



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Departamento de Astronomia

**Linhas de Fluxo de Disco de Acréscimo
em Estrelas Binárias como
Órbitas Periódicas Simples**

Aluna : Annelisie Aiex Corrêa
Orientadora: Teresinha de Jesus Stuchi (IF / UFRJ)

Projeto de Final de Curso para a Obtenção do
Título de Astrônomo

*Aos meus pais, Sandra e Altair,
pelo apoio incondicional.*

Agradecimentos

À minha orientadora **Teresa Stuchi** por não ter poupado esforços na exaustiva correção deste trabalho e pela sua total dedicação e paciência, principalmente na fase final, onde tive o prazer de confirmar todo o seu profissionalismo e amizade.

Às minhas professoras **Encarnación** e **Sueli** pela disponibilidade e apoio que não hesitaram em economizar, tanto nos preparatórios da apresentação como em outras ocasiões, nas quais sempre mostraram que não são meras professoras, são amigas acima de qualquer outro título.

Ao meu irmão **Glauco** pela eterna cumplicidade.

Aos meus incansáveis amigos **Ana Paula**, **Francis** e **Mariano** por todo tempo dedicado às nossas dúvidas, ambições e decisões.

Ao **Bruno**, **Cláudia**, **Flávia**, **Hugo** e **Ronaldo** por eu ter encontrado, em cada um deles, o verdadeiro companheirismo de uma amizade.

Aos meus amigos valonguianos **Beatriz**, **Juliana**, **Flavia Pedroza**, **Luciana**, **Magno**, **Rafael**, **Sandro** e **Wailã** pelas preciosas companhias que foram fundamentais nos momentos mais estressantes.

À **Aracelly**, **Karina**, **Maria Cândida** e **Renata** pela valiosa convivência e paciência.

ABSTRACT

The restricted three-body problem has long been of special interest in celestial mechanics because it is one of the simplest nonintegrable dynamical systems. In this problem, the mass of one body is assumed to be zero which moves under the action of the other two bodies. The primaries move in Keplerian orbits around the center of mass under their mutual gravitational forces. Although, in studying the motion of a small particle in a binary system we must consider the action of repulsion light field superposing on the gravitational field of the stars. According to Radzievskii (1950) this model is called the photogravitational three-body problem. The radiation pressure of each star is included in the potential of the restricted three-body problem through two parameters, α and β , that could be understood as masses reducers. One effect of the influence of the radiation pressure can be noted on the position of the Lagrangean equilibrium points (Zhou & Leung, 1988). The simulations performed under the variation of α and β in a range $(0,1]$ resulted in a significant displacement of these points, showing that the effect of the radiation pressure could not be neglected in a dynamical study of the accretion disk in binary systems. The aim of this work is the determination of the streamlines of the disk. According to Niedzielska (1997), the lines can be modeled by the simple orbits around the stars.

Introdução

O problema restrito de três corpos, principal base deste trabalho, se concentra na compreensão do movimento de um terceiro corpo, perturbado pela atração gravitacional dos dois corpos do sistema (primários), sem influenciar seus movimentos. Esta aproximação decorre devido às dificuldades encontradas no problema gravitacional de três corpos, que foi provado ser não integrável por Poincaré. Apesar da aproximação do problema restrito, ele também continua sendo não integrável, necessitando o uso de técnicas numéricas para a sua solução .

Este problema é estudado detalhadamente no Capítulo 1, onde são obtidas as equações de movimento em dois sistemas distintos, o inercial e o não inercial. É visto que o mesmo problema quando tratado nesses dois referenciais distintos apresentam resultados diferentes, um não conservativo e um conservativo, respectivamente. No mesmo capítulo, também são estudados os pontos de equilíbrio e as curvas equipotenciais do problema, as quais delimitam as possíveis regiões de movimento da partícula.

No entanto, para se estudar o movimento de uma partícula em sistemas binários, foi evidenciado que a pressão de radiação deve ser superposta ao campo gravitacional dos primários, esta formulação [9] é conhecida como o problema fotogravitacional restrito de três corpos, tema chave deste trabalho. No Capítulo 2, é mostrado alguns efeitos da pressão de radiação quando incluída no potencial do problema restrito de três corpos. Nota-se os deslocamentos dos pontos de equilíbrio do sistema bem como mudanças nas curvas equipotenciais.

O disco de acreção de estrelas é formado por partículas que se desprendem da mesma. Baseado no modelo fotogravitacional, foram determinadas as linhas de fluxo do disco para

a estrela de maior massa utilizando órbitas periódicas simples [1]. As órbitas foram obtidas com o método numérico de continuação de soluções , que é detalhado no último capítulo juntamente com os seus resultados.

As características principais obtidas com o problema fotogravitacional: deslocamentos dos pontos de equilíbrio; abertura do lóbulo de Roche, o qual permite troca de matéria entre as estrelas; e dimensões máximas do disco, formam um primeiro delineamento do problema, podendo servir de guia aos modelos hidrodinâmicos mais acurados.

Índice

1	O Problema Restrito de Três Corpos	1
1.1	Introdução	1
1.2	Definindo o Problema	3
1.3	As Equações de Movimento	3
1.3.1	No Sistema Sideral	4
1.3.2	No Sistema Sinódico	7
1.4	Curvas de Velocidade Zero e Pontos de Equilíbrio	10
1.5	Regiões de Movimento ou de Hill	14
2	O Problema Fotogravitacional Restrito de Três Corpos	18
2.1	Introdução	18
2.2	O Potencial de Roche Modificado	20
2.3	Deslocamento dos Pontos de Equilíbrio	22
2.4	Mudanças na Superfície Crítica de Roche	25
2.5	Discussão	26
3	Determinação das Linhas de Fluxo do Disco de Acresção em Sistemas Binários	30
3.1	Introdução	30
3.2	Integração Numérica das Equações de Hamilton	31
3.3	Secção de Poincaré	33

3.4	Órbitas Periódicas	38
3.5	Técnicas Numéricas de Continuação de Soluções	41
3.6	Resultados	45
3.7	Comentários Finais e Perspectivas	48

Lista de Figuras

1.1	Sistema de Coordenadas	4
1.2	Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos com μ	13
1.3	Curvas de Velocidade Zero para os Pontos de Lagrange	14
1.4	Esquema das Regiões de Movimento	15
1.5	Curvas de Velocidade Zero para Diferentes Energias	16
2.1	Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos para $\beta = 1.0$ e 0.8	23
2.2	Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos para $\beta = 0.6$ e 0.2	24
2.3	Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos para $\alpha = 1.0$ e 0.8	24
2.4	Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos para $\alpha = 0.6$ e 0.2	24
2.5	Mudanças nas Curvas de Velocidade Zero para alguns Sistemas Fotograv- itacionais	27
2.6	Sistemas Binários: a) e b) Y Cygni; c) e d) V444 Cygni	28
2.7	Sistema Binário ν_2 Velorum	29
3.1	Partícula em Movimento Quasi-Periódico	34
3.2	Órbita Caótica	34
3.3	Comparação dos Sistemas Fotogravitacional e Gravitacional	34
3.4	Secção que Apresenta Caos	37
3.5	Órbita Periódica Aproximada do Sistema $\mu = 0.3, \alpha = \beta = 0.9$	37
3.6	Famílias (f) e (g) do PRTC com $\mu = 0.3$	39

3.7	Famílias (h) e (i) do PRTC com $\mu = 0.3$	39
3.8	Órbita Periódica Estável do Sistema $\mu = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.9$ e seu Ponto Fixo na Secção	40
3.9	Modelagem do Disco da Estrela Binária TY Bootis	47
3.10	Sistema Binário TY Bootis	47
3.11	Sistema Binário Cygnus X-1	47

Capítulo 1

O Problema Restrito de Três Corpos

1.1 Introdução

O problema restrito de três corpos é um dos problemas mais estudados no domínio da Mecânica Celeste, envolvendo aplicações na dinâmica do sistema solar, na teoria planetária, no movimento de naves espaciais lançadas no sistema solar, na dinâmica estelar etc. Seu estudo envolve a área dos sistemas dinâmicos não integráveis, sendo necessária a aplicação de métodos numéricos para uma análise qualitativa das soluções. Sua principal base está no tratamento do movimento de uma partícula de massa infinitesimal sob influência gravitacional de dois corpos massivos, denotados como primários, os quais se movem em órbitas keplerianas não perturbadas, um ao redor do outro. O problema restrito de três corpos (PRTC) propriamente dito, consiste em se tomar a órbita circular; se a órbita for elíptica, denomina-se problema restrito elíptico de três corpos. A formulação básica deste modelo teve, aparentemente, sua origem na segunda teoria lunar de Euler, há 200 anos passados.

Neste trabalho, o problema estudado se restringe ao caso planar; isto é, despreza-se uma dimensão do movimento: as órbitas de todos os corpos envolvidos acontecem no plano (x, y) .

As equações de movimento para a partícula perturbada pela ação gravitacional dos primários são obtidas pela lei da gravitação de Newton, fornecendo um conjunto de

equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Por outro lado, pode-se obter, para o mesmo sistema, equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, utilizando o formalismo hamiltoniano.

