UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE BACHARELADO

ANÁLISE DE RISCO E RETORNO DE AÇÕES NO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO COM ÍNDICE DE SHARPE

JEAN DATUM MOSCAVITCH

Matrícula nº: 105093083

ORIENTADOR: Prof. Antonio Luis Licha

ABRIL 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE ECONOMIA

MONOGRAFIA DE BACHARELADO

ANÁLISE DE RISCO E RETORNO DE AÇÕES NO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO COM ÍNDICE DE SHARPE

JEAN DATUM MOSCAVITCH

Matrícula nº: 105093083

ORIENTADOR: Prof. Antonio Luis Licha

ABRIL 2011

As opiniões expressas neste trabalho são de exclusiva responsabilidade do(a) autor(a)

RESUMO

O presente trabalho estudou a formação ótima de uma carteira de ações embasada pelo índice de Sharpe. Foi estudado o comportamento histórico de janeiro de 2006 a dezembro de 2011 dos ativos que apresentaram as características requeridas e justificadas. O objetivo do estudo é a verificação da fórmula de Sharpe para auxílio de tomada de decisão para pequenos e médios investidores do mercado de ações. Utilizando o método de otimização de Sharpe para alterar a quantidade ótima do peso das ações na carteira, encontrou-se o melhor portfólio com base em observação do passado dos ativos. O resultado final deste processo é a escolha ótima dos ativos e suas quantidades para formação de carteira de ações no mercado brasileiro.

SÍMBOLOS, ABREVIATURAS, SIGLAS E CONVENÇÕES

BM&F = Bolsa de Mercadorias e Futuros

BOVESPA = Bolsa de Valores do Estado de São Paulo

CVM = Comissão de Valores Mobiliários

EP = *Expected return of the Portfolio*

FV = *Future Value*

LB = *Lower Bonds*

MVP = *Minimum Variance Portfolio*

NPV = *Net Present Value*

PV = *Present Value*

RT = *Risk tolerance*

SD = *Standard Deviation*

U = *Utility*

UB = *Upper Bonds*

VP = *Variance of the Portfolio return*

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi elaborado como ferramenta para facilitar as escolhas do investidor perante o risco e o histórico de retorno de ações no mercado acionário brasileiro.

O recente crescimento e desenvolvimento da bolsa de valores e a facilidade de acesso aos investimentos disponíveis aumenta o número de investidores inseridos nesse mercado.

Geralmente, o principal foco em finanças é a necessidade de mensurar a relação risco e retorno. De modo que quanto maior for o risco de um ativo, maior deverá ser seu retorno para atrair o investidor, caso contrário não captará os recursos disponíveis no mercado. Este trabalho propõe encontrar a melhor alternativa relativa de investimento para o investidor.

O capítulo 1 trata de conceitos básicos de matemática financeira e conceitos econômicos julgados necessários para melhor entendimento do modelo. Esta parte do trabalho consiste na fundamentação teórica e está referenciado nos autores que mais contribuíram para o trabalho durante a fase de pesquisa.

O capítulo 2 encontra-se a formulação do problema padrão de otimização, descrevendo o método utilizado para realização da pesquisa, assim como suas etapas e objetivos.

O capítulo 3 demonstra como foram montadas as amostras da carteira para aplicação do modelo e descreve o cálculo da carteira e o resultado obtido.

O último capítulo expõe as conclusões obtidas através do resultado do estudo realizado, incluindo sua utilidade e praticidade de uso.

CAPÍTULO I – CONCEITOS BÁSICOS

I.1 – Valor Presente e Valor Futuro

Valor presente (*present value*) é o valor necessário na data zero, considerando os juros, que represente o mesmo capital descontado algum prazo determinado.

Analogamente, teremos que o valor futuro (*future value*) é equivalente ao valor presente incluindo a taxa de juros pelo tempo especificado, deste modo temos:

$$pv= fv/(1+i)^t$$

$$fv=pv*(1+i)^t$$

A antecipação da taxa de juros do período futuro pode ser realizada para mais de um período. Conforme a equação:

$$(1+i)*(1+i) = V_2/V_0 \qquad \text{ou} \qquad (1+i)^2 = V_2/V_0$$

A variação do valor final para o inicial é chamado de Valor relativo (t-período).

$$(1+i) = (V_t/V_0)^{(1/t)}$$

A taxa de juros é utilizada para descrever títulos cujo pagamento é certo. Sendo no período zero o título considerado livre de risco. Existe uma relação entre o fator de desconto e sua taxa de juros correspondente do período. (ASSAF NETO, 2000)

$$i(t) = (1/df(t))^{(1/t)}$$

Assim, a equação do valor presente com t-período da taxa de juros descontado fica:

$$pv = p(t) / (1+i(t))^t$$

I.2 – Valor Presente Líquido

A diferença entre valor presente (pv) e valor presente líquido (*net present value*) é em relação aos créditos. (ASSAF NETO, 2000) A primeira é baseada em pagamentos futuros e determina o valor presente dos mesmos. A segunda se baseia em todos os pagamentos, incluindo qualquer pagamento presente. Assim temos:

$$npv = \sum C_t/(1+r)^t$$

Se npv ≥ 0, a alocação da poupança é considerada viável, porque não piora a situação inicial do investidor, com esta condição o investidor fica melhor ou igual à situação inicial.

No entanto, se npv < 0, a alocação da poupança não é viável, porque piora a situação inicial do investidor.

I.3 – Informação Assimétrica

Este fenômeno acontece em uma falha de mercado, em que agentes econômicos não têm a mesma completude de informação em relação ao bem transacionado. Este sintoma pode ser minimizado com transparência de informação. Essa transparência gera custos para as empresas intermediadoras de investimentos (Bancos, corretoras e etc.) que serão incorporados ao mercado. O investidor externo, sem ligação com a companhia, deve ter a mesma capacidade do investidor com algum vínculo empregatício de confirmar o resultado de produção. (AKERLOF, 1970)

Do mesmo modo que particulares utilizam seus meios para igualar a informação dos agentes, existem agências reguladoras que tentam suprimir a manipulação de informação pelas empresas produtoras e seus funcionários. No Brasil a Comissão de Valores Mobiliários (CVM) está incumbida desta função conforme disposto na LEI Nº6385, de 7 de setembro de 1976.

Uma das soluções sugerida para evitar efeitos negativos da assimetria de informação, no caso de *inside information* é colocar os principais funcionários da empresa com participação acionária substancial na firma para provar seu comprometimento. No Brasil, como encontrado no site da BM&F Bovespa, é incentivada a adoção voluntária de governança corporativa, com intuito de estimular a transparência.

