



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Instituto de Geociências
Departamento de Astronomia



BREVE INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA
EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES,
COM EXEMPLOS DE APLICAÇÕES COSMOLÓGICAS

VERÔNICA DA SILVA HUZIWARA (OV/UFRJ)

ALEXANDRE LYRA DE OLIVEIRA (ORIENTADOR - OV/ UFRJ)

PROJETO DE FINAL DE CURSO PARA A
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE ASTRÔNOMO

1999

AGRADECIMENTOS

É com muito orgulho e prazer que apresento esta monografia como projeto final do curso de Astronomia da UFRJ. Espero que esta seja apenas o início de muitas outras e que sirva de singela introdução e motivação a aqueles que se interessarem pelo tema.

Das muitas pessoas que colaboraram com esta monografia, agradeço especialmente ao meu orientador, Prof. Alexandre Lyra de Oliveira, que me abriu as portas para o estudo da topologia, além de outros temas também interessantes e atuais. Agradeço também por todos os 'papos' e conversas a respeito da vida acadêmica e profissional, além de todos os 'corre-corres' que tivemos que enfrentar para terminar esta monografia.

Agradeço também ao Prof. Marcelo J. Rebouças e Prof. Germán I. Gomero, que gentilmente aceitaram participar da banca em condições curtas de tempo para avaliar minha monografia. A vocês, pelos 'papos' e revisões, o meu muito obrigada.

Agradecimentos também a todos os amigos, colegas, professores e funcionários do Observatório do Valongo, que sempre me deram apoio e incentivo nos momentos mais difíceis. Vocês são muitos, e deixo a cargo de seus corações serem reconhecidos neste singelo agradecimento, porque pessoas especiais ficam no coração para sempre.

Agradeço especialmente a Elon M. de Sá, um amigo e companheiro que sempre me apoiou nos momentos mais difíceis, sempre tendo uma palavra de carinho e de filosofia.

Agradecimentos aos meus queridos pais, Eurico e Tamar, por todo o apoio e amor dedicados a mim, fazendo sempre de tudo para que eu pudesse continuar a sonhar e tornar meus sonhos realidade. A vocês, eu dedico esta monografia.

A todos vocês, o meu muito obrigada.

RESUMO

Pretende-se fazer uma descrição de superfícies compactas para visualizar espaços tridimensionais. Baseados nesta compreensão apresentaremos a classificação de triviedades compactas de Thurston. Ressaltaremos a importância atual na cosmologia de que os Universos de Friedmann podem ser compactos independentemente da geometria assumida.

ABSTRACT

We intend to describe compact surfaces to visualize three-dimensional spaces. With this understanding we exhibit the Thurston's classification of the compact three-manifolds. We emphasize the current significance in cosmology that the Friedmann's Universes could be compact irrespective of the assumed geometry.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
ÍNDICE	iv
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1: SUPERFÍCIES	2
1.1 Introdução	2
1.2 Superfície esférica S^2	8
1.3 Toro T^2	11
1.4 Faixa de Möbius	16
1.5 Garrafa de Klein K^2	18
1.6 Plano projetivo P^2	20
1.7 A faixa de Möbius novamente	22
1.8 Resumo	25
CAPÍTULO 2: VARIEDADES TRIDIMENSIONAIS	27
2.1 Introdução	27
2.2 Variedades tridimensionais compactas localmente homogêneas e isotrópicas	29
2.3 Variedades de configuração	37
CAPÍTULO 3: PRODUTOS	42
CAPÍTULO 4: A CLASSIFICAÇÃO DE THRUSTON	46
CONCLUSÃO	53
REFERÊNCIAS	57

INTRODUÇÃO

Um dos objetivos desta monografia sobre topologia é tornar evidente a existência de espaços tridimensionais compactos.

Nos baseamos na maior parte do texto no livro "The Shape of Space" de Jeffrey R. Weeks [1]. Contudo, utilizamos também figuras e a elaboração desenvolvida em [2].

Gostaríamos que este trabalho pudesse evidenciar melhor que topologias são admissíveis no Modelo Cosmológico Padrão. No artigo "The Mathematics of Three-Dimensional Manifolds" de W. P. Thurston e J. R. Weeks [3] este problema é colocado referindo-se aos equívocos existentes no assunto. Um deles é que se o universo é finito, sua geometria é obrigatoriamente a elítica, e se ele tem a geometria hiperbólica ou euclidiana é obrigatoriamente infinito. Veremos ao longo desta monografia exemplos de espaços que localmente admitem a geometria hiperbólica (ou a euclidiana) e que são finitos, logo, violariam essa "regra". Além disso, a terminologia muitas vezes utilizada de que os universos elíticos são *fechados* (no sentido de compactos, ou seja finitos) e os euclidianos ou hiperbólicos são *abertos* (no sentido de não compactos, ou infinitos) ajudam à não elucidação do problema.

Alguns trabalhos foram pioneiros nesta área, como o de G. F. R. Ellis, "Topology and Cosmology" [4], onde descreve modelos de universo hiperbólicos e euclidianos finitos. Além deste, e mais direcionado aos astrônomos, temos o trabalho de D. D. Sokolov e V. F. Shvartsman, "An estimate of the size of the universe from a topological point of view" [5], onde inclusive são feitas recomendações aos astrônomos observacionais no estudo da topologia do universo.

Inicialmente de uma maneira simples, sem utilizar recursos matemáticos complexos, procuraremos descrever as topologias em duas dimensões. Com uma certa intuição adquirida, tentaremos então visualizar os espaços homogêneos compactos de três dimensões.

Capítulo 1

SUPERFÍCIES

1.1 Introdução

As *superfícies* nas quais estaremos interessados são aquelas que não exibem descontinuidades bruscas (por exemplo, buracos, somente um ponto ligando duas regiões, etc., ver figura 1.1), e que são suaves (não há “pontas” ou “vales” abruptos). Tais superfícies foram estudadas exaustivamente no século passado, sendo, portanto, bastante conhecidas. Abordaremos a superfície esférica S^2 , o toro T^2 , a faixa de Möbius, a garrafa de Klein K^2 e o plano projetivo P^2 .

Nosso maior interesse é a obtenção de uma intuição que nos permita vislumbrar propriedades globais dos espaços bidimensionais e que serão estendidas, no capítulo 2, para os espaços tridimensionais.

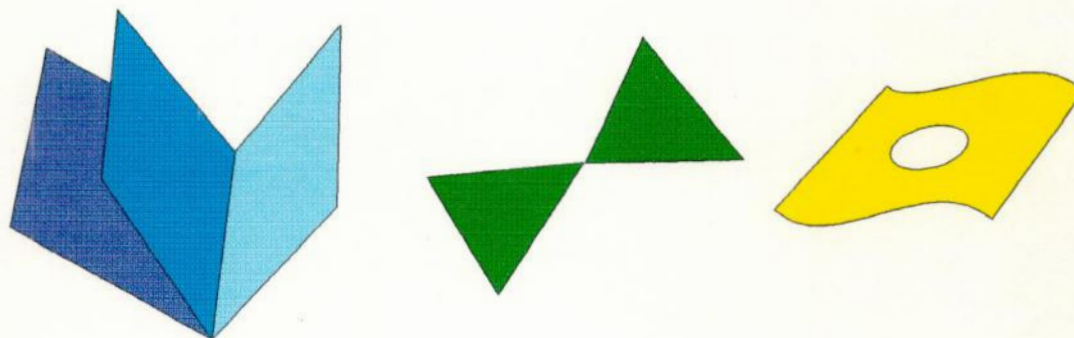


Figura 1.1 - Exemplos de superfícies não-válidas: superfícies com "folhas", superfícies com apenas um ponto ligando duas regiões, superfícies perfuradas.

Imaginemos uma superfície que seja feita de um material especial, fino, com espessura infinitesimal, elástico, transparente, e que possa ser deformada ([1], p.28). Tais superfícies poderão ser esticadas, coladas, identificadas ou submetidas a outras transformações que não violem certas propriedades globais. As deformações de interesse não envolvem rasgos, dobras ou colagem de regiões distantes da superfície, envolvem apenas deformações suaves e contínuas. Deformações desta natureza são chamadas de *homeomorfismos* e mantêm inalteradas uma série de aspectos globais da superfície original. Por exemplo, observemos a superfície da parte inferior na figura 1.2 à esquerda, é uma superfície esférica deformada, da mesma forma que a figura da

direita é um tipo de "rosquinha com dois furos", chamada duplo toro ou pretzel, deformado.

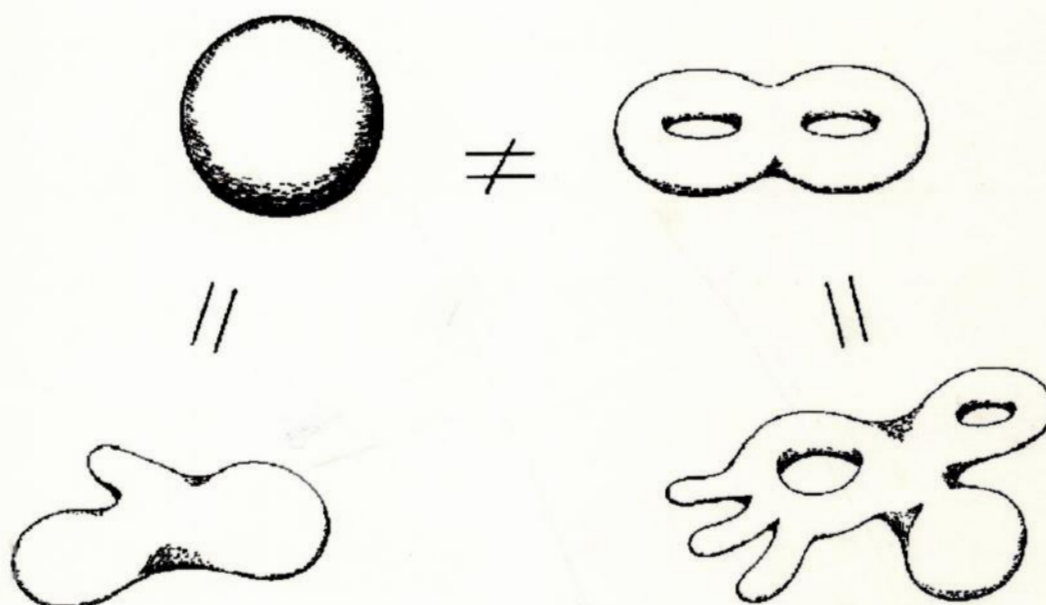


Figura 1.2 - As duas superfícies da direita possuem a mesma topologia (topologia T_2) pois podemos transformar uma na outra através de homeomorfismos; de maneira análoga, as duas figuras da esquerda possuem topologia S^2 . Já a superfícies esférica e o bitoro não podem ser transformados por homeomorfismos, não sendo portanto equivalentes topologicamente.

Os aspectos globais da natureza da superfície que não são afetados por tais deformações se referem à *topologia* da superfície ([1], p.28). Na figura 1.2, as duas superfícies da esquerda têm a mesma topologia, assim como as duas superfícies da direita. A superfície esférica e o duplo toro possuem topologias diferentes, não há como deformar uma na outra sem rasgar ou colar. Superfícies com mesma topologia são ditas *homeomórficas*.

A *geometria* de uma superfície se refere às propriedades que podem mudar quando a superfície sofre deformações do tipo acima ([1], p.28). A curvatura é a propriedade geométrica mais importante, outras propriedades são, áreas, distâncias e ângulos. Por exemplo, a superfície de um ovo e a de uma bola de ping-pong tem a mesma topologia, mas possuem diferentes características geométricas.

Superfícies que possuem uma mesma geometria em todos os seus pontos, possuem uma *geometria homogênea*. A superfície de um ovo não possui geometria homogênea, mas uma superfície esférica sim, topologicamente estas duas superfícies

são equivalentes. Quando daqui para frente utilizarmos a palavra geometria estaremos nos referindo às geometrias homogêneas.

No estudo de superfícies, observa-se que existem três tipos de geometrias envolvidas: euclidiana, elítica e hiperbólica, ver figura 1.3.

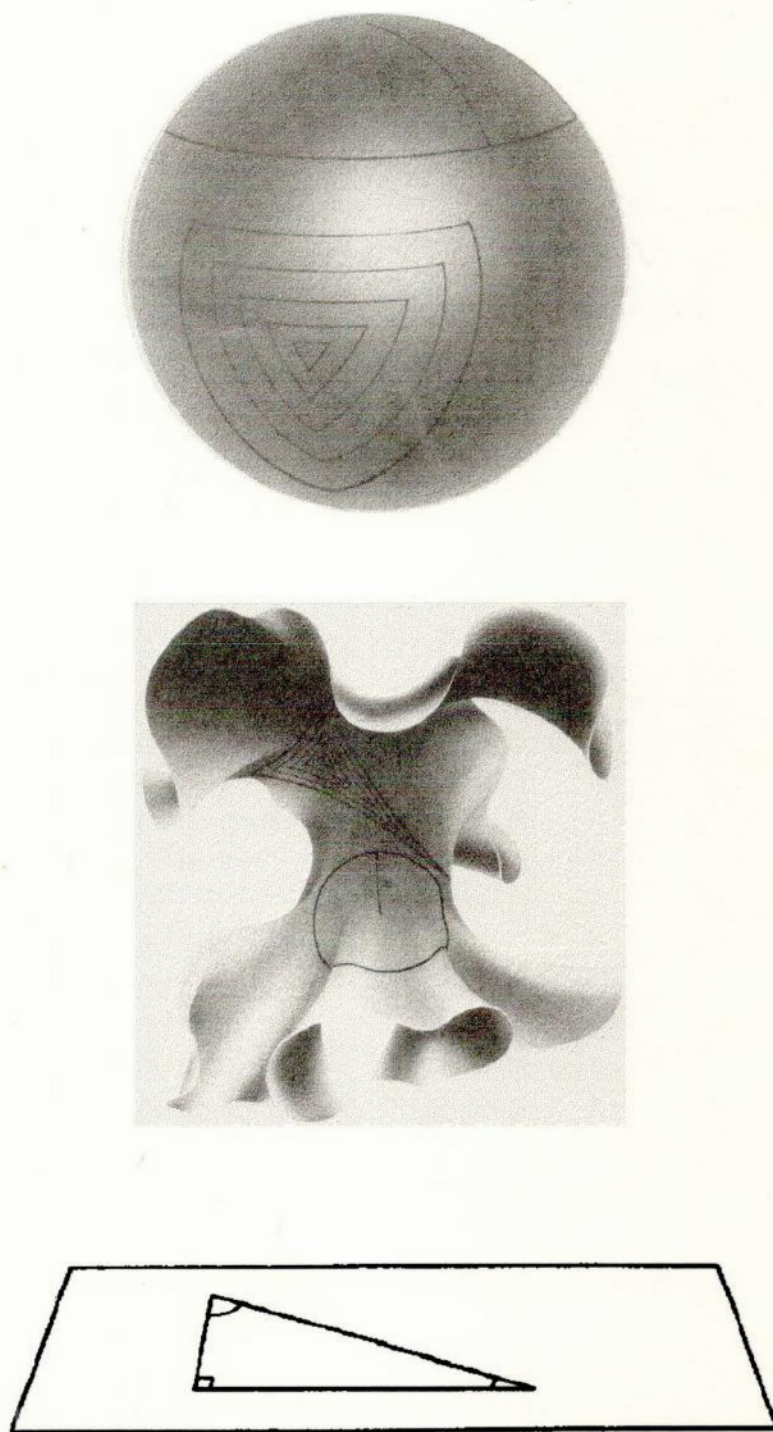
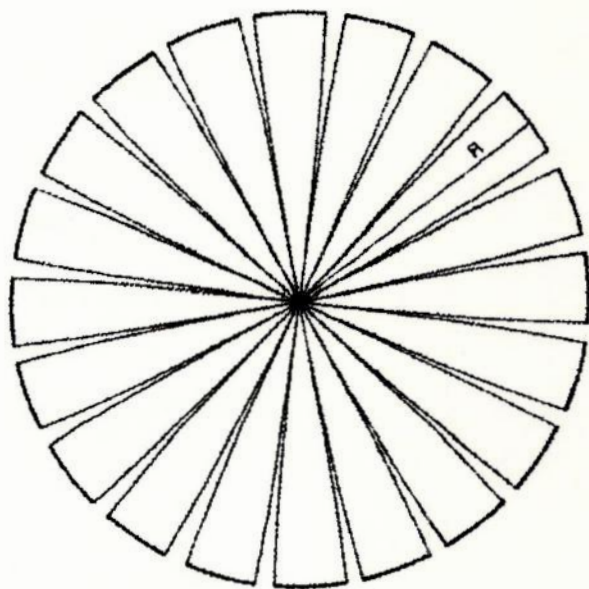


Figura 1.3 - As três geometrias homogêneas de superfícies: elítica, hiperbólica e euclidiana ([1], p. 146, 155, 38). Observe as diferentes características de um triângulo nas diferentes geometrias. Seja a

soma dos ângulos internos do triângulo; na geometria euclidiana a soma é sempre de π radianos, na geometria elítica é sempre maior do que π radianos e na geometria hiperbólica sempre menor do que π radianos.

Para constatar a natureza distinta das três geometrias possíveis em duas dimensões, vejamos como cada uma delas se comporta ao tentarmos colocar em um plano euclidiano pedaços de superfícies que têm uma geometria não euclidiana. Ao achatarmos um hemisfério, isto é, um pedaço de uma superfície com geometria elítica, numa mesa plana ([1], p.147), observamos que ele terá que se rasgar para se acomodar à mesa porque tem área menor do que a área de um círculo plano. Por outro lado se tentarmos achatar um pedaço de uma superfície com geometria hiperbólica, ou seja, do tipo de uma sela, observamos que sobriam diversas dobras, pois um círculo com geometria hiperbólica tem área maior do que um círculo plano, ver figura 1.4 a seguir.



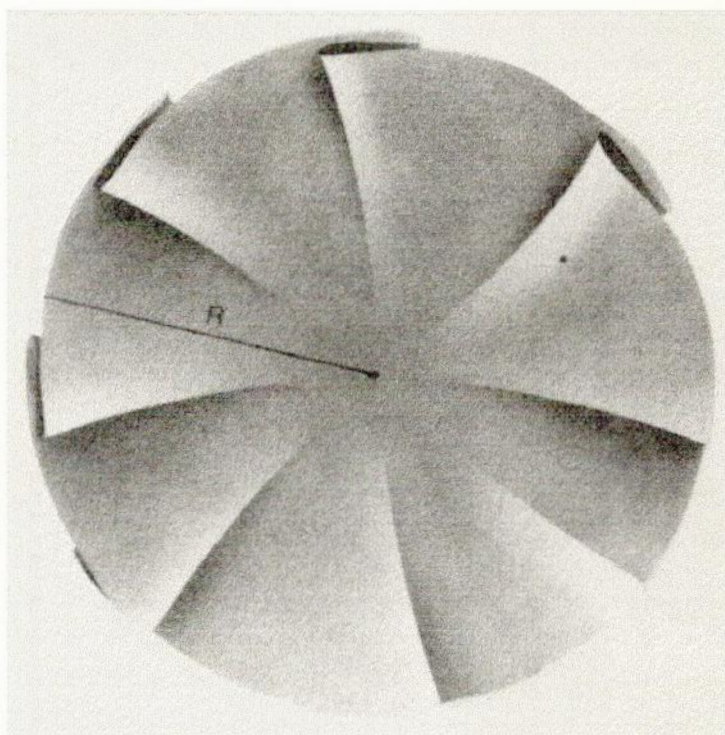


Figura 1.4 - Efeito do achatamento de um hemisfério elítico na página anterior e hiperbólico nesta página ([1], p.146,155). Observe que o hemisfério elítico se "rasga" ao tentar se acomodar à geometria euclidiana, pois possui área menor do que um disco euclidiano; já o hemisfério hiperbólico sofre "dobras", pois possui área maior do que um disco euclidiano.

