

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
Observatório do Valongo  
Departamento de Astronomia

# Um estudo em teoria de cordas e branas

Projeto de Final de Curso  
Aluno: João Paulo Morais Graça  
Orientador: Prof.Dr. Henrique Boschi-Filho  
Rio de Janeiro, Agosto de 2009

# Agradecimentos

Aos professores José Abdalla Helayël-Neto e Alexander Smith, do CBPF, que me ensinaram mais do que física.

Ao professor Jorge Albuquerque Vieira, que segue a lembrar-se da travessia do grande Ulisses. Por ter colaborado para expandir o *umwelt* pessoal de cada de um de nós. Toadas para um grande mestre.

Ao meu orientador, professor Henrique Boschi-Filho, pelas discussões sobre cordas, branas, bolsa de valores e outros.

Aos amigos da astronomia, em especial Marcelo, Maurício, Thiago, Rodrigo, Ricardo, Daniel, Débora, Camila e Regina. Milan Kundera disse que a grande serventia dos amigos é ajudar-nos a recordar o passado em comum. Que nunca nos esqueçamos do passado em comum, então.

Para Victor e Virginia, que hablaram em portunhol comigo nesses últimos anos. Finalmente é hora de empezar o trabalho.

Para Deise, cujo dar as mãos foi fundamental nessa jornada. Se o rodeio é o caminho do espírito, como quer Hegel, muitas vezes é preciso alguém para trazer-nos em segurança para onde tudo é mais leve.

E finalmente para meus pais, por não tentarem convencer-me a cursar direito ou economia.

# Resumo

A teoria de cordas tem revolucionado a forma de pensarmos o espaço e o tempo. Apesar de não ser uma teoria comprovada experimentalmente, é atualmente a melhor candidata a uma teoria quântica da gravidade. Nesse trabalho faremos um estudo de seus fundamentos, desde a formulação clássica até a quantização de cordas supersimétricas. Abordaremos as Dp-branas, objetos necessários para a coerência da teoria de cordas, que surgem naturalmente em seu limite de baixas energias. Por fim veremos como a teoria de cordas pode explicar a fórmula de entropia de Bekenstein-Hawking, apresentando uma motivação geométrica para a correspondência entre espaços de anti-De Sitter e teorias conformes de campo.

# Abstract

String theory has radically changed the way we consider time and space. Although it is not experimentally certified, it currently represents the strongest possibility for a quantum theory of gravity. Throughout this study its groundings will be analyzed, from classical formulation to quantization of supersymmetric strings. We will consider the importance of Dp-Branes as necessary elements for the coherence of string theory, which appear naturally within their low energy limit. Finally, we will examine how string theory can be used to explain Bekenstein-Hawking's entropy law, by showing a geometrical motivation for the correspondence between anti-De Sitter spaces and conformal field theories.

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Cordas bosônicas</b>	<b>3</b>
2.1 A teoria clássica . . . . .	3
2.2 A teoria quântica . . . . .	13
<b>3 Cordas supersimétricas na superfície de mundo</b>	<b>21</b>
3.1 O formalismo de RNS . . . . .	21
3.2 Expansão em modos e quantização . . . . .	27
<b>4 Cordas supersimétricas no espaço-tempo</b>	<b>35</b>
4.1 Cordas supersimétricas no espaço-tempo . . . . .	36
4.2 Cordas Heteróticas . . . . .	40
4.3 Teoria de cordas em baixas energias . . . . .	42
<b>5 Dp-branas</b>	<b>45</b>
5.1 Uma visão das Dp-branas . . . . .	45
5.2 A dualidade T para cordas . . . . .	47
5.3 A dualidade T para supercordas e o problema das cargas . . . . .	50
5.4 Dp-branas como soluções da supergravidade . . . . .	51

<b>6</b>	<b>Considerações sobre o princípio holográfico</b>	<b>54</b>
6.1	P-branas negras . . . . .	54
6.2	A entropia de buracos negros . . . . .	56
6.3	O grupo conforme e a isometria do espaço de anti-De Sitter . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Perspectivas</b>	<b>60</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A teoria de cordas apareceu originalmente no final dos anos 60 na tentativa de explicar o espectro de partículas hadrônicas. Apesar de alguns sucessos iniciais, não conseguiu sobreviver como uma teoria para a força forte, onde a cromodinâmica quântica mostrou-se melhor sucedida. No entanto, por possuir um bóson tensorial de spin 2 em seu espectro, a teoria de cordas manteve-se como uma candidata a uma teoria quântica da gravitação. Em meados da década de 80, ao ser demonstrado o cancelamento de anomalias em teorias supersimétricas em 10 dimensões, que são incorporadas naturalmente em um tipo de teoria de cordas, ocorreu a chamada primeira revolução em supercordas. Em meados da década de 90, com a descoberta de diversas dualidades conectando os diferentes tipos de teorias de cordas, ocorreu a chamada segunda revolução em supercordas.

Esta monografia procura abordar diversos tópicos em teoria de supercordas, desde seus fundamentos até alguns resultados mais recentes. O capítulo 2 trata do assunto de cordas bosônicas, que não foi apenas a primeira teoria de cordas desenvolvida, como é a mais simples de ser tratada. Apesar de suas inconsistências, seu estudo ainda é fundamental para um melhor entendimento de questões envolvendo vínculos e dimensão crítica. No breve estudo que será feito de cordas heteróticas veremos como uma teoria de cordas pode incorporar, consistentemente, um setor puramente bosônico na teoria. O capítulo 3 trata de cordas supersimétricas na superfície de mundo. A quantização de cordas supersimétricas na superfície de mundo foi desenvolvida na primeira metade da década de 70 por P. Ramond, A. Neveu e J. H. Schwarz, entre outros. Neste tratamento será visto que a dimensão crítica de uma teoria de supercordas ocorre em 10 dimensões, que passa a ser a dimensão do espaço-tempo onde as supercordas são definidas. Uma segunda forma de estudar cordas supersimétricas é inserir os férmions diretamente no espaço-tempo, e não mais na superfície

de mundo. Faremos isto no capítulo 4. Apesar de tornar mais transparente a supersimetria, a quantização de supercordas no espaço-tempo foi realizada originalmente apenas no cone de luz, tendo falhado todas as tentativas de uma quantização canônica até recentemente. Vamos rever a teoria de supercordas no espaço-tempo, sem nos ater à sua quantização, apenas para descobrir seu espectro não-massivo. Uma breve história das origens da supersimetria em supercordas pode ser encontrada em [1].

No capítulo 4 veremos também que existem 5 tipos de teorias de supercordas e, através de seu espectro não-massivo, iremos construir uma teoria de campos em baixas energias. Supõe-se que a supergravidade em  $D=10$  represente este estado de baixas energias. O capítulo 5 é dedicado ao estudo de  $D_p$ -branas, objetos estendidos que são necessários para manter a consistência das teorias de cordas. Tais  $D_p$ -branas podem ser definidas como objetos nos quais as pontas das cordas abertas se prendem ou como soluções do tipo buraco negro para objetos estendidos na supergravidade. Neste capítulo também apresentaremos a dualidade  $T$ , tanto para cordas bosônicas quanto para supercordas. Veremos que para cordas bosônicas a dualidade  $T$  leva ao aparecimento natural das  $D_p$ -branas, enquanto que para supercordas ela apresenta indícios de uma dualidade entre dois tipos de teoria.

O capítulo 6 apresenta uma breve revisão sobre buracos negros e mostra alguns resultados recentes da teoria de supercordas, como o cálculo da entropia de Bekenstein-Hawking e a correspondência entre teoria de cordas na fronteira de uma  $D_p$ -brana e campos quânticos conformes. Este capítulo foi inserido como uma motivação para o estudo das teorias de cordas como uma forte ferramenta teórica na elucidação da estrutura do espaço-tempo onde vivemos.



# Capítulo 2

## Cordas bosônicas

O estudo de cordas é o estudo de objetos fundamentais estendidos no espaço-tempo. Neste capítulo iremos estudar apenas objetos bosônicos, ou seja, objetos que obedecem à estatística de Bose-Einstein. Nosso tratamento será relativístico, e a ação clássica de uma corda será introduzida em analogia à ação de uma partícula relativística. A quantização da corda será feita na formulação canônica, procurando manter sempre a covariância de Lorentz intacta. Veremos que isso irá nos levar a vínculos no espaço de Hilbert da teoria quântica, fixando as possíveis dimensões da teoria. As referências principais para este capítulo são o cap. 2 de [2] e o cap. 2 de [3]

### 2.1 A teoria clássica

Cordas bosônicas são objetos estendidos em um espaço-tempo a princípio com  $D+1$  dimensões. A teoria bosônica para cordas apresenta problemas, como o aparecimento de táquions em seu espectro e a ausência de férmions, partículas fundamentais na natureza. No entanto, seu estudo é mais simples que o de supercordas (cordas supersimétricas), e nos é útil no entendimento do formalismo necessário para o desenvolvimento destas últimas.

O espaço onde vivem os parâmetros da corda será por nós chamado de espaço de parâmetros, enquanto a superfície gerada pelo movimento da corda no espaço-tempo será chamada de superfície de mundo. O espaço de parâmetros é bidimensional e denotaremos os parâmetros por  $(\tau, \sigma)$ . A princípio não precisamos identificar o parâmetro temporal com uma coordenada específica da corda, porém essa identificação pode ser feita através da escolha de um calibre específico. Caso seja feita essa escolha, dizemos que estamos trabalhando no calibre estático. [4]

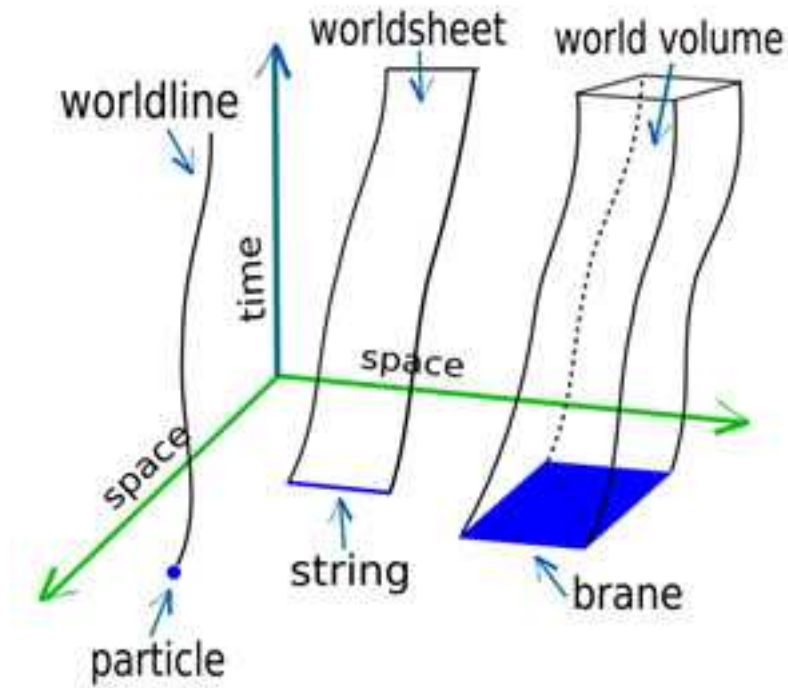


Figura 2.1: Partículas traçam linhas de universo no espaço-tempo. Cordas e branas traçam superfícies de maior dimensionalidade.

Para propor uma ação para a corda relativística, vamos nos inspirar na ação para a partícula relativística, dada pela integral do intervalo entre os pontos iniciais e finais do movimento, o intervalo da linha de universo,

$$S = -m \int ds. \quad (2.1.1)$$

onde  $ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , utilizaremos a métrica diagonal  $\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, \dots, +1)$ ,  $c = 1$ ,  $\hbar = 1$  e  $m$  é a massa da partícula, que pode a princípio ser vista como uma constante para acertar a dimensionalidade da ação.

No caso de cordas, tratando-se de um objeto estendido em uma dimensão espacial, seu movimento no espaço-tempo gera uma superfície de mundo, de forma que podemos propor uma ação do tipo

$$S = -T \int dA, \quad (2.1.2)$$

onde  $dA$  é um elemento infinitesimal da superfície de mundo e  $T$  novamente é uma constante para acertar a dimensionalidade da ação. Comparando as ações acima, como elas devem manter suas dimensionalidades, e  $[dA] = [L]^2$ ,  $[S] = 1$ , concluímos que  $T = [L]^{-2}$ , e podemos associar  $T$  à tensão da corda. Vamos denotar as coordenadas espaço-temporais da corda por  $X^\mu$ , para diferenciar das coordenadas do espaço-tempo,  $x^\mu$ , onde  $\mu = 0, \dots, D - 1$ . As derivadas das coordenadas da corda em relação aos parâmetros  $(\tau, \sigma)$  são definidas como

$$\frac{dX^\mu}{d\tau} \equiv \dot{X}^\mu \quad \text{e} \quad \frac{dX^\mu}{d\sigma} \equiv X'^\mu. \quad (2.1.3)$$

Com isso, podemos escrever o elemento de superfície relativístico como

$$S = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (2.1.4)$$

cuja ação é chamada de ação de Nambu-Goto. Através dela podemos utilizar o princípio de ação mínima para encontrar as equações de movimento. Antes disso, vamos definir os momentos conjugados como

$$\mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (2.1.5)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -T \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (2.1.6)$$

A variação da ação resulta em

$$\delta S = \int d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_{0^{\sigma^*}} - \int d\tau d\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \delta X^\mu, \quad (2.1.7)$$

onde  $\sigma^*$  e  $0$  indicam as extremidades da corda.

Se tomarmos as condições de contorno a seguir,

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma^*) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = 0, \quad (2.1.8)$$

podemos obter a equação de movimento

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0, \quad (2.1.9)$$

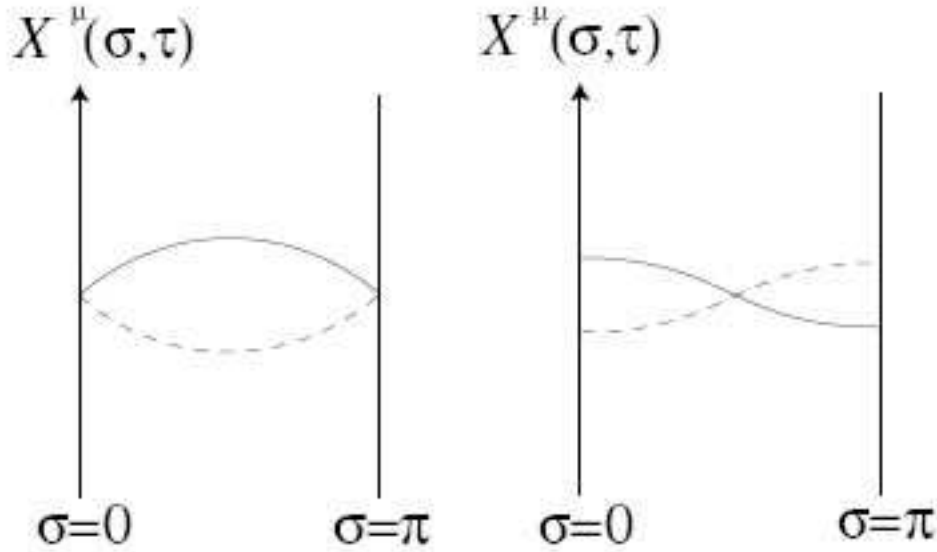


Figura 2.2: Condições de contorno de Dirichlet fixam os extremos da corda, já condições de contorno de Neumann permitem que os extremos variem.

onde, pelas definições (2.1.5) e (2.1.6) percebemos que ela é incrivelmente complicada. A condição de contorno tomada acima é dita condição de contorno de Neumann. Uma outra possibilidade para chegar as mesmas equações seria utilizar as condições de contorno de Dirichlet e fixar os extremos da corda. Por muito tempo foi pensado que essa possibilidade não teria correspondência física, já que viola a conservação de momento, fluindo momento pelos extremos da corda. Em um próximo capítulo veremos que essa possibilidade existe, se propusermos que as extremidades das cordas estão ligadas a outros objetos físicos, as Dp-Branas.

Nem todos os momentos definidos por (2.1.5) e (2.1.6) são independentes. Relações algébricas nos levam ao resultado

$$P_\mu^{\tau 2} + T X_\mu'^2 = 0, \quad (2.1.10)$$

$$P_\mu^\tau X'^\mu = 0, \quad (2.1.11)$$

que percebemos como vínculos nas coordenadas da corda. Em geral estes vínculos estão ligados a simetrias na teoria. No caso de cordas, a simetria mais evidente é a possibilidade de reparametrizá-

la. A escolha dos parâmetros utilizados é totalmente arbitrária e podemos fazer uma mudança de variável da forma

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} &= \tilde{\sigma}(\sigma, \tau), \\ \tilde{\tau} &= \tilde{\tau}(\sigma, \tau).\end{aligned}\tag{2.1.12}$$

Essa possibilidade de reparametrizar os parâmetros da corda nos permite fixar dois graus de liberdade na teoria e trabalhar apenas com os graus de liberdade transversos, ou seja,  $D - 2$  graus de liberdade. Isso é feito através de um calibre que utiliza as coordenadas do cone de luz. Para uma construção detalhada deste procedimento, ver [4]. No presente capítulo iremos evitar trabalhar neste calibre.