I.4 – Investimento sem Risco

O título sem risco irá dar o retorno da quantia equivalente no futuro (t_1,t_2,...,t_n) do investido no presente (t_0), independente do tempo decorrido.

Este investimento tem uma taxa de risco tão baixa que pode ser desconsiderada. Em contraponto, o retorno que também é associado ao risco é muito baixo e estão sujeitos ao risco inflacionário. Em suma, o título sem risco irá transpor os períodos com a mesma capacidade de consumo da situação inicial.

$$pv=fv$$

Na realidade, não há investimento sem risco, de acordo com William Sharpe, porque o risco é dado de acordo com a capacidade de o emitente cumprir sua obrigação. Na teoria, até o governo dos EUA, que é considerado o emitente mais confiável do mundo pode negligenciar.

I.5 – Lei do Preço Único

Numa economia sem custos de transação os preços de compra e venda são iguais. Sendo esta propriedade válida para qualquer tempo.

Sem essa propriedade há espaço para arbitragem de preços, podendo-se comprar no preço mais barato e vender no mais caro auferindo o lucro da diferença.

No mercado real as instituições financeiras exploram as discrepâncias da economia, chamadas de *spread*. A diferença entre preço de compra e venda se dá pelos custos da transação. Porém, o mercado tende a tornar essa discrepância próxima de zero, o que estaria em conformidade a Lei do preço único.

Segundo GITMAN (2002), o mercado financeiro é onde as pessoas negociam com empresas que demandam seu dinheiro.

I.6 – Decisão de Consumo e Investimento

Consumo e investimento dependem das expectativas futuras. Segundo Keynes, a propensão marginal ao consumo é um multiplicador entre zero e um. Assim:

No caso de consumo total imediato o multiplicador é igual a 1. E, na extremo oposto, onde há investimento total sem consumo, o multiplicador é igual a 0.

Na situação mais próxima da realidade, o multiplicador será um número entre zero e um. (FRIEDMAN, 1957) Possibilitando a otimização com o máximo da combinação de consumo imediato e futuro (investimento). Neste caso, as oportunidades disponíveis para o agente econômico influenciará sua decisão de consumo e investimento.

I.7 – Dinheiro

O dinheiro para nosso modelo é um instrumento de transação. Dinheiro corrente e depósitos são considerados como dinheiro. (CARVALHO, 1989) Ações com alta liquidez são chamadas "perto-do-dinheiro". Para nosso propósito o dinheiro será definido simplesmente como meio de troca.

Deste modo, o dinheiro será responsável pelas trocas do mercado, mantendo o modelo sem custos. Como dito anteriormente, a última afirmação implica que o preço de compra é igual ao de venda no mesmo período. De modo que todas as commodities produzidas e possuídas são vendidas ao início do período para posterior decisão de consumo/investimento.

O preço das commodities depende da quantidade produzida e do montante de dinheiro disponível. A inflação e deflação retratam a desigualdade desta relação.

No entanto a determinação dos preços das commodities não é essa simples relação direta, há muitos fatores externos envolvidos nesta relação os quais aumentam a complexidade. E, mesmo que o nível geral dos preços da economia se mantenha constante, as commodities estarão sujeitas a mudanças de demanda que irão influir nos preços relativos. Quando determinado commoditie difere seu preço futuro com atual, surge uma disparidade, que será estreitada pela arbitragem.

I.8 – Múltiplos Commodities

Em um mercado com múltiplas commodities utilizamos a cesta de bens pré-definida para calcular o índice de preço. Isto porque a taxa de juros expressa em laranja é diferente da expressa em maças e assim sucessivamente.

No Brasil utilizamos o Índice Geral de Preços (IGP), que é uma média ponderada de 60% do IPA, 30% do IPC do Rio de Janeiro e São Paulo, e 10% do INCC. Todos calculados pela Fundação Getúlio Vargas (FGV, 2012).

O Índice de Preços por Atacado (IPA) se propõe a medir a variação de preços no mercado atacadista, nas relações interempresariais. Ou seja, a análise da evolução de preços das 481 mercadorias que compõe este índice, antes destas chegarem ao consumidor, tem grande sensibilidade e por isso tem participação substancial no IGP.

O Índice de Preços ao Consumidor é coletado entre as famílias com renda de 1 a 33 salários mínimos das principais metrópoles do país, como dito anteriormente, Rio de Janeiro e São Paulo. Este cálculo tenta refletir o custo das famílias com alimentação, transporte, despesas pessoais, saúde, vestuário e educação.

O Índice Nacional da Construção Civil mede a evolução de custos de construção habitacional nos 18 municípios, que são: Aracaju, Belém, Belo Horizonte, Brasília, Campo Grande, Curitiba, Florianópolis, Fortaleza, Goiânia, João Pessoa, Maceió, Manaus, Porto Alegre, Recife, Rio de Janeiro, Salvador, São Paulo e Vitória.

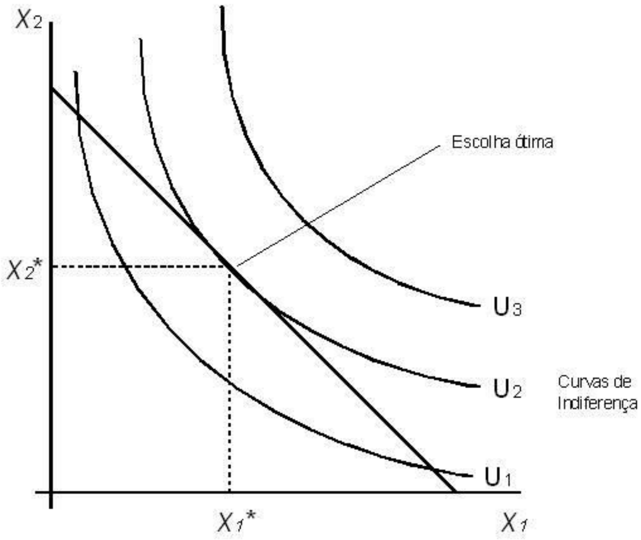
I.9 – Consumo Ótimo

O consumo ótimo será equivalente ao problema de otimização da utilidade.

O consumidor escolhe a curva de indiferença mais distante da origem, a qual representa seu maior nível de satisfação palpável. Ou seja, dentro da sua restrição orçamentária o agente escolherá a que tiver maior valor agregado sob ótica da utilidade, incluindo sua preferência individual. (VARIAN, 2006) A referência em relação à distância da curva à origem se deve ao princípio de não-saciedade, em que o agente sempre prefere consumir mais a menos.