Ao descrevermos a geometria de superfícies, naturalmente utilizamos do privilégio de nossa sensibilidade tridimensional, que muito nos ajuda a entender os espaços de duas dimensões. Contudo para espaços com mais de 2 dimensões perderemos este privilégio. Esta dificuldade poderá ser atenuada se começarmos a nos preocupar com novos recursos a serem utilizados que se valham apenas das próprias propriedades do espaço em consideração. É importante ressaltar que uma superfície não necessita da terceira dimensão para existir (assim como nenhuma topologia tridimensional necessita da quarta dimensão). Desta forma é fundamental que possamos descrever a superfície a partir de um ponto de vista bidimensional, por exemplo, considerando um ser bidimensional imaginário que pudesse observar as propriedades do seu próprio mundo (a superfície) ([1], p.1). Mais adiante, quando

formos descrever os espaços tridimensionais estaremos (nós, seres humanos) na mesma situação do ser bidimensional ao descrever seu mundo.

Consideremos uma folha de papel com uma reta desenhada ([1], p.37). Quando a curvamos, modificamos claramente sua geometria, pois agora possui uma certa curvatura. Mas do ponto de vista de quem está na superfície, nada aconteceu. Não houve uma deformação que modificasse sua *geometria intrínseca*, ela continua plana.

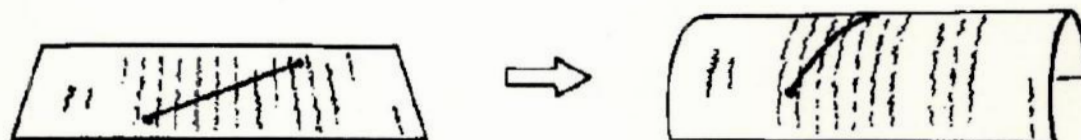


Figura 1.5 - Encurvamento de uma folha de papel. Sua geometria intrínseca permanece plana ([1], p.37); um triângulo euclidiano permanece com a soma dos ângulos internos de π radianos.

Além disto estamos interessados em superfícies que possuem *geometrias intrínsecas homogêneas*, a mesma em todos os pontos. Quando uma superfície possui uma determinada geometria intrínseca homogênea, diz-se que a superfície *admite* esta geometria, pois se esta superfície for suavemente deformada e passar a não ser mais homogênea, continuará podendo retornar (através de novas deformações ou homeomorfismos) à sua forma original, quando possuirá novamente a mesma geometria homogênea. Na realidade estas deformações suaves que modificam sua geometria, não modificam sua topologia. Estes conceitos serão utilizados adiante na classificação de Thurston.

Quando dizemos que a topologia S^2 admite a geometria elítica, significa que um espaço bidimensional com esta topologia *admite* como geometria intrínseca homogênea a geometria elítica bidimensional.

1.2 Superfície esférica S^2

A primeira superfície a ser estudada é a superfície esférica, ou a topologia S^2 . Para visualizar a superfície esférica basta pensarmos em uma esfera sólida sem seu interior. Podemos observar que esta superfície é *compacta*, isto é, finita e ilimitada (não possui fronteira, isto é, uma região onde "termina"). Admite a geometria elítica, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que π radianos.

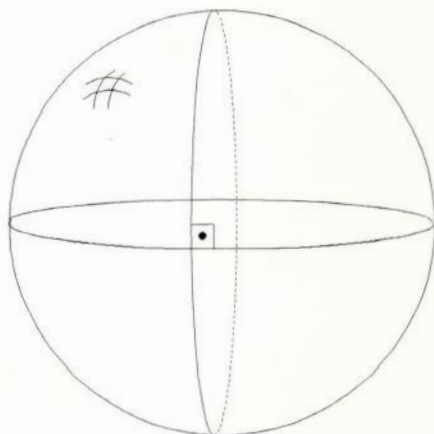


Figura 1.6 Superfície esférica S^2 , com duas circunferências máximas ortogonais.

Agora imaginemos pequenos seres bidimensionais (por exemplo pequenos “quadrados” ([6], p.1) ver figura 1.7) vivendo na superfície esférica, muito pequenos em relação à totalidade da superfície. Alertamos o leitor para que, em nossas figuras, não desenharemos o quadrado nas devidas proporções em relação à superfície, pois ficariam pequenos demais para nossos objetivos de visualização.

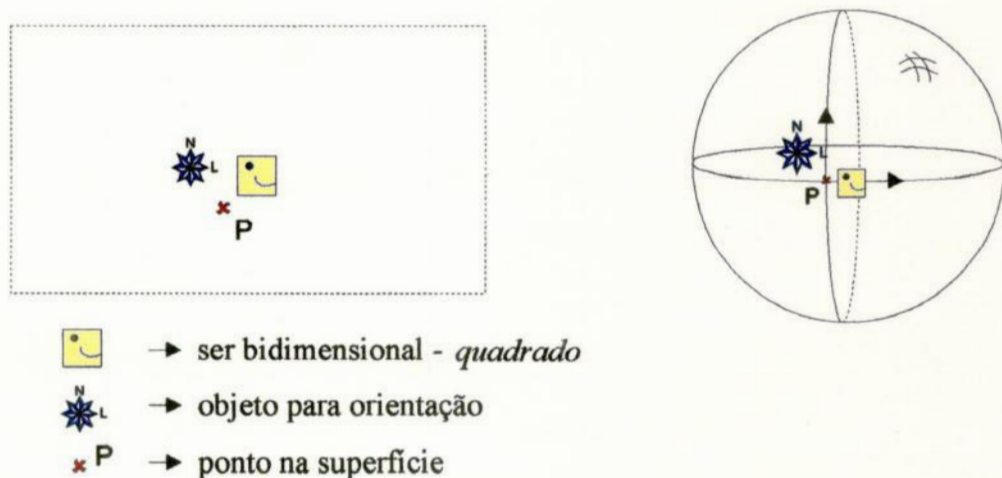


Figura 1.7 A visão local (uma pequena região do espaço) do ser bidimensional (*quadrado*) vivendo na superfície esférica; sua visão intrínseca (à esquerda) mostra a sua visão de mundo, de um plano infinito e com todas as direções equivalentes. Ele não observa características globais de seu mundo. Na nossa visão tridimensional (à direita, fora de escala) podemos observar algumas características globais de seu mundo: é finito (possui área finita) e ilimitado (não há uma fronteira que delimite o espaço). Tal percepção somente é possível a ele se realizar grandes jornadas.

O ser bidimensional provavelmente possuiria uma sensibilidade espacial bidimensional. Devido ao seu pequeno tamanho, seu universo parece infinito e plano e os pequenos triângulos que ele desenha possuem soma dos ângulos internos aproximadamente igual a π radianos. Localmente seu mundo parece possuir geometria euclidiana. Contudo, se ele tentar construir triângulos maiores, essa soma não parecerá mais com π radianos, será maior.

Ao fazer uma longa viagem em seu próprio espaço (a superfície esférica), parte de um ponto qualquer P e segue sempre em frente sem desvios. Após muito caminhar, nota que voltou ao ponto de partida. Decide fazer a viagem numa outra direção, também sempre em frente, novamente ocorrerá o mesmo fenômeno estranho. Após sucessivas viagens sempre em frente, nas diferentes direções, descobre que sempre retornará ao seu lugar de partida. Seu universo, embora pareça um plano infinito, é na verdade um espaço ilimitado (pois não tem uma fronteira onde ele termine) e finito.

Espaços que possuem esta propriedade de serem ilimitados e finitos são chamados de *compactos*.

A reta é um conceito da geometria euclidiana e é a menor distância entre dois pontos. Um caminho que intrinsecamente é reto, isto é, vai sempre em frente como um raio de luz, é chamado genericamente de *geodésica*. No caso da superfície esférica uma geodésica é um de seus meridianos, o equador ou qualquer circunferência máxima. O ser bidimensional retornou ao ponto de partida ao seguir sempre em frente, isto é, percorreu circunferências máximas ou geodésicas da S^2 .

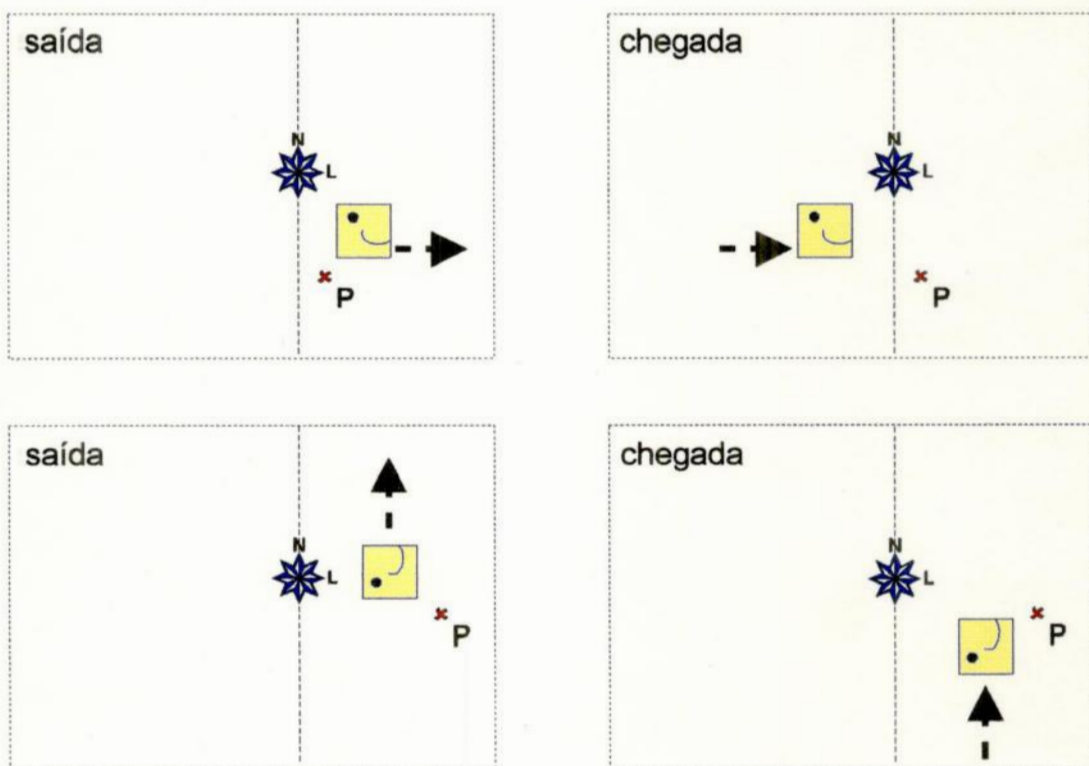


Figura 1.8 Duas viagens do ser bidimensional seguindo "caminhos retos" (geodésicas) na superfície esférica S^2 . Na parte de cima a viagem para o Leste, onde ele observa que volta ao ponto de partida e, na parte de baixo, a viagem para o Norte, observando o mesmo fenômeno. Conclui então que o seu universo que aparentemente era infinito, na verdade é compacto.

1.2 Toro T^2

O toro T^2 pode ser imaginado como a superfície que envolve uma câmara de ar de um pneu, ou ainda a superfície de uma rosquinha. Imaginemos que aquele ser bidimensional vive agora nesta superfície e resolve explorá-la, empreendendo para isto 3 grandes viagens, as quais chamaremos de V_1 , V_2 e V_3 (ver figuras 1.9 e 1.10).

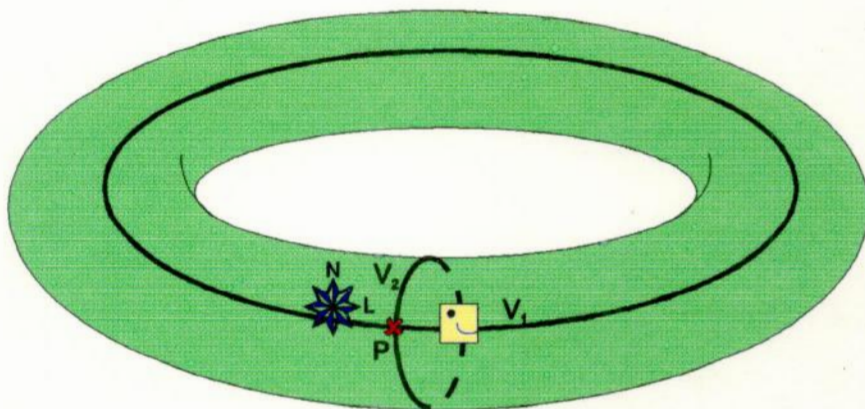


Figura 1.9 O ser bidimensional no toro T^2 (fora de escala) do nosso ponto de vista e duas grandes viagens, V_1 para o norte (menor geodésica) e V_2 para o leste (geodésica perpendicular a primeira). Observe que o toro T^2 não é globalmente isotrópico.

Escolhida a direção da viagem V_1 e seguindo sempre em frente, ele marca o tempo que levou para fazer esta viagem. Retornou ao ponto P, de onde partiu, num determinado intervalo de tempo. Ortogonalmente à direção da viagem V_1 , ele toma a direção da viagem V_2 e segue em frente. Estranhamente nesta viagem demorou um intervalo de tempo muitas vezes menor do que aquele que havia gasto na viagem V_1 , também retornando ao ponto P, exatamente pelo lado oposto ao que havia partido. Resolveu agora fazer a viagem V_3 (ver figura 1.10), onde toma uma direção entre as direções de V_1 e de V_2 . Segue em frente, apesar de demorar um intervalo de tempo maior do que o gasto para V_1 , também retorna à P pelo lado oposto ao de partida.

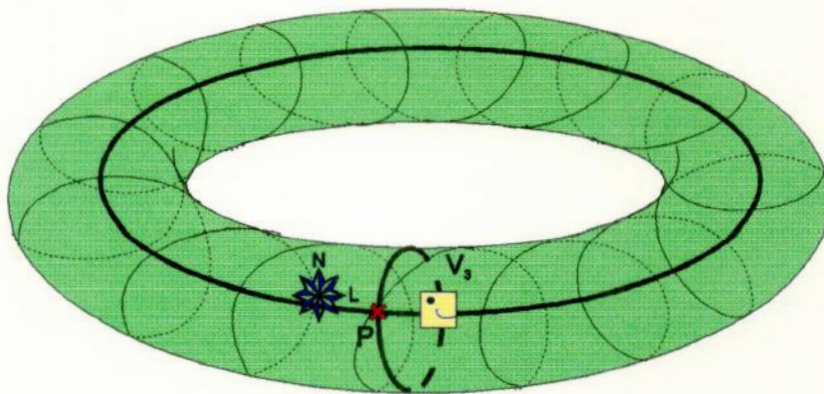


Figura 1.10 Visualização da grande viagem V_3 ao longo de uma direção qualquer do nosso ponto de vista. Observe o número de voltas necessárias que o quadrado deve dar para voltar ao ponto de partida.

O ser bidimensional observa que *localmente*, no ponto P, todas as direções parecem ser equivalentes, isto é, tanto faz uma quanto a outra. Nestas 3 grandes viagens, notou que umas são mais longas que as outras. Na direção de V_1 dispendeu mais tempo para retornar do que na direção de V_2 , e na direção de V_3 teve a viagem mais longa. Esta característica global do T^2 é definida como não isotropia global, ou anisotropia global, porém, a nível local, o T^2 é isotrópico.

O toro apresenta em sua visualização tridimensional um buraco chamado de *genus*. Este buraco não é visível diretamente e sequer pensado pelo ser bidimensional. Contudo traz consequências na topologia do toro para o ser bidimensional.

Pode-se construir um toro a partir de uma superfície esférica S^2 com a retirada de dois discos D^2 (círculo com a circunferência que o delimita), e em seguida a colagem de um cilindro (também chamado de *alça*) sem tampa e sem fundo, nos orifícios deixados na S^2 com a retirada dos discos, ver figura 1.11. Em outra linguagem, uma S^2 com uma alça é igual a um toro. Diz-se que o genus (g) de uma superfície é o número de alças que precisam ser adicionadas à S^2 para obtê-la, é um invariante topológico. Transformações do tipo homeomorfismos mantêm o genus do espaço invariante.

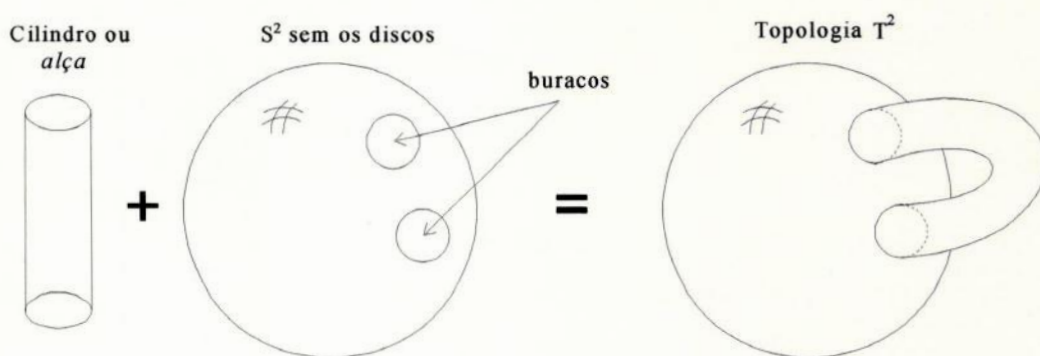


Figura 1.11 Construção do T^2 a partir da superfície esférica. Seja uma superfície esférica com dois discos retirados de sua superfície, formando dois buracos. Colemos as bordas de um cilindro oco em cada um dos buracos, formando assim uma alça na S^2 . Observa-se que a S^2 com uma alça possui a topologia do T^2 , sendo equivalente a ele e possuindo as mesmas características topológicas. Então diz-se que o toro é uma S^2 com uma alça.

Um duplo toro ou pretzel (ver figura 1.12) pode ser obtido adicionando-se 2 alças na S^2 , costuma-se escrever T_g para superfícies deste tipo, que no caso do pretzel, com $g = 2$, será T_2 . Cuidado, não confundir com o toro T^2 .