A ação de Nambu-Goto, apesar de ser geometricamente mais fácil de entender, não é a mais apropriada para se trabalhar, pois é evidentemente não-linear. Por isso iremos utilizar uma segunda ação, a chamada ação de Polyakov.

$$S_\sigma = -\frac{1}{2}T \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu,\tag{2.1.13}$$

onde os índices  $\alpha$  e  $\beta$  vão de 0 a 1, correspondendo aos parâmetros  $\tau$  e  $\sigma$ ,  $d^2\sigma = d\tau d\sigma$ ,  $\sqrt{-h}$  é raiz de menos determinante de  $h$ , e  $h^{\alpha\beta}$  é um tensor cujas propriedades veremos a seguir.

A princípio pode parecer que as ações de Nambu-Goto e Polyakov representam diferentes ações, porém podemos mostrar, ao menos a nível clássico, que elas geram as mesmas equações de movimento.

A primeira percepção que podemos ter acerca da ação de Polyakov é que o campo  $h^{\alpha\beta}$  é um campo auxiliar, já que não possui nenhum termo dinâmico. Tirando sua equação de movimento chegaremos a conclusão que ele depende unicamente da dinâmica da corda, e a restringe. Para ver isso vamos calcular o tensor energia-momento da teoria na superfície de mundo. Sabemos que

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T} \frac{\delta S_\sigma}{\delta h^{\alpha\beta}},\tag{2.1.14}$$

de onde podemos calcular (omitindo os índices de Lorentz) que

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \partial_\delta X.\tag{2.1.15}$$

Este tensor deve naturalmente ser nulo, já que o campo  $h^{\alpha\beta}$  não tem dinâmica. Logo

$$\partial_\alpha X \partial_\beta X = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \partial_\delta X. \quad (2.1.16)$$

Calculando o determinante da equação acima na matriz  $\alpha, \beta$ , temos

$$\sqrt{-\det(\partial_\alpha X \partial_\beta X)} = \frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \partial_\delta X, \quad (2.1.17)$$

que mostra a equivalência das ações de Nambu-Goto e Polyakov a nível clássico. Resta-nos uma simetria a considerar. De (2.1.15) podemos tirar que o traço do tensor energia-momento é nulo,

$$h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.1.18)$$

Essa é uma característica de uma simetria de Weyl, que está ligado a transformações de escala. De fato, a ação de Polyakov pode ser vista como uma teoria para D bósons livres em um espaço conforme de 1+1 dimensões. Tendo em mão 3 simetrias locais (as duas reparametrizações e mais a simetria de Weyl) podemos fixar completamente o campo auxiliar da forma

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.1.19)$$

onde  $\eta_{\alpha\beta}$  é a métrica de Minkowski em 1+1 dimensões,  $\eta_{\alpha\beta} = (-1, +1)$  e a ação de Polyakov fica

$$S_\sigma = \frac{T}{2} \int d^2\sigma (\dot{X}^2 - X'^2), \quad (2.1.20)$$

cuja equação de movimento tem a forma de uma equação de onda,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \right) X^\mu = 0. \quad (2.1.21)$$

Sabemos que a solução geral para uma equação de onda sem massa é dada pela soma de dois termos independentes, a direita (Right) e a esquerda (Left),

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma). \quad (2.1.22)$$

Precisamos agora aplicar as condições de contorno de Neumann. Estas nos permitem ter dois tipos de cordas: Abertas e fechadas. A solução geral para cordas fechadas é dada independentemente pelos setores à direita e à esquerda,

$$X_R^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (2.1.23)$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (2.1.24)$$

onde introduzimos a dimensão da escala da corda,  $l_s$ , que está ligada a tensão da corda da forma

$$l_s^2 = \frac{1}{\pi T}. \quad (2.1.25)$$

Iremos fazer a associação ainda com um terceiro parâmetro, o parâmetro de Regge

$$\frac{1}{2}l_s^2 = \alpha', \quad (2.1.26)$$

cujo significado histórico foge ao alcance deste trabalho. Como este parâmetro ainda é muito utilizado para denotar limites de energia na teoria, iremos mantê-lo presente. Requerer que as coordenadas das cordas sejam reais nos levam a vínculos sobre os modos de Fourier

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^* \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^*, \quad (2.1.27)$$

onde  $*$  denota o completo conjugado.

Veremos que, quando quantizarmos a teoria, estes modos de vibração, redefinidos, irão funcionar de forma similar aos operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico quântico.

A solução geral para cordas abertas obedecendo a condições de contorno de Neumann é dada por

$$X^\mu = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + il_s \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} \cos(m\sigma), \quad (2.1.28)$$

onde os setores à direita e à esquerda deixam de ser independentes. Antes de prosseguirmos, devemos atentar para o fato de que devemos levar em contato os vínculos (2.1.10) e (2.1.11) ao quantizarmos a teoria. Para isso vamos reescreve-los de uma forma mais natural, utilizando o tensor energia-momento da ação de Polyakov. A partir de (2.1.15) temos

$$T_{01} = T_{10} = \dot{X} \cdot X', \quad (2.1.29)$$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2), \quad (2.1.30)$$

que nada mais é que (2.1.10) e (2.1.11) reescritas de outra forma, confirmando assim a nulidade do tensor energia-momento para o campo auxiliar.

Devemos notar também que em (2.1.23), (2.1.24) e (2.1.27), nós denotamos a componente zero da expansão de Fourier como  $l_s p^\mu$ . Podemos mostrar que a componente  $p^\mu$  é, de fato, o momento da corda. Se olharmos para a equação (2.1.28), podemos vê-la como a função de um objeto com centro de massa em  $x^\mu$  propagando-se livremente, mais uma série de osciladores independentes. A forma da função já nos dá uma dica sobre o momento da corda. Porém, para formalizar o que é o momento da corda de fato, devemos utilizar o método de Noether, como veremos a seguir.

A densidade de momento da corda é encontrada admitindo-se uma simetria translacional na teoria. A Lagrangeana, tratando de um campo livre, deve ser invariante sob esta transformação. Para uma transformação qualquer, a variação da ação é dada por

$$\delta S = -T \int d^2\sigma (\partial_\alpha \delta X^\mu) \partial^\alpha X_\mu. \quad (2.1.31)$$

Fazendo uma integral por partes, temos que

$$\delta S = -T \int d^2\sigma (\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu) \delta X_\mu + T \int d^2\sigma \partial^\alpha (\partial_\alpha X^\mu \delta X_\mu), \quad (2.1.32)$$

onde o primeiro termo da expressão acima anula-se pela equação de movimento. Para uma translação, temos que  $\delta X^\mu = b^\mu$  constante, logo encontramos uma corrente conservada, dada por

$$\mathcal{P}_\alpha^\mu = T \partial_\alpha X^\mu. \quad (2.1.33)$$

Notemos que a conservação do momento nada mais é que nossa equação de movimento

$$\partial_\tau \mathcal{P}_\mu^\tau + \partial_\sigma \mathcal{P}_\mu^\sigma = 0. \quad (2.1.34)$$

Seguindo a prescrição de Noether, a carga conservada é dada pela integral da componente zero do vetor no espaço. No caso, na segunda coordenada do espaço dos parâmetros,

$$p^\mu(\tau) = \int_0^{\sigma^*} \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma, \quad (2.1.35)$$

e podemos agora demonstrar que o momento é conservado,



$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma^*} \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^{\sigma^*} \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} d\sigma = -\mathcal{P}_\mu^\sigma|_0^{\sigma^*}. \quad (2.1.36)$$

As condições de contorno de Neumann para cordas abertas e o fato de que  $\sigma = 0$  e  $\sigma = \sigma^*$  representam o mesmo ponto para cordas fechadas prova a conservação do momento. Substituindo a corrente conservada (2.1.33) em (2.1.35), e utilizando a solução geral para cordas abertas, podemos realizar a integral mais acima da forma que

$$p^\mu = \int_0^\pi T l_s^2 p^\mu + \dots = T \pi l_s^2 p^\mu, \quad (2.1.37)$$

onde a expressão ... engloba os termos em cosseno, que serão nulos pela integral. Utilizando a identificação (2.1.26) concluímos que o termo que denotamos como momento coincide com o momento da corda.

Vamos agora calcular a Hamiltoniana do sistema,

$$H = \int (\dot{X}_\mu P_\tau^\mu - \mathcal{L}) d\sigma, \quad (2.1.38)$$

utilizando a Lagrangeana da ação de Polyakov (2.1.20). Temos

$$H = \int (\dot{X}_\mu T \dot{X}^\mu - \frac{T}{2} (\dot{X}^2 - X'^2)) d\sigma = \frac{T}{2} \int (\dot{X}^2 + X'^2) d\sigma, \quad (2.1.39)$$

que é nula, dado nosso vínculo (2.1.30). Podemos reescrevê-la em termos de seus modos. Realizando o cálculo para cordas abertas, temos que

$$\begin{aligned} \dot{X}^2 &= l_s^2 \sum_m \sum_n \alpha_m \alpha_n \cos(n\tau) \cos(m\tau) e^{-i(n+m)\tau}, \\ X'^2 &= -l_s^2 \sum_m \sum_n \alpha_m \alpha_n \sin(n\tau) \sin(m\tau) e^{-i(n+m)\tau}, \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

somamos os termos, temos que

$$H = \frac{1}{2} \int \alpha_m \alpha_n \left( \sum_m \sum_n e^{-i(m+n)\tau} \cos[(m+n)\sigma] \right) d\sigma, \quad (2.1.41)$$

onde a integral irá anular os termos em cosseno, da forma que só sobrevive uma soma, quando  $m = -n$ . Logo

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n. \quad (2.1.42)$$

Refazendo os cálculos para cordas fechadas, o resultado seria

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n} \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n), \quad (2.1.43)$$

o que nos permite calcular a relação de dispersão da teoria. Novamente olhando para (2.1.28), podemos tirar uma relação entre o momento e o modo zero de Fourier. Para cordas abertas,

$$\alpha_0^\mu = l_s p^\mu, \quad (2.1.44)$$

e de forma similar para cordas fechadas

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2} l_s p^\mu, \quad (2.1.45)$$

como calculamos que  $H = 0$ , da relação de dispersão  $M^2 = -p^\mu p_\mu$ , temos que

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n, \quad (2.1.46)$$

para cordas abertas, e

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n), \quad (2.1.47)$$

para cordas fechadas. Essa relação clássica de dispersão será levemente distorcida quando quantizarmos a teoria. Note que nas expressões acima omitimos por simplicidade os índices de Lorentz. Toda vez que aparecer  $\alpha_{-n} \alpha_n$  tem-se  $\alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu}$  na verdade

Vamos também reescrever nossos vínculos em termos de seus modos de vibração. Precisamos nos manter atentos aos vínculos, pois eles serão responsáveis por desacoplar os estados não-físicos do espaço de Hilbert da teoria. Estados não-físicos irão aparecer porque não fizemos restrições clássicas aos modos de vibração em nossas equações de movimento. Poderíamos tê-lo feito, no já citado calibre de cone de luz, porém isso nos faria perder a covariância de Lorentz em nossas equações. Nossa escolha foi a de manter a covariância de Lorentz e trabalhar com todos os modos clássicos, impondo os vínculos diretamente no espaço de Hilbert.

Unindo as condições (2.1.30) e (2.1.29) em uma única,

$$(\dot{X}^\mu \pm X'^\mu)^2 = 0, \quad (2.1.48)$$

temos, para cordas abertas,

$$\begin{aligned} (\dot{X}^\mu \pm X'^\mu)^2 &= (l_s \sum_n e^{-int \cos(n\sigma)} \pm il_s \sum_n e^{-ints \sin(n\sigma)})^2 \\ &= (l_s^2 \sum_m \sum_n \alpha_m \alpha_n e^{-2i(m+n)(\tau \pm \sigma)}). \end{aligned} \quad (2.1.49)$$

Fazendo uma mudança  $m + n \rightarrow p$ , temos

$$(\dot{X}^\mu \pm X'^\mu)^2 = 2l_s^2 \sum_p L_p e^{-2ip(\tau \pm \sigma)}, \quad (2.1.50)$$

onde os modos de Fourier agrupados

$$L_p = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{p-n} \alpha_n, \quad (2.1.51)$$

são chamados de geradores de Virasoro e terão o papel de impor os vínculos no espaço de Hilbert. Notamos que de (2.1.42) temos que

$$H = L_0. \quad (2.1.52)$$

Agora que já temos todos os elementos da teoria clássica, podemos quantizar a teoria, como se dará na próxima seção.

## 2.2 A teoria quântica

Para quantizarmos a teoria, iremos seguir a prescrição de Dirac e tornar os modos de Fourier em operadores, transformando os parênteses de Poisson em comutadores. Seguindo a analogia com a mecânica analítica, o momento conjugado às coordenadas da corda é definido como

$$P^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}^\mu} = T \dot{X}^\mu. \quad (2.2.53)$$

O único parêntese de Poisson não nulo, a tempos iguais, é dado por

$$[P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')]_{P.B.} = \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.2.54)$$

onde podemos inserir as soluções para os modos, (2.1.27) para cordas abertas e (2.1.24) e (2.1.23) para cordas fechadas. Os parênteses de Poisson em termos dos modos são então dados por

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu]_{P.B.} = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu]_{P.B.} = im\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad (2.2.55)$$

e

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu]_{P.B.} = 0. \quad (2.2.56)$$

Podemos utilizar as definições acima para encontrarmos a álgebra dos geradores de Virasoro,

$$[L_m, L_n]_{P.B.} = i(m - n)L_{m+n}, \quad (2.2.57)$$

que é a álgebra clássica dos operadores de Virasoro. Ao quantizarmos a teoria, veremos que ela também será modificada.

Podemos agora seguir a prescrição de Dirac e transformar (2.2.55) e (2.2.56) em comutadores. Fazendo uma sutil redefinição dos parâmetros,

$$\begin{aligned} \alpha_m^\mu &= \sqrt{m} a_m^\mu \quad \text{para } m > 0, \\ \alpha_{-m}^\mu &= \sqrt{m} a_n^{\mu\dagger} \quad \text{para } m > 0, \end{aligned} \quad (2.2.58)$$

podemos reconstruir a relação entre operadores de criação e aniquilação,

$$[a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = i\eta^{\mu\nu} \delta_{m,n}, \quad (2.2.59)$$

e, da mesma forma que na mecânica quântica, podemos utilizar estes operadores para construir o espectro de partículas da teoria. Inicialmente definimos um estado de vácuo que é aniquilado por todos os operadores de destruição,

$$a_m^\mu |0\rangle = 0 \quad \text{para } m > 0. \quad (2.2.60)$$

Estados podem ser criados da forma

$$a_{m_1}^{\mu_1 \dagger} \dots a_{m_n}^{\mu_n \dagger} |0\rangle = |\phi\rangle, \quad (2.2.61)$$

cujos momentos são definidos pela equação de autovalor

$$p^\mu |\phi\rangle = k^\mu |\phi\rangle. \quad (2.2.62)$$

É importante mencionarmos o fato de que nem todos os estados criados desta forma têm norma positiva. Um exemplo simples disto pode ser visto abaixo,

$$\langle 0 | a_m^0 a_m^{0 \dagger} | 0 \rangle = -1. \quad (2.2.63)$$

Se houvessemos trabalhado no calibre do cone de luz, teríamos previamente eliminado dois graus de liberdade da teoria, impondo os vínculos a nível clássico, e somente seria possível criar estados de norma positiva, já que  $a^+ \propto a^0 + a^1$  e  $a^- \propto a^0 - a^1$ , os modos associados ao cone de luz, não seriam modos físicos e o modo que nos dá problema,  $a^0$ , cujo sinal da métrica de Minkowski é responsável por criar os estados não-físicos, não teria dinâmica. Como decidimos trabalhar covariantemente, temos que impor vínculos diretamente no espectro para eliminar estes estados não-físicos.

