

Estudo de Uma Teoria Eletromagnética Tipo Maxwell-Chern-Simons em $(3+1)$ Dimensões

Mariana Rubet da Costa

Projeto de Conclusão do Curso de Graduação em Astronomia
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Observatório do Valongo

Orientado por José Abdalla Helayel Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
LAFEX

Notações e Convenções

Índices gregos variam de 0 a 3 e índices latinos de 1 a 3.

Índices repetidos indicam soma (convenção de Einstein).

c : velocidade da luz.

\vec{B} : campo magnético.

\vec{E} : campo elétrico.

ρ : densidade de carga elétrica.

\vec{J} : densidade de corrente elétrica.

$\partial_\mu A = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A$.

$\partial_t A = \frac{\partial}{\partial t} A$.

métrica: (+, -, -, -).

$F^{\mu\nu}$: tensor de campo eletromagnético.

$\theta^{\mu\nu}$: tensor energia-momento eletromagnético.

Resumo

Este trabalho consiste no estudo do eletromagnetismo clássico na formulação covariante, em (3+1) dimensões¹, e de uma variação deste que incorpora a quebra da simetria de Lorentz por meio da introdução de um campo de fundo de dimensão massiva na teoria. O estudo desta teoria eletromagnética tipo-Chern-Simons baseou-se no artigo da Ref.[8], que motivou os cálculos pertinentes à investigação aqui desenvolvida, e com os quais compôs-se esta monografia. Pode-se verificar desta teoria alguns aspectos interessantes, que vem sendo pesquisados, como a modificação da polarização da luz ao se propagar no espaço. Contudo, o modelo também apresenta aspectos não físicos, como a presença de táquions (partículas que viajam com uma velocidade maior do que a da luz no vácuo) e a violação da causalidade na produção dos campos. Por fim realizou-se um estudo de propagadores de campos, desenvolvendo-se e simplificando-se suas expressões, com base nas prescrições da referência [4].

¹(3+1)=3 dimensões espaciais + 1 temporal

Abstract

This work presents a study of the classical electromagnetism in its covariant formulation, in (3+1) dimensions², and of an alternative proposal that incorporates the violation of Lorentz symmetry promoted by a background massive vector field coupled to the dynamical sector of the theory. The study of this Chern-Simons-like electromagnetic theory is based on the paper of Ref.[8]. We performed the calculation associated to this investigation, and we were able to verify some interesting aspects of the theory, for instance, the change of light polarization, as it propagates through space. Nevertheless, the theory presents some non-physical aspects like the presence of tachions (particles that travel faster than light) and the violation of causality in the production of the fields. Finally, we present a study of field propagators, developing and simplifying their expressions, as we take the viewpoint contained in Ref.[4].

²(3+1)=3 espacial + 1 temporal dimensions

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Relatividade Especial	9
2.1	Transformações de Lorentz	9
2.2	Espaço de Minkowski	11
3	A Covariância do Eletromagnetismo	17
4	Uma Teoria Tipo Maxwell-Chern-Simons	21
5	Estudo de Funções de Green	31
5.1	Campo Eletromagnético no Vácuo	31
5.1.1	Função de Green Retardada ou Causal	32
5.1.2	Função de Green Avançada ou Não -Causal	35
5.1.3	Função de Green Mista	36
5.2	Equação de Onda com Termo Massivo	39
5.2.1	Função de Green Retardada	39
5.2.2	Função de Green Avançada	42
6	Análises Finais e Perspectivas	44
A	Vetores e Tensores	45
A.1	Tensores Simétricos e Anti-Simétricos	46
A.2	Tensor Delta de Kronecker	47
A.3	Tensor Levi-Civita	47
A.4	Representações Covariantes e Contravariantes	48
B	Princípio da Mínima Ação	50
C	Conservação do Tensor Energia-Momento	54
C.1	Ausência de Fontes	54
C.2	Presença de Fontes	55
D	Determinante M Nulo	57

E Operadores Longitudinais e Transversais	62
Bibliografia	65

Capítulo 1

Introdução

As equações de Maxwell constituem um conjunto de 4 equações que contém as leis básicas do eletromagnetismo. Elas são capazes de explicar fenômenos observados espontaneamente na natureza e em laboratórios através da descrição do comportamento dos campos elétrico e magnético bem como de suas interações com a matéria. Elas são fruto do empenho de alguns físicos como Oersted, Ampère e Faraday, principalmente, que desde 1820 trabalharam no sentido de relacionar a eletricidade e o magnetismo, fenômenos até então observados e entendidos independentemente. As equações atingiram sua forma final em 1864, com a correção da lei de Ampère por Maxwell, que baseando-se num argumento de simetria, e tendo sua previsão confirmada experimentalmente, fechou a teoria eletromagnética como a conhecemos hoje. As equações de Maxwell implicam ondas de campos elétricos e magnéticos que se propagam com a velocidade da luz. Em 1888, foi confirmada por Henrich Hertz, a hipótese de que a luz é uma onda eletromagnética que se propaga no espaço. Esta confirmação levou à incorporação da ótica ao eletromagnetismo. O eletromagnetismo de Maxwell é instrumento de diversos ramos da física e proporcionou grandes avanços tecnológicos para a sociedade, principalmente na área de comunicação. Além disso, a teoria em sua forma final abriu caminho para a compreensão de diversos fenômenos encontrados na natureza, bem como possibilitou a modelagem de diversos sistemas complexos, como de objetos astrofísicos, cuja dinâmica está muito relacionada ao comportamento dos campos produzidos.

Os campos eletromagnéticos tem uma atuação muito abrangente na natureza. Eles podem ser encontrados nas maiores escalas, como nos objetos plasmáticos e no meio interestelar e intergalático, governando seus fenômenos. Como exemplo entre uma vasta gama de fenômenos, citam-se as manchas solares, as tempestades magnéticas, a dinâmica dos pulsares e também a importância dos campos eletromagnéticos na formação e estruturação de planetas, da galáxia, e possivelmente de outras formações como aglomerados estelares e galáticos. Eles também são encontrados nas menores escalas de nível atômico, atuando na formação da matéria ordinária e desempenhando um papel importante nas reações químicas e na manutenção e dinâmica da vida no planeta.

A sua existência remonta á formação de cargas elétricas no universo. Existem estudos sobre estes primeiros campos, chamados primordiais, e de como eles teriam participado na evolução e na distribuição da matéria até chegar aos dias atuais. Esses estudos tem como base a análise da radiação cósmica de fundo (RCF), uma radiação que permeia todo o universo e que tem evoluído junto com ele desde a fase em que ele se tornou transparente à radiação até os dias atuais. A distribuição desta radiação caracteriza-se atualmente por uma densidade de energia quase perfeitamente homogênea e isotrópica, em nosso universo.

Os últimos dados sobre a distribuição de energia da RCF foram coletados pela sonda WMAP. Ela apontou pequenas anisotropias e polarização da RCF. Entre as teorias atualmente debatidas no meio científico, algumas estabelecem a quebra da simetria de Lorentz - que expressa a covariância do eletromagnetismo - através da introdução de campos de fundo na teoria, e com isso geram uma anisotropia espacial/temporal. Inspirada numa particular configuração de vácuo para a teoria de cordas, a proposta estende as interações presentes no Modelo Padrão das partículas elementares, acoplando campos de fundo aos graus de liberdade usuais, o que, seguindo determinadas prescrições, define o "Standard Model Extension" (Modelo Padrão Estendido)[16]. Desenvolvimentos posteriores generalizam essa abordagem de modo a incluir a interação gravitacional [17],[18],[19],[20],[21] e análises dessas propostas em contexto quântico merecem espaço na literatura [22],[23],[24], assim como várias aplicações fenomenológicas. Está sendo estudado, por exemplo, por Kostelecky[15],[22] e Casana et al.[25], se as anisotropias da RCF podem estar relacionadas à presença de campos de fundo. Ele faz estimativas dos parâmetros da quebra da simetria de Lorentz baseado nas informações extraídas da análise destas anisotropias. Também realizam-se estudos sobre a viabilidade dessas propostas com a quebra da simetria de Lorentz como modelos para outros fenômenos, a saber: oscilação de neutrinos[26],[27],[28], *gamma-ray bursts*[29],[22], raios cósmicos ultra-energéticos[30], expansão cósmica acelerada,[31],[32].

Em um contexto mais amplo, a quebra da simetria de Lorentz é proposta por teorias físicas classificadas como "Além do Modelo Padrão", que têm como motivação teórica a unificação da gravitação às outras três interações fundamentais encontradas na natureza - forte, fraca e eletromagnética - que já obtiveram sua descrição unificada com a emergência do Modelo Padrão na década de 70. Neste contexto a quebra da simetria é interpretada como o resultado da transição de fase de um estado que é simétrico em energias muito altas, na ordem 10^{19} GeV (massa de Planck, $c=1$), e que perde a simetria a energias menores, gerando como resultado campos de fundo - campos cuja dinâmica não se conhece. Há também motivação observacional para a quebra da simetria de Lorentz: observações astronômicas do espectro de estrelas[14] sugerem que a constante de estrutura fina ($\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$) esteja variando. Qual destas "constantes" estaria variando é uma questão em aberto, difícil de responder[33].

Um efeito consequente da quebra de Lorentz pela introdução de um campo de fundo, em (3+1) dimensões, é a rotação do plano de polarização de ondas planas. Uma onda plana pode ser decomposta em uma onda circularmente polarizada para a direita e outra para a esquerda. Ao se propagar num meio magnetizado, pode ocorrer uma diferença na velocidade de propagação de seus modos circulares, dando origem a uma rotação no plano de polarização da onda. Este efeito é chamado de Magneto-ótico. A presença de um campo de fundo banhando o universo torna o vácuo opticamente ativo, provocando este mesmo efeito.

Por outro lado, a quebra desta simetria aparece naturalmente em outros cenários, como por exemplo na física da matéria condensada, em que, na transição de fase do ferromagnetismo no modelo de Ising, spins com movimento térmico e descorrelacionados se alinham gerando um campo de fundo à medida que o sistema é resfriado. Ainda na física da matéria condensada, a transição de fase em supercondutores também manifesta a quebra de Lorentz [2],[1].

Este trabalho está organizado da seguinte forma: os capítulos 2 e 3 foram destinados, respectivamente, a uma revisão da Relatividade Restrita e da formulação covariante do Eletromagnetismo. O capítulo 4 contém o estudo de uma teoria eletromagnética tipo Maxwell-Chern-Simons em (3 + 1) dimensões, uma teoria que quebra a simetria Lorentz. Ela produz o efeito de birrefringência do vácuo. No capítulo 5, é desenvolvido um estudo de propagadores de campo, envolvendo o cálculo das funções de Green de operadores de alguns campos distintos. Este capítulo teve como motivação a compreensão mais profunda dos campos físicos. Também foram introduzidos apêndices para a melhor compreensão do texto. Alguns contêm fundamentos importantes utilizados - estes podem interessar a um leitor pouco acostumado com os conteúdos explicitados

- e outros contêm informação técnica do desenvolvimento de cálculos mais complicados.

Capítulo 2

Relatividade Especial

No final do séc XIX, a comunidade científica debatia a idéia de um éter e procurava evidências deste suposto meio que, através de sua perturbação, geraria a propagação das ondas eletromagnéticas à velocidade da luz c . Esta idéia de éter estabelecia um referencial privilegiado, fixo no próprio meio material (no éter), em relação ao qual as ondas eletromagnéticas, já identificadas com a luz, se propagariam com velocidade c . Em 1905, Einstein propôs que o campo eletromagnético possui identidade própria, e não precisa de uma "materialização" através do éter. Para ele, as leis de Maxwell são leis fundamentais que integram, portanto, o conjunto de leis que satisfazem o princípio da relatividade¹, não existindo referencial privilegiado para a velocidade da luz c .

A idéia de uma velocidade finita e de valor fixo, c , rompe com o teorema da adição de velocidades de Galileu e sugere então o abandono da nossa crença em distâncias e tempos absolutos. Um outro conceito de espaço e tempo entra em evidência, o conceito unificado de espaço-tempo, e as transformações apropriadas para a descrição de fenômenos em diferentes referenciais inerciais são as transformações de Lorentz.

2.1 Transformações de Lorentz

Einstein se baseou em dois princípios para formular a Relatividade Restrita:

- (i) - As leis da física são idênticas em qualquer referencial inercial.

- (ii) - A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer sistema de referencial inercial.

Vamos considerar dois referenciais inerciais, S e S' , que no instante inicial $t = 0$ coincidam de origem e se afastem com velocidade \vec{V} , ao longo do eixo x . Temos então que a propagação de um pulso luminoso,

¹Relatividade Galileana: "As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais."

disparado da origem coincidente em $t = 0$, percebida nesses dois referenciais deve obedecer a

$$\begin{aligned}c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 &= 0, \\c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

e logo,

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.\tag{2.2}$$

Uma possível relação que satisfaz a igualdade acima é a seguinte

$$\begin{aligned}dx' &= \gamma(V)(dx - V dt), \\dt' &= \gamma(V)\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right), \\dy' &= dy, \\dz' &= dz.\end{aligned}\tag{2.3}$$

em que $\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$. Estas transformações são conhecidas como "boosts" (empurrões) de Lorentz.

As transformações inversas de (2.3) têm a mesma forma exceto pela mudança de V por $-V$. Podemos notar que $\gamma(V) = \gamma(-V)$

$$\begin{aligned}dx &= \gamma(V)(dx' + V dt'), \\dt &= \gamma(V)\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx'\right), \\dy &= dy', \\dz &= dz'.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Um outro tipo de transformações de Lorentz, que altera apenas as coordenadas espaciais, são as rotações. Elas também satisfazem a relação (2.2). Por exemplo, uma rotação no plano xy , anti-horária, da base de um sistema de coordenadas, representada na fig2.1, produz

$$\begin{aligned}dt' &= dt, \\dy' &= -dx \sin \phi + y \cos \phi, \\dx' &= dx \cos \phi + y \sin \phi, \\dz' &= dz,\end{aligned}\tag{2.5}$$

que é coerente com a (2.2).

A combinação de distâncias e tempos, invariante sob transformações de Lorentz,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{r}|^2,\tag{2.6}$$

em que dt e $|d\vec{r}|$ são o tempo transcorrido e a distância entre dois eventos, $|d\vec{r}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ganha o nome de intervalo. Denominamos tempo próprio, $d\tau$, o tempo transcorrido entre dois eventos no referencial

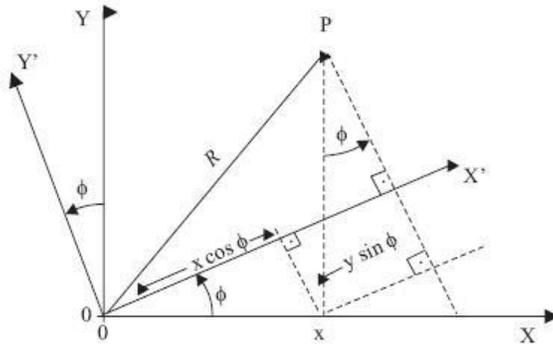


Figura 2.1: Rotação Passiva.

onde os eventos acontecem na mesma posição . Neste caso o intervalo $ds^2 = c^2 d\tau^2$, equivale ao tempo próprio.

2.2 Espaço de Minkowski

O espaço de Minkowski é caracterizado pelas transformações de Lorentz que preservam, como elemento invariante o intervalo entre dois eventos, (2.6),

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - |d\vec{r}|^2.$$

Para as rotações , no espaço Euclidiano, a lei básica de transformação é definida em termos das coordenadas de um ponto. Chamamos \vec{x} um vetor, e falamos de x_1, x_2, x_3 como componentes de um vetor. Para todo conjunto de três quantidades físicas que se transformam, quando submetidas a uma rotação , do mesmo modo que as componentes de \vec{x} , ganha o nome de vetor. Analogamente, existem numerosos conjuntos de quantidades físicas que se transformam, sob transformações de Lorentz, do mesmo modo que as coordenadas espaciais e temporal de um evento. Neste caso falamos em quadri vetor. O quadri vetor deslocamento tem suas componentes dadas por

$$\begin{aligned} dx^0 &= cdt, \\ dx^1 &= dx, \\ dx^2 &= dy, \\ dx^3 &= dz. \end{aligned} \tag{2.7}$$

ou compactamente, $dx^\mu = (cdt, d\vec{x})$, a representação contravariante do quadri vetor deslocamento.

Da equação (2.6) podemos obter a representação covariante, dx_μ , do quadrivetor deslocamento, que compõe, em contração com a representação contravariante, o produto interno no espaço de Minkowski:

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

e, logo, a representação covariante é dada por

$$\begin{aligned} dx_0 &= cdt, \\ dx_1 &= -dx, \\ dx_2 &= -dy, \\ dx_3 &= -dz. \end{aligned} \tag{2.8}$$

ou seja, $dx_\mu = (cdt, -d\vec{x})$.

