneira heurística, escolhas novas dos parâmetros (inicialmente projetados utilizando apenas f_2) visando melhorar o desempenho medido pela função EVA (f_1). Os parâmetros usados para todos os resultados apresentados a seguir foram retirados do anexo de [14] e podem ser vistos na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Tabela de parâmetros do EVA.

Parâmetro	**Valor**
SalesPrice	100
UnitHC	50
UnitCost	20
TaxRate	0,5/365
UnitStoreCost	2
ExpectedReturn	0,15/365
TurnAwayCost	1000

Na figura 6.1 podem ser vistas as médias do EVA a cada instante k após dez simulações para os três controladores com suas configurações como mencionadas nos capítulos anteriores. Os valores finais estão na tabela 6.2. O fato desses serem negativos aliado à falta de uma tendência de crescimento

para os controladores clássicos tornam evidente que, com essas configurações, esses dois são desaconselháveis. O MPC foi o melhor dentre os três não só por atingir um valor final superior aos demais, mas também por apresentar tendência de crescimento, indicando que, com mais tempo, o EVA se tornaria positivo.

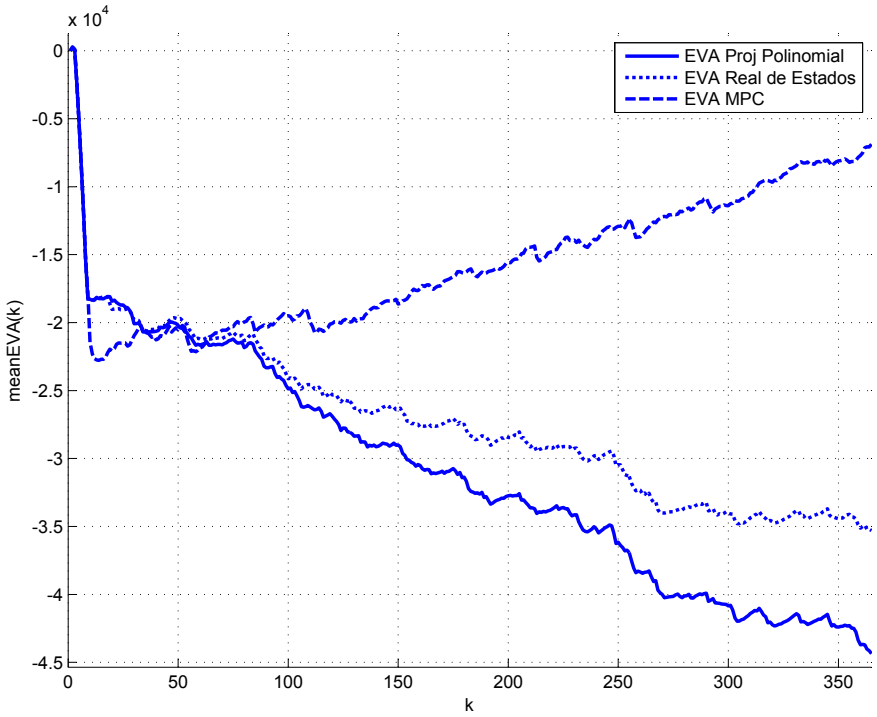

Figura 6.1: Média de dez simulações do EVA a cada instante. Em linha contínua os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, pontilhado para o controlador calculado por realimentação de estado e tracejado para o MPC.

Tabela 6.2: Tabela de EVAs médios finais sem alterção dos parâmetros usados anteriormente

Controlador	**EVA médio final**
Projeto polinomial	-44350
Realimentação de estados	-35301
MPC	-6871

Analisando uma única simulação, como na figura 6.2, é possível perceber

que, além da grande queda inicial já visível em 6.1, há outros momentos de decréscimos acentuados. Mais do que isso, é interessante ressaltar que, entre essas quedas, o EVA é crescente para os três controladores. A figura 6.3 deixa em evidência o *OoSCost*, i.e., o custo de não atender a demanda, de cada um deles. É fácil perceber que esse fator é o principal responsável pelos valores negativos encontrados. Isso explica porque o MPC obteve os melhores resultados: como esse controlador leva a uma média de estoque superior às dos outros dois, há também menos casos de falta de produto.