Vamos agora quantizar os geradores de Virasoro. Como são funções dos modos de Fourier, se tornarão operadores quânticos e vamos chamá-los de operadores de Virasoro. Para quantizá-los, é necessário aplicar a ordenação normal

$$L_p = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{p-n} \alpha_n :, \quad (2.2.64)$$

onde, a partir de (2.2.55), vemos que precisamos nos preocupar apenas com  $L_0$ . Para os outros operadores de Virasoro, o ordenamento normal não irá influenciar, já que os operadores comutam. Por causa de  $L_0$ , a álgebra de Virasoro será modificada quanticamente. Pode-se mostrar [2] que

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{2} m(m^2 - 1) \delta_{m+n,0}, \quad (2.2.65)$$

onde  $D$  representa a dimensionalidade do espaço-tempo em questão. Precisamos também fazer uma alteração em  $L_0$ , de outra forma teríamos a teoria clássica e não poderíamos reproduzir (2.2.65). Faremos isso adicionando uma constante a  $L_0$ , pois o termo que causa a anomalia em (2.2.65) é proporcional a identidade.

Não iremos derivar (2.2.65) aqui. Há algumas formas de fazê-lo. É possível propor um termo genérico, da forma

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n}, \quad (2.2.66)$$

e, através do uso recursivo da identidade de Jacobi, encontrar a função correta para  $A(m)$  (ver seção 2.2.2 de [2]) ou, tratando a teoria de cordas bosônicas como uma teoria conforme em 2D, os operadores de Virasoro são entendidos como operadores do grupo conforme. Pode-se projetar o espaço dos parâmetros no plaxo complexo e utilizar a idéia de quantização radial para reproduzir (2.2.65). Para este método, ver [5].

É hora de utilizarmos os vínculos da teoria no espaço de Hilbert. Nossa primeira tentativa deveria ser utilizar todos os operadores de Virasoro como vínculos (lembre-se que são todos nulos, na teoria clássica), da forma

$$L_m|\phi\rangle = 0 \quad \text{para } m \in \mathcal{Z}, \quad (2.2.67)$$

porém podemos ver que

$$0 = \langle \phi|[L_m, L_{-m}]\phi \rangle = 2m \langle \phi|L_0|\phi \rangle + \frac{D}{12}m(m^2 - 1) \langle \phi|\phi \rangle \neq 0, \quad (2.2.68)$$

logo, não é possível utilizar todos os operadores de Virasoro para aniquilar os estados físicos. Com isso faremos a imposição de que apenas metade dos operadores de Virasoro aniquilam os estados físicos,

$$L_m|\phi\rangle = 0 \quad \text{para } m > 0, \quad (2.2.69)$$

juntamente com a condição para  $L_0$  que, como foi dito anteriormente, deve ser adicionado a uma constante,

$$(L_0 - a)|\phi\rangle = 0|\phi\rangle. \quad (2.2.70)$$

Essas duas condições são necessárias para que o estado  $|\phi\rangle$  seja físico. No entanto, não são suficientes para excluir todos os estados não-físicos na teoria. De fato, ainda não começamos a resolver esse problema. O que teremos é que, para determinados valores de  $a$  e  $D$ , estados com norma negativa seguirão a aparecer na teoria. Para outros valores, apenas estados de norma positiva

estarão presentes na teoria. Para determinar os possíveis valores para  $a$  e  $D$ , iremos procurar por estados de norma zero, que irão definir valores críticos para  $a$  e  $D$ . É esperado então que, variando os valores para  $a$  e  $D$ , estaremos entre uma teoria apenas com estados físicos e uma teoria com ambos os estados, físicos e não-físicos.

Vamos definir estados espúrios como estados que obedecem a condição

$$(L_0 - a)|\psi\rangle = 0, \quad (2.2.71)$$

e que são ortogonais a todos os estados físicos da teoria. Ou seja,

$$\langle \phi | \psi \rangle = 0. \quad (2.2.72)$$

Um exemplo de estado espúrio é dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n} |\chi_n\rangle, \quad (2.2.73)$$

como ele precisa obedecer a (2.2.71), então

$$(L_0 - a) \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n} |\chi_n\rangle = 0, \quad (2.2.74)$$

utilizando (2.2.65), podemos abrir essa relação da forma

$$(L_0 - a + n) |\chi_n\rangle = 0. \quad (2.2.75)$$

Na verdade, qualquer estado espúrio pode ser reescrito como

$$|\psi\rangle = L_{-1} |\chi_1\rangle + L_{-2} |\chi_2\rangle, \quad (2.2.76)$$

já que  $L_{-3} = [L_{-1}, L_{-2}]$ . Podemos mostrar que ele é normal aos estados físicos, já que

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi | L_{-n} |\chi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_n | L_n | \phi \rangle^* = 0. \quad (2.2.77)$$

Se um estado  $|\psi\rangle$  é espúrio e físico, então ele deve ser normal a ele mesmo. Vamos agora determinar o valor de  $a$  procurando por estados físicos e espúrios. Tomemos o estado

$$|\psi \rangle = L_{-1}|\chi_1 \rangle, \quad (2.2.78)$$

que deve obedecer

$$(L_0 - a + 1)|\chi_1 \rangle = 0, \quad (2.2.79)$$

pois como ele também é físico, deve obedecer

$$L_m|\psi \rangle = (L_0 - a)|\psi \rangle = 0 \quad \text{para } m > 0. \quad (2.2.80)$$

Da álgebra de Virasoro,

$$L_1L_{-1} = 2L_0 + L_{-1}L_1, \quad (2.2.81)$$

podemos calcular

$$L_1|\psi \rangle = L_1L_{-1}|\chi_1 \rangle = (2L_0 + L_{-1}L_1)|\chi_1 \rangle = 2L_0|\chi_1 \rangle = 2(a - 1)|\chi_1 \rangle = 0, \quad (2.2.82)$$

de onde tiramos que  $a = 1$  é o valor na fronteira entre estados de norma positiva e estados de norma negativa. Da mesma forma, podemos determinar o valor para  $D$ . Basta utilizar um outro estado espúrio,

$$|\psi \rangle = (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\chi \rangle, \quad (2.2.83)$$

que satisfaz as condições

$$(L_0 + 1)|\chi \rangle = L_m|\chi \rangle = 0 \quad \text{para } m > 0, \quad (2.2.84)$$

e, da mesma forma que foi feito anteriormente, vamos utilizar relações entre os operadores de Virasoro:

$$\begin{aligned} [L_1, L_{-2} + \gamma L_{-1}^2] &= 3L_{-1} + 2\gamma L_0L_{-1} + 2\gamma L_{-1}L_0, \\ &= (3 - 2\gamma)L_{-1} + 4\gamma L_0L_{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.85)$$

Nosso primeiro vínculo implica em



$$L_1|\psi \rangle = L_1(L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\chi \rangle = [(3 - 2\gamma)L_{-1} + 4\gamma L_0 L_{-1}]|\chi \rangle, \quad (2.2.86)$$

onde o primeiro termo anula-se para  $\gamma = \frac{3}{2}$ . O segundo termo anula-se porque

$$L_0 L_{-1}|\chi \rangle = L_{-1}(L_0 + 1)|\chi \rangle = 0. \quad (2.2.87)$$

Deste vínculo,  $L_1|\psi \rangle = 0$ , tiramos que  $\gamma = \frac{3}{2}$ . Para calcular  $D$ , vamos levar em conta um segundo vínculo,  $L_2|\psi \rangle = 0$ . Novamente usaremos uma relação entre operadores de Virasoro,

$$[L_2, L_{-2} + \frac{3}{2}L_1^2] = 13L_0 + 9L_{-1}L_1 + \frac{D}{2}, \quad (2.2.88)$$

que resulta em

$$L_2|\psi \rangle = L_2(L_{-2} + \frac{3}{2}L_1^2)|\chi \rangle = (-13 + \frac{D}{2})|\chi \rangle, \quad (2.2.89)$$

cujá nulidade nos diz que a dimensão de espaço-tempo procurada é de  $D = 26$ .

Esses estados de norma nula não são realmente físicos. Nossa primeira observação foi de que eles são normais aos estados físicos da teoria, ou seja, eles se desacoplam da teoria. O que encontramos foi que há uma certa quantidade desses estados para  $D = 26$ , que é chamada dimensão crítica da teoria de cordas bosônicas. Nós não provamos aqui que para  $a = 1$  e  $D = 26$  a teoria é livre de estados de norma negativa, porém é razoável supor que isto ocorre, já que os estados criados pela segunda metade de operadores de Virasoro,  $L_{-m}$  geram estados espúrios. Para uma prova formal do chamado teorema de no-ghost ver a seção 2.3.3 de [2].

Vamos, por fim, descrever alguns estados físicos da teoria. Como não estamos interessados particularmente no caso bosônico, veremos apenas alguns exemplos da teoria de cordas abertas. O estado mais simples é o estado fundamental. Aplicando a condição (2.2.71) com  $a = 1$ ,

$$0 = (L_0 - 1)|0; k \rangle = (\alpha' p^2 - 1)|0; k \rangle, \quad (2.2.90)$$

temos um táquion de massa  $M^2 = -\frac{1}{\alpha'}$ , e, como observamos no início do capítulo, teorias de cordas bosônicas apresentam táquions em seu espectro de partículas.

O primeiro estado criado com nossos operadores tem momento  $p$  e polarização  $\xi^\mu$ ,

$$\xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |0; p \rangle. \quad (2.2.91)$$

A condição  $(L_0 - 1) = 0$  nos dá

$$0 = (\alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n - 1) \xi_{\mu} \alpha_{-1}^{\mu} |0; p \rangle, \quad (2.2.92)$$

e da relação de comutação entre os modos de Fourier tiramos que

$$\alpha' p^2 \xi_{\mu} \alpha_{-1}^{\mu} |0; p \rangle = 0. \quad (2.2.93)$$

Logo, temos um bóson vetorial de massa nula. Os primeiros estados massivos da teoria podem ser conseguidos com

$$\alpha_{-2}^{\mu} |0; p \rangle \quad e \quad \alpha_{-1}^{\mu} \alpha_{-1}^{\nu} |0; p \rangle, \quad (2.2.94)$$

que nos daria  $\alpha M^2 = 1$ . Não iremos mostrar aqui que este corresponde a uma partícula massiva de spin 2.

Neste capítulo desenvolvemos uma teoria quântica para cordas bosônicas. Descobrimos que a teoria clássica possui simetrias que geram vínculos nas coordenadas espaço-temporais, e decidimos não impor estes vínculos na teoria clássica, o que nos resultou em uma teoria quântica com estados não-físicos. Para eliminar estes estados não-físicos, foi preciso inserir vínculos no espaço de Hilbert. Ao utilizar os modos de Fourier para criar partículas, vimos que o estado fundamental representa um táquion, e o estado de massa nula é um vetor. Não fizemos o cálculo explícito, porém poderíamos mostrar que este vetor possui  $D - 2$  graus de liberdade, como requer uma representação vetorial sem massa do grupo de Lorentz. Nosso objetivo não é entrar em detalhes na teoria bosônica, já que esta teoria prescinde de férmions. No próximo capítulo iremos inserir um termo fermiônico na ação e ver que isto gera novos vínculos na teoria, modificando o valor da dimensão crítica do espaço-tempo, entre outras implicações.

# Capítulo 3

## Cordas supersimétricas na superfície de mundo

No capítulo precedente estudamos uma teoria para cordas bosônicas. Vimos que ela possui dois problemas fundamentais, a presença de táquions na teoria e a ausência de férmions. Nosso primeiro passo deve ser a inclusão de férmions na teoria. Ao fazermos isso notaremos a presença de uma simetria entre férmions e bósons, conhecida como supersimetria. A presença da supersimetria irá permitir o desacoplamento dos táquions do espectro e nos fornecer uma teoria de cordas consistente.

Há duas formas de inserir férmions na teoria de cordas. A primeira é inserindo-os como férmions na superfície de mundo e vetores no espaço-tempo. Esse formalismo é conhecido como formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz, e será o objeto de estudo deste capítulo. A segunda possibilidade é inserí-los como férmions diretamente no espaço-tempo, como fazemos usualmente em uma teoria de campos, e será objeto de estudo do próximo capítulo.

A apresentação deste capítulo segue o método apresentado em [2] e [3].

### 3.1 O formalismo de RNS

Pode parecer estranho inserir férmions na superfície de mundo, mas devemos ter em mente que para uma formiga caminhando na superfície de mundo, este é seu universo, e os índices espaço-temporais nada mais seriam que índices de uma simetria interna. Novamente isso se dá na relação que há entre teoria de cordas (e supercordas) e uma teoria conforme (e superconforme) em 1+1 D.

Como vimos no capítulo precedente, a ação para cordas bosônicas é dada por

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu. \quad (3.1.1)$$

Pensando em termos de uma teoria de campos, vamos acrescentar férmions na superfície de universo que venham a satisfazer uma equação de Dirac sem massa (um termo massivo quebraria a simetria de escala, o que não é desejável)

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu), \quad (3.1.2)$$

onde  $\rho^\alpha$  satisfaz a álgebra de Dirac

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}. \quad (3.1.3)$$

Em duas dimensões podemos ter férmions de Majorana, e encontrar representações utilizando matrizes reais que satisfazem a equação acima. Vamos escolhe-las da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.4)$$

Os férmions na superfície de mundo devem comportar-se como variáveis de Grassmann e obedecer à relação de anti-comutação

$$\{\psi^\mu, \psi^\nu\} = 0. \quad (3.1.5)$$

Estes férmions são espinores de duas componentes, e podemos decompô-los da forma

$$\psi^\mu = \begin{bmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{bmatrix}, \quad (3.1.6)$$

e, como tratam-se de spinores de Majorana, vale a relação

$$\bar{\psi} = \psi^T \beta \quad (3.1.7)$$

onde

$$\beta = i\rho^0. \quad (3.1.8)$$

No capítulo precedente não nos utilizamos das coordenadas do cone de luz na ação bosônica,

porém neste capítulo iremos implementá-las, com vista a melhor calcular as equações de movimento. O referencial de cone de luz nada mais é que o uso de coordenadas da forma

$$x^+ = \frac{1}{2}(x^0 + x^1) \quad \text{e} \quad x^- = \frac{1}{2}(x^0 - x^1), \quad (3.1.9)$$

e de igual forma temos

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1). \quad (3.1.10)$$

Assim podemos reescrever a ação fermiônica em termos de suas componentes (omitindo os índices espaço-temporais)

$$S_f = iT \int d^2\sigma (\psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+), \quad (3.1.11)$$

com as equações de movimento resultantes,

$$\partial_+ \psi_- = 0 \quad \text{e} \quad \partial_- \psi_+ = 0, \quad (3.1.12)$$

descrevendo espinores de Weyl a esquerda e a direita. Encontramos então que os spinores  $\psi_{\pm}$  são spinores de Majorana-Weyl, ou seja, são reais e possuem quiralidade bem definida.

Agora podemos demonstrar que há transformações supersimétricas que deixam a teoria invariante. Transformações supersimétricas relacionam bósons e fermions em um mesmo multiplete e nos permitem implementar simetrias internas não-trivialmente. Para que a simetria ocorra, é necessário que haja o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Isso pode ocorrer sem a necessidade de utilizar as equações de movimento (dizemos que ocorre fora da camada de massa) ou tendo de utilizar as equações de movimento (dizemos que ocorre apenas na camada de massa). De fato a álgebra supersimétrica desta teoria só se fecha ao utilizarmos as equações de movimento. Isto deve-se ao fato de que a equação de movimento é necessária para igualar os graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Veremos mais sobre esta necessidade no capítulo seguinte.

A ação (3.1.2) é invariante sobre as transformações

$$\delta X^{\mu} = \bar{\epsilon} \psi^{\mu}, \quad (3.1.13)$$

$$\delta \psi^{\mu} = \rho^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\mu} \epsilon, \quad (3.1.14)$$

onde  $\epsilon$  é um espinor de Majorana-Weyl. Dois férmions juntos comportam-se como um bóson, da forma que ambos os lados de (3.1.13) são bosônicos. Em (3.1.14), ambos os lados são fermiônicos, pois há um número ímpar de férmions de cada lado da expressão.

Para deixar esta supersimetria mais evidente, poderíamos nos valer do conceito de supercampo, que é um campo definido em um superespaço que inclui tanto variáveis bosônicas quanto variáveis fermiônicas, da forma que nossa superfície de mundo teria componentes  $(\sigma^\alpha, \theta_A)$ . Não iremos trabalhar com supercampos neste formalismo, porém para maiores detalhes, ver [3] e [2].

Vamos seguir o mesmo procedimento do capítulo precedente e descobrir os vínculos da teoria. Para cordas bosônicas, descobrimos que os vínculos encontravam-se na nulidade do tensor de energia-momento, e utilizamos este tensor para impor os vínculos no espaço de Hilbert através de seus modos, os geradores de Virasoro. Vamos propor um modelo semelhante para cordas supersimétricas. A diferença principal encontra-se no fato de que há mais vínculos para cordas supersimétricas do que para cordas bosônicas. Isso é compreensível, posto que temos agora, além das simetrias de reparametrização e Weyl, uma nova simetria, a supersimetria.