Relacionamos as representações covariante e contravariante de um vetor através do tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$,

$$dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu. \tag{2.9}$$

O intervalo entre dois eventos pode ser reescrito como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2.10}$$

De modo geral, para um quadrivetor A^μ arbitrário,

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu. \tag{2.11}$$

Podemos também introduzir o inverso do tensor métrico, $\eta^{\mu\nu}$, definido por

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu. \tag{2.12}$$

Combinando (2.11) e (2.12), obtemos

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho. \tag{2.13}$$

Em sua forma matricial $\eta_{\mu\nu}$,

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

O espaço de Minkowski, M^4 , é um espaço real 4-dimensional, de métrica não positiva definida - o intervalo medido entre dois eventos não é necessariamente maior ou igual a zero - e é utilizado, de modo suficiente, na descrição de fenômenos físicos na ausência de campo gravitacional². A invariância do intervalo permite classificar pares de eventos de forma independente dos referenciais. Dizemos que um par de eventos

²Na presença de campo gravitacional, no âmbito da Relatividade Geral, o espaço de Minkowski surge como expressão local (espaço-tangente) de uma geometria mais geral (Riemanniana).

tem distância de universo temporal, espacial ou nula se o intervalo entre eles é positivo, negativo ou zero. Os eventos com distância nula só podem estar conectados por um raio de luz ($ds = 0 \rightarrow cdt = \pm|d\vec{r}|$). Para os que estão separados temporalmente sempre será possível encontrar um referencial em que os eventos possuam as mesmas coordenadas espaciais. Neste caso os dois eventos ocorrem no mesmo ponto do espaço, mas estão separados por um intervalo de tempo. Para os que estão separados espacialmente, sempre será possível encontrar um referencial em que ocorram simultaneamente. Neste caso eles ocorrem em diferentes pontos do espaço, num mesmo instante de tempo.³

Vamos definir mais três quadrivetores:

$$\text{4-velocidade } u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (2.15)$$

$$\text{4-aceleração } \omega^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}. \quad (2.16)$$

$$\text{4-força } g^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (2.17)$$

em que $p^\mu = mu^\mu$ é o quadrivetor momento. Notamos que as quantidades acima são híbridas, por exemplo u^μ é a distância medida em S sobre o tempo medido em outro referencial S' , em que $d\vec{x}' = 0$, chamado 'referencial próprio' da partícula que está em movimento. Nele $ds^2 = c^2d\tau^2$, $d\tau$ chama-se 'tempo próprio'. No entanto, pode-se checar que essas são as grandezas cujos 'quadrados' são invariantes perante as transformações de Lorentz.

A energia relativística de uma partícula é definida como [5]

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (2.18)$$

em que \vec{V} é a velocidade do referencial que caminha junto com a partícula. Sua energia de repouso ($\vec{V} = 0$),

$$E_0 = mc^2. \quad (2.19)$$

Temos então que a energia cinética da partícula será

$$T = E - E_0 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (2.20)$$

O produto escalar entre dois quadrivetores quaisquer, definido como $A^\mu B_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$, é um invariante de Lorentz. Vejamos quais invariantes obtemos com a contração dos vetores $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{V})$ e $p^\mu = mu^\mu$ com eles próprios,

$$\begin{aligned} u^\mu u_\mu &= u^{02} - \vec{u}^2 = \frac{c^2 - V^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = c^2. \\ p^\mu p_\mu &= p^{02} - \vec{p}^2 = \frac{(mc)^2 - (mV)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2, \end{aligned}$$

³Vide ref[12] para mais detalhes.

em que fizemos uso da relação (2.18). Usando as igualdades acima podemos obter a expressão que relaciona a energia e o momento relativísticos de uma partícula à sua massa,

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2. \quad (2.21)$$

A segunda lei de Newton $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ permanece válida na mecânica relativística se usarmos o momento relativístico:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{u} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ &= \frac{m \frac{d\vec{V}}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + m\vec{V} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{-\frac{1}{c^2} 2\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{m}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \vec{a} + \frac{m\vec{V} \cdot \vec{a}}{c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{V}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

que é a nova expressão para a força que atua sobre uma partícula.

Podemos notar que as transformações (2.3) são transformações lineares e homogêneas - não há adição de constante isolada. Podemos representá-las matricialmente por $\Lambda^\mu{}_\nu$,

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu, \quad (2.23)$$

em que

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma(\beta) & -\gamma(\beta)\beta & 0 & 0 \\ -\gamma(\beta)\beta & \gamma(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

onde $\beta = \frac{V}{c}$.

Para um empurrão genérico

$$\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z), \quad (2.25)$$

a coordenada temporal se transformará da seguinte forma:

$$cdt' = \gamma(cdt - \vec{\beta} \cdot d\vec{x}). \quad (2.26)$$

Para obter a transformação das coordenadas espaciais vamos decompor $d\vec{x}$ em uma direção paralela a $\vec{\beta}$ e outra perpendicular a $\vec{\beta}$.

$$d\vec{x} = d\vec{x}_{||} + d\vec{x}_{\perp}, \quad (2.27)$$

$$d\vec{x}_{||} = (\hat{\beta} \cdot d\vec{x})\hat{\beta} = \left(\frac{\vec{\beta}}{\beta^2} \cdot d\vec{x}\right)\vec{\beta}. \quad (2.28)$$

$$d\vec{x}_{\perp} = d\vec{x} - d\vec{x}_{||}. \quad (2.29)$$

Apenas a componente paralela ao movimento se transforma, enquanto a perpendicular é invariante,

$$d\vec{x}'_{||} = \gamma(d\vec{x}_{||} - \vec{\beta}cdt). \quad (2.30)$$

$$d\vec{x}'_{\perp} = d\vec{x}_{\perp}. \quad (2.31)$$

Temos que, usando (2.28)-(2.31),

$$\begin{aligned} d\vec{x}' &= \gamma d\vec{x}_{||} - \gamma \vec{\beta}cdt + d\vec{x}_{\perp} \\ d\vec{x}' &= d\vec{x} + (\gamma - 1)d\vec{x}_{||} - \gamma \vec{\beta}cdt \\ d\vec{x}' &= d\vec{x} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot d\vec{x})\vec{\beta} - \gamma \vec{\beta}cdt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Agora podemos montar uma matriz para emprrrões mais geral Λ^{μ}_{ν} mais geral

$$(\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x^2 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x\beta_y & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x\beta_z \\ -\gamma\beta_y & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_y\beta_x & 1 + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_y^2 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_y\beta_z \\ -\gamma\beta_z & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_z\beta_x & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_z\beta_y & 1 + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_z^2 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

em que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$.

A transformação de Lorentz equivalente a (2.26), (2.30) e (2.31) para um quadrivetor arbitrário é

$$\begin{aligned} A'_0 &= \gamma(A_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A}), \\ \vec{A}'_{||} &= \gamma(\vec{A}_{||} - \vec{\beta}A_0), \\ \vec{A}'_{\perp} &= \vec{A}_{\perp}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ou, compactamente,

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}. \quad (2.35)$$

Sabemos que este tipo de transformação deixa invariante o quadrado do módulo de um quadrivetor $|A|^2 = A^{\mu}A_{\mu}$, ou seja

$$\begin{aligned} A^{\mu}A_{\mu} &= A'^{\mu}A'_{\mu} \\ &= A'^{\mu}\eta_{\mu\nu}A'^{\nu} \\ &= \Lambda^{\mu}_{\lambda}A^{\lambda}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\sigma}A^{\sigma}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

e então, para termos a equivalência, é preciso que

$$\Lambda^{\mu}_{\lambda}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\lambda\sigma}. \quad (2.37)$$

Com isso definimos o Grupo de Lorentz, que é o conjunto das transformações lineares,

$$\begin{aligned} \Lambda &: M^4 \rightarrow M^4 \\ &: x \mapsto \Lambda x, \end{aligned} \tag{2.38}$$

que satisfazem a condição (2.37), onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço de Minkowski. As matrizes $\Lambda^\mu{}_\lambda$ são matrizes 4×4 reais.

Podemos obter o determinante de Λ observando que

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta, \tag{2.39}$$

usando que $\det \eta = -1$, e propriedades do determinante ⁴, obtemos

$$\begin{aligned} (\det \Lambda)^2 &= 1 \\ \det \Lambda &= \pm 1. \end{aligned} \tag{2.40}$$

As que possuem $\det \Lambda = 1$ são denominadas de "Transformações de Lorentz Próprias" e as que possuem $\det \Lambda = -1$ são denominadas "Transformações de Lorentz Impróprias" e constituem-se de transformações discretas como inversões espaciais e temporal. Estaremos interessados nas primeiras.

As rotações espaciais também pertencem ao grupo de Lorentz visto que preservam a invariância do intervalo (2.6) e portanto possuem a propriedade (2.37). Elas são representadas matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & R_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

em que $R_{3 \times 3}$ são matrizes ortogonais, tais que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

e $R^t R = I_3$, onde I_3 é a matriz identidade 3×3 . Podemos calcular o determinante das matrizes R ,

$$\begin{aligned} (\det R)^2 &= 1 \\ \det R &= \pm 1. \end{aligned}$$

As que nos interessam são as que possuem determinante 1, associadas a rotações; as que possuem determinante -1 realizam inversões espaciais.

⁴ $\det(A.B) = \det A \cdot \det B$; $\det A = \det A^t$

Capítulo 3

A Covariância do Eletromagnetismo

Neste capítulo será apresentada a formulação covariante, sob transformação de Lorentz, da teoria eletromagnética de Maxwell.

A teoria eletromagnética é a teoria descrita pelas quatro equações de Maxwell. Considerando-se que as fontes estão no vácuo (não constituem meio material), estas equações são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}. \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{J} + \partial_t \vec{E}. \quad (3.4)$$

As equações acima foram escritas no sistema Gaussiano, com $c = 1$.

Das equações (3.3) e (3.4) podemos identificar o quadrivetor corrente. Elas nos fornecem

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (3.5)$$

que é a equação da continuidade, correspondendo à conservação da carga elétrica. Ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.6)$$

em que as quantidades representadas por J^μ são ($c = 1$)

$$\begin{aligned} J^0 &= \rho, \\ J^1 &= J_x, \\ J^2 &= J_y, \\ J^3 &= J_z. \end{aligned}$$

ou seja, $J^\mu = (\rho, \vec{J})$. Este é o quadrivetor corrente e engloba a densidade de carga elétrica ρ e o vetor densidade de corrente \vec{J} . Se tomarmos como um fato experimental que a carga elétrica é um invariante

de Lorentz[9], e que, conseqüentemente, a sua conservação independe do referencial inercial de onde esteja sendo observada, a equação (3.6) será válida para qualquer referencial inercial. E como ∂_μ é um quadrivetor, J^μ também será um quadrivetor.

Podemos também juntar as equações (3.3) e (3.4) numa única equação. Observamos que os vetores \vec{E} e \vec{B} formam um conjunto de seis quantidades e não podem, portanto, ser acomodados em quadrivetores. No entanto um quadritensor pode acomodá-los bem. As equações (3.3) e (3.4) nos fornecem

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 4\pi\rho, \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 4\pi\vec{J}_x, \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial t} &= 4\pi\vec{J}_y, \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial t} &= 4\pi\vec{J}_z.\end{aligned}$$

Podemos escrever estas quatro equações como

$$\begin{aligned}\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= 4\pi\vec{J}^0, \\ \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= 4\pi\vec{J}^1, \\ \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} &= 4\pi\vec{J}^2, \\ \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} &= 4\pi\vec{J}^3,\end{aligned}\tag{3.7}$$

ou compactamente como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu.\tag{3.8}$$

em que $F^{\mu\nu}$ é um quadritensor anti-simétrico, chamado "tensor do campo eletromagnético", e é definido por

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.\tag{3.9}$$

Podemos notar da equação (3.8) que $F^{\mu\nu}$ é de fato um quadritensor pois está contraído, por um lado, com um quadrivetor e o resultado, ao lado direito, é um quadrivetor. A equação (3.8) é consistente com a equação da continuidade, derivando-a com respeito a x_ν obtemos

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi \partial_\nu J^\nu,$$

em que o lado esquerdo é nulo, verificando a equação (3.6).

As outras duas equações de Maxwell podem ser escritas através do tensor $F^{\mu\nu}$ como,¹

$$\varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0.\tag{3.10}$$

¹Podemos checar que se $\alpha = 0$

$$\varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} = \varepsilon_{0\lambda\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} = \varepsilon_{01\mu\nu} \partial^1 F^{\mu\nu} + \varepsilon_{02\mu\nu} \partial^2 F^{\mu\nu} + \varepsilon_{03\mu\nu} \partial^3 F^{\mu\nu}$$

que também pode ser escrita, através da contração com um tensor Levi-Civita $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, como²

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (3.11)$$

O tensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$, definido por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}}{2} F_{\lambda\sigma}, \quad (3.12)$$

é chamado de "dual" do tensor $F^{\mu\nu}$. A equação (3.10) é reescrita como

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.13)$$

Com isso podemos ver que a teoria eletromagnética é uma teoria covariante fato manifesto na formulação das equações de Maxwell através de quadrivetores e quadritensores.

Observações

(i) A matriz do tensor dual do campo eletromagnético, $\tilde{F}^{\mu\nu}$, pode ser obtida da matriz de $F^{\mu\nu}$ ao trocarmos $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$ e $\vec{E} \rightarrow -\vec{B}$.

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

(ii) Notando que a contração de um tensor simétrico com um antissimétrico sob a permutação de dois índices é nula, a equação (3.10) nos permite escrever $F^{\mu\nu}$ como o "rotacional" de um quadrivetor A^μ ,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.15)$$

Identificando os diversos componentes de $F^{\mu\nu}$ obtemos as equações

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.16)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} &= 2(\varepsilon_{0123} \partial^1 F^{23} + \varepsilon_{0231} \partial^2 F^{31} + \varepsilon_{0312} \partial^3 F^{12}) \\ &= 2(-\partial_x B_x - \partial_y B_y - \partial_z B_z) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Se $\alpha = i$ obtemos a i -ésima componente da equação (3.2).

2

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\epsilon} \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} &= - (\delta_\lambda^\beta \delta_\mu^\gamma \delta_\nu^\epsilon + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\gamma \delta_\lambda^\epsilon + \delta_\nu^\beta \delta_\lambda^\gamma \delta_\mu^\epsilon - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\gamma \delta_\lambda^\epsilon \\ &\quad - \delta_\lambda^\beta \delta_\nu^\gamma \delta_\mu^\epsilon - \delta_\mu^\beta \delta_\lambda^\gamma \delta_\nu^\epsilon) \partial^\lambda F^{\mu\nu} \\ &= 2 (\partial^\epsilon F^{\gamma\beta} + \partial^\beta F^{\epsilon\gamma} + \partial^\gamma F^{\beta\epsilon}). \end{aligned}$$

Em que ϕ e \vec{A} são as componentes temporal e espacial do quadrivetor A^μ , isto é,

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}). \quad (3.18)$$

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A}). \quad (3.19)$$

A^μ é chamado de quadrivetor potencial.

(iii) Combinando as equações (3.8) e (3.15) obtemos

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 4\pi J^\nu, \quad (3.20)$$

onde $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$.

No entanto, pela equação (3.15) vemos que o quadrivetor A^μ não é univocamente definido. $F^{\mu\nu}$ permanece invariante para uma transformação de A^μ do tipo

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \quad (3.21)$$

onde Λ é uma função escalar arbitrária. A transformação dada por (3.21) é chamada transformação de "Gauge", ou de calibre, e a invariância da teoria sob este tipo de transformação é chamada de invariância de "Gauge" ou invariância de calibre. É possível escolher uma função Λ tal que

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.22)$$

Este é o chamado calibre de Lorentz. Sob esta condição, a equação (3.20) se torna

$$\square A^\mu = 4\pi J^\mu. \quad (3.23)$$

Na ausência de cargas temos

$$\square A^\mu = 0. \quad (3.24)$$

Supondo uma forma ondulatória simples do potencial A^μ , do tipo $A_0^\mu e^{-ik^\mu x_\mu}$ e abrindo mão por hora da convenção $c = 1$, para tornar claro o resultado, obtemos, para $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$,

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right)A^\mu = 0, \quad (3.25)$$

e portanto,

$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 c^2 = 0 \rightarrow \omega = |k|c. \quad (3.26)$$

Obtemos, assim, a equação da onda eletromagnética para o vetor A^μ , propagando-se com uma velocidade de fase c .

(iv) No Apêndice A obtemos a equação (3.20) a partir do formalismo Lagrangeano e do Princípio da Mínima Ação. A Lagrangeana do campo eletromagnético é [6]

$$L_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} - 4\pi A_\nu J^\nu. \quad (3.27)$$

e o tensor energia-momento, que descreve a densidade de energia armazenada pelos campos e os fluxos de momento é dado por[6]

$$\Theta_p^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}F^\nu{}_\alpha + \frac{\eta^{\mu\nu}}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (3.28)$$

Capítulo 4

Uma Teoria Tipo Maxwell-Chern-Simons

Aqui exploraremos uma modificação do eletromagnetismo, que envolve a introdução de um parâmetro de massa, p_α , na formulação covariante da teoria clássica de Maxwell. Será adicionado um termo, chamado termo de Chern-Simons (L_{CS}), à Lagrangeana eletromagnética de Maxwell e, como resultado, a simetria de Lorentz será quebrada, porém a de calibre será mantida. Estaremos usando $c = 1$.