Quando o problema é analisado em dois sistemas de referência distintos, o inercial e o não inercial, nota-se que a energia no primeiro não se conserva, enquanto que no segundo, obtém-se uma constante de movimento - a constante de Jacobi. Apesar do sistema apresentar esta constante de movimento sua resolução analítica continua sendo inviável. Pelo teorema da integrabilidade de Liouville, deveria existir uma segunda integral funcionalmente independente e em involução com a constante de Jacobi.

Neste capítulo, o problema é estudado qualitativamente através das curvas de velocidade zero ou curvas equipotenciais, as quais reduzem o problema quadridimensional ao bidimensional traçado no plano (x,y) . Com isto, pode-se estabelecer regiões de movimento ligado, nas quais a partícula é confinada, e regiões de escape.

Lagrange, verificou que para certas condições iniciais o problema apresenta soluções analíticas. Estas condições iniciais são conhecidas como as soluções de equilíbrio de Euler-Lagrange. Ao tratar o PRTC no sistema inercial, estas soluções aparecem sob a forma de órbitas keplerianas, enquanto que no referencial sinódico, as soluções de equilíbrio correspondem à cinco pontos de equilíbrio, onde uma partícula ali colocada permanece estática. As curvas equipotenciais fornecidas por estes peculiares pontos, auxiliam o estudo das possíveis regiões de movimento. O método matemático utilizado para a determinação destes pontos de equilíbrio será abordado neste capítulo após um estudo detalhado do PRTC nos dois referenciais.

Toda teoria apresentada neste capítulo foi extraída dos capítulos I e IV do livro "Theory of Orbits", Szebehely [12].

1.2 Definindo o Problema

O problema *restrito* de três corpos é um caso particular do problema de três corpos, no qual as três massas tratadas como puntiformes, m_1 , m_2 e m_3 , assumem valores diferentes de zero e se atraem mutuamente de acordo com a lei gravitacional de Newton. Este problema consiste em determinar o movimento dos três corpos como função do tempo, dados as posições e velocidades em um determinado tempo inicial.

No problema restrito de três corpos, uma das massas, geralmente denotada por m_3 , assume um valor infinitesimal, ou seja, sua massa é bem menor quando comparada às massas dos corpos primários, m_1 e m_2 . Nesta colocação, m_3 se move sob a influência gravitacional dos corpos m_1 e m_2 , sem causar perturbações em seus movimentos. Esta aproximação define o problema restrito, diferenciando-se do problema gravitacional de três corpos.

Algumas hipóteses são feitas: os corpos primários se movem em órbitas circulares coplanares ao redor do centro de massa do sistema e o terceiro corpo se move neste plano definido pelo movimento dos corpos primários. O movimento dos corpos m_1 e m_2 ao redor de seu centro de massa é dado, e as equações de movimento de m_3 são determinadas como função de suas distâncias aos primários. Este problema é conhecido como o problema restrito planar circular de três corpos [5].

1.3 As Equações de Movimento

Nesta parte serão apresentadas as equações que descrevem o movimento do corpo de massa m_3 em dois sistemas distintos: o *inercial* e o *não inercial*. É observado que, para o mesmo problema, chega-se a dois resultados diferentes [5]. um não conservativo

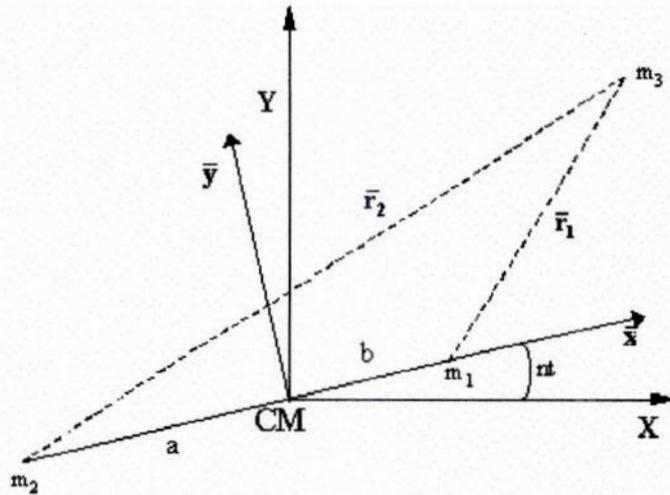


Figura 1.1: Sistema de Coordenadas

e um conservativo, respectivamente. Diferenciando-se, desta forma, do problema de dois corpos que, independente do sistema de referência adotado para o seu estudo, sua energia é sempre conservada.

As equações no sistema inercial são facilmente obtidas através das forças atuantes entre os corpos envolvidos no problema, evidenciando-se, desta forma, o uso do formalismo newtoniano. As equações do sistema não inercial são geradas através das primeiras tomando-se uma rotação de eixos com a mesma velocidade angular dos primários.

1.3.1 No Sistema Sideral

Seja um sistema cartesiano inercial dado por (x,y) com sua origem coincidente com o centro de massa do sistema formado pelos primários e, um outro sistema girante (\bar{x},\bar{y}) , cuja abscissa coincide com a linha que une os primários. Neste último, a origem também é fixa no centro de massa, como mostra a Fig. 1.1. O referencial inercial é dito sideral e o girante é o sinódico. Em todo o procedimento foram utilizadas as considerações descritas na seção 1.2.

Sejam as seguintes quantidades:

- a: distância de m_2 ao centro de massa;

b: distância de m_1 ao centro de massa; e

l: distância mútua entre os corpos, $l = a + b$

Da igualdade entre a força centrípeta e a gravitacional no referencial inercial, obtém-se a relação:

$$k^2 \frac{m_1 m_2}{l^2} = m_2 a n^2 = m_1 b n^2 \quad (1.1)$$

onde n é a velocidade angular que, na Mecânica Celeste, é denominada movimento médio e k é a constante gravitacional.

As igualdades da Eq. (1.1) são reescritas, fornecendo:

$$k^2 m_1 = a n^2 l^2, \quad k^2 m_2 = b n^2 l^2 \quad (1.2)$$

e, conseqüentemente, a terceira lei de Kepler:

$$k^2 (m_1 + m_2) = n^2 l^3. \quad (1.3)$$

Substituindo-se as relações (1.2) na (1.3), encontra-se:

$$a = \frac{m_1 l}{M} \quad e \quad b = \frac{m_2 l}{M}, \quad (1.4)$$

onde $M = m_1 + m_2$.

A posição do corpo estudado no sistema inercial é dado pelas coordenadas retangulares (X,Y), regidas pelas equações de movimento:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial X} \quad e \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial Y}, \quad (1.5)$$

onde F representa a função força ou potencial negativo que, de acordo com a segunda lei de Newton é dado por:

$$F = k^2 \left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right), \quad (1.6)$$

onde R_1 e R_2 são:

$$\begin{aligned} R_1 &= [(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2]^{1/2}, \\ R_2 &= [(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Neste sistema, as coordenadas dos primários, (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , são dependentes do tempo e, facilmente determinadas pelas seguintes projeções:

$$\begin{aligned} X_1 &= b \cos nt, & Y_1 &= b \sin nt, \\ X_2 &= -a \cos nt, & Y_2 &= -a \sin nt. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Resolvendo-se as derivadas parciais da relação (1.5) obtém-se as equações de movimento:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -k^2 \left[\frac{m_1(X - b \cos nt)}{R_1^3} + \frac{m_2(X + a \cos nt)}{R_2^3} \right], \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -k^2 \left[\frac{m_1(Y - b \sin nt)}{R_1^3} + \frac{m_2(Y + a \sin nt)}{R_2^3} \right] \quad (1.10)$$

Como esperado, estas equações dependem explicitamente do tempo, pois trata-se de um sistema fixo de coordenadas. Estas equações podem ser reescritas simplificadaamente sob a forma:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\partial F(X, Y, t)}{\partial X} \quad e \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\partial F(X, Y, t)}{\partial Y}. \quad (1.11)$$

Uma Relação Invariante e a Energia Total do Sistema

O campo da força gravitacional do PRTC é derivado de um potencial que, dependendo do sistema utilizado, se traduz na existência de uma constante de movimento, ou integral primeira. Manipulando as relações contidas em (1.11), chega-se:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 \right] = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{dt} \right) dt, \quad (1.12)$$

onde o lado esquerdo representa a soma do quadrado das componentes do vetor velocidade,

$v^2 = \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2$. Esta relação fornece a taxa de variação da energia cinética devido à ação da força, representada pela derivada do potencial, num intervalo de tempo $[t_0, t]$, que é conhecido como o teorema do trabalho-energia [14].

Substituindo $dF = F_X dX + F_Y dY + F_t dt$ na equação (1.12), obtém-se a relação :

$$\frac{1}{2}v^2 = F - \int_{t_0}^t \frac{\partial F(X, Y, t)}{\partial t} dt. \quad (1.13)$$

Considerando que a solução seja dada pelo conjunto $X = X(\alpha_i, t)$ e $Y = Y(\alpha_i, t)$ onde as constantes α_i 's representam as condições iniciais. Então:

$$\frac{1}{2}v^2 - F = C(\alpha_i, t). \quad (1.14)$$

Da relação acima, fica claro que se trata de um sistema não conservativo, pois a soma da energia cinética com a energia potencial é uma grandeza dependente do tempo.

