Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo
Departamento de Astronomia

Modelos de Universo com interação entre fluidos

Projeto de Final de Curso

Aluno: Bernardo Machado de Oliveira Fraga
Orientador: Prof.Dr. Nelson Pinto Neto

Rio de Janeiro, Julho de 2010

Agradecimentos

- Aos meus pais, minha irmã e toda minha família por me apoiarem constantemente durante a faculdade.

- Ao meu orientador, Nelson Pinto Neto, por me aceitar como aluno de iniciação científica e acompanhar minha carreira até o final do mestrado

- Aos amigos que fiz na faculdade, pelo companheirismo e por compartilhar a carreira difícil que escolhemos

- Aos meus amigos desde os tempos do colégio Daniel, Antonio, Diego, Wesley e Rubens, que, apesar das brincadeiras, sempre tiveram orgulho da carreira que escolhi

- Aos meus primos Diogo, André e Leandro por me acolherem em sua casa sempre que possível, evitando uma longa viagem de ônibus

- A todos os professores e funcionários do Valongo por me aguentarem e ajudarem durante todos esses anos.

Resumo

Desde a descoberta de que o universo está se expandindo aceleradamente, busca-se a causa desse comportamento estranho, uma vez que a força dominante em escalas cosmológicas é a gravitação, que é atrativa. Por meio das equações de Friedmann, descobriu-se que um fluido que pudesse ser responsável por essa aceleração teria pressões negativas, o que não se assemelha a nenhum fluido comumente conhecido (matéria, radiação). Vários modelos já foram propostos para tentar explicar essa aceleração, como a constante cosmológica, campos escalares e parametrizações na equação de estado. Propomos neste trabalho uma interação entre dois fluidos obedecendo à condição de energia forte (SEC, *Strong Energy Condition*), o que foge do escopo do modelo padrão, para tentar explicar a aceleração do universo. Caso a interação seja fenomenologicamente descrita por uma lei de potência no fator de escala, obtemos soluções analíticas para a equação de Friedmann que nos levam a universos não-singulares com uma fase de aceleração inicial e universos singulares com transição de uma fase desacelerada para uma acelerada.

Algumas observações indicam que a aceleração do universo está perdendo força; isso pode indicar que esse é um fenômeno transiente. Analisamos um *toy model* que representa esse comportamento, por meio de uma forma específica para a interação. Considerando que uma parte da interação cancela a constante cosmológica "pura", conseguimos reproduzir esse modelo, no qual uma aceleração transiente deve-se puramente à interação.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Cosmologia é a ciência que tenta explicar a estrutura e a evolução do universo como um todo. Com a elaboração da Teoria da Relatividade Geral por Einstein em 1915 [1] uma série de modelos de universo foram elaborados, sendo o primeiro deles do próprio Einstein [2]. Esse modelo contrariava um dos paradigmas da época, o de que vivemos num universo estático; por isso, Einstein adicionou um termo extra em suas equações de campo de modo a cancelar o caráter atrativo da gravitação (a chamada constante cosmológica). Em 1922 e 1924, o matemático russo Alexandr Friedmann conseguiu soluções não estáticas da equação de Einstein sem o termo cosmológico [3], [4]. A cosmologia permaneceu como um ramo da ciência altamente especulativo, pois até aquele momento não se tinha nenhuma observação de alguma propiedade global do universo, e portanto não poderia ser testada.

Até que em 1929, o astrônomo americano Edwin Hubble [5], observando cefeidas, descobriu que havia uma tendência de sua radiação apresentar um desvio para o vermelho, indicando que elas estariam se afastando do sistema solar com uma velocidade proporcional a distância em que se encontravam.

$$v = H_0 d$$

Essa observação, combinada com a idéia de que não ocupamos lugar privilegiado, indicava um universo em expansão, dando um grande impulso às soluções de Friedmann e fazendo com que Einstein considerasse a constante cosmológica como o maior erro de sua vida.

Como o universo estava em expansão e a gravidade é atrativa, era esperado que houvesse um momento no passado em que o universo fosse extremamente denso e quente, além de muito pequeno; extrapolando mais um pouco para o passado, o universo teria partido de uma singularidade inicial. George Gamow foi o primeiro a tentar elaborar essa idéia em termos mais formais [6]; ele dizia que o universo teria começado num estado de temperatura e densidade quase infinita. Toda a matéria seria composta de prótons, nêutrons e elétrons interagindo num meio permeado de fótons de alta energia. Depois de juntaram a ele Ralph Alpher e George Herman, que fizeram cálculos da abundância de elementos mais pesados produzidos com a expansão e consequente resfriamento do universo. Uma das previsões mais notáveis desses físicos foi a de uma radiação primordial que deveria permear o universo até hoje e que só foi confirmada anos depois.

Durante um certo tempo, um outro modelo de universo rivalizava com o modelo proposto por Friedmann: A teoria do Estado Estacionário, cujo maior defensor era Fred Hoyle. Essa teoria dizia que o universo não tinha começo nem teria um fim, e apesar da expansão as propriedades não mudariam com o tempo. Isso demandaria uma criação continua de matéria para compensar a expansão do universo, uma característica não muito bem explicada na época.

No entanto, em 1965, foi feita uma das maiores descobertas da cosmologia: Arno Penzias e Robert Wilson acidentalmente detectaram um ruído em todas as direções do céu, na faixa de microondas [7]: era a confirmação da existência da radiação cósmica de fundo, prevista por Gamow. Essa descoberta foi uma forte evidência a favor da teoria do Big Bang[1], e o Estado Estacionário foi praticamente abandonado. Com o sucesso do Big Bang, passou-se a considerar esse modelo o Modelo Cosmológico Padrão. No entanto, alguns problemas do Big Bang ainda estavam sem solução à época, sendo um dos mais importantes a singularidade inicial, que não havia como ser contornada.

Isso levou alguns físicos a proporem um novo modelo onde o universo seria eterno como no modelo do Estado Estacionário, a diferença sendo que houve uma fase de contração antes da expansão atual: um *Bounce*. Os primeiros modelos analíticos foram obtidos no final da década de 70, por Novello e Salim [9] e por Melnikov e Orlov [10]. Na época, os modelos com bounce chamaram pouco a atenção, já que logo no ínicio dos anos 80 a teoria inflacionária, criada por Guth e depois refinada por Linde, resolveu muitos dos problemas do modelo cosmológico padrão de uma forma simples. Juntou-se a isso os teoremas de singularidade de Hawking e Penrose, e os modelos com *bounce* foram quase totalmente ignorados na época.

No entanto, no fim dos anos 90, foi feita uma nova e impressionante descoberta: 2 grupos independentes, estudando supernovas tipo Ia, concluíram que o universo não somente estava se expandindo, como esssa expansão era acelerada [8]. Além disso, as observações indicavam que a componente responsável pela aceleração, chamada genericamente de energia escura, era responsável por cerca de 70% da densidade total do universo. Ou seja, a maior parte da densidade do universo era composta por algo completamente desconhecido, pois segundo a relatividade geral, fluidos normais como radiação e poeira necessariamente implicavam numa gravitação atrativa, tornando a aceleração impossível. Seria necessário um fluido com pressões negativas para que a aceleração fosse possível. Mas Einstein já tinha proposto um fluido com tal propriedade: a constante cosmológica, que foi proposta exatamente como um mecanismo de gravidade repulsiva. Um fluido com densidade constante no tempo implica que sua pressão será negativa, e portanto o problema da aceleração poderia ser contornado. A constante cosmológia, que Einstein havia considerado o

[1]O termo Big Bang foi cunhado pelo próprio Hoyle, numa entrevista de rádio.

maior erro de sua vida, reaparecia como uma possível solução de um dos mais importantes problemas da cosmologia atual. No entanto, devido à sua própria natureza, a constante cosmológica enfrenta vários problemas: ela passa a ser importante exatamente ná época da formação de estruturas no universo; embora possamos ajustar o valor da constante, parece que há algum mecanismo físico ainda não compreendido. Além disso, não há nenhuma explicação fundamental para a natureza dessa constante cosmológica. O modelo com a constante cosmológica foi chamado de ΛCDM.

Como um fluido com densidade constante criava um problema sério de condições iniciais, um novo modelo foi criado: quintessência, um campo escalar rolando lentamente em seu potencial [11]. É necessário que a componente cinética seja pequena (*slow roll*) a fim de se obter pressões negativas e consequentemente aceleração. A escolha de um potencial para esse campo até hoje é controversa, não tendo nenhuma justificativa básica para que uma classe de potenciais seja escolhida em detrimento de outra. No entanto, alguns tipos de potenciais são mais convenientes, como aqueles que são potenciais ditos atratores, ou seja, dão origens a soluções que são praticamente insensíveis às condições iniciais do campo [12]. Além de não existir até o momento nenhuma justificativa para a escolha de um determinado potencial, esse campo escalar que deveria dominar o universo atualmente, nunca foi observado. A constante cosmológica e a quintessência serão discutidos com mais detalhes no capítulo 2.

Além da energia escura, outra componente material do universo é a chamada matéria escura, responsável por cerca de 20% da densidade total. Portanto, 95% do universo é composto por fuidos desconhecidos, e uma interação entre esse fluidos é possível, sendo uma situação mais geral do que modelos sem interação. Os primeiros modelos de interação foram feitos por Wetterich [19], seguido depois por diversos autores [25, 26]. Uma das principais vantagens é a de que modelos com interação aliviam bastante o problema da coincidência cósmica: a razão entre a densidade de matéria e de energia escura hoje é muito perto da unidade. Alguns autores [13] mostraram que uma interação entre matéria escura e um campo escalar pode levar a soluções para $r \equiv \frac{\rho_m}{\rho_x}$ que tendem a um valor constante, dado que algumas condições não muito restritivas sejam respeitadas. Isso é extremamente importante pois o modelo ΛCDM prevê que

$$r \propto a^{-3}$$

e portanto, para que r tenha um valor constante e próximo da unidade atualmente, é necessário que as condições iniciais sejam muito específicas. Vemos que o problema da coincidência cósmica é aliviado, já que o valor de r tende a uma constante pela própria dinâmica dos modelos com interação. Precisa-se impor uma forma específica para o parâmetro de interação, proporcional ao parâmetro de Hubble, que no entanto pode ser justificada por razões dimensionais. Juntando isso ao fato de que até hoje a natureza das componentes escuras do universo não está muito bem explicada, faz com que modelos com interação sejam mais estudados, dando mais alternativas para entender o universo atual.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, damos uma noção geral de cosmologia relativística, apresentando algumas soluções encontradas para a evolução do universo e mencionando alguns casos de interesse. No capítulo 3, apresentamos um modelo que desenvolvemos com fluidos interagindo, partindo de uma função simples para a interação. Já no capítulo 4 apresentamos outro modelo, este baseado num recente artigo que argumenta que a aceleração medida atualmente pode ser um fenômeno transiente; com isso em mente, fizemos um modelo de interação que nos dê esse cenário. Já o capítulo 5 é dedicado às conclusões e observações finais.

Capítulo 2

Cosmologia Relativística

2.1 Notação e Convenções

Aqui vamos apresentar as convenções e notações usadas no decorrer do trabalho com o intuito de facilitar a escrita e a leitura do mesmo.
Será usado o sistema de unidades naturais, ou seja, $c = \hbar = 1$.
Índices gregos serão usados para as 4 dimensões do espaço tempo, sendo que o índice 0 sempre será a coordenada temporal. Índices latinos correspondem às 3 dimensões espaciais. Portanto, o vetor x^μ, em coordenadas cartesianas, terá componentes $x^\mu = \{x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z\}$
A notação de Einstein também estará subentendida: sempre que o mesmo índice ocorrer 2 vezes numa multiplicação como subscrito e sobrescrito, esse índice deverá ser somado. Por exemplo:

$$A^{\mu\nu}B_{\mu\lambda} \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu\nu}B_{\mu\lambda}$$

Também $A^\nu{}_\nu$ é somado, sendo o traço do tensor $A^{\mu\nu}$.
A derivada no tempo cósmico de uma função qualquer será representada por um ponto, ou seja,

$$\frac{df}{dt} \equiv \dot{f}$$

A métrica de Minkowski será representada por $\eta_{\mu\nu}$, enquanto que uma métrica curva qualquer será representada por $g_{\mu\nu}$.
A derivada usual com respeito a uma coordenada x^μ será representada por uma vírgula ou por ∂_μ. Portanto,

$$\frac{dA}{dx^\mu} \equiv A_{,\mu} \qquad \text{ou} \quad \partial_\mu A$$

Já a derivada covariante com respeito a coordenada x^ν será representada por $A^\mu{}_{;\nu}$, sendo que

$$A^{\mu};_{\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}A^{\lambda}$$

2.2 O Princípio Cosmológico e a Métrica de Friedmann

Toda a cosmologia é derivada a partir da equação de Einstein, relacionando o conteúdo material com a geometria:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \ , \tag{2.2.1}$$

onde $R^{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o traço desse tensor. O tensor de Ricci é uma contração do tensor de Riemann, que dá a curvatura quadri-dimensional do espaço-tempo. O tensor de Riemann depende somente da métrica, por isso o primeiro passo é especificá-la.