A Lagrangeana desta teoria é

$$L_{p_\alpha} = L_{EM} + L_{CS} = -\frac{1}{4}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} - \frac{1}{2}p_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}. \quad (4.1)$$

Onde $\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}}{2}F_{\gamma\delta}$. Esta modificação acopla o tensor eletromagnético dual $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ a um quadrivetor p_α .

Sob a transformação de calibre $A^\beta \rightarrow A^\beta + \partial^\beta\chi$, onde χ é uma função escalar $\chi(\vec{x};t)$, a variação da Lagrangeana, δL_{p_α} , será

$$\begin{aligned} \delta L_{p_\alpha} = \delta L_{CS} &= -\frac{1}{2}p_\alpha \partial_\beta \chi \tilde{F}^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{F}^{\alpha\beta} \chi \partial_\beta p_\alpha \\ &= -\frac{1}{4} \chi \tilde{F}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note-se que foi feita uma integração por partes levando em conta o princípio da mínima ação¹ e também foi usado que $\partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = 0$. A invariância de calibre requer que a equação (4.2) seja nula para χ arbitrário. Isto é verdadeiro se p_α for alguma constante encontrada na natureza. Com isso, $\partial_\alpha p_\beta = 0$.² No espaço-tempo

¹Vide Apêndice B

²A escolha de p_α constante, invés de gradiente de uma função escalar, possui uma motivação física que é: em sistemas em transição de fase, é natural que, ao sistema atingir um estado de mínima energia, apareça campos de fundo (em geral escalares) constantes, caracterizando um processo chamado de quebra espontânea da simetria

plano de Minkowski, se essa condição é válida em algum referencial inercial, ela também será válida em todos os outros. E então $\delta L_{p_\alpha} = 0$, e a teoria é invariante sob esta transformação de calibre.

A noção de um quadrivetor constante é perturbante pois se p_α se acopla a campos observáveis, esses campos teriam então direção preferencial no espaço-tempo. Mais especificamente, a parte espacial não nula viola a invariância sob rotações e a parte temporal não nula acaba com a invariância sob boosts.³

Se p_α é tipo tempo [8]

$$p_\alpha p^\alpha \equiv m^2 > 0.$$

No referencial próprio de p_α ,

$$p^\alpha = (p^0, 0, 0, 0),$$

e o termo de Chern-Simons nos fornece

$$\begin{aligned} L_{CS} &= -\frac{1}{2} p_0 A_\beta \tilde{F}^{0\beta} \\ &= -\frac{1}{2} m (A_1 \tilde{F}^{01} + A_2 \tilde{F}^{02} + A_3 \tilde{F}^{03}) \\ &= -\frac{1}{2} m ((\vec{B})_x (\vec{A})_x + (\vec{B})_y (\vec{A})_y + (\vec{B})_z (\vec{A})_z) \\ &= -\frac{m}{2} \vec{B} \cdot \vec{A}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Efeitos não isotrópicos, devido a $\vec{p} \neq 0$, são alcançados com um movimento de velocidade constante relativo ao referencial próprio de p_α . Neste outro referencial, o movimento do observador é detectável em relação ao fundo representado por p_α ⁴, o que torna evidente a não-invariância de Lorentz do termo de Chern-Simons em 4 dimensões.

Equações de Campo e suas Soluções

O efeito do termo de Chern-Simons nas equações de campo⁵ é de substituir o quadrivetor densidade de corrente J^ν por $J^\nu + \frac{1}{4\pi} p_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu + p_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}. \tag{4.4}$$

Em componentes, para $\nu = 0$ e $\nu = i$, respectivamente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho - \vec{p} \cdot \vec{B}. \tag{4.5}$$

$$-\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \vec{J} - p_0 \vec{B} + \vec{p} \times \vec{E}. \tag{4.6}$$

³Vide ref[3] para mais detalhes

⁴É importante frisar que a quebra da simetria de Lorentz acontece em transformações ativas. As passivas são puramente geométricas e preservam a simetria de Lorentz, como pode ser observado na forma das contrações .

⁵Apêndice B

As homogêneas, que expressam a relação campo-potencial não são alteradas:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

Em componentes, para $\nu = 0$ e $\nu = i$, respectivamente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.8)$$

$$\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (4.9)$$

O tensor energia-momento da teoria é [8]

$$\Theta_p^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{\eta^{\mu\nu}}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{p^\nu}{2} \tilde{F}^{\mu\alpha} A_\alpha. \quad (4.10)$$

Na ausência de fontes ($J^\nu = 0$) ele é conservado em virtude de (4.4) e (4.7).⁶

$$\partial_\mu \Theta_p^{\mu\nu} = 0. \quad (4.11)$$

Na presença de fontes temos que⁷

$$\partial_\mu \Theta_p^{\mu\nu} = 4\pi J_\alpha F^{\alpha\nu}. \quad (4.12)$$

O termo de Chern-Simons que é o último que contribui na (4.10), deixa o tensor energia-momento assimétrico, $\Theta_p^{\mu\nu} \neq \Theta_p^{\nu\mu}$.

As densidades de energia e momento não são invariantes sob transformação de calibre,

$$\varepsilon = \Theta_p^{00} = \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} B^2 + \frac{p^0}{2} \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (4.13)$$

$$\varphi^i = \Theta_p^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})^i + \frac{p^i}{2} \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (4.14)$$

Elas mudam por uma derivada total,

$$\vec{B} \cdot \vec{A} \mapsto \vec{B} \cdot (\vec{A} - \vec{\nabla}\chi) = \vec{B} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{B}\chi). \quad (4.15)$$

No entanto, as integrais sobre todo o espaço, que definem a energia e o momento eletromagnéticos, são invariantes sob transformações de calibre. Podemos notar, da (4.13), que a energia não é necessariamente positiva,

$$E = \frac{1}{2} \int d\vec{r} (\vec{E}^2 + (\vec{B} + \frac{p^0}{2} \vec{A})^2) - \frac{p^{02}}{8} \int d\vec{r} \vec{A}^2, \quad (4.16)$$

⁶Apêndice C

⁷Apêndice C

o que pode indicar uma instabilidade da teoria.

Solução na Ausência de Fontes ($\rho = \vec{J} = 0$)

Acharemos a relação de dispersão para o campo eletromagnético na ausência de fontes. As equações (4.4) e (4.7) ficam,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = p_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (4.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{B}. \quad (4.18)$$

$$-\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = -p_0 \vec{B} + \vec{p} \times \vec{E}. \quad (4.19)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.21)$$

$$\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (4.22)$$

Da equação (4.19),

$$-\partial_t^2 \vec{E} + \vec{\nabla} \times \partial_t \vec{B} = -p_0 \partial_t \vec{B} + \vec{p} \times \partial_t \vec{E}.$$

Usando a equação (4.22) e $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$,

$$-\partial_t^2 \vec{E} + \nabla^2 \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = p_0(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{p} \times \partial_t \vec{E}.$$

Assumindo uma forma ondulatória para o campo elétrico, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$, obtemos

$$\omega^2 \vec{E} - k^2 \vec{E} + \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = ip_0 \vec{k} \times \vec{E} - i\omega \vec{p} \times \vec{E}. \quad (4.23)$$

Em componentes,

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2)E_i + (k_j E_j)k_i &= ip_0 \varepsilon_{ijk} k_j E_k - i\omega \varepsilon_{ijk} p_j E_k \\ ((\omega^2 - k^2)\delta_{ij} + k_i k_j + ip_0 \varepsilon_{ijk} k_k - i\omega \varepsilon_{ijk} p_k)E_j &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como $i, j, k = 1, 2, 3$ são índices espaciais, podemos pensar na equação acima como o produto de uma matriz 3×3 com um vetor tridimensional no espaço euclidiano.

Definindo a matriz M

$$M_{ij} \equiv (\omega^2 - k^2)\delta_{ij} + k_i k_j + i p_0 \varepsilon_{ijk} k_k - i \omega \varepsilon_{ijk} p_k, \quad (4.25)$$

a equação (4.24) ganha a forma

$$M_{ij} E_j = 0. \quad (4.26)$$

Podemos garantir a existência de solução não trivial para o campo elétrico fazendo o determinante de M ir a zero. Desta condição obtemos a seguinte relação de dispersão para o campo elétrico em termos dos quadrivetores k^α e p^α ,⁸

$$(k^\alpha k_\alpha)^2 + (k^\alpha k_\alpha)(p^\beta p_\beta) = (k^\alpha p_\alpha)^2. \quad (4.27)$$

que pode ser escrita como⁹

$$\omega^2 - k^2 = \pm (k p_0 - \omega p \cos \theta) \left[1 + \frac{(\omega^2 - k^2) p^2 \sin^2 \theta}{(k p_0 - \omega p \cos \theta)^2} \right]^{1/2}, \quad (4.28)$$

em que os sinais $+$ e $-$ correspondem a ondas circularmente polarizadas para a direita e para a esquerda respectivamente. Podemos observar que a introdução de p_α dividiu os fótons em dois modos. As ondas se propagam com uma velocidade de grupo que difere de 1 por um fator de segunda ordem em p_α ¹⁰:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = 1 \pm O(p_\alpha^2). \quad (4.29)$$

Da equação (4.28) notamos que o quadrivetor de onda k^α pode se tornar tipo espaço, isto é, modos exponenciais instáveis podem resolver as equações de campo. Isto é mais claramente visualizado no referencial próprio de p^α , em que a equação (4.28) fica

$$\omega^2 = k(k \pm m). \quad (4.30)$$

Se $k < m$, ω é imaginário. Essas soluções dão origem a modos taquionicos, que crescem exponencialmente com o tempo¹¹. Esses modos exponencialmente instáveis não contradizem a conservação da energia pois as duas integrais em (4.16) podem se tornar arbitrariamente grande enquanto a diferença entre elas permanece finita, independente do tempo.

⁸Vide Apêndice D

⁹Vide Apêndice D

¹⁰Vide Apêndice D

¹¹Táquions são partículas teóricas que viajam com uma velocidade maior que a da luz. O fator relativístico γ se torna imaginário e como consequência a energia também. Estas partículas são produzidas ao obtermos frequências imaginárias para os campos, como na equação (4.30) se $k < m$. Elas são desprovidas de sentido físico, no âmbito de uma teoria de partículas construída com o grupo de Lorentz como grupo de covariância

Solução na Presença de Fontes

As equações de Maxwell modificadas no referencial próprio de p^α são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (4.31)$$

$$-\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{J} - p_0\vec{B}. \quad (4.32)$$

e as homogêneas permanecem inalteradas

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \\ \partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\vec{\nabla} \times (4.32)$

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \times \partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{J} - m\vec{\nabla} \times \vec{B} \\ \partial_t^2 \vec{B} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} + m\vec{\nabla} \times \vec{B} &= 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{J} \\ \square \vec{B} + m\vec{\nabla} \times \vec{B} &= 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{J}_T. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Em que \vec{J}_T é a componente transversa de \vec{J} .¹²

E $\partial_t(4.32)$ nos fornece

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 \vec{E} + \vec{\nabla} \times \partial_t \vec{B} &= 4\pi\partial_t \vec{J} - m\partial_t \vec{B} \\ -\partial_t^2 \vec{E} - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= 4\pi\partial_t \vec{J} + m\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ -\partial_t^2 \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \nabla^2 \vec{E} - m\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 4\pi\partial_t \vec{J} \\ \square \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + m\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -4\pi\partial_t \vec{J}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_T + \vec{E}_L. \\ \vec{J} &= \vec{J}_T + \vec{J}_L. \end{aligned}$$

Obteremos duas equações da expressão (4.34),

$$\square(\vec{E}_T + \vec{E}_L) + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_T + \vec{E}_L)) + m\vec{\nabla} \times (\vec{E}_T + \vec{E}_L) = -4\pi\partial_t(\vec{J}_T + \vec{J}_L).$$

São elas,

$$\square \vec{E}_T + m\vec{\nabla} \times \vec{E}_T = -4\pi\partial_t \vec{J}_T \quad (4.35)$$

$$\square \vec{E}_L + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L) = -4\pi\partial_t \vec{J}_L. \quad (4.36)$$

¹²Vide Apêndice E

Os campos gerados pela fonte são melhor descritos através da função de Green das expressões (4.33) e (4.35), que contém a parte transversal dos campos. Ela pode ser vista como uma função resposta a um distúrbio, localizado por uma função delta na origem do tempo e do espaço. A equação (4.36), que diz respeito á parte longitudinal do campo, não nos permite uma interpretação física de partícula nos pólos que dê origem aos campos, como veremos adiante.

Para o cálculo da função de Green, introduziremos a noção de operadores longitudinais e transversos no Apêndice E, e também faremos uso do Teorema dos Resíduos.[10]

Observemos o setor transversal do campo expresso na equação (4.35)

$$\square \vec{E}_T + m \vec{\nabla} \times \vec{E}_T = -4\pi \partial_t \vec{J}_T.$$

Em componentes, com auxílio do Apêndice E,

$$\begin{aligned} \square E_i^T + m \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k^T &= -4\pi \partial_t J_i^T \\ \square \theta_{ij} E_j - m S_{ik} \theta_{kl} E_l &= -4\pi \partial_t \theta_{ij} J_j \\ (\square \theta_{il} - m S_{il}) E_l &= -4\pi \partial_t \theta_{ij} J_j. \end{aligned}$$

Os campos $E(x)_i$ podem ser escritos em função das fontes $J(x')_j$ através da função de Green, $G(x-x')$, do operador $O = \square \theta - mS$,

$$E(x)_i = \int d^4 x' G(x-x')_{ij} (-4\pi \partial_t J(x')_j).$$

A função de Green deste operador será tal que

$$O(x)G(x-x') = \delta^4(x-x')\theta.$$

Em termos matriciais, notando que $\delta_{ij}\theta_{jk} = t_{ik}$,

$$(\square \theta_{ki} - m S_{ki})G_{ij} = \theta_{kj}. \quad (4.37)$$

ou simplesmente

$$(\square \theta - mS)G = \theta. \quad (4.38)$$

Vamos supor a seguinte forma para a função de Green:¹³

$$G = \alpha \theta + \beta S. \quad (4.39)$$

De acordo com (4.38), e consultando a tabela do Apêndice E,

$$\begin{aligned} \square \alpha \theta + \square \beta S - m \alpha S + m \beta \nabla^2 \theta &= \theta \\ (\square \alpha + m \beta \nabla^2) \theta + (\square \beta - m \alpha) S &= \theta. \end{aligned}$$

¹³Poderíamos expandir a função de Green G como $G = \alpha \theta + \beta S + \gamma \omega$ para usarmos todos os componentes da base de operadores. Porém, podemos notar que, pelo fato de ω ser ortogonal a θ e a S , ele é eliminado ao abrirmos a expressão(4.38).

Obtemos duas equações

$$\square\beta - m\alpha = 0. \quad (4.40)$$

$$\square\alpha + m\beta\nabla^2 = 1. \quad (4.41)$$

Resolvendo este sistema para α e β , encontramos

$$\beta = \frac{m}{\square^2 + m^2\nabla^2}. \quad (4.42)$$

$$\alpha = \frac{\square\beta}{m} = \frac{\square}{\square^2 + m^2\nabla^2}. \quad (4.43)$$

A função de Green, (4.39), será

$$G = \frac{\square}{\square^2 + m^2\nabla^2}\theta + \frac{m}{\square^2 + m^2\nabla^2}S. \quad (4.44)$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{\square}{\square^2 + m^2\nabla^2}(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}) + \frac{m}{\square^2 + m^2\nabla^2}\varepsilon_{ijl}\partial_l \\ &= [(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\square + m\varepsilon_{ijl}\partial_l] \frac{1}{\square^2 + m^2\nabla^2} \\ &= [(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2})\square + m\varepsilon_{ijl}\partial_l]g(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Em que $g(\vec{x}, t)$ obedece a seguinte equação :

$$(\square^2 + m^2\nabla^2)g(x) = 4\pi\delta^4(x). \quad (4.46)$$

Podemos analisar a expressão acima em termos da transformada de Fourier de $g(t, \vec{x})$,¹⁴ que é definida como $\tilde{g}(\omega, \vec{k}) = \int dt d\vec{x} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} g(t, \vec{x})$. Esta equação se lê

$$[(-\omega^2 + k^2)^2 - m^2k^2]\tilde{g} = 4\pi. \quad (4.47)$$

¹⁴Para toda função $f(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ - que representa a totalidade das funções $f(x)$ definidas sobre uma reta \mathbb{R}^1 , com valores complexos, tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

ou seja, que são absolutamente integráveis - define-se a sua transformada de Fourier, $f(\tilde{\xi})$, pela fórmula

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{ix\xi}.$$

Ser absolutamente integrável é uma condição suficiente mas não necessária para que a função $f(x)$ possua uma transformada de Fourier. A $f(x)$ pode ser escrita em termos de sua transformada de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{f}(\xi) e^{-i\xi x}.$$

$f(x)$ é chamada transformada inversa de Fourier da função $\tilde{f}(\xi)$. Num espaço n dimensional,

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) e^{ix\xi}, \quad e \quad f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \tilde{f}(\xi) e^{-i\xi x}.$$

A função delta é, de acordo com estas definições, a transformada inversa de uma função constante de valor 1.