Estes vínculos irão nos servir, novamente, para desacoplar os estados de norma negativa da teoria. Ao quantizarmos a teoria, a parte fermiônica será quantizada da forma usual

$$\{\psi_A^\mu(\sigma, \tau), \psi_B^\nu(\sigma', \tau)\} = \pi\eta^{\mu\nu}\delta_{AB}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.1.15)$$

Logo, para a componente zero dos modos, como  $\eta^{00} = -1$ , os estados fermiônicos também irão apresentar estados de norma negativa, além dos estados de norma negativa provenientes da parte bosônica. Isso reforça a idéia de que precisamos de mais vínculos, pois temos mais estados a eliminar.

Para calcular o tensor de energia-momento da teoria, basta retornar com a métrica  $h^{\mu\nu}$  em (3.1.2) e realizar o mesmo procedimento do capítulo precedente. Desta vez, o tensor terá um termo bosônico e um termo fermiônico,

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{2} \bar{\psi}^\mu \rho_\alpha \partial_\beta \psi_\mu. \quad (3.1.16)$$

A supersimetria também nos gera um vetor conservado. Vamos utilizar o método de Noether para calculá-lo. A variação da ação (3.1.2) resulta

$$\delta S = \int d^2\sigma (2(\partial_\alpha \delta X^\mu) \partial^\alpha X_\mu + \delta \bar{\psi} \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \delta \psi_\mu). \quad (3.1.17)$$

Utilizando as transformações (3.1.13) e (3.1.14), temos

$$\delta S = \int d^2\sigma (2(\partial_\alpha \bar{\epsilon} \psi^\mu) \partial^\alpha X_\mu + \rho^\beta \partial_\beta X^\mu \bar{\epsilon} \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \rho^\beta \partial_\beta X^\mu \epsilon). \quad (3.1.18)$$

Como de costume, vamos realizar uma integração por partes. Para obtermos o resultado desejado devemos levar em conta o fato de que

$$\rho^\alpha \rho^\beta \partial_\alpha \partial_\beta X^\mu = 0, \quad (3.1.19)$$

onde a parte antisimétrica da matriz  $\rho^\alpha \rho^\beta$  se cancela com a simetria das derivadas, e a parte simétrica da matriz leva-nos a equação de movimento para  $X^\mu$ . Devemos utilizar também uma propriedade dos spinores de Majorana-Weyl em duas dimensões,

$$\bar{\psi} \phi = \phi \bar{\psi}. \quad (3.1.20)$$

Utilizando essas duas propriedades, podemos reduzir a variação da ação a

$$\delta S = \int d^2\sigma (\partial_\alpha \bar{\epsilon}) J^\alpha \quad (3.1.21)$$

onde  $J^\alpha$  é a supercorrente definida como

$$J^\alpha = -\frac{1}{2} (\rho^\alpha \rho^\beta \psi_\mu) \partial_\beta X^\mu. \quad (3.1.22)$$

Reescrevendo estas correntes conservadas em termos das coordenadas do cone de luz,

$$J_+ = \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu \quad \text{e} \quad J_- = \psi_-^\mu \partial_- X_\mu, \quad (3.1.23)$$

e

$$\begin{aligned} T_{++} &= \partial_+ X_\mu \partial_+ X^\mu + \frac{i}{2} \psi_+^\mu \partial_{+\mu}, \\ T_{--} &= \partial_- X_\mu \partial_- X^\mu + \frac{i}{2} \psi_-^\mu \partial_{-\mu}, \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

encontramos todos os geradores clássicos de simetria na superfície de mundo. Novamente o traço do

tensor energia-momento é zero, devido à invariância de Weyl,  $T_{+-} = T_{-+} = 0$ . Da mesma forma, a supercorrente também possui uma restrição, dada por

$$\rho_\alpha J^\alpha = 0, \quad (3.1.25)$$

já que  $\rho^\alpha \rho^\beta \rho_\alpha = 0$ .

A partir desses geradores, podemos calcular uma álgebra da forma

$$\begin{aligned} \{J_+(\sigma), J_+(\sigma')\} &= \pi\delta(\sigma - \sigma')T_{++}(\sigma), \\ \{J_-(\sigma), J_-(\sigma')\} &= \pi\delta(\sigma - \sigma')T_{--}(\sigma), \\ \{J_+(\sigma), J_-(\sigma')\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Como mencionado anteriormente, temos nesta teoria mais estados não-físicos presentes do que na teoria bosônica. Isso deve-se ao fato de que nem todos os graus de liberdade de  $X^\mu$  e  $\psi^\mu$  são físicos, reflexos das simetrias da teoria na superfície de mundo. Logo, precisaremos de mais vínculos no espaço de Hilbert para eliminá-los. No caso bosônico, calculamos facilmente que as componentes de  $T_{\alpha\beta}$  eram nulas. No caso supersimétrico, podemos esperar que todos os geradores sejam nulos,

$$J_+ = J_- = T_{++} = T_{--} = T_{+-} = T_{-+} = 0, \quad (3.1.27)$$

a partir da álgebra das correntes calculadas acima. Porém não nos é possível demonstrar, a partir da Lagrangeana (3.1.2) que o mesmo se dá, já que está Lagrangeana já está com os calibres todos estabelecidos. Lembramos que a nulidade do tensor energia-momento foi demonstrada a partir da falta de dinâmica para o campo auxiliar  $h^{\mu\nu}$  da qual partimos. Agora podemos entender melhor este campo auxiliar. Voltando à teoria antes da fixação do calibre e incluindo a parte fermiônica, temos a seguinte ação,

$$S \sim T \int d^2\sigma \sqrt{h} [h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\mu + \frac{1}{2} \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu + \frac{1}{2} (\bar{\chi}_\alpha \rho^\alpha \rho^\beta \psi^\mu) (\partial_\beta X_\mu - \frac{1}{4} \bar{\chi}_\beta \psi_\mu)]. \quad (3.1.28)$$

Esta é a ação da supergravidade em duas dimensões. O motivo de  $h^{\alpha\beta}$  não ter dinâmica deve-se ao fato do campo gravitacional não ter dinâmica em duas dimensões (sabemos que podemos tratar a gravitação como uma teoria de Yang-Mills e utilizar a simetria de calibre para eliminar graus de



liberdade). Para fechar as transformações de simetria é necessário incluir um segundo campo espinorial,  $\chi$ , que também não terá dinâmica, funcionando como um campo auxiliar espinorial. Neste trabalho iremos aceitar (3.1.27) e impô-los no espaço de Hilbert, como fizemos no caso bosônico. Para maiores detalhes ver [2] ou [6].

## 3.2 Expansão em modos e quantização

Antes de aplicarmos os vínculos nos estados de Hilbert, precisamos encontrar os operadores que serão utilizados como operadores de criação e de aniquilação. Já vimos que a ação fermiônica pode ser escrita em coordenadas do cone de luz como

$$S_f \sim \int d^2\sigma (\psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+), \quad (3.2.29)$$

que nos dá as equações de movimento (3.1.12). Porém, ao gerá-las, não nos preocupamos com as condições de fronteira vindas da integração por partes que é usualmente realizada para conseguir isolar o termo da variação da ação. Vamos ver isso explicitamente agora,

$$\delta S_f \sim \int d^2\sigma (\delta \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \delta \psi_\mu) \quad (3.2.30)$$

sendo o segundo termo o que nos interessa, pois iremos realizar uma integração por partes. O termo de fronteira, abrindo-o em suas componentes no cone de luz, é dado por

$$\delta S \sim \int d\tau (\psi_+ \delta \psi_+ - \psi_- \delta \psi_-)|_{\sigma=\pi} - (\psi_+ \delta \psi_+ - \psi_- \delta \psi_-)|_{\sigma=0}, \quad (3.2.31)$$

e para que nossas equações de movimento sejam válidas, este termo tem de ser nulo. Porém há formas distintas de anulá-lo. Para cordas abertas, as duas extremidades da corda podem se anular diferentemente. O sinal relativo em uma das extremidades não nos é importante, da forma que podemos escolher

$$\psi_+^\mu|_{\sigma=0} = \pm \psi_-^\mu|_{\sigma=0}. \quad (3.2.32)$$

No entanto, o sinal relativo no outro extremo da corda é de extrema importância e dará origem a dois ramos da teoria. Caso optemos por igualar os sinais no outro extremo da corda,

$$\psi_+^\mu|_{\sigma=\pi} = \psi_-^\mu|_{\sigma=\pi}, \quad (3.2.33)$$

teremos que obedecer a condição

$$\sum d_n^\mu e^{-in(\tau-\pi)} = \sum d_n^\mu e^{-in(\tau+\pi)}. \quad (3.2.34)$$

Como vale para qualquer  $\tau$ , escolhendo  $\tau = 0$ , teremos que

$$\text{sen}(n\pi) = -\text{sen}(n\pi), \quad (3.2.35)$$

e logo nossa solução será da forma

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathcal{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (3.2.36)$$

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathcal{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}. \quad (3.2.37)$$

Essa condição é chamada condição de fronteira de Ramond (ou R). Podemos também optar pela outra opção, que é escolher sinais relativos no outro extremo da corda,

$$\psi_+^\mu|_{\sigma=\pi} = -\psi_-^\mu|_{\sigma=\pi}, \quad (3.2.38)$$

e da mesma forma que acima, pode-se mostrar que a solução desta condição se dá por

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathcal{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)}, \quad (3.2.39)$$

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathcal{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}. \quad (3.2.40)$$

Essa condição é chamada de condição de fronteira de Neveu-Schwarz (ou NS). Logo veremos que os espinores descritos por condições de Ramond são férmions no espaço-tempo, enquanto os espinores de Neveu-Schwarz são bósons no espaço-tempo.

Para cordas fechadas, os extremos da corda são iguais, e só há duas escolhas,

$$\psi_{\pm}(\sigma) = \pm\psi_{\pm}(\sigma + \pi). \quad (3.2.41)$$

Pode-se mostrar que para cada componente do espinor é possível escolher um tipo de condição de fronteira. Ou seja,

$$\psi_{-}^{\mu}(\sigma, \tau) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} d_n^{\mu} e^{-2n(\tau-\sigma)} \quad \text{ou} \quad \psi_{-}^{\mu}(\sigma, \tau) = \sum_{r \in \mathcal{Z}+1/2} b_r^{\mu} e^{-2ir(\tau-\sigma)}, \quad (3.2.42)$$

$$\psi_{+}^{\mu}(\sigma, \tau) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \bar{d}_n^{\mu} e^{-2n(\tau+\sigma)} \quad \text{ou} \quad \psi_{+}^{\mu}(\sigma, \tau) = \sum_{r \in \mathcal{Z}+1/2} \bar{b}_r^{\mu} e^{-2ir(\tau+\sigma)}, \quad (3.2.43)$$

o que nos leva a quatro possibilidades. Teremos que setores do tipo NS-NS e R-R serão bósons no espaço-tempo, enquanto que setores do tipo NS-R e R-NS serão férmions no espaço-tempo.

A quantização da teoria é feita de forma similar à teoria bosônica. Os coeficientes das coordenadas bosônicas não sofrem alterações na teoria, e permanecem da forma

$$[\alpha_m^{\mu}, \alpha_n^{\nu}] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}, \quad (3.2.44)$$

enquanto que os coeficientes das coordenadas fermiônicas são quantizados via anti-comutadores, como é próprio para férmions,

$$\{b_r^{\mu}, b_s^{\nu}\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r+s,0} \quad \text{e} \quad \{d_m^{\mu}, d_n^{\nu}\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}, \quad (3.2.45)$$

onde iremos utilizar, a partir de agora,

$$m, n \in \mathcal{Z} \quad \text{e} \quad r, s \in \mathcal{Z} + \frac{1}{2}. \quad (3.2.46)$$

Para cordas fechadas devemos adicionar uma nova classe de modos barrados. Iremos fazer a quantização da corda aberta aqui, mas ter em mente que a quantização da corda fechada é realizada de uma forma similar.

Vimos acima que para uma teoria de cordas abertas temos dois setores: R e NS, e devemos tratá-los separadamente. O estado fundamental para estes setores é dado por

$$\alpha_m^\mu |0\rangle_R = d_m^\mu |0\rangle_R = 0 \quad \text{para } m > 0, \quad (3.2.47)$$

$$\alpha_m^\mu |0\rangle_{NS} = b_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0 \quad \text{para } m, r > 0, \quad (3.2.48)$$

e iremos utilizar os modos negativos como operadores da criação, como fizemos para cordas bosônicas.

Vamos ver agora porque o setor de Ramond é um setor que gera férmions espaço-temporais. No caso do setor de Neveu-Schwarz, o estado fundamental descreve um estado de spin 0, a qual poderemos confirmar quando calcularmos o espectro da teoria. No caso do setor de Ramond, temos que o modo zero de Fourier obedece à seguinte álgebra

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}, \quad (3.2.49)$$

que é similar a álgebra de Dirac. De fato, estabelecendo a relação  $\Gamma^\mu = \sqrt{2}d_0^\mu$ , temos que

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (3.2.50)$$

que é a álgebra de Dirac. Pode-se mostrar que o modo  $d_0^\mu$  comuta com o operador de massa [3], cujo autovalor determina a massa do estado físico. Logo, o estado

$$d_0^\mu |a\rangle \quad (3.2.51)$$

é um estado degenerado da teoria. Considerando-o como o estado fundamental da teoria, temos que este estado fundamental degenerado fornece uma representação da álgebra de Dirac. Podemos escreve-lo da forma

$$d_0^\mu |a\rangle = \Gamma_{ba}^\mu |b\rangle, \quad (3.2.52)$$

que representa um férmion no espaço-tempo. A aplicação de sucessivos operadores de criação não destruirá essa degenerescência, logo não destruirá seu caráter fermiônico.

Vamos calcular agora os geradores de super-Virasoro para o tensor de energia-momento e para as supercorrentes. Como dissemos mais acima, estes vínculos irão nos livrar dos estados de norma negativa da teoria.

Os geradores de super-Virasoro são dados em função dos modos de tensor de energia-momento (para maiores detalhes, ver [5]). Para cordas abertas, são dados da forma

$$L_m = \frac{1}{\pi} \int d\sigma e^{im\sigma} T_{++} = L_m^b + L_m^f, \quad (3.2.53)$$

onde o setor bosônico é o mesmo do estudo de cordas bosônicas

$$L_m^b = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathcal{Z}} : \alpha_n \alpha_{m+n} : \quad \text{para } m \in \mathcal{Z}, \quad (3.2.54)$$

e o setor fermiônico pode ser calculado a partir da parte fermiônica de (3.1.25),

$$L_m^f = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathcal{Z} + 1/2} (r + \frac{m}{2}) : b_r b_{m+r} : \quad \text{para } m \in \mathcal{Z}, \quad (3.2.55)$$

para o setor de Neveu-Schwarz e

$$L_m^f = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathcal{Z}} (n + \frac{m}{2}) : d_n d_{m+n} : \quad \text{para } m \in \mathcal{Z}, \quad (3.2.56)$$

para o setor de Ramond. Os modos da supercorrente são dados por

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int d\sigma J_+ = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \alpha_{-n} b_{r+n} \quad \text{para } r \in \mathcal{Z} + \frac{1}{2}, \quad (3.2.57)$$

para o setor de Neveu-Schwarz e

$$F_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int d\sigma J_+ = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \alpha_{-n} d_{m+n} \quad \text{para } m \in \mathcal{Z}, \quad (3.2.58)$$

para o setor de Ramond. A partir destes geradores podemos determinar a sua álgebra. Para o setor de Ramond temos

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{8} m^3 \delta_{m+n,0}, \quad (3.2.59)$$

$$[L_m, F_n] = (\frac{m}{2} - n)F_{m+n}, \quad (3.2.60)$$

$$\{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + \frac{D}{2} m^2 \delta_{m+n,0}, \quad (3.2.61)$$

e para o setor de Neveu-Schwarz temos

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \quad (3.2.62)$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{m}{2} - r\right)G_{m+r}, \quad (3.2.63)$$

$$\{G_m, G_n\} = 2L_{r+s} + \frac{D}{2}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{m+n,0}. \quad (3.2.64)$$