Como estamos falando de cosmologia relativista, poderíamos resolver as equações de Einstein para encontrar uma métrica geral; no entanto, elas são extremamente complicadas e não-lineares, e possuem um conjunto muito grande de soluções. Por isso, os primeiros modelos cosmológicos partiram de um princípio simplificador, que foi chamado de **Princípio Cosmológico**. Ele diz que o universo é espacialmente homogêneo e isotrópico; à primeira vista, já que vemos nossa galáxia e vizinhança como sistemas não-homogêneos, essa poderia não ser uma boa aproximação. No entanto, observações da radiação cósmica de fundo e levantamento de galáxias indicam que o universo é bastante homogêneo e isotrópico, pelo menos em escalas muito grandes.

Com o Princípio Cosmológico, restringimos a métrica tridimensional a 3 escolhas possíveis:

- Espaço Plano, caracterizado pelo elemento de linha $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.
- Uma superfície esférica de raio a embutida num espaço euclidiano 4-dimensional, caracterizado pelo elemento de linha $dl^2 = d\vec{x}^2 + dz^2$, com o vínculo $z^2 + \vec{x}^2 = a^2$.
- Um hiperbolóide embutido num espaço pseudo-euclidiano 4-dimensional, caracterizada pelo elemento de linha $dl^2 = d\vec{x}^2 - dz^2$, com o vínculo $z^2 - \vec{x}^2 = a^2$, sendo a uma constante positiva.

Usando coordenadas esféricas, podemos escrever o elemento de linha da esfera e do hiperbolóide como $dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 \pm dz^2$, sendo que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2$, $+dz^2$ corresponde à esfera e $-dz^2$ ao hiperbolóide. Os vínculos ficam $z^2 \pm r^2 = a^2$. Diferenciando temos

$$zdz \pm rdr = 0 \Rightarrow dz = \mp\frac{rdr}{z} \ .$$

Substituindo dz no elemento de linha, ficamos com

$$dl^2 = dr^2 \left(\pm \frac{r^2}{a^2 \left(1 \mp \frac{r^2}{a^2}\right)} \right) + r^2 d\Omega^2 \; .$$

Reescalando a coordenada r

$$r' = \frac{r}{a}, \qquad\qquad dr = a dr' \; ,$$

e substituindo na expressão para o elemento de linha, temos

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{\pm r'^2 dr'^2}{1 \mp r'^2} + 1 + r'^2 d\Omega^2 \right) \; .$$

Finalmente, esquecendo as primas, a métrica tridimensional é:

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \; , \tag{2.2.2}$$

sendo que k é a curvatura do 3-espaço normalizada.

$$k = \begin{cases} 1 & \text{tri-esfera} \\ 0 & \text{espaço plano} \\ -1 & \text{tri-hiperbolóide} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

É interessante notar que, as topologias com $k = +1$ são todas compactas, enquanto que o caso $k = 0, -1$ permite tanto topologias abertas como compactas. Por isso, às vezes, universos com curvatura positiva são chamados de universos fechados.

O único jeito de incorporar evolução temporal sem perder a homogeneidade e a isotropia é permitir que a dependa do tempo; assim temos a métrica de um espaço-tempo 4-dimensional homogêneo e isotrópico, a chamada métrica de Friedmann (ou de Friedmann-Robertson-Lemaître-Walker, FRLW):

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \; , \tag{2.2.4}$$

sendo que agora $a(t)$ é chamado de **Fator de Escala**

Usando a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \; , \tag{2.2.5}$$

e sabendo que $\Gamma^i_{00} = 0$, podemos ver que uma partícula em repouso nesse sistema de coordenadas permanecerá em repouso, por isso chamamos esse sistema de comovente. A coordenada t é o tempo próprio medido por um observador comovente. Podemos entender melhor o papel do fator de escala calculando a distância em um tempo t da origem a um objeto comovente com coordenada radial r.

$$d(r,t) = a(t)\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = a(t) \times \begin{cases} \sin^{-1} r, & k=+1 \\ r, & k=0 \\ \sinh^{-1} r, & k=-1 \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Um objeto comovente tem a coordenada r independente do tempo, logo as distâncias variam com o fator de escala. Quando a curvatura espacial é diferente de zero, podemos associar o fator de escala ao raio de curvatura da hipersuperfície espacial. No espaço plano isso não é possível, e devemos entender o fator de escala como em (2.2.6).

2.3 As Equações de Friedmann

Uma vez que temos a métrica definida, basta calcularmos o escalar de curvatura e o tensor de Ricci para termos o lado esquerdo das equações de Einstein; o lado direito depende do conteúdo material do universo. No entanto, podemos derivar as equações de uma forma newtoniana, fazendo depois ajustes para a Relatividade Geral.

Vamos considerar um ponto arbitrário como origem e uma esfera com densidade $\rho(t)$ expandindo a partir desse ponto. De acordo com o teorema de Birkhoff [21], a métrica de um sistema esfericamente simétrico ao redor de um ponto é a métrica do espaço plano, não importando o que está fora da esfera. Isso significa dizer que o movimento de uma partícula dentro desse espaço não será afetado pela matéria fora dele. Designando o raio da esfera como $R(t) = a(t)\chi_{comov}$ e considerando a pressão dentro da esfera desprezível, podemos usar a mecânica newtoniana para descrever o movimento de uma partícula de teste de massa m na superfície da esfera, a uma distância $R(t)$ da origem ([22], [23]). A única força que atua nessa partícula será a força gravitacional da esfera, de massa M, portanto a equação de aceleração é

$$m\ddot{R} = -\frac{GMm}{R^2} = -\frac{4\pi}{3}Gm\frac{M}{(4\pi/3)R^3}R \Rightarrow \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{M}{(4\pi/3)R^3}a\ . \tag{2.3.7}$$

Mas $\frac{M}{(4\pi/3)R^3}$ nada mais é do que a densidade da esfera, logo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho\ . \tag{2.3.8}$$

Mas aqui consideramos a pressão desprezível; na relatividade geral, essa equação será modificada ao incluirmos a pressão, ficando

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\ . \tag{2.3.9}$$

A outra equação de Friedmann podemos obter considerando a conservação de energia. A energia potencial dessa partícula é dada por

$$U = -\frac{GMm}{R(t)} = -\frac{4\pi}{3}Gm\frac{M}{(4\pi/3)a(t)^3\chi^3}a(t)^2\chi^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho a(t)^2\chi^2 \ .$$

Já a energia cinética é

$$K = \frac{1}{2}m\dot{R}(t)^2 = \frac{1}{2}m\dot{a}^2\chi^2 \ .$$

Pela conservação da energia, $U + K = E$, sendo E uma constante:

$$\frac{1}{2}m\dot{a}^2\chi^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a(t)^2\chi^2 = E \Rightarrow \dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = E' \ .$$

Essa constante, que aqui seria a energia total do sistema, na relatividade geral será identificada como a curvatura tridimensional do espaço-tempo (k). Definindo $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, chegamos finalmente à equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \ . \tag{2.3.10}$$

Quando $k \neq 0$, temos uma relação entre o fator de escala e a curvatura; no caso do espaço plano, a normalização de a não faz sentido.

Finalmente, podemos obter a equação da conservação de energia considerando a pressão não-desprezível; portanto, quando a esfera se expande sua energia muda, e essa mudança é dada pela 1ª lei da termodinâmica:

$$dE = -pdV \ .$$

Como $E = \rho V$, $dE = Vd\rho + \rho dV$. Além disso, $V \propto a^3$ e portanto

$$a^3 d\rho + 3a^2\rho da = -3a^2 p da \Rightarrow d\rho + \frac{3}{a}(\rho + p) = 0 \ ,$$

que podemos reescrever como

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \ . \tag{2.3.11}$$

Podemos obter essa equação através da conservação do tensor momento energia de um fluido perfeito $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, sendo que

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu \ , \tag{2.3.12}$$

sendo $u_\mu = \{1, 0\}$ é a quadri-velocidade do fluido em coordenadas comoventes.

Ficamos portanto com as Equações de Friedmann, que saem da equação de Einstein, e a equação da conservação da energia do fluido:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{2.3.13}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{2.3.14}$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \tag{2.3.15}$$

Temos então 3 variáveis: ρ, p e $a(t)$, e a princípio 3 equações. No entanto, essas 3 equações não são linearmente independentes; derivando a primeira no tempo cósmico, e utilizando a última, chegamos na segunda. Falta portanto mais uma equação para que possamos resolver esse sistema. Essa equação é a Equação de Estado $p(\rho)$, que na forma mais simples é dada por

$$p = w\rho \ , \tag{2.3.16}$$

sendo w uma constante. Ela vale para fluidos como poeira(matéria não-relativística) e radiação, onde $w = 0$ e $w = 1/3$ respectivamente.

2.4 Dinâmica do Universo

Quando $k = 0$ a densidade é dada por $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$. Essa é a chamada densidade crítica, e com ela podemos definir parâmetros de densidade para diferentes fluidos como

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho}{H^2} \ , \tag{2.4.17}$$

e podemos reescrever a equação de Friedmann como

$$\Omega = 1 + \frac{k}{a^2 H^2} \ , \tag{2.4.18}$$

e vemos que há uma relação entre esse parâmetro de densidade e a curvatura do universo. Se $\Omega = 1$, a curvatura é nula. Caso $\Omega > 0$, a curvatura e positiva e caso contrário, a curvatura é negativa. Portanto, ao nos referirmos a curvatura, tanto podemos falar sobre k como sobre esse parâmetro de densidade. As observações atuais colocam Ω_{total} muito próximo de 1.

Podemos reescrever a equação acima como

$$a^2 = \frac{k}{H^2\Omega - H^2} \ .$$

Denotando o fator de escala atualmente por a_0 temos que

$$a_0^2 = \frac{k}{H_0^2\Omega_0 - H_0^2} \ . \tag{2.4.19}$$

Se $k = 0$, podemos normalizar o fator de escala como quisermos (usualmente escolhendo $a_0 = 1$). Caso contrário isso já não é mais possível já que a relação acima tem que ser respeitada.

Podemos definir o chamado parâmetro de desaceleração, que é dado por

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \; , \tag{2.4.20}$$

de onde podemos ver que, se a aceleração é negativa, $q > 0$ vice-versa. Portanto, um universo em expansão acelerada tem $q < 0$.

Podemos ver por (2.3.14) que, se $\rho + 3p > 0$, a aceleração do universo será sempre negativa. Portanto, se extrapolarmos para tempos muitos pequenos, o fator de escala terá que ser nulo em algum momento. Um universo dominado por fluidos ordinários inescapavelmente terá uma singularidade no seu início.

Vemos também que, para que o fator de escala tenha um máximo ou um mínimo, $H = 0$, e esse extremo ocorre quando

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{k}{a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{3k}{8\pi G\rho} \; ,$$

portanto só teremos um extremo em $a \neq 0$ se $k = 1$. Mas como já mencionado anteriormente, se o universo sempre foi dominado por fluidos ordinários, a aceleração sempre será negativa. Portanto, esse extremo é um máximo, e o universo sai de uma singularidade inicial, atinge um tamanho máximo e recolapsa, o que chamamos de *Big Bang Big Crunch*. Caso $k = 0, -1$, o universo parte de uma singularidade inicial e se expande para sempre. No entanto, caso o universo seja dominado por um fluido com $w < -1/3$, a aceleração será positiva; esse extremo será um mínimo, e ocorre um *Bounce*: o universo contrai até um tamanho mínimo para depois voltar a se expandir aceleradamente.

A seguir vamos analisar essa dinâmica com mais detalhes a partir de soluções analíticas para as equações de Friedmann.

2.4.1 Soluções Para as Equações de Friedmann

Um Fluido Dominante, Curvatura Nula

Consideramos um fluido perfeito que permeia o universo, com equação de estado $p = w\rho$. Resolvendo a equação de conservação da energia, vemos que

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3H(1+w)\rho &= 0 \rightarrow \int \frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\int \frac{da}{a} \rightarrow \\ \rho &= \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{-3(1+w)} \; . \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Com isso, podemos resolver agora a equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \rightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{-3(1+w)} \quad ,$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} \int a^{3(1+w)/2-1} da &= \frac{8\pi G}{3} a_0^{3(1+w)} \int dt \Rightarrow \\ a &\propto t^{2/[3(1+w)]} \ . \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Caso o expoente seja menor do que 1, ou seja, $w > -1/3$, temos uma expansão desacelerada, caso contrário ($w < -1/3$) temos uma expansão acelerada; além disso, caso $w > -1$, temos uma singularidade inicial pois o fator de escala vai a zero em $t = 0$, como já havíamos mencionado antes. O caso de um fluido com $w < -1$, chamado de fluido fantasma, vamos examinar mais adiante. Vamos agora analisar essa solução para diferentes fluidos.

- Poeira

  Nesse caso, $p = 0$ e portanto

$$\rho \propto a^{-3} \tag{2.4.23}$$

$$a(t) \propto t^{2/3} \ . \tag{2.4.24}$$

  Essa solução é o Modelo de Einstein-de Sitter, que foi o mais popular por muitos anos.

- Radiação

  Nesse caso, $p = \frac{\rho}{3}$ e

$$\rho \propto a^{-4} \tag{2.4.25}$$

$$a(t) \propto t^{1/2} \ . \tag{2.4.26}$$

  Em ambos os casos, como $0 < t < +\infty$, o fator de escala tende a zero quando o tempo cósmico tende a zero; além disso, quando $a \rightarrow 0$, a densidade de energia tende a infinito. Universos dominados somente por poeira ou radiação (que tem $w > -1/3$), com curvatura nula, partem de uma singularidade inicial para uma expansão desacelerada eterna, confirmando o que já havíamos visto.