Para acharmos $g(t, \vec{x})$ basta integrarmos $\tilde{g}(w, \vec{k})$ em w e \vec{k} . Quando $t \rightarrow \infty$, a contribuição significativa para os campos, devido à rápida oscilação descrita pela exponencial neste limite, vem dos pólos da função $g(t, \vec{x})$, que são dados por

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + k^2)^2 - m^2 k^2 &= 0 \\ -\omega^2 + k^2 &= \pm mk \\ \omega^2 &= k^2 \mp mk. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Podemos associar estas características de onda, frequência e número de onda, ω e \vec{k} , à energia e momento de uma partícula, E e \vec{p} . Isto nos fornece uma relação energia-momento bem peculiar para uma partícula massiva:

$$E^2 = \vec{p}^2 \mp m|\vec{p}|. \quad (4.49)$$

Podemos notar que um dos pólos em (4.48) dá origem a um táquion para grandes comprimentos de onda, $k < m$. Pode-se checar que uma solução que não cresce com o tempo e que se reduz às formas de Liénard-Wiechert quando $m=0$, é [8]

$$g(t, r) = \frac{2 \sin \frac{m}{2} r}{\pi m r} \left[\theta(t) \int_0^\infty dz \frac{\cos r \left(\frac{m^2}{4} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{m^2}{4} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right] \sin tz - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{m}{2}} dz \frac{\cos r \left(\frac{m^2}{4} - z^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{m^2}{4} - z^2 \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|t|z}. \quad (4.50)$$

Esta não é uma solução causal já que o segundo termo, presente quando $m \neq 0$, contribui mesmo para $t < 0$. Uma solução causal, que vá a zero para $t < 0$, crescerá exponencialmente no tempo, e não seria adequada para a descrição de uma partícula associada ao campo.

Analisando o setor longitudinal: O setor longitudinal do campo elétrico, expresso na equação (4.36),

$$\begin{aligned} \square E_i^L + \partial_i \partial_j E_j^L &= -4\pi \partial_t J_i^L \\ (\square \delta_{ij} + \partial_i \partial_j) E_j^L &= -4\pi \partial_t J_i^L, \end{aligned}$$

pode ser escrito, com auxílio do Apêndice E, como

$$\begin{aligned} (\square \delta_{ij} + \omega_{ij} \nabla^2) E_j^L &= -4\pi \partial_t J_i^L \\ (\square \theta_{ij} + (\square + \nabla^2) \omega_{ij}) E_j^L &= -4\pi \partial_t \omega_{ij} J_j. \end{aligned} \quad (4.51)$$

A função de Green do operador $O_x = \square \theta_{ij} + (\square + \nabla^2) \omega_{ij}$ na expressão acima será tal que obedecerá

$$O_x G(x - x') = \delta^4(x - x'). \quad (4.52)$$

Assumindo uma forma

$$G = \alpha \theta + \beta \omega,$$

e substituindo na (4.52) obtemos que $\alpha = 0$ e $\beta = \frac{1}{\square + \nabla^2} = \frac{1}{\partial_t^2}$. E então ,

$$G = \frac{\delta(x - x')}{\partial_t^2} \omega. \quad (4.53)$$

Explicitamente

$$G = \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} h(\vec{x}, t), \quad (4.54)$$

em que $h(\vec{x}, t)$ obedece a equação

$$\partial_t^2 h(x) = 4\pi \delta^4(x). \quad (4.55)$$

Em termos de sua transformada de Fourier $\tilde{h}(\omega, \vec{k})$,

$$-\omega^2 \tilde{h}(k) = 4\pi. \quad (4.56)$$

A expressão acima não nos permite interpretar qualquer tipo de partícula nos pólos de $h(t, \vec{x})$. Ela nos fornece uma física inconsistente ao associarmos energia e momento a ω e k . Obteríamos $\omega = 0$, o que implicaria em energia nula. O setor longitudinal não acrescenta física significativa ao problema.

Além dos modos taquiônicos¹⁵, a teoria também exhibe um comportamento não-físico no regime estacionário e livre de fontes. Para encontrarmos esta solução basta fazermos as derivadas temporais e as fontes serem nulas nas equações (4.5)-(4.9). Para $\vec{p} = 0$ é um resultado direto que a divergência e o rotacional do campo elétrico \vec{E} são nulos e, como consequência, o próprio \vec{E} se anula. O campo \vec{B} obedece a seguinte equação

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -m\vec{B}, \quad (4.57)$$

que implica

$$(\nabla^2 + m^2)\vec{B} = 0. \quad (4.58)$$

Podemos notar que mesmo sem a presença de campo elétrico e de fontes existe campo magnético. As equações acima surgiram primeiro em magnetohidrodinâmica, considerando fontes estacionárias e neutras ($\rho = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$) e impondo a condição de que \vec{J} seja proporcional a \vec{B} . Deste modo a equação (4.57) equivale à lei de Ampère. No eletromagnetismo de Maxwell-Chern-Simons, as equações (4.57) e (4.58) surgem como solução das equações de campo, estacionárias e livres de fonte.

A solução da (4.57) pode ser apresentada em termos de um vetor potencial \vec{A} cujo rotacional é o campo magnético \vec{B} . Podemos verificar que \vec{A} expresso como

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{a} - m\vec{a}, \quad (4.59)$$

em que \vec{a} é um campo vetorial que satisfaz

$$(\nabla^2 + m^2)\vec{a} = 0, \quad (4.60)$$

é concordante com (4.57). Este problema gera campos magnéticos estacionários permeando o espaço-tempo.

¹⁵Referente à propagação de táquions

Capítulo 5

Estudo de Funções de Green

Nesta seção estudaremos mais a fundo as funções de Green, agindo como propagadores de campo, e as interpretações físicas que elas proporcionam.

5.1 Campo Eletromagnético no Vácuo

Estes campos estão fora de meio material, mas na presença de fontes. Como vimos no capítulo 3, se os potenciais satisfazem o calibre de Lorentz, $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, eles serão solução da equação de onda quadridimensional

$$\square A^\mu(x) = 4\pi J^\mu. \quad (5.1)$$

A solução da equação (5.1) pode ser obtida através da função de Green $G(x - x')$ da equação

$$\square G(x - x') = \delta^4(x - x'), \quad (5.2)$$

tal que

$$A^\mu = 4\pi \int d^4x' G(x - x') J^\mu(x'), \quad (5.3)$$

lembrando que o operador de derivação na equação (5.2) envolve apenas a variável x . A transformada de Fourier $\tilde{G}(k)$ da função de Green é definida como

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{G}(k) e^{-ik \cdot (x - x')}, \quad (5.4)$$

em que $k \cdot (x - x') = \omega(t - t') - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')$.

A função delta pode ser escrita como

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot (x - x')}. \quad (5.5)$$

Substituindo as equações (5.4) e (5.5) na equação (5.2), obtemos

$$\begin{aligned} -k^2 \tilde{G}(k) &= 1 \\ \tilde{G}(k) &= -\frac{1}{k^2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

E de acordo com a (5.4),

$$\begin{aligned} G(x - x') &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{k^2} \\ G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Podemos obter da integral acima soluções com interpretações físicas diferentes. Uma possibilidade será a solução causal, em que o campo num ponto x do espaço será percebido por um observador situado neste mesmo ponto, num tempo t posterior ao tempo t' em que o sinal é gerado na fonte. Outra possibilidade é a solução não-causal, também conhecida como avançada, em que o observador percebe o campo num tempo t anterior ao sinal gerado na fonte, em t' . Há ainda uma solução que mistura as duas anteriores. Estas soluções dependem do modo que escolhemos para resolver a integral (5.7). A escolha da solução apropriada depende da interpretação física que queremos dar ao problema.

Resolveremos a integral (5.7) de modos diferentes. Faremos uso do Teorema dos Resíduos em todos os casos, porém deslocaremos os pólos da integral de modos distintos. Os termos adicionados serão do tipo $\pm i\varepsilon\omega$ - que originarão, em um desses casos, os conhecidos potenciais de Liénard-Wiechert, soluções causais obtidas do eletromagnetismo - e também do tipo $i\varepsilon$ que darão origem à solução misturada, que chamei "mista". Ainda fizemos, na seção seguinte, o estudo das funções de Green de um outro tipo de equação de onda, que envolve um termo massivo.

5.1.1 Função de Green Retardada ou Causal

Faremos primeiramente a integral (5.7) em ω utilizando o Teorema dos Resíduos. Para isto deslocaremos seus pólos adicionando um termo $i\varepsilon\omega$ ao denominador e definiremos a variável complexa $\varpi = \omega + i\omega_1$.

$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 + i\varepsilon\omega = 0.$$

Os pólos agora são

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-i\varepsilon \pm \sqrt{-\varepsilon^2 + 4|\vec{k}|^2}}{2} \\ \omega &= \frac{-i\varepsilon \pm 2|\vec{k}| \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4|\vec{k}|^2}}}{2} \\ \omega &\simeq \frac{-i\varepsilon}{2} \pm |\vec{k}| \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8|\vec{k}|^2}\right) \\ \omega &\simeq \pm |\vec{k}| - \frac{i\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

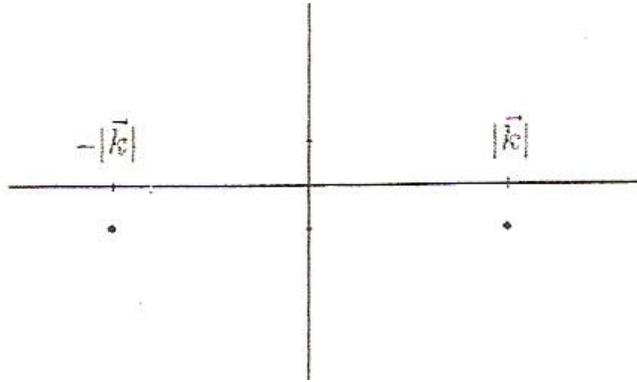


Figura 5.1: Pólos $\varpi \simeq \pm|\vec{k}| - \frac{i\epsilon}{2}$

Se $t - t' < 0$

Para obtermos apenas a integral no eixo real, o contorno de integração é tomado como sendo o semi-círculo superior de raio R , em conjunto com o intervalo do eixo real $[-R, R]$. Ou seja, na região em que $\varpi = \omega + i\omega_i$, $\omega_i > 0$. Ao fazer o raio do contorno ir a infinito a integral no semi-círculo tende a zero e nos sobra apenas a integral no eixo real. Como não há resíduos no interior do contorno, pelo Teorema dos Resíduos¹, a integral total se anula. Com isso a nossa função de Green é nula para $t - t' < 0$.

Se $t - t' > 0$

A integral é feita no semi-círculo inferior de raio R e no intervalo do eixo real $[-R, R]$. Ou seja na região em que $\varpi = \omega - i\omega_i$, $\omega_i > 0$. Fazendos o raio do contorno ir a infinito nos sobra apenas a integral no eixo

¹O teorema dos resíduos nos diz que se $f(z)$ é analítica na região de integração então:

$$\oint dz f(z) = \pm 2\pi i \sum_a Res(f(a)),$$

onde o sinal varia de acordo com o sentido da integração: '-' no horário e '+' no antihorário; a é o valor de z onde ocorrem os pólos dentro da região de integração e

$$Res(f(a)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \right\}.$$

Com m sendo a ordem do pólo. Para pólos de primeira ordem, $m = 1$, temos

$$\sum_a Res(f(a)) = \sum_a \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)].$$

real

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{R \rightarrow \infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2 + i\varepsilon\omega} \\ &= -2i\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum \text{Res.} \end{aligned}$$

a integral acima pode ser reescrita em termos dos pólos como

$$\oint d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega - |\vec{k}| + \frac{i\varepsilon}{2})(\omega + |\vec{k}| + \frac{i\varepsilon}{2})}.$$

e então obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2} = -2i\pi \left(\frac{e^{-i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} - \frac{e^{i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} \right). \quad (5.9)$$

Com isso a integral (5.7) fica

$$\begin{aligned} G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= -\frac{\theta(t-t')}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left(-2i\pi \left(\frac{e^{-i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} - \frac{e^{i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} \right) \right) \\ &= \frac{i\theta(t-t')}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left(\frac{e^{-i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} - \frac{e^{i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} \right). \end{aligned}$$

O elemento de volume $d^3\vec{k}$ pode ser escrito como

$$d^3\vec{k} = |\vec{k}|^2 \theta d\theta d\phi d|\vec{k}|, \quad (5.10)$$

em que θ é o ângulo entre \vec{k} e $\vec{x} - \vec{x}'$. E então

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{i\theta(t-t')}{2(2\pi)^3} \int d\theta d\phi d|\vec{k}| \theta |\vec{k}| e^{i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta} (e^{-i|\vec{k}|(t-t')} - e^{i|\vec{k}|(t-t')}).$$

Podemos reescrever $e^{i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta} \theta |\vec{k}|$ como

$$e^{i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta} \theta |\vec{k}| = \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{e^{i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta}}{(-i)|\vec{x} - \vec{x}'|} \right), \quad (5.11)$$

e então

$$\begin{aligned} &= \frac{i\theta(t-t')}{8\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| e^{-i|\vec{k}|(t-t')} - e^{i|\vec{k}|(t-t')} \int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{e^{i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta}}{(-i)|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &= -\frac{\theta(t-t')}{8\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \int_0^\infty d|\vec{k}| (e^{-i|\vec{k}|(t-t')} - e^{i|\vec{k}|(t-t')}) (e^{-i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'|} - e^{i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'|}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Podemos resolver a integral acima,

$$\int_0^\infty d|\vec{k}| (e^{-i|\vec{k}|((t-t') + |\vec{x}-\vec{x}'|)} - e^{-i|\vec{k}|((t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|)} - e^{i|\vec{k}|((t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|)} + e^{i|\vec{k}|((t-t') + |\vec{x}-\vec{x}'|)}),$$

fazendo a seguinte mudança de variável nos últimos dois termos: $|\vec{k}| = -|\vec{k}'|$. Com isso a expressão acima será

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty d|\vec{k}| e^{-i|\vec{k}|((t-t') + |\vec{x}-\vec{x}'|)} - \int_0^\infty d|\vec{k}| e^{-i|\vec{k}|((t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|)} \\ &+ \int_0^{-\infty} d|\vec{k}'| e^{-i|\vec{k}'|((t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|)} - \int_0^{-\infty} d|\vec{k}'| e^{-i|\vec{k}'|((t-t') + |\vec{x}-\vec{x}'|)} \\ &= \int_{-\infty}^\infty d|\vec{k}| e^{-i|\vec{k}|((t-t') + |\vec{x}-\vec{x}'|)} - \int_{-\infty}^\infty d|\vec{k}| e^{-i|\vec{k}|((t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|)} \\ &= 2\pi(\delta((t-t') + |\vec{x}-\vec{x}'|) - \delta((t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|)). \end{aligned} \quad (5.13)$$

A primeira delta só é diferente de zero em $t = t' - |\vec{x} - \vec{x}'|$, e logo sua contribuição será nula visto que a solução é válida para $t - t' > 0$. Substituindo em (5.12), obtemos

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t')_{ret} = \frac{\theta(t - t')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta((t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|), \quad (5.14)$$

que é a *função de Green retardada* ou *causal*. O sinal é gerado na fonte em um tempo t' e o observador o recebe num tempo $t > t'$. Ela dá origem aos bem conhecidos potenciais de Liénard-Wiechert.

5.1.2 Função de Green Avançada ou Não -Causal

Se adicionarmos ao denominador da integral (5.7) um termo $-i\epsilon\omega$ invés de $i\epsilon\omega$, os pólos se concentrarão dentro do contorno superior e encontraremos solução não nula apenas para $t - t' < 0$. Neste caso o contorno é tomado no sentido horário e a equação (5.9) troca de sinal. A função de Green obtida é

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{\theta(t' - t)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} (-\delta((t - t') + |\vec{x} - \vec{x}'|) + \delta((t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|)). \quad (5.15)$$

A contribuição da segunda delta será sempre nula visto que ela só contribui em $t = t' + |\vec{x} - \vec{x}'|$, e esta solução é válida para $t' > t$.

Obtemos então

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t')_{adv} = \frac{\theta(t' - t)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta((t - t') + |\vec{x} - \vec{x}'|). \quad (5.16)$$

Que ganha o nome de *função de Green avançada* pois o sinal é gerado na fonte num tempo t' posterior ao do observador que o recebe em $t < t'$. Esta função é não-causal.

5.1.3 Função de Green Mista

Agora faremos um outro deslocamento de pólos da integral (5.7).

Deslocaremos os pólos de $i\varepsilon$.