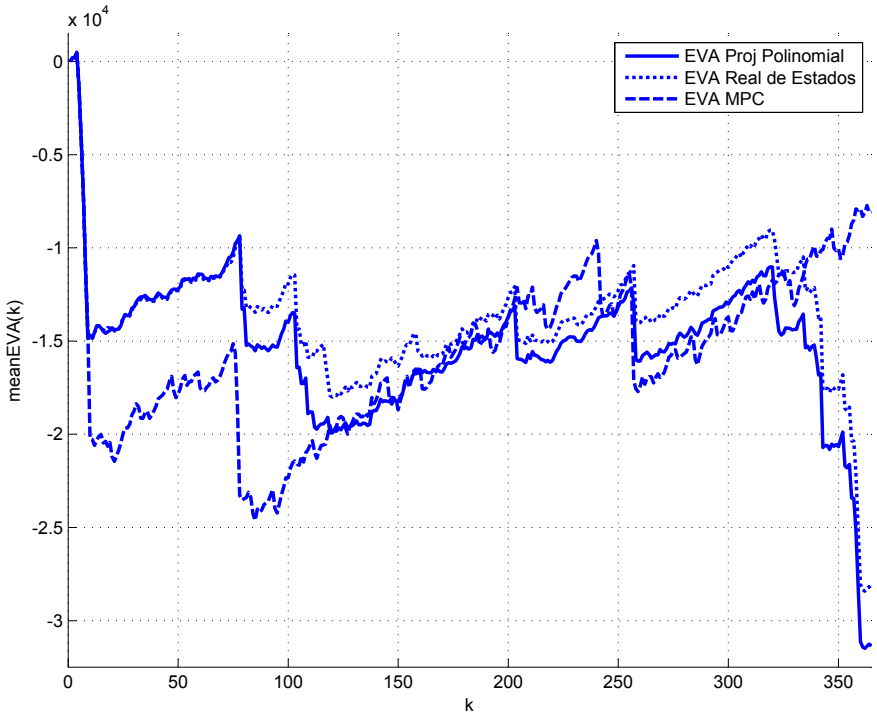

Figura 6.2: Valores do EVA a cada instante em uma única simulação. Em linha contínua os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, pontilhado para o controlador calculado por realimentação de estado e tracejado para o MPC.