- Constante Cosmológica

  Como o próprio nome diz, a constante cosmológica tem densidade de energia constante no tempo. De acordo com (2.4.21), isso implica em $p = -\rho$ e não podemos usar diretamente (2.4.22). Usamos então $H_\Lambda^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda$, cuja solução é simples

$$a(t) \propto \exp(H_\Lambda t) \ , \tag{2.4.27}$$

  que é chamado de universo de de-Sitter, que tem idade infinita e é não-singular. A constante cosmológica, que Einstein considerou o maior erro de sua vida, pode ser a responsável pelo atual estágio de expansão acelerada observado.

- Fluido Fantasma

  Nesse caso $w < -1$, logo $\frac{2}{3(1+w)} < 0$, e temos a situação bizarra onde o fator de escala é inversamente proporcional ao tempo; além disso, sua densidade de energia seria proporcional ao fator de escala elevado a uma potência positiva, ou seja, esses fluidos seriam completamente irrelevantes no início do universo, mas dominando completamente mais tarde. Vamos analisar agora qual seria o comportamento futuro do universo caso ele fosse dominado por um fluido fantasma, usando a integração em 2.4.21

$$\int_{a_0}^{a} a^{3(1+w)/2-1}\, da \propto \int_{t_0}^{t^*} dt \Rightarrow \left(\frac{1}{a_0^{3(|1+w|)/2}} - \frac{1}{a^{3(|1+w|)/2}} \right) C = t^* - t_0 \ . \tag{2.4.28}$$

  Vemos que, considerando $a_0 = 1$, quando $t^* - t_0 = C$, o fator de escala tende a infinito; isso é o chamado *Big Rip*, que causaria a ruptura de todas as estruturas do universo por causa da violência da expansão.

Um Fluido Dominante, Curvatura não Nula

Para facilitar os cálculos, vamos trabalhar com o tempo conforme, definido por $dt = ad\eta$. A equação de Friedmann fica então (usando $\frac{d}{dt} = \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}$ e considerando a constante cosmológica nula)

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \Rightarrow$$
$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - k \ , \tag{2.4.29}$$

sendo que $\mathcal{H} = \frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}$. Como $\ddot{a} = \frac{d}{dt}(\dot{a}) = \frac{1}{a}\mathcal{H}'$, sendo a prima derivada no tempo conforme, podemos reescrever a outra equação de Friedmann

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(1+3w)\rho \Rightarrow \frac{1}{a^2}\mathcal{H}' &= -\frac{4\pi G}{3}(1+3w)\rho \rightarrow \\ \mathcal{H}' &= -\frac{4\pi G}{3}(1+3w)\rho a^2 \ . \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

Da equação (2.4.29), $\frac{1}{2}(\mathcal{H}^2 + k) = \frac{4\pi G}{3}\rho a^2$, podemos substituir em (2.4.30)

$$\mathcal{H}' = -\frac{1+3w}{2}(\mathcal{H}^2 + k) \ , \tag{2.4.31}$$

e finalmente podemos resolver.

$$\frac{d\mathcal{H}}{\mathcal{H}^2 + k} = -\frac{1+3w}{2}d\eta \ .$$

Resolvendo para η e invertendo, vemos que

$$\mathcal{H}(\eta) = \cot\left(\frac{1+3w}{2}\sqrt{k}\eta\right) \ , \tag{2.4.32}$$

sendo que $\cot(ix) = \coth(x)$. Substituindo em (2.4.29), $\mathcal{H}^2 + k \propto \rho a^2 = a^{-1-3w}$.

Se $k = 1$

$$\mathcal{H}^2 + 1 = \cot^2\left(\frac{1+3w}{2}\eta\right) + 1 = \frac{1}{\sin^2(\frac{1+3w}{2}\eta)} \ ,$$

e se $k = -1$

$$\mathcal{H}^2 - 1 = \coth^2\left(\frac{1+3w}{2}\eta\right) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(\frac{1+3w}{2}\eta)} \ .$$

Portanto, podemos agora expressar o fator de escala em função do tempo conforme

$$a(\eta) = a_m \sin^{\frac{2}{1+3w}}\left(\frac{1+3w}{2}\sqrt{k}\eta\right) \ . \tag{2.4.33}$$

Quando $k = +1$, a solução é uma função periódica; portanto, caso $w > -1/3$, o universo partirá de uma singularidade inicial, atingirá um tamanho máximo e contrairá até um colapso, confirmando o que já havíamos visto. No entanto, caso $w < -1/3$, $1 + 3w < 0$ e a solução é o inverso de uma função periódica; logo, o universo é eterno, contraindo do infinito até um tamanho mínimo para depois voltar a se expandir, também confirmando o que havíamos visto anteriormente.

Investigaremos agora o comportamento dessa solução para fluidos específicos.

- Radiação

  Como $w = -1/3$, $\frac{1+3w}{2} = 1$ e portanto a solução é dada por

$$a(\eta) = a_m.\begin{cases} \sin(\eta), & k = +1 \\ \sinh(\eta), & k = -1 \end{cases} \tag{2.4.34}$$

  Podemos agora passar do tempo conforme para o tempo cósmico resolvendo $dt = ad\eta$. Os tempos se relacionam como:

$$t = a_m.\begin{cases} (1-\cos(\eta)), & k = +1 \\ (\cosh(\eta)-1) & k = -1 \end{cases} \tag{2.4.35}$$

  Caso o universo seja fechado, η é limitado: $\pi > \eta > 0$; caso contrário, $+\infty > \eta > 0$.

- Poeira

  Como $p = 0$, $\frac{2}{1+3w} = 2$, e a solução é dada por

$$a(\eta) = a_m.\begin{cases} \sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cosh(\eta)-1), & k = -1 \\ \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos(\eta)), & k = +1 \end{cases} \tag{2.4.36}$$

  Podemos novamente calcular a relação entre o tempo conforme e o tempo cósmico

$$t = a_m.\begin{cases} (\eta - \sin(\eta)), & k = +1 \\ (\sinh(\eta) - \eta), & k = -1 \end{cases} \tag{2.4.37}$$

  Novamente aqui o tempo conforme é limitado se o universo foi fechado: $2\pi > \eta > 0$, com o mesmo limite do caso anterior para o universo aberto. E novamente o universo começa numa singularidade, pois em ambos os casos quando $\eta \to 0$ o fator de escala e o tempo cósmico também tendem a zero, não importando a curvatura. Além disso, para curvaturas positivas, o fator de escala tende a zero novamente quando $\eta \to \pi$ e $\eta \to 2\pi$ respectivamente; além disso, o tempo cósmico tende a valores finitos nesses casos, confirmando que ocorre o *Big Bang Big Crunch*, como já havíamos visto.

- Constante Cosmológica

  Como $\rho = -p$, a equação para a aceleração fica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho - 3\rho) = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda$$

Utilizando a densidade da constante consmológica, reescrevemos a equação de Friedmann como

$$\frac{\dot{a}}{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda - \frac{k}{a^2}$$

Definindo $H_\Lambda^2 \equiv \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda$ e substuindo na equação da aceleração, temos

$$\ddot{a} - H_\Lambda^2 a = 0 \tag{2.4.38}$$

cuja solução é dada em termos de exponenciais reais:

$$a(t) = C_1 e^{H_\Lambda t} + C_2 e^{-H_\Lambda t}\ . \tag{2.4.39}$$

Podemos determinar as constantes C_1 e C_2 a partir da equação de Hubble

$$\dot{a}^2 = H_\Lambda^2 a^2 - k\ .$$

Com a solução calculamos a derivada de a: $\dot{a}^2 = H_\Lambda^2 C_1^2 e^{2H_\Lambda t} - 2H_\Lambda^2 C_1 C_2 + H_\Lambda^2 C_2^2 e^{-2H_\Lambda t}$. Substituindo na equação acima encontramos

$$\begin{aligned} H_\Lambda^2 C_1^2 e^{2H_\Lambda t} - 2H_\Lambda^2 C_1 C_2 + H_\Lambda^2 C_2^2 e^{-2H_\Lambda t} &= H_\Lambda^2 C_1^2 e^{2H_\Lambda t} + 2H_\Lambda^2 C_1 C_2 + H_\Lambda^2 C_2^2 e^{-2H_\Lambda t} - k \Rightarrow \\ 4C_1 C_2 H_\Lambda^2 &= k\ . \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

Podemos escolher o tempo $t = 0$ como o tempo onde $|C_1| = |C_2|$. Portanto, para um universo fechado

$$4C_1 C_2 H_\Lambda^2 = 1 \rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2H_\Lambda^2}\ ,$$

enquanto para um universo aberto

$$4C_1 C_2 H_\Lambda^2 = -1 \rightarrow C_1 = -C_2 = \frac{1}{2H_\Lambda^2}\ ,$$

e temos finalmente a solução geral para o fator de escala

$$a(t) = \frac{1}{H_\Lambda^2} \begin{cases} \cosh(H_\Lambda t), & k = +1 \\ \sinh(H_\Lambda t), & k = -1 \end{cases} \tag{2.4.41}$$

Podemos ver que, se a curvatura for positiva, temos um universo com *bounce*. O que era esperado, pois a constante cosmológica se comporta como um fluido perfeito com $w = -1$.

Já se a curvatura for negativa, o fator de escala tem uma singularidade inicial e depois sofre uma expansão acelerada; essa singularidade no entanto, não é física, mas sim do sistema de coordenadas. É importante notar que, como o universo é composto somente da constante cosmológica, não há uma evolução real no tempo; a dependência temporal do fator de escala é meramente resultado da foliação que escolhemos.

2.5 O Universo Acelerado

Aqui vamos apresentar as soluções mais comuns para se obter um universo, no âmbito da relatividade geral: a constante cosmológica e um campo escalar, chamado de quintessência

2.5.1 A Constante Cosmológica

Quando a solução de Friedmann foi descoberta, logo se percebeu pela equação (2.3.14) que elas implicavam num universo desacelerado, pois tanto para poeira como para radiação, $\rho \neq -3p$. Isso incomodou bastante os físicos da época, inclusive Einstein, que acreditavam num universo estático. Isso o levou a incluir à força um termo constante nessa equação, a chamada constante cosmológica, que como o próprio nome diz tem densidade de energia constante, o que implica em $p = -\rho$ de acordo com (2.3.15). As equações modificadas seriam então

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{2.5.42}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \; . \tag{2.5.43}$$

Isso incluía modificar a equação de Einstein para

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \; . \tag{2.5.44}$$

Depois, percebeu-se que a energia do vácuo tem uma equação de estado igual a da constante cosmológica [1]. No entanto, não se pode identificar as duas; enquanto a constante cosmológica aparece na equação de Einstein da relatividade geral, a energia do vácuo sai da teoria quântica de campos. Devemos considerar uma constante cosmológica efetiva no universo, composta pela parte gravitacional e pela parte quântica [14]:

$$\Lambda_{eff} = \Lambda_{grav} + \Lambda_{QFT}.$$

Apesar de ser a solução mais simples para o problema da aceleração do universo, a constante cosmológica apresenta alguns problemas fundamentais que ainda não foram resolvidos:

- Coincidência Cósmica

  Como a constante cosmológica tem densidade constante no tempo, ela era desprezível quando o universo era pequeno. No entanto, com a expansão e a diminuição

[1] A invariância de Lorentz requer que o Tensor momento-energia do vácuo seja proporcional a $\eta_{\mu\nu}$ em sistemas localmente inerciais. Logo, em sistemas de coordenadas gerais $T_V^{\mu\nu} \propto g^{\mu\nu}$ e portanto, de acordo com (2.3.12) $p = -\rho$.

da densidade de poeira e radiação, houve um momento na evolução de universo no qual a constante cosmológica deixou de ser desprezível; esse momento é exatamente quando as estruturas começaram a se formar. Ainda que possamos ajustar o valor da constante de modo que essa condição seja satisfeita, parece haver um mecanismo físico ainda não muito bem compreendido.

- Divergência entre teoria e observação

  Como já vimos, a constante cosmológica se comporta como a energia do vácuo; pode-se portanto usar teoria quântica de campos para estimar um valor para sua densidade de energia. Antes da supersimetria, o valor esperado para essa constante era da ordem de 10^{76} GeV^4, usando um cutoff ultravioleta na escala de Planck. Mesmo escolhendo um cutoff mais baixo, da ordem da escala da QCD, encontra-se $\Lambda_{QCD} \approx 10^{-3}$ GeV^4, que ainda é muito longe do valor atualmente observado, $\rho_\Lambda \approx 10^{-47}$ GeV^4. Isso significa que a parte gravitacional da constante cosmológica tem que ser ajustada de forma a cancelar a parte quãntica e chegar no valor atualmente observado. Trata-se de um ajuste fino muito grande, e ainda que possamos simplesmente aceitar esse valor e colocá-lo "a mão", devemos procurar alternativas. Pode haver também a possibilidade da predição da teoria quântica de campos estar errada, já que o valor é obtido com a QFT em espaços planos, e não é tão claro que podemos estender a previsão para o espaço curvo da relatividade geral.