A preferência individual implica que dois agentes diferentes com a mesma restrição orçamentária e preferências similares podem escolher dois pontos distintos da mesma curva de indiferença.

A figura abaixo representa uma curva de indiferença genérica sem diferenciação da elasticidade entre as cestas. Cada curva da figura descreve uma combinação das cestas X_1 e X_2 para a qual o investidor é indiferente. O investidor sempre escolhe a curva de indiferença mais distante da origem. Ilustramos poucas curvas para facilitar a visualização, mas com a disponibilidade de cestas disponíveis, a distância entre as curvas tende a ser mínima.



CAPÍTULO II – PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO

O objetivo deste capítulo é demonstrar o procedimento que irá ajudar o investidor com a melhor decisão de investimento que irá maximizar sua utilidade. Em geral, métodos que envolvem o aumento de eficiência de estratégias são chamados de otimização.

Para MARKOVITZ (1952) seria possível identificar o portfólio eficiente a partir de três informações: a taxa média de retorno de cada integrante da carteira, as variações desses retornos (que seria a variância ou o desvio-padrão das taxas de retorno) e as relações entre as taxas de retorno entre os ativos (ou seja, a covariância).

II.1 – Problema padrão de otimização do ativo

Este problema considera a maximização do portfólio resultante para o investidor em ativos levando em conta sua tolerância ao risco e as restrições relevantes na exploração de ativos.

A utilidade do investidor é representada por uma função linear da média e variância dos ativos do portfólio.

$$U = Ep - Vp / Rt$$

Onde,

U: Utilidade do portfólio para o investidor (que também pode ser interpretado como risco ajustado ao retorno esperado);

Ep: Retorno esperado do portfólio (e*xpected return of the portfolio*)

Vp: Variância do retorno do portfólio (v*ariance of the portfolio return*)

Rt: Tolerância do risco do investidor (i*nvestor's risk tolerance)*(taxa de substituição da variância pelo valor esperado).

Podemos auferir da equação a penalização de risco (Vp/Rt)

A variância do retorno do portfólio depende da covariância entre as classes de ativos que a compõe.

O objetivo é encontrar o melhor portfólio, com a máxima utilidade.

A utilidade está relacionada com as ações escolhidas para o portfólio, que é alterada pela sua escolha.

A maximização se dá com o esgotamento das possíveis combinações utilizando todo capital disponível. (sum(x)=1)

Posições vendidas não são permitidas para formação de portfólio, somente posições não-negativas são consideradas.

Sum(x)= K

Onde k é uma constante

Lb é o vetor de limite inferior {n*1}

Ub é o limite superior (i)

Deste modo fica claro que existe uma restrição para o posicionamento do portfólio.

Problema de alocação do portfólio:

$$Ep = x'*e$$

$$Vp = x'*C*x$$

(Em que C = {n*n}; matriz de covariâncias)

Sujeito a:

Sum(x) = K

$$Lb \leq x \leq Ub$$

Este é um problema que envolve a maximização de uma função quadrática das variáveis de decisão.

II.2 – Modelo de Otimização

Para ilustrar o processo de otimização, usaremos um exemplo simples com três variáveis: Dinheiro, Títulos e Ações. Para melhor visualização, alocaremos nossas informações numa planilha de otimização:

	Min	Inicial	Max	Ret.Esp.	Des.pad.	Dinheiro	Títulos	Ações
Dinheiro	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.40	0.15
Títulos	0.00	0.00	1.00	6.30	7.40	0.40	1.00	0.35
Ações	0.00	0.00	1.00	10.80	15.40	0.15	0.35	1.00

A primeira coluna mostra os limites inferiores (l*ower bounds*), neste caso todos iguais a zero. A terceira coluna mostra o limite superior (u*per bounds*), todos iguais a um. A segunda coluna indica o portfólio inicial. A quarta coluna mostra o retorno esperado e a quinta o desvio padrão (*standart deviation*) dos ativos, ambas representadas em porcentagem anual. As três últimas colunas mostram a correlação entre as variáveis.

Em termos matriciais, temos:

$$e = \begin{vmatrix} 1.00 \\ 6.30 \\ 10.80 \end{vmatrix} \qquad sd = \begin{vmatrix} 1.00 \\ 7.40 \\ 15.40 \end{vmatrix}$$

Matriz de correlação

$$cc = \begin{vmatrix} 1,00 & 0,40 & 0,15 \\ 0,40 & 1,00 & 0,35 \\ 0,15 & 0,35 & 1,00 \end{vmatrix}$$

$$lbd = \begin{vmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{vmatrix} \qquad ubd = \begin{vmatrix} 1,00 \\ 1,00 \\ 1,00 \end{vmatrix} \qquad x_0 = \begin{vmatrix} 1,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{vmatrix}$$

A matriz de covariância C:

C = (sd*sd').*cc

$$C = \begin{vmatrix} 1000 & 2960 & 2310 \\ 2960 & 54760 & 39886 \\ 2310 & 39886 & 237160 \end{vmatrix}$$

Assumimos que k é a soma dos valores do vetor x. Para não haver discrepância entre os valores iniciais e finais do vetor.

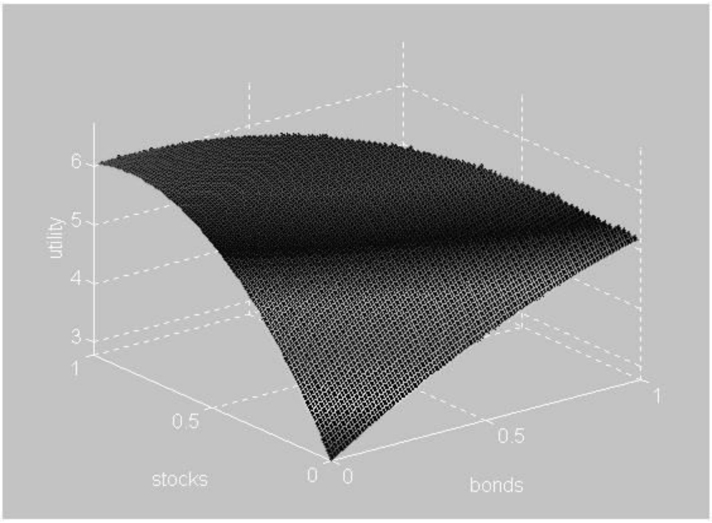
k = sum (x0)

k = 1

A tolerância ao risco do investidor, em nosso exemplo será de 50, que representa na realidade uma atitude moderada frente à exposição ao risco.