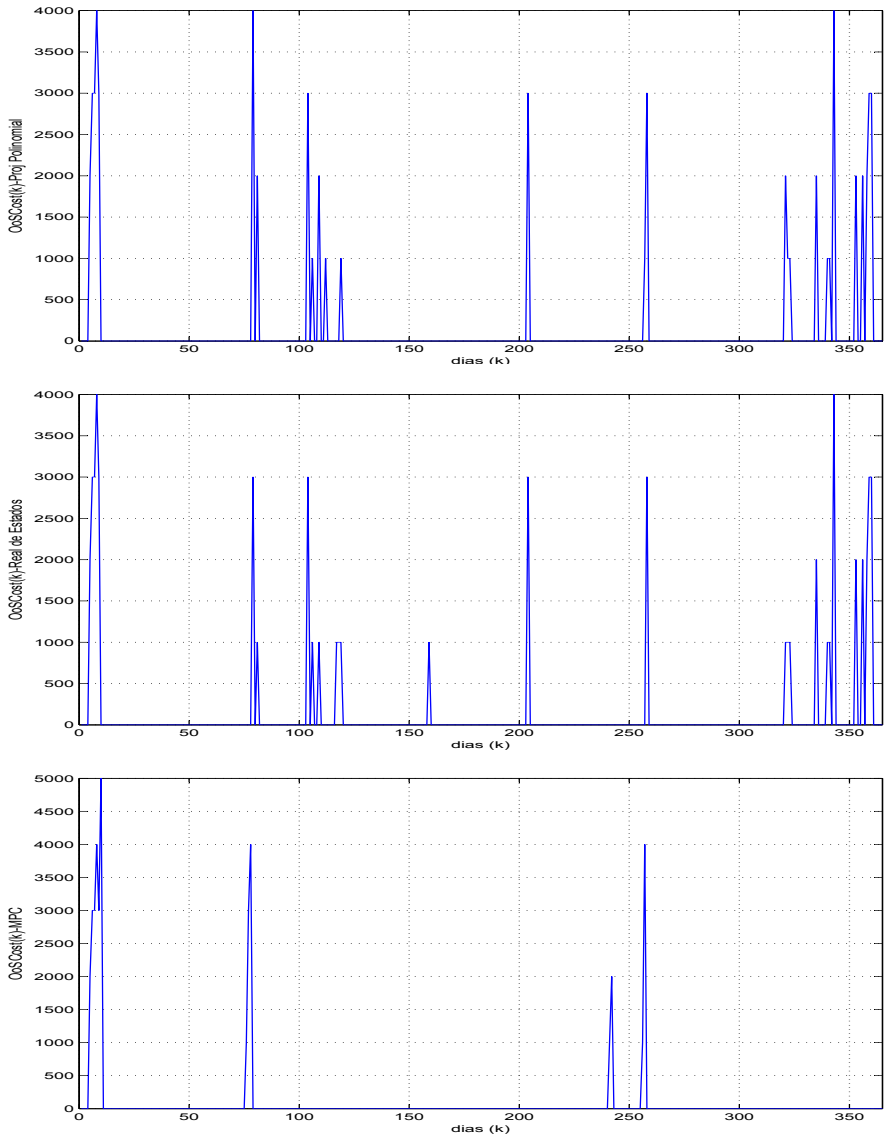

Figura 6.3: *Out of stock cost* obtido para a simulação da figura 6.2. Acima os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, no meio para o controlador calculado por realimentação de estado e abaixo para o MPC.

6.1 Investigação heurística de mudanças nos controladores visando melhoria no EVA

Com base nesses resultados preliminares, investiga-se de maneira heurística escolhas novas dos parâmetros (inicialmente projetados utilizando somente

f_2) visando melhorar o desempenho medido pela função EVA (f_2). Dois outros casos são analisados. Na figura 6.4, são expostas curvas representando a evolução do EVA médio para dez simulações com média de demanda igual a 2. Os valores finais encontram-se na tabela 6.3.

Tabela 6.3: Tabela de EVAs médios finais com média de demanda igual a 2.

Controlador	**EVA médio final**
Projeto polinomial	11380
Realimentação de estados	11242
MPC	5068

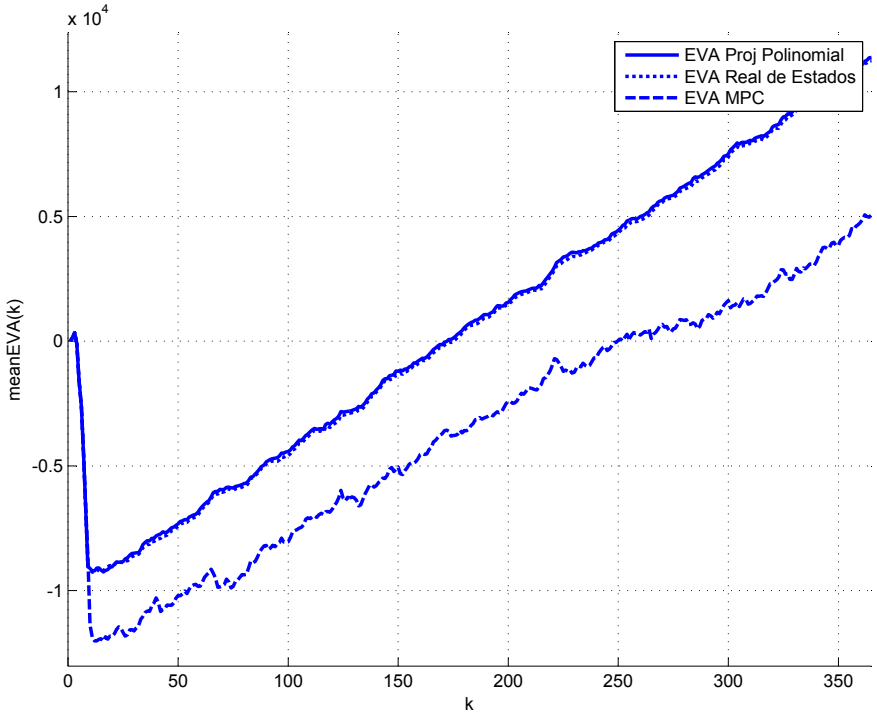

Figura 6.4: Média de dez simulações do EVA a cada instante com média de demanda igual a 2. Em linha contínua os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, pontilhado para o controlador calculado por realimentação de estado e tracejado para o MPC.