  Com a descoberta da supersimetria, esperava-se que o valor observado fosse atingido, pois férmions e bósons de mesma massa contribuem com a mesma quantidade de energia, mas com sinal trocado. No entanto, mesmo que exista, a supersimetria é quebrada em certas temperaturas; isso fará com que a energia da constante cosmológica seja da ordem da energia de quebra da supersimetria, que ainda é muito alta se comparada com o valor atualmente observado.

2.5.2 Quintessência

Os problemas relacionados à constante cosmológica levaram a crer que um campo escalar dinâmico poderia ser responsável pela aceleração. Desse modo, esperava-se contornar o problema da coincidência cósmica, pois um campo variando no tempo não precisaria de condições iniciais muito específicas. Esse campo é chamado de quintessência.

Da lagrangeana de um campo escalar ϕ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\,\phi_{,\nu}\,g^{\mu\nu} - V(\phi)\ , \tag{2.5.45}$$

e da definição do tensor momento energia

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\ , \tag{2.5.46}$$

temos que

$$T^{\phi}_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\,\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\,g_{\mu\nu} + V(\phi)g_{\mu\nu}\ . \tag{2.5.47}$$

Considerando um campo homogêneo e isotrópico, e comparando com o tensor momento-energia de um fluido perfeito (2.3.12), podemos definir uma densidade e uma pressão para esse campo escalar:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{2.5.48}$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\ . \tag{2.5.49}$$

Também poderíamos chegar a esse resultado comparando a equação de movimento do campo escalar, dada pela variação da ação em relaçao ao próprio campo

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} \equiv \int \delta d^4x\sqrt{-g}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = 0 \rightarrow \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0\ ,$$

com a equação de conservação de energia de um fluido perfeito.

Portanto, é possível definir uma equação de estado para essa campo escalar, exatamente como no caso do fluido perfeito

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}\ , \tag{2.5.50}$$

que pode violar a condição de energia forte facilmente, dependendo do potencial.

A escolha de um potencial específico é uma das dificuldades mais fortes desse modelo. Até o momento, não há argumentos físicos suficientes para que se escolha uma determinada classe de potenciais em detrimento de outras. No entanto, há um interesse maior nos potencias que dão origens à soluções atratoras, ou seja, que não dependem muito da configuração inicial do campo. É uma solução desejável, pois pelo menos aliviaria o problema da coincidência cósmica; mas, a não ser por uma razão *a posteriori*, não há porque escolher esses potenciais. Parece haver uma incompreensão dos mecanismos básicos desse campo escalar, que por sinal também nunca foi observado.

Capítulo 3

Aceleração do Universo através da Interação entre Fluidos

Vamos aqui apresentar nosso modelo para a interação entre 2 fluidos barotrópicos genéricos. Buscamos soluções analíticas para a equação de Friedmann e analisamos os modelos que obtemos. Conclusões e perspectivas para o futuro estão na seção final.

3.1 Modelo

Ao contrário do que acontece no Modelo Padrão onde a conservação de energia se aplica a cada fluido separadamente, a interação entre os fluidos faz com que haja uma transferência de energia entre eles e a conservação destas não é mais independente. Mas ainda assim, a energia total deve se conservar. Se pudermos separar o tensor momento-energia total como uma soma dos tensores momento-energia dos fluidos, ou seja, $T_T^{\mu\nu} = T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu}$, a conservação de energia fica

$$(T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \ ,$$

onde os sub-índices 1 e 2 referem-se aos fluidos que estamos tratando. A derivada covariante se comporta como a derivada comum em respeito a somas e portanto $T_1^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -T_2^{\mu\nu}{}_{;\nu}$, o que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 + 3H(1+w_1)\rho_1 &= -Q \\ \dot{\rho}_2 + 3H(1+w_2)\rho_2 &= \ \ Q \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

onde usamos a parametrização usual $p_i = w_i\rho_i$, $i = 1, 2$. Q mede a intensidade da interação. Nesse trabalho, vamos considerar que os dois fluidos obedecem a condição de energia forte, portanto $w_i > -1/3$.

Vamos assumir, sem perder generalidade, que a densidade de energia do fluido 2 pode ser escrita como

$$\rho_2 = \rho_{2_0}\frac{f}{f_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2)} \ , \tag{3.1.2}$$

com $\frac{f}{f_0}$ uma função arbitrária e ρ_{2_0} uma constante.

Portanto, substituindo (3.1.2) em (3.1.1), considerando que

$$\dot{\rho_2} = \rho_{2_0}\frac{\dot{f}}{f_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2)} - 3H\rho_{2_0}(1+w_2)\frac{f}{f_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2)} ,$$

o termo de interação é dado por

$$Q = \rho_{2_0}\frac{\dot{f}}{f_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2)} . \tag{3.1.3}$$

Particularizando agora a função $\frac{f}{f_0}$ para uma lei de potência

$$\frac{f}{f_0} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3w_f} , \tag{3.1.4}$$

com w_f uma constante, temos que a densidade de energia do fluido 2 é dada por

$$\rho_2 = \rho_{2_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2+w_f)} , \tag{3.1.5}$$

e o termo de interação fica

$$Q = -3w_f\rho_{2_0}H\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2+w_f)} . \tag{3.1.6}$$

Com isso podemos escrever a equação de conservação da energia do fluido 1:

$$\dot{\rho_1} + 3H(1+w_1)\rho_1 = 3w_f\rho_{2_0}H\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2+w_f)} , \tag{3.1.7}$$

cuja solução é

$$\rho_1 = C_1 e^{-\int 3H(1+w_1)\ dt} + e^{-\int 3H(1+w_1)\ dt}\int 3w_f\rho_{2_0}H\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2+w_f)} e^{\int 3H(1+w)\ dt}\ dt , \tag{3.1.8}$$

sendo que C_1 é uma constante. Podemos resolver facilmente as integrais

$$3(1+w_1)\int H\ dt = 3(1+w_1)\int\frac{da}{a} = \ln a^{3(1+w_1)} ,$$

e portanto, $e^{\pm\int 3(1+w_1)H\ dt} = a^{\pm 3(1+w_1)}$. A outra integral nos dá

$$e^{-\int 3H(1+w_1)dt}\int 3w_f\rho_{2_0}H\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2+w_f)} e^{\int 3H(1+w_1)\ dt}dt =$$

$$= 3w_f \rho_{2_0} a_0^{3(1+w_2+w_f)} a^{-3(1+w_1)} \int a^{3(w_1-w_2-w_f)-1} da = \frac{w_f \rho_{2_0} a_0^{3(1+w_2+w_f)}}{w_1 - w_2 - w_f} a^{-3(1+w_1)} a^{3(w_1-w_2-w_f)} \,,$$

e portanto temos finalmente a solução

$$\rho_1 = C_1 a^{-3(1+w_1)} + \frac{\rho_{2_0} w_f}{w_1 - w_2 - w_f} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2+w_f)} \quad . \tag{3.1.9}$$

Tendo agora as densidades dos dois fluidos e podemos escrever a equação de Friedmann

$$H^2 = l_{pl}^2 \left[\rho_{2_0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2+w_f)} + C_1 \; a^{-3(1+w_1)} + \frac{\rho_{2_0} w_f}{w_1 - w_2 - w_f} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2+w_f)} \right] \,, \tag{3.1.10}$$

sendo que $l_{pl}^2 \equiv \frac{8\pi G}{3}$.Fazendo as seguintes definições,

$$w_+ \equiv w_1, \quad w_- \equiv w_2 + w_f, \quad \rho_+ \equiv C_1, \quad \rho_- \equiv \frac{\rho_{2_0} a_0^{3(1+w_2+w_f)} (w_+ - w_2)}{w_+ - w_-} \,, \tag{3.1.11}$$

podemos escrever a equação de Friedmann de uma forma mais simples:

$$H^2 = l_{pl}^2 \left(\rho_+ a^{-3(1+w_+)} + \rho_- a^{-3(1+w_-)} \right) \,. \tag{3.1.12}$$

Essa equação é idêntica a uma equação de Friedmann para dois fluidos não interagentes caracterizados pelas densidades ρ_+ e ρ_- e pressões $p_+ = w_+ \rho_+$ e $p_- = w_- \rho_-$, ou seja, com as seguintes equações de conservação

$$\dot{\rho}_\pm + 3H(1 + w_\pm)\rho_\pm = 0 \,.$$

Portanto, a dinâmica agora é governada por esses dois fluidos não interagentes, substituindo os fluidos originais ρ_1 e ρ_2 que interagem segundo (3.1.6). Além disso, dependendo do valor de w_f, tanto ρ_- pode ser menor que zero como $w_- < -1/3$, ou seja, o fluido ρ_- pode ser densidade de energia negativa e/ou violar a condição de energia forte; esse fato faz com que obtenhamos modelos cosmológicos interessantes, como *bounces* ou acelerações tardias. Vale lembrar, no entanto, que apesar dos fluidos ρ_+ e ρ_- serem responsáveis pela dinâmica, eles são fluidos efetivos, e mesmo que possamos nos referir a uma evolução no tempo desses fluidos, deve-se ter em mente que na verdade são os fluidos 1 e 2 e o termo de interação Q que estão evoluindo e modificando o fator de escala.

Vale ressaltar que se $w_1 = w_2$, não há um segundo fluido efetivo ($\rho_- = 0$). Além disso, se $w_+ = w_-$ não podemos definir ρ_-; por isso não vamos considerar esse ponto no nosso espaço de parâmetros.

3.2 Soluções Analíticas

Vamos agora encontrar soluções para (3.1.12). Para isso, introduziremos uma nova coordenada (análogo a [16])

$$d\tau = \frac{dt}{a^\beta} \tag{3.2.13}$$

Com isso, reescrevemos a equação de Friedmann como (usando o fato de que $\frac{d}{dt} = \frac{1}{a^\beta}\frac{d}{d\tau}$)

$$\frac{1}{a^{2\beta}}\left(\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau}\right)^2 = l_{pl}^2(\rho_+ a^{-3(1+w_+)} + \rho_- a^{-3(1+w_-)}) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = l_{pl}^2(\rho_+ a^{-3-3w_+ +2\beta} + \rho_- a^{-3-3w_- +2\beta}) \ .$$

Escolhendo β de modo que uma potência seja o dobro da outra

$$-3 - 3w_- + 2\beta = -6 - 6w_+ + 4\beta \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}(1 - w_- + 2w_+) \ , \tag{3.2.14}$$

a solução dessa equação é [17]

$$a(\tau) = a_b\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^\alpha \ , \tag{3.2.15}$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3(w_- - w_+)} \\ a_b &= \left(\frac{|\rho_-|}{\rho_+}\right)^\alpha \\ \tau_0^2 &= \frac{4\alpha^2|\rho_-|}{l_{pl}^2\rho_+^2} \ . \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Conseguimos então generalizar a solução para o tempo conforme encontrada em [27] e a solução para um modelo com poeira e energia escura com equação de estado arbitrária em [28] para valores arbitrários de w_+ e w_-. Podemos ver por (3.2.15) que os tipos de soluções que vamos obter dependem do sinal de ρ_- e α. Faremos uma análise desses casos nas seções seguintes.

A função de Hubble é dada por

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a^{\beta+1}}\frac{da}{d\tau} \ .$$

Levando em conta que

$$\frac{da}{d\tau} = a_b\frac{2\alpha\tau}{\tau_0^2}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^{\alpha-1} \ , \tag{3.2.17}$$

e portanto
$$\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau} = \frac{2\alpha\tau}{\tau_0^2\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)} \ ,$$
temos finalmente que
$$\frac{\dot{a}}{a} \equiv H = \frac{2\alpha\tau}{\tau_0^2 a^\beta\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)}, . \tag{3.2.18}$$

Portanto há um extremo para o fator de escala em $\tau = 0$, onde ocorre uma transição de uma fase de contração para uma de expansão ou vice-versa.