Devemos impor os vínculos separadamente para cada setor. Para o setor de Ramond, temos

$$F_n|\psi\rangle = 0 \quad \text{para } n \geq 0, \quad (3.2.65)$$

$$L_m|\psi\rangle = 0 \quad \text{para } m > 0, \quad (3.2.66)$$

$$(L_0 - a_R)|\psi\rangle = 0. \quad (3.2.67)$$

O cálculo de  $a_R$  é simples. Basta notar que

$$F_0^2 = \frac{1}{2} \sum_n \sum_m (\alpha_{-n}d_n\alpha_{-m}d_m) + (\alpha_{-m}d_m\alpha_{-n}d_n), \quad (3.2.68)$$

e usando tanto a anti-simetria dos operadores fermiônicos como a comutatividade de operadores fermiônicos com bosônicos, temos que

$$\begin{aligned} F_0^2 &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_m (\alpha_{-n}\alpha_{-m}d_n d_m - \alpha_{-m}\alpha_{-n}d_n d_m) \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \sum_n d_n d_m m \delta_{-m-n} = \frac{1}{2} \sum_m d_{-m} d_m m \\ &= L_0, \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

logo,  $a_R = 0$ . Para o setor de Neveu-Schwarz, os vínculos são

$$G_r|\psi\rangle = 0 \quad \text{para } r > 0, \quad (3.2.70)$$

$$L_m|\psi\rangle = 0 \quad \text{para } m > 0, \quad (3.2.71)$$

$$(L_0 - a_{NS})|\psi\rangle = 0, \quad (3.2.72)$$

e devemos determinar  $a_{NS}$ . Para isso, como no capítulo precedente, iremos considerar estados espúrios e físicos de norma nula. Tomemos o estado

$$|\psi\rangle = G_{-1/2}|\chi\rangle, \quad (3.2.73)$$

esse estado deve satisfazer a condição

$$(L_0 - a_{NS})|\psi\rangle = (L_0 - a_{NS})G_{-1/2}|\chi\rangle = (L_0 - a_{NS} + \frac{1}{2})|\chi\rangle = 0, \quad (3.2.74)$$

devido a álgebra do setor de NS. Outra condição que este estado deve satisfazer é

$$G_{1/2}|\psi\rangle = G_{1/2}G_{-1/2}|\chi\rangle = (2L_0 - G_{-1/2}G_{1/2})|\chi\rangle, \quad (3.2.75)$$

como  $G_{1/2}|\chi\rangle = 0$  para todos os vetores do espaço de Hilbert, então podemos igualar a condição acima com (3.2.74), e temos

$$(2a_{NS} - 1)|\chi\rangle = 0, \quad (3.2.76)$$

que nos dá  $a_{NS} = \frac{1}{2}$ . Vamos utilizar um segundo estado espúrio para determinar  $D$  no setor de Ramond. Um procedimento similar pode ser utilizado para calcular  $D$  no setor de Neveu-Schwarz. Dado o estado espúrio

$$|\psi\rangle = F_0F_{-1}|\chi\rangle, \quad (3.2.77)$$

nossa primeira condição é

$$\begin{aligned} 0 &= L_0|\psi\rangle = L_0F_0F_{-1}|\chi\rangle = F_0(F_{-1}L_0 + F_{-1})|\chi\rangle \\ &= F_0F_{-1}(L_0 + 1)|\chi\rangle = 0 \rightarrow (L_0 + 1)|\chi\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.2.78)$$

nossa segunda condição é

$$\begin{aligned}
0 &= L_1|\psi\rangle = L_1F_0F_{-1}|\chi\rangle \\
&= F_0(F_{-1}L_1 + \frac{3}{2}F_0) + \frac{1}{2}F_{-1}F_1 + \frac{1}{2}2L_0 + \frac{D}{4}|\chi\rangle, \\
&= \frac{3}{2}F_0^2 + L_0 + \frac{D}{4} = 0|\chi\rangle.
\end{aligned} \tag{3.2.79}$$

Utilizando que  $F_0^2 = L_0$  e  $L_0|\chi\rangle = -1|\chi\rangle$ , obtemos o resultado  $D = 10$ , que nos dá a dimensão crítica para a teoria de supercordas.

Para obter o espectro da teoria, poderíamos utilizar a quantização no cone de luz e o operador de projeção de Gliozzi-Scherk-Olive, chamado de operador GSO. Ele nos mostraria que, para manter a supersimetria na teoria quântica, o táquion presente teria de ser eliminado. Não faremos isso aqui. No próximo capítulo iremos ver uma teoria de cordas supersimétricas onde os férmions são definidos diretamente no espaço-tempo, não mais na superfície de mundo, e iremos então calcular o espectro da teoria.



# Capítulo 4

## Cordas supersimétricas no espaço-tempo

No capítulo precedente utilizamos a idéia de inserir férmions na superfície de mundo, encontrando assim férmions e bósons espaço-temporais relacionados por uma simetria a qual chamamos de supersimetria. Com isso pudemos calcular a dimensão crítica da teoria,  $D = 10$ . Não calculamos o espectro da teoria, nem demonstramos que este espectro é manifestamente supersimétrico, ou seja, em cada multiplete deve haver o mesmo número de componentes bosônicas e fermiônicas. Para isso seria preciso utilizar um operador de projeção, o operador GSO. Para não inserir um operador *ad hoc*, iremos calcular o espectro e mostrar que é supersimétrico por um segundo método.

Este método, chamado método de Green-Schwarz, consiste em inserir férmions diretamente no espaço-tempo, com índices espinoriais, e não mais espaço-temporais. Com isso deixamos de pensar nossa teoria como uma teoria superconforme em  $D = 2$  para passar a pensar em uma teoria supersimétrica em  $D = 10$ .

Após encontrar o espectro sem massa para teorias do tipo II, que será definida, iremos introduzir um novo tipo de teoria de supercordas, as cordas heteróticas. Com isso teremos apresentado os cinco tipos de teorias de supercordas. Tipos I, IIA, IIB e dois tipos de cordas heteróticas. Tendo em mãos o espectro sem massa das teorias, poderemos conjecturar que o limite de baixas energias das teorias de supercordas são teorias de supergravidade, tendo em vista que os modos massivos se desacoplam neste limite.

## 4.1 Cordas supersimétricas no espaço-tempo

No capítulo sobre cordas bosônicas, introduzimos as coordenadas da corda  $X^\mu$ , funções dos parâmetros  $\tau$  e  $\sigma$ . Precisamos agora introduzir férmions na teoria. Faremos isso introduzindo novas coordenadas, desta vez fermiônicas, que juntamente com as coordenadas bosônicas formam o superespaço.

Teremos agora dois tipos de coordenadas,

$$X^\mu(\sigma, \tau) \text{ e } \Theta^{Aa}(\sigma, \tau), \quad (4.1.1)$$

onde  $a$  é o índice espinorial, no caso  $a = 2^{D/2}$ , e o índice  $A$  será definido em seguida. Como  $D = 10$ ,  $a$  possui 32 componentes a princípio complexas. Para  $D = 10$ , existe a possibilidade de termos espinores de Majorana-Weyl, o que mostra-se em concordância com nossa teoria superconforme em  $D = 2$ . Espinores de Majorana são espinores que satisfazem uma condição de realidade, logo temos 32 componentes reais por espinor. Espinores de Weyl são espinores de quiralidade bem definida, o que reduz pela metade nosso número de componentes. Por fim, a equação de movimento irá reduzir o número de componentes pela metade, restando-nos espinores de 8 componentes cada.

Os graus de liberdade bosônicos são mais fáceis de calcular. Temos a princípio 10 componentes bosônicas, porém o calibre no cone de luz permite-nos reduzir para oito graus de liberdade físicos, que são os graus de liberdade transversos à corda.

Esta rápida conta nos mostra que uma teoria com dois espinores quirais apresenta o dobro de graus de liberdade fermiônicos do que realmente necessitamos. Felizmente existe uma nova simetria na teoria, chamada de simetria kappa, descoberta originalmente por W. Siegel em 1983 [7], que permite desacoplar metade dos graus de liberdade fermiônicos da corda, deixando-nos com oito graus de liberdade bosônicos e fermiônicos, como requer a supersimetria.

Este fato também não é aleatório, já que podemos fixar o calibre no cone de luz também para as coordenadas fermiônicas, da forma que deixamos de trabalhar com representações do grupo  $spin(9, 1)$  e passamos a trabalhar com representações do grupo  $spin(8)$ . Veremos isso no decorrer desta seção.

O índice  $A$  em  $\Theta^{Aa}(\sigma, \tau)$  indica o número de férmions quirais presentes na teoria. No caso estudado, temos uma teoria com 2 férmions, uma teoria  $\mathcal{N} = 2$ . Como são férmions quirais,  $\mathcal{N} = 2$  é o mínimo que podemos exigir para tratarmos ambas as quiralidades.

Um espinor genérico de Majorana pode ser escrito da forma (daqui em diante omitiremos o índice espinorial, salvo quando for indicado)

$$\Theta = \Theta^1 + \Theta^2, \quad (4.1.2)$$

onde podemos definir uma matriz de projeção quiral da forma

$$\Theta^1 = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})\Theta, \quad (4.1.3)$$

$$\Theta^2 = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{11})\Theta, \quad (4.1.4)$$

e  $\Gamma_{11} = \Gamma_0\Gamma_1\dots\Gamma_9$ , onde  $\Gamma_i$  são as matrizes de Dirac, como usualmente construímos na álgebra de Clifford.

Não vamos nos ater à construção da Lagrangeana de uma teoria de supercordas em  $D = 10$ , que é dada por dois termos. Vamos apenas introduzi-la.

$$S = -T \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \Pi_\alpha^\mu \Pi_{\beta\mu} + \int \Omega_2, \quad (4.1.5)$$

onde

$$\Pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha X^\mu - i\bar{\Theta}^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \Theta^A, \quad (4.1.6)$$

e  $\Omega_2$  é uma 2-forma cuja forma explícita não nos interessa aqui (ver [2], [3]). O que podemos notar, no entanto, é que as equações de movimento são altamente não-lineares. De fato, quantizar esta teoria de supercordas canonicamente é um procedimento que encontra problemas. No calibre do cone de luz, as equações de movimento são encontradas com maior facilidade. Novamente, não é nosso objetivo resolver as equações de movimento. O que devemos esperar, e o que é encontrado, é que elas reproduzam os mesmos resultados encontrados no capítulo precedente.

Vamos tratar, inicialmente, de cordas fechadas. Há duas possibilidades: que os dois férmions possuam quiralidades diferentes (Tipo IIA) e que os férmions possuam a mesma quiralidade (Tipo IIB). Trabalhando no cone de luz, apenas com os graus de liberdade físicos, podemos representar estas escolhas da seguinte forma:

$$IIA \rightarrow 8_s + 8_c = (S_1^a, S_2^{\dot{a}}), \quad (4.1.7)$$

$$IIB \rightarrow 8_s + 8_s = (S_1^a, S_2^a), \quad (4.1.8)$$

onde  $s$  e  $c$  representam quiralidades distintas. O mesmo pode ser denotado nos índices espinoriais presentes na representação acima. Trabalhando neste calibre, encontramos uma ação da forma

$$S = -T \int d^2\sigma \partial_\alpha X^i \partial^\alpha X_i + iT \int d^2\sigma (S_1^a \partial_+ S_1^a + S_2^a \partial_- S_2^a), \quad (4.1.9)$$

para a teoria do tipo IIB, e

$$S = -T \int d^2\sigma \partial_\alpha X^i \partial^\alpha X_i + iT \int d^2\sigma (\bar{S}^a \rho^\alpha \partial_\alpha S^a), \quad (4.1.10)$$

para teorias do tipo IIA. Note que teorias do tipo IIA possuem uma ação do tipo Dirac sem massa, com os espinores quirais agrupados. Nada nos impediria de desacoplá-los. Essas ações assemelham-se em muito com as ações encontradas utilizando o método de Ramond-Neveu-Schwarz, ainda que não sejam idênticas, em vista que agora nossos férmions são espaço-temporais, e não férmions na superfície de mundo.

Para teorias de cordas abertas a transformação de supersimetria de ambos os espinores deve ser a mesma, reduzindo a teoria para uma teoria do tipo  $\mathcal{N} = 1$ , sendo por isso denotadas de teorias do tipo I.

Chegamos ao objetivo principal deste capítulo, que é o de encontrar o espectro das teorias. Estamos interessados em teorias do tipo IIA e IIB, por isso faremos o cálculo explícito apenas para cordas fechadas. Não iremos fazer o cálculo da relação de dispersão quântica da teoria, dado pelo operador de massa, porém ele não apresenta modos taquiônicos. No capítulo sobre cordas bosônicas, encontramos que o estado fundamental possui massa negativa. O mesmo não ocorre na teoria de supercordas pois as constantes de correção quântica bosônica e fermiônica se cancelam mutuamente, eliminando o táquion do espectro.

Para calcular o espectro da teoria tipo IIA, devemos fazer o produto tensorial de dois supermultipletos com quiralidades diferentes.

$$(\mathfrak{8}_v + \mathfrak{8}_c) \otimes (\mathfrak{8}_v + \mathfrak{8}_s), \quad (4.1.11)$$

onde  $\mathfrak{8}_v$  representa as componentes vetoriais do supermultipletto, enquanto  $\mathfrak{8}_c, \mathfrak{8}_s$  representam as componentes do espinor de Majorana-Weyl na representação do grupo  $spin(8)$ . O produto tensorial entre as componentes vetoriais é simples de ser realizado. Sabemos que uma matriz  $n$  por  $n$  pode ser decomposta da forma

$$8_v \otimes 8_v = \phi \oplus B_{\mu\nu} \oplus G_{\mu\nu} = 1 + 28 + 35 \quad (4.1.12)$$

onde  $\phi$  é o traço da matriz e possui uma componente,  $B^{\mu\nu}$  é a parte totalmente anti-simétrica da matriz e possui  $\frac{N^2-N}{2}$ , para  $D = 8$ , 28 componentes, e  $G_{\mu\nu}$  é a parte totalmente simétrica do tensor, e possui  $\frac{N^2+N}{2}$ , 36 componentes. Como retiramos o traço, restam 35 componentes, como na decomposição acima.

Para terminar a parte bosônica, precisamos realizar o produto entre os férmions quirais, formando bilineares covariantes. Não são todos os bilineares que serão permitidos. Como exemplo, pode-se mostrar que o campo escalar não é criado no produto entre férmions de diferentes quiralidades.

$$\bar{\phi}\varphi = \xi\left(\frac{1+\Gamma^9}{2}\right)\Gamma^0\left(\frac{1-\Gamma^9}{2}\right)\chi, \quad (4.1.13)$$

onde  $\Gamma^9 = \Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5\Gamma^6\Gamma^7$  e as matrizes gama obedecem à condição

$$\{\Gamma^i, \Gamma^j\} = \delta_i^j. \quad (4.1.14)$$

Aqui a matriz  $\Gamma^9$  representa a matriz que determina a quiralidade do espinor, como a matriz  $\gamma^5$  em  $D = 4$ .

Abrindo a conta acima, temos que  $\bar{\phi}\varphi = 0$ . Da mesma forma, podemos procurar outros bilineares covariantes. É fácil ver que o campo escalar estará presente no produto tensorial de férmions de mesma quiralidade. Nossa álgebra de Clifford será completa pelas matrizes

$$1 \rightarrow 1 \text{ componente}, \quad (4.1.15)$$

$$\Gamma^i \rightarrow 8 \text{ componentes}, \quad (4.1.16)$$

$$\Gamma^i j \rightarrow 28 \text{ componentes}, \quad (4.1.17)$$

$$\Gamma^i j k \rightarrow 56 \text{ componentes}, \quad (4.1.18)$$

$$\Gamma^i j k l \rightarrow 35 \text{ componentes}, \quad (4.1.19)$$

onde  $\Gamma^i j k l$  é um tensor auto-dual. Voltando para o caso IIA, temos a seguinte composição bilinear não-nula

$$\bar{\xi}\Gamma^i\chi \quad e \quad \bar{\xi}\Gamma^{ijk}\chi, \quad (4.1.20)$$

logo o resultado completo são os seguintes campos bosônicos

$$8_v \otimes 8_v = 1 + 28 + 35 \quad \text{e} \quad 8_s \otimes 8_c = 8 + 56, \quad (4.1.21)$$

totalizando 128 graus de liberdade bosônicos. Os outros 128 graus de liberdade são fermiônicos. O espectro massivo não nos irá interessar. Para teorias do tipo IIB, temos o seguinte espectro bosônico

$$8_v \otimes 8_v = 1 + 28 + 35 \quad \text{e} \quad 8_c \otimes 8_c = 1 + 28 + 35. \quad (4.1.22)$$

Percebemos que no setor vindo do produto tensorial entre representações vetoriais, ambas as teorias têm o mesmo espectro. Este setor é chamado de setor NS-NS. Porém no setor bosônico construído através de férmions, notamos que o espectro é diferente. Este é o setor chamado de setor R-R. As teorias do tipo IIA possuem tensores ímpares. Um vetorial e um tensorial de rank 3 anti-simétrico, uma 3-forma. Já teorias do tipo IIB possuem um escalar, uma 2-forma e uma 4-forma cujo tensor de intensidade de campo é auto-dual em  $D = 10$ .