Por outro lado, se F não depender explicitamente do tempo, $F_t = 0$, a Eq. (1.14) implica a própria conservação da energia, pois $C(\alpha_i, t)$ se torna uma constante de integração, dependendo somente das condições iniciais, $C = C(\alpha_i)$. Porém, mesmo quando $F_t \neq 0$, este problema pode ser contornado estendendo-se o espaço de fase do sistema, tal procedimento é geralmente utilizado pelos mecânicos celestes.

1.3.2 No Sistema Sinódico

Como foi visto, a grande desvantagem da forma, na qual foram apresentadas as equações de movimento, é a dependência explícita no tempo da função potencial. Para contornar este problema e chegar a uma relação que forneça uma constante de movimento, utiliza-se o sistema de coordenadas não inerciais (\bar{x}, \bar{y}) ; isto é, coordenadas que acompanham o movimento dos dois primários em questão.

Seja a transformação de coordenadas,

$$\begin{aligned} X &= \bar{x} \cos nt - \bar{y} \sin nt, \\ Y &= \bar{x} \sin nt + \bar{y} \cos nt, \end{aligned} \quad (1.15)$$

fornecida pela seguinte matriz de rotação :

$$\begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

onde n é o movimento médio dos primários.

O procedimento para se chegar às equações do movimento é similar ao descrito anteriormente, fornecendo as seguintes equações :

$$\frac{d\bar{x}^2}{dt^2} - 2n \frac{d\bar{y}}{dt} - n^2 \bar{x} = -k^2 \left[m_1 \frac{(\bar{x} - b)}{\bar{r}_1^3} + m_2 \frac{(\bar{x} + a)}{\bar{r}_2^3} \right], \quad (1.17)$$

$$\frac{d\bar{y}^2}{dt^2} + 2n \frac{d\bar{x}}{dt} - n^2 \bar{y} = -k^2 \left[m_1 \frac{\bar{y}}{\bar{r}_1^3} + m_2 \frac{\bar{y}}{\bar{r}_2^3} \right]. \quad (1.18)$$

Comparando estas equações com as equações do sistema inercial, pode-se notar que não há dependência explícita do tempo no lado direito das mesmas como as Eqs. (1.9) e (1.10) apresentam. Os termos $n^2 \bar{x}$ e $n^2 \bar{y}$ podem ser escritos do lado direito, resultando no seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^2}{dt^2} - 2n \frac{d\bar{y}}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{d\bar{y}^2}{dt^2} + 2n \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{\partial F^*}{\partial \bar{y}}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde a função potencial é tal que:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}} = n^2 \bar{x} - k^2 \left[m_1 \frac{(\bar{x} - b)}{\bar{r}_1^3} + m_2 \frac{(\bar{x} + a)}{\bar{r}_2^3} \right], \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \bar{y}} = n^2 \bar{y} - k^2 \left[m_1 \frac{\bar{y}}{\bar{r}_1^3} + m_2 \frac{\bar{y}}{\bar{r}_2^3} \right]. \quad (1.21)$$

Então ,

$$F^* = \frac{n^2}{2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + k^2 \left(\frac{m_1}{\bar{r}_1} + \frac{m_2}{\bar{r}_2} \right). \quad (1.22)$$

Procedendo de maneira análoga ao caso inercial, chega-se à seguinte relação :

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 \right] = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial F^*}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{\partial F^*}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{dt} \right) dt = F^* - \frac{C^*}{2}, \quad (1.23)$$

onde C^* é a constante de **Jacobi**, que assume um único valor durante toda a trajetória do corpo, dadas as condições iniciais. É, portanto, uma constante do movimento ou integral primeira. Embora esta não seja uma condição suficiente para a integrabilidade do sistema, sua existência é de extrema utilidade na resolução numérica das equações do movimento, servindo para monitorar os cálculos. Uma outra importância da constante de Jacobi está relacionada às curvas de velocidade zero do sistema, que será estudado na seção seguinte.

Com o objetivo de transformar este sistema em um sistema adimensional, utiliza-se:

$$x = \bar{x}/l, \quad y = \bar{y}/l, \quad t' = nt, \quad r_1 = \bar{r}_1/l, \quad r_2 = \bar{r}_2/l \quad (1.24)$$

desta forma, a função potencial, F^* , se transforma em:

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1 - \mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (1.25)$$

com

$$\Omega = \frac{F^*}{l^2 n^2}, \quad (1.26)$$

onde a quantidade μ é o parâmetro de massa, sendo $\mu_2 = \mu = m_2/M$ com $M = m_1 + m_2$. Como se trata de um sistema reduzido, então, a razão de massa do primário se torna $\mu_1 = 1 - \mu$. Usualmente, denomina-se primário o corpo que possui maior massa e secundário o corpo de menor massa.

O módulo dos raios vetores, r_1 e r_2 , são escritos na forma:

$$r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 \quad e \quad r_2^2 = [x - (\mu - 1)]^2 + y^2. \quad (1.27)$$

Aqui, as quantidades μ e $\mu - 1$ se referem às posições dos primários de massa $1 - \mu$ e μ , respectivamente.

Desta forma, as equações do movimento assumem a forma mais simples:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \quad \text{e} \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (1.28)$$

e a integral de Jacobi é representada por:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right] - C, \quad (1.29)$$

que equivale à:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega(x, y) - C. \quad (1.30)$$

O potencial, $\Omega(x, y)$, também é conhecido como potencial de Roche no contexto de estrelas binárias.

1.4 Curvas de Velocidade Zero e Pontos de Equilíbrio

Na seção precedente, foi visto que, ao se tratar o problema restrito de três corpos no sistema sinódico, pode-se escrever uma constante de movimento, a constante de Jacobi, sendo:

$$-\frac{C}{2} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \Omega(x, y), \quad (1.31)$$

onde, convencionalmente, $\Omega(x, y) = -V(x, y)$ é a energia potencial do terceiro corpo. Tomando-se $\dot{x} = \dot{y} = 0$, a equação acima define uma superfície tridimensional $\Pi(x, y, C)$. Considerando um valor fixo da constante de Jacobi, são obtidas as curvas equipotenciais desta superfície no plano (x, y) , pois:

$$\Omega(x, y) = \frac{C}{2}. \quad (1.32)$$

A importância do estudo destas curvas está relacionada com a classificação das regiões de movimento do corpo; cada região é delimitada por uma curva que corresponde à valores distintos de C .

Os pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico são os pontos nos quais a derivada do potencial se anula. Estes pontos de equilíbrio podem ser estáveis e/ou instáveis. Euler e Lagrange mostraram a existência de cinco pontos de equilíbrio para o problema restrito de três corpos, denominados pontos de equilíbrio de Euler-Lagrange. No sistema sinódico de coordenadas, um corpo que possui velocidade zero quando colocado em um destes pontos especiais tem a sua posição permanentemente inalterada.

Para a determinação dos pontos lagrangeanos é necessário a resolução do seguinte sistema:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x + 1 - \mu)}{r_2^3} = 0, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = y \left(1 - \frac{(1 - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0, \quad (1.34)$$

o resultado gera três pontos sob o eixo x , L_1 , L_2 e L_3 , chamados de pontos colineares, e dois restantes, L_4 e L_5 , que formam triângulos equiláteros com os primários, chamados de pontos triangulares ou solução triangular.

Para o cálculo dos pontos colineares, tem-se $y = 0$ na Eq. (1.33), enquanto que para a solução triangular é suficiente fornecer $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$ na Eq. (1.34) com $y \neq 0$.

As coordenadas dos pontos triangulares são :

$$x = \mu - \frac{1}{2} \quad e \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.35)$$

o sinal positivo corresponde ao L_4 e o negativo ao L_5 .

O método matemático utilizado para a determinação dos pontos colineares é baseado na solução iterativa da quártica de Euler, com $0 \leq \mu \leq 0.5$.

A) Solução para L_1

Na notação seguida, o ponto L_1 está localizado à esquerda do corpo de massa $m_2 = \mu$, portanto os raios vetores relativos aos primários podem ser expressos como: $r_1 = \mu - x$ e $r_2 = \mu - x - 1$, que, quando inseridos na Eq. (1.33) fornece:

$$x + \frac{1 - \mu}{(x - \mu)^2} + \frac{\mu}{(x + 1 - \mu)^2} = 0. \quad (1.36)$$

Seja $r_2 = \xi = \mu - x - 1$ então $r_1 = 1 + \xi = \mu - x$. Retirando o valor de x em função de ξ e μ , e inserindo-o na relação acima, obtem-se a seguinte quártica:

$$\xi^5 + (3 - \mu)\xi^4 + (3 - 2\mu)\xi^3 - \mu\xi^2 - 2\mu\xi - \mu = 0. \quad (1.37)$$

Fatora-se ξ^3 dos três primeiros membros para se obter a relação a ser resolvida iterativamente:

$$\xi^3 = \frac{\mu(1 + \xi)^2}{3 - 2\mu + (3 - \mu + \xi)\xi} \quad (1.38)$$

A iteração começa com o valor inicial $\xi_0 = 0$ no lado direito.

As soluções para os pontos L_2 e L_3 são calculadas de maneira análoga.