A aceleração cósmica é
$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{a}\frac{d}{dt}\dot{a} = \frac{1}{a^{\beta+1}}\frac{d}{d\tau}\dot{a} \ .$$
Mas $\dot{a} = \frac{1}{a^\beta}\frac{da}{d\tau}$ e portanto
$$\frac{d}{d\tau}\dot{a} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{a^\beta}\frac{da}{d\tau}\right) = \frac{1}{a^\beta}\frac{d^2a}{d\tau^2} - \frac{\beta}{a^{\beta+1}}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 \ .$$
Usando (3.2.17) podemos calcular as derivadas:
$$\frac{d^2a}{d\tau^2} = \frac{2a_b\alpha}{\tau_0^2}\left[\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^{\alpha-1} + \frac{2(\alpha-1)\tau^2}{\tau_0^2}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^{\alpha-2}\right] \ , \tag{3.2.19}$$
$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = 4a_b^2\alpha^2\frac{\tau^2}{\tau_0^4}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^{2\alpha-2} \ . \tag{3.2.20}$$
Usando isso ficamos com
$$\frac{d}{d\tau}\dot{a} = \frac{2a_b\alpha}{\tau_0^2 a^\beta}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^{\alpha-2}\left[\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-} + 2\alpha\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 2\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 2\alpha\beta\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right] \ .$$
Os termos em $\frac{\tau^2}{\tau_0^2}$ nos dão
$$2\alpha - 1 - 2\alpha\beta = -\alpha(1+3w_+) \ ,$$
e temos finalmente
$$\frac{d}{d\tau}\dot{a} = -\frac{2a_b\alpha}{\tau_0^2 a^\beta}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^{\alpha-2}\left[\alpha(1+3w_+)\frac{\tau^2}{\tau_0^2} + \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right] \ .$$
Usando esse resultado a aceleração cósmica é dada por:
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2\alpha}{\tau_0^2 a^{2\beta}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^2}\left[(1+3w_+)\alpha\frac{\tau^2}{\tau_0^2} + \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right] \ . \tag{3.2.21}$$

Para que haja a transição de uma fase desacelerada para uma acelerada (ou vice-versa), $\frac{\ddot{a}}{a} = 0$. Só a parte entre colchetes pode zerar, logo essa transição ocorrerá quando

$$\tau^2 = -\frac{|\rho_-|}{\rho_-}\frac{\tau_0^2}{\alpha(1+3w_+)} \ . \tag{3.2.22}$$

Olhando para o termo de interação (3.1.6) , é esperado que seu módulo $|Q|$ diminua à medida que o universo se expanda [1] e o tempo de Hubble ($\frac{1}{H}$) aumente, pois as partículas dos fluidos vão se diluindo com a expansão e a interação vai ficando mais fraca. Esse é o caso se $w_2 + w_f = w_- > -1$. Caso contrário, $|Q|$ aumenta com a expansão do universo. Mas isso pode ser explicado pelo aumento das densidades ρ_1 e ρ_2 com a expansão se $w_- < -1$. Para analisar esses casos com mais detalhe vamos utilizar a derivada de Q no tempo cósmico, dada por:

$$-\frac{\dot{Q}}{3w_f\rho_{2_0}a_0^{3(1+w_-)}} = \dot{H}a^{-3(1+w_-)} - 3(1+w_-)H^2a^{-3(1+w_-)} \ .$$

Lembrando que

$$\dot{H} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \ ,$$

reescrevemos a equação acima como

$$-\frac{\dot{Q}}{3w_f\rho_{2_0}a_0^{3(1+w_-)}} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 - 3(1+w_-)H^2\right)a^{-3(1+w_-)} \ . \tag{3.2.23}$$

Podemos usar (3.2.18) e (3.2.21) e temos que

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = -\frac{2\alpha}{\tau_0^2a^{2\beta}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^2}\left[(1+3w_+)\alpha\frac{\tau^2}{\tau_0^2} + \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right] - \frac{4\alpha^2\tau^2}{\tau_0^4a^{2\beta}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^2} =$$

$$= \frac{-2\alpha}{\tau_0^2a^{2\beta}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^2}\left[3\alpha(1+w_+)\frac{\tau^2}{\tau_0^2} + \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right] \ ,$$

e portanto

$$\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 - 3(1+w_-)H^2 = \frac{-2\alpha}{\tau_0^2a^{2\beta}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^2}\left[3\alpha(1+w_+)\frac{\tau^2}{\tau_0^2} + \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right] - 3(1+w_-)\frac{4\alpha^2\tau^2}{\tau_0^4a^{2\beta}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - \frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^2} =$$

[1] O sinal de Q apenas nos informa qual fluido está cedendo energia; a magnitude da interação é dada pelo módulo.

$$\frac{-2\alpha}{\tau_0^2 a^{2\beta}\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2}-\frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^2}\left[3\alpha(3+w_+ +2w_-)\frac{\tau^2}{\tau_0^2}+\frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right] .$$

Levando em conta que

$$3(1+w_-)+2\beta = 6(1+w_+) \qquad \text{e que} \qquad 6\alpha(1+w_+)+2 = 2(1+w_-)/(w_- - w_+) ,$$

temos então a derivada de Q no tempo cósmico

$$-\frac{a_b^{6(1+w_+)}}{3w_f\rho_{2_0}a_0^{3(1+w_-)}}\dot{Q} = -\frac{2\alpha}{\tau_0^2\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2}-\frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right)^{2(1+w_-)/(w_- - w_+)}}\left[3\alpha(3+2w_- +w_+)\frac{\tau^2}{\tau_0^2}+\frac{|\rho_-|}{\rho_-}\right] . \tag{3.2.24}$$

A princípio não conhecemos o sinal do lado esquerdo dessa equação, pois w_f é um parâmetro livre. Ainda assim, podemos saber quando $|Q|$ aumenta ou diminui analisando essa equação junto com (3.1.6) para Q positivo ou negativo.

$\mathbf{Q > 0}$

Nesse caso, para que seu módulo aumente, a derivada tem que ser positiva. Olhando para (3.1.6), Q só é positivo se $w_f < 0$; com isso, o lado esquerdo de (3.2.24) é positivo. Portanto, para que a derivada seja positiva o lado direito tem que ser **positivo**.

$\mathbf{Q < 0}$

Nesse caso ocorre o contrário: para que seu módulo cresça, a derivada tem que ser negativa. Olhando novamente para (3.1.6), $Q > 0$ implica em $w_f > 0$ e o lado esquerdo de (3.2.24) é negativo. Logo, para que a derivada do termo de interação seja negativa, o lado direito da equação tem que ser **positivo**

Logo, não importa o sinal de w_f, para que $|Q|$ aumente o lado direito de (3.2.24) tem que ser positivo.

Segue agora uma análise mais detalhada dos casos possíveis em termos do sinal de ρ_- e α. Devemos lembrar que como foi suposto que os 2 fluidos originais obedeciam à condição de energia forte, $w_+ = w_1 > -1/3$.

3.2.1 $\rho_- < 0$

Nesse caso a solução é

$$a(\tau) = a_b\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2}+1\right)^\alpha , \tag{3.2.25}$$

o que implica em $-\infty < \tau < \infty$. Portanto, de acordo com (3.2.18) o fator de escala terá um extremo. Achar uma solução exata no tempo cósmico é extremamente trabalhoso, mas podemos analisar o comportamento assintótico do fator de escala em τ. Nesse caso, esse comportamento ocorre quando $\tau \to \pm\infty$, onde $a(\tau) \propto \tau^{2\alpha}$. Usando (3.2.13) podemos reverter a soluçao para o tempo cósmico:

$$dt = \tau^{2\alpha\beta} d\tau \Rightarrow t \propto |\tau|^{2\alpha\beta+1} \Rightarrow t \propto |\tau|^{3\alpha(1+w_+)} \ . \tag{3.2.26}$$

Usando agora que $a(\tau) \propto \tau^{2\alpha}$, temos finalmente o fator de escala em função do tempo cósmico

$$a(t) \propto |t|^{2/[3(1+w_+)]} \ , \tag{3.2.27}$$

o que significa que o fluido com energia positiva dominará o universo quando $\tau \to \pm\infty$. Vamos agora analisar os diferentes casos dependendo do sinal de α.

- $\alpha > 0$

  Nesse caso, novamente de acordo com (3.2.18), o extremo é um mínimo e o fator de escala cresce quando $|\tau|$ também aumenta. Portanto, quando $\tau \to \pm\infty$, $a(\tau) \to \infty$ e quando $\tau \to 0$, $a(\tau) \to a_b$; teremos então um universo eterno com *bounce*, ou seja, um universo que se contrai até um tamanho mínimo para depois entrar em uma fase de expansão. O fluido com energia positiva domina quando o universo é grande e o outro fluido só é importante perto do bounce. Não há singularidades, pois $3\alpha(1 + w_+) > 0$, o que implica que quando $|\tau| \to \infty$, $|t| \to \infty$ também; portanto, o fator de escala só tende a infinito num tempo infinitamente para o futuro ou para o passado. Teremos transições de uma fase desacelerada para uma acelerada (e vice-versa), já que $\alpha(1 + 3w_+) > 0$ e (3.2.22) tem raízes reais.

  Para que a magnitude da interação aumente, já que $\alpha > 0$, o termo entre colchetes em (3.2.24) tem que ser negativo

  $$3\alpha(3 + 2w_- + w_+)\frac{\tau^2}{\tau_0^2} < 1 \ ,$$

  e portanto a magnitude da interação aumenta em

  $$0 < \frac{\tau^2}{\tau_0^2} < \frac{1}{3\alpha(3 + 2w_- + w_+)} \approx 1 \ . \tag{3.2.28}$$

  Isso porque esse é o período perto do bounce[2], quando o fator de escala cresce lentamente e o tempo de Hubble cai muito rápido, compensando a expansão.

- $\alpha < 0$

  Nesse caso, a equação (3.2.18) nos mostra que o extremo é um máximo. Como $\alpha < 0$, o fator de escala tende a zero quando $\tau \to \pm\infty$ e quando $\tau \to 0$, $a(\tau) \to a_b$. Além

[2]Pode-se argumentar que, se $\alpha << 1$, $[3\alpha(3 + 2w_- + w_+)]^{-1}$ seria muito grande. Mas nesse caso, o bounce também duraria muito em τ como pode ser visto por (3.2.25).

disso, como estamos assumindo que $w_+ > -1/3$, $3\alpha(1+w_+) < 0$ e $\tau \to \pm\infty$ implica em t finito nesse caso; portanto o fator de escala tende a zero num tempo finito para o passado e para o futuro, indicando que teremos singularidades. Logo temos um *Big Bang Big-Crunch*, onde o universo parte de uma singularidade inicial, se expande até um tamanho máximo e contrai até uma singularidade final. O fluido com energia positiva agora domina quando o universo é pequeno, enquanto o fluido com energia negativa domina perto do máximo do fator de escala. Nesse caso não teremos transições de fase acelerada para desacelerada (ou vice-versa) pois $\alpha(1+3w_+) < 0$ e (3.2.22) não tem raízes reais.

Para que $|Q|$ aumente, é necessário que o termo entre conchetes de (3.2.24) seja positivo, já que $\alpha < 0$:

$$3\alpha(3+2w_- + w_+)\frac{\tau^2}{\tau_0^2} > 1 \ .$$

Mas isso so é possível se $(3+2w_- + w_+) < 0$, ou $w_- < -(3+w_+)/2 < -4/3$. Dada essa condição, a magnitude da interação aumenta no mesmo período do item anterior. Isso pode ser explicado pelo lento aumento no fator de escala nesse período e um aumento nas densidades ρ_1 e ρ_2, pois $w_- < -1$.

3.2.2 $\rho_- > 0$

A solução para o fator de escala nesse caso é

$$a(\tau) = a_b\left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1\right)^{\alpha} \ . \tag{3.2.29}$$

Como a não pode assumir valores negativos, $-\infty < \tau < -\tau_0$ ou $\tau_0 < \tau < \infty$. Logo não há extremos no fator de escala (ver (3.2.18)) e os modelos obtidos estarão sempre em expansão ou sempre em contração. Como as observações indicam que atualmente estamos vivendo numa fase de expansão acelerada, vamos nos concentrar nos modelos sempre em expansão. Novamente analisando o comportamento assintótico, ele ocorre em $\tau \to \pm\tau_0$, além do caso já analisado anteriormente $\tau \to \pm\infty$. Quando $\tau \to \pm\tau_0$, podemos dizer que $\tau = \tau_0 + \epsilon$ ou $\tau = -\tau_0 - \epsilon$ dependendo do domínio de τ que escolhermos, sendo ϵ um número positivo muito pequeno. A solução depende de τ^2, portanto não fará diferença; para acomodar as duas, usaremos o módulo de ϵ. Podemos então novamente reverter a solução para o tempo cósmico

$$\begin{gathered}\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 = \frac{2|\epsilon|}{\tau_0} \Rightarrow a(\tau) \propto |\epsilon|^{\alpha} \\ dt = a^{\beta} d\tau \Rightarrow t \propto |\epsilon|^{\alpha\beta+1} = |\tau \pm \tau_0|^{\alpha\beta+1} \Rightarrow \\ t \propto |\tau \pm \tau_0|^{3\alpha(1+w_-)/2}, \ a(t) \propto |t|^{2/[3(1+w_-)]} \ ,\end{gathered} \tag{3.2.30}$$

onde desprezamos a parte quadrática em ϵ. Portanto em $\tau \to \pm\tau_0$ o fluido com w_- domina.

Para que haja transição de fase desacelerada para acelerada (ou vice-versa), além de $\alpha(1+3w_+) < 0$, $|\tau| > |\tau_0|$. Isso implica que $|\alpha(1+3w_+)| < 1$ (ver (3.2.22)).

- $\alpha > 0$

  Nesse caso, ambos os fluidos satisfazem à condição de energia forte e têm energia positiva. Sendo $\alpha > 0$, o fator de escala tende a infinito quando $|\tau| \to \pm\infty$ e tende a zero quando $\tau \to \pm\tau_0$. Portanto podemos desprezar o caso em que$-\infty < \tau < -\tau_0$ pois esse é o modelo em contração. Além disso, quando $\tau \to \tau_0$, t tende a um valor finito; logo o fator de escala tende a zero num tempo finito e o universo tem uma singularidade no seu início. Seria uma expansão desacelerada a partir de uma sigularidade inicial governada por 2 fluidos ordinários. Não há transição de fase desacelerada para acelerada (ou vice-versa), pois $\alpha > 0$ implica que $w_+ < -1/3$, o que contraria a suposição original de que $w_1 = w_+ > -1/3$.