$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 + i\varepsilon = 0$$

Os pólos agora serão

$$\begin{aligned} \omega^2 &= |\vec{k}|^2 - i\varepsilon \\ \omega &= \pm |\vec{k}| \sqrt{1 - i \frac{\varepsilon}{|\vec{k}|^2}} \\ &\simeq \pm |\vec{k}| \left(1 - i \frac{\varepsilon}{2|\vec{k}|^2}\right) \\ &\simeq \pm |\vec{k}| \mp i \frac{\varepsilon}{2|\vec{k}|}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

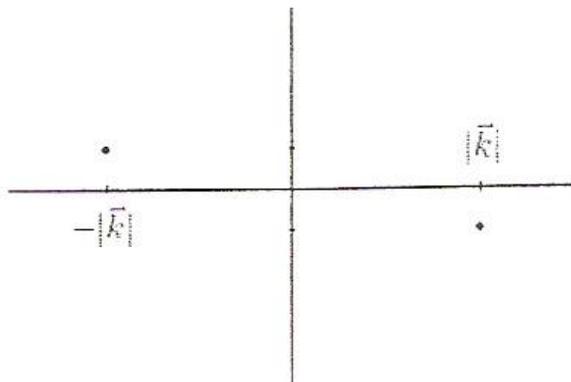


Figura 5.2: Pólos $\omega \simeq \pm |\vec{k}| \mp i \frac{\varepsilon}{2|\vec{k}|}$

Neste caso a integral terá solução não nula tanto para $t - t' > 0$ quanto para $t - t' < 0$. Teremos apenas um resíduo na resolução de cada caso.

Quando $t - t' < 0$

Tomaremos primeiro o contorno superior $\varpi = \omega + i\omega_i$ em que $\omega_i > 0$. Analogamente, a integral no semi-círculo superior vai a zero quando $R \rightarrow \infty$ e nos sobra apenas a integral no eixo real.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2} = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \oint d\varpi \frac{e^{-i\varpi(t-t')}}{\varpi^2 - |\vec{k}|^2 + i\varepsilon}$$

$$= 2i\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum Res.$$

A integral complexa em termos dos pólos fica

$$\oint d\varpi \frac{e^{-i\varpi(t-t')}}{(\varpi - |\vec{k}| + \frac{i\varepsilon}{2|\vec{k}|})(\varpi + |\vec{k}| - \frac{i\varepsilon}{2|\vec{k}|})}.$$

e então ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2} &= 2i\pi \left(-\frac{e^{i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} \right) \\ &= -i\pi \frac{e^{i|\vec{k}|(t-t')}}{|\vec{k}|}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Quando $t - t' > 0$

Tomaremos o contorno inferior, ou seja, $\varpi = \omega - i\omega_i$. Quando $R \rightarrow \infty$ a integral no semi-círculo inferior cai a zero e nos sobra a integral no eixo real.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2} &= -2i\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum Res \\ &= -2i\pi \left(\frac{e^{-i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} \right) \\ &= -i\pi \frac{e^{-i|\vec{k}|(t-t')}}{|\vec{k}|}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Prosseguindo, substituiremos (5.18) e (5.19) na integral (5.7), a saber,

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2}.$$

Obtemos

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = G_1(\vec{x} - \vec{x}', t - t') + G_2(\vec{x} - \vec{x}', t - t'), \quad (5.20)$$

em que

$$G_1(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{\theta(t' - t)}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left(-i\pi \frac{e^{i|\vec{k}|(t-t')}}{|\vec{k}|} \right). \quad (5.21)$$

$$G_2(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{\theta(t - t')}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left(-i\pi \frac{e^{-i|\vec{k}|(t-t')}}{|\vec{k}|} \right). \quad (5.22)$$

Começaremos com a (5.21). Expressando $d^3\vec{k}$ de acordo com (5.10),

$$G_1(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{i\pi\theta(t' - t)}{(2\pi)^3} \int |\vec{k}| \theta d\theta d|\vec{k}| e^{i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos \theta} e^{i|\vec{k}|(t - t')}. \quad (5.23)$$

Usando (5.11),

$$\begin{aligned} G_1(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= \frac{i\theta(t' - t)}{8\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| e^{i|\vec{k}|(t - t')} \int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{e^{i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos \theta}}{(-i)|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &= \frac{-\theta(t' - t)}{8\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \int_0^\infty d|\vec{k}| e^{i|\vec{k}|(t - t')} [e^{i|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'| \cos \theta}]_0^\pi \\ &= \frac{-\theta(t' - t)}{8\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \int_0^\infty d|\vec{k}| (e^{i|\vec{k}|((t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|)} - e^{i|\vec{k}|((t - t') + |\vec{x} - \vec{x}'|)}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

A integral (5.22) é bem parecida com a (5.21), com a diferença de um sinal no expoente do integrando. Como não realizamos nenhuma integração ou derivação em t , basta redefinirmos o sinal de $(t - t')$ e obteremos a integral (5.22), que será

$$G_2(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{-\theta(t - t')}{8\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \int_0^\infty d|\vec{k}| (e^{-i|\vec{k}|((t - t') + |\vec{x} - \vec{x}'|)} - e^{-i|\vec{k}|((t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|)}). \quad (5.25)$$

Usaremos agora que ([4], pg 608)

$$\delta_\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{\pm i\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{2} (\delta(\alpha) \pm \frac{i}{\pi} \wp(\frac{1}{\alpha})), \quad (5.26)$$

onde \wp denota o valor principal.

Obtemos então da (5.24)

$$G_1(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{-\theta(t' - t)}{8\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} [\delta(\Delta t - |\Delta\vec{x}|) + \frac{i}{\pi} \wp(\frac{1}{\Delta t - |\Delta\vec{x}|}) - \delta(\Delta t + |\Delta\vec{x}|) - \frac{i}{\pi} \wp(\frac{1}{\Delta t + |\Delta\vec{x}|})].$$

Em que $\Delta t = t - t'$ e $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}'$. Como neste caso Δt é sempre negativo, nos sobra

$$G_1(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{\theta(t' - t)}{8\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} [\delta(\Delta t + |\Delta\vec{x}|) + \frac{i}{\pi} \wp(\frac{1}{\Delta t + |\Delta\vec{x}|})]. \quad (5.27)$$

Da relação (5.25), obtemos, usando a (5.26),

$$G_2(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{-\theta(t - t')}{8\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} [\delta(\Delta t + |\Delta\vec{x}|) - \frac{i}{\pi} \wp(\frac{1}{\Delta t + |\Delta\vec{x}|}) - \delta(\Delta t - |\Delta\vec{x}|) + \frac{i}{\pi} \wp(\frac{1}{\Delta t - |\Delta\vec{x}|})].$$

Como Δt é sempre positivo nesta solução ,

$$G_2(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{\theta(t - t')}{8\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} [\delta(\Delta t - |\Delta\vec{x}|) - \frac{i}{\pi} \wp(\frac{1}{\Delta t - |\Delta\vec{x}|})]. \quad (5.28)$$

E finalmente a função de Green (5.20) será

$$\begin{aligned} G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= \frac{\theta(t' - t)}{8\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} [\delta(\Delta t + |\Delta\vec{x}|) + \frac{i}{\pi} \wp(\frac{1}{\Delta t + |\Delta\vec{x}|})] \\ &+ \frac{\theta(t - t')}{8\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} [\delta(\Delta t - |\Delta\vec{x}|) - \frac{i}{\pi} \wp(\frac{1}{\Delta t - |\Delta\vec{x}|})]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ela apresenta uma parte causal e outra não-causal.

5.2 Equação de Onda com Termo Massivo

Vamos analisar um outro tipo de equação de onda, que contenha um termo massivo.

5.2.1 Função de Green Retardada

Consideremos a equação

$$(\square + m^2)D(x - x') = \delta^4(x - x'). \quad (5.30)$$

Vamos obter a função de Green retardada, $D(x - x')$, na equação acima. Para isto utilizaremos as definições de sua transformada de Fourier

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot (x - x')}, \quad (5.31)$$

em que $k \cdot (x - x') = \omega(t - t') - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')$, e a da função delta, (5.5). Substituindo-as na equação (5.30), obtemos

$$\begin{aligned} (-k^2 + m^2)\tilde{D} &= 1 \\ \tilde{D} &= \frac{1}{m^2 - k^2}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

lembrando que $k^2 = \omega^2 - |\vec{k}|^2$. Inserindo este resultado na equação (5.31),

$$\begin{aligned} D(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{m^2 - k^2} e^{-ik \cdot (x - x')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega d^3\vec{k} \frac{1}{m^2 - \omega^2 + |\vec{k}|^2} e^{-i\omega(t - t') + i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Podemos notar que o integrando da expressão acima possui pólos

$$\begin{aligned} m^2 - \omega^2 + |\vec{k}|^2 &= 0 \\ \omega &= \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Resolveremos a equação (5.33) analogamente ao primeiro caso: a integral será feita na variável complexa $\varpi = \omega + i\omega_i$. Deslocaremos os pólos adicionando um termo do tipo $i\varepsilon\varpi$ ao denominador, aplicaremos o Teorema dos Resíduos e tomaremos o limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Adicionando o termo $-i\varepsilon\omega$ ao denominador,

$$m^2 - \omega^2 + |\vec{k}|^2 - i\varepsilon\omega = 0.$$

Os pólos serão

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-i\varepsilon \pm \sqrt{-\varepsilon^2 + 4(|\vec{k}|^2 + m^2)}}{2} \\ &= \frac{-i\varepsilon}{2} \pm (|\vec{k}|^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4(|\vec{k}|^2 + m^2)}} \\ &\simeq -\frac{i\varepsilon}{2} \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

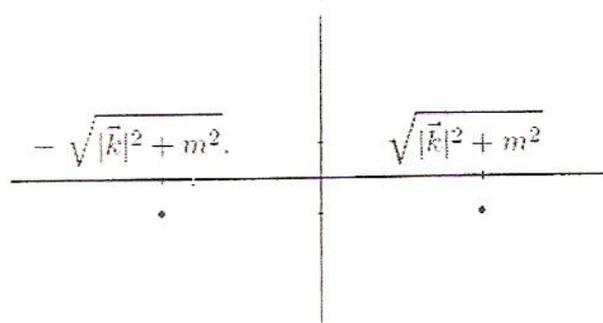


Figura 5.3: Pólos $\varpi \simeq \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} - \frac{i\varepsilon}{2}$

A integral em ω será

$$\int d\varpi \frac{1}{m^2 - \omega^2 + |\vec{k}|^2} e^{-i\omega(t-t') + i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}. \quad (5.36)$$

Se $t - t' < 0$

O contorno de integração tomado neste caso, em que $t - t' < 0$, é o semi-círculo superior em conjunto com o eixo real. A integral no semi-círculo tende a zero no limite $R \rightarrow \infty$ e nos sobra apenas a integral no eixo real. E então , como não há resíduos no interior do contorno de integração ,

$$D(x - x') = 0. \quad (5.37)$$

Portanto não há propagação para $t < t'$, e a função D terá caráter retardado.

Se $t - t' > 0$

O contorno de integração é tomado como o semi-círculo inferior em conjunto com o eixo real. Ao tomarmos o limite $R \rightarrow \infty$ nos sobra apenas a integral real. Podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{-\omega^2 + m^2 + |\vec{k}|^2} &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \oint d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{-\omega^2 - i\varepsilon\omega + m^2 + |\vec{k}|^2} \\ &= -2i\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum Res. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Podemos reescrever a integral na expressão acima em função dos pólos,

$$\oint d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega - \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2 + \frac{i\varepsilon}{2}})(\omega + \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2 + \frac{i\varepsilon}{2}})}.$$

De modo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum Res = \frac{e^{-i\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(t-t')}}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} - \frac{e^{i\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(t-t')}}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}}. \quad (5.39)$$

Substituindo na (5.38),

$$= -2i\pi \left(\frac{e^{-i\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(t-t')}}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} - \frac{e^{i\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(t-t')}}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} \right). \quad (5.40)$$

Com isso a integral (5.33) será

$$D^{ret}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{i\theta(t - t')}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left(\frac{e^{i\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(t-t')} - e^{-i\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(t-t')}}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}} \right). \quad (5.41)$$

Podemos reescrevê-la na seguinte forma quadritensorial, que também deixa explícito o seu caráter atrasado

$$D^{ret}(x) = -\frac{i\theta(x^0)}{(2\pi)^3} \int d^4k \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx}, \quad (5.42)$$

onde k^2 é o quadrivetor de onda, $k^2 = k^{02} - \vec{k}^2$, e $\varepsilon(k^0)$ é conhecida como função "sinal" e ganha os valores

$$\begin{aligned} & 1, \quad \text{se } k^0 > 0, \\ & -1, \quad \text{se } k^0 < 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Estamos usando, na (5.42), o quadrivetor x no lugar de $(x - x')$ para não sobrecarregar a notação. Podemos checar que a equação (5.42) é equivalente à (5.41). Faremos uso da notação $k^0 = \omega$, como temos feito ao longo do estudo, e da seguinte propriedade da função delta,

$$\delta(f(\omega)) = \sum \frac{\delta(\omega - \omega_{\Gamma})}{|f'(\omega)|_{\omega_{\Gamma}}}. \quad (5.44)$$

O somatório acima se refere às raízes ω_{Γ} da função $f(\omega)$. Identificando na integral (5.42) a função $f(\omega)$, temos

$$f(\omega) = \omega^2 - \vec{k}^2 - m^2,$$

que possui raízes,

$$\omega_{\Gamma} = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (5.45)$$

Derivando $f(\omega)$ obtemos

$$f'(\omega) = 2\omega \quad (5.46)$$

e então, usando (5.44)-(5.46),

$$\begin{aligned} \int d^4k \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx} &= \int d\omega d^3k \varepsilon(\omega) \delta(\omega^2 - \vec{k}^2 - m^2) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \\ &= \int d\omega d^3k \varepsilon(\omega) \left(\frac{\delta(\omega - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2})}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta(\omega + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2})}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right) e^{-i\omega t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Ao realizarmos a integral em ω , considerando os valores da função $\varepsilon(\omega)$, (5.43), obtemos

$$\int d^3k \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} (e^{-i\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} t} - e^{i\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} t}), \quad (5.48)$$

que é a integral da expressão (5.41) com o sinal trocado. Assim vemos que a (5.41) e a (5.42) se equivalem.

5.2.2 Função de Green Avançada

A função de Green avançada também é solução da equação de onda (5.30),

$$(\square + m^2)D(x - x') = \delta^4(x - x'). \quad (5.49)$$

Esta solução é obtida fazendo-se um deslocamento de pólos diferente do anterior. Deslocaremos os pólos da integral (5.33) adicionando um termo $i\varepsilon\omega$ ao denominador. Com isso os pólos estarão concentrados dentro

do contorno superior, dando origem a solução não nula apenas para $t - t' < 0$. Como o contorno é tomado no sentido horário a equação (5.38) troca de sinal e a solução avançada deste problema será

$$D^{adv}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{i\theta(t' - t)}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \left(\frac{e^{i\sqrt{|\vec{k}|^2+m^2}(t-t')} - e^{-i\sqrt{|\vec{k}|^2+m^2}(t-t')}}{2\sqrt{|\vec{k}|^2+m^2}} \right). \quad (5.50)$$

Que poderá ser reescrita como

$$D^{adv}(x) = \frac{i\theta(x^{0'})}{(2\pi)^3} \int d^4k \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx}. \quad (5.51)$$

O termo $\theta(x^{0'})$ está denotando $\theta(x^{0'} - x^0)$, evidenciando o caráter adiantado, ou avançado, desta solução .

Capítulo 6

Análises Finais e Perspectivas

A simetria de Lorentz é uma simetria bem estabelecida e verificada na física. No entanto, o aumento na precisão das medidas experimentais tem estimulado os físicos a procurar pequenas violações da teoria da relatividade na busca de uma teoria mais fundamental que o Modelo Padrão, uma teoria que incorpore a Relatividade Geral numa descrição unificada das forças.

Estudamos ao longo deste trabalho uma modificação do eletromagnetismo usual que incorpora a quebra da simetria de Lorentz e preserva a simetria de calibre. Podemos perceber que a introdução do termo de Chern-Simons na Lagrangeana eletromagnética covariante de Maxwell provocou alguns efeitos peculiares, como a diferença de velocidade de propagação dos modos circularmente polarizados de uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo. No limite $k < m$ existe uma instabilidade na teoria visto que surgem táquions, partículas instáveis, consideradas não-físicas por violarem a causalidade; no entanto, a conservação da energia não é afetada. Também notamos que a teoria, na presença de fontes, permite a associação de uma partícula massiva aos campos. A solução para os potenciais exibe uma parte não causal se $p_0^2 = m^2 \neq 0$. Também observamos, no caso estacionário, que mesmo na ausência de fontes há solução não trivial para o campo magnético, apontando um aspecto não físico da teoria. Uma estimativa feita por Jackiw[8] a partir de dados astrofísicos fonece um limite superior $m \leq 1,7 \times 10^{-42} h_0 GeV$, onde h_0 é a constante de Hubble. Os efeitos desta massa seriam manifestos a uma distância maior que a do comprimento de Compton correspondente, traduzindo-se numa distância que é aproximadamente a do horizonte observável, e portanto não seriam observáveis. Deste modo podemos pensar que m de fato seja nula.

Ainda podem ser feitos mais estudos ligados a este tema, como por exemplo analisar como seria modificada a física para espinores na presença do campo de fundo p^α . Uma outra análise interessante seria estudar a teoria considerando a curvatura do espaço-tempo não-nula.

Apêndice A

Vetores e Tensores

Neste apêndice faremos uma extensão de conceitos e propriedades introduzidos no espaço tridimensional para o espaço com quatro dimensões.