B) Solução para L_2

O ponto L_2 se localiza entre os primários e seus raios vetores podem ser escritos na forma, $r_1 = \mu - x$ e $r_2 = 1 - \mu + x$. Quando inseridos na Eq. (1.33) fornece:

$$x + \frac{1 - \mu}{(x - \mu)^2} + \frac{\mu}{(x + 1 - \mu)^2} = 0. \quad (1.39)$$

Escrevendo $r_2 = \xi = 1 - \mu + x$ então $r_1 = 1 - \xi = \mu - x$. Fazendo a substituição na relação acima, resulta na seguinte quártica:

$$\xi^5 + (\mu - 3)\xi^4 + (3 - 2\mu)\xi^3 - \mu\xi^2 + 2\mu\xi - \mu = 0, \quad (1.40)$$

fatorando ξ^3 dos três primeiros membros, obtem-se a relação a ser resolvida iterativamente com o mesmo valor inicial descrito anteriormente.

C) Solução para L_3

O ponto L_3 está localizado ao lado direito do primário de massa $m_1 = 1 - \mu$ sendo que os raios vetores podem ser expressos como: $r_1 = x - \mu$ e $r_2 = 1 - \mu + x$, fornecendo:

$$x + \frac{1 - \mu}{(x - \mu)^2} + \frac{\mu}{(x + 1 - \mu)^2} = 0. \tag{1.41}$$

De maneira idêntica aos casos anteriores com $r_1 = \xi = x - \mu$ e $r_2 = 1 + \xi = 1 - \mu + x$, chega-se à seguinte quártica:

$$\xi^5 + (2 + \mu)\xi^4 + (1 + 2\mu)\xi^3 + (\mu - 1)\xi^2 - 2(1 - \mu)\xi + \mu - 1 = 0. \tag{1.42}$$

Fatora-se ξ^3 dos três primeiros membros para obter a relação a ser resolvida iterativamente com $\xi_0 = 0$.

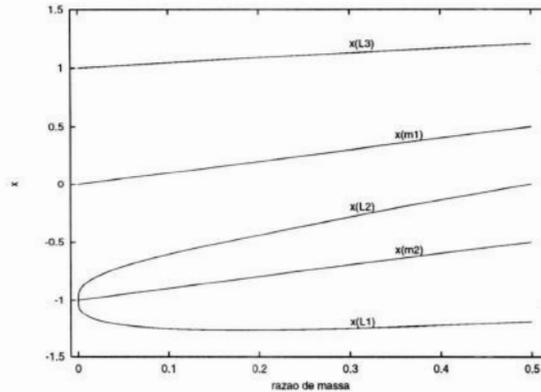


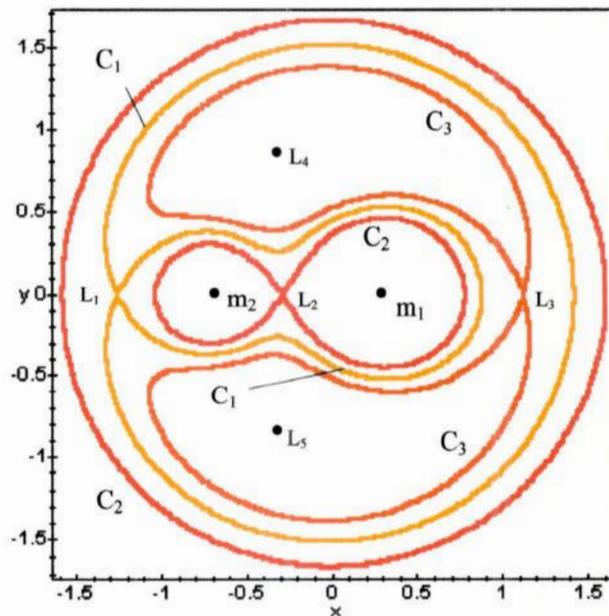
Figura 1.2: Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos com μ

Baseado nesta metodologia, foram determinados os pontos colineares do problema restrito de três corpos com um programa implementado em Fortran 77. O resultado pode

ser analisado no gráfico da Fig. (1.2) que apresentada a variação dos pontos de equilíbrio de Lagrange e das posições dos primários em função da massa μ , para $0 \leq \mu \leq 0.5$.

1.5 Regiões de Movimento ou de Hill

Nesta seção será discutida as diferentes regiões de movimento, também denominadas, na maior parte da literatura de n corpos, como regiões de Hill.



Curvas Equipotenciais para $C_1 = 3.556413$,
 $C_2 = 3.9201495$ e $C_3 = 3.2913502$.

Figura 1.3: Curvas de Velocidade Zero para os Pontos de Lagrange

A Fig. (1.3) mostra algumas curvas singulares do problema restrito de três corpos, que são as curvas equipotenciais correspondentes aos pontos de equilíbrio de Euler-Lagrange. Estas linhas definem quatro regiões de movimento no plano, regiões **I**, **II**, **III** e **IV**.

Sejam C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 as constantes que correspondem aos cinco pontos de Lagrange, respectivamente. A análise das possíveis regiões de movimento é feita do seguinte

modo:

- i) se $C \geq C_2 \Rightarrow$ o movimento é permitido na região I - o movimento ocorre em órbitas fechadas ao redor de cada corpo. Não há comunicação entre as regiões que circundam cada primário até atingir a superfície limite, fechada em L_2 . Mas, é possível a existência de órbitas ao redor dos dois primários simultaneamente e órbitas de escape (Fig 1.5 (a));
- ii) se $C_2 > C \geq C_1 \Rightarrow$ o movimento é permitido na região II - neste intervalo, o corpo pode transitar entre os primários. Órbitas ao redor de cada corpo e ao redor de ambos também são permitidas, bem como as de escape (Fig 1.5 (b));
- iii) se $C_1 > C \geq C_3 \Rightarrow$ o movimento é permitido na região III - neste caso a partícula pode escapar do sistema, pois a superfície é aberta em L_1 (Fig 1.5 (c)); e
- iv) se $C_3 > C \geq C_4=C_5 \Rightarrow$ o movimento é permitido na região IV - o movimento pode ocorrer em todo o espaço, exceto às áreas internas das curvas definidas por C (Fig 1.5 (d)).

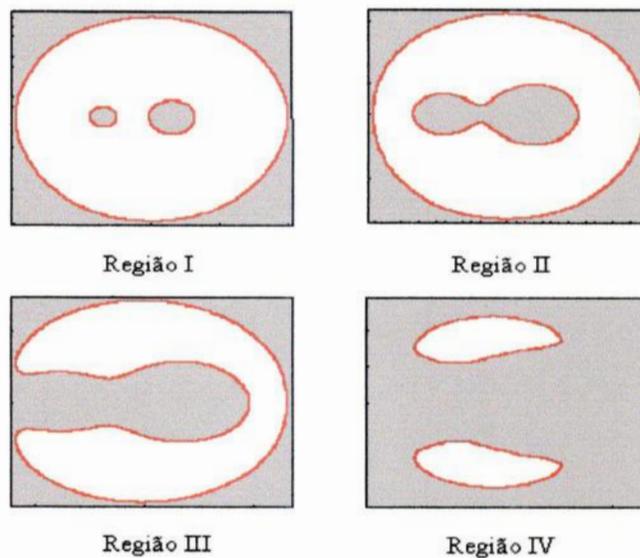
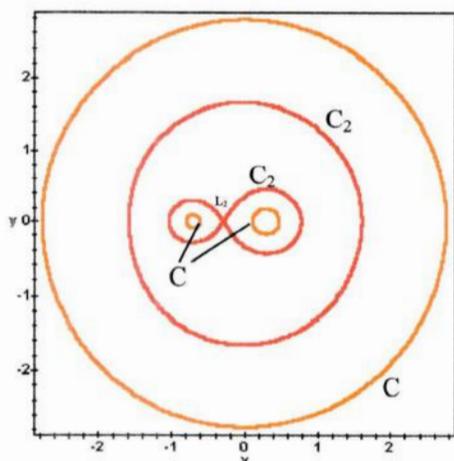
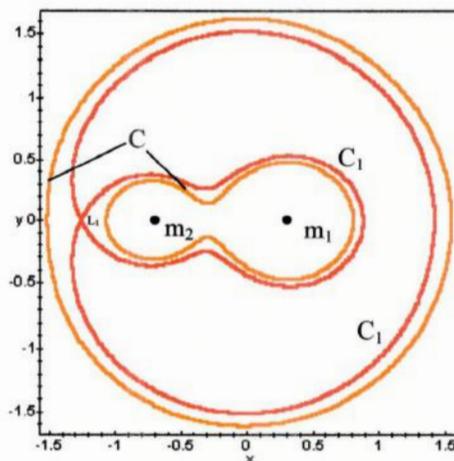


Figura 1.4: Esquema das Regiões de Movimento

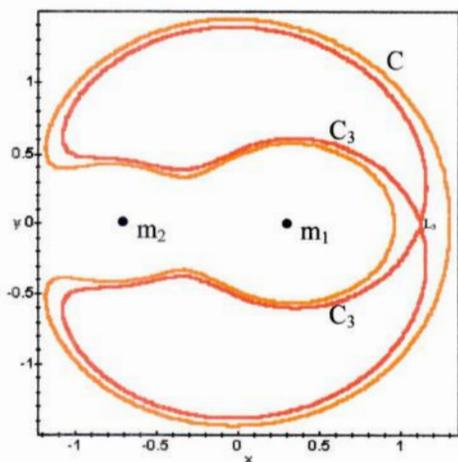
O problema fotogravitacional restrito de três corpos, principal tema deste trabalho, será estudado nos próximos capítulos iniciando-se com metodologia descrita nas seções



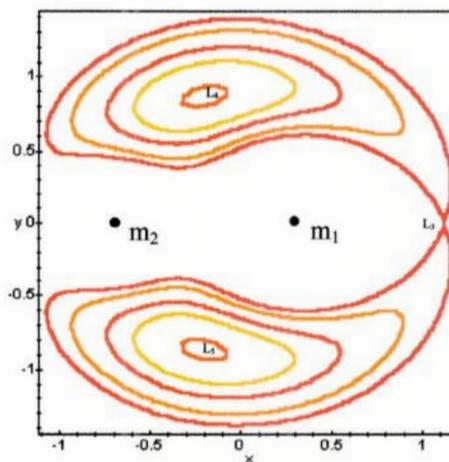
(a) Curvas de Velocidade Zero para $C = 8.4$ e C_2 com $\mu = 0.3$.