Rt = 50

II.3 – Curva de Utilidade



O ponto mais alto factível provê ao investidor a maior utilidade na curva de indiferença. Utilidade marginal da ação individual na utilidade do portfólio.

Utilidade marginal da ação i é igual à derivada de u em relação x(i).

$$Mu(i) = d\,u \;/\; d\,x(i)$$

Retorno marginal esperando: dep/dx(i)

Risco Marginal: dvp/dx(i)

Equação completa:

$$Mu\ (i) = dep/dx(i) - (1/rt)*dvp/dx(i)$$

Sabemos que dep/dx(i) = e (i)

Dvp/dx(i) = iésima linha de 2 *C*x

Onde C é a matriz de covariância da ação

Deste modo podemos computar 1, o vetor que contêm a utilidade marginal dos ativos diretamente:

$$Um= e-(1/rt)*2*C*x$$

Onde x é o portfólio corrente.

II.4 – A ótima troca

A utilidade marginal provê informações importantes sobre o portfólio, que poderá ser usada para melhorar sua composição afim de aumentar a utilidade do investidor em questão. Neste caso, todas as utilidades marginais são positivas, indicando que aumentando a quantidade de qualquer ativo iria aumentar a utilidade.

No exemplo, a opção de investimento mais atrativa é a 3ª (ações) que deverá ser aumentada substancialmente, desde seu montante inicial (0,00) para o limite máximo (1,00).

A opção menos atrativa de investimento é a 1ª (dinheiro), que é mesma que devemos diminuir seu montante. O que sugere uma troca entre estes ativos. O 1º ativo diminuirá na proporção do aumento do 3º ativo.

Esta troca irá aumentar a utilidade do investidor em questão em 10,7076 - 1,0000, ou 9,7076% por unidade trocada. Esta troca só é factível por que o dinheiro tem utilidade marginal menor que a ação, para o portfólio.

Para otimizar a carteira temos a troca entre limites superior e inferior na taxa mu (ibuy) – mu (isell). Se esta diferença for positiva, a utilidade do portfólio pode ser aumentada. Isso porque a utilidade marginal de ibuy é maior que isell, tornando factível esta otimização.

Casos especiais necessitam de generalização bruta. Se dois ou mais ativos tem a mesma utilidade marginal a escolha de isell e ibuy não será única e terá de ser feita por escolha arbitrária. Se todos ativos forem iguais no limite superior ou inferior não há melhorias a serem feitas. mu (ibuy) = mu (isell)

II.5 – A quantidade ótima da troca

A quantidade da ótima troca vai aumentar à taxa máxima por unidade trocada dentro do portfólio. Sendo que a taxa de aumento vai mudar proporcionalmente ao tamanho da troca realizada. Em algum ponto a utilidade irá chegar num pico e depois enfraquecer. Esta troca será factível à medida que haja ativos do limite superior para serem comprados e ativos do limite inferior que sejam vendidos.

Todos estes fatores precisam ser levados em consideração para encontrar o tamanho ótimo viável para qualquer troca. Genericamente, podemos representar a troca pelo vetor S de mudanças dos ativos possuídos, onde a soma destes elementos é igual a zero.

$$S = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

A revisão do portfólio está sujeita a retornos decrescente de escala. Quanto maior for à magnitude da revisão menor será a taxa de aumento na utilidade do portfólio. Ou seja, a utilidade irá aumentar com a diminuição da taxa.

Este cálculo não leva em consideração os ativos em posse. Para permanecer possível, não podemos comprar um montante de ibuy que fará x(ibuy) exceder ub (buy). Do mesmo modo, não podemos vender montante de isell que faça x (isell) ser inferior a lb (isell). Em suma não podemos exceder os limites superiores e inferiores para compra ou venda de ativos.

Agora que temos as ferramentas necessárias para resolver o problema padrão a partir de um portfólio viável podemos encontrar a troca ótima e sua respectiva quantidade a ser trocada. Após fazer as trocas apropriadas teremos um novo portfólio aperfeiçoado. Esta técnica pode ser realizada até o esgotamento das possibilidades de troca.

II.6 – Composição do portfólio

Se não tivermos limites para títulos em carteira, podemos usar o método gradiente para determinar o portfólio ótimo com a configuração toda em cima dos limites superiores somado ao limite inferior reduzido a menos infinito.

Aqui procuramos o portfólio que resolva a equação. Como o vetor y contém este portfólio, devemos resolver y. Para tal, podemos multiplicar em ambos os lados da equação pela inversa de D.

II.7 – Portfólio com a mínima variância

Considerando que o investidor deseja minimizar o risco, independente do sacrifício do retorno esperado neste processo. GROPPELLI e NIKBAKHT (2002) descrevem que risco seria o grau de incerteza do investidor associado a um investimento específico.

$$y = mvp + 0*z = mvp$$

Onde mvp (*minimum variance portfólio*):,

Exemplificando:

$$mvp = \begin{vmatrix} 1,0392 \\ -0,0396 \\ 0,0004 \\ -1,8458 \end{vmatrix}$$

A verificação do portfólio se dá com a soma dos x-valores dos elementos de 1 a 3 deverão ser iguais a 1.0.

Para verificar se mvp deve ser o portfólio neste sentido, é útil considerar o problema para o qual é solução. Começando pela formulação do problema original:

$$D*y = k + rt*f$$

Neste caso:

$$D*y = k + 0*f \text{ ou } D*y = k$$

Para o qual a solução é:

$$y = inv(D)*k$$

Retornando aos componentes da matriz e vetores neste caso:

$$\begin{vmatrix} 2*C(1,1) & 2*C(1,2) & 2*C(1,3) & 1 \\ 2*C(2,1) & 2*C(2,2) & 2*C(2,3) & 1 \\ 2*C(3,1) & 2*C(3,2) & 2*C(3,3) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ tmup \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

A última linha requer 1*x(1) + 1*x(2) + 1*x(3) + 0*tmup = 1

Por isso a solução deve ser o portfólio que as participações somem 1.