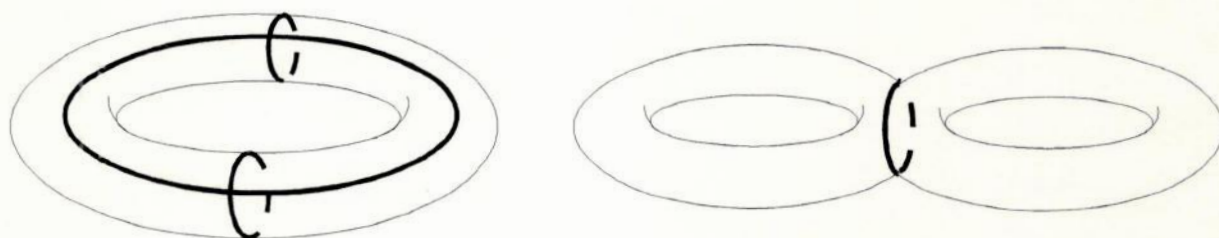


Figura 1.12 Do lado esquerdo o toro com genus 1 (T^2), do lado direito o toro com genus 2 (T_2).

Uma outra maneira de visualizar a topologia do toro T^2 é utilizamos uma representação obtida a partir de um retângulo (pode ser também um paralelogramo) cujos lados opostos serão identificados. Podemos obtê-la facilmente a partir do toro (“câmara de ar”), fazendo os cortes com suas identificações correspondentes conforme a figura 1.13.

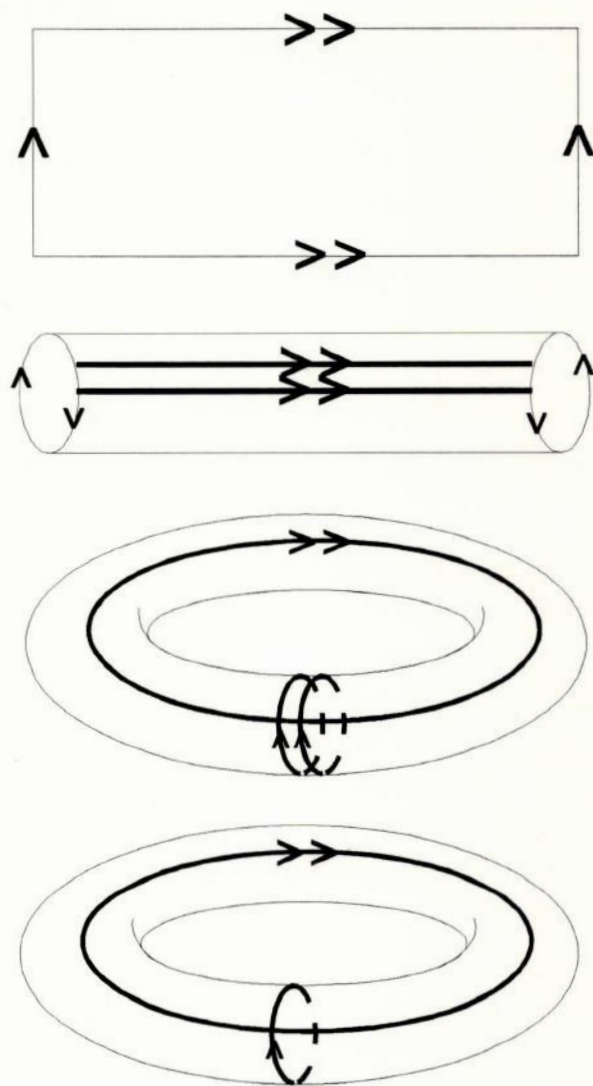


Figura 1.13 Obtenção do toro T^2 através das identificações dos lados de um retângulo. Colam-se primeiramente as duas bordas do retângulo de mesmo tipo (identificação de lados), formando um cilindro. Depois identificam-se os dois círculos formados nas bordas do cilindro, de forma a manter a mesma orientação (giro para direita ou esquerda). Desta forma, obtemos uma superfície fechada, o toro T^2 .

Nesta representação os lados com o mesmo tipo de seta são identificados, ou seja, são o *mesmo lado*, pois para reconstituir a figura original devem ser “colados”. É análogo a alguns “video-games”, onde ao se chegar à direita na tela, aparece-se, logo em seguida à esquerda, e quando se vai na tela para cima, aparece-se embaixo. Podemos observar na figura 1.14 como nesta representação aparecem aqueles caminhos mais curtos ou mais longos, as viagens V_1 , V_2 e V_3 realizadas em um toro cuja maior extensão é cerca de 10 vezes menor do que o da figura 1.10.

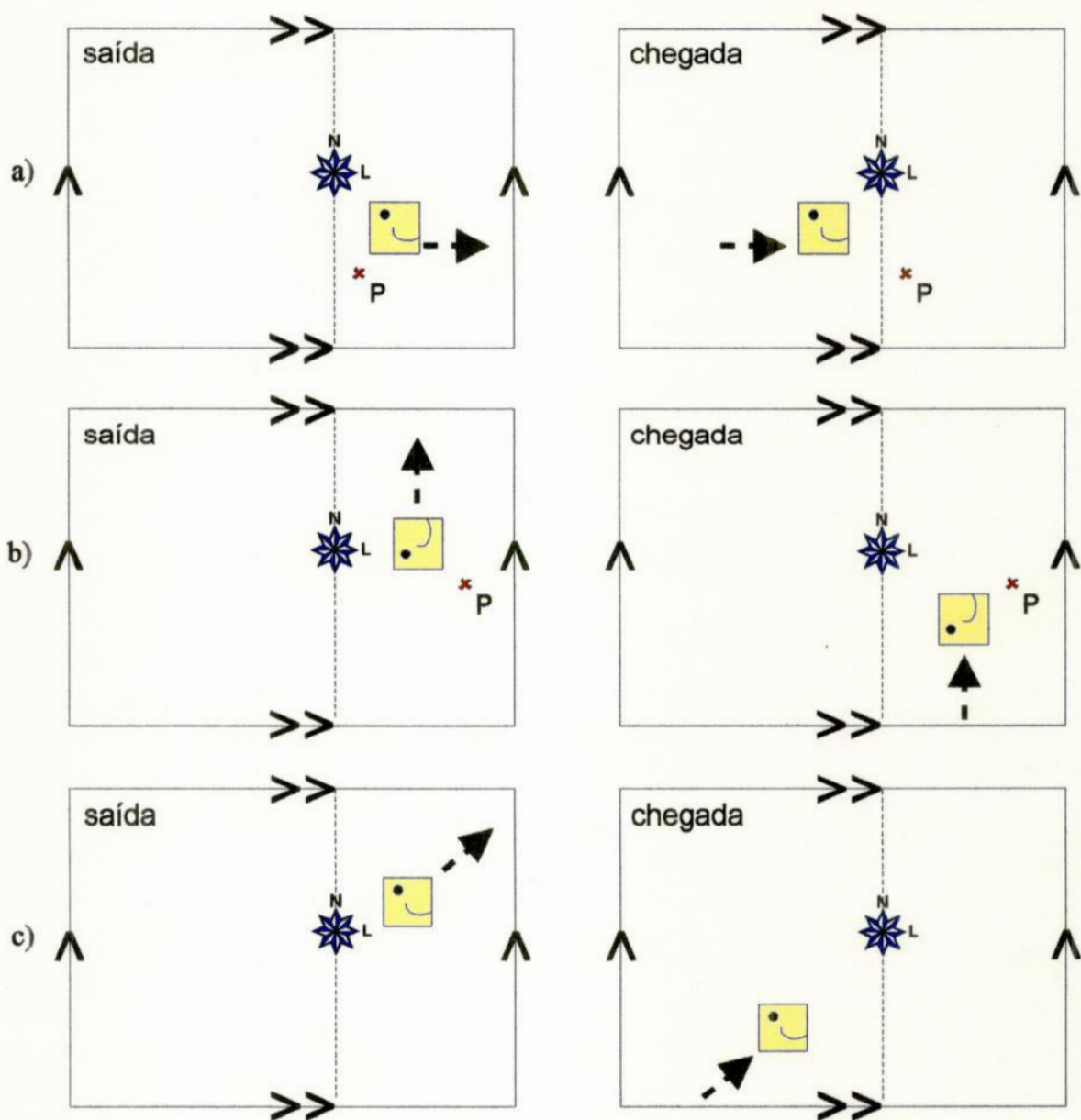


Figura 1.14 As 3 grandes viagens no T^2 (representação do retângulo com lados identificados) do ponto de vista do ser bidimensional, considerando que o quadrado viaje a uma mesma velocidade em todas as viagens; **a)** para Leste (V_1), retornando ao mesmo ponto de partida após um tempo t , **b)** para Norte (V_2), retornando ao ponto de partida num tempo bem menor (distância mais curta) e **c)** para o Nordeste (V_3), retornando ao ponto de partida num tempo muito maior (distância mais longa). Desta forma ele observa que ao percorrer geodésicas diferentes, ele percorre distâncias diferentes até que consiga retornar ao ponto inicial. Isto é, o seu universo é globalmente não-isotrópico, embora seja localmente isotrópico (sua visão local é a de um plano infinito, portanto todas as direções parecem equivalentes).

1.4 Faixa de Möbius

Uma superfície muito interessante é a faixa de Möbius. É facilmente construída. Tome uma tira comprida de papel transparente, gire um dos lados e cole-os (ver figura 1.15).

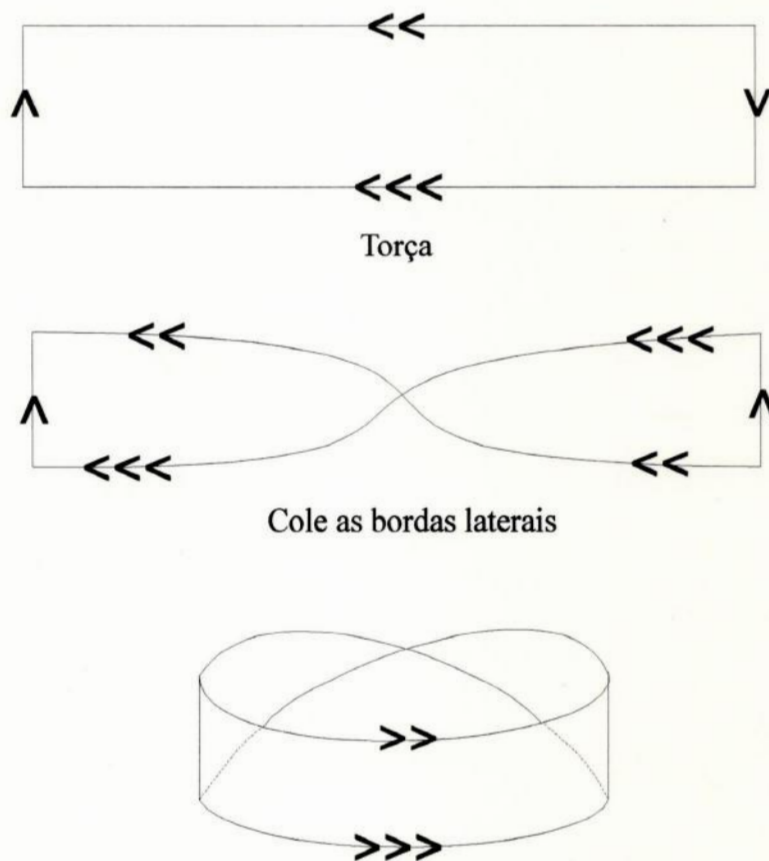


Figura 1.15 Construção da faixa de Möbius a partir da identificação dos lados de uma fita transparente.

Imaginemos que o ser bidimensional viva neste espaço e resolva fazer grandes viagens por seu universo. Suponhamos que ele escolha, por acidente, a direção da menor dimensão da faixa. Irá observar que há um fim, que seu “universo” é limitado, há uma fronteira onde ele acaba. Caso ele escolha a direção perpendicular a esta, a da maior dimensão da faixa e siga sempre em frente, observará um fenômeno realmente muito estranho e novo, retorna também ao ponto de partida, mas na sua direção direita-esquerda, foram trocados os sentidos da direita pelo o da esquerda e vice-versa. Tudo o que ele antes de partir observava à sua esquerda, passou a ficar à sua direita e vice-versa. Por exemplo, só conseguiria ler normalmente um livro que houvesse lá deixado

antes da viagem, se o colocasse em frente ao espelho, as letras, para ele, estão escritas ao contrário, uma imagem especular das outras letras. Para fixação de idéias, imagine que ao comparar o local onde está seu coração, com o de outros “quadrados” que não fizeram a viagem com ele, notará que apesar de não haver sentido nenhuma transformação ao longo da viagem, o seu está do lado oposto ao dos que ficaram.

Este estranho fato se resume em que a faixa de Möbius é um espaço *não orientável*, porque existem caminhos globais que ao serem percorridos, fazem com que se retorne ao ponto de partida com a inversão dos sentidos direita-esquerda. (ver figura 1.16).

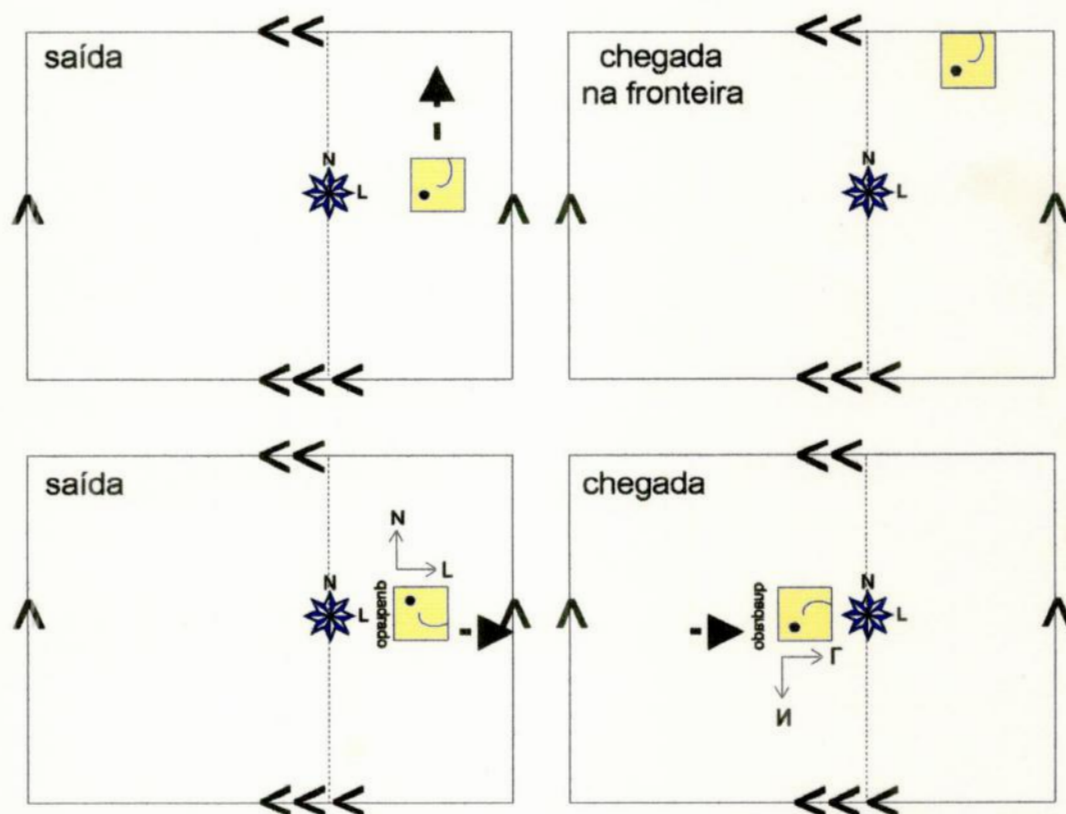


Figura 1.16 As 2 viagens do ser bidimensional (quadrado) na faixa de Möbius. Em cima: ao se dirigir para o Norte (direção da menor dimensão da faixa), o quadrado encontra a fronteira, não podendo mais avançar (observe que não podemos identificar o lado de cima com o lado de baixo). Embaixo: ao se dirigir na direção Leste (direção da maior dimensão da faixa), o quadrado retorna ao ponto de partida, porém com a perda de sua orientabilidade, isto é, ao levar consigo um par orientado norte-leste percebe ao voltar que o par que levou não se encaixa mais com a orientação do ponto em que saiu.

A superfície esférica e o toro são *orientáveis* porque para qualquer caminho global percorrido, retornamos ao ponto de partida sem inversão da direita-esquerda. A não-orientabilidade é uma característica topológica que também é encontrada em outros espaços não-orientáveis com maior número de dimensões.

1.5 Garrafa de Klein K^2

A garrafa de Klein K^2 é uma superfície não orientável mais complexa em termos de visualização a partir de nosso espaço euclidiano tridimensional. Sua representação bidimensional é a de um quadrado (ou qualquer paralelogramo), com os lados identificados, sendo que um par deles é identificado de forma oposta, isto é, com a inversão dos sentidos ver figura 1.17.

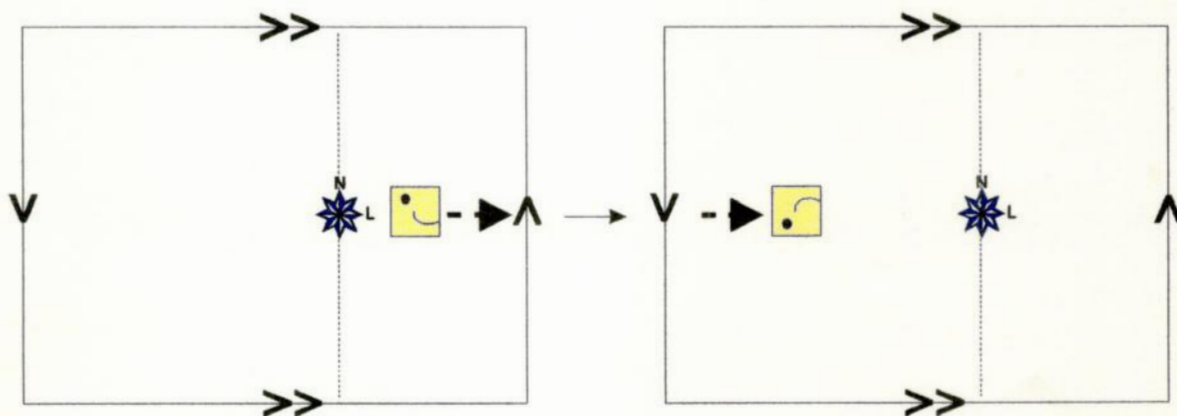


Figura 1.17 Representação da garrafa de Klein K^2 , e a perda de orientabilidade quando caminha na direção Leste, retornando ao mesmo ponto de partida. Observe as identificações contrárias das laterais do retângulo.