Nesse cenário, o EVA médio é quase sempre crescente e os resultados finais são positivos. Isso se dá pois, com demanda menor, é mais raro haver

falta de produtos. Devido à natureza não trivial do EVA, é difícil determinar com certeza, mas, provavelmente, o grande pico inicial de estoque gerado pelo MPC (fenômeno observador no capítulo 5) é o responsável pela queda inicial mais acentuada do EVA, levando a um valor final sensivelmente inferior aos demais.

A outra modificação de parâmetros testada é a mudança da referência e da condição inicial, que são supostas como iguais, para evitar os custos de perda de vendas. Os controladores clássicos são reajustados com novos parâmetros iguais aos vistos na tabela 6.4 para seguirem uma referência de valor duas vezes maior que o valor original, ou seja, 14. Não há necessidade de reajustar o MPC pois ele segue qualquer degrau com os parâmetros inicialmente escolhidos. Com 50 simulações, os EVAs médios a cada instante de tempo decorrentes dessas mudanças podem ser vistos na figura 6.5 e seus valores finais na tabela 6.5.

Tabela 6.4: Parâmetros modificados nos controladores clássicos.

Projeto Polinomial		**Realimentação de Estados**	
λ_i	0,15	λ_i	$0,2 - 0,01.i$
T	0,9	G_{ff}	0,8

Tabela 6.5: Tabela de EVAs médios finais com referência igual a 14.

Controlador	**EVA médio final**
Projeto polinomial	11900
Realimentação de estados	12079
MPC	11539

Nessa configuração, novamente as situações de falta de produto se tornam mais raras, permitindo que o EVA alcance valores positivos e que sua tendência seja quase sempre de crescimento. É interessante notar como, após um início sensivelmente pior, o MPC praticamente alcança os outros controladores. Novamente, é difícil ter certeza, mas parece que essa política é mais uma vez recompensada por manter média de estoque acima das demais. Isso é causado devido ao elevado *TurnAwayCost*, que pune severamente faltas de produto. As médias de *OoSCost* obtidas para as 50 simulações nessas condições são apresentadas na tabela 6.6 para corroborar essa hipótese.

A partir desses dados, é possível tirar duas conclusões. A primeira é que o valor de referência é importante para determinar bom desempenho econômico dos controladores. A segunda é que os parâmetros do EVA devem ser muito