Neste exemplo, o portfólio com variação mínima envolve pegar empréstimo em quantidade igual a 3.96% do fundo do investidor como emissor, que seria equivalente a uma posição vendida no mesmo. Assim, a combinação do investimento, proventos, Fundos originais e a combinação com dinheiro. O portfólio adequado é:

x = y (1:3,1)

E sua variância:

vp = x'*C*x = 0.9229

Com desvio padrão:

sdp = sqrt(vp) = 0.9607

Neste exemplo dinheiro não é livre de risco, uma vez que os retornos estão em termos reais. Isto é, ajustados a inflação. Utilizando retornos nominais, o dinheiro pode ser considerado sem risco. Mantendo as considerações iniciais de risco e retorno:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1000 \\ 0 & 1.095.200 & 797.720 & -1000 \\ 0 & 797.720 & 4.743.200 & -1000 \\ 1000 & 1000 & 1000 & 0 \end{vmatrix}$$

$$mvp = \quad inv(D)*k = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

II.8 – A ótima troca

Voltando ao vetor z, lembrando que o portfólio ótimo para o investidor com tolerância ao risco é rt:

$$y = mvp + rt*z$$

Agora considerando dois investidores, o primeiro com tolerância zero ao risco. Com o portfólio y_0, com a seguinte equação:

$$Y_0 = mvp + 0*z = mvp$$

E, outro investidor com tolerância ao risco igual a 1.0. Com portfólio y_1 dado pela equação:

$$Y_1 = mvp + 1*z = mvp + z$$

A diferença entre os portfólios é dada pelo vetor z:

$$Y_1 – y_0 = (mvp + z) - mvp = z$$

Na versão de árvore de ativos:

$$z = \begin{vmatrix} -0.0389 \\ 0.0257 \\ 0.0132 \\ -26.648 \end{vmatrix}$$

Portanto, o investidor com tolerância ao risco de 1.0 deverá possuir 3.89% menos em dinheiro, 2.57% mais em títulos e 1.32% mais em ações que o investidor com a mesma capacidade financeira, mas sem tolerância ao risco.

A cada unidade de troca o detentor deverá pagar uma quantia equivalente ao retorno de 0.0389 unidades investidas em dinheiro e receber a soma de retorno de 0.0257 investido em títulos e de 0.0132 investido em ações. Assim, podemos descrever a equação de troca por:

$$y = mvp + rt*z$$

Deste modo, um investidor com tolerância ao risco de 0,5 poderá aumentar sua posse na troca ótima duas vezes a mais que o investidor com tolerância ao risco de 0,25, considerando a mesma capacidade financeira. Ou seja, o posicionamento do investidor frente ao portfólio é diretamente proporcional a sua tolerância ao risco. Quanto maior for o risco que o investidor estiver disposto a correr, independente da sua capacidade financeira, maior será sua participação no portfólio.

II.9 – Separação de dois Investimentos

A equação do portfólio ótimo é claramente linear e pode ser escrita genericamente por:

$$y(i) = mvp\ (i) + rt*z(i)$$

Temos que as primeiras n linhas correspondentes para posições em:

$$x(i) = mvp\ (i) + rt*z(i) : \text{para } i= 1,..,n$$

Então, considerando 2 portfólios, ambos otimizados dada a tolerância ao risco. Sendo “a” com menor risco e “b” maior.

$$ya = mvp + a*z$$

$$yb = mvp + b*z$$

O investidor deverá alocar a proporção de sua riqueza no Fundo “a” em (xa) e em “b” (1-xa). Utilizando a formula para calcular (xa):

$$xa = (b-rt)/(b-a)$$

Resolvendo a equação,

$$y = xa*ya + (1-xa)*yb$$

$$= xa*(mvp+a*z)+ (1-xa)*(mvp+b*z)$$

$$= mvp + [xa*a+(1-xa)*b]*z$$

Porém, dado a escolha de xa, temos:

$$[xa*a+(1-xa)*b] = rt$$

Então os dois Fundos são de fato ótimos portfólios para o investidor em questão.

II.10 – Multiplicador de Lagrange

Função Lagrangeana com 2 restrições lineares é descrita por:

$$L= rt*ep-vp+g1*[b(1)-A(1,:)*x]+g2[b(2)-A(2.:)*x]$$

Para que o portfólio satisfaça as duas restrições cada termo do colchete será igual a zero e a função Lagrangeana L será igual à função objetivo original, tão longo e factível o portfólio seja.

O objetivo é maximizar L para chegar ao ápice de seu valor dadas as variáveis disponíveis. Logo, os dois são necessários e suficientes para otimizar a solução que primeiro deriva L em relação a cada variável por zero. Sendo que agora há n + m variáveis, as n primeiras de participação de ativos, representadas por x1, x2 e etc.; e as m seguintes do multiplicador de Langrange, estas por sua vez representadas por g1, g2. As derivadas em relação às participações de ativos são:

$$rt*e(1) - 2*C(1,1)*x(1) - 2*C(1,2)*x(2) - 2*C(1,3)*x(3) - g1*A(1,1) - g2*A(2,1)$$

$$rt*e(2) - 2*C(2,1)*x(1) - 2*C(2,2)*x(2) - 2*C(2,3)*x(3) - g1*A(1,2) - g2*A(2,2)$$

$$rt*e(3) - 2*C(3,1)*x(1) - 2*C(3,2)*x(2) - 2*C(3,3)*x(3) - g1*A(1,3) - g2*A(2,3)$$

Ajustando para zero e rearranjando a equação:

2*C(1,1)*x(1) + 2*C(1,2)*x(2) + 2*C(1,3)*x(3) + g1*A(1,1) + g2*A(2,1) = 0 + rt*e(1)

2*C(2,1)*x(1) + 2*C(2,2)*x(2) + 2*C(2,3)*x(3) + g1*A(1,2) + g2*A(2,2) = 0 + rt*e(2)

2*C(3,1)*x(1) + 2*C(3,2)*x(2) + 2*C(3,3)*x(3) + g1*A(1,3) + g2*A(2,3) = 0 + rt*e(3)

As derivadas com seus respectivos multiplicadores de Lagrange são:

b(1) - A (1,1)*x(1) - A(1,2)*x(2) - A(1,3)*x(3)

b(2) - A (2,1)*x(1) - A(2,2)*x(2) - A(2,3)*x(3)

Ajustando para zero, temos a equação da restrição original:

b(1) - A (1,1)*x (1) – A (1,2)*x (2) – A (1,3)*x (3) = 0

b(2) - A (2,1)*x (1) – A (2,2)*x (2) – A (2,3)*x (3) = 0

Rearranjando:

A (1,1)*x (1) + A (1,2)*x (2) + A (1,3)*x (3) = b(1)

A (2,1)*x(1) + A(2,2)*x (2) + A (2,3)*x (3) = b(2)

Agora temos cinco equações lineares com respectivas variáveis. Podem ser escritas sucintamente por:

D*y = k + rt*f

Onde:

D = | 2*C A' A zeros (m, m) |

k = | zeros (n, 1) b |

f = | e zeros (m, 1) |

II.11 – Explicação econômica do multiplicador de Lagrange

Considerando a derivada desta função em relação a b(1), temos:

$$dL/d\, b(1) = g1$$

Uma vez que a função Lagrangeana é igual a função objetivo original para os portfólios factíveis, podemos interpretar esta derivada como a mudança na utilidade por unidade alterada no lado direito da equação com 1 restrição. A função objetivo está em termos de equivalência da variância.