Ao tentarmos construí-la de maneira semelhante ao que foi feito na figura 1.15 teremos uma dificuldade que pode ser vista na figura 1.18, pois teremos que cruzar a superfície por ela mesma. Ao colarmos inicialmente os dois lados maiores do retângulo teremos um cilindro, mas para colar os lados invertidos teremos que cruzar a própria superfície para preservar o sentido da colagem. Em nosso espaço tridimensional só podemos indicar e imaginar como será feita esta colagem pois não temos como passar a superfície por ela mesma sem interseção.

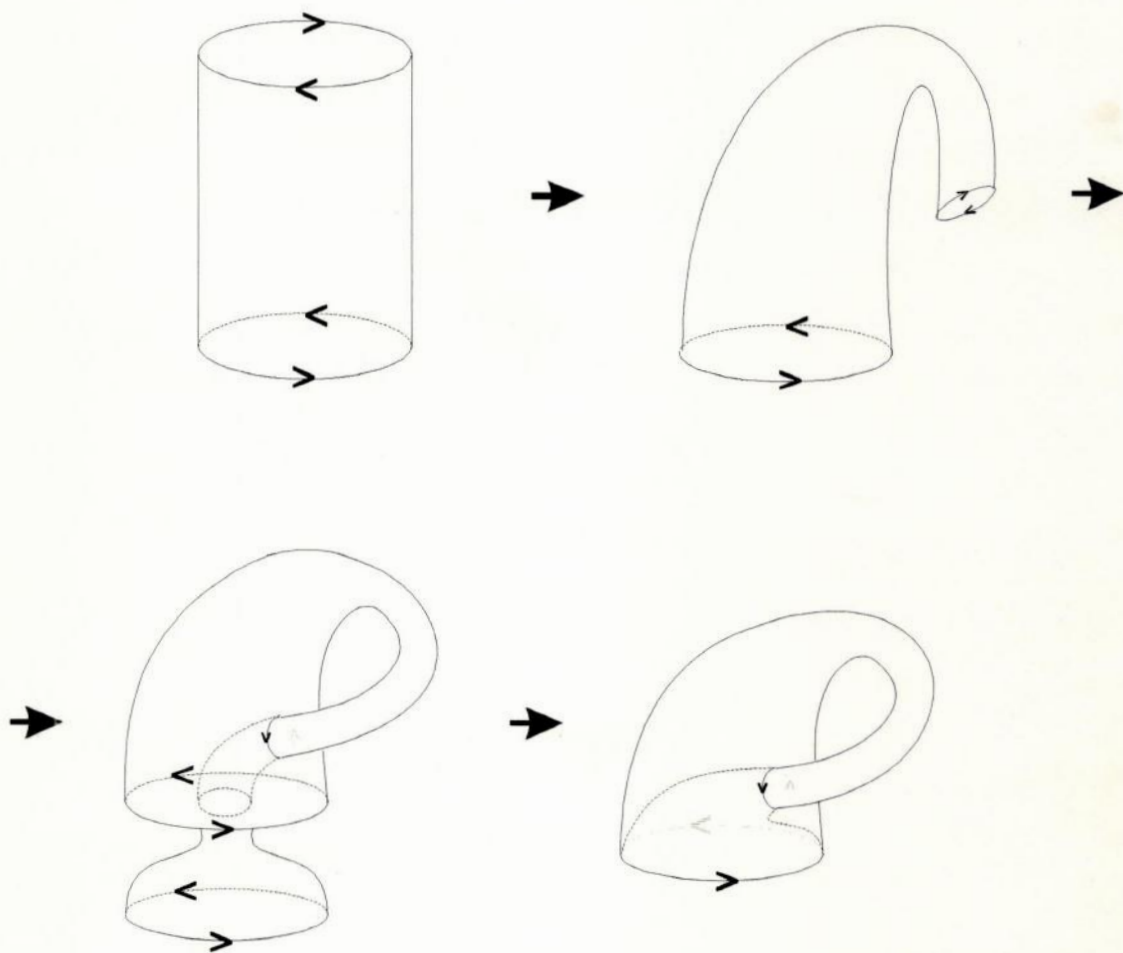


Figura 1.18 Construção da visualização tridimensional da garrafa de Klein a partir de um retângulo. Partamos da fig. 1.17. Identificamos as laterais com duplo símbolo, formando assim um cilindro oco, mostrado na fig. 1.18. Observe que as bases do cilindro apresentam orientações contrárias. Em três dimensões não é possível identificar estas bases sem que haja uma interseção do cilindro em si mesmo. Desta forma, deformamos o cilindro e passamos uma de suas extremidades por dentro de si mesmo, retirando um pequeno disco e introduzindo a extremidade. Em seguida, deformamos esta extremidade, de forma a se alargar. Percebemos que agora as duas extremidades do cilindro possuem orientações idênticas, podendo então serem identificadas. Obtemos assim a garrafa de Klein, que é uma superfície fechada que passa por dentro de si mesma em sua visualização tridimensional. Em sua visualização bidimensional não se observa qualquer tipo de anomalia nesta superfície, sendo perfeitamente contínua em todos os pontos e não possuindo fronteira, embora seja não-orientável; do ponto de vista do ser bidimensional, a garrafa de Klein é tão misteriosa quanto o toro.

1.6 Plano Projetivo P^2

A última superfície que veremos é o plano projetivo P^2 . Pode ser imaginado como um hemisfério cujo equador possui os pontos antípodas identificados ([1],p.61). Esta superfície é contínua, finita, ilimitada, portanto compacta, e não orientável.

Vejamos como se dá a não orientabilidade no plano projetivo. Imaginemos que o ser bidimensional viva nesta superfície (figura 1.19), que localmente é idêntica à superfície esférica. Parte de um ponto P e segue sempre em frente, munido de 2 setas (uma aponta para o este e outra para o norte), deixa no local de onde partiu uma cópia das setas que leva. Ao chegar no extremo oposto do equador, como faz a identificação do ponto B , “passa” continuamente para o lado de onde partiu. A sua seta que aponta para o este, terá que apontar para o ponto A antes e após a identificação. Agora chegando finalmente ao local de onde partiu, compara o par de setas que levou com o par que deixou, e constata a não orientabilidade do plano projetivo P^2 , pois não há como fazer seu conjunto de setas coincidir com aquele que havia deixado.

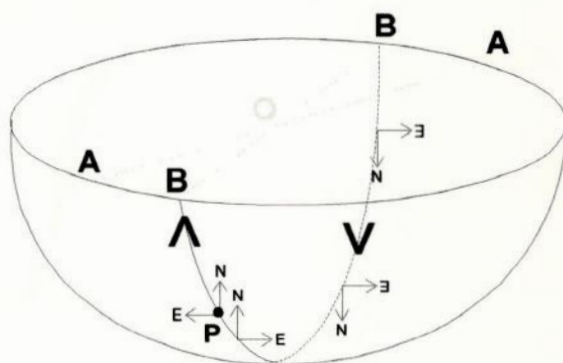


Figura 1.19 Visualização do plano projetivo. Seja a superfície um hemisfério. No equador, identificamos todos os pontos antípodas um-a-um, de forma que quando sairmos de um ponto P em direção ao ponto B no equador, continuamente passamos para o outro lado do hemisfério. Ao percorrermos todo o trajeto, tendo um par norte-esquerda, observamos novamente que este espaço é não-orientável, pois o par que levamos não se encaixa com o par da partida.

A partir das identificações no hemisfério podemos obtê-lo na forma mostrada na figura 1.20. É também chamado de “capuz cruzado”, que se assemelha ao chapéu de bispo.

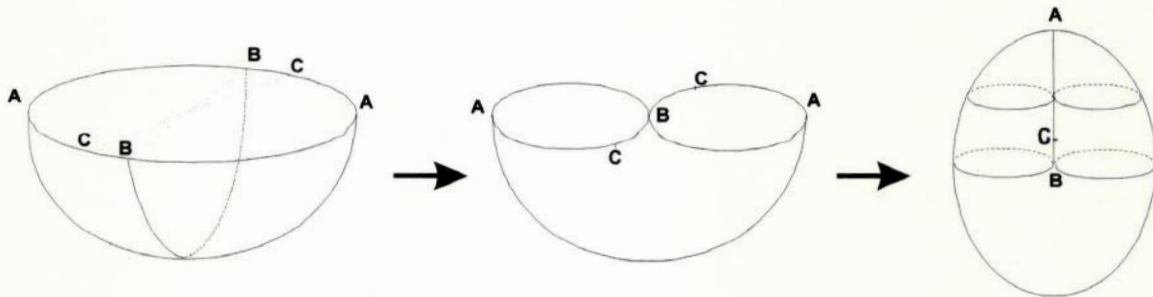


Figura 1.20 Outra visualização do plano projetivo ([7], p.41). Novamente temos um hemisfério oco com os pontos antípodas do equador identificados. Fazemos a identificação do ponto B, deformando o hemisfério. Em seguida identificamos os pontos C e A com nova deformação, puxando as extremidades para cima. Desta forma obtemos uma aparência tridimensional do plano projetivo.

2.7 Faixa de Möbius novamente

A faixa de Möbius pode ser obtida a partir de um plano projetivo ([1], p.74). Veremos a seguir, detalhes desta obtenção.

O plano projetivo visto na seção 1.6 como um hemisfério cujos pontos antípodas de sua borda são identificados, equivale a um círculo (disco D^2), cujos pontos antípodas da fronteira são identificados, ver figura 1.21 abaixo.

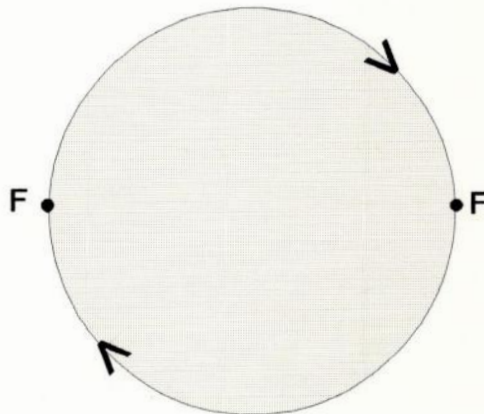


Figura 1.21 Outra representação do plano projetivo, um disco com interior e raio r cujos pontos antípodas da fronteira estão identificados um-a-um. Observe a orientação do deslocamento de um ponto na fronteira do disco para o ponto F ; observamos que podemos percorrer no máximo a distância de π radianos sobre a fronteira do disco ao voltarmos ao mesmo ponto, e não 2π radianos.

Façamos no P^2 sem o disco, uma linha horizontal (ver figura 1.22a, lado direito) que sai do ponto F à esquerda e atinge a borda interna em G , e em J , seguindo até o ponto F da direita. A linha $FGJF$ divide a figura em duas partes, que para serem separadas devemos indicar com setas as identificações, ver figura 1.22b. Através de transformações suaves (homeomorfismos) obtemos os 2 retângulos do lado direito da figura 1.22b.

Para construirmos uma outra visualização da topologia P^2-D^2 devemos colar os dois retângulos pelo lado FF , isto é, os lados correspondentes à borda externa do círculo original 1.22a, para isto fazemos uma reflexão especular do retângulo inferior da figura 1.22c. Após esta reflexão e a respectiva identificação (“colagem”) dos lados FF obtemos finalmente a figura 1.22d que conforme sabemos, é a faixa de Möbius (compare com a figura 1.15). Este importante resultado será utilizado no capítulo 2 ao estudarmos a variedade das cordas de um círculo.

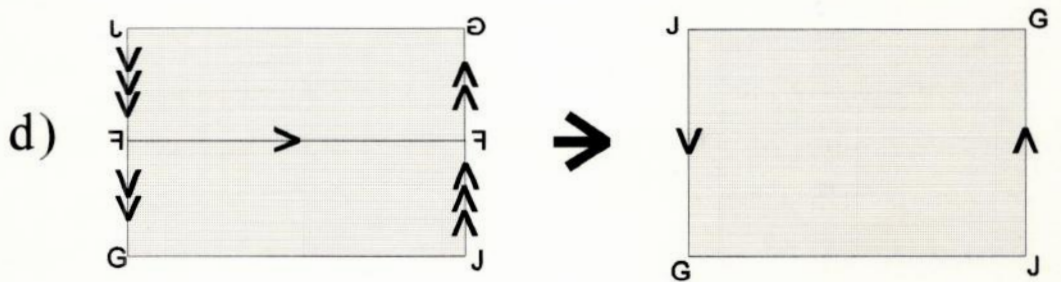
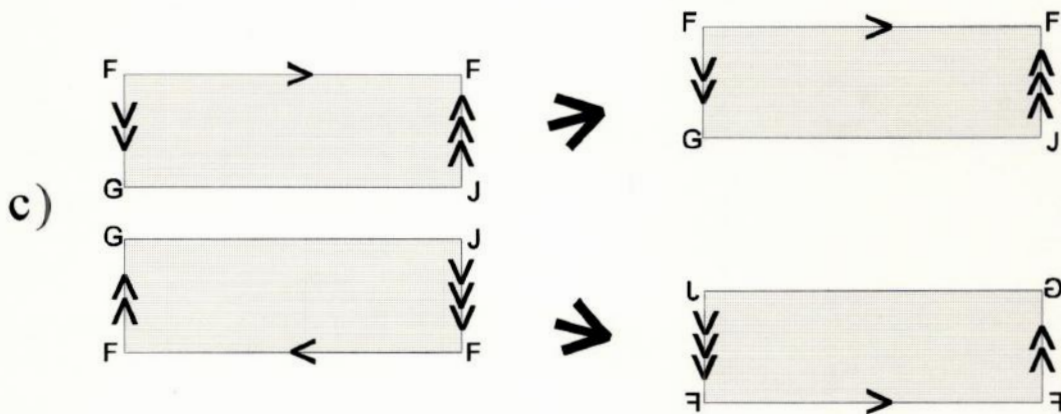
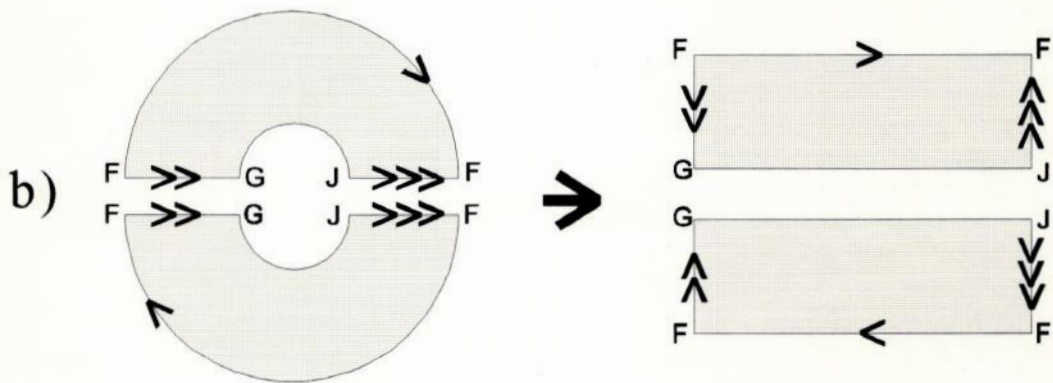
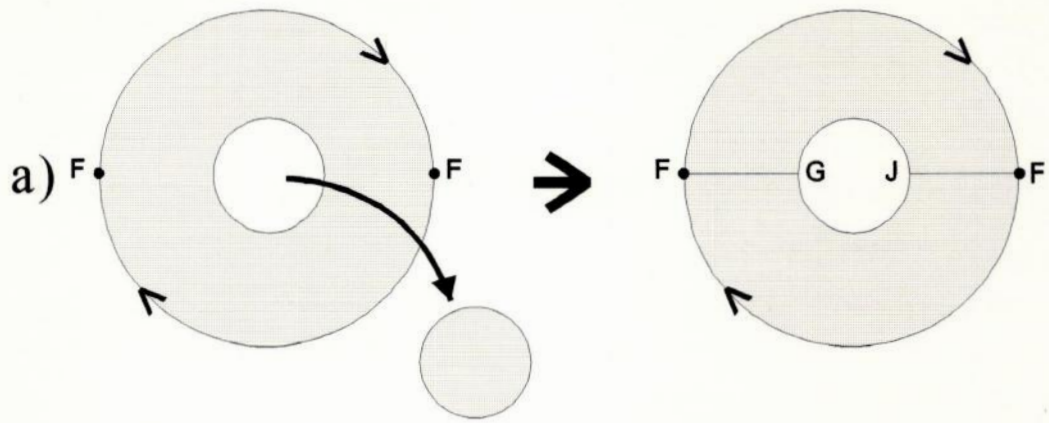


Figura 1.22 O plano projetivo sem um disco é igual à faixa de Möbius. Inicialmente considere a representação do plano projetivo da fig.1.21. Retiremos um disco concêntrico ao plano projetivo. Desta forma, obtemos uma coroa circular (a). Em seguida faremos uma série de cortes e identificações sempre respeitando as orientações, de modo que a figura resultante esteja de acordo com a figura original, sendo equivalente a ela. Façamos um corte longitudinal passando pelo centro da coroa circular, introduzindo os segmentos FG e JF com suas respectivas orientações. Deformemos estes dois pedaços da antiga coroa circular e os transformemos em dois retângulos (b). Façamos a inversão especular do retângulo de baixo (lembre-se que nesta superfície não existem lados distintos) (c). Identifiquemos o lado horizontal com mesmo símbolo e orientação (observe que ele desaparece). Em seguida observemos que os lados verticais estão identificados, bastando simplificar a notação para um único símbolo (d). Desta forma obtemos uma faixa de Möbius.

2.8 Resumo

Escreveremos a seguir um resumo das topologias bidimensionais apresentadas e algumas das suas propriedades principais. Todas são localmente isotrópicas.

- Toro T^2 : geometria euclidiana, sem fronteira, compacto, globalmente não-isotrópico, orientável.
- Garrafa de Klein K^2 : geometria euclidiana, sem fronteira, compacta, globalmente não-isotrópica, não-orientável.
- Faixa de Möbius: geometria euclidiana, compacta com fronteira, globalmente não-isotrópica, não-orientável.
- Superfície esférica S^2 : geometria elítica, sem fronteira, compacta, globalmente isotrópica, orientável.
- Plano projetivo P^2 : geometria elítica, sem fronteira, compacto, globalmente isotrópico, não-orientável.
- Pretzel T_2 : geometria hiperbólica, sem fronteira, compacto, globalmente não-isotrópico, orientável.

Podemos representar de maneira semelhante algumas topologias de superfícies utilizando um quadrado com as identificações correspondentes (ver figura 1.23).