(b) Curvas de Velocidade Zero para $C = 3.8$ e C_1 com $\mu = 0.3$.



(c) Curvas de Velocidade Zero para $C = 3.396$ e C_3 com $\mu = 0.3$.



(d) Curvas de Velocidade Zero para $C = 2.8, 2.9, 3.0$ e 3.16 com $\mu = 0.3$.

Figura 1.5: Curvas de Velocidade Zero para Diferentes Energias

precedentes. A única diferença entre os dois modelos está na inclusão da pressão de radiação no potencial de Roche modificado. Preservando, então, a forma de suas equações de movimento e a constante de Jacobi. Algumas mudanças serão notadas, tais como os deslocamentos dos pontos de equilíbrio de Euler-Lagrange e mudanças nas curvas equipotenciais.

Capítulo 2

O Problema Fotogravitacional Restrito de Três Corpos

2.1 Introdução

No problema fotogravitacional restrito de três corpos considera-se o efeito da pressão de radiação somado ao efeito gravitacional dos primários sob o movimento de um terceiro corpo. Este modelo é aplicado à modelagem das linhas de fluxo do disco de acreção em estrelas binárias, onde os corpos primários são estrelas e o terceiro corpo uma partícula de massa infinitesimal do disco.

A presença da estrela companheira delimita a região máxima que o seu disco de acreção pode atingir. Esta região está intimamente relacionada com a curva de velocidade zero definida pelo valor da constante de Jacobi que correspondente ao ponto L_2 , também conhecida como superfície crítica de Roche [13]. Quando a energia do sistema pertence à região I interna (Fig. 1.4), é garantido um movimento confinado em torno de cada estrela, impossibilitando a transferência de matéria entre as estrelas. Porém, quando o lóbulo de Roche se abre em L_2 , pode ocorrer transferência de matéria de uma estrela para a outra correspondendo à região II interna (Fig. 1.4). Quando a superfície se abre em L_1 ou L_3 pode ocorrer perda de matéria das estrelas no caso fotogravitacional, se diferenciando do caso gravitacional puro, onde só pode ocorrer perda de matéria quando

a superfície se abre em L_1 .

Kopal (1955) utilizou o problema gravitacional restrito de três corpos para classificar os sistemas de estrelas binárias em três grupos: (i) sistemas nos quais a partícula não pode ser encontrada em nenhum dos lóbulos; (ii) sistemas nos quais a partícula só pode ocupar um dos lóbulos; e (iii) sistemas em que a partícula pode ser encontrada em ambos os lóbulos. Estas classificações são equivalentes às classes de Sahade observadas na nossa galáxia. Entretanto, de acordo com Radzievskii [9], o estudo da dinâmica do disco de acreção em determinados sistemas binários deve considerar o efeito da pressão de radiação nas partículas do disco de acreção, ao invés de tratar o problema sob o ponto de vista puramente gravitacional.

A força devido à pressão de radiação foi usada na tentativa de se explicar a perda de matéria em estrelas muito luminosas com $L/L_{\odot} > 10^4$. Algumas conclusões retiradas do estudo de estrelas solitárias foram aplicadas ao estudo de sistemas binários [8]. O campo da pressão de radiação entra no potencial do problema restrito de três corpos como fatores redutores das massas dos primários através de dois parâmetros que descrevem a pressão de radiação, dependentes da massa, temperatura efetiva e do raio de cada componente. Este problema é conhecido como problema fotogravitacional restrito de três corpos [9].

Schuerman (1972)[8] ao estudar os sistemas binários, considerou apenas o campo da radiação de uma das estrelas do sistema binário, a que possui maior luminosidade. Estabeleceu um valor crítico para o parâmetro da pressão de radiação δ_c relacionado às curvas de velocidade zero e à razão de massa do sistema. Se a estrela possuir $\delta > \delta_c$ então existe uma superfície equipotencial de contato entre as estrelas. Nestes casos, há uma maior tendência na formação de anéis no disco de acreção.

Posteriormente, Zhou e Leung [4], consideraram o efeito da pressão de radiação de ambas as estrelas de sistemas binários Wolfed-Rayet e do tipo O - estrelas quentes cuja pressão de radiação é capaz de influenciar a dinâmica do sistema. Seus resultados, quando

comparados com o caso gravitacional puro, evidenciam certas mudanças nas superfícies equipotenciais e na posição dos pontos de Lagrange, significando, mais uma vez, que o efeito da pressão de radiação não pode ser negligenciado [4].

Neste capítulo, serão mostrados os deslocamentos dos pontos de Lagrange e algumas superfícies equipotenciais para sistemas hipotéticos com diferentes razões de massa, para as estrelas binárias Wolf-Rayet V444 Cygni e ν_2 Velorum, e para o sistema binário Y Cygni AB do tipo O.

2.2 O Potencial de Roche Modificado

As considerações feitas são análogas às do problema restrito de três corpos (Seção 1.2): as estrelas são tratadas como puntiformes e a origem do sistema de coordenadas sinódico está localizada no centro de massa do sistema, o corpo m_3 é representado por uma partícula do disco de acreção de massa infinitesimal.

Os campos conservativos da força de radiação de cada estrela podem ser facilmente incorporados à modelagem do PRTC por ser uma força central com a mesma dependência da distância às estrelas, onde:

$$(F_1)_{rad} = \frac{\delta_1 GM_1}{r_1^2}, \quad (2.1)$$

$$(F_2)_{rad} = \frac{\delta_2 GM_2}{r_2^2}, \quad (2.2)$$

com

$$\delta_i = \frac{1}{4\pi cGM} \int_0^\infty (\kappa_i)_\nu (L_i)_\nu d\nu, \quad L_{\odot} i = 1, 2. \quad (2.3)$$

L_i é a luminosidade de cada estrela; ν é a frequência da radiação, G é a constante gravitacional; e c é a velocidade da luz. Considerando a temperatura e a composição química de

cada estrela constante, a contribuição da opacidade é devido ao espalhamento eletrônico; o coeficiente de absorção utilizado é $\kappa_i = 0.2(1+\chi)$, onde χ representa a abundância de hidrogênio. Desta forma, os parâmetros da pressão de radiação são escritos em função da luminosidade e da massa de cada componente do sistema binário de estrelas em termos das grandezas solares:

$$\delta_1 = 2.68 \times 10^{-5} \frac{L_1/L_\odot}{M_1/M_\odot}, \quad (2.4)$$

$$\delta_2 = 2.68 \times 10^{-5} \frac{L_2/L_\odot}{M_2/M_\odot}, \quad (2.5)$$

desta forma $0 \leq \delta_1 \leq 1$ e $0 \leq \delta_2 \leq 1$. A luminosidade para uma estrela esférica é dada por:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4, \quad (2.6)$$

onde T_{ef} é a temperatura efetiva da estrela e σ é a constante de Stefan-Boltzmann. Portanto, os parâmetros da pressão de radiação dependem do raio, da temperatura e da massa de cada estrela,

$$\delta_i = \delta_i[R_i, (T_{ef})_i, M_i]. \quad (2.7)$$

Definindo-se, por conveniência, $\alpha \equiv 1 - \delta_1$ e $\beta \equiv 1 - \delta_2$. O parâmetro α é relativo ao primário de massa $m_1 = 1 - \mu$ situado em $(x = \mu, y = 0)$ e β ao primário de massa $m_2 = \mu$ situado em $(x = \mu - 1, y = 0)$.

Seja o potencial do problema gravitacional (Seção 1.3.2),

$$\Omega_{grav} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1 - \mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (2.8)$$

onde,

$$r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 \quad e \quad r_2^2 = [x - (\mu - 1)]^2 + y^2. \quad (2.9)$$

Ao somar o potencial devido ao campo de radiação, os parâmetros aparecem como um redutor de massa:

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\alpha(1 - \mu)}{r_1} + \frac{\beta\mu}{r_2}, \quad (2.10)$$

onde α e β variam no intervalo $(0,1]$.

2.3 Deslocamento dos Pontos de Equilíbrio

Nesta seção, será estudado quantitativamente a variação dos pontos colineares de equilíbrio ao se variar os parâmetros α , β e μ .