No caso de restrição completa do investimento, o Lagrange reflete a utilidade marginal nos termos equivalentes da variância para cada unidade monetária adicionada ao investimento.

Dividindo pela tolerância ao risco do investidor, temos a utilidade marginal dos recursos adicionados em termos equivalentes do retorno esperado. ASSAF NETO (2003) define retorno esperado pela média ponderada do retorno de cada ativo em relação a sua participação no total da carteira.

II.12 – Objetivos lineares adicionais

Consideramos o investidor que tem a função utilidade com 3 ou mais argumentos em particular uma função quadrada e outras lineares de variáveis de decisão. Para ilustrar usaremos um investidor que associa a desutilidade com devido rendimento da renda com a taxação de seu ganho.

$$up = ep + uy*yp - vp/rt$$

Onde utilidade da renda (uy) é uma constante que indica a atitude do investidor frente à renda. Para concretizar o exemplo usamos um valor negativo igual a “-0,2” para uy. Assim, para cada unidade monetária recebida da renda, serão 80% (1-0,2) tão desejável como uma unidade recebida em forma de capital ganho.

Deixamos q representando o vetor de rendimento dos ativos:

$$q = \begin{vmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{vmatrix}$$

yp = x'*q

Como já foi realizado anteriormente, converteremos a função utilidade para variância equivalente multiplicando todos os termos por rt, temos:

vup = rt*ep +(uy*rt)*yp - vp

Para nossa equação com três ativos e 2 restrições, a derivada da função Lagrangeana para i ativos fica:

rt*e(i)+(uy*rt)*y(i)-2*C(i,1)*x(1)-2*C(i,2)*x(2)-2*C(i,3)*x(3)-g1*A(1,i)-g2*A(2,i)

Reajustando para zero e rearranjando, temos:

2*C(1,1)*x(1)+2*C(1,2)*x(2)+2*C(1,3)*x(3)+g1*A(1,1)+g2*A(2,1) =
0+rt*e(1)+(uy*rt)*y(i)

Colocando essas n equações juntas com m equações para que as derivadas tenham relação com o multiplicador de Lagrange associados com as restrições dadas pelo sistema (n + m) linear de equação sob a forma de:

D*y = k + rt*f + (uy*rt)*r

Onde *D*, *y e f* são definidas como antes e r = | q zeros (m,1) |

O portfólio pode ser determinado, multiplicando cada termo pela inversa de *D*. Assim:

y = inv (D)*k + rt*inv (D)*f + (uy*rt)*inv (D)*r

Podemos reescrever a equação em:

y = mvp + rt*z + (uy*rt)*zy

II.13 – Encontrando o portfólio com maior retorno esperado

Problema inicial:

Maximizar: e-vp/rt

Quando rt=infinito

Temos:

Maximizar ep

Onde,

$$ep=x'*e$$

$$vp=x'*C*x$$

Sujeito a

$$A*x=b$$

$$Lb \le x \le ub$$

CAPÍTULO III – ANÁLISE EMPÍRICA

III.1 – Mercado Acionário Brasileiro

Apesar do considerável desenvolvimento atual do mercado de capitais brasileiro, sua popularização é muito recente como alternativa de investimento para poupança disponível dos agentes econômicos. Com a implementação do *Home Broker* ocorre à entrada de pequenos e médios investidores de modo rápido e seguro para acesso as ações (PIAZZA, 2005). A BOVESPA é a fornecedora da tecnologia necessária para interligação entre as corretoras. A corretora é uma instituição financeira incumbida dentro do sistema financeiro nacional pela intermediação de compra e venda de ativos financeiros para pessoas físicas ou jurídicas. Sendo necessária para sua existência a autorização do BACEN e autorização da CVM para exercício de atividade.

A evolução do mercado acionário é importante para a economia do país ao passo que o mercado segue o desenvolvimento econômico. O mercado acionário é um ambiente financeiro em que recursos de poupadores são disponibilizados para investidores, aumentando a poupança interna e de longo prazo (MANKIW, 2001).

O mercado acionário brasileiro é pouco desenvolvido e apresenta baixa capitalização bursátil, devido à recente emissão primária de ações. Por este motivo há um reduzido número de companhias com capital aberto, o que justifica a concentração de transação nestas poucas empresas.

III.2 – Escolha da Carteira

A construção da amostra para formação da carteira estabeleceu 27 ações selecionadas entre as mais negociadas na BOVESPA em termos de liquidez no ano de 2011 e que também apresentaram base de dados completa entre janeiro de 2006 e dezembro de 2011.

A informação sobre liquidez foi retirada do IBRX-50 no endereço eletrônico da BM&F BOVESPA.

> "O IBrX-50 é um índice que mede o retorno total de uma carteira teórica composta por 50 ações selecionadas entre as mais negociadas na BM&F BOVESPA em termos de liquidez, ponderadas na carteira pelo valor de mercado das ações disponíveis à negociação."

Para se enquadrar neste índice as ações devem ser uma das 50 com maior negociabilidade e negociada pelo menos 80% dos pregões nos 12 meses anteriores. Dentro deste critério 23 empresas foram excluídas da amostra por apresentar histórico de negociação insuficiente entre janeiro de 2006 e 2011. Esse cuidado foi tomado para não haver divergência de critérios, todas variáveis devem ter mesmo período, número de dados e, para diminuir ao máximo qualquer viés de informação, foi optado pela utilização da mesma fonte. Esses conjuntos de restrições servem para manter os ativos perfeitamente comparáveis.

O resultado dessa seleção está disposto na tabela abaixo com os respectivos setores de atuação, indicados pelo endereço eletrônico da BOVESPA.