Chamaremos de vetor as quantidades x_i que, numa rotação do sistema de coordenadas ou inversão de eixos, transformam-se no espaço $3D$ como:

$$x'_i = a_{ij}x_j. \quad (\text{A.1})$$

onde $i, j = 1, 2, 3$ são índices espaciais. Adotaremos a convenção de Einstein, onde dois índices repetidos subentendem soma. Nestas transformações, o módulo do vetor permanece constante. Isto acarreta uma condição para os coeficientes a_{ij} ,

$$x'_i x'_i = a_{ij} a_{ik} x_j x_k. \quad (\text{A.2})$$

Para que $x'_i x'_i = x_i x_i$, deveremos ter que a_{ij} devem satisfazer a condição :

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad (\text{A.3})$$

que é chamada de "condição de ortogonalidade" e que corresponde à usual definição de matriz ortogonal.

O conceito de tensor é uma generalização da relação (1). Chamam-se tensor de segunda ordem as quantidades T_{ij} que, numa transformação ortogonal do sistema de coordenadas, transformam-se como

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}. \quad (\text{A.4})$$

De modo geral, para um tensor de ordem N , teremos

$$T'_{i_1, i_2, \dots, i_N} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N}. \quad (\text{A.5})$$

O vetor e o escalar são casos particulares de tensor. Vetor é um tensor de ordem 1 e o escalar de ordem zero.

Relembrando duas propriedades dos tensores:

I)O produto de um tensor de ordem N por um tensor de ordem M é um tensor de ordem N+M

II)O produto de um tensor de ordem N, $T_{i_1, i_2 \dots i_N}$ pelo tensor $\delta_{i_j i_k}$, para $j, k \leq N$, é um tensor de ordem N-2. Este processo é chamado contração .

Demostrações

I)

$$\begin{aligned} T'_{i_1, i_2 \dots i_N} S_{j_1, j_2 \dots j_M} &= a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_N k_N} T_{k_1, k_2 \dots k_N} a_{j_1 l_1} a_{j_2 l_2} \dots a_{j_M l_M} S_{l_1, l_2 \dots l_M} \\ &= a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_N k_N} a_{j_1 l_1} \dots a_{j_M l_M} T_{k_1, k_2 \dots k_N} S_{l_1, l_2 \dots l_M}. \end{aligned}$$

Podemos notar que os termos $T_{k_1, k_2 \dots k_N} S_{l_1, l_2 \dots l_M}$ são tensores de ordem $M + N$ pois se transformam de acordo com (5), com $M + N$ coeficientes a_{ij} ;

II)

$$\delta_{i_j i_k} T_{i_1, i_2 \dots i_N} = \delta_{i_j i_k} a_{i_1 l_1} a_{i_2 l_2} \dots a_{i_j l_j} \dots a_{i_k l_k} \dots a_{i_N l_N} T_{l_1, l_2 \dots l_N}.$$

Nesta equação $\delta_{i_j i_k} a_{i_j l_j} a_{i_k l_k} = a_{i_k l_j} a_{i_k l_k} = \delta_{l_j l_k}$, e então

$$\delta_{i_j i_k} T_{i_1, i_2 \dots i_N} = a_{i_1 l_1} a_{i_2 l_2} \dots a_{i_{j-1} l_{j-1}} a_{i_{j+1} l_{j+1}} \dots a_{i_{k-1} l_{k-1}} a_{i_{k+1} l_{k+1}} \dots a_{i_N l_N} \delta_{l_j l_k} T_{l_1, l_2 \dots l_N}.$$

Podemos notar que os termos $\delta_{l_j l_k} T_{l_1, l_2 \dots l_N}$ transformam -se como tensores de ordem $N - 2$ de acordo com (5), com $N - 2$ coeficientes a_{ij} .

A.1 Tensores Simétricos e Anti-Simétricos

Há dois tipos especiais de tensores de ordem dois, que são chamados de simétricos e anti-simétricos, definidos como

$$\text{Tensor simétrico : } T_{ij} = T_{ji}. \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Tensor anti-simétrico : } T_{ij} = -T_{ji}. \quad (\text{A.7})$$

No primeiro caso temos seis elementos independentes: $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$. No segundo apenas três, pois $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$.

Eles nos permitem escrever mais duas propriedades importantes:

(i) Qualquer tensor de ordem dois pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico com um anti-simétrico

$$R_{ij} = \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji}) + \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}). \quad (\text{A.8})$$

O primeiro termo do lado direito é simétrico e o segundo anti-simétrico.

(ii) A contração de um tensor simétrico com um anti-simétrico é nula.

Sejam S_{ij} um tensor simétrico e A_{ij} um anti-simétrico. Analisaremos a contração dos tensores, $S_{ij}A_{ij}$. Permutando os índices de soma e usando as relações (A.6) e (A.7),

$$S_{ij}A_{ij} = S_{ji}A_{ji} = -S_{ij}A_{ij},$$

e logo

$$S_{ij}A_{ij} = 0. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Tensor Delta de Kronecker

O tensor delta de Kronecker, δ_{ij} , é um tensor de segunda ordem, cujas componentes valem

$$\begin{aligned} 0 & \text{ se } i = j, \\ 1 & \text{ se } i \neq j. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.3 Tensor Levi-Civita

O tensor Levi-Civita, ξ_{ijk} , é um tensor de ordem três e é antissimétrico, ou seja, sob permutações de número ímpar de quaisquer índices adjacentes, ocorre troca do sinal. Sob permutações cíclicas o sinal é inalterado,

$$\xi_{123} = \xi_{312} = \xi_{231} = -\xi_{213} = -\xi_{132} = -\xi_{321}.$$

Seus componentes valem

$$\begin{aligned} 1, & \text{ se } (ijk) = (123), (312), (231), \\ -1, & \text{ se } (ijk) = (321), (132), (213), \\ 0, & \text{ se } i = j, i = k, j = k. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Algumas Propriedades dos tensores Levi-Civita

O produto de dois tensores Levi-Civita, definidos em 3 dimensões, é um tensor de ordem 6 e pode ser escrito através dos produtos de 3 deltas de Kronecker, da seguinte forma

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

De onde se obtém

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \quad (\text{A.13})$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}. \quad (\text{A.14})$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6. \quad (\text{A.15})$$

De modo análogo, em 4 dimensões, ele é escrito em termos dos produtos de 4 deltas de Kronecker,

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} = -\det \begin{pmatrix} \delta_{\mu}^{\alpha} & \delta_{\nu}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\alpha} & \delta_{\lambda}^{\alpha} \\ \delta_{\mu}^{\beta} & \delta_{\nu}^{\beta} & \delta_{\rho}^{\beta} & \delta_{\lambda}^{\beta} \\ \delta_{\mu}^{\gamma} & \delta_{\nu}^{\gamma} & \delta_{\rho}^{\gamma} & \delta_{\lambda}^{\gamma} \\ \delta_{\mu}^{\delta} & \delta_{\nu}^{\delta} & \delta_{\rho}^{\delta} & \delta_{\lambda}^{\delta} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

em que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu, \rho, \lambda$ são índices espaço-temporais, variando de 1 a 4. É verificável que

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\delta} = -\det \begin{pmatrix} \delta_{\mu}^{\alpha} & \delta_{\nu}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\alpha} \\ \delta_{\mu}^{\beta} & \delta_{\nu}^{\beta} & \delta_{\rho}^{\beta} \\ \delta_{\mu}^{\gamma} & \delta_{\nu}^{\gamma} & \delta_{\rho}^{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = -2(\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\alpha}\delta_{\mu}^{\beta}). \quad (\text{A.18})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\beta\gamma\delta} = -6\delta_{\mu}^{\alpha}. \quad (\text{A.19})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24. \quad (\text{A.20})$$

A.4 Representações Covariantes e Contravariantes

Seja um vetor do espaço euclidiano tridimensional que, em lugar de denotá-lo por x_i passaremos a fazê-lo convenientemente por x^i . A transformação (A.1) é reescrita

$$x'^i = a^{ij}x^j. \quad (\text{A.21})$$

Desta equação, obtemos

$$a^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}, \quad (\text{A.22})$$

e podemos escrever (22) como

$$x'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}x^j. \quad (\text{A.23})$$

Seja agora um outro vetor, dado pelo gradiente de um campo escalar, isto é, $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$. Podemos escrever

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial\phi}{\partial x^j}. \quad (\text{A.24})$$

Esta relação pode ser vista como o resultado de uma mudança no sistema de coordenadas. Notamos que x^i e $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ transformam-se de maneiras diferentes, mas podemos mostrar que a transformação (A.24) também é ortogonal,

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = (a^{-1})^{ji} (a^{-1})^{ki} = a^{ij} a^{ik} = \delta^{jk}, \quad (\text{A.25})$$

e portanto ambos são vetores. Os vetores que se transformam de acordo (A.23) são ditos contravariantes e são representados com índice em cima; e os que se transformam por (A.24) são ditos covariantes e são representados com índice embaixo.

Observações :

(i) Podemos notar que $\frac{\partial}{\partial x^i}$ é um vetor covariante e por isso ele é representado por ∂_i . O vetor $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é contravariante e é representado por ∂^i .

(ii) O termo covariante possui dois significados, um deles para designar a representação de um vetor e o outro significa "invariância da forma", que também será usado ao longo deste estudo.

(iii) Aplicação a tensores

$$\text{Tensor contravariante} \quad T^{ij}. \quad (\text{A.26})$$

$$\text{Tensor covariante} \quad T_{ij}. \quad (\text{A.27})$$

$$\text{Tensor misto} \quad T_j^i. \quad (\text{A.28})$$

(iv) A Contração de um vetor covariante com um contravariante,

$$x'^i y'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} x^j y_k, \quad (\text{A.29})$$

é invariante; ela representa um produto escalar.

(iv) O relacionamento entre as representações covariante e contravariante, para o caso de vetores definidos através de transformações ortogonais, é simplesmente dado por

$$x_i = \delta_{ij} x^j. \quad (\text{A.30})$$

Apêndice B

Princípio da Mínima Ação

Na mecânica não-relativística um sistema com n graus discretos de liberdade - como por exemplo, uma partícula se movendo em 1, 2 ou 3 dimensões sob ação de uma força - pode ser descrito por coordenadas e velocidades generalizadas, $q_i(t)$ e $\dot{q}_i(t)$, em que $i = 1, 2, \dots, n$. O Lagrangeano L é um funcional¹ de $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$, e talvez do tempo explicitamente, e a ação S é definida como a integral de L no tempo ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema. O Princípio da Mínima Ação afirma que o movimento real de um sistema mecânico é tal que ao sair de uma configuração a no instante t_1 para uma configuração b , no instante t_2 , a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (\text{B.1})$$

é um extremo. Considerando pequenas variações das coordenadas e momentos generalizados, e impondo que $\delta S = 0$, obtêm-se as equações de movimento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Agora examinaremos a descrição Lagrangeana do campo eletromagnético em interação com fontes específicas de carga e corrente. A aproximação Lagrangeana para campos contínuos é bem parecida com descrição usada para partículas pontuais discretas, mas são feitas algumas mudanças. A mais significativa é que a coordenada de posição x não é mais uma coordenada generalizada, ela atua como um índice contínuo para os campos, que são as novas variáveis dinâmicas. A posição no espaço, assim como o tempo, são considerados parâmetros para os campos $\phi(x, t)$. Para cada ponto do espaço-tempo existe um número finito k , de valores deste índice discreto em $\phi_k(x, t)$. De modo que²

$$i \rightarrow x^\alpha, k,$$

¹Dá-se o nome "funcional" a uma função cujo valor é um número e cuja variável independente é uma função .[7]

²Veja [11], capítulos 12 e 13, para uma discussão mais detalhada

$$\begin{aligned}
q_i &\rightarrow \phi_k(x), \\
\dot{q}_i &\rightarrow \partial^\alpha \phi_k(x), \\
L = \sum L_i(q_i, \dot{q}_i) &\rightarrow L = \int \mathbf{L}(\phi_k, \partial^\alpha \phi_k; x, t) d^3 \vec{x},
\end{aligned} \tag{B.2}$$

em que \mathbf{L} é a densidade de Lagrangeano ou Lagrangeana num ponto definido no espaço-tempo. Para o campo eletromagnético, as "coordenadas" e "velocidades" são A^α e $\partial^\beta A^\alpha$. Em geral a ação será da forma,

$$S = \int \int \mathbf{L}(\phi_k, \partial^\alpha \phi_k; x, t) d^3 \vec{x} dt = \int \mathbf{L}(\phi_k, \partial^\alpha \phi_k; x, t) d^4 x. \tag{B.3}$$

Voltaremos agora ao capítulo 4 do nosso estudo.

A Lagrangeana da teoria eletromagnética, aqui representada como L_{EM} , na presença de fontes é dada por [6]:

$$L_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\nu\lambda} F^{\nu\lambda} - 4\pi A_\nu J^\nu. \tag{B.4}$$

A variação da Lagrangeana, δL_{EM} , produzida ao se variar o potencial A^ν por uma quantidade δA^ν é

$$\delta L_{EM} = -\frac{1}{2} F_{\nu\lambda} \delta F^{\nu\lambda} - 4\pi J_\nu \delta A^\nu.$$

Notando que $\delta F^{\nu\lambda} = \partial^\nu \delta A^\lambda - \partial^\lambda \delta A^\nu$, podemos reescrever a expressão acima como

$$\delta L_{EM} = F_{\nu\lambda} \partial^\lambda \delta A^\nu - 4\pi J_\nu \delta A^\nu. \tag{B.5}$$

A variação da ação, δS , devido a uma variação no potencial de δA^ν , será

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_a^b \delta L_{EM} d^4 x \\
&= \int_a^b (F_{\nu\lambda} \partial^\lambda \delta A^\nu - 4\pi J_\nu \delta A^\nu) d^4 x.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Integrando por partes a expressão acima

$$\delta S = [F_{\nu\lambda} \delta A^\nu]_a^b - \int_a^b \partial^\lambda F_{\nu\lambda} \delta A^\nu - 4\pi \int_a^b J_\nu \delta A^\nu d^4 x,$$

como nos extremos do intervalo de integração $\delta A^\nu = 0$,

$$\delta S = - \int_a^b (\partial^\lambda F_{\nu\lambda} + 4\pi J_\nu) \delta A^\nu d^4 x. \tag{B.7}$$

De acordo com o princípio da mínima ação a integral acima deve ser nula. Como δA^ν é arbitrário e assumiremos sua derivada segunda contínua ao longo do intervalo de integração, podemos usar o *Lemma Fundamental do Cálculo das Variações*, que afirma que, se

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0,$$

para quaisquer funções $\eta(x)$ contínuas até a derivada segunda, então $M(x)$ será nula no intervalo (x_1, x_2) . E com uma extensão para mais dimensões deste lemma, obtemos

$$\partial^\lambda F_{\nu\lambda} + 4\pi J_\nu = 0. \quad (\text{B.8})$$

Que corresponde a equação (3.8). Na ausência de fontes obtemos

$$\partial^\lambda F_{\lambda\nu} = 0. \quad (\text{B.9})$$

No capítulo 4 estamos estudando um eletromagnetismo modificado pela presença de um termo a mais, chamado termo de Chern-Simons, na Lagrangeana eletromagnética. Podemos checar o efeito que ele gera nas equações de Maxwell, aplicando novamente o Princípio da Mínima Ação à variação da ação da nova teoria.

A Lagrangeana da teoria modificada é

$$L_{p_\alpha} = -\frac{1}{4}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} - \frac{1}{2}p_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}. \quad (\text{B.10})$$

O termo de Chern-Simons,

$$L_{CS} = -\frac{1}{2}p_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta},$$

sofrerá uma variação, δL_{CS} ao variarmos o potencial A^β por uma quantidade δA^β ,

$$\delta L_{CS} = -\frac{1}{2}p_\alpha (\delta A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} + A_\beta \delta \tilde{F}^{\alpha\beta}).$$

Notando que $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ pode ser escrito como $\tilde{F}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$, temos

$$\begin{aligned} \delta L_{CS} &= -\frac{1}{2}p_\alpha [\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \delta A_\beta + A_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu] \\ &= -\frac{1}{2}p_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} [\partial_\mu A_\nu \delta A_\beta + A_\beta \partial_\mu \delta A_\nu]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

A variação total da densidade de lagrangeano será

$$\delta L_{p_\alpha} = \delta L_{EM} - \frac{1}{2}p_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} [\partial_\mu A_\nu \delta A_\beta + A_\beta \partial_\mu \delta A_\nu].$$

Ao integrarmos a expressão acima, considerando que as variações δA_β são nulas nos extremos do intervalo e tomando p^α constante, obtemos δS_{p_α} ,

$$\begin{aligned} \delta S_{p_\alpha} &= \delta S - \frac{1}{2} \int_a^b p_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu \delta A_\beta - \partial_\mu A_\beta \delta A_\nu) d^4x \\ &= \delta S - \int_a^b p_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \delta A_\beta d^4x. \end{aligned}$$

Em que δS corresponde à equação (B.7). Explicitamente, torna-se

$$\begin{aligned} \delta S_{p_\alpha} &= - \int_a^b (\partial_\beta F^{\alpha\beta} + 4\pi J^\beta) \delta A_\beta d^4x - \int p_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \delta A_\beta d^4x \\ &= - \int_a^b (\partial_\beta F^{\alpha\beta} + 4\pi J^\beta + p_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu A_\nu) \delta A_\beta d^4x. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

e devido ao Princípio da Mínima Ação , analogamente ao caso anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_\beta F^{\alpha\beta} + 4\pi J^\beta + p_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu A_\nu &= 0 \\ -\partial_\beta F^{\beta\alpha} + 4\pi J^\alpha + p_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} &= 0,\end{aligned}\tag{B.13}$$

que é a equação (4.4).