  Com relação ao termo de interação, seu módulo so irá aumentar se

  $$3\alpha(3+2w_- + w_+)\frac{\tau^2}{\tau_0^2} < -1 \ ,$$

  mas isso só é possível se $(3+2w_- + w_+) < 0$ ou $w_- < -4/3$; como $w_- > w_+$, $|Q|$ sempre decresce com a expansão.

- $\alpha < 0$

  Nesse caso $a \to \infty$ quando $\tau \to \pm\tau_0$, então o modelo onde $\tau_0 < \tau < \infty$ estará em contração e será desprezado. O fluido com w_+ domina quando o universo é pequeno, necessariamente partindo de uma singularidade, pois segundo (3.2.26), se $\alpha < 0$, t tende a um valor finito quando $\tau \to \pm\infty$. Transições de uma fase desacelerada para acelerada acontecem se $w_- < -1/3$ e $w_+ > -1/3$. Além disso, caso $w_- < 1$ podemos ver por (3.2.30) que quando $\tau \to -\tau_0$, t tende a um valor finito mas o fator de escala tende a infinito; teríamos um *Big Rip* sem a necessidade de recorrermos a fluidos fantasmas.

  Para que a interação fique mais forte com a expansão,

  $$3\alpha(3+2w_- + w_+)\frac{\tau^2}{\tau_0^2} > -1 \ ,$$

  e portanto se $w_- < -(3+w_+)/2$, temos o caso bizarro onde $|Q|$ sempre aumenta com a expansão, mesmo perto da singularidade inicial quando o fluido com w_+ domina o universo. Isso pode ser explicado pelo aumento de ρ_2 ser tão intenso que compensa a expansão e a diminuição de H.

Como $\frac{\tau^2}{\tau_0^2} > 1$, temos uma condição extra:

$$3\alpha(3 + 2w_- + w_+) < -1 \Longrightarrow w_- < -1 \ ,$$

e portanto se $-(3 + w_+)/2 < w_- < -1$, $|Q|$ aumenta quando

$$1 < \frac{\tau^2}{\tau_0^2} < -\frac{1}{3\alpha(3 + 2w_- + w_+)} \ , \tag{3.2.31}$$

quando é esperado que as densidades dos dois fluidos aumentem (ver (3.1.9) e (3.1.5)), aumentando também a intensidade da interação. Essa fase de aumento de $|Q|$ pode ocorrer depois da época em que as densidades dos dois fluidos são iguais, o que acontece quando $\tau^2 = 2\tau_0^2$.

Se $w_- > -1$, $|Q|$ sempre decresce com a expansão.

3.3 Casos Especiais

Caso a condição de que $w_+ > -1/3$ não seja satisfeita, obtem-se vários outros casos: modelos com *pre-Big Bang*, onde o universo não sai de uma singularidade inicial, mas só chega a um tamanho nulo se voltarmos infinitamente atrás no tempo ou modelos inflacionários com singularidade, se $\rho_- > 0$. Quando $\rho_- < 0$ obtemos modelos com bounce entre Big Rips e modelos que se expandem de um pre-Big Bang até um tamanho máximo e depois voltam a se contrair, com transições de fase acelerada para desacelerada e vice-versa perto do máximo, chegando a um tamanho nulo num tempo infinito (pre-big bang reverso).

Os casos mais interessantes são aqueles que não tem singularidade e os com uma expansão acelerada tardia. Entre os modelos do primeiro caso estão aqueles com bounce, quando $\rho_- < 0$ e $\alpha > 0$, que são modelos não singulares que passam por uma fase de expansão governada por um fluido obedecendo à condição de energia forte quando o universo é grande. O modelo estudado em [16] pode ser obtido com $w_1 = 1/3$, $w_2 = 0$ e $w_f = 1$, resultando em $Q \propto -3Ha^{-6}$, que é desprezível quando o universo é grande. Essa interação poderia ocorrer quando os bárions são relativísticos mas a matéria escura não. Isso também poderia ocorrer quando os dois são relativísticos mas não exatamente com a mesma equação de estado, i.e., $w_1 = 1/3$ e $w_2 = 1/3 + \epsilon$ com $\epsilon << 1$. Nesse caso, $w_f \approx 2/3$ e $Q \propto -2Ha^{-6}$.

Entre aqueles com expansão acelerada tardia, obtemos um modelos com transição de fase desacelerada para acelerada quando $\rho_- > 0$, $\alpha < 0$ e $w_- < -1/3$. Podemos portanto tentar obter o modelo ΛCDM a partir de uma interação. Esse modelo seria caracterizado por $w_+ \approx 0$ e $w_- \approx -1$. Isso implica em $w_1 \approx 0$ e $w_2 + w_f \approx -1$. Além disso, $\rho_- > 0$. Uma possibilidade de se obter isso seria considerar $w_1 << 1$ e $w_2 << 1$, mas de tal modo que $w_1 > w_2$. Com isso, $w_f = -1$ e o termo de interação seria $Q \propto 3H$, que decresce lentamente com a expansão do universo e que só depende do parâmetro de Hubble. Além disso, a densidade da constante cosmológica é

$$\Lambda \propto \rho_- \propto (w_1 - w_2) <<< 1 \ ,$$

o que seria um caminho para uma possível explicação para a densidade da constante cosmológica observada ser tão pequena.

Capítulo 4

Aceleração Transiente do Universo

Algumas observações indicam que a aceleração atualmente observada já teve um pico e está perdendo força [20]. Isso pode indicar que esse fenômeno é transiente. Escolhendo uma forma específica de interação, conseguimos reproduzir esse comportamento.

4.1 Modelo

Usamos o mesmo modelo usado no capítulo anterior, sendo que agora particularizamos um dos fluidos como matéria escura, deixando o outro ainda arbitrário com uma equação de estado $p_x = w\rho_x$ e consideramos ainda que os bárions se conservam independentemente. A equação de conservação portanto é

$$\dot{\rho_x} + 3H(1+w)\rho_x = -Q$$

$$\dot{\rho_m} + 3H\rho_m = Q \qquad (4.1.1)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \qquad (4.1.2)$$

A densidade de energia da matéria escura pode, sem perda de generalidade, ser escrita como

$$\rho_m = \tilde{\rho}_{m_0}\frac{f}{f_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \qquad (4.1.3)$$

Podemos escrever f como função do fator de escala:

$$\frac{f}{f_0} = 1 + g(a) \qquad (4.1.4)$$

portanto

$$Q = \tilde{\rho}_{m_0}\frac{dh}{da}\dot{a}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \qquad (4.1.5)$$

Com a equação para ρ_m, podemos ver que

$$\rho_m = \tilde{\rho}_{m_0}(1+g)\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \qquad (4.1.6)$$

Chamando o valor de ρ_m em $a = a_0$ de ρ_{m_0}, ele é dado por

$$\rho_{m_0} = \tilde{\rho}_{m_0}(1 + g_0) \tag{4.1.7}$$

sendo que $g_0 = g(a_0)$. Portanto, se $g = 0$ o valor da densidade da matéria hoje é $\tilde{\rho}_{m_0}$, logo a interação renormaliza o valor da densidade. Além disso, podemos considerar $\tilde{\rho}_{m_0}$ como o valor da densidade em $a = a_0$ sem interação, enquanto ρ_{m_0} é o valor da densidade em $a = a_0$ na presença da interação.

Com as equações 4.1.1, 4.1.3 e 4.1.4 podemos resolver a equação de conservação para o outro fluido; sua densidade de energia é dada por (ver 3.2.25)

$$\rho_x = C\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} - \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} \int_{t_0}^{t} dt \left[\tilde{\rho}_{m_0}\frac{dg}{da}\dot{a}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3\right]\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3(1+w)} \tag{4.1.8}$$

Podemos calcular a integral

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} \int_{t_0}^{t} dt \left[\tilde{\rho}_{m_0}\frac{dg}{da}\dot{a}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3\right]\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3(1+w)} = -\tilde{\rho}_{m_0}a_0^3 a^{-3(1+w)}\int_{t_0}^{t} dt\ \frac{dg}{da}\dot{a}a^{3w} =$$

$$= -\tilde{\rho}_{m_0}a_0^3 a^{-3(1+w)}\int_{a_0}^{a} da\ \frac{dg}{da}a^{3w}$$

Podemos ver que, em $a = a_0$ a integral se anula, e portanto o valor de ρ_x em a_0 é C. Logo, podemos escrever

$$\rho_x = \rho_{x_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} - \tilde{\rho}_{m_0}a_0^3 a^{-3(1+w)}\int_{a_0}^{a} da\frac{dg}{da}a^{3w} \tag{4.1.9}$$

Resolvendo a integral por partes

$$\int_{a_0}^{a} da\frac{dg}{da}a^{3w} = a^{3w}g(a)\big|_{a_0}^{a} - 3w\int_{a_0}^{a} da\ g(a)a^{3w-1} = g(a)a^{3w} - g_0 a_0^{3w} - 3w\int_{a_0}^{a} da\ g(a)a^{3w-1}$$

Finalmente, a densidade de energia desse fluido é dada por:

$$\rho_x = (\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0}g_0)\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} - \tilde{\rho}_{m_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 g(a) + 3w\tilde{\rho}_{m_0}a_0^3 a^{-3(1+w)}\int_{a_0}^{a} da\ g(a)a^{3w-1} \tag{4.1.10}$$

A equação para a aceleração do universo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}[\rho_m + (1+3w))\rho_x]$$

fica então

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}\Bigg\{\tilde{\rho}_{m_0}(1+g(a))\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + (1+3w)\Bigg[(\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0}g_0)\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} \\ -\tilde{\rho}_{m_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 g + 3w\tilde{\rho}_{m_0}a_0^3 a^{-3(1+w)}\int_{a_0}^{a} da\ g(a)a^{3w-1}\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\Bigg\{\tilde{\rho}_{m_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{b_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + (1+3w)\left[(\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0}g_0)\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}\right] \\ +3w\tilde{\rho}_{m_0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3\left[(1+3w)a^{-3w}\int_{a_0}^{a} da\; g(a)a^{3w-1} - g(a)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Pode-se ver pela equação acima que o termo extra na aceleração cósmica, devido à interação, pode induzir transições de fase desaceleradas para aceleradas e vice-versa, mesmo que a *SEC* seja obedecida ($w > -1/3$). A aceleração hoje é dada por

$$\left.\frac{\ddot{a}}{a}\right|_0 = -\frac{4\pi G}{3}[\tilde{\rho}_{m_0} + \rho_{b_0} + (1+3w)(\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0}g_0) - 3w\tilde{\rho}_{m_0}g_0] \tag{4.1.13}$$

e com isso temos o parâmetro de desaceleração hoje

$$\begin{aligned}\left.\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right|_0 &= -\frac{8\pi G}{3H_0^2}\frac{1}{2}\{\tilde{\rho}_{m_0} + \rho_{b_0} + (1+3w)(\rho_{x_0} + \tilde{\rho}_{m_0}g_0) - 3w\tilde{\rho}_{m_0}g_0\} \longrightarrow \\ \left.\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right|_0 &= -\frac{1}{2}\{\tilde{\Omega}_{m_0}(1+g_0) + \Omega_{b_0} + (1+3w)\Omega_{x_0}\} = -\frac{1}{2}[\Omega_{m_0} + (1+3w)\Omega_{x_0}]\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

onde usamos que $\Omega_{m_0} = \tilde{\Omega}_{m_0}(1+g_0)$. Num universo espacialmente plano onde $\Omega_{m_0}+\Omega_{x_0}+\Omega_{b_0} = 1$, temos que

$$\left.\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right|_0 = -\frac{1}{2}(1 + 3w\Omega_{x_0}) \tag{4.1.15}$$

Podemos ver por essa equação que a interação não tem influência direta sobre o parâmetro de desaceleração, como era esperado; além disso, é preciso que w seja negativo para que possamos ter um universo acelerado hoje, excluindo uma possível interação entre matéria e radiação.

Vamos agora especificar o termo de interação $g(a)$ para que tenhamos fases de aceleração transientes.

4.2 Especificando a Interação

Como não se tem conhecimento o bastante sobre a energia escura, não há justificativa até o momento para escolhermos um determinado tipo de interação. Portanto, vamos construir um *Toy Model* com um determinado tipo de interação que seja simples matematicamente (ou seja, que nos permita resolver as equações analiticamente) e que possa modelar um universo que tenha uma fase acelerada transiente. Vamos aqui analisar doois tipos de interação, uma exponencial e a outra gaussiana.
A partir de agora vamos usar $a_0 = 1$.