Como foi visto anteriormente, para a determinação dos pontos de equilíbrio do sistema, é necessário a resolução das seguintes relações :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \quad (2.11)$$

que, para o problema fotogravitacional restrito se tornam:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = x - \frac{\alpha(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\beta\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}, \quad \text{e} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = y\left(1 - \frac{\alpha(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\beta\mu}{r_2^3}\right) = 0. \quad (2.13)$$

O sistema acima difere do sistema apresentado no capítulo I (Eqs. 1.33, 1.34) pelos fatores da pressão de radiação α e β descritos anteriormente. Se $\alpha = \beta = 1$ equivale ao problema gravitacional restrito de três corpos; e, se $\alpha = \beta = 0$ o problema torna-se trivial. Quando $0 < \alpha, \beta < 1$ tem-se o problema fotogravitacional restrito de três corpos.

Utilizando a metodologia apresentada na seção 1.4 para se determinar as soluções da Eq.(2.12) e, em conseqüência, os pontos colineares de Lagrange, foram obtidas as seguintes quánticas:

(i) quántica para o cálculo de L_1

$$\xi_1^5 + (3-\mu)\xi_1^4 + (3-2\mu)\xi_1^3 + [(1-\mu)(1-\alpha) - \beta\mu]\xi_1^2 - 2\beta\mu\xi_1 - \beta\mu = 0. \quad (2.14)$$

(ii) quintica para o cálculo de L_2

$$\xi_2^5 + (\mu - 3)\xi_2^4 + (3 - 2\mu)\xi_2^3 + [(\alpha - 1)(1 - \mu) - \beta\mu]\xi_2^2 + 2\beta\mu\xi_2 - \beta\mu = 0, \quad (2.15)$$

(iii) quintica para o cálculo de L_3

$$\xi_3^5 + (2 + \mu)\xi_3^4 + (1 + 2\mu)\xi_3^3 + [(\alpha - \beta)\mu - \alpha + \mu]\xi_3^2 + 2(\alpha\mu - \alpha)\xi_3 + \alpha\mu - \alpha = 0, \quad (2.16)$$

onde $\xi_1 = \mu - x_1 - 1$, $\xi_2 = 1 - \mu + x_2$ e $\xi_3 = x_3 - \mu$. Os índices de x representam as posições dos pontos colineares L_1 , L_2 e L_3 , respectivamente. A solução para os ξ_i 's são encontradas resolvendo iterativamente as quinticas, como na seção 1.4.

Nas Figs. 2.1 e 2.2 estão representadas algumas simulações feitas para as posições dos pontos de Lagrange com sistemas de $\mu = 0.1, 0.2, \text{ e } 0.3$. Foi fixado o parâmetro β em 1.0, 0.8, 0.6 e 0.2 e α foi variado no intervalo de 0.1 a 1.0.

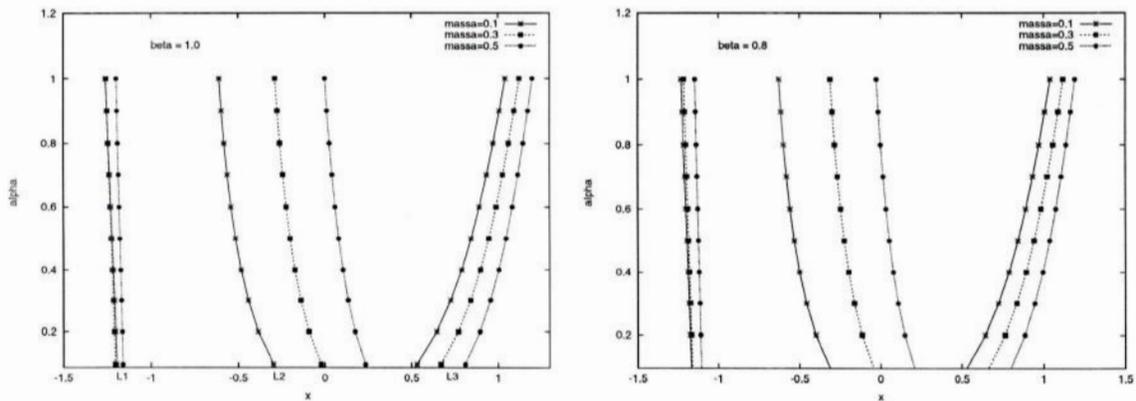


Figura 2.1: Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos para $\beta = 1.0$ e 0.8

Sobre a linha $\alpha = 1.0$ da Fig. 2.1 (à direita) estão os pontos lagrangeanos do problema restrito de três corpos. Em comparação com os mesmos, percebe-se, claramente, os deslocamentos dos pontos de equilíbrio quando a pressão de radiação é introduzida no problema. Este fato também acarreta mudanças nas curvas de velocidade zero.

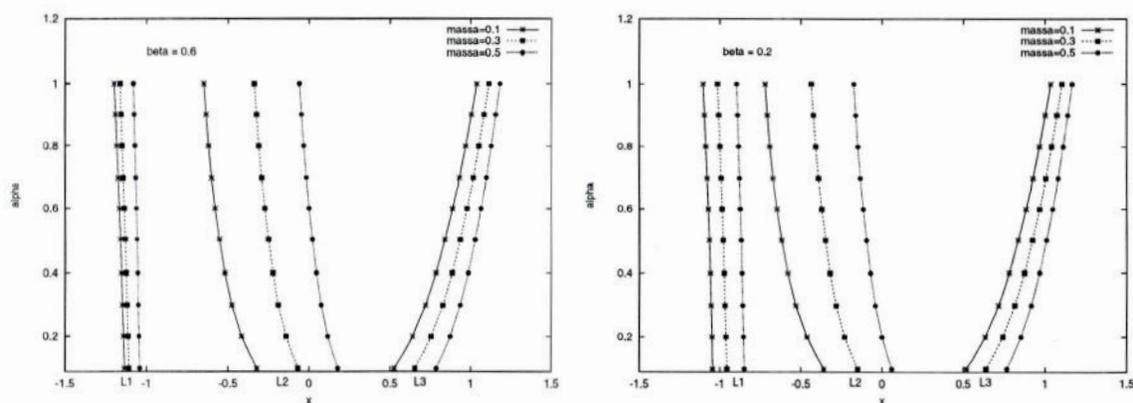


Figura 2.2: Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos para $\beta = 0.6$ e 0.2

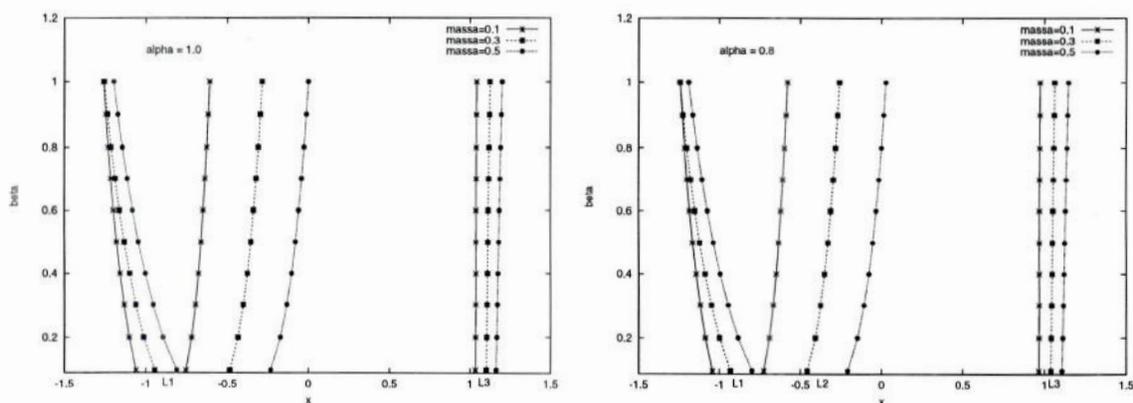


Figura 2.3: Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos para $\alpha = 1.0$ e 0.8

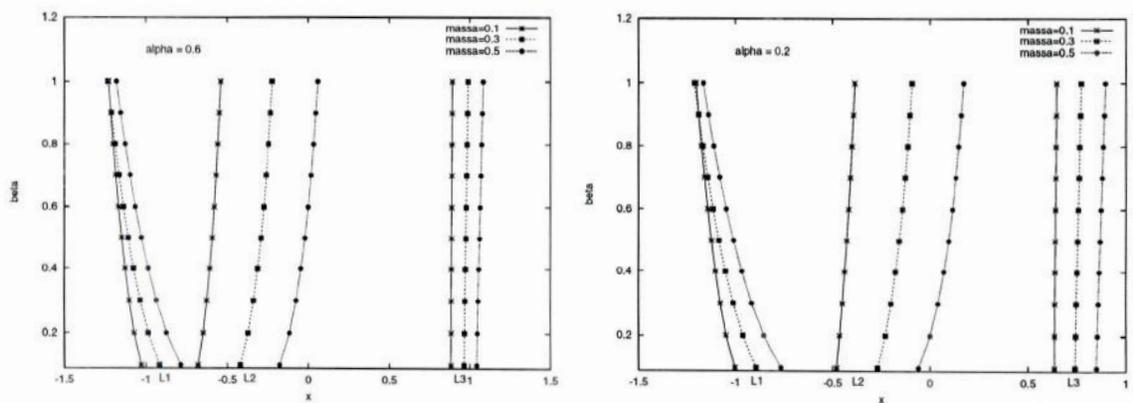


Figura 2.4: Variação da Posição dos Pontos Lagrangeanos para $\alpha = 0.6$ e 0.2

Nas Figs. 2.3 e 2.4, estão representados os deslocamentos dos pontos de equilíbrio ao se variar o parâmetro β no intervalo de 0.1 a 1.0 com α fixo em 1.0, 0.8, 0.6 e 0.2. As simulações foram feitas para os mesmos valores de μ . Os pontos de equilíbrio para o problema gravitacional puro estão representados sobre a linha $\beta = 1.0$ na Fig. 2.4 (à direita).