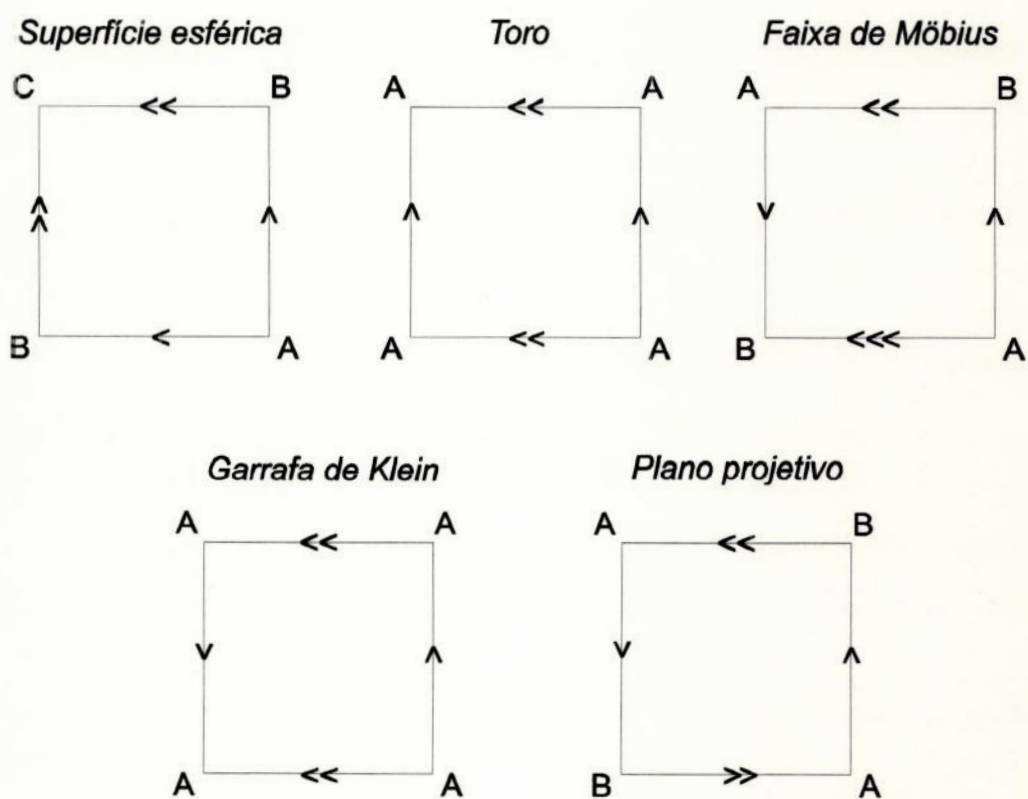


Figura 1.23 - Representação de algumas topologias apresentadas (baseado em ([8],p.55)). Símbolos iguais indicam que os lados devem ser identificados, preservando a orientação. Pontos de nomes iguais representam um único ponto, sendo portanto também identificados.

Capítulo 2

VARIEDADES TRIDIMENSIONAIS

2.1 Introdução

No capítulo anterior observamos algumas propriedades topológicas de superfícies, ou seja, de bivariedades. Muitas destas propriedades podem ser generalizadas para as trivariedades, ajudando na compreensão destes espaços. As trivariedades em que estaremos interessados são as compactas que possuem geometrias intrínsecas homogêneas.

A partir da intuição já adquirida tentaremos visualizar os espaços tridimensionais compactos homogêneos. É importante notar que aquele problema das dificuldades encontradas por um ser bidimensional para visualizar seu espaço, é exatamente o mesmo problema que um ser tridimensional (por exemplo, um de nós), terá para visualizar seu espaço. Nos espaços a serem estudados, localmente tudo pode ser descrito pela geometria euclidiana em três dimensões, pois são variedades, ou seja, suaves e localmente euclidianos.

Caso conseguíssemos realizar longas viagens por nosso universo poderíamos investigar melhor diversas propriedades análogas àquelas que o ser bidimensional investigou em suas viagens. Algumas observações que poderiam ser realizadas nesta hipotética viagem nos ajudariam a desvendar propriedades do nosso triespço.

1. Imaginem que estejamos em uma expedição em direção a uma galáxia distante. Seguimos sempre em frente e quando chegamos a esta galáxia, procuramos por um planeta que se apresente o mais hospitaleiro possível. Descobrimos que este planeta é a Terra. De alguma forma acabamos voltando para o nosso planeta.
2. Imaginem que sejamos astrônomos e que observamos um mesmo objeto celeste em duas localizações diferentes no céu.
3. Imaginem que somos radio-astrônomos à procura de sinais extraterrestres e detectamos um sinal fraco vindo de uma galáxia distante. Quando o analisamos,

descobrimos que é a parte sonora de uma antiga transmissão de televisão, por exemplo, do dia em que o homem pisou na lua.

Tais observações poderiam indicar que nosso universo possui uma forma diferente da usual, isto é, possui uma topologia diferente da topologia usual assumida de um tri-espaço infinito. Ao seguir por um caminho em frente, retornamos ao nosso planeta, e também observamos imagens repetidas de um mesmo objeto cósmico, em localizações distintas.

Segundo o Modelo Cosmológico Padrão (Big Bang), o universo em cada instante é uma variedade tridimensional homogênea e isotrópica, logo para se estudar os diferentes modelos de universo precisaremos saber que variedades tridimensionais são compatíveis com estes modelos. Na Cosmologia Padrão somente são possíveis 3 modelos geométricos, contudo segundo a classificação de trivariiedades de William P. Thurston existem em 3 dimensões, além destas 3 geometrias isotrópicas, 5 outras não isotrópicas.

Estudaremos inicialmente algumas trivariiedades compactas localmente homogêneas cujas geometrias correspondem às geometrias de superfícies, ou seja, as geometrias tridimensionais localmente homogêneas e localmente isotrópicas: euclidiana, elítica e hiperbólica.

2.2 Variedades tridimensionais compactas localmente homogêneas e isotrópicas

Tipo 1 – Geometria Euclidiana

A primeira trivariiedade que apresentaremos é o Tritoro T^3 , análogo tridimensional do toro T^2 . Pode ser visualizado através da seguinte representação: um cubo sólido, cujas faces opostas são identificadas. Ao caminhar no interior do cubo, quando chegarmos a uma de suas faces, prosseguiremos continuamente, sem qualquer interrupção, entrando pela face oposta.

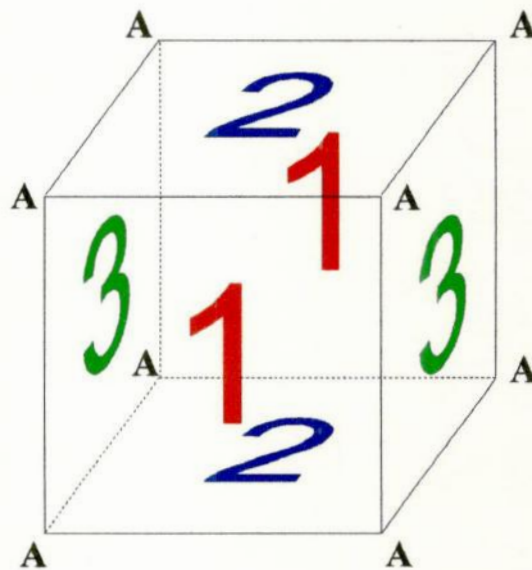


Figura 2.1 Representação do T^3 através de um cubo com as faces opostas identificadas. Observe que todos os pontos A representam apenas um ponto no triespaço, sendo portanto identificados.

Observe na figura 2.1 que existem pontos como o ponto A que se repete 8 vezes no cubo, porém, isto é apenas um certo prejuízo desta representação do tritoro, pois o ponto A como qualquer outro ponto do tritoro é único, mas na representação aparece 8 vezes. Lembre-se que acontecia de forma semelhante com os pontos dos vértices do quadrado na representação do T^2 através de um quadrado.

O tritoro admite geometria euclidiana tridimensional, é compacto, homogêneo, localmente isotrópico, globalmente anisotrópico e orientável.

Tipo 2 – Geometria Elítica

Uma trivariiedade correspondente à superfície esférica S^2 é a triesfera S^3 . Pode ser obtida a partir de duas bolas sólidas B^3 (também chamadas de discos tridimensionais D^3). Identificam-se os pontos das superfícies (S^2) que delimitam as B^3 . Na figura 2.2 vemos um corte desta representação por uma seção que passa pelos centros C e \bar{C} , indicam-se dois pontos diferentes A e B da superfície esférica S^2 , bem como os antípodas \bar{C} e \bar{P} de C e de P respectivamente.

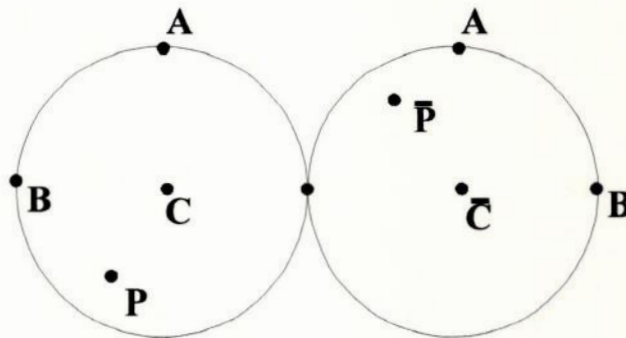


Figura 2.2 A S^3 obtida a partir de duas bolas B^3 . Considere um corte longitudinal de duas bolas B^3 , resultando em dois discos D^2 . Agora identifique todos os pontos da fronteira de uma das D^2 com a fronteira da outra D^2 (pontos A e B na figura). Observe que C e \bar{C} representam dois pontos que são antípodas na S^3 . Seguindo o mesmo raciocínio para todos os cortes longitudinais, temos que a superfície esférica S^2 que delimita uma das bolas está identificada com a superfície esférica S^2 que é fronteira da outra bola. Desta forma obtemos a S^3 .

Uma outra representação da S^3 é obtida também a partir da bola sólida B^3 , onde todos pontos de sua fronteira (S^2) são identificados. Este ponto representado por toda uma S^2 é na realidade um único ponto e é o ponto antípoda do centro da B^3 .

A triesfera S^3 admite geometria elítica tridimensional, é compacta, homogênea, localmente isotrópica, globalmente isotrópica e orientável. Ela serviu de modelo para Einstein na elaboração de seu modelo cosmológico, o Universo de Einstein.

Um outro espaço que admite a geometria elítica é o triespaço projetivo real P^3 , análogo ao P^2 . Uma representação possível pode ser obtida a partir de uma bola sólida B^3 , onde os pares de pontos antípodas de sua fronteira (a superfície externa S^2 que a envolve), são identificados. Ver na figura 2.3, onde os pontos A e \bar{A} , B e \bar{B} são identificados, isto é, $A = \bar{A}$ e $B = \bar{B}$.

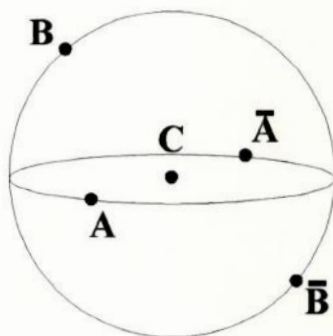


Figura 2.3 Representação do triespaço projetivo a partir de uma bola B^3 . Considere uma bola com todos os pares de pontos antípodas identificados sobre a sua superfície; desta forma temos que $A = \bar{A}$ e $B = \bar{B}$, obtendo assim o triespaço projetivo.

O P^3 admite geometria elítica tridimensional, é compacto, localmente isotrópico, globalmente isotrópico e orientável.

O triespaço denominado Dodecaedro de Poincaré também possui geometria elítica tridimensional, é representado por um dodecaedro cujas faces opostas estejam identificadas com um giro de $1/10$ de volta sempre no mesmo sentido.

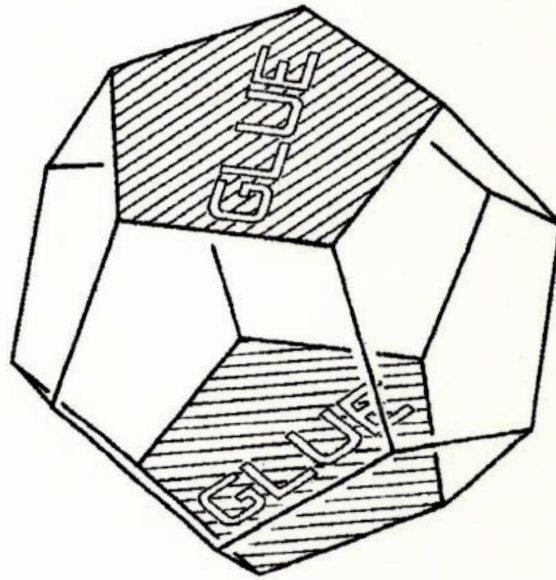


Figura 2.4 Dodecaedro de Poincaré ([1], p.224) representado por um dodecaedro com faces opostas giradas de 1/10 de volta e identificadas.

Tipo 3 – Geometria Hiperbólica

Na conclusão deste resumo das três geometrias homogêneas e isotrópicas tridimensionais nos resta somente a geometria hiperbólica.

O triespço infinito com geometria hiperbólica é o H^3 , topologicamente homeomorfo ao espaço tridimensional euclidiano infinito, E^3 . Contudo, é possível a construção de uma quantidade infinita de espaços compactos que admitem esta geometria.

Se “cortarmos” uma fatia bidimensional do H^3 , obteremos uma superfície hiperbólica infinita (ou H^2). Ao considerarmos triângulos planos neste espaço (ver figura 2.5), observamos que conforme aumentamos o tamanho do triângulo, os ângulos de seus vértices vão diminuindo, até que o ângulo seja zero. Esta característica traz interessantes propriedades. Um hipotético ser tridimensional acostumado com nosso triespço euclidiano, se for levado para um H^3 (ver figura 2.6) ao observar uma distante galáxia, terá a impressão que está muito próxima ([1], p.217). De fato, embora o H^3 seja extremamente

grande, e a galáxia esteja distante, mas devido ao seu costume com nossa visão binocular (ver figura 2.7) imaginará que ela está próxima.

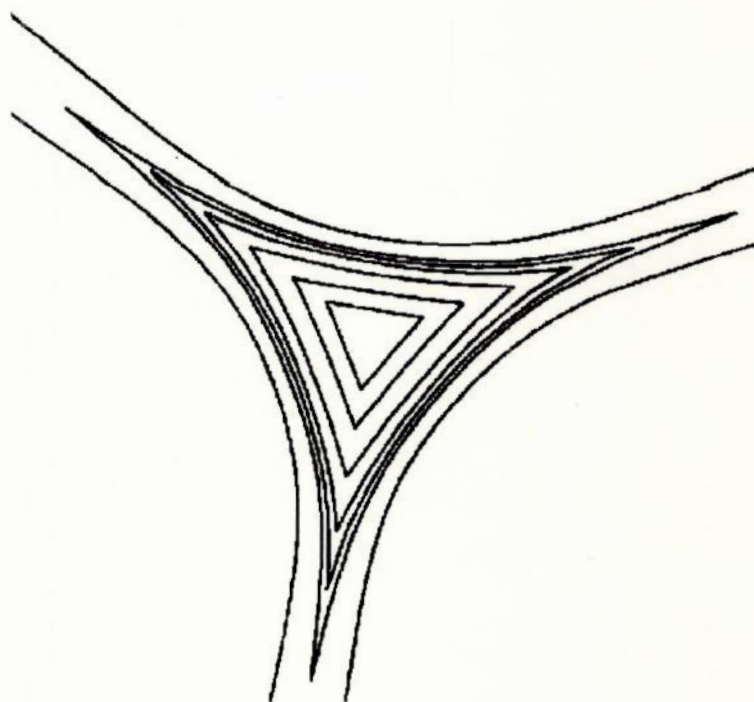


Figura 2.5 Uma série de sucessivos triângulos no espaço hiperbólico ([1], p218). Observe que a soma de seus ângulos internos é sempre menor do que π radianos.

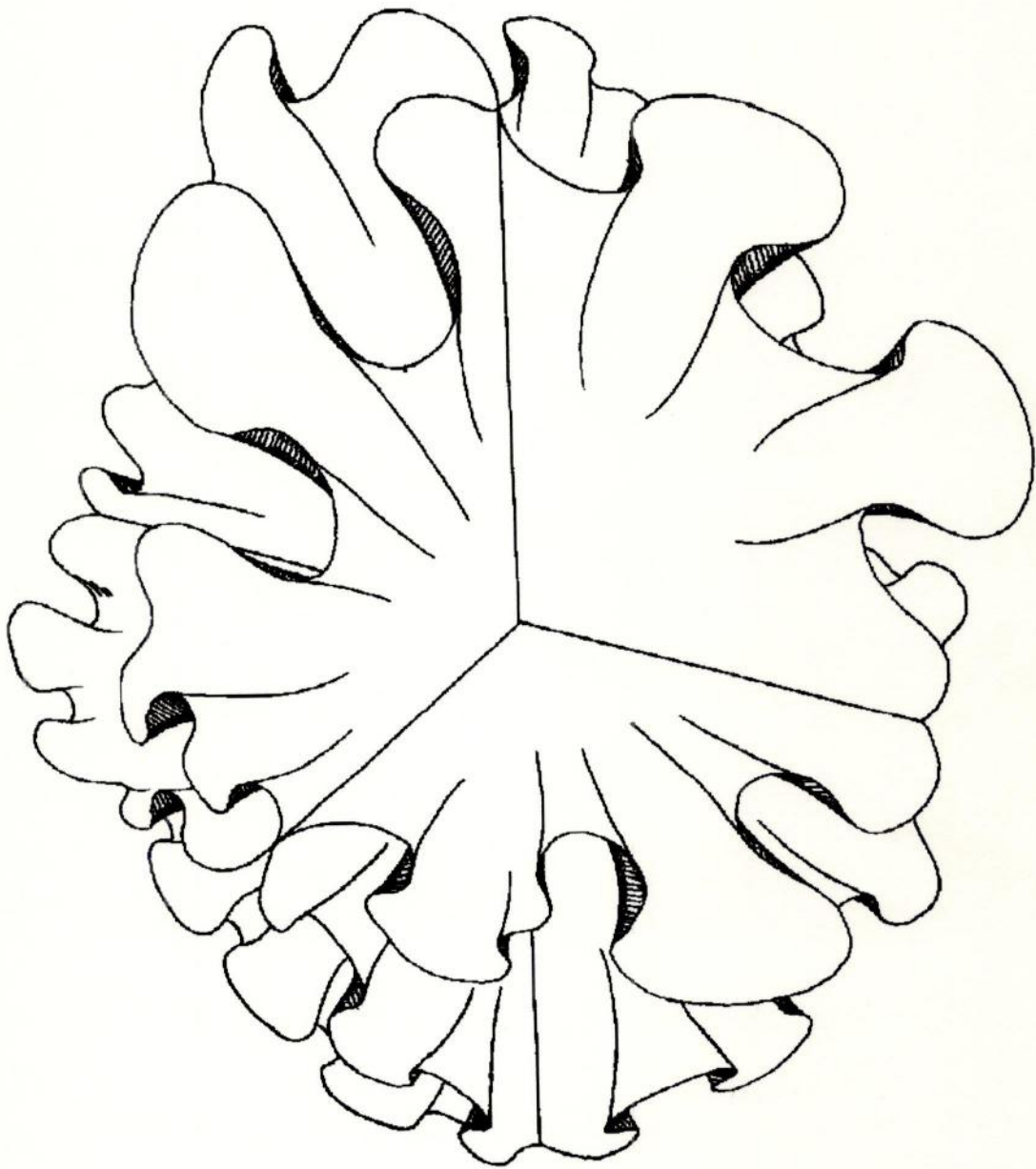


Figura 2.6 Cada seção do espaço hiperbólico H^3 é um plano hiperbólico H^2 ([1], p.216).