4.2.1 Interação Exponencial

Vamos escolher uma função $g(a)$

$$g(a) = c_1 a^n \exp(-a/\sigma) \tag{4.2.16}$$

sendo que n é um número inteiro e σ é um real positivo. A densidade de energia do fluido x é dada por

$$\rho_x = \rho_{x_0} a^{-3(1+w)} + c_1\tilde{\rho}_{m0}\exp(-1/\sigma)a^{-3(1+w)} - c_1\tilde{\rho}_{m0}a^{n-3}\exp(-a/\sigma)+$$

$$3wc_1\tilde{\rho}_{m0}a^{-3(1+w)}\int_{a_0}^{a} da\ a^{n+3w-1}\exp(-a/\sigma)$$

Considerando que $n+3w-1$ um número inteiro, podemos resolver a integral por partes, o que nos dá

$$\rho_x = \rho_{x_0}a^{-3(1+w)} + K_1\exp(-1/\sigma)a^{-3(1+w)} + 3wK_1\exp(-1/\sigma)\sum_{i=0}^{n+3w-1}\left[\frac{(n+3w-1)!}{i!}\sigma^{n+3w-i}\right]a^{-3(1+w)}$$

$$-K_1 a^{n-3}\exp(-a/\sigma) - 3wK_1 a^{-3(1+w)}\exp(-a/\sigma)\sum_{i=0}^{n+3w-1}\left[\frac{(n+3w-1)!}{i!}\sigma^{n+3w-i}a^i\right]$$

onde $K_1 \equiv c_1\tilde{\rho}_{m0}$. Vamos agrupar os termos constantes e reescrever essa equação de uma maneira mais simples:

$$\rho_x = \rho_{x_0}^{eff}a^{-3(1+w)} - K_1 a^{n-3}\exp(-a/\sigma) - 3wK_1 a^{-3(1+w)}\exp(-a/\sigma)\sum_{i=0}^{n+3w-1}\left[\frac{(n+3w-1)!}{i!}\sigma^{n+3w-i}a^i\right] \tag{4.2.17}$$

sendo que

$$\rho_{x_0}^{eff} = \rho_{x_0} + K_1\exp(-1/\sigma) + 3wK_1\exp(-1/\sigma)\sum_{i=0}^{n+3w-1}\left[\frac{(n+3w-1)!}{i!}\sigma^{n+3w-i}\right] \tag{4.2.18}$$

A aceleração cósmica fica então

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left\{(1+3w)\left[\rho_{x_0} + K_1\exp(-1/\sigma) + 3wK_1\exp(-1/\sigma)\sum_{i=0}^{n+3w-1}\left(\frac{(n+3w-i)!}{i!}\right)\sigma^{n+3w-i}\right]a^{-3(1+w)}\right.$$

$$\left.+\tilde{\rho}_{m0}a^{-3} + \rho_{b_0}a^{-3} + 3wK_1\left[-(1+3w)\exp(-a/\sigma)\sum_{i=0}^{n+3w-1}\left(\frac{(n+3w-i)!}{i!}\right)\sigma^{n+3w-i}a^{i-3(1+w)} - a^{n-3}\exp(-a/\sigma)\right]\right.$$

onde podemos usar a definição de $\rho_{x_0}^{eff}$ para obtermos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left[\tilde{\rho}_{m0}a^{-3} + \rho_{b_0}a^{-3} + (1+3w)\rho_{x_o}^{eff}a^{-3(1+w)}\right]$$
$$+4\pi GwK_1\exp\left(-a/\sigma\right)\left[(1+3w)\sum_{i=0}^{n+3w-1}\frac{(n+3w-1)!}{i!}\sigma^{n+3w-i}a^{i-3(1+w)} + a^{n-3}\right] \quad (4.2.19)$$

Vamos escolher aqui $n = 5$ e uma equação de estado de vácuo, $w = -1$. A densidade de energia do fluido x é

$$\rho_x = \rho_{x_0}^{eff} + 3K_1\exp(-a/\sigma)\left(\sigma^2 + \sigma a - \frac{1}{3}a^2\right) \quad (4.2.20)$$

com

$$\rho_{x_0}^{eff} = \rho_{x_0} + K_1\exp(-1/\sigma) - 3K_1\exp\left(-1/\sigma\right)(\sigma^2+\sigma) = \rho_{x_0} - 3K_1\exp(-1/\sigma)\left[\sigma^2 + \sigma - \frac{1}{3}\right]$$

que coincide com a densidade de energia do vácuo se não houver interação ($K_1 = 0$).
A aceleração cósmica é dada por (usando o fato de que $\tilde{\rho}_{m_0} = \rho_{m_0} - K_1\exp(-1/\sigma)$)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left\{[\rho_{m_0} - K_1\exp(-1/\sigma)]a^{-3} + \rho_{b_0}a^{-3} - 2\rho_{x_0}^{eff} + 3K_1\exp(-a/\sigma)[a^2 - 2\sigma^2 - 2\sigma a]\right\} \quad (4.2.21)$$

4.2.2 Interação Gaussiana

Agora vamos considerar uma função $g(a)$ da forma

$$g(a) = c_2a^n\exp(-a^2/\sigma^2) \quad (4.2.22)$$

Então a densidade do fluido x é

$$\rho_x = (\rho_{x_0}+K_2\exp(-1/\sigma^2))a^{-3(1+w)} - K_2a^{n-3}\exp(-a^2/\sigma^2) + 3wK_2a^{-3(1+w)}\int_{a_0}^{a}da\; a^{n+3w-1}\exp(-a^2/\sigma^2)$$

sendo $K_2 = c_2\tilde{\rho}_{m_0}$. Considerando novamente $n = 5$ e $w = -1$ a integral fica

$$\int_{a_0}^{a}da\; a\exp(-a^2/\sigma^2) = -\frac{1}{2}\sigma^2[\exp(-a^2/\sigma^2) - \exp(-1/\sigma^2)]$$

e temos, portanto

$$\rho_x = \rho_{x_0} + K_2\exp(-1/\sigma^2) - K_2a^2\exp(-a^2/\sigma^2) + \frac{3}{2}K_2\sigma^2\exp(-a^2/\sigma^2) - \frac{3}{2}K_2\sigma^2\exp(-1/\sigma^2)$$

Agrupando novamente os termos constantes, essa equação é escrita como

$$\rho_x = \rho_{x_0}^{eff} - K_2\exp\left(-a^2/\sigma^2\right)\left(a^2 - \frac{3}{2}\sigma^2\right) \quad (4.2.23)$$

sendo que

$$\begin{aligned}
\rho_{x_0}^{eff} &= \rho_{x_0} + K_2 \exp(-1/\sigma^2) - \frac{3}{2} K_2 \sigma^2 \exp(-1/\sigma^2) \\
&= \rho_{x_0} - \frac{3}{2} K_2 \exp\left(-1/\sigma^2\right) \left[\sigma^2 - \frac{2}{3}\right] \qquad (4.2.24)
\end{aligned}$$

que novamente coincide com a densidade de enrgia do vácuo se não houver interação.
Já a aceleração cósmica é

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} \left\{ \tilde{\rho}_{m_0} a^{-3} + \rho_{b_0} a^{-3} - 2[\rho_{x_0} + K_2 \exp(-1/\sigma^2)] \right. \\
&- \left. 3K_2 a^{-3} \left[-2a^3\sigma^2 \left(-\frac{1}{2}\exp(-a^2/\sigma^2) + \frac{1}{2}\exp(-1/\sigma^2) \right) - a^5 \exp(-a^2/\sigma^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

que, utilizando a definição de $\rho_{x_0}^{eff}$ e que nesse caso $\tilde{\rho}_{m_0} = \rho_{m_0} - K_2 \exp(-1/\sigma^2)$, pode ser escrita da forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \{ [\rho_{m_0} - K_2 \exp(-1/\sigma^2)] a^{-3} + \rho_{b_0} a^{-3} - 2\rho_{x_0}^{eff} + 3K_2 \exp\left(-a^2/\sigma^2\right)(a^2 - \sigma^2) \} \quad (4.2.25)$$

Temos agora que estabelecer limites para que nosso modelo seja válido, ou seja, para que o universo seja desacelerado no passado, acelerado hoje e novamente desacelerado no futuro. Já podemos ver que, para $a >> 1$, o termo dominante será dado pela constante cosmológica efetiva $\rho_{x_0}^{eff}$; portanto, se esse termo for positivo, o universo se expandirá aceleradamente para sempre, como acontece no modelo ΛCDM. Uma maneira de contornar esse problema é impor $\rho_{x_0}^{eff} = 0$, ou seja, uma parte da interação cancela a constante cosmológica "pura"(ρ_{x_0}). Nesse caso, a aceleração do universo será causada unicamente pela interação.

4.3 Limites dos Parâmetros

Nessa seção vamos tentar estabelecer limites dos nosso parâmetros livres de modo a obter um modelo cosmológico viável. Em ambos os casos vamos considerar que a constante cosmológica total é nula ($\rho_{x_0}^{eff} = 0$).

4.3.1 Interação Exponencial

Vamos reescrever (4.2.21) em função dos parâmetros de densidade:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} H_0^2 \left\{ \left[\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} - \bar{K}_1 \exp(-1/\sigma) \right] a^{-3} + 3\bar{K}_1 \exp(-a/\sigma)[a^2 - 2\sigma^2 - 2\sigma a] \right\} \quad (4.3.26)$$

sendo que $\bar{K}_1 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} K_1$.

Para valores pequenos do fator de escala, i.e. no passado, os termos em a^{-3} dominam, e para que possamos ter uma expansão desacelerada

$$\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} > \bar{K}_1 \exp(-1/\sigma) \qquad (4.3.27)$$

Como $\rho_{x_0}^{eff} = 0$, temos que

$$\Omega_{x_0} = 3\bar{K}_1 \exp(-1/\sigma)\left[\sigma^2 + \sigma - \frac{1}{3}\right] \tag{4.3.28}$$

e levando em conta um universo plano, $\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} = 1 - \Omega_{x_0}$, podemos reescrever (4.3.26) como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2\left\{a^{-3} - 3\bar{K}_1\exp(-1/\sigma)[\sigma^2+\sigma]a^{-3} + 3\bar{K}_1\exp(-a/\sigma)[a^2 - 2\sigma^2 - 2\sigma a]\right\} \tag{4.3.29}$$

A condição para que o universo expanda desaceleradamente em $a << 1$ é

$$\bar{K}_1\exp(-1/\sigma)[\sigma^2+\sigma] < \frac{1}{3} \tag{4.3.30}$$

que é a mesma condição (4.3.27), substituindo $\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0}$ por $1 - \Omega_{x_0}$.

A condição para que atualmente ($a = 1$) o universo esteja acelerado é

$$\left.\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right|_0 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \bar{K}_1\exp(-1/\sigma)\left(\sigma^2+\sigma-\frac{1}{3}\right) > \frac{1}{9} \tag{4.3.31}$$

que é consistente com (4.1.15) se combinada com (4.3.28).

Temos portanto duas condições a serem satisfeitas simultaneamente, (4.3.30) e (4.3.31) o que nos dá um intervalo de valores possíveis para a intensidade da interação

$$\frac{e^{1/\sigma}}{9(\sigma^2+\sigma-1/3)} < \bar{K}_1 < \frac{e^{1/\sigma}}{3(\sigma^2+\sigma)} \tag{4.3.32}$$

4.3.2 Interação Gaussiana

Vamos novamente reescrever (4.2.25) em função dos parâmetros de densidade

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2\left\{\left[\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} - \bar{K}_2\exp(-1/\sigma^2)\right]a^{-3} + 3\bar{K}_2\exp(-a^2/\sigma^2)[a^2-\sigma^2]\right\} \tag{4.3.33}$$

sendo $\bar{K}_2 = \frac{8\pi G}{3H_0^2}K_2$. O termo dominante para valores pequenos do fator de escala é o primeiro, logo para que o universo estivesse em expansão desacelerada no passado, a seguinte condição tem que ser satisfeita:

$$\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} > \bar{K}_2\exp(-1/\sigma^2) \tag{4.3.34}$$

Como a constante cosmológica total é nula,

$$\Omega_{x_0} = \bar{K}_2\exp(-1/\sigma^2)\left[\frac{3}{2}\sigma^2 - 1\right] \tag{4.3.35}$$

Substituindo esse valor em (4.3.33), já levando em conta que $\Omega_{m_0} + \Omega_{b_0} = 1 - \Omega_{x_0}$ ficamos com

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2\left\{\left[1 - \frac{3}{2}\bar{K}_2\sigma^2\exp(-1/\sigma^2)\right]a^{-3} + 3\bar{K}_2\exp(-a^2/\sigma^2)[a^2-\sigma^2]\right\} \tag{4.3.36}$$

Por essa equação, a condição para expansão desacelerada em $a << 1$ é

$$\bar{K}_2\sigma^2\exp(-1/\sigma^2) < \frac{2}{3} \tag{4.3.37}$$

que é a mesma condição (4.3.34), substituindo as densidades bariônicas e de poeira pela densidade do vácuo.

A condição para a aceleração atual do universo é:

$$\left.\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right|_0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{K}_2\exp(-1/\sigma^2)\left[\sigma^2 - \frac{2}{3}\right] > \frac{2}{9} \tag{4.3.38}$$

que é novamente consistente com (4.1.15) se combinada com (4.3.35).

Novamente, temos 2 condições que devem ser satisfeitas: (4.3.37) e (4.3.38), novamente indicando um intervalo de valores para a intensidade da interação:

$$\frac{2e^{1/\sigma^2}}{9(\sigma^2 - 2/3)} < \bar{K}_2 < \frac{2e^{1/\sigma^2}}{3\sigma^2} \tag{4.3.39}$$

É interessante comparar as expressões (4.3.26) e (4.3.33) com a expressão correspondente para o modelo ΛCDM

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2\left[\frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3} - 2\Omega_\Lambda\right] \tag{4.3.40}$$

Nota-se que os termos de interação podem fazer o papel de Ω_Λ. Além disso, o modelo ΛCDM dá uma boa descrição do universo atual; espera-se portanto que essa situação não mude muito considerando modelos alternativos. Isso indica valores positivos para $\bar{K}_1$ e $\bar{K}_2$ e $\sigma > 1$. Uma análise estatística de supernovas tipo Ia em andamento parece confirmar esse fato.