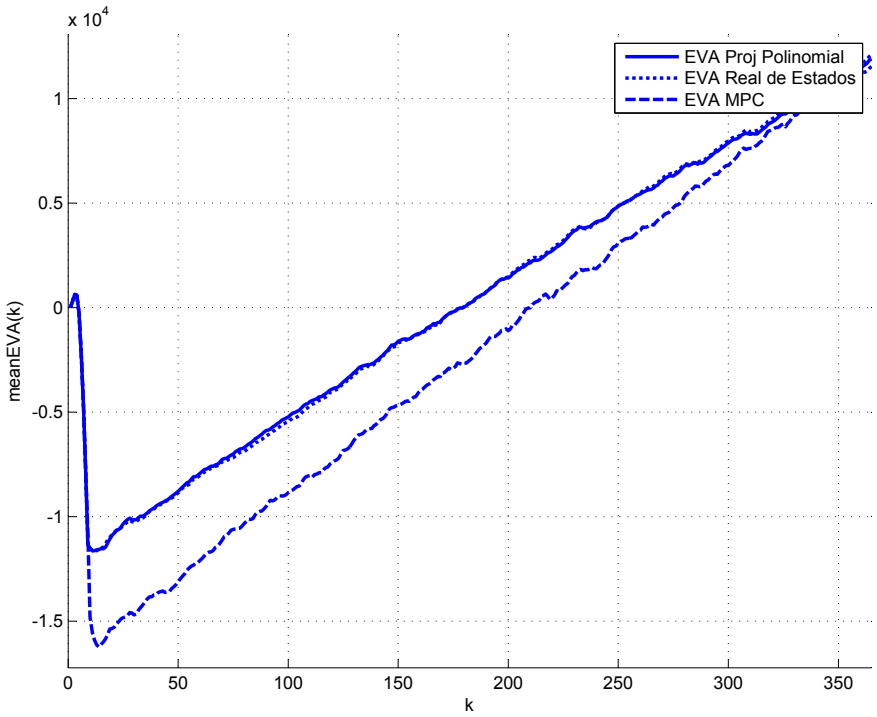

Figura 6.5: Média de 50 simulações do EVA a cada instante com referência igual a 14. Em linha contínua os resultados para o controlador calculado por projeto polinomial de alocação de pólos, pontilhado para o controlador calculado por realimentação de estado e tracejado para o MPC.

Tabela 6.6: Tabela de *OoSCost* médio com referência igual a 14.

Controlador	*OoSCost* **médio**
Projeto polinomial	19800
Realimentação de estados	19620
MPC	18800

bem identificados. Como pode ser visto nos resultados desse capítulo, os valores usados influenciam diretamente na escolha do controlador, tendendo por exemplo, para aquele que apresenta maiores picos e maiores médias de estoque, mas quase nunca tem falta de produtos em detrimento de outro com oscilações menores e média mais próxima da referência e que, em consequência, sofre mais frequentemente os custos de perda de clientes.

De modo mais geral, conclui-se que, embora as tentativas heurísticas dessa seção tenham melhorado o desempenho econômico medido pela função obje-

tivo EVA (f_1) de controladores lineares projetados visando apenas uma outra função objetivo (f_2), bons resultados em relação aos objetivos de controle não são nenhuma garantia de bons resultados em relação ao critério econômico adotado. Foi também constatado que, em alguns casos, é possível que um pior desempenho em f_2 leve a um melhor desempenho em f_1. O problema da relação entre os dois compromissos deve ser investigado mais profundamente utilizando ferramentas de otimização multiobjetivo.

Capítulo 7

Conclusão e Trabalhos Futuros

Ao fim do trabalho, tendo em mãos os dados gerados pelas simulações propostas, pode-se indicar qual método se apresenta como o mais promissor. Graças a experiência adquirida e com maior conhecimento sobre as dificuldades e particularidades do projeto, é possível também sugerir formas de se aprofundar nos temas propostos e melhorar os resultados obtidos.

7.1 Conclusão

Esse projeto utilizou três diferentes técnicas de síntese controladores com o objetivo de analisar seus desempenhos econômicos em um sistema caracterizado como um integrador com atraso sob um cenário de demanda aleatória com distribuição de Poisson. A abordagem escolhida foi de primeiro obter regras de *feedback* capazes de estabilizar o sistema e de rastrear uma referência de estoque sob demanda constante. Posteriormente foi testada a robustez de cada um dos controladores sob aleatoriedade.

Nos capítulos 3 e 4 foram vistas técnicas clássicas. O primeiro usa funções de transferência para alocar os pólos do sistema em malha fechada, enquanto o segundo usa a representação em espaço de estados com o mesmo objetivo. Ambos apresentaram desempenhos semelhantes. Após ajuste, possibilitam a rejeição de degraus de amplitude predeterminada. A mudança dessa amplitude faz com que ocorra *offset*. Quando a demanda é maior do que o previsto, o estoque oscila com pequena amplitude em torno de um valor abaixo da referência. No caso contrário, o valor atingido em estado estacionário é sensivelmente maior que a referência. O ponto positivo desses controladores é que ambos apresentaram certa robustez às variações aleatórias em torno do valor para o qual eles foram ajustados. Com isso não há grandes oscilações do estoque e a média final não fica muito distante da referência. Quando

a média é diferente da esperada, os mesmos fenômenos observados no caso determinístico se repetem.

Em seguida, buscou-se uma técnica de controle ótimo capaz de rejeitar degraus de diferentes amplitudes sem necessidade de reajuste de parâmetros. O projeto de controlador preditivo cumpriu esse objetivo, mas apresentou grandes picos nos momentos de transição. Pôde ser verificado que o pico inicial tem amplitude muito maior nesse caso do que nos controladores clássicos. É provavelmente esse fator que faz com que o MPC não apresente bom comportamento no caso de demanda aleatória. Há grandes oscilações e a média de estoque não fica próxima da referência. Além disso, o *offset* da média aumenta conforme aumenta a média da demanda.