Nosso objetivo agora é estudar teoria de cordas a baixas energias, por isso calculamos apenas o espectro sem massa da teoria. Estamos interessados em teorias do tipo II, por isso calculamos o espectro apenas destas teorias. No entanto, não existem somente 3 tipos de teorias de cordas (tipo I, tipo IIA e tipo IIB) mas 5 tipos de teorias. Há também as cordas heteróticas. Antes de passarmos ao estudo de baixas energias, veremos brevemente o que são cordas heteróticas.

## 4.2 Cordas Heteróticas

Apesar de não ser objeto principal de nosso estudo, vamos dar uma breve olhada em dois outros tipos de cordas, as cordas heteróticas. Vimos no capítulo sobre cordas bosônicas que cordas fechadas admitem soluções independentes para os setores à direita e à esquerda. Para que o termo anômalo na álgebra de Virasoro se cancele, é necessário que a dimensão do espaço-tempo seja 26. Quando incluímos férmions e a supersimetria, a álgebra de super-Virasoro é livre de anomalias em 10 dimensões.

A idéia de cordas heteróticas é que é possível quantizar separadamente os setores à esquerda e à direita. Dessa forma podemos incluir naturalmente um grupo de simetria. Iremos mostrá-lo para o grupo  $SO(32)$ , sendo que é possível construir uma teoria de cordas heteróticas também para o grupo  $E_8 \times E_8$ .

Para o setor à direita iremos utilizar a estrutura de supercordas usual, utilizando a álgebra de

super-Virasoro. Para o setor à esquerda iremos utilizar uma nova estrutura, com bósons e férmions sem supersimetria. Precisamos, no entanto, cancelar o termo anômalo presente. Sabemos que cada bóson colabora com 1 para a carga central, enquanto cada férmion colabora com  $1/2$ . Como trata-se de uma teoria sem supersimetria, ou seja, apenas com os operadores de Virasoro, temos que formar  $D = 26$  para anular a anomalia. Como queremos um espaço-tempo com apenas 10 dimensões, é necessário utilizar um conjunto com 32 férmions a esquerda, já que  $26 = 10 \times 1 + 32 \times \frac{1}{2}$ .

Uma ação para esta teoria pode ser escrita como

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma (2\partial_+ X_\mu \partial^- X^\mu + i\psi^\mu \partial_+ \psi_\mu + i \sum_{A=1}^{32} \lambda^A \partial_- \lambda^A), \quad (4.2.23)$$

onde notamos que o setor à esquerda conta com 32 férmions em um grupo  $SO(32)$ , que não possuem índices espaço-temporais. Esta é uma teoria genuinamente em  $D = 10$  para ambos os setores.

Para calcular o espectro sem massa da teoria trabalhamos, como sempre, com o setor transversal. Encontrar o espectro da teoria é realizar o produto tensorial

$$(8_v + 8_c)_R \otimes (8_v)_L, \quad (4.2.24)$$

já que no setor à esquerda há apenas bósons espaço-temporais. Os 32 férmions  $\lambda$  são singletes de  $spin(8)$ , da mesma forma que todas as partículas encontradas acima são singletes de  $SO(32)$ . No caso do espectro bosônico, basta lembrar que

$$8_v \otimes 8_v = \phi \oplus B_{\mu\nu} \oplus G_{\mu\nu} = 1 + 28 + 35. \quad (4.2.25)$$

O espectro fermiônico da teoria é dado por

$$8_c \otimes 8_v = 8 + 56, \quad (4.2.26)$$

que representa um espinor com 8 componentes (dilatino) e uma partícula de  $spin \frac{3}{2}$  com 56 componentes, o gravitino (da teoria de representações, temos  $(\frac{1}{2}) \otimes (1) = (\frac{1}{2}) \oplus (\frac{3}{2})$ ). Apesar de não termos calculado o espectro fermiônico das outras teorias, ocorre que tanto o espectro sem massa bosônico e fermiônico das teorias de cordas heteróticas é idêntico ao espectro sem massa da teoria do tipo I. Isso nos indica que pode haver algum tipo de simetria que ligue as duas teorias. Esse foi um dos primeiros indícios da possibilidade de uma teoria mais geral, que englobe todos os tipos de teorias de cordas.

Há uma segunda forma de criar teorias de cordas heteróticas sem a utilização de férmions que sejam singletes de  $SO(32)$ . Desta forma, estaremos tratando de uma teoria em  $D = 26$  dimensões para bósons, já que esta é a única forma de eliminar o termo anômalo de Virasoro. Como visamos uma teoria em 10 dimensões, é necessário compactificar 16 dimensões, e isso pode ser feito através da compactificação toroidal. Não entraremos em maiores detalhes sobre este método.

### 4.3 Teoria de cordas em baixas energias

Nosso objetivo nessa seção é estudar o que seria o limite de uma teoria de cordas em baixas energias. Por este motivo não nos preocupamos com o espectro massivo nas seções precedentes, em vista que, para baixas energias, só podemos trabalhar com partículas sem massa, que se desacoplam da teoria neste limite. É esperado que uma teoria de cordas em baixas energia possa ser descrita por uma teoria quântica de campos supersimétrica, já que teorias quânticas de campos têm resultados bem sucedidos em várias faixas de energia e na descrição de diversos fenômenos da natureza.

No capítulo precedente realizamos o cálculo para a dimensão crítica de uma teoria de supercordas, encontrando  $D=10$  dimensões. Esperamos então que os campos relativos a uma teoria de baixas energias vivam em 10 dimensões. Nós poderíamos tentar criar, diretamente, uma Lagrangeana para a supergravidade em  $D = 10$  [8], porém este método, além de trabalhoso, não é possível para teorias do tipo IIB.

Ao invés disso, vamos seguir a idéia de Cremmer, Julia e Scherk e, partindo de uma teoria de supergravidade em 11 dimensões, realizar uma redução dimensional para  $D = 10$  dimensões [9]. Encontrar o espectro desta teoria é uma tarefa relativamente simples. Podemos utilizar uma contagem de graus de liberdade, novamente trabalhando apenas com os modos transversos. A métrica é um tensor simétrico  $9 \times 9$  de traço nulo, que nos dá 44 graus de liberdade. A supergravidade deve conter um gravitino, um tensor de Rarita-Schwinger que, em 11 dimensões, tem 128 graus de liberdade. Os outros 84 graus de liberdade bosônicos nos remetem a uma 3-forma.

Vamos apresentar aqui a ação da supergravidade em  $D = 11$  de uma forma mais compacta que em [9]. Nos limitaremos ao setor bosônico.

$$2\kappa_{11}^2 S = \int d^{11}x \sqrt{-G} \left( R - \frac{1}{2} |F_4|^2 \right) - \frac{1}{6} \int A_3 \wedge F_4 \wedge F_4, \quad (4.3.27)$$

onde  $F_4 = dA_3$  é o tensor intensidade de campo da 3-forma, e  $\kappa_{11}$  é a constante de acoplamento gravitacional em 11 dimensões. Novamente poderíamos utilizar uma mera contagem de graus de



liberdade para realizar a redução dimensional de uma teoria em 11 dimensões para uma teoria de 10 dimensões. No entanto, seremos um pouco mais formais e apresentaremos uma redução dimensional seguindo o ansatz de Kaluza-Klein (ver apêndice H de [6]).

A redução da métrica de 11 para 10 dimensões é dada segundo a matriz

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + e^{2\phi} A_\mu A_\nu & e^{2\phi} A_\mu \\ e^{2\phi} A_\nu & e^{2\phi} \end{pmatrix}, \quad (4.3.28)$$

onde  $M, N = 0, 1, \dots, 11$  e  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, 10$ . O termo exponencial acima é o dilaton. Naturalmente se mantivermos as componentes de uma matriz simétrica  $9 \times 9$  (a métrica em  $D = 11$ ) e separarmos uma matriz simétrica  $8 \times 8$  (a métrica em  $D = 10$ ), nos resta um campo escalar e um campo vetorial.

A redução de uma 3-forma é mais difícil de visualizar, por tratar-se de uma hipermatriz. No entanto, deve ser claro que uma 3-forma em 11 dimensões, reduzida dimensionalmente, nos dá ao menos uma 3-forma em  $D = 10$ . Basta retirar uma dimensão do alcance das coordenadas. A restante da redução é feito fixando a última componente, 11. Assim temos

$$F_{MNP} = F_{11\mu\nu}, \quad (4.3.29)$$

que é uma 2-forma em 10 dimensões. Logo a redução de uma 3-forma em  $D = 11$  nos resulta em uma 3-forma e uma 2-forma em  $D = 10$ . A redução dimensional de (4.3.27) para 10 dimensões nos resulta em uma ação em três termos. Escreveremos separadamente por um motivo que ficará claro em seguida.

$$S = S_{NS} + S_R + S_{CS}, \quad (4.3.30)$$

onde

$$S_{NS} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (R + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{3}|H_3|^2), \quad (4.3.31)$$

$$S_R = -\frac{1}{4\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} (|F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2), \quad (4.3.32)$$

$$S_{CS} = -\frac{1}{4} \int B_2 \wedge F_4 \wedge F_4, \quad (4.3.33)$$

onde  $F_4$ ,  $H_3$  e  $B_2$  são os tensores intensidade de campo para, respectivamente, a 1-forma, 2-forma e 3-forma. Não entraremos em detalhes na relação entre  $\kappa$  em  $D = 10$  e  $D = 11$ . Vamos repetir

aqui o espectro que encontramos para a teoria do tipo IIA.

$$8_v \otimes 8_v = 1 + 28 + 35 \quad \text{e} \quad 8_s \otimes 8_c = 8 + 56. \quad (4.3.34)$$

Podemos perceber que é o mesmo espectro encontrado na redução dimensional. O escalar, a 2-forma e a métrica estão no termo  $S_{NS}$ , pois vêm do setor de Neveu-Schwarz. A 1-forma e 3-forma estão no termo  $S_R$ , pois vêm do setor de Ramond. O termo de Chern-Simmons é necessário para fechar a supersimetria da teoria. Este termo já havia aparecido antes em (4.1.5). Para maiores detalhes das transformações supersimétricas da supergravidade em  $D = 10$  referir-se a [9] ou [3].

A teoria tipo IIB não é encontrada através de nenhuma redução dimensional. Na verdade, nem mesmo podemos formular uma ação covariante para ela, pois ela possui uma 4-forma cujo seu tensor intensidade de campo é auto-dual, informação que não pode ser inserida diretamente na Lagrangeana, e têm de ser lembrada como um vínculo à parte [10]. No entanto, no setor de Neveu-Schwarz, elas possuem o mesmo espectro e a mesma ação.

Cada tipo de teoria de cordas tem seu espectro de partículas sem massa, como já calculamos neste capítulo, logo cada uma delas deve possuir um tipo de supergravidade em  $D=10$ , com uma ação diferente. Irei escrever apenas a ação para os tipos I e heterótico com grupo  $SO(32)$ ,

$$S_I = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} [e^{2\phi} (R + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} |\tilde{F}_3|^2 - \frac{k^2}{g^2} e^{-\phi} Tr(|F_2|^2)], \quad (4.3.35)$$

$$S_{Het} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} [R + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{k^2}{30g^2} Tr(|F^2|^2)]. \quad (4.3.36)$$

Nestas equações vamos notar apenas que as cordas tipo I e heterótica possuem termos do tipo Yang-Mills, o que indica algum grupo de simetria. Já vimos como inserir um grupo de simetria em cordas heteróticas, e no próximo capítulo veremos como cordas abertas também possuem um grupo de simetria através de suas pontas.

# Capítulo 5

## Dp-branas

D-branas são objetos necessários à teoria de cordas e supercordas. Irei expor neste capítulo duas razões para a necessidade de sua existência, e então encontrá-los como soluções dentro de um limite de baixas energias para teorias de supercordas.

### 5.1 Uma visão das Dp-branas

No capítulo sobre cordas bosônicas, ao minimizar a ação do sistema, encontramos a possibilidade de duas condições de contorno. Naquele momento, utilizamos as condições de contorno de Neumann, que preservam a conservação de momento na corda. De outra forma, haveria momento fluindo através dos extremos da corda, o que a princípio parece denotar um caráter não físico à teoria. Porém nada nos impede de incluir novos objetos à mesma, para onde o momento nos extremos fluiria, mantendo a coerência do sistema. A esses objetos damos o nome de D-branas.

Uma Dp-brana é um objeto estendido de  $p$  dimensões espaciais onde os extremos das cordas terminam. Mesmo sem falarmos das Dp-branas, elas já estavam inclusas em nossa teoria. Cordas bosônicas com todas as suas coordenadas em condições de contorno de Neumann, por exemplo, estão ligadas a uma D25-brana. Cordas bosônicas que possuam  $d$  coordenadas com condições de contorno de Dirichlet, estarão ligadas a uma D(25-d)-brana, e cordas supersimétricas estarão ligadas a uma D(9-d)-brana.

Para facilitar a compreensão, nesta seção iremos trabalhar com cordas bosônicas com apenas uma de suas coordenadas com condições de contorno de Dirichlet. Lembrando a ação bosônica,

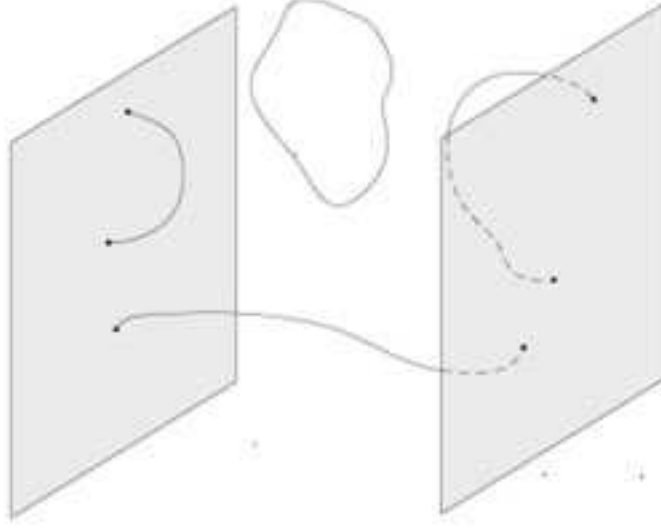


Figura 5.1: Condição de contorno de Neumann exige que os extremos de uma corda aberta terminem em algum objeto físico, as chamadas Dp-branas.

$$\delta S = \int d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^{\sigma^*} - \int d\tau d\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \delta X^\mu, \quad (5.1.1)$$

agora optamos pela condição de contorno  $\delta X|_0^{\sigma^*}$ , ou seja, fixamos os extremos da corda em alguma posição espaço-temporal. Isso nos dá uma nova condição para esta coordenada da corda, por exemplo,  $X^{25}$ .

$$X^{25}(\tau, 0) = x^a, \quad (5.1.2)$$

$$X^{25}(\tau, \sigma^*) = x^b. \quad (5.1.3)$$

A solução geral para cordas abertas desta coordenada será

$$X^{25}(\tau, \sigma) = x^a + (x^a - x^b) \frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{25} e^{-in\tau} \text{sen}(n\sigma). \quad (5.1.4)$$

A primeira coisa a notar na expressão acima é que a componente zero do modo de Fourier não está acompanhada da coordenada  $\tau$ , o que mostra que a corda não possui momento nesta coordenada. Caso o início e o final da corda terminem no mesmo ponto espaço-temporal, a expressão acima descreverá a vibração em torno de um ponto fixo,  $x^a$ . As outras 25 coordenadas, com condições de

contorno de Neumann, terão seus modos inalterados.

Lidamos agora com dois tipos de coordenadas independentes. As 25 coordenadas espaço-temporais  $X^i$ , onde  $i = 0, 1, \dots, 24$  e a última coordenada,  $D = 25$ . O primeiro tipo será quantizado normalmente, e dará origem a um campo vetorial em seu espectro.

$$a^i |0, p \rangle \quad (5.1.5)$$

Como dito no início desta seção, estamos trabalhando com uma D24-brana, ou seja, uma D-brana que possui 24 dimensões. Deve ser claro que são as 24 coordenadas com condições de contorno de Neumann. A última coordenada fixa a posição da brana no espaço-tempo, e o campo vetorial não possui dinâmica nele.