CÓDIGO	**SETOR**	**AÇÃO**
CYRE3	Const. e Transp. / Constr. e Engenh.	CYRELA REALT
RSID3	Const. e Transp. / Constr. e Engenh.	ROSSI RESID
CCRO3	Const. e Transp. / Transporte	CCR AS
GOLL4	Const. e Transp. / Transporte	GOL
LAME4	Consumo Cíclico / Comércio	LOJAS AMERIC
LREN3	Consumo Cíclico / Comércio	LOJAS RENNER
CSAN3	Consumo Não Básico / Alimentos Processados	COSAN
AMBV4	Consumo Não Cíclico / Bebidas	AMBEV
PCAR4	Consumo Não Cíclico / Comércio Distr.	P.ACUCAR-CBD
NATU3	Consumo Não Cíclico / Pr Pessoal Limp	NATURA
DASA3	Consumo Não Cíclico/Saúde	DASA
RENT3	Diversos	LOCALIZA
BRAP4	Financ. e Outros / Holdings Divers	BRADESPAR
BBAS3	Financ. e Outros / Interms. Financs.	B.BRASIL
BBDC4	Financ. e Outros / Interms. Financs.	BRADESCO
ITUB4	Financ. e Outros / Interms. Financs.	ITAUUNIBANCO
VALE5	Mats. Básicos / Mineração	VALE
BRKM5	Mats. Básicos / Químicos	BRASKEM
CSNA3	Mats. Básicos / Sid Metalurgia	SID NACIONAL

GGBR4 USIM5	Mats. Básicos / Sid Metalurgia Mats. Básicos / Sid Metalurgia	GERDAU USIMINAS
PETR4	Petróleo, Gás e Biocombustíveis	PETROBRAS
TNLP4 VIVT4 TIMP3	Telecomunicação / Telefonia Fixa Telecomunicação / Telefonia Fixa Telecomunicação / Telefonia Móvel	TELEMAR TELEF BRASIL TIM PART S/A
CMIG4 ELET3	Utilidade Públ. / Energ. Elétrica Utilidade Públ. / Energ. Elétrica	CEMIG ELETROBRAS

III.3 – Dados e Ferramentas

Os dados dos ativos selecionados foram obtidos da fonte do sistema Economática, ferramenta especializada para análise de investimentos em ações, presente no mercado desde 1986. Para a organização dos dados e cálculo das fórmulas necessárias foi utilizada ferramenta Excel na versão 2007 com extensão VBA e Solver.

Para este exercício foi empregado o fechamento diário de janeiro de 2006 a dezembro de 2011, onde calculou-se o retorno diário das ações analisadas, tendo obtido 1491 observações. Em posse desses dados com a inclusão de fórmula para encontrar a média no Excel, encontramos o retorno médio de cada um dos ativos.

Aplicando programação VBA montou-se uma ferramenta para auxiliar no processo de cálculo e montagem da matriz de covariância, sendo a diagonal desta matriz a variância dos ativos. Em posse da matriz, ponderando o peso de cada ativo dentro da carteira encontramos a forma quadrática definida para os elementos da matriz de covariância. Após inserir a raiz quadrada deste número encontramos o desvio padrão. LEMES JÚNIOR, RIGO E CHEROBIM (2002) afirmam que o desvio padrão é utilizado em finanças como valor de risco, quando decisões são tomadas a partir das médias. Isto é, quando a decisão é tomada pela média esperada do retorno, quanto maior o desvio-padrão, maior o risco.

III.4 – *Risk Free*

Uma vez que no mercado norte americano a taxa do título do governo de 10 anos é utilizada consensualmente como a taxa de retorno livre de risco (DAMODARAN, 2011), a melhor adequação deste modelo à situação brasileira, devido às claras divergências com o mercado norte americano, não são títulos do governo. O mais próximo que muitos analistas utilizam é a taxa SELIC, conforme demonstra VARGA (2001), que a SELIC e a taxa determinada pelo Certificado de Depósito Interbancário (CDI) são muito próximas, sendo empregadas tanto por profissionais do ramo de investimentos, como também por acadêmicos.

Devido à similaridade explicitada entre as taxas mencionadas, neste trabalho será utilizada a taxa de CDI como taxa livre de risco por ser amplamente utilizada por Fundos de investimentos como referencial de rentabilidade.

III.5 – Cálculo Inicial

Durante o cálculo da carteira inicial considerou-se peso igual a 3,7% para todos os 27 ativos do portfólio, de modo a não influir na composição da carteira.

GROPPELLI e NIKBAKHT (2002) admitem por hipótese que o risco é uma medida da volatilidade dos retornos. Deste modo, calculamos o índice de Sharpe diminuindo a taxa de retorno livre de risco do retorno real do período sobre o desvio padrão da carteira.

III.6 – Resultado parcial

Retorno no período	0,305691
Risk free no período	1,9484
Sharpe	-87,07
σ^2	0,00036
σ	0,018867

O resultado obtido da carteira inicial foi de que o retorno do ativo sem risco é maior que o da carteira hipotética, tendo resultado em um índice de Sharpe negativo. A conclusão é que não seria válido investir nesta carteira. O Investidor estaria em uma posição melhor sem a aplicação neste portfólio.

III.7 – Otimização da Carteira Inicial

Otimizando a carteira para maximizar Sharpe, sujeito a restrição de que nenhum ativo pode concentrar mais de 35% da carteira total e mantendo a restrição inicial de que só existe a possibilidade de posicionamento não negativo.

O resultado desta otimização foi a formação um portfólio com 4 ações das 27 iniciais. A composição desta nova carteira é de 35% de ações da AMBV4, 35% de CCRO3, 25,7% de

LREN3, 4,3% de RENT3. Podemos observar que a otimização do índice de Sharpe neste caso resultou em poucas ações com melhor rentabilidade. Isto é, como nosso objetivo no problema de otimização era de buscar as ações que tiveram o melhor histórico de alta aliada à menor oscilação, foram eliminadas do portfólio ações que pouco contribuíram para o incremento do retorno, ou ainda contribuíram negativamente. Assim, como a restrição de concentração para formação do portfólio foi arbitrada para que não ocorresse em peso maior que 35%, não há limitação para diversificação de risco.

Calculou-se o retorno da carteira ótima no período analisado e encontramos um retorno maior que o referencial livre de risco. Com isso, o novo índice de Sharpe é positivo e igual a 4,86.

III.8 – Análise do Resultado

Analisando o resultado pela equação formadora de Sharpe, podemos dizer que seu numerador é uma informação de rentabilidade real média, porque expressa a informação de quanto o rendimento da carteira superou ou ficou abaixo da variação do retorno livre de risco.

No caso inicial observamos um índice de Sharpe negativo porque o resultado de rendimento foi inferior ao referencial utilizado. Na otimização da carteira o resultado foi um índice de Sharpe positivo porque houve uma melhora no retorno da carteira que a tornou mais rentável que taxa de retorno referencial, essa melhora da carteira tornou o investimento viável.