A análise do desempenho econômico dos três controladores mostrou que a referência inicialmente escolhida não leva a bons resultados devido à combinação de elevado custo de perda de clientes presente no EVA com frequente falta de estoque. A técnica de MPC foi a única a apresentar EVA globalmente crescente justamente por levar a médias de estoque superiores ao indicado. Em seguida, com diminuição da demanda ou aumento da referência do estoque, resultados positivos e crescentes foram encontrados para todos os casos testados. Para o caso em que se busca um estoque mais elevado, a diferença entre o maior EVA final (controlador projetado por realimentação de estados) e o menor (MPC) não chega a 5%. Vendo graficamente que o coeficiente de aumento do EVA do MPC é maior que o dos outros, poderia ser sugerido esse como o melhor controlador. No entanto, há de se lembrar que a provável razão para essa vantagem é o fato do MPC levar a médias de estoque acima da desejada, evitando custos de perda de clientes. Sendo assim, valores otimizados da referência possivelmente levariam a resultados melhores para os controladores clássicos com a vantagem de se evitarem grandes oscilações do número total de produtos..

É, portanto, possível recomendar o uso seja do controlador encontrado por projeto polinomial ou por realimentação de estados em cenários em que se conheça aproximadamente uma média de demanda. Esse controlador deve ter seus parâmetros ajustados conforme forem detectadas mudanças no perfil de consumo.

7.2 Trabalhos Futuros

Levando em conta os resultados obtidos e as hipóteses feitas inicialmente, diferentes frentes de trabalho para melhoria dos controladores ou para resultados de caráter mais geral podem ser propostas.

Em relação à modelagem, uma modificação que deixaria o sistema mais

geral e mais próximo de diversos casos reais é a possibilidade de atraso variável. Isso, no entanto, aumenta consideravelmente a complexidade do sistema e dificulta o uso das técnicas apresentadas. Funções de transferência são definidas somente para casos com atraso constante e as matrizes do modelo para a realimentação de estados e para o MPC passariam a ter tamanho variável.

Outra possível mudança de modelo seria ligar estágios modelados como em (2.1) da forma indicada na figura 2.1, i.e., os pedidos de um armazém representarem a demanda de outro. Com isso, seria possível estudar o EVA de toda uma cadeia de suprimentos e analisar fenômenos típicos desses sistemas, como o *bullwhip*.

Já na implementação dos controladores, uma possibilidade de melhora surge com a utilização de preditores de demanda. Há diversos modelos de previsão possíveis, desde os mais clássicos por suavização exponencial e médias móveis até filtros de Kalman, redes neurais e lógica *fuzzy*. Não é possível prever o impacto do uso de tais técnicas, mas, de acordo com resultados expostos em [16], elas costumam melhorar o desempenho dos sistemas de gestão de estoque.

Em relação ao MPC, é importante notar que somente seu modelo mais simples foi utilizado nesse trabalho. Há outras formulações do controlador preditivo que podem torná-lo mais robusto à aleatoriedade usada nesse projeto. Indicações a algumas delas podem ser encontradas em [18]. Talvez uma modificação que o tornasse menos reativo pudesse reduzir os picos e levar a melhores valores de EVA.

Para melhorar o desempenho econômico de todos os controladores, eles deveriam passar por algoritmos de otimização. Valores de pólos, referências, ganhos *feedforward*, pesos na função de custo do MPC e horizontes de previsão e de controle foram ajustados manualmente para obtenção de bons resultados. A aplicação de técnicas de otimização por simulação como algoritmo genético ou SPSA para definir esses parâmetros tendo o EVA como função custo poderia levar a consideráveis melhoras.

De modo mais geral, como se trata de um problema multiobjetivo, podem ser utilizadas ferramentas de otimização multiobjetiva para calcular, por exemplo, a fronteira de Pareto ótima no espaço das funções objetivo f_1 e f_2 de (1.1).

Referências Bibliográficas

[1] Council of Supply Chain Management Professionals, Glossário de termos. http://cscmp.org/sites/default/files/user_uploads/resources/downloads/glossary-2013.pdf. Acessado: 2014-08-06.