Isso já nos daria uma primeira exposição sobre as D-branas, porém vamos ver o que acontece quando trabalhamos com mais de uma brana. Isso ocorre quando  $x^a \neq x^b$ , quando temos então duas D24-branas, uma fixa em  $x^a$  e outra fixa em  $x^b$ . A primeira coisa que podemos fazer é associar um índice aos extremos da corda. Podemos ter 4 tipos de configurações. Para facilitar, vamos dar o índice 1 para a D24-Brana em  $x^a$ , e o índice 2 para a outra. Temos então quatro vácuos,

$$|0, p, 11 \rangle, |0, p, 12 \rangle, |0, p, 21 \rangle \text{ e } |0, p, 22 \rangle, \quad (5.1.6)$$

e o que temos aqui é o começo de uma estrutura de grupos. Vamos voltar um pouco em nossa argumentação e pensar em (5.1.4). Apesar da coordenada de Dirichlet não possuir momento, ela possui uma componente zero, dada por

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{25} = \frac{x^a - x^b}{\pi}, \quad (5.1.7)$$

o que irá modificar ligeiramente a relação de energia-momento da corda, da forma

$$M^2 = \left(\frac{x^a - x^b}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N - 1), \quad (5.1.8)$$

onde  $N$  é o operador número cujo autovalor depende dos operadores de criação aplicados no vetor de estado. Caso  $x^a = x^b$ , a relação de energia-momento não possui o primeiro termo,  $\alpha_0^{25}$  é nulo e o campo vetorial criado não possui massa ( $N = 1$ ). Como não podemos distinguir as D-branas, existe uma simetria do vácuo na teoria e ela será invariante segundo algum grupo de transformações. O que ocorrerá, no entanto, caso as D-branas afastem-se uma da outra? A teoria deixará de ser invariante segundo esta simetria, o campo vetorial irá ganhar massa e nosso  $\alpha_0^{25}$  já não será nulo,

ou seja, ganharemos uma partícula escalar da forma

$$a^{25}|0, p \rangle, \quad (5.1.9)$$

em uma espécie de mecanismo de Higgs para cordas. Nosso objetivo não é entrar em detalhes desta estrutura de grupos nem de suas consequências. Nesta seção tivemos que inserir a mão as D-branas, e ainda que elas nos tenham sido úteis para criar uma estrutura de grupos, pouco argumentamos sobre a necessidade de sua existência. Na próxima seção iremos fazer isso.

## 5.2 A dualidade T para cordas

A dualidade T foi a primeira dualidade descoberta que relaciona diferentes tipos de teoria de corda. Dualidades em uma teoria significa que podemos representar a mesma física de duas formas aparentemente distintas. Aqui inicialmente iremos apresentar a dualidade T para cordas bosônicas, onde o aparecimento de D-branas se tornará evidente, e então iremos mostrar rapidamente como a dualidade T conecta duas teorias de supercordas diferentes. De fato, nos dias atuais, sabemos que todas as cinco teorias de supercordas são conectadas por dualidades, assim como com a supergravidade em 11 dimensões, o que é um forte indício de que todas as teorias de supercordas são limites de uma teoria maior, a teoria M. Nesta trabalho não iremos fazer referência às outras dualidades.

Vamos considerar a teoria bosônica com uma dimensão compacta,  $X^{25}$ . Dizer que uma dimensão é compacta é estabelecer uma relação de equivalência na dimensão escolhida. Começando com as cordas fechadas, temos

$$X^{25}(\tau, \phi + \pi) = X^{25} + 2\pi RW, \quad W \in \mathcal{Z}, \quad (5.2.10)$$

onde  $R$  é o tamanho da dimensão compacta e  $W$  é um número que indica quantas vezes a corda está enrolada nesta dimensão.  $W$  é chamado de número de enrolamento (winding number). Como estamos lidando com uma teoria quântica, o momento em uma direção compacta será quantizado, e podemos escreve-lo da forma

$$p^{25} = \frac{K}{R} \quad \text{para } K \in \mathcal{Z}, \quad (5.2.11)$$

onde  $K$  é chamado de número de excitação de Kaluza-Klein. Essa coordenada sofrerá uma alteração em sua forma devido à compactação. A partir de (5.2.10) podemos deduzir que

$$X^{25} = x^{25} + 2\alpha' p^{25} \tau + 2RW\sigma + \dots, \quad (5.2.12)$$

onde a expressão ... representa o termo oscilatório, que não será alterado. Fazendo a separação entre os setores à esquerda e à direita da teoria, temos que

$$X_R^{25}(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}(x^{25} - \tilde{x}^{25}) + (\alpha' \frac{K}{R} - WR)(\tau - \sigma) + \dots, \quad (5.2.13)$$

$$X_L^{25}(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}(x^{25} + \tilde{x}^{25}) + (\alpha' \frac{K}{R} + WR)(\tau + \sigma) + \dots \quad (5.2.14)$$

A soma das componentes deve nos levar a (5.2.12). Pelo que sabemos da expansão em Fourier, o segundo termo do lado direito da equação acima nos dá o momento de cada setor da teoria. Ao contrário de uma componente não-compacta, eles diferem entre si. Do capítulo de cordas bosônicas tiramos que

$$2\alpha' p^{25} = \alpha' \frac{K}{R} - WR, \quad (5.2.15)$$

$$2\alpha' \tilde{p}^{25} = \alpha' \frac{K}{R} + WR. \quad (5.2.16)$$

Podemos calcular também a relação da dispersão da teoria em termos do número de enrolamento, do número de excitação de Kaluza-Klein e do operador número de cada setor (ver [3]. Para maiores detalhes ver [11]).

$$\alpha' M^2 = \alpha' [(\frac{K}{R})^2 + (\frac{WR}{\alpha'})^2] + 2N_L + 2N_R - 4, \quad (5.2.17)$$

$$N_R - N_L = WK. \quad (5.2.18)$$

Agora estamos prontos para apresentar a dualidade. Intercambiando os números quânticos K e W, e trocando o raio de compactação de R para  $\frac{\alpha'}{R}$ , as relações (5.2.17) e (5.2.18) ficam invariantes. Não é nosso objetivo comentar qual significado físico ou geométrico que essa dualidade pode nos trazer. O que vamos é enfatizar que, realizando essa troca, os setores à esquerda e à direita da teoria comportam-se de forma diferente. É fácil ver que

$$X_R \rightarrow -X_R \quad \text{e} \quad X_L \rightarrow X_L. \quad (5.2.19)$$

Para cordas abertas, lembrando-nos da solução para condições de contorno de Neumann

$$X^\mu = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + i l_s \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} \cos(m\sigma), \quad (5.2.20)$$

podemos também abrir esta solução em setores a direita e a esquerda, da forma

$$X_R(\tau - \sigma) = \frac{x - \tilde{x}}{2} + \frac{1}{2} p(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \alpha_n \frac{1}{n} e^{-in(\tau - \sigma)}, \quad (5.2.21)$$

$$X_L(\tau + \sigma) = \frac{x + \tilde{x}}{2} + \frac{1}{2} p(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \alpha_n \frac{1}{n} e^{-in(\tau + \sigma)}. \quad (5.2.22)$$

Realizando a compatificação em uma coordenada e utilizando a dualidade T, teremos o mesmo efeito para cada setor em separado (5.2.19), e nossa nova coordenada será definida como

$$\tilde{X}(\tau, \sigma) = X_L - X_R = \tilde{x} + p\sigma + \sum_{n \neq 0} \alpha_n e^{-int} \text{sen}(n\sigma), \quad (5.2.23)$$

que é exatamente a expressão que encontramos ao utilizar condições de contorno de Dirichlet para uma das componentes na teoria bosônica (5.1.4), o que nos mostra que a compactificação de uma dimensão, mais a dualidade T, realiza um mapa entre componentes com condições de contorno de Neumann e Dirichlet. O extremo desta corda marca a posição das D24-branas presentes na teoria.

De fato, a argumentação que mostramos acima não prova a existência de tais Dp-branas. O que ela nos mostra é que, se levarmos em consideração que a dualidade T é uma dualidade válida, e nada na teoria nos impede de fazer isso, então cordas com condições de contorno de Dirichlet são perfeitamente aceitáveis. E, se isto ocorre, é preciso conceber a existência de objetos físicos e dinâmicos que se prendem a estas cordas.

Em uma próxima seção iremos mostrar que estes objetos são de fato soluções para teorias de supergravidade em 10 dimensões. Essa demonstração, no entanto, é posterior a suposição da existência dos mesmos [12]. Antes de entrarmos nesta questão iremos mostrar como a dualidade T cria naturalmente uma relação entre as teorias de supercordas do tipo II, e como a existência das D-branas resolve o problema das cargas do setor R-R.



## 5.3 A dualidade T para supercordas e o problema das cargas

A dualidade T naturalmente gera uma simetria entre teorias do tipo II. Vimos que no setor bosônico ocorre uma transformação nas coordenadas à direita, da forma

$$X_R \rightarrow -X_R, \tag{5.3.24}$$

e pode-se demonstrar que o mesmo ocorre no setor fermiônico, onde

$$\psi_R \rightarrow -\psi_R, \tag{5.3.25}$$

logo, quando uma dimensão é compactificada, ocorre uma alteração no sinal relativo entre os setores à direita e à esquerda da corda. É o sinal relativo entre o estado de vácuo dos setores à direita e à esquerda que define as teorias do tipo IIA e IIB no formalismo de RNS. Supercordas do tipo IIB possuem o mesmo sinal, enquanto que teorias do tipo IIA possuem sinais diferentes. Intercambiando estes sinais, passamos de uma teoria do tipo IIA para uma teoria do tipo IIB, que passam a descrever o mesmo sistema, com constante de acoplamento e raio de compactificação alterados.

Isso mostra como a dualidade T foi fundamental para a idéia de que todas as teorias de supercordas são no fundo uma mesma teoria, relacionando-se por dualidades. Pode-se aplicar a dualidade T também para D-branas, o que diminuiria a dimensionalidade da mesma, mantendo a relação entre tensores ímpares para teorias do tipo IIA, e pares para teorias do tipo IIB.

Outro fator importante é o setor R-R. O setor R-R sempre foi um problema para teoria de supercordas. Vimos no capítulo precedente que ele traz  $n$ -formas de calibre para a teoria, e antes da introdução das D-branas, não sabia-se com o que tais  $n$ -formas iriam acoplar-se, ou quais objetos possuiriam tais cargas. O mesmo não ocorre no setor NS-NS, que apresenta apenas uma 2-forma de calibre, que acopla-se naturalmente com objetos estendidos em uma dimensão, ou seja, cordas. A necessidade de objetos que carregassem as cargas destas  $n$ -formas foi um dos fatores que contribuiu para a necessidade das Dp-branas, resolvendo o problema das cargas [13].

Ainda com esses argumentos, em momento algum deduzimos a existência de tais Dp-branas na teoria. Ainda que sejam necessárias para manter a consistência da mesma, é possível encontrar tais objetos estendidos como sólitons na teoria de baixas energias, ou seja, como soluções da supergravidade em D=10 dimensões. Para este problema nos voltamos agora.

## 5.4 Dp-branas como soluções da supergravidade

Trabalhando com o limite de baixas energias da teoria de supercordas, pode-se mostrar o aparecimento de objetos estendidos com  $p$ -dimensões, as nossas Dp-branas. Esses objetos carregam as cargas do setor de R-R e trazem uma explicação consistente para a possibilidade de condições de contorno de Dirichlet, como visto nas seções precedentes. Eles não precisam ser inseridos na teoria *ad hoc*, no entanto. A parte bosônica das ações da supergravidade podem ser apresentadas genericamente da forma

$$I = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \sum_I \frac{1}{n_I!} e^{a_I} F_{n_I}^2 \right] \quad (5.4.26)$$

onde o dilaton foi incorporado na métrica para o setor de NS,  $D$  representa a dimensionalidade do espaço-tempo e o somatório em  $I$  se dá entre todas as  $n$ -formas presentes na teoria. A apresentação que se seguirá será um breve resumo de [14]. A idéia principal é encontrar soluções da ação apresentada acima. De fato, estaremos interessados em soluções com um horizonte de eventos bem definido, ou seja, soluções do tipo buraco negro. A descoberta de tais soluções é usualmente atribuído a Gary T. Horowitz e Andrew Strominger em [15].

Vamos nos limitar ao caso de uma única forma em (5.4.26). As equações de movimento para uma única forma são

$$R_\nu^\mu = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2n!} e^{a\phi} (n F^{\mu\lambda_2 \dots \lambda_n} F_{\nu\lambda_2 \dots \lambda_n} - \frac{n-1}{D-2} \delta_\nu^\mu F_n^2), \quad (5.4.27)$$

$$(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = \frac{a}{2n!} e^{a\phi} F_n^2, \quad (5.4.28)$$

$$\partial(\sqrt{-g} e^{a\phi} F_n^2) = 0, \quad (5.4.29)$$

$$\partial_{[\mu_1} F_{\mu_2 \dots \mu_{n+1}]} = 0, \quad (5.4.30)$$

onde as constantes  $a_I$  dependem da forma escolhida, e a última equação é a identidade de Jacobi. Para encontrar uma solução das equações acima, faz-se uma série de *ansatz*, baseados em invariâncias de translação e rotação. De fato, busca-se a solução mais simétrica possível. Com isso podemos definir diversos vetores de Killing que simplificam (5.4.27-5.4.30).

Buscamos uma solução da forma  $ds^2 = g_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu$ , onde vemos começar distinguindo dois tipos de coordenadas. As coordenadas normais à brana, e as coordenadas transversas à brana. Uma

$p$ -brana possui  $p$  coordenadas normais, e  $D - p - 1$  coordenadas transversas, além do tempo. Vamos então separar nossa coordenada nestes três grupos, da forma que  $z^\mu = \{t, y^i, x^a\}$  onde  $i = 1 \dots p$ ,  $a = 1 \dots d$ , e temos que  $p + d + 1 = D$ .

A solução quadrática mais simétrica e que satisfaz às equações de movimento é dada pela métrica

$$ds^2 = -B^2 dt^2 + \sum_{i=1}^p C_i^2 (dy^i)^2 + F^2 dr^2 + G^2 r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (5.4.31)$$

que possui diversos parâmetros a serem ajustados. Podemos restringí-los completamente buscando soluções ditas extremas, onde a massa do buraco negro é igual a sua carga e deixamos apenas um parâmetro livre. A métrica extrema mais simétrica possível que buscamos então nos é dada por

$$ds^2 = H^{-2\frac{d-2}{\Delta}} (-dt^2 + dy_1^2 + \dots + dy_p^2) + H^{2\frac{p+1}{\Delta}} (dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2), \quad (5.4.32)$$

onde  $\Delta = (p + 1)(d - 2) + \frac{1}{2}a^2(D - 2)$ . Nos limitando a forma vinda do setor de NS, ou seja,  $a = 0$  (para o setor de NS, o dilatino já foi absorvido na métrica, logo não temos o fator exponencial), temos que  $\Delta = 16$ . No caso de uma  $p = 3$  forma, temos

$$ds^2 = H(r)^{-2} (-dt^2 + dy_1^2 + \dots + dy_3^2) + H(r)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (5.4.33)$$

cuja forma é muito similar a um buraco negro extremo de Reissner-Nordström. No próximo capítulo iremos voltar a esta solução geral, buscando uma aproximação próxima ao horizonte de eventos. A solução para o campo escalar e vetorial não será trabalhada aqui, em vista que estávamos buscando objetos estendidos em  $p$  dimensões, o que encontramos. A dinâmica destes objetos não será tratada.

Antes de concluir este capítulo, vamos recapitular o que vimos até aqui em uma outra cronologia. Partimos de uma teoria para um objeto estendido em 1 dimensão, uma corda, e conseguimos calcular seu espectro. Vimos que seu estado fundamental, de massa nula, é composto de vários modos, que nos dão um espectro de diversas partículas, incluindo várias  $n$ -formas, cuja carga não se sabia de onde viria, já que não havia qualquer objeto estendido com quem elas pudessem se acoplar. A falta destes objetos estendidos também impossibilitava escolhermos condições de contorno de Dirichlet, o que contraria a possibilidade da dualidade T. Tudo indicava a existência de outros objetos, além das cordas. Trabalhando com a teoria em baixas energias, vimos que há soluções clássicas das equações que nos trazem naturalmente estes objetos, nas quais cordas abertas podem se ligar, e que carregam cargas do setor de R-R. Para que a teoria seja consistente, tais  $D_p$ -branas são necessárias. No entanto, de onde vêm sua dinâmica, e quão fundamentais são estes objetos? Vimos também

que a supergravidade oriunda de teorias do tipo IIA é naturalmente encontrada através da redução dimensional de uma teoria de supergravidade em 11 dimensões. Assim como a supergravidade em 10 dimensões, a supergravidade em 11 dimensões deve ser o limite de baixa energia de uma outra teoria, a teoria M. É plausível que a teoria M seja uma teoria de membranas, ainda que não se saiba qual seria a dimensão de tal membrana. Com isso concluímos que a teoria de cordas não é uma simples teoria de objetos estendidos em uma dimensão. O que é a teoria M ainda é uma incognita para os físicos.

No próximo capítulo iremos ver algumas descobertas recentes dentro da teoria de cordas, e em como elas revolucionam a idéia do espaço-tempo em que vivemos.