Figura 2.7 De acordo com a nossa visão binocular, objetos distantes no H^3 parecem próximos ([1], p.219). No plano hiperbólico o infinito é "estendido", isto é, uma imagem vinda do infinito hiperbólico pode vir de várias distâncias diferentes na mesma linha de visada, e não apenas de uma única distância (o infinito euclidiano). Como a nossa visão somente é sensível ao infinito euclidiano, concluímos que o objeto está próximo de nós, mas podendo na verdade estar muito mais afastado do que podemos imaginar.

Um espaço que admite a geometria hiperbólica é o espaço de Seifert-Weber, cuja representação é um dodecaedro cujas faces opostas são identificadas com um giro de $3/10$ de volta, sempre no mesmo sentido.

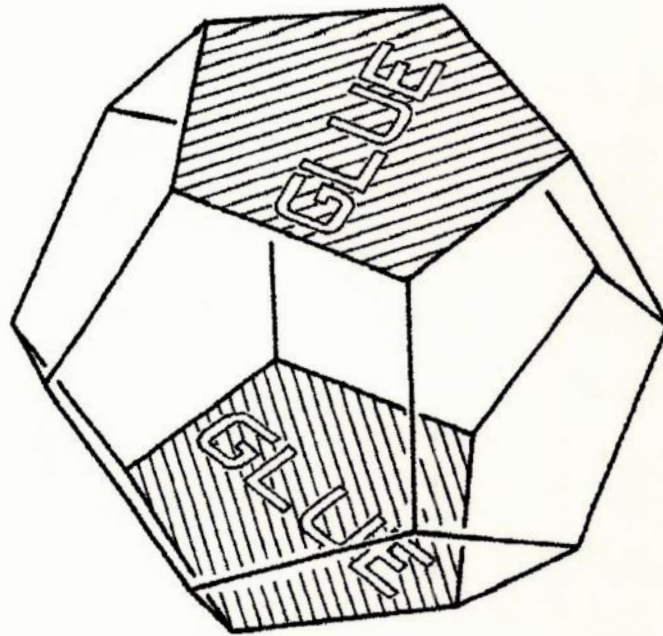


Figura 2.8 Espaço de Seifert-Weber ([1], p222) representado por um dodecaedro com faces opostas giradas de $3/10$ de volta e identificadas.

2.3 Variedades de configuração

A topologia aparece também em exemplos simples de variedades de configuração. Veremos alguns exemplos de variedades de configuração em duas e três dimensões.

Consideremos um pêndulo duplo (figura 2.9) formado por duas barras P_1 e P_2 unidas por uma rótula e que podem girar em um plano livremente [3]. Chamaremos de α e β os ângulos que fazem com o eixo vertical. No espaço representativo do movimento do pêndulo os ângulos de 0 radiano a 2π radianos tem que ser identificados, pois correspondem à mesma posição do pêndulo.

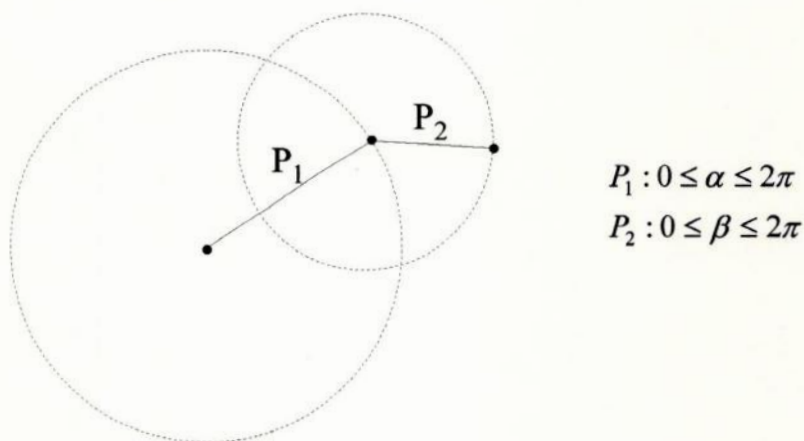


Figura 2.9 Pêndulo duplo girando em um plano livremente. Os pêndulos P_1 e P_2 podem girar continuamente e de forma independente uma da outra, descrevendo ângulos de 0 a 2π radianos.

O pêndulo P_1 pode girar independentemente do pêndulo P_2 . O conjunto de todas as posições possíveis que os pêndulos P_1 e P_2 podem ocupar no plano é chamado *espaço de configuração* do sistema. Podemos representar este espaço em um plano, como mostra a figura 2.10, através dos ângulos α e β .

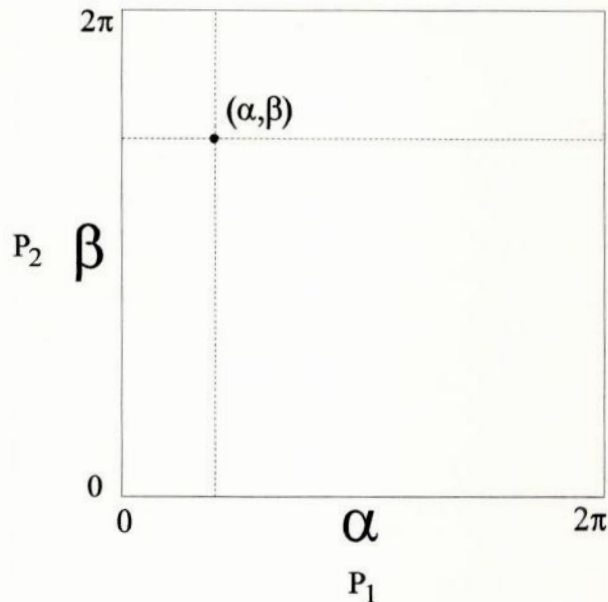


Figura 2.10 Representação das possíveis configurações do pêndulo duplo. Na abcissa temos o ângulo do pêndulo P1, e na ordenada o ângulo do pêndulo P2. Observe que estes pontos representam cada um uma configuração espacial do pêndulo duplo.

Cada posição de P₁ e P₂, isto é, cada par (α, β) é representada por um ponto no interior ou no lado do quadrado. Observe que os pontos $\alpha = 0$ são equivalentes aos pontos $\alpha = 2\pi$, o mesmo acontecendo para β . Estas identificações acarretam a representação deste espaço de configurações como um quadrado com a topologia do toro T^2 (figura 2.11).

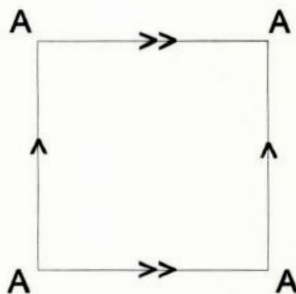


Figura 2.11 A variedade de configuração do pêndulo duplo é o toro T^2 . Observe que os ângulos das extremidades da fig. 2.10 na verdade estão identificados, e temos que $0 = 2\pi$ radianos, correspondente ao ponto A na figura.

De maneira análoga temos que para um conjunto de 3 barras vinculadas que giram livremente em um plano, a variedade de configurações (ver figura 2.12) possui a topologia do tritoro T^3 ([2], p. 82).

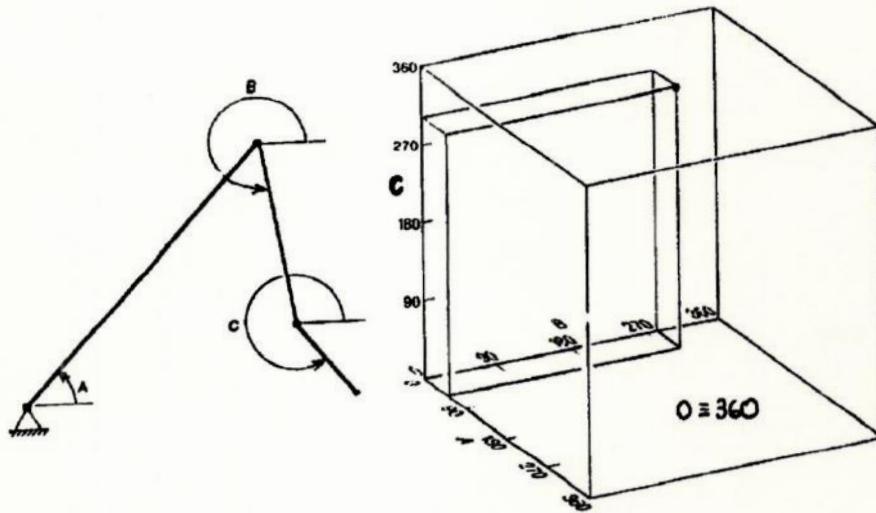


Figura 2.12 As 3 barras vinculadas que giram livremente no plano, sua variedade de configuração é o tritoro T^3 .

Uma outra variedade de configuração é aquela obtida a partir dos diâmetros de uma esfera (bola sólida B^3) ([8], p. 201). A cada diâmetro podemos associar o par de pontos antípodas correspondentes a interseção do diâmetro com a superfície S^2 que delimita a B^3 . Logo, a um par de pontos A e \bar{A} na S^2 correspondem um único diâmetro da B^3 . Na figura 2.13 vemos uma seção da B^3 passando por seu centro C e, os pares de pontos antípodas A e \bar{A} , B e \bar{B} . Conforme vimos no Capítulo 1 a superfície esférica com os pontos antípodas identificados é o plano projetivo real P^2 , sendo assim a variedade dos diâmetros de uma esfera B^3 tem a topologia do plano projetivo real P^2 .

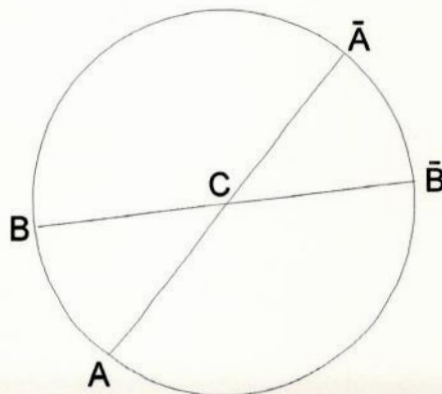


Figura 2.13 Variedade de configuração dos diâmetros de uma esfera. Na figura, a representação de uma seção bidimensional (um disco D^2) da esfera B^3 . Os pontos antípodas da fronteira do disco estão identificados, sendo cada identificação desta correspondente a um diâmetro na esfera. O mesmo ocorre para todas as outras seções bidimensionais. Obtemos então uma superfície esférica cujos todos os pontos da fronteira estão identificados. Esta configuração possui a topologia do plano projetivo.

Veremos ainda a variedade de configuração obtida a partir das cordas em um círculo. Considere em um círculo de raio a , um ponto P interior a mesmo, e uma de suas cordas que tenha como ponto médio P , ver figura 2.14. Tracemos uma perpendicular a esta corda, que passe pelo centro C do círculo, interceptando a corda em P . Seja d a distância entre a corda e a circunferência que o delimita. Prolongando-se a perpendicular \overline{CP} , marquemos um ponto P^* externo ao círculo sobre ela, tal que sua distância à circunferência seja também d .

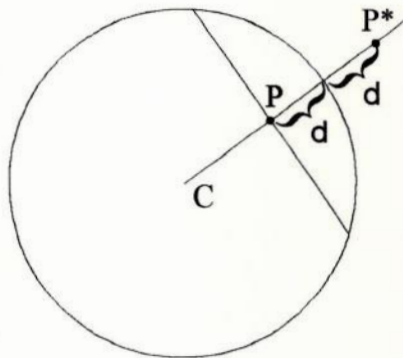


Figura 2.14 Variedade de configuração a partir das cordas de um círculo. Inicialmente considere uma corda no círculo e uma perpendicular a ela que passe pelo centro do círculo, obtendo-se o ponto P . A distância d do ponto P ao círculo é duplicada para fora do círculo, sobre a perpendicular, onde se marca o ponto P^* . Desta forma cada corda é representada por um ponto P^* fora do círculo. O lugar geométrico dos pontos P^* é uma coroa circular.

Repetindo procedimento análogo para todas as outras cordas, obteremos como lugar geométrico dos pontos do tipo P^* , um conjunto de pontos distribuídos na forma de um anel de raio interno a e externo $2a$, ver a figura 2.15.

O conjunto de pontos da circunferência interna de raio a representa as cordas “degeneradas” em pontos da fronteira do círculo. Mas quanto aos pontos da circunferência mais externa de raio $2a$, à primeira vista poderiam representar univocamente as cordas que passam pelo centro do círculo. Acontece que cada corda

que passa pelo centro pode ser representada tanto pelo ponto P_1^* na figura 2.15 quanto pelo ponto P_2^* na mesma figura. Para entendermos melhor esta representação, convém deslocarmos uma corda que passa por C um pouquinho para a direita e a transformamos na corda C_1 , e para a esquerda transformando-a na corda C_2 . Elas serão representadas respectivamente por pontos que estão próximos de P_1 e de P_2 . Em suma, para que represente as cordas do círculo, os pontos antípodas da circunferência externa deverão ser identificados.

Sabemos pela seção 1.7 que, se de um plano projetivo retirarmos um disco, obteremos a faixa de Möbius, logo a variedade das cordas de um círculo tem a topologia da faixa de Möbius, pois é o anel (uma S^2 menos um disco) com os pontos da fronteira externa identificados.

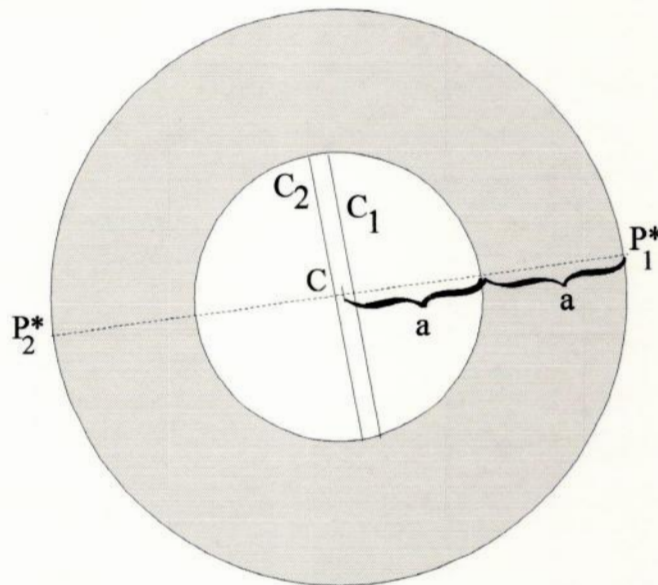


Figura 2.15 Lugar geométrico dos pontos P^* , a coroa circular. Considerando duas cordas muito próximas do centro, C_1 e C_2 . Como os pontos P_1^* e P_2^* representam estas cordas, se estas cordas estão próximas, seus pontos representativos devem também estar próximos. Portanto os pontos P_1^* e P_2^* da coroa devem ser identificados. O mesmo acontece para todas as outras cordas próximas ao centro. Desta forma obtemos que a fronteira da coroa possui todos os pontos antípodas identificados. A configuração resultante é idêntica a de um plano projetivo sem um disco, e portanto esta coroa circular possui a topologia da faixa de Möbius.

Capítulo 3

PRODUTOS

Há muitas maneiras de se construir um espaço que tenha uma determinada topologia, uma delas é através de *produtos*. Um cilindro, por exemplo, é o produto de uma circunferência S^1 por um intervalo I ([1],p.85).



Figura 3.1 Um cilindro é o produto $S^1 \times I$, uma circunferência por um intervalo.

O cilindro tanto pode ser um conjunto de intervalos arranjados numa circunferência quanto um conjunto de circunferências arranjadas em um intervalo (ver figura 3.2), abreviadamente é escrito como $S^1 \times I$. Neste produto considerando-se S^1 como *base*, I é chamado de *fibra*.

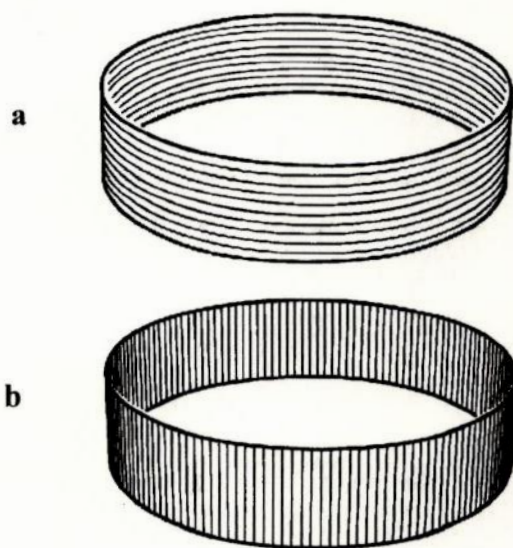


Figura 3.2 Podemos observar o produto $S^1 \times I$ que forma o cilindro de duas maneiras: o cilindro é um intervalo de circunferências **(a)**, ou uma circunferência de intervalos **(b)**. Este tipo de equivalência é chamada de produto geométrico.

Produtos deste tipo, onde todas as circunferências e intervalos são de mesmo tamanho e cada circunferência é perpendicular a cada intervalo é chamado de *produto geométrico*.

Na figura 3.3, podemos observar 3 versões topologicamente equivalentes do produto $S^1 \times I$. Neste caso, o *produto* $S^1 \times I$ é dito *topológico*, pois mantém a topologia do cilindro mas viola as regras do produto geométrico.