[2] New York Times website. http://www.nytimes.com/2014/04/25/technology/amazon-quarterly-earnings.html?_r=0. Acessado: 2014-08-07.

[3] Karl J. Astrom and Bjorn Wittenmark. *Computer-Controlled Systems: Theory and Design, Third Edition (Dover Books on Electrical Engineering)*. Dover Publications, third edition edition, 12 2011.

[4] M. W. Braun, D. E. Rivera, M. E. Flores, W. M. Carlyle, and K. G. Kempf. A model predictive control framework for robust management of multi-product, multi-echelon demand networks. *Annual Reviews in Control*, 27:229–245, 2003.

[5] Tiago S. Calmon and André M. de Castro. Estudo de estratégias de controle de estoque com otimização via algoritmos genéticos. UFRJ, http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10005877.pdf, 2013.

[6] Eduardo F. Camacho and Carlos Bordons Alba. *Model Predictive Control (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing)*. Springer, New York, 12 2002.

[7] J. Dejonckheere, Stephen M. Disney, Marc Lambrecht, and Denis R. Towill. Transfer function analysis of forecasting induced bullwhip in supply chains. *International Journal of Production Economics*, 76:133–144, 2002.

[8] J. Dejonckheere, Stephen M. Disney, Marc Lambrecht, and Denis R. Towill. Measuring and avoiding the bullwhip effect: A control theoretic

approach. *European Journal of Operational Research*, 147(3):567–590, 2003.

[9] J. W. Forrester. Industrial dynamics: a major breakthrough for decision makers. *Harvard Business Review*, 36:37–66, 1958.

[10] J. W. Forrester. *Industrial dynamics*. MIT Press, Cambridge, MA, 1961.

[11] Gene F. Franklin, J. David Powell, and Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson, 2010.

[12] Ulf Holmberg. Digital control. Livro digital em: `http://www.hh.se/download/18.70cf2e49129168da0158000125094/out.html`, 2005.

[13] Jan Maciejowski. *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall, New Jersey, 1 edition, 2000.

[14] Bernard McGarvey and Bruce Hannon. *Dynamic Modeling for Business Management: An Introduction (Modeling Dynamic Systems)*. Springer, New York, 2004 edition, 2004.

[15] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, and Ian T. Young. *Signals and Systems*. Prentice-Hall International Editions, New Jersey, 1983.

[16] M. Ortega and L. Lin. Control theory applications to the production–inventory problem: a review. *International Journal of Production Research*, 42(11):2303–2322, 2004.

[17] E. Perea-López, B. E. Ydstie, and I. E. Grossman. A model predictive control strategy for supply chain optimization. *Computers and Chemical Engineering*, 27:1201–1218, 2003.

[18] Haralambos Sarimveis, Panagiotis Patrinos, Christos D. Tarantilis, and Chris T. Kiranoudis. Dynamic modeling and control of supply chain systems: A review. *Computers & OR*, 35(11):3530–3561, 2008.

[19] Jay D. Schwartz, Wenlin Wang, and Daniel E. Rivera. Simulation-based optimization of process control policies for inventory management in supply chains. *Automatica*, 42(8):1311–1320, 2006.

[20] H. A. Simon. On the application of servomechanism theory in the study of production control. *Econometrica*, 20, 1952.

[21] Nigel Slack, Stuart Chambers, and Robert Johnston. *Administração da Produção*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[22] J. C. Spall. Implementation of the simultaneous perturbation algorithm for stochastic optimization. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34:817–823, 1998.

[23] G Stalk and T. M. Hout. Time - the next source of competitive advantage. *Harvard Business Review*, 4:81–91, 1988.

[24] John D. Sterman. *Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World with CD-ROM.* McGraw-Hill/Irwin, New York, 2000.

[25] S. Tzafestas, G. Kapsiotis, and E. Kyriannakis. Model-based predictive control for generalized production planning problems. *Computers in Industry*, 34:201–210, 1997.

[26] J. H. Vassian. Application of discrete variable servo theory to inventory control. *Operations Research*, 3, 1955.

[27] Hélio Flávio Vieira. *Gestão de estoques e operações industriais.* IESDE, Curitiba, 2009.

[28] R.H. Wilson. A scientific routine for stock control. *Harvard Business Review*, 13:116–128, 1934.