Apêndice C

Conservação do Tensor Energia-Momento

Obteremos a divergência do tensor energia-momento da teoria eletromagnética modificada pelo termo de Chern-Simons na ausência de fontes e na presença de fontes.

C.1 Ausência de Fontes

O tensor energia-momento do eletromagnetismo modificado pelo termo de Chern-Simons, (4.10), é

$$\Theta_p^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}F_\alpha^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{p^\nu}{2}\tilde{F}^{\mu\alpha}A_\alpha.$$

A divergência do tensor $\partial_\mu\theta_p^{\mu\nu}$ é

$$\begin{aligned} \partial_\mu\theta_p^{\mu\nu} = & - F^\nu{}_\alpha\partial_\mu F^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha}\partial_\mu F^\nu{}_\alpha + F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial_\mu g^{\mu\nu}}{4} + \frac{\partial_\mu p^\nu}{2}\tilde{F}^{\mu\alpha}A_\alpha \\ & + \frac{g^{\mu\nu}}{2}F^{\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} + \frac{p^\nu}{2}\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\alpha}A_\alpha + \frac{p^\nu}{2}\tilde{F}^{\mu\alpha}\partial_\mu A_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

O primeiro pode ser reescrito, usando a equação (4.4), $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu + p_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}$, com $J^\nu = 0$, como

$$F^\nu{}_\alpha\partial_\mu F^{\mu\alpha} = F^\nu{}_\alpha p_\mu\tilde{F}^{\mu\alpha}.$$

O terceiro termo é nulo no espaço de Minkowski; o quarto é nulo pois p^ν é uma constante e o sexto se anula devido a identidade de Bianchi, a equação (4.7). Nos sobra:

$$\partial_\mu\theta_p^{\mu\nu} = -F^\nu{}_\alpha p_\mu\tilde{F}^{\mu\alpha} + F^{\alpha\mu}\partial_\mu F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\partial^\nu F_{\alpha\beta} + \frac{p^\nu}{4}\tilde{F}^{\mu\alpha}F_{\mu\alpha}. \quad (\text{C.2})$$

Multiplicando por $F^{\alpha\beta}$ a identidade de Bianchi,

$$\partial_\beta F^\nu{}_\alpha + \partial^\nu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_\beta{}^\nu = 0,$$

obtemos

$$F^{\alpha\beta}\partial_\beta F^\nu{}_\alpha + F^{\alpha\beta}\partial^\nu F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta}\partial_\alpha F_\beta{}^\nu = 0.$$

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta}\partial^\nu F_{\alpha\beta} &= -(F^{\alpha\beta}\partial_\alpha F_\beta{}^\nu + F^{\alpha\beta}\partial_\beta F^\nu{}_\alpha) \\ &= -(F^{\beta\alpha}\partial_\beta F_\alpha{}^\nu + F^{\alpha\beta}\partial_\beta F^\nu{}_\alpha) \\ &= -(F^{\alpha\beta}\partial_\beta F^\nu{}_\alpha + F^{\alpha\beta}\partial_\beta F^\nu{}_\alpha) \\ &= -2F^{\alpha\beta}\partial_\beta F^\nu{}_\alpha. \end{aligned}$$

Com isso vemos que o segundo e terceiro terceiro se anulam.

O primeiro termo

$$\begin{aligned} F^\nu{}_\alpha p_\mu \tilde{F}^{\mu\alpha} &= -\frac{\varepsilon^\nu{}_{\alpha\rho\sigma}}{2} p_\mu \tilde{F}^{\rho\sigma} \frac{\varepsilon^{\mu\alpha}{}_{\beta\gamma}}{2} F^{\beta\gamma} \\ &= -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\rho\sigma} F^{\beta\gamma} p_\mu \varepsilon^\nu{}_{\alpha\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\alpha}{}_{\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \varepsilon^\nu{}_{\alpha\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\alpha}{}_{\beta\gamma} &= \varepsilon^\nu{}_{\sigma\alpha\rho} \varepsilon^\mu{}_{\beta\gamma}{}^\alpha \\ &= -(\delta^{\nu\mu} \delta_{\rho\beta} \delta_{\sigma\gamma} + \delta_\beta^\nu \delta_{\rho\gamma} \delta_\sigma^\mu + \delta_\gamma^\nu \delta_\rho^\mu \delta_{\sigma\beta} - \delta_\beta^\nu \delta_\rho^\mu \delta_{\sigma\gamma} \\ &\quad - \delta^{\nu\mu} \delta_{\rho\gamma} \delta_{\sigma\beta} - \delta_\gamma^\nu \delta_{\rho\beta} \delta_\sigma^\mu), \end{aligned}$$

a relação (C.3) fica

$$\begin{aligned} F^\nu{}_\alpha p_\mu \tilde{F}^{\mu\alpha} &= \frac{1}{4} (p^\nu \tilde{F}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + p_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma} F^\nu{}_\rho + p_\rho \tilde{F}^{\rho\sigma} F_\sigma{}^\nu \\ &\quad - p_\rho \tilde{F}^{\rho\sigma} F^\nu{}_\sigma - p^\nu \tilde{F}^{\rho\sigma} F_{\sigma\rho} - p_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma} F_\rho{}^\nu) \\ &= \frac{1}{2} (p^\nu \tilde{F}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + p_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma} F^\nu{}_\rho + p_\rho \tilde{F}^{\rho\sigma} F_\sigma{}^\nu) \\ &= \frac{1}{2} (p^\nu \tilde{F}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + 2p_\sigma \tilde{F}^{\sigma\rho} F_\rho{}^\nu) \\ &= \frac{1}{4} p^\nu \tilde{F}^{\alpha\mu} F_{\alpha\mu}. \end{aligned}$$

e portanto o primeiro e o quarto termo se cancelam. Obtemos então, na ausência de cargas:

$$\partial_\mu \theta_p^{\mu\nu} = 0. \tag{C.4}$$

O tensor energia-momento da teoria é conservado na ausência de fontes.

C.2 Presença de Fontes

Na presença de fontes, basta considerarmos a equação (4.4) integralmente. Com isso ganhamos um termo a mais que vem do primeiro termo de (C.1),

$$-F^\nu{}_\alpha \partial_\mu F^{\mu\alpha} = -F^\nu{}_\alpha (\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\alpha} + 4\pi J^\alpha).$$

Os outros termos se cancelam igualmente, e obtemos

$$\partial_\mu \theta_p^{\mu\nu} = -4\pi J^\alpha F^\nu{}_\alpha = 4\pi J_\alpha F^{\alpha\nu}. \tag{C.5}$$

Apêndice D

Determinante M Nulo

Aqui vamos desenvolver de modo explícito o caminho da equação (4.26) até a (4.28). Começaremos impondo que o determinante da matriz M da equação (4.26) seja nulo. Deste modo garantimos a existência de solução não trivial para os campos.

Temos, segundo a equação (4.26)

$$M_{ij}E_j = 0.$$

em que

$$M_{ij} = (\omega^2 - k^2)\delta_{ij} + k_i k_j + ip_0 \varepsilon_{ijk} k_k - i\omega \varepsilon_{ijk} p_k. \quad (\text{D.1})$$

Para simplificar os cálculos podemos escolher um referencial em que p^α possua apenas uma componente espacial não nula; a terceira componente por exemplo. Neste referencial

$$p^\alpha = (p^0, 0, 0, (\vec{p})_3). \quad (\text{D.2})$$

Os cálculos serão efetuados no espaço 3D e usaremos como notação :

$$\begin{aligned} (\vec{k})_i &= k_i, \\ (\vec{k})^2 &= k^2, \\ (\vec{p})_i &= p_i. \end{aligned}$$

Os termos de M são

$$\begin{aligned} M_{11} &= \omega^2 - k^2 + k_1^2, \\ M_{12} &= k_1 k_2 + ip_0 k_3 - i\omega \varepsilon_{123} p_3 = k_1 k_2 + ip_0 k_3 - i\omega p_3, \\ M_{13} &= k_1 k_3 + ip_0 \varepsilon_{132} k_2 = k_1 k_3 - ip_0 k_2, \\ M_{21} &= k_2 k_1 + ip_0 \varepsilon_{213} k_3 - i\omega \varepsilon_{213} p_3 \\ &= k_2 k_1 - ip_0 k_3 + i\omega p_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} &= \omega^2 - k^2 + k_2^2, \\
M_{23} &= k_2k_3 + ip_0\varepsilon_{231}k_1 = k_2k_3 + ip_0k_1, \\
M_{31} &= k_3k_1 + ip_0\varepsilon_{312}k_2 = k_3k_1 + ip_0k_2, \\
M_{32} &= k_3k_2 + ip_0\varepsilon_{321}k_1 = k_3k_2 - ip_0k_1, \\
M_{33} &= \omega^2 - k^2 + k_3^2.
\end{aligned}$$

A matriz M será

$$M = \begin{pmatrix} \omega^2 - k^2 + k_1^2 & k_1k_2 + ip_0k_3 - i\omega p_3 & k_1k_3 - ip_0k_2 \\ k_2k_1 - ip_0k_3 + i\omega p_3 & \omega^2 - k^2 + k_2^2 & k_2k_3 + ip_0k_1 \\ k_3k_1 + ip_0k_2 & k_3k_2 - ip_0k_1 & \omega^2 - k^2 + k_3^2 \end{pmatrix}.$$

A seguir calcularemos o determinante de M e imporemos a condição $\det M = 0$.

★ O 1.o termo: $M_{11}M_{22}M_{33}$

$$\begin{aligned}
M_{11}M_{22}M_{33} &= (\omega^2 - k^2 + k_1^2)(\omega^2 - k^2 + k_2^2)(\omega^2 - k^2 + k_3^2) \\
&= (\omega^2 - k^2 + k_1^2)[(\omega^2 - k^2)^2 + (\omega^2 - k^2)k_3^2 + (\omega^2 - k^2)k_2^2 + k_2^2k_3^2] \\
&= (\omega^2 - k^2)^3 + (\omega^2 - k^2)^2k_3^2 + (\omega^2 - k^2)^2k_2^2 + (\omega^2 - k^2)k_2^2k_3^2 + (\omega^2 - k^2)^2k_1^2 \\
&+ (\omega^2 - k^2)k_1^2k_3^2 + (\omega^2 - k^2)k_1^2k_2^2 + k_1^2k_2^2k_3^2 \\
&= (\omega^2 - k^2)^3 + k^2(\omega^2 - k^2)^2 + (\omega^2 - k^2)(k_1^2k_2^2 + k_1^2k_3^2 + k_2^2k_3^2) + k_1^2k_2^2k_3^2.
\end{aligned}$$

★ O 2.o termo: $M_{12}M_{23}M_{31}$

$$\begin{aligned}
M_{12}M_{23}M_{31} &= (k_1k_2 + ip_0k_3 - i\omega p_3)(k_2k_3 + ip_0k_1)(k_3k_1 + ip_0k_2) \\
&= (k_1k_2 + ip_0k_3 - i\omega p_3)(k_1k_2k_3^2 + ip_0k_2^2k_3 + ip_0k_1^2k_3 - p_0^2k_1k_2) \\
&= k_1^2k_2^2k_3^2 + ip_0k_1k_2^3k_3 + ip_0k_1^3k_2k_3 - p_0^2k_1^2k_2^2 + ip_0k_1k_2k_3^3 - p_0^2k_2^2k_3^2 - p_0^2k_1^2k_3^2 \\
&- ip_0^3k_1k_2k_3 - i\omega p_3k_1k_2k_3^2 + \omega p_0p_3k_2^2k_3 + \omega p_0p_3k_1^2k_3 + i\omega p_0^2p_3k_1k_2 \\
&= k_1^2k_2^2k_3^2 + ip_0k_1k_2k_3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - p_0^2(k_1^2k_2^2 + k_1^2k_3^2 + k_2^2k_3^2) - ip_0^3k_1k_2k_3 \\
&- i\omega p_3k_1k_2k_3^2 + \omega p_0p_3(k_1^2k_3 + k_2^2k_3) + i\omega p_0^2p_3k_1k_2.
\end{aligned}$$

★ O 3.o termo: $M_{13}M_{21}M_{32}$

$$\begin{aligned}
M_{13}M_{21}M_{32} &= (k_1k_3 - ip_0k_2)(k_2k_1 - ip_0k_3 + i\omega p_3)(k_3k_2 - ip_0k_1) \\
&= (k_2k_1 - ip_0k_3 + i\omega p_3)(k_1k_2k_3^2 - ip_0k_1^2k_3 - ip_0k_2^2k_3 - p_0^2k_1k_2) \\
&= k_1^2k_2^2k_3^2 - ip_0k_1^3k_2k_3 - ip_0k_1k_2^3k_3 - p_0^2k_1^2k_2^2 - ip_0k_1k_2k_3^3 - p_0^2k_1^2k_3^2 - p_0^2k_2^2k_3^2 \\
&+ ip_0^3k_1k_2k_3 + i\omega p_3k_1k_2k_3^2 + \omega p_0p_3k_1^2k_3 + \omega p_0p_3k_2^2k_3 - i\omega p_0^2p_3k_1k_2 \\
&= k_1^2k_2^2k_3^2 - ip_0k_1k_2k_3(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - p_0^2(k_1^2k_2^2 + k_1^2k_3^2 + k_2^2k_3^2) + ip_0^3k_1k_2k_3 \\
&+ i\omega p_3k_1k_2k_3^2 + \omega p_0p_3(k_1^2k_3 + k_2^2k_3) - i\omega p_0^2p_3k_1k_2.
\end{aligned}$$

A soma parcial destes três primeiros termos nos fornece

$$\begin{aligned}
&= (\omega^2 - k^2)[(\omega^2 - k^2)^2 + (\omega^2 - k^2)k^2 + k_1^2k_2^2 + k_1^2k_3^2 + k_2^2k_3^2] \\
&+ 3k_1^2k_2^2k_3^2 - 2p_0^2(k_1^2k_2^2 + k_1^2k_3^2 + k_2^2k_3^2) + 2\omega p_0 p_3(k_1^2k_3 + k_2^2k_3).
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Os próximos três termos são

★ O 4.o termo: $-M_{13}M_{22}M_{31}$

$$\begin{aligned}
-M_{13}M_{22}M_{31} &= -(k_1k_3 - ip_0k_2)(\omega^2 - k^2 + k_2^2)(k_3k_1 + ip_0k_2) \\
&= -(\omega^2 - k^2 + k_2^2)(k_1^2k_3^2 + p_0^2k_2^2) \\
&= -(\omega^2 - k^2)k_1^2k_3^2 - (\omega^2 - k^2)p_0^2k_2^2 - k_1^2k_2^2k_3^2 - p_0^2k_2^4.
\end{aligned}$$

★ O 5.o termo: $-M_{11}M_{32}M_{23}$

$$\begin{aligned}
-M_{11}M_{32}M_{23} &= -(\omega^2 - k^2 + k_1^2)(k_3k_2 - ip_0k_1)(k_2k_3 + ip_0k_1) \\
&= -(\omega^2 - k^2 + k_1^2)(k_2^2k_3^2 + p_0^2k_1^2) \\
&= -(\omega^2 - k^2)k_2^2k_3^2 - (\omega^2 - k^2)p_0^2k_1^2 - k_1^2k_2^2k_3^2 - p_0^2k_1^4.
\end{aligned}$$

★ O 6.o termo: $-M_{33}M_{21}M_{12}$

$$\begin{aligned}
-M_{33}M_{21}M_{12} &= -(\omega^2 - k^2 + k_3^2)(k_1k_2 - ip_0k_3 + i\omega p_3)(k_1k_2 + ip_0k_3 - i\omega p_3) \\
&= -(\omega^2 - k^2 + k_3^2)(k_1^2k_2^2 + (p_0k_3 - \omega p_3)^2) \\
&= -(\omega^2 - k^2)k_1^2k_2^2 - (\omega^2 - k^2)(p_0^2k_3^2 - 2\omega p_0 p_3 k_3 + \omega^2 p_3^2) - k_1^2k_2^2k_3^2 \\
&- p_0^2k_3^4 + 2\omega p_0 p_3 k_3^3 - \omega^2 p_3^2 k_3^2.
\end{aligned}$$

A soma parcial destes três termos resulta

$$\begin{aligned}
&= -(\omega^2 - k^2)(k_1^2k_2^2 + k_1^2k_3^2 + k_2^2k_3^2) - (\omega^2 - k^2)p_0^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - p_0^2(k_1^4 + k_2^4 + k_3^4) \\
&+ 2\omega p_0 p_3 k_3(\omega^2 - k^2 + k_3^2) - \omega^2 p_3^2(\omega^2 - k^2 + k_3^2) - 3k_1^2k_2^2k_3^2.
\end{aligned} \tag{D.4}$$