O risco que o suposto investidor assumiu em relação ao retorno livre de risco foi válido pelo resultado do retorno. Deste modo, é factível para o investidor aplicar sua poupança no portfólio otimizado.

O denominador, que é o desvio padrão, serve como indicativo da oscilação da volatilidade do portfólio. Assim sendo, quanto maior o desvio padrão verificado, maior foi a oscilação da carteira. E, quanto maior a volatilidade da carteira, maior risco o investidor está assumindo.

Enquanto o desvio padrão da carteira inicial foi de 1,88% (valor aproximado), o da carteira otimizada foi de 1,86% (valor aproximado). Isso implica que, em uma situação onde os retornos de ambas as carteiras fossem iguais, o investidor escolheria a que lhe ofereceu o menor risco com a mesma expectativa de retorno e menor oscilação.

Retorno no período	2, 038932
Risk free no período	1, 94840
Sharpe	4, 86
σ^2	0, 00035
σ	0, 018625

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste estudo, vimos como calcular o índice de Sharpe de uma carteira de ações. Com esse conhecimento foi possível analisar a melhor carteira com a comparação do índice de Sharpe, pontuando benefícios e desvantagens de assumir posicionamento em algum desses portfólios. Neste trabalho em particular, aprofundamos as possibilidades inerentes a otimização de carteira com possibilidade de alteração de peso dos ativos componentes do portfólio.

Em geral, o índice de Sharpe tem utilidade em comparar carteiras que podem ser Fundos de investimentos determinados, os quais o investidor não tem influência para qualquer alteração de sua composição. Neste caso, o índice serve para a escolha do Fundo a ser investido, ou ainda na quantidade ótima a ser direcionada para mais de um Fundo de investimento. Contudo é importante ressaltar que Sharpe é calculado a partir de resultados obtidos em determinado período passado. Não é possível prever a rentabilidade de ações ou Fundos, mas é um bom indicativo de volatilidade futura, medida pelo desvio padrão.

De modo geral, o trabalho atendeu as propostas iniciais atingindo seu objetivo. O embasamento teórico procurou desenvolver uma base para facilitar o entendimento empírico do trabalho. A contribuição desse trabalho está na utilização e verificação do modelo exposto por William Sharpe para otimização de carteira. Nesse processo, observou-se que a carteira otimizada pelo método descrito na pesquisa obteve desempenho superior que a carteira original.

Comparando as carteiras sem a utilização de Sharpe, podemos chegar a conclusões similares às encontradas com auxílio da fórmula. Todavia, no mercado financeiro brasileiro seria desgastante fazer esse cálculo para mais de 50 ações ou Fundos de investimento. Neste caso a fórmula de Sharpe irá auxiliar no processo de tomada de decisão.

BIBLIOGRAFIA

AKERLOF, G.. The market for lemons. Quarterly Journal of Economics, 84: 488-500, 1970.

ASSAF NETO, A. Matemática Financeira e suas aplicações 5ed. São Paulo: Atlas, 2000.

ASSAF NETO, A. Mercado Financeiro.São Paulo: Atlas, 2003.

BM&FBOVESPA.Índice Brasil 50 – IbrX5-0. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoIndice.aspx?Indice=IBrX50&Idioma=pt-br> Acesso em 10 de fevereiro de 2012.

CARVALHO, F.C. Fundamentos da escola pós-keynesiana: a teoria de uma economia monetária. In: AMADEO, E.J. (Org.) Ensaios sobre economia política moderna: teoria e história do pensamento econômico. São Paulo, Marco Zero. 1989.

DAMODARAN.A. *The Little Book of Valuation: How to Value a Company, Pick a Stock and Profit.* Wiley, 2011.

ECONOMÁTICA. Base de Dados. Disponível em: <http://www.economatica.com/pt/> Acesso em 8 de janeiro de 2012.

ECONOMIA TEÓRICA. Escolha dos Consumidores. Disponível em: <http://ecoteorica.blogspot.com.br/2010/09/escolhas-dos-consumidores.html> Acesso em 25 de novembro de 2011.

FGV. Instituto Brasileiro Economia. Disponível em: <http://portalibre.fgv.br/main.jsp?lumChannelId=402880811D8E34B9011D92B6160B0D7D> Acesso em 13 de janeiro de 2012.

FRIEDMAN, M. *A Theory of Consumption Function*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.

GITMAN, L. Princípios de Administração Financeira. 7ed. São Paulo: Harbra, 2002.

GROPPELLI, A.A.; NIKBAKHT, E. Administração financeira. São Paulo: Saraiva, 2002.

KEYNES, J. M. A teoria geral do emprego, do juro e da moeda. Ed. Nova Cultural, 1936.

LEMES JÚNIOR, A.B.; RIGO,C; CHEROBIM, A.P. Administração Financeira: princípios, fundamentos e práticas brasileiras. São Paulo: Atlas, 2002

MANKIW, N. G. Introdução à Economia – Princípios de Micro e Macroeconomia. São Paulo: Campus, 2001

MARKOVITZ, H.M. *Portfolio Selection. Journal of Finance,* v.7 n.1, p. 77-91, Março, 1952.

MCGRAW-HILL Book *Company Portfolio Theory and Capital Markets, New York*, 1970

MCGRAW-HILL *Book Company Portfolio Theory and Capital Markets, the Original Edition with a Forward, New York*, 2000.

PIAZZA, M. C. Bem Vindo à Bolsa de Valores. 7. ed. São Paulo: Novos Mercados, 2005.

SHARPE, W. F. *Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. Journal of Finance* XIX (3): 425–42, 1964.

SHARPE. W. F.<http://www.stanford.edu/~wfSharpe/> Acesso em 08 de dezembro de 2011.

Sharpe.W.F. *The Utility Hill*. Disponível em: <http://www.stanford.edu/~wfSharpe/mia/opt/mia_op1.gif> Acesso em 12 de fevereiro de 2012.

VALOR ECONÔMICO. Valor investe- Estratégia. Disponível em: <http://www.valor.com.br/valor-investe/o-estrategista/1019138/ibovespa-ou-ibrx> Acesso em 20 de dezembro de 2011.

VARGA, G. Índice de Sharpe e outros indicadores de desempenho aplicados a fundos de ações brasileiros. RAC – Revista de Administração Contemporânea, v. 5, nº 3, set./dez. 2001.

VARIAN, Hal R. Microeconomia: princípios básicos. 7. ed. Rio de Janeiro : Editora Campus, 2006.