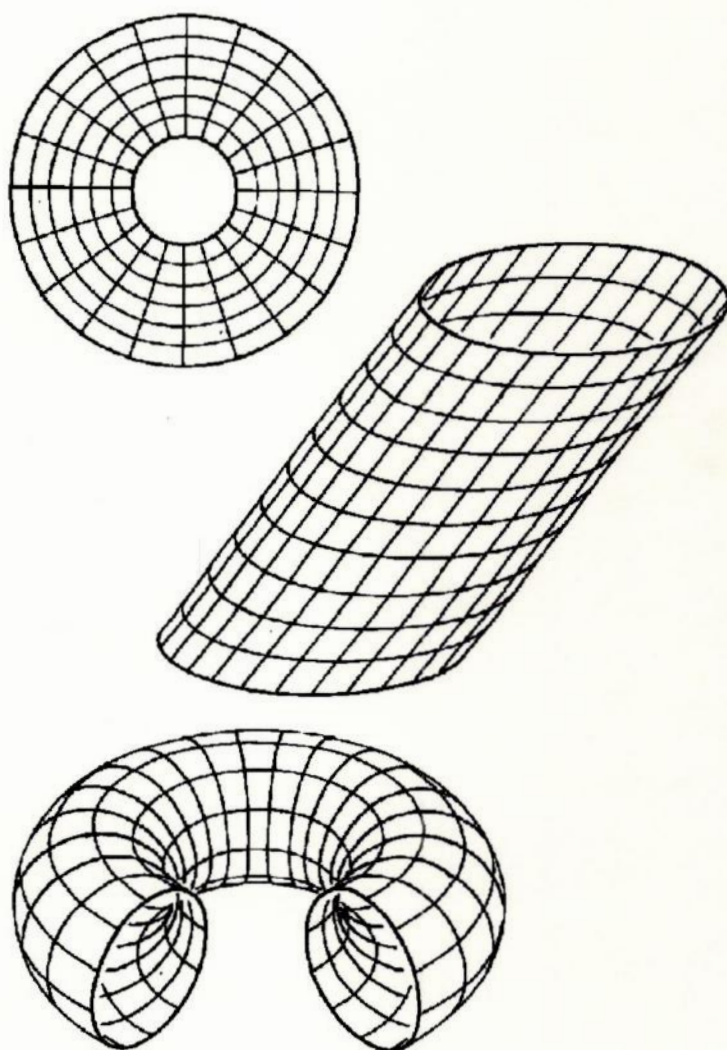


Figura 3.3 Produtos topológicos $S^1 \times I$ ([1],p.89). Todos são topologicamente equivalentes ao cilindro, mas não apresentam as suas características geométricas.

O toro é um segundo exemplo de produto, é o produto de uma circunferência por outra circunferência, pois é um conjunto de circunferências dispostas em uma outra, e se escreve $T^2 = S^1 \times S^1$. O toro é a única superfície fechada que é um produto ([1], p. 86).

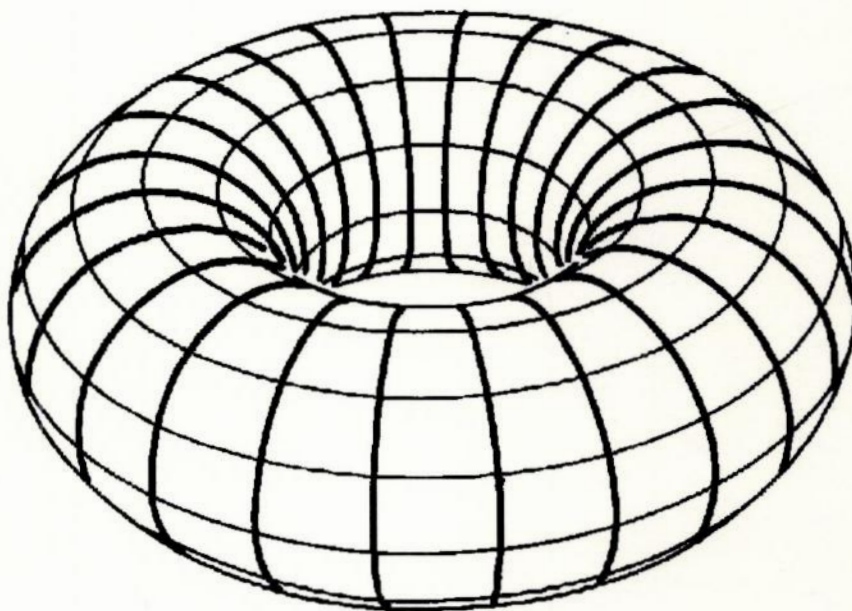


Figura 3.4 O toro também é um produto topológico $S^1 \times S^1$ ([1], p. 86), uma circunferência por uma circunferência.

Produtos são úteis para se entender as triviedades. É verdade que a maioria das triviedades não são produtos, mas muitas das mais simples são. O tritoro (será descrito no capítulo seguinte) é o produto $T^2 \times S^1$. Novamente, se considerarmos o toro como o quadrado com lados identificados, as fibras S^1 podem ser obtidas a partir do intervalo I onde as extremidades são identificadas. Logo, o tritoro é um produto geométrico pois todos os toros horizontais são do mesmo tamanho, todos os círculos verticais são do mesmo tamanho e cada toro é perpendicular a cada círculo. Portanto, o tritoro é tanto um círculo de toros, quanto um toro de círculos.

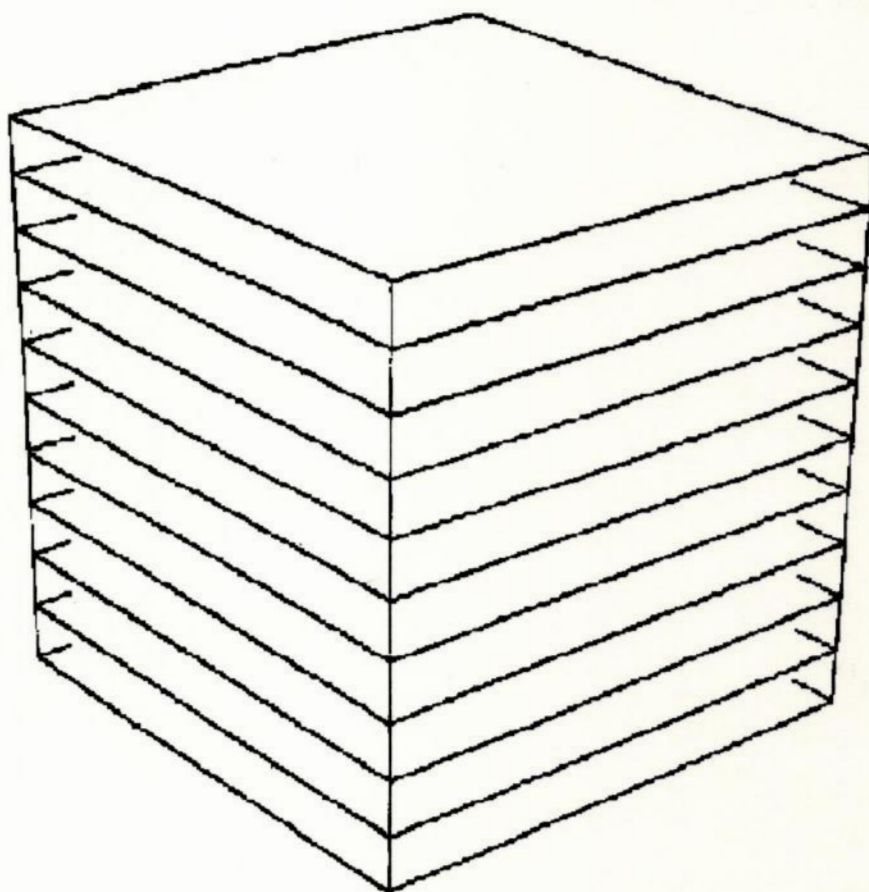


Figura 3.5 Um tritoro é o produto $T^2 \times S^1$. Cada quadrado possui os lados opostos identificados, representando o toro T^2 . O intervalo (linha vertical) possui suas extremidades identificadas, de modo a formar uma circunferência S^1 . Desta forma o produto $T^2 \times S^1$ é um produto geométrico.

Capítulo 4

A CLASSIFICAÇÃO DE THURSTON

É interessante lembrar que em duas dimensões só existem 3 geometrias homogêneas e isotrópicas, a elítica, a hiperbólica e a euclidiana. Não existem geometrias homogêneas e não isotrópicas em 2 dimensões, somente em 3 ou mais dimensões é que existem geometrias homogêneas não isotrópicas ([1], p.251).

A *Classificação de Thurston* diz respeito a triviedades compactas e localmente homogêneas. É importante notar que de fato temos infinitas geometrias em três dimensões, mas apenas 8 são geometrias localmente homogêneas e admitem variedades compactas. Alertamos ao leitor que ao nos referirmos a uma determinada geometria estamos nos referindo a uma *classe de geometrias* ([2], p.96), que significa toda uma família de geometrias que possuem as mesmas características globais. Por exemplo, a geometria de uma biesfera de raio igual a três é no sentido restrito diferente da geometria de uma esfera de raio dez, mas as duas, no sentido aqui usado, pertencem a uma mesma família, a família das geometrias elíticas bidimensionais. Das 8 classes de geometrias possíveis, 3 são isotrópicas (euclidiana, elítica, hiperbólica) e 5 são anisotrópicas. Vejamos a seguir uma descrição breve das 8 classes de geometrias com exemplos das topologias admisíveis.

Tipo 1 - Geometria Euclidiana E^3

Há apenas 10 topologias diferentes que admitem geometria euclidiana. Das 10, 6 são orientáveis e 4 são não orientáveis.

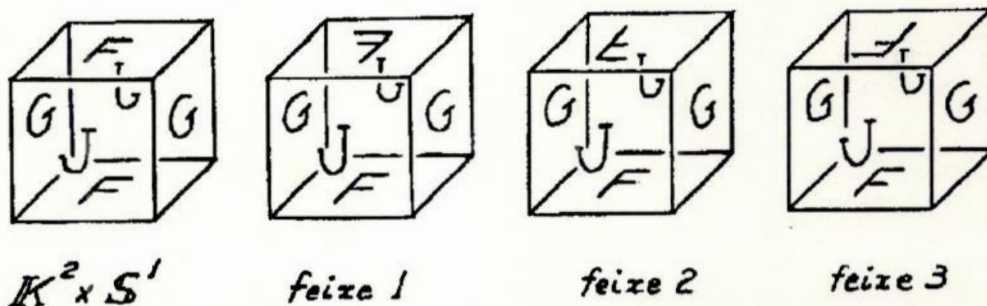


Figura 4.1 Representação das 4 topologias não orientáveis do E^3 ([2], p.98).

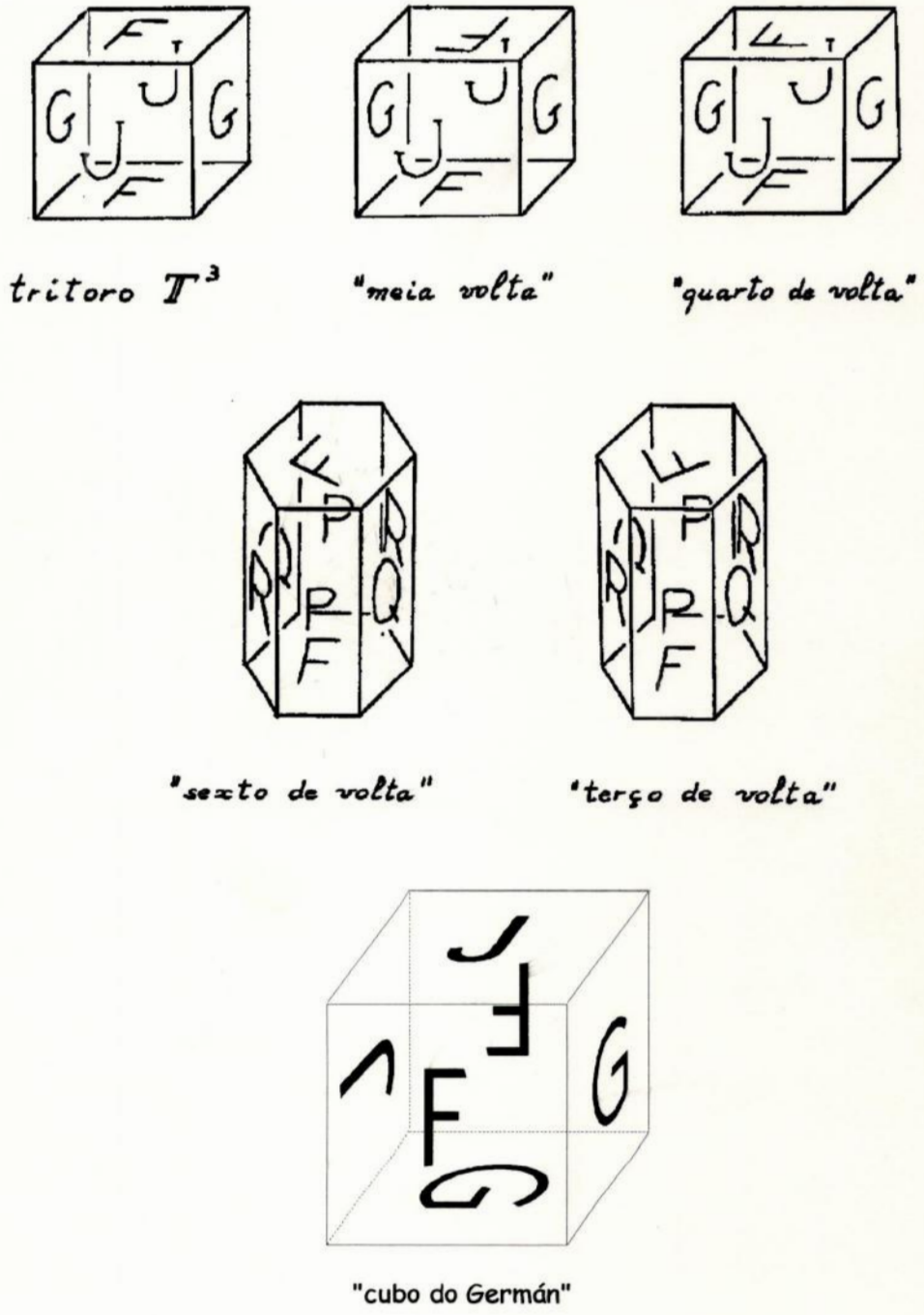


Figura 4.2 Rrepresentação das 6 topologias orientáveis do E^3 ([2], p.99; [15]).

Tipo 2 - Geometria Elítica S^3

É a geometria da triessfera S^3 . Alguns exemplos de topologias são: a própria triessfera S^3 , o triespço projetivo real P^3 , o dodecaedo de Poincaré.

Tipo 3 - Geometria Hiperbólica H^3

É o análogo tridimensional do H^2 . Alguns exemplos de variedades que a admitem são o espaço de Seifert-Weber e a variedade de Weeks [9].

Tipo 4 - Geometria $S^2 \times E$

Esta geometria não é isotrópica. Em cada ponto temos seções bidimensionais com geometria euclidiana enquanto que outras seções são superfícies com geometria elítica. Há somente 4 trivariiedades com esta geometria: $S^2 \times S^1$ orientável, K^3 (não orientável), $P^2 \times S^1$ não orientável e uma variedade obtida a partir do P^3 e que é orientável.

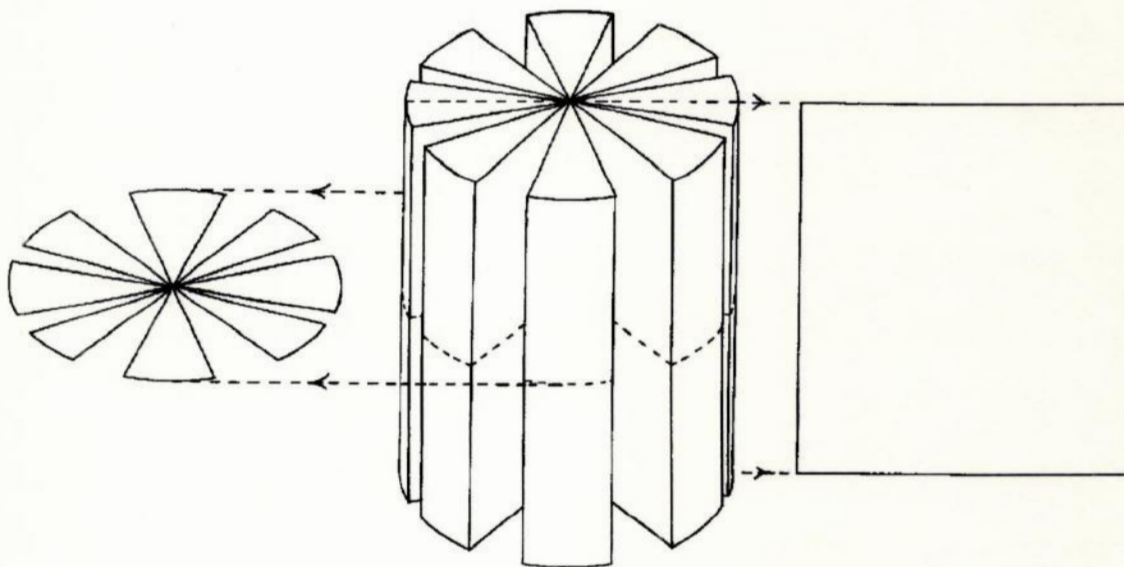


Figura 4.3 A seção vertical de $S^2 \times E$ possui geometria euclidiana, mas a seção horizontal possui geometria elítica ([1], p.249).

Tipo 5 - Geometria $H^2 \times E$

Esta geometria não é isotrópica; algumas de suas secções bidimensionais apresentam geometria euclidiana e outras geometria hiperbólica. Há uma infinidade de trivriedades com esta geometria; o produto de qualquer superfície hiperbólica por S^1 ou por E^1 (reta real) possui esta estrutura. Exemplos são: $T_g \times S^1$, onde os T_g são torus com genus g , isto é, esferas S^2 com g alças.

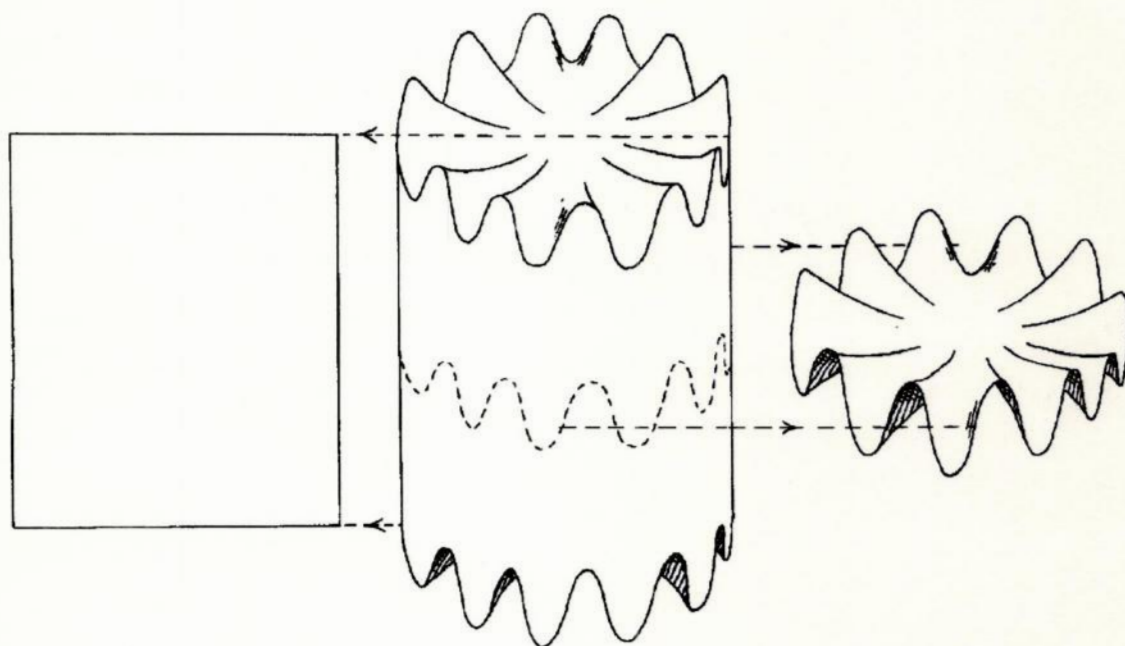


Figura 4.4 A seção vertical de $H^2 \times E$ possui geometria euclidiana, mas a seção horizontal possui geometria hiperbólica ([1], p.250).