O determinante de M é igual a (D.3) + (D.4)

$$\begin{aligned}
\det M &= (\omega^2 - k^2)^3 + (\omega^2 - k^2)^2 k^2 - p_0^2(2k_1^2k_1^2 + 2k_1^2k_3^2 + 2k_2^2k_3^2 + k_1^4 \\
&+ k_2^4 + k_3^4) + 2\omega p_0 p_3 k_3 \omega^2 - \omega^2 p_3^2(\omega^2 - k^2 + k_3^2) - k^2(\omega^2 - k^2)p_0^2.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
k^4 &= (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^2 \\
&= k_1^4 + 2k_1^2(k_2^2 + k_3^2) + k_2^4 + 2k_2^2k_3^2 + k_3^4 \\
&= k_1^4 + k_2^4 + k_3^4 + 2(k_1^2k_2^2 + k_2^2k_3^2 + k_1^2k_3^2),
\end{aligned}$$

podemos reescrever o $\det M$ como

$$\begin{aligned}
\det M &= (\omega^2 - k^2)^3 + (\omega^2 - k^2)^2k^2 - p_0^2k^4 + 2\omega p_0 p_3 k_3 \omega^2 - \omega^2 p_3^2 (\omega^2 - k^2 + k_3^2) - p_0^2 k^2 (\omega^2 - k^2) \\
&= (\omega^2 - k^2)^3 + (\omega^2 - k^2)^2 k^2 + 2\omega p_0 p_3 k_3 \omega^2 - \omega^2 p_3^2 (\omega^2 - k^2 + k_3^2) - p_0^2 k^2 \omega^2.
\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos da expressão acima nos fornece

$$(\omega^2 - k^2)^3 + (\omega^2 - k^2)^2 k^2 = \omega^2 (\omega^2 - k^2)^2. \quad (\text{D.6})$$

Os restantes podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}
&= \omega^2 (2\omega p_0 p_3 k_3 - p_3^2 k_3^2) - \omega^4 p_3^2 + \omega^2 k^2 p_3^2 - \omega^2 p_0^2 k^2 \\
&= \omega^2 [-(\omega p_0 - k_3 p_3)^2 + \omega^2 p_0^2] - \omega^4 p_3^2 + \omega^2 k^2 (p_3^2 - p_0^2) \\
&= \omega^2 [-(\omega p_0 - k_3 p_3)^2 + \omega^2 (p_0^2 - p_3^2)] + \omega^2 k^2 (p_3^2 - p_0^2) \\
&= \omega^2 [-(\omega p_0 - k_3 p_3)^2 + (\omega^2 - k^2)(p_0^2 - p_3^2)].
\end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

O $\det M = (\text{D.6}) + (\text{D.7})$ deve ser nulo, com isso

$$\begin{aligned}
\omega^2 (\omega^2 - k^2)^2 + \omega^2 [-(\omega p_0 - k_3 p_3)^2 + (\omega^2 - k^2)(p_0^2 - p_3^2)] &= 0 \\
(\omega^2 - k^2)^2 + (\omega^2 - k^2)(p_0^2 - p_3^2) - (\omega p_0 - k_3 p_3)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Esta relação em termos dos quadrivetores k^α e p^α é escrita como

$$(k^\alpha k_\alpha)^2 + (k^\alpha k_\alpha)(p^\beta p_\beta) = (k^\alpha p_\alpha)^2,$$

que é a equação (4.27).

Vamos encontrar a sua forma (4.28), partindo de

$$(\omega^2 - k^2)^2 + (\omega^2 - k^2)(p_0^2 - p^2) = (\omega p_0 - k p \cos \theta)^2, \quad (\text{D.8})$$

em que θ é o ângulo entre os vetores \vec{k} e \vec{p} . O termo da direita

$$\begin{aligned}
(\omega p_0 - k p \cos \theta)^2 &= \omega^2 p_0^2 - 2\omega k p_0 p \cos \theta + k^2 p^2 \cos^2 \theta \\
&= (\omega^2 - k^2)p_0^2 + k^2 p_0^2 + (k^2 - \omega^2)p^2 \cos^2 \theta + \omega^2 p^2 \cos^2 \theta - 2\omega k p_0 p \cos \theta \\
&= (\omega^2 - k^2)(p_0^2 - p^2 \cos^2 \theta) + (k p_0 - \omega p \cos \theta)^2;
\end{aligned}$$

com isto, a equação (D.8) fica:

$$\begin{aligned}
(\omega^2 - k^2)^2 &= (\omega p_0 - k p \cos \theta)^2 - (\omega^2 - k^2)(p_0^2 - p^2) \\
&= (\omega^2 - k^2)(p_0^2 - p^2 \cos^2 \theta) + (k p_0 - \omega p \cos \theta)^2 - (\omega^2 - k^2)(p_0^2 - p^2) \\
&= (\omega^2 - k^2)(p^2 - p^2 \cos^2 \theta) + (k p_0 - \omega p \cos \theta)^2 \\
&= (k p_0 - \omega p \cos \theta)^2 \left[1 + \frac{(\omega^2 - k^2)p^2 \sin^2 \theta}{(k p_0 - \omega p \cos \theta)^2} \right] \\
\omega^2 - k^2 &= \pm (k p_0 - \omega p \cos \theta) \left[1 + \frac{(\omega^2 - k^2)p^2 \sin^2 \theta}{(k p_0 - \omega p \cos \theta)^2} \right]^{1/2},
\end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

que é a equação (4.28). Podemos obter as velocidades de grupo dos dois modos polarizados, na expressão (4.29), a partir da equação (D.8). Vamos diferenciá-la,

$$2(\omega^2 - k^2)(2\omega d\omega - 2kdk) + (p_0^2 - p^2)(2\omega d\omega - 2kdk) - 2(\omega p_0 - kp \cos \theta)(p_0 d\omega - p \cos \theta dk) = 0.$$

Desprezando os termos de $O(p^2)$,

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2)(\omega d\omega - kdk) &= 0 \\ \frac{d\omega}{dk} &= \frac{\omega}{k} = 1 \end{aligned} \tag{D.10}$$

Vemos que a velocidade de grupo que antes era 1 (estamos usando $c=1$), ao considerarmos o efeito do vetor de fundo p^α , sofre alteração por um fator da ordem de $O(p^2)$, produzindo duas velocidades de propagação diferentes.

Apêndice E

Operadores Longitudinais e Transversais

Segundo o Teorema de Helmholtz todo vetor pode ser decomposto na soma de dois vetores, um que tem divergência nula e outro que tem o seu rotacional nulo.

$$\vec{A} = \vec{X} + \vec{Y}, \quad (\text{E.1})$$

tal que $\vec{\nabla} \times \vec{X} = \vec{0}$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{Y} = 0$.

Temos então que \vec{X} pode ser escrito como um gradiente de uma função escalar e \vec{Y} como o rotacional de um vetor.

$$\vec{A} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\chi}. \quad (\text{E.2})$$

O sinal negativo é introduzido por conveniência. Podemos fazer uma transformação de calibre, $\vec{\chi} \rightarrow \vec{\chi} + \vec{\nabla}\alpha$, de modo que o nosso vetor $\vec{\chi}$ possua divergência nula com uma escolha apropriada de α .

Vamos expressar agora ϕ e $\vec{\chi}$ em termos dos operadores

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= -\nabla^2 \phi \\ \phi &= -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\nabla^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\chi} \\ &= -\nabla^2 \vec{\chi} \\ \vec{\chi} &= -\frac{\vec{\nabla} \times \vec{A}}{\nabla^2}, \end{aligned}$$

onde $(\nabla^2)^{-1} = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$, ou seja, é a função de Green do operador ∇^2 ,

$$\nabla^2 G(\vec{x} - \vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'),$$

e existe uma integral implícita nas expressões acima. Explicitamente a função ϕ se escreve como:

$$\phi = - \int d^3 \vec{x}' \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \nabla' \cdot \vec{A}(t, \vec{x}'),$$

e o vetor $\vec{\chi}$ como

$$\vec{\chi} = - \int d^3 \vec{x}' \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \nabla' \times \vec{A}(t, \vec{x}').$$

Finalmente podemos reescrever \vec{A} , usando a notação dos operadores, como

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\nabla^2} - \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} \times \vec{A}}{\nabla^2},$$

ou em componentes

$$\begin{aligned} A_i &= \partial_i \frac{\partial_j A_j}{\nabla^2} - \frac{\partial_i \partial_j A_j - \nabla^2 A_i}{\nabla^2} \\ &= \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} A_j + A_i - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} A_j \\ &= \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} A_j + (\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}) A_j \\ &= \omega_{ij} A_j + \theta_{ij} A_j, \end{aligned} \tag{E.3}$$

em que definimos $\omega_{ij} := \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}$ e $\theta_{ij} := \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}$.

Notamos que $\theta_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij}$ de modo que

$$\theta_{ij} + \omega_{ij} = \delta_{ij}. \tag{E.4}$$

Outras propriedades importantes que podemos obter são

$$\omega_{ij} \omega_{jk} = \omega_{ik}. \tag{E.5}$$

$$\theta_{ij} \theta_{jk} = \theta_{ik}. \tag{E.6}$$

$$\omega_{ij} \theta_{jk} = 0. \tag{E.7}$$

$$\theta_{ij} \omega_{jk} = 0. \tag{E.8}$$

Com estas propriedades e comparando as equações (E.3) e (E.2) percebemos que θ e ω são operadores ortogonais de projeção. O operador ω projeta um vetor em sua parte longitudinal, que possui rotacional nulo, e θ projeta em sua parte transversa, que possui divergência nula.

Demonstrações

A equação (E.5)

$$\omega_{ij} \omega_{jk} = \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \frac{\partial_j \partial_k}{\nabla^2} = \frac{\partial_i \nabla^2 \partial_k}{\nabla^2 \nabla^2} = \frac{\partial_i \partial_k}{\nabla^2} = \omega_{ik}.$$

A equação (E.6)

$$\theta_{ij}\theta_{jk} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\left(\delta_{jk} - \frac{\partial_j\partial_k}{\nabla^2}\right) = \delta_{ik} - \frac{\partial_i\partial_k}{\nabla^2} - \frac{\partial_i\partial_k}{\nabla^2} + \frac{\partial_i\partial_k}{\nabla^2} = \theta_{ik}.$$

A equação (E.7)

$$\omega_{ij}\theta_{jk} = \omega_{ij}(\delta_{jk} - \omega_{jk}) = \omega_{ik} - \omega_{ik} = 0.$$

A equação (E.8)

$$\theta_{ij}\omega_{jk} = (\delta_{ij} - \omega_{ij})\omega_{jk} = \omega_{ik} - \omega_{ik} = 0.$$

Para achar o propagador que estamos procurando no capítulo 4, precisaremos definir um outro operador:

$$S_{ij} = \varepsilon_{ijm}\partial_m. \quad (\text{E.9})$$

Suas propriedades são

$$\begin{aligned} S_{ij}\omega_{jk} &= \varepsilon_{ijm}\partial_m \frac{\partial_j\partial_k}{\nabla^2} \\ &= \varepsilon_{ijm} \frac{\partial_m\partial_j\partial_k}{\nabla^2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

O mesmo acontece para $\omega^{ij}S_{jk}$.

$$S_{ij}\theta_{jk} = S_{ij}(\delta_{jk} - \omega_{jk}) = S_{ik}. \quad (\text{E.11})$$

O mesmo acontece para $\theta^{ij}S_{jk}$.

$$\begin{aligned} S_{ij}S_{jk} &= \varepsilon_{ijm}\partial_m\varepsilon_{jkl}\partial_l \\ &= -\varepsilon_{jim}\varepsilon_{jkl}\partial_m\partial_l \\ &= -(\delta_{ik}\delta_{ml} - \delta_{il}\delta_{mk})\partial_m\partial_l \\ &= -\delta_{ik}\nabla^2 + \partial_i\partial_k \\ &= -\nabla^2(\delta_{ik} - \frac{\partial_i\partial_k}{\nabla^2}) = -\nabla^2\theta_{ik}. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Com estas propriedades já poderemos simplificar a obtenção da função de Green do nosso problema. Podemos montar a seguinte tabela para consulta

$$\begin{aligned} \theta^2 &= \theta. \\ \omega^2 &= \omega. \\ \theta\omega &= \omega\theta = 0. \\ \theta S &= S\theta = S. \\ \omega S &= S\omega = 0. \\ S^2 &= -\nabla^2\theta. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Bibliografia

- [1] T. Costa Soares - Tese de doutorado do CBPF, 2006: "*Violação da Simetria de Lorentz: Resultados Recentes e Aplicações a Mecânica Quântica*"
- [2] H. Belich - Tese de doutorado do CBPF, 2006: "*Quebra de Lorentz em Teorias de Gauge: Aplicações a Fenômenos Planares e Consequências da Supersimetria*"
- [3] H. Belich, T. Costa-Soares, M.A. Santos e M.T.D. Orlando, Rev. Brasileira de Ensino de Física, v. 29, p.57 (2007) "*Violação da Simetria de Lorentz*"
- [4] N.N.Bogoliubov and D.V.Shirkoff - **Introduction to the Theory of Quantized Fields**, ed. Interscience
- [5] Resnick, R. - **Introdução a Relatividade Especial**, São Paulo: Polígono, 1971
- [6] Jackson, John David - **Classical Electrodynamics**, 3. ed. New York: John Wiley Sons, Inc., 1999
- [7] Marcus Venício C.P. - apostilas e notas de aula dos cursos Mecânica Clássica 1 e 2, Rio de Janeiro: UFRJ, 2005
- [8] R.Jackiw, M. Carrol e B. Field, Phys. Rev. D41, 1231 (1990), "*Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics*"
- [9] Barcelos Neto, J. - **Fundamentos de Relatividade Especial**, Rio de Janeiro: UFRJ
- [10] Butkov, E. - **Física Matemática**, Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1968
- [11] Goldstein H. - **Classical Mechanics**, 3. ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2002
- [12] Rafael Ferraro - **Anais da V Escola do CBPF**, Vol1, Rio de Janeiro: CBPF, 2005
- [13] Landau, L. D.; Lifshits, E. M. **The classical theory of fields**, 4. ed. Oxford: Pergamon Press, 1975
- [14] John D. Barrow and John K. Webb - Scientific American(Brasil)38, 28(2005)
- [15] Alan Kostelecky and Matthew Mewes, Phys. Rev. Lett. 99, 011601 (2007), "*Lorentz-Violating Electrodynamics and the Cosmic Microwave Background*"
- [16] Don Colladay, V. Alan Kostelecky, Phys. Rev. D58, 116002 (1998), "*Lorentz violating extension of the standard model*"
- [17] R. Jackiw, arXiv: 0709.2348 [hep-th], "*Lorentz violation in a diffeomorphism-invariant theory*"
- [18] R. Jackiw, S.Y. Pi, Phys. Rev. D68, 104012 (2003), "*Chern-Simons modification of general relativity*"
- [19] V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D69, 105009 (2004), "*Gravity, Lorentz violation, and the standard model*"
- [20] V.A. Kostelecky, J. Tasson, Phys. Rev. Lett. 102, 010402 (2009), "*Prospects for Large Relativity Violation in Matter-Gravity Couplings*"
- [21] J.L. Boldo, J.A. Helayl-Neto, L.M. de Moraes, C.A.G. Sasaki, V.J. Vasquez Otoya, arXiv:0903.5207[hep-th], "*Graviton Excitations and Lorentz-Violating Gravity with Cosmological Constant*"
- [22] V.A. Kostelecky, M. Mewes, arXiv 0905.0031 [hep-ph], "*Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension*"
- [23] A.P.B. Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, Eur. Phys. J. C56, 571 (2008), "*Gauge invariance and the CPT and Lorentz violating induced Chern-Simons-like term in extended QED*"
- [24] V.A. Kostelecky, Ralf Lehnert, Phys. Rev. D63, 065008 (2001), "*Stability, causality, and Lorentz and CPT violation*"
- [25] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., J.S. Rodrigues, Phys. Rev. D78, 125013 (2008), "*Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy*"

- [26] V.A. Kostelecky, T. Katori, Phys. Rev. D74, 105009 (2006), "*Global three-parameter model for neutrino oscillations using Lorentz violation*"
- [27] V.A. Kostelecky, M. Mewes, Phys. Rev. D70, 031902 (2004), "*Lorentz and CPT violation in the neutrino sector*"
- [28] V.A. Kostelecky, M. Mewes, Phys. Rev. D69, 016005 (2004), "*Lorentz and CPT violation neutrinos*"
- [29] V.A. Kostelecky, M. Mewes, Phys. Rev. Lett. 97, 140401 (2006), "*Sensitive polarimetric search for relativity violations in gamma-ray bursts*"
- [30] O. Bertolami, Lect. Notes Phys. 633, 96 (2003) e hep-ph/0301191, "*Threshold Effects and Lorentz Symmetry*"
- [31] O. Bertolami, R. Lehnert, R. Potting, A. Ribeiro, Phys. Rev. D69, 083513 (2004), "*Cosmological acceleration, varying couplings, and Lorentz breaking*"
- [32] V.A. Kostelecky, M. Mewes, Phys. Rev. Lett. 87, 251304 (2001), "*Cosmological constraints on Lorentz violation in electrodynamics*"
- [33] V.A. Kostelecky, R. Lehnert, M. J. Perry, Phys. Rev. D68, 123511 (2003), "*Spacetime varying couplings and Lorentz violation*"