4.4 Transferência de Energia

Utilizando argumentos da termodinâmica, mostra-se que valores positivos para Q são preferidos [24], ou seja, há uma transferência de energia da energia escura para a matéria escura. Portanto, de acordo com (4.1.5), num universo em expansão ($\dot{a} > 0$), a quantidade $\frac{dg}{da}$ tem que ser positiva. Para o caso da interação exponencial, temos

$$\frac{dg_1}{da} = \left(\frac{5}{a} - \frac{1}{\sigma}\right)g_1 \tag{4.4.41}$$

e portanto, para $c_1 > 0$

$$Q > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 5\sigma \tag{4.4.42}$$

Já para a interação gaussiana

$$\frac{dg_2}{da} = \left(\frac{5}{a} - \frac{2a}{\sigma^2}\right)g_2 \tag{4.4.43}$$

e consequentemente

$$Q > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < \frac{5}{2}\sigma^2 \tag{4.4.44}$$

Logo, para valores altos do parâmetro σ, valores positivos de $\bar{K}_1$ e $\bar{K}_2$ (correspondente a c_1 e c_2 positivos) são favorecidos. Quando esses limites não forem mais obedecidos ($a > 1$), a interação já não vai ter mais importância, pois em ambos os casos é suprimida exponencialmente.

Capítulo 5

Conclusão

5.1 Observação da Interação

Para que modelos com interação sejam considerados como alternativas viáveis, é preciso que haja alguma forma dessa interação ser medida pelas observações. Primeiro, portanto, devemos construir um parâmetro que nos permita distinguir modelos com interação dos sem interação usando quantidades mensuráveis. Como já visto no capítulo 2, tanto o parâmetro de Hubble H quanto o parâmetro de desaceleração q não são capazes de nos dar informações sobre a interação, pois tanto o parâmetro de desaceleração dado por (considerando por simplicidade um universo plano)

$$q_0 = -\left.\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right|_0 = -\frac{1}{2}\Omega_0(1+3w) \tag{5.1.1}$$

quanto o parâmetro de Hubble H não são infulenciados diretamente pela interação, sendo necessária uma busca por outras soluções. Sahni et al. [18] propuseram 2 parâmetros que envolvem a terceira derivada do fator de escala, chamados de j e s, sendo

$$j = \frac{\dddot{a}}{aH^3} \tag{5.1.2}$$

$$s = \frac{j-1}{3(q-\frac{1}{2})} \tag{5.1.3}$$

Originalmente, esses parâmetros foram propostos para diferenciar diferentes modelos de energia escura sem interação. Zimdahl e Pavón [15] os usaram para medir uma suposta interação. Podemos calcular facilmente r lembrando que

$$\frac{\dddot{a}}{aH^3} = \frac{1}{H^2}\left(\frac{\ddot{H}}{H} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\dot{H}\right)$$

No modelo do capítulo 3, com 2 fluidos genéricos e equação de estado constante, chegamos a

$$j = 1+\frac{9}{2\rho_t}\left[(1+w_1)w_1\rho_1+(1+w_2)w_2\rho_2+\frac{Q}{3H}(w_1-w_2)\right] \tag{5.1.4}$$

$$s = 1+\frac{w_1^2\rho_1+w_2^2\rho_2+\frac{Q}{3H}(w_1-w_2)}{w_1\rho_1+w_2\rho_2} \tag{5.1.5}$$

sendo $\rho_t=\rho_1+\rho_2$. Podemos ver claramente que esses parâmetros são influenciados pela presença ou não de uma interação.

Usando o modelo proposto aqui no capítulo 4, chegamos a

$$j = 1+\frac{9w}{2}\frac{\rho_x}{\rho_t}\left[1+w+\frac{1}{3H}\frac{Q}{\rho_x}\right] \tag{5.1.6}$$

$$s = 1+w+\frac{Q}{3H\rho_x} \tag{5.1.7}$$

sendo $\rho_t=\rho_x+\rho_m+\rho_b$. Encontraríamos esse mesmo resultado usando os resultados com 2 fluidos genéricos e usando $w_2=0$ e $\rho_1\equiv\rho_x$. Especificando ainda para o caso $w=-1$, temos

$$j = 1-\frac{9}{2}\frac{Q}{3H\rho_t} \tag{5.1.8}$$

$$s = \frac{Q}{3H\rho_x} \tag{5.1.9}$$

onde novamente vemos que a interação tem papel importante. No modelo ΛCDM, como não há interação, temos que o par $\{j,s\}$ é $\{1,0\}$. Qualquer desvio desses valores indicará a presença de um acoplamento não-mínimo.

Com esses parâmetros bem definidos, falta agora indicar como eles podem ser medidos. Uma das quantidades observáveis em cosmologia é a distância de luminosidade (d_L), que Hubble mediu para descobrir a expansão do universo. Ela é definida por

$$l\equiv\frac{L}{4\pi d_L^2} \tag{5.1.10}$$

sendo que $L\equiv\frac{dE}{dt}$ é a luminosidade absoluta de uma estrela ou galáxia e l é a luminosidade observada na terra. Como consideramos um universo em expansão, o fóton sofrerá um desvio para o vermelho no seu trajeto até a terra; vamos considerar um fóton radial emitido na coordenada $r=0$ num tempo t e observado na terra em r_0 e t_0. Portanto, podemos expressar a distância de luminosidade como

$$d_L=\frac{a_0}{a(t)}a_0\chi_e \longrightarrow d_L=a_0\chi_e(1+z) \tag{5.1.11}$$

onde z é o desvio para o vermelho, dado por $1+z=\frac{a_0}{a(t)}$ e χ_e é a distância coordenada. Essa distância é dada por

$$\chi_e\equiv-\int_0^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}=\int_t^{t_0}\frac{dt'}{a(t')} \tag{5.1.12}$$

onde na última igualdade usamos o fato de que fótons seguem geodésicas nulas. Podemos mudar a variável na última integral para o redshift, usando que

$$\dot{z} = -\frac{a_0}{a^2}\dot{a} = -(1+z)H \Longrightarrow dt = -\frac{dz}{(1+z)H}$$

e após algumas manipulações chegamos finalmente a

$$a_0\chi_e = \int \frac{dz}{H(z)}$$

e podemos expressar a distância de luminosidade como função do redshift

$$d_L = (1+z)\int \frac{dz}{H(z)} \tag{5.1.13}$$

Podemos expandir o parâmetro de Hubble numa série de Taylor em função do redshift atual $(z = 0)$

$$H(z) = H_0(z) + \frac{1}{2}\left.\frac{dH}{dz}\right|_{z=0} z + \frac{1}{3}\left.\frac{d^2H}{dz^2}\right|_{z=0} z^2 + \dots \tag{5.1.14}$$

Podemos calcular as derivadas do parâmetro de Hubble usando que $\frac{d}{dz} = \frac{dt}{dz}\frac{d}{dt}$ e que

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{(1+z)H}$$

Portanto

$$\frac{dH}{dz} = \frac{1+q}{1+z}H \tag{5.1.15}$$

$$\frac{d^2H}{dz^2} = \frac{H}{(1+z)^2}[j - 1 + 2(1+q) - (1+q)^2] \tag{5.1.16}$$

e usando isso na expansão (5.1.14) e integrando (ver [29]) temos finalmente que a distância de luminosidade é

$$d_L = H_0^{-1}z\left[1 + \frac{1}{2}(1-q_0)z + \frac{1}{6}(3(q_0+1)^2 - 5(q_0+1) + 1 - j_0)z^2 + \dots\right] \tag{5.1.17}$$

Hubble mediu somente o primeiro termo dessa expansão, por isso seu gráfico foi uma reta. Podemos ver que a interação só aparece em terceira ordem no redshift, e até o momento não há nenhuma medida confiável com precisão tão grande. Experimentos como o DES podem ajudar elucidar a questão.

5.2 Considerações Finais

Vimos nesse trabalho, como uma interação em escala cosmológica enriquece a dinâmica e pode apresentar soluções para problemas conhecidos, que os modelos sem interação não conseguem resolver. Além disso, um modelo com interação parece ser muito mais geral, e desconsiderar qualquer tipo de interação a princípio nos restringe a modelos muito mais específicos.

No capítulo 3 escolhemos o tipo mais simples de interação possível e então analisamos que modelos de universo poderiam ser descritos por ela, considerando fluidos que obedecessem à *SEC*, os chamados fluidos ordinários. Obtivemos modelos com bounce, que só podem ser obtidos num universo plano caso haja um fluido que viole a condição de energia nula; e universos que começam com uma fase desacelerada para depois passar para uma fase acelerada com uma singularidade inicial, que é exatamente como o modelo ΛCDM, sem a necessidade de usarmos uma constante cosmológica até hoje não explicada.

Já no capítulo 4, postulamos o tipo de interação baseado no modelo que queríamos - uma aceleração transiente. A partir daí consideramos modelos de interação matematicamente tratáveis e que pudesse resultar no modelo pretendido - combinações de lei de potência e exponenciais do fator de escala.

No entanto, não apresentamos aqui nenhuma base física para que possamos escolher o tipo de interação preferido; no capítulo 3 postulamos um tipo de interação simples e investigamos os resultados, enquanto no capítulo 4 definimos a interação com base no modelo que queríamos obter. Claramente não demos nenhuma justificativa *a priori* para escolhermos um modelo ou outro. É necessário que se busque uma justificativa na física de partículas, o que nos dará um entendimento mais fundamental sobre o universo. Além disso, um passo muito importante é aplicar a teoria de perturbações cosmológicas a esses modelos, a fim de comparar os resultados com as observações da radiação cósmica de fundo. No entanto, isso está acima do objetivo desse trabalho, que é apontar que a presença de uma interação de algum tipo em escala cosmológica, além de ser um modelo muito mais genérico, enriquece bastante a dinâmica do universo. Ainda que não saibamos com precisão se há algum tipo de interação ou não, esses modelos podem ser uma alternativa viável aos modelos mais estudados como quintessência e ΛCDM, que ainda têm problemas fundamentais até hoje não muito bem compreendidos.

Referências Bibliográficas

[1] A. Einstein, A.Preuss Akad.Wiss.Berlin, *Sitzber*, 844 (1915)

[2] A. Einstein, A.Preuss Akad.Wiss.Berlin, *Sitzber*, 142 (1915)

[3] A. Friedmann, Zeitschrift für Physik **10**, 377 (1922)

[4] A. Friedmann, Zeitschrift für Physik **21**, 326 (1924)

[5] E. Hubble, Proc.Nat.Acad.Sci. (USA) **15**, 168 (1929)

[6] G. Gamow, Phys. Rev. **70**,572 (1946)

[7] A. Penzias, R. Wilson, Astrophys.J. **142**, 419 (1965)

[8] A.G. Riess *et al.*, Astron.J. **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter *et al.*, Astrophys.J. **517**, 565 (1999)

[9] M. Novello, J. Salim, Phys. Rev. D **20**, 377 (1979)

[10] V.N. Melnikov, S.V. Orlov, Phys. Lett. A **70**, 263 (1979)

[11] P.J.E. Peebles, B. Ratra, Ap. J. Lett. **325**, L17 (1988)

[12] I. Slatev, L. Wang, P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999)

[13] L.P. Chimento, A.S. Jakubi, D. Pavón and W. Zimdahl, Phys. Rev. D**67**, 083513 (2003)

[14] Eugenio Bianchi, Carlo Rovelli, arXiv: 1002.3966

[15] W.Zimdahl, D. Pavón, Gen.Rel.Grav. **36** 1483-1491 (2004)

[16] P. Peter, N. Pinto-Neto, Phys. Rev. D **66**, 063509 (2002)

[17] Nelson Pinto-Neto, Bernardo M.O. Fraga, Gen.Rel.Grav **40**, 1653-1662 (2008)

[18] V. Sahni, T. D. Saini, A. A. Starobinsky, U. Alam, JETP. Lett. **77**:201-206 (2003)

[19] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **302**, 668 (1988); *ibid.*, Astron. Astrophys. **301**, 321 (1995).

[20] A. Shafieloo, V. Sahni, e A.A. Starobinski, arXiv:0903.5141

[21] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology:Principles and Applications of General Relativity*, Wiley and Sons, 1972

[22] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008

[23] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005

[24] D. Pavón, Bin Wang, Gen. Rel. Grav. **41**, 1 (2009)

[25] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon e W. Zimdahl, Phys. Rev. D **67** 083513 (2003); W. Zimdahl, D. Pavon e L. P. Chimento, Phys.Lett. B **521**, 133 (2001)

[26] L. Amendola, Phys. Rev. D **62**, 043511 (2000); L. Amendola and D. Tocchini-Valentini, Phys. Rev. D **64**, 043509 (2001); L. Amendola and C. Quercellini, Phys.Rev. D **68**, 023514 (2003)

[27] F. Finelli, JCAP **0310** 011 (2003)

[28] A.Gruppuso, F. Finelli, Phys.Rev.D **73**, 023512 (2006)

[29] M. Visser, Class.Quant.Grav. **21**:2603-2616 (2004)