Tipo 6 - Geometria Euclidiana torcida (ou Nil)

Consideremos o E^3 como $E^2 \times E$, isto é, planos euclidianos recobertos por fibras verticais que são retas E . Ao caminharmos num destes planos horizontalmente, isto é, perpendicularmente as fibras verticais retornaremos exatamente ao ponto de partida. Já na geometria Nil, ou euclidiana torcida, um caminho horizontal deste tipo (ver figura 4.5) nos traz à mesma fibra da qual partimos, porém estaremos um pouco acima ou abaixo do ponto de partida. É um espaço orientável.

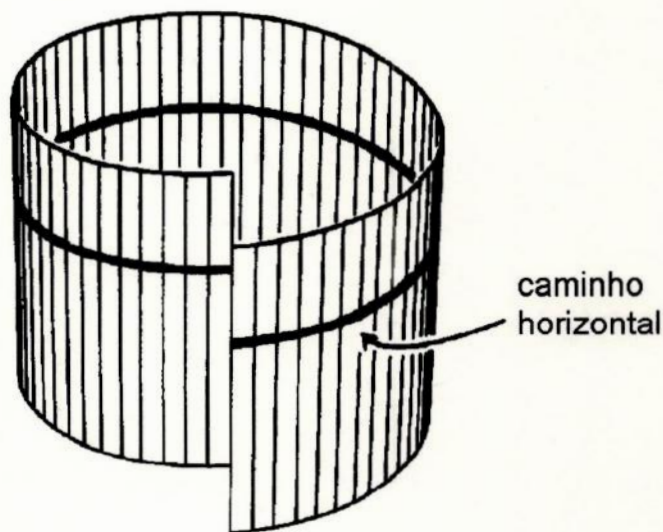


Figura 4.5 Se caminharmos horizontalmente numa variedade euclidiana torcida voltaremos na mesma fibra, porém um ponto acima ou abaixo do ponto de partida ([1], p.255).

Como exemplos de variedades com esta geometria temos o tritoro torcido. Sua representação é a de um cubo com as faces superior e inferior identificadas da maneira usual, porém as faces laterais opostas requerem identificação fibra a fibra. Cada fibra vertical é identificada à que lhe fica exatamente em frente na face oposta, mas com um deslocamento vertical dado por uma linha inclinada como indica a figura 4.6 (cada fibra é topologicamente uma circunferência S^1).

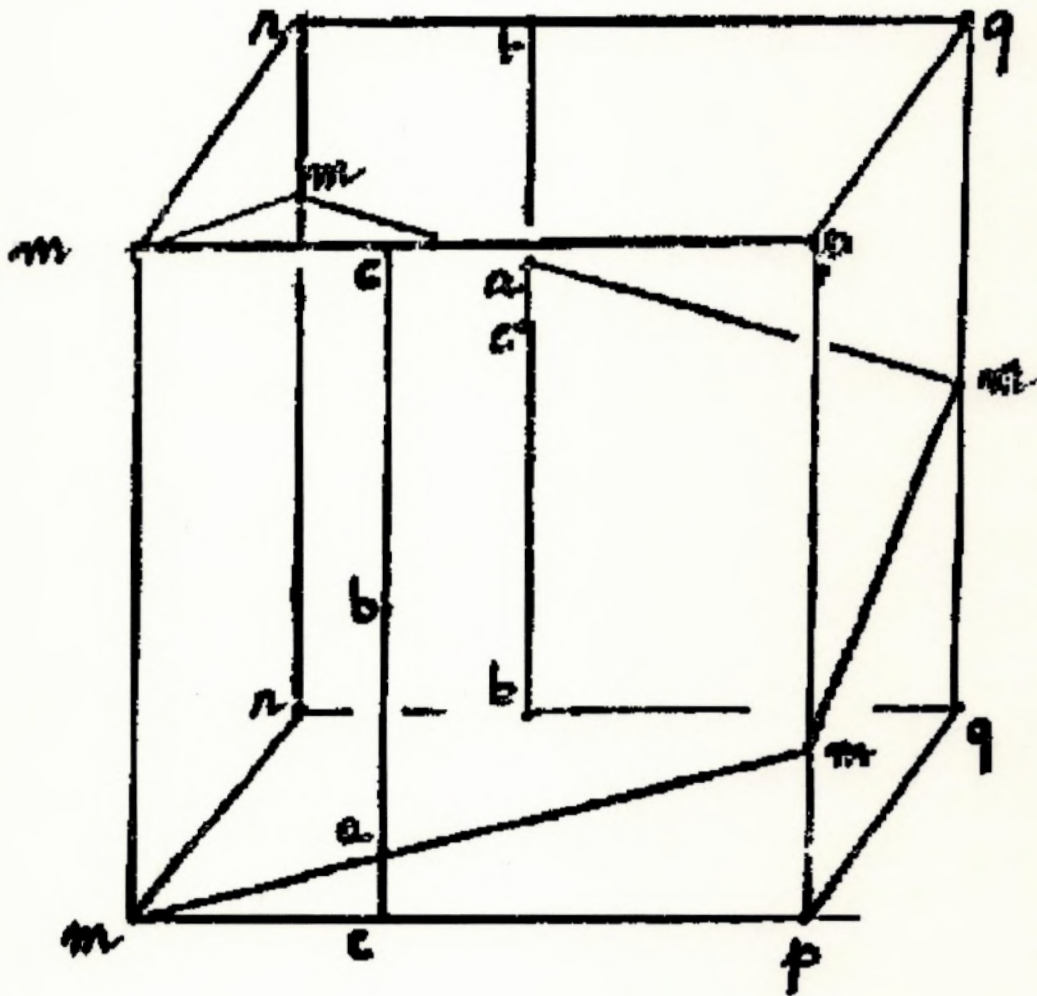


Figura 4.6 - Tritoro torcido com geometria Nil ([2], p.104).

Tipo 7 - Geometria $H^2 \times E$ torcida

Esta geometria não é isotrópica. Um exemplo de variedade com esta geometria é aquela obtida a partir de um prisma octogonal conforme as identificações da figura 4.7.

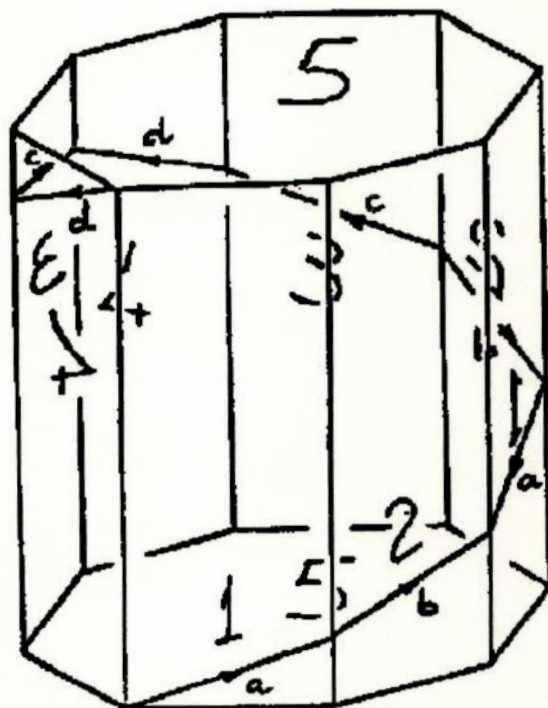


Figura 4.7 Variedade com geometria $H^2 \times E$ torcida ([1], p.104).

Tipo 8 - Geometria Solve (ou Sol)

O nome Solve vem de "grupos de Lie solúveis", esta trivariiedade pode ser representada abstratamente por um grupo de Lie. A geometria Sol é totalmente anisotrópica. Não se conhece qualquer variedade que seja dotada dessa geometria e cuja visualização seja suficientemente simples.

CONCLUSÃO

Com a intuição adquirida com o estudo das superfícies foi possível iniciar o estudo dos espaços tridimensionais compactos e descrever alguns exemplos.

No caso de espaços compactos que admitem a geometria elítica, descrevemos sucintamente a triessfera S^3 , o triespaco projetivo P^3 e o dodecaedro de Poincaré. É sabido que não existem espaços tridimensionais que admitem a geometria elítica e que sejam também não compactos. Já aqueles que admitem a geometria hiperbólica ou euclidiana tanto podem ser não-compactos quanto compactos, portanto chamá-los de espaços “abertos” no sentido de infinitos contribui para criar mais confusão sobre o assunto.

Ainda que não tenhamos descrito muitos espaços compactos com geometria hiperbólica do H^3 , sabe-se que existe um número infinito de variedades compactas que admitem a geometria hiperbólica tridimensional ([10], p.403). Já os espaços compactos que admitem a geometria do E^3 são apenas 10.

Sendo assim, qualquer uma das três geometrias homogêneas e isotrópicas que venha a ser assumida para modelo de universo na Teoria Cosmológica Padrão pode ter uma topologia compacta.

Por muito tempo foi considerado como geometria possível para o universo apenas cada uma dos três tipos de geometria homogênea e isotrópica (Euclidiana, Hiperbólica e Elítica), pois não havia como se medir diretamente a topologia do universo. Porém após 1990 muitos trabalhos começaram a surgir em topologia cósmica e uma busca pela determinação observacional da topologia do universo teve início.

Um dos testes observacionais simples da topologia do universo é a observação da distribuição espacial das galáxias. Por exemplo, se as galáxias estiverem distribuídas numa espécie de rede retangular, com imagens da mesma galáxia se repetindo em pontos equivalentes da rede, o universo possuiria a topologia de um tritoro. Outros padrões semelhantes que pudessem ser observados revelariam topologias mais complicadas. Mas observar estes padrões é difícil porque as imagens de uma galáxia mostram pontos diferentes da sua história evolutiva. Astrônomos precisariam reconhecer a mesma galáxia a despeito de mudanças na aparência ou desvios em posição relativos as galáxias vizinhas, isto é, conhecer a evolução galáctica,

que é um assunto em aberto e em pesquisa. Imagens repetidas de galáxias foram procuradas por Sokoloff, Shvartsman, Gott e Fagundes em um raio de um bilhão de anos-luz da Terra, mas nenhuma imagem repetida foi encontrada.

Padrões baseados em quasares foram procurados por Roukema e outros. Quasares são objetos brilhantes, possivelmente associados a buracos negros no centro de galáxias e podem ser vistos a grandes distâncias. Todos os grupos de 4 ou mais quasares observados foram identificados e suas relações espaciais com cada grupo foram determinadas de tal modo a tentar identificar grupos idênticos vistos em direções diferentes. Roukema identificou duas possibilidades, mas não é estatisticamente significativa.

Outros pesquisadores abordaram o problema do reconhecimento de galáxias de outra forma. Lehoucq, Lachièze-Rey e Luminet desenvolveram um método chamado de cristalografia cósmica, no qual o padrão é determinado estatisticamente em um universo euclidiano, sem a necessidade de reconhecer galáxias específicas como imagem uma da outra. Se as imagens de galáxias se repetem periodicamente, um histograma de todas as distâncias relativas entre as galáxias poderia mostrar certos picos em certas distâncias, que representariam o verdadeiro tamanho do universo. Porém ainda não foram encontrados padrões, mas o motivo pode ser a falta de dados de galáxias mais distantes do que 2 bilhões de anos-luz. O SDSS (Sloan Digital Sky Survey) irá construir um mapa tridimensional do universo produzindo um conjunto grande de dados destes estudos.

Outros grupos de pesquisa utilizam a radiação cósmica de fundo para determinar a topologia do universo. A origem da radiação cósmica de fundo remonta ao tempo em que o plasma primordial do big bang condensou-se em hidrogênio e hélio e a radiação se separou da matéria, propagando-se até nós e chegando em forma de microondas. Esta radiação é muito homogênea: sua temperatura e intensidade são as mesmas em todas as partes do céu (uma parte em 10.000). Porém o satélite COBE (Cosmic Background Explorer) encontrou em 1991 pequenas inhomogeneidades causadas por variações de densidade do universo jovem. Estas flutuações são a chave para resolver uma série de problemas cosmológicos, e topologia é um deles. Os fótons de microondas iniciaram a sua jornada aproximadamente em algum ponto ao mesmo tempo e a mesma distância da Terra. Estes pontos de partida formam uma esfera, chamada de superfície de último espalhamento, na qual a Terra é o centro. Assim como um disco suficientemente grande desenhado sobre um papel se sobrepõe

quando enrolamos o papel como um tubinho, a superfície de último espalhamento irá interceptar a si mesma se for grande o suficiente para cobrir todo o caminho ao redor do universo (no caso do universo possuir topologia compacta). A interseção da esfera com si mesma é simplesmente um círculo de pontos no espaço. Olhando para este círculo da Terra, astrônomos poderiam ver dois círculos no céu que compartilham o mesmo padrão de variação de temperaturas, que na verdade seriam imagens do mesmo círculo em direções diferentes do céu. Mas para procurar pares de círculos idênticos é necessária uma resolução mais alta para se observar a radiação cósmica de fundo (COBE não resolve estruturas com tamanho angular menor do que 10 graus e nem pontos individuais frios e quentes). Dois satélites estão sendo preparados especificamente para este trabalho, o satélite MAP (Microwave Anisotropy Probe), a ser lançado pela NASA em 2000 e o satélite Planck, a ser lançado pela ESA em 2007. As posições relativas no céu dos círculos que se interceptam revelariam a topologia específica do universo.

Outros grupos possuem planos diferentes para estes dados que estão por vir. Barrow e Levin, Bunn e Scannapieco e Silk pretendem examinar o padrão de pontos frios e quentes diretamente, comparando com modelos que simulam a radiação cósmica de fundo para várias topologias. Bond, Pogosyan e Souradeep estão aplicando novas técnicas aos dados do COBE buscando identificar com precisão suficiente os menores espaços hiperbólicos.

Se as observações mostrarem que o universo é finito, isto irá resolver o maior quebra-cabeça em cosmologia: a homogeneidade em larga escala do universo. A necessidade de explicar esta uniformidade leva a teoria da inflação, mas inflação é difícil de se obter, porque em sua forma atual leva a uma geometria cósmica euclidiana - em contradição aparente com a densidade de matéria observada. Uma alternativa é o universo ser menor do que parece. Se isto acontecer, a inflação pode ter parado prematuramente - antes de fornecer a geometria euclidiana - e ainda tornando o universo homogêneo. Sokolov e outros tem usado os dados do COBE para mostrar que o espaço poderia ser um tritoro, mas é viável também se o espaço for hiperbólico.

Universos deste tipo terão a formação de múltiplas imagens de todos os objetos cósmicos, afetando inevitavelmente as observações astronômicas da estrutura em larga escala.

As áreas de pesquisas observacionais em topologia do universo estão atualmente divididas em duas: através da radiação cósmica de fundo (CMBR) e através do estudo de fontes discretas. Estas duas áreas buscam evidências observacionais da topologia de nosso universo através da pesquisa de possíveis efeitos de origem topológica presentes em nossas observações.

No que se refere à CMBR, sua principal meta é desvendar a pequena anisotropia observada pelo satélite COBE na radiação cósmica de fundo. Tal anisotropia pode ter origem topológica. Nesta linha de trabalho, temos duas vertentes: círculos no céu (Circles in the Sky) e multipolos (maiores detalhes, referências [17]).

Já o estudo de fontes discretas diz respeito as possíveis imagens múltiplas de objetos cósmicos que nosso universo poderia apresentar devido à sua própria topologia. Nesta linha de trabalho temos, dentre outras, a chamada Cristalografia Cósmica, que busca desvendar a topologia de nosso universo pela análise da repetição de distâncias entre os objetos cósmicos em razão da compacidade do espaço (detalhes em [16]).

REFERÊNCIAS

- [1] J. R. Weeks - *The shape of space* - Marcel Dekker, Inc. New York - 1985;
- [2] A. L. Oliveira - Campo magnético em uma triesfera e introdução às triviedades - Tese de Mestrado - CBPF - 1993;
- [3] W. P. Thurston, J. R. Weeks - The Mathematics of Three-Dimensional Manifolds - Sci. Am., july 1984, 108-120;
- [4] G. F. R. Ellis - Topology and Cosmology - Gen. Rel. Grav. 2 (1971) 7-21;
- [5] D. D. Sokolov, V. F. Schvartsmann - An Estimate of the Size of the Universe from a Topological point of view - Sov. Phys. JEPT, 39 (1974) 196-200);
- [6] Abbott, E. A. - *Flatland: A Romance of Many Dimensions* - Dover - New York - 1952;
- [7] M. Nakahara - *Geometry, Topology and Physics* - Adam Hilger - Bristol, England - 1990;
- [8] D. W. Blackett - *Elementary topology: a combinatorial and algebraic approach* - Academic Press - New York - 1968;
- [9] M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet - Cosmic Topology - Phys. Rep. 254 (1995) 135-214;
- [10] P. Scott - The Geometries of 3-Manifolds - Bull. London Math. Soc., 15 (1983) 401-487;
- [11] M. A. Armstrong - *Basic Topology* - Springer-Verlag - New York - 1983;

- [12] W. P. Thurston - *Three-Dimensional Geometry and Topology* - Princeton Mathematical Series, 35 - New Jersey - 1997;
- [13] J. R. Weeks, PhD Tesis, Princeton University;
- [14] J. A. Wolf - *Spaces of constant curvature* - fifth edition - Publish or Perish, Inc. USA - 1984;
- [15] G. I. Gomero - Fundamental Polyhedron and Glueing Data for the Sixth Euclidean Compact Orientable 3-manifold - Notas de Física - CBPF-NF-049/97 - 1997;
- [16] Cristalografia Cósmica:
- J.-P. Luminet, B. F. Roukema - Topology of the Universe: Theory and Observations - astro-ph 9901364;
 - J.-P. Luminet - Past and Future of Cosmic Topology - gr-qc/9804006, 2 Apr 1998;
 - G. I. Gomero, A. F. F. Teixeira, M. J. Rebouças, A. Bernui - Spikes in Cosmic Crystallography - gr-qc/9811038;
- [17] Radiação Cósmica de Fundo e Topologia:
- N. J. Cornish, D. Spergel, G. Starkman - Can COBE see the shape of the Universe? - Phys. Rev. D 57 (1998) 5982-5996;
 - N. J. Cornish, J. R. Weeks - Measuring the shape of the Universe - astro-ph/9807311.
- [18] Histórico da Topologia:
- Enciclopédia Mirador. Verbetes: geometria, topologia.