Observando-se, qualitativamente, as duas situações expressas nos gráficos: a primeira (i) quando α varia e β se mantém constante e a segunda situação (ii), inversa da primeira, α é constante e β varia. Quando ocorre o caso (i), os pontos que mais sofrem variações são os próximos aos primários cujo parâmetro está sendo variado, neste caso L_2 e L_3 ; e, no caso (ii) a situação se inverte, os pontos L_1 e L_2 vizinhos ao corpo m_2 se deslocam mais.

2.4 Mudanças na Superfície Crítica de Roche

Nesta seção, serão apresentadas algumas superfícies equipotenciais do problema fotogravitacional restrito de três corpos, com o intuito de se fazer uma breve análise qualitativa das mesmas.

Na relação (1.32), a qual expressa a constante de Jacobi, foram incluídos os parâmetros da pressão de radiação, em termos de α e β :

$$C = 2\Omega = (x^2 + y^2) + \frac{2\alpha(1 - \mu)}{r_1} + \frac{2\beta\mu}{r_2}. \quad (2.17)$$

As curvas de velocidade zero foram traçadas utilizando-se o software "Maple V Release 4". O procedimento teórico para se determinar cada curva é análogo ao da Seção 1.4: fixa-se um valor para a constante C e para os parâmetros envolvidos, enquanto que o programa

se responsabiliza para encontrar a solução das curvas equipotenciais. Os resultados podem ser visualizados nas próximas figuras.

Na Fig. 2.5(a) estão representadas duas curvas, uma para o problema gravitacional puro ($\alpha = \beta = 1.0$) e a outra para o fotogravitacional, ambas com $\mu = 0.5$. A curva (i) perde sua simetria em relação ao eixo y quando considerado o campo da pressão de radiação .

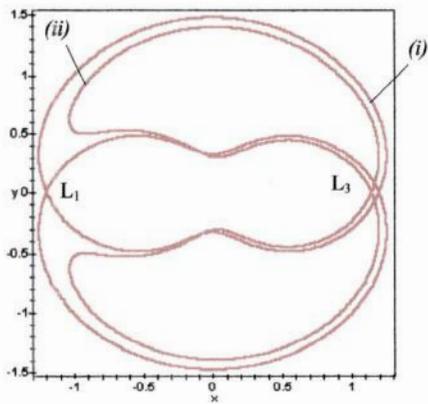
Na Fig 2.5(e) estão representadas as mudanças nas curvas ao se variar α e β para o mesmo sistema. Algumas peculiaridades podem ser notadas em (c), (d) e (f), pois para o caso gravitacional puro, a curva nunca é aberta em L_1 e fechada em L_2 - caso (c), quando esta se abre em L_1 ela já se abriu em L_2 originando a região III (Fig. 1.4). As situações das figuras (d) e (f) também não ocorrem no PRTC. A Fig. 2.5(b) evidencia o deslocamento do ponto de equilíbrio L_3 .

Nas Figs. 2.6 e 2.7 estão representadas as superfícies críticas de Roche para três sistemas binários: estrelas Wolf-Rayet Y Cygni AB e V444 Cygni AB, e estrelas do tipo O ν_2 Velorum.

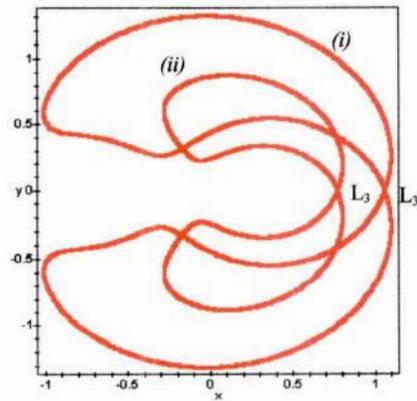
2.5 Discussão

Os gráficos dos deslocamentos dos pontos de Lagrange mostram o efeito da pressão de radiação sob a dinâmica do disco de acreção em sistemas binários, há um deslocamento maior para os valores mais baixos de α e β , ou seja, quanto mais quentes forem as estrelas do sistema, e mais longe do caso gravitacional $\alpha = \beta = 1.0$, maior será o efeito fotogravitacional. Por esta razão a aplicabilidade do modelo deve se concentrar em estrelas Wolfed-Rayet e do tipo espectral O que são estrelas quentes capazes de influenciar a hidrodinâmica das partículas do disco.

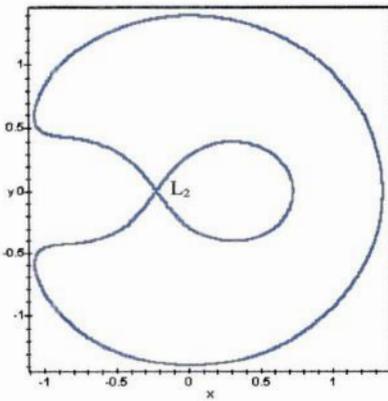
A importância em se estudar as curvas de velocidade zero destes sistemas, deve-se ao fato da possível transferência de massa entre as estrelas. As Figs. 2.6 e 2.7 mostram que



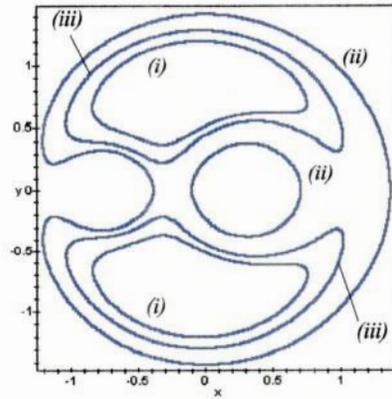
(a) Curvas de Velocidade Zero para $\mu = 0.5$, (i) $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$ e $C_1 = 3.45680$; (ii) $\alpha = 0.8$, $\beta = 1.0$ e $C_3 = 3.15924$.



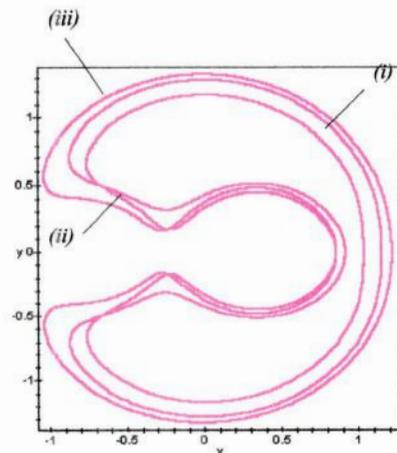
(b) Curvas de Velocidade Zero para $\mu = 0.3$, (i) $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$ e $C_3 = 3.45680$; (ii) $\alpha = 0.2$, $\beta = 1.0$ e $C_3 = 2.02420$.



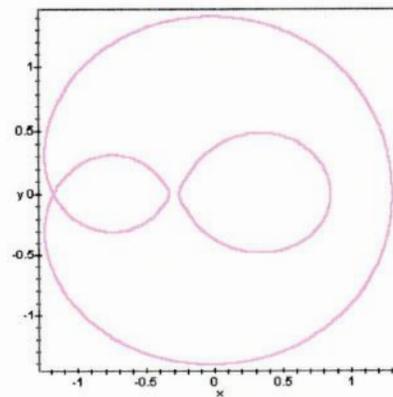
(c) Curvas de Velocidade Zero para $\mu = 0.3$, $\alpha = 0.6$, $\beta = 1.0$ e $C = 2.91371$.



(d) Curvas de Velocidade Zero para $\mu = 0.3$, (i) $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.7$ e $C = 2.8$; (ii) $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.8$ e $C = 2.9$; (iii) $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.8$ e $C = 2.7$.

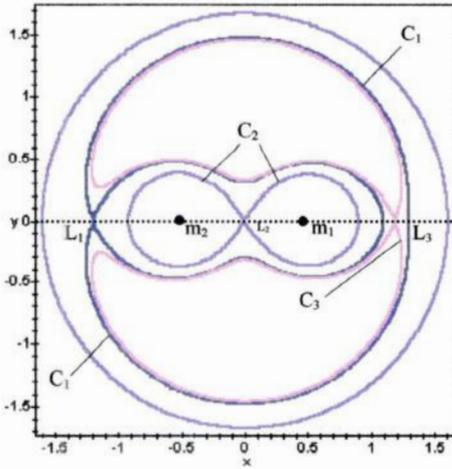


(e) Curvas de Velocidade Zero para $\mu = 0.3$, (i) $\alpha = 0.7$, $\beta = 1.0$ e $C = 2.81$; (ii) $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.8$ e $C = 2.8$; (iii) $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$ e $C = 2.3$.