# Capítulo 6

## Considerações sobre o princípio holográfico

Neste capítulo veremos motivações para o princípio holográfico, que levanta a idéia de que o mundo onde vivemos é a fronteira de um espaço-tempo com uma dimensão a mais. Para isso faremos uma breve revisão das Dp-branas estudadas no último capítulo, entendendo-as como soluções tipo buraco negro para a supergravidade. Veremos como o princípio holográfico surge no cálculo da entropia de buracos negros, e porque o espaço de anti-De Sitter é um palco fundamental para esta monografia.

### 6.1 P-branas negras

Buracos negros são soluções da equação de Einstein. Podemos encontrá-los como singularidades no espaço-tempo protegidas por um horizonte de eventos, cuja informação vinda do interior é inacessível para um observador externo. A possibilidade de encontrar uma singularidade no espaço-tempo que não esteja protegida por um horizonte de eventos é geralmente descartada como não-física, na hipótese conhecida como censura cósmica. No caso de um espaço onde o tensor de energia-momento seja nulo, a equação de Einstein fica reduzida a

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{6.1.1}$$

que tem como solução esfericamente simétrica para uma massa  $M$  a métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \tag{6.1.2}$$

onde  $r_H = 2G_4M$  e  $G_4$  é a constante de Newton em  $D = 4$ . Para  $r = 0$  temos uma singularidade física, enquanto que para  $r = r_H$  temos uma singularidade apenas neste sistema de coordenadas. Ao calcularmos um escalar da teoria, veríamos que  $r = r_H$  não apresenta nenhuma singularidade. De fato, ao contrário do que é geralmente pensado, um observador atravessando o horizonte de eventos não perceberia nenhuma fato excepcional no mesmo. No caso de inserirmos uma carga no espaço-tempo, a equação de Einstein é modificada para

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G_4 T_{\mu\nu}, \quad (6.1.3)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento para o campo gerado pela carga. No caso de uma carga elétrica  $Q$ , a solução da equação é dada pela métrica de de Reissner-Nordstrom,

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (6.1.4)$$

onde  $\Delta = 1 - \frac{2MG_4}{r} + \frac{Q^2 G_4}{r^2}$ . Neste caso encontramos três singularidades. A primeira em  $r = 0$ , que é a singularidade física do problema, a localização do buraco negro. As outras singularidades são dadas por

$$r_{\pm} = MG_4 \pm \sqrt{(MG_4)^2 - Q^2 G_4}, \quad (6.1.5)$$

e a solução dita extrema é dada quando essas duas singularidades se encontram, ou seja,  $r_+ = r_- = MG_4$ , onde a massa do buraco negro é proporcional a sua carga,  $M\sqrt{G_4} = |Q|$ . Dessa forma podemos reescrever a métrica de Reissner-Nordstrom como

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^{-2} + \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega_2^2), \quad (6.1.6)$$

onde  $r_0 = MG_4$  e fizemos uma mudança de coordenadas,  $\tilde{r} = r - r_0$ , depois nos livrando do til, colocando assim o horizonte de eventos em  $r = 0$ . Agora podemos relembrar a solução encontrada para as equações da supergravidade com uma 2-forma,

$$ds^2 = H^{-2\frac{d-2}{\Delta}} (-dt^2 + dy_1^2 + \dots + dy_p^2) + H^{2\frac{p+1}{\Delta}} (dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2), \quad (6.1.7)$$

onde  $H = 1 + \left(\frac{h}{r}\right)^4$ ,  $\Delta = (p+1)(d-2)$  e  $p+d+1 = D$ . Comparando com (6.1.6), percebemos que trata-se de uma solução tipo buraco negro para um objeto estendido em  $p$  dimensões, associados às Dp-branas. De fato, Dp-branas e p-branas negras são nomes distintos para o mesmo objeto. No

caso de uma D3-brana, temos que

$$ds^2 = \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^4} \right]^{-1} (-dt^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2) + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^4} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (6.1.8)$$

onde  $r = 0$  marca o horizonte de eventos e  $h$  a distância até a brana. Podemos encontrar dois limites na teoria. O primeiro quando  $r \gg h$ , ou seja, longe do horizonte. Neste regime a métrica reduz-se a

$$ds_{longe}^2 = (-dt^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2) + (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (6.1.9)$$

que nada mais é que a métrica de Minkowski. O outro regime ocorre quando  $r \ll h$ , ou seja, próximo ao horizonte. Neste regime a métrica reduz-se a

$$ds_{perto}^2 = \left(\frac{r}{h}\right)^2 (-dt^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2) + \left(\frac{h}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (6.1.10)$$

que é uma métrica do tipo anti-de Sitter com uma esfera 5-dimensional,  $AdS_5 \times S^5$ . Podemos fazer uma mudança de coordenada da forma  $r = \frac{h^2}{z}$ , passando para as coordenadas de Poincaré, onde a métrica toma a forma

$$ds_{longe}^2 = \frac{h^2}{z^2} [dz^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2 - dt^2] + h^2 d\Omega_5^2. \quad (6.1.11)$$

Voltaremos a esta métrica em uma próxima seção, quando olharmos as motivações geométricas para a correspondência  $AdS/CFT$ . Antes disso, vamos ver um dos resultados mais importantes da teoria de cordas.

## 6.2 A entropia de buracos negros

Buracos negros emitem como se fossem corpos negros e possuem entropia, calculada através da fórmula de Bekenstein-Hawking,

$$S = \frac{A_H}{4G_N \hbar}, \quad (6.2.12)$$

onde  $A_H$  é a área do horizonte de eventos,  $G_N$  é a constante de Newton na dimensão  $N$  e  $\hbar$  é

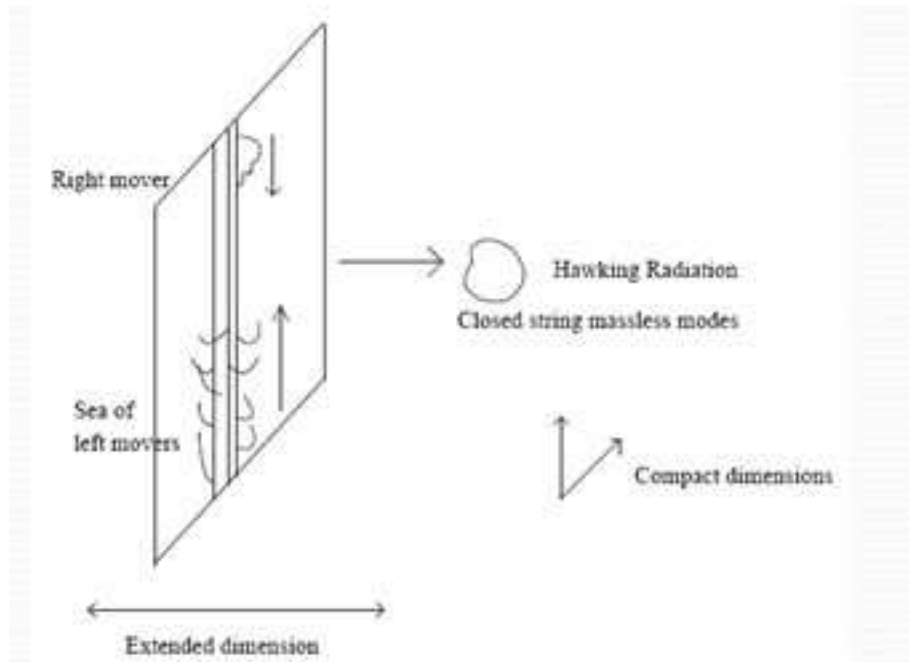


Figura 6.1: A entropia de buracos negros pode ser calculada microscopicamente contando as possíveis formas de interações entre branas.

a constante de Planck. Essa lei sempre teve um aspecto misterioso, dado que quebra a idéia de extensionalidade da entropia. Por que ela é proporcional a área, e não ao volume do horizonte de eventos? E, em sua formulação estatística, qual seria a contagem de estados, se um buraco negro não seria mais que matéria colapsada inacessível ao observador externo?

Uma das grandes realizações da teoria de cordas é calcular estatisticamente a entropia de buracos negros. Para um estado ligado envolvendo  $Q_5$  D5-branas e  $Q_1$  D1-branas, compactificados em um toro  $T^5$ , a entropia calculada através de seu limite de baixas energias, utilizando a fórmula de Bekenstein-Hawking na supergravidade, é de  $S = 2\pi\sqrt{NQ_1Q_5}$  [17]. O mesmo cálculo pode ser feito através da contagem de possíveis estados resultando a mesma energia. A carga  $Q_1$  de uma D1-brana, por exemplo, pode ser alcançada com  $Q_1$  D1-branas enroladas apenas uma vez em um círculo ou com apenas uma D1-brana enrolada  $Q_1$  vezes no mesmo círculo. Um cálculo aproximado [17] nos leva ao mesmo resultado de (6.2.12), enquanto que um cálculo mais preciso nos leva a correções para a fórmula de Bekenstein-Hawking [3],

$$S \sim 2\pi\sqrt{Q_1Q_5N} - \frac{7}{4}\log(Q_1Q_2N) + \dots \quad (6.2.13)$$



A falta de uma dimensão espacial no cálculo da entropia foi o primeiro indício de um certo princípio holográfico, onde objetos em  $D$  dimensões poderiam de fato viver na fronteira de um espaço em  $D + 1$  dimensões. O segundo grande indício do princípio holográfico aparece com a descoberta da correspondência *AdS/CFT*, para a qual nos voltamos agora.

### 6.3 O grupo conforme e a isometria do espaço de anti-De Sitter

Transformações conformes são transformações que preservam ângulos no produto escalar entre vetores, porém não preservam a distância. São transformações na qual a métrica transforma-se por uma mudança de escala

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (6.3.14)$$

para  $x \rightarrow x'$ . Vemos que trata-se de um subgrupo do grupo de transformações gerais de coordenadas e que engloba o grupo de Poincaré para  $\Omega = 1$ . Uma boa revisão do assunto pode ser encontrada em [5] [18], enquanto que uma breve introdução pode ser encontrada em [3]. Além das translações, rotações e transformações de Lorentz, presentes no grupo de Poincaré, também estão presentes as transformações de escala,

$$x \rightarrow x' = \lambda x, \quad (6.3.15)$$

e as transformações especiais,

$$x \rightarrow x' = \frac{x + bx^2}{1 + 2b \cdot x + b^2x^2}. \quad (6.3.16)$$

Por uma contagem de parâmetros independentes (ou geradores), temos  $D$  translações,  $\frac{1}{2}D(D-1)$  rotações e transformações de Lorentz, 1 transformação de escala e  $D$  transformações especiais, de forma que

$$D + \frac{1}{2}D(D-1) + 1 + D = \frac{1}{2}(D+2)(D+1), \quad (6.3.17)$$

cuja álgebra é isomórfica a álgebra de  $SO(D, 2)$ . Para o grupo conforme de Poincaré, temos  $SO(4, 2)$ . Há uma grande semelhança com o grupo de isometrias do espaço de anti-De Sitter. Podemos

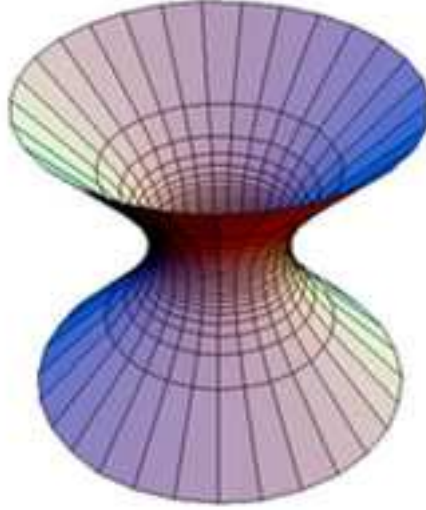


Figura 6.2: O espaço de anti-de Sitter pode ser visto como um hiperbolóide mergulhado em um espaço de Minkowski.

representar o espaço de anti-De Sitter em  $D + 1$  dimensão através de um hiperbolóide de curvatura constante [16]

$$X_0^2 + X_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^n X_i^2 = \Lambda^2, \quad (6.3.18)$$

mergulhado em um espaço  $D + 2$  dimensional de métrica

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^n dX_i^2, \quad (6.3.19)$$

cujo grupo de isometrias é o grupo  $SO(D, 2)$  [19]. Como trata-se do espaço de anti-De Sitter em  $D + 1$  dimensões, o grupo  $SO(D, 2)$  não seria o grupo conforme de campos vivendo em seu interior. No entanto, o grupo  $SO(D, 2)$  também é o grupo de isometrias da borda do espaço de anti-De Sitter. Como já vimos, utilizando coordenadas de Poincaré, a métrica de um espaço  $AdS_5 \times S^5$  é dada por

$$ds^2 = \frac{h^2}{z^2} [dz^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2 - dt^2] + h^2 d\Omega_5^2. \quad (6.3.20)$$

que é a métrica de uma D3-brana próxima ao horizonte de eventos. Tomando sua fronteira, dada

por  $z \rightarrow 0$ , a métrica da esfera torna-se irrelevante quando comparada à fronteira do espaço de anti-De Sitter. Logo a superfície  $z \rightarrow 0$  representa um hiperespaço 3+1 dimensional, cujo grupo de isometrias é igual ao grupo conforme. Apesar da D3-brana ser definida em um espaço de  $D = 10$  dimensões, encontramos uma relação entre o grupo conforme e a fronteira do espaço de anti-De Sitter em 3+1 dimensões.

Essa relação é mais conhecida como correspondência *AdS/CFT*, do inglês anti-De Sitter/Conformal Field Theory. A definição de campos na fronteira de um espaço é mais uma motivação para a idéia do princípio holográfico e poderia explicar o fato da entropia de buracos negros ser calculada em uma dimensão inferior à dimensão onde o buraco negro é definido.

# Capítulo 7

## Perspectivas

Esta monografia abordou os fundamentos das teorias de supercordas, assim como a presença de objetos estendidos, as Dp-branas. Com a segunda revolução em supercordas em meados da década de 90, diversos problemas teóricos surgiram, no que é talvez a maior revolução na física teórica do século XX depois da teoria da relatividade e da mecânica quântica. Esperamos que este trabalho sirva de base para um estudo mais elaborado das diversas dualidades conectando as cinco teorias de cordas existentes mais a teoria M, as dualidades T, S e U. Em um contexto cosmológico, vimos como a teoria de cordas pode explicar a entropia de buracos negros e o princípio holográfico, este através da correspondência AdS/CFT. O cálculo de funções de correlação utilizando a correspondência AdS/CFT, como para a massa de estados ligados de glúons [20], cujos resultados podem ser confirmados pelo LHC, pode vir a colocar em forte evidência o fato de vivermos em um espaço-tempo de dimensão maior do que quatro, e mudar completamente a visão que temos do universo. Apesar desta monografia ter tocado apenas superficialmente na correspondência AdS/CFT, os ingredientes fundamentais para o entendimento da mesma foram abordados, de forma que esperamos que uma continuação natural deste trabalho seja um estudo mais aprofundado da mesma.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. H. Schwarz, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.101*; 2001; 54-61.
- [2] M.B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory Vol. 1*; Cambridge University Press; First Edition; 1987.
- [3] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction* ; World Scientific Publishing Company; First Edition; 2007.
- [4] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*; Cambridge University Press; First Edition; 2004.
- [5] S. V. Ketov, *Conformal Field Theory*; World Scientific Publishing Company; First Edition; 1995.
- [6] E. Kiritsis, *String Theory in a Nutshell*; Princeton University Press; First Edition; 2007.
- [7] W. Siegel ,*Phys.Lett.B128:397*; 1983.
- [8] P.S Howe e P.C. West, *Nuclear Physics B238* ; 1984; 181-220.
- [9] E. Cremmer, B. Julia e J. Scherk, *Phys. Lett. B76* ; 1978; 409-412.
- [10] J. H. Schwarz, *Nuclear Physics B226* ; 1983; 269-288.
- [11] M. Dine, P. Huet e N. Seiberg,*Nuclear Physics B322* ; 1989; 301.
- [12] J. Dai, R. G. Leigh e J. Polchinski, *Mod. Phys. Lett. A4* ; 1989; 2073-2083.
- [13] J. Polchinski, *Phys. Rev. Lett. 75* ; 1995; 4724-4727.
- [14] R. Argurio, *PhD thesis (Universite Libre de Bruxelles)*; 1998; hep-th/9807171.

- [15] G. T. Horowitz, A. Strominger, *Nucl. Phys. B360*; 1991; 197-209.
- [16] H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga , *Physical Review D66*; 2002;
- [17] J. M. Maldacena, *Nucl. Phys. Proc. Suppl. 61A:111-123*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl. 62:428-442*; hep-th/9705078; 1998.
- [18] P. Ginsparg, *Lectures given at Les Houches*; hep-th/9108028; 1988.
- [19] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri e Y. Oz, *Phys.Rept.323*; hep-th/9905111; 2000.
- [20] H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga, *JHEP 0305:009*; 2003.