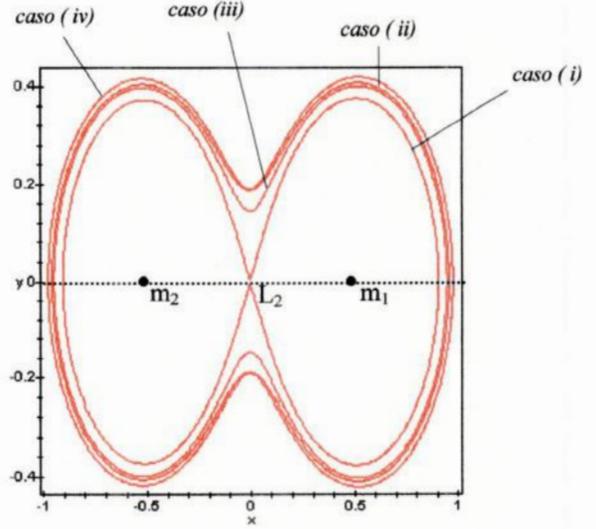


(f) Curvas de Velocidade Zero para $\mu = 0.3$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.7$ e $C = 3.024124626$.

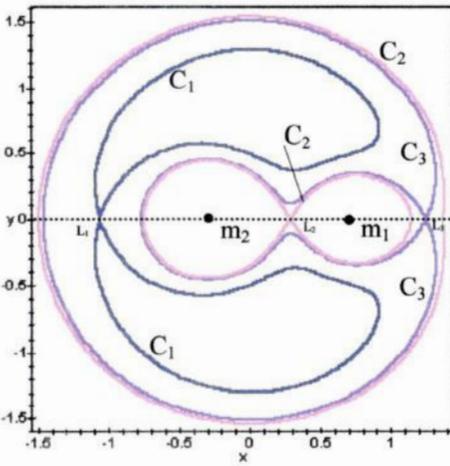
Figura 2.5: Mudanças nas Curvas de Velocidade Zero para alguns Sistemas Fotogravitacionais



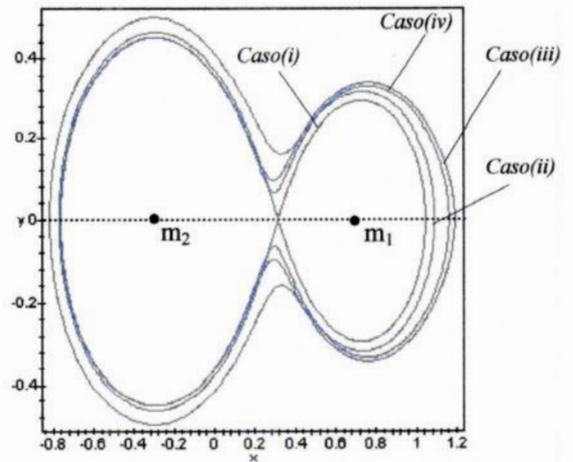
(a) Curvas de velocidade zero referentes aos pontos de Lagrange com os parâmetros $\mu=0.48$, $\alpha = 0.95914$ e $\beta = 1.0$, com $C_1 = 3.43554$, $C_2 = 3.91743$ e $C_3 = 3.39450$.



(b) Mudanças da superfície crítica de Roche para os casos: (i): $\alpha = \beta = 1.0$; (ii): $\alpha = 0.95914$ e $\beta = 1.0$; (iii): $\alpha = 1.0$ e $\beta = 0.95843$; e (iv): 0.95914 e $\beta = 0.95843$.

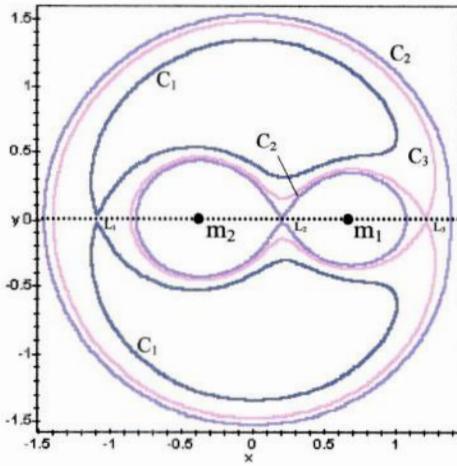


(c) Curvas de velocidade zero referentes aos pontos de Lagrange com os parâmetros $\mu = 0.28$, $\alpha = 1.0$ e $\beta = 0.81991$, com $C_1 = 2.95341$, $C_2 = 3.45938$ e $C_3 = 3.39105$.

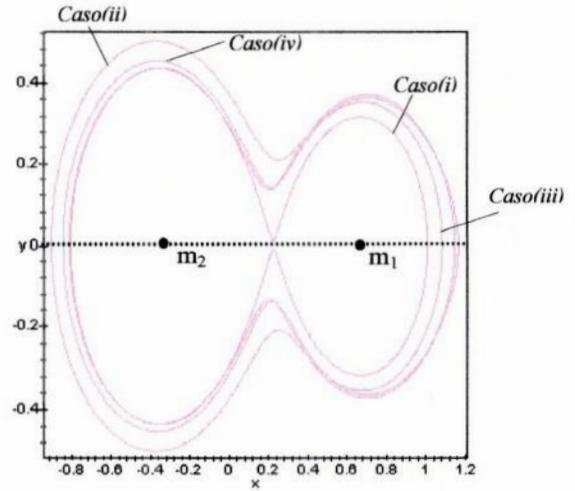


(d) Mudanças da superfície crítica de Roche para os casos: (i): $\alpha = \beta = 1.0$; (ii): $\alpha = 0.96415$ e $\beta = 1.0$; (iii): $\alpha = 1.0$ e $\beta = 0.81991$; e (iv): 0.96415 e $\beta = 0.81991$.

Figura 2.6: Sistemas Binários: a) e b) Y Cygni; c) e d) V444 Cygni



(a) Curvas de velocidade zero referentes aos pontos de Lagrange com os parâmetros $\alpha = 0.90208$ e $\beta = 0.83022$, com $C_1 = 3.00446$, $C_2 = 3.40232$ e $C_3 = 3.28493$.



(b) Mudanças da superfície crítica de Roche para os casos: (i): $\alpha = \beta = 1.0$; (ii): $\alpha = 0.90208$ e $\beta = 1.0$; (iii): $\alpha = 1.0$ e $\beta = 0.83022$; e (iv): $\alpha = 0.90208$ e $\beta = 0.83022$.

Figura 2.7: Sistema Binário ν_2 Velorum

o tamanho da abertura do lóbulo em L_2 varia de acordo com os parâmetros da pressão de radiação, correspondendo à região II da Fig. 1.4; isto é, uma partícula do disco de acreção pode ser encontrada em movimento ao redor de uma ou de outra estrela. Quando a superfície crítica de Roche se abre em L_1 e/ou L_3 as estrelas podem lançar massa para o meio interestelar. Porém, a literatura mostra que a construção destas curvas equipotenciais não são suficientes para refletir o verdadeiro fluxo de matéria entre as estrelas, pois neste modelo, não foi considerado o efeito hidrodinâmico das partículas do disco.

Capítulo 3

Determinação das Linhas de Fluxo do Disco de Acrensão em Sistemas Binários

3.1 Introdução

Este capítulo inicia-se com o formalismo hamiltoniano do problema fotogravitacional restrito de três corpos (PFRTC) [1], que fornece um conjunto de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, ao contrário das duas equações newtonianas anteriores. As equações são integradas numericamente com o método numérico Runge-Kutta-Fehlberg 7-8. Esta é uma etapa necessária para se determinar as órbitas periódicas do PFRTC, pois para o método utilizado, é necessário a secção de Poincaré. Esta última, é uma técnica para se analisar qualitativamente sistemas dinâmicos, sejam eles hamiltonianos ou não .

À partir de um estudo qualitativo das secções de Poincaré, pode-se conhecer, de modo mais amplo, todos os possíveis movimentos que o sistema pode adquirir numa mesma superfície definida pelo valor fixo da hamiltoniana. Esta metodologia é descrita nas secções 3.2 e 3.3.

A técnica de continuação numérica de soluções para a determinação de órbitas periódicas do problema fotogravitacional restrito de três corpos é apresentada na secção 3.5 deste capítulo, após uma breve discussão sobre as órbitas periódicas do problema na secção 3.4.

Foi considerado que o disco de acreção é formado ao redor da estrela de maior massa, denotada primária. As órbitas periódicas simples ao redor do primário podem ser uma primeira modelagem para as linhas de fluxo do disco. Na terminologia de Copenhague, estas órbitas correspondem à classe g ; e são ditas simples por darem apenas uma volta em torno dos primários.

Alguns resultados, conclusões e perspectivas futuras são apresentados nas seções 3.6 e 3.7, respectivamente.

3.2 Integração Numérica das Equações de Hamilton

Como é bem conhecido, para um sistema de n graus de liberdade, o formalismo newtoniano fornece n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, enquanto que, para o mesmo sistema, as $2n$ equações de Hamilton são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Com estas equações de primeira ordem, pode-se utilizar todos os resultados já conhecidos da área de sistemas não-lineares.

A origem do *novo* sistema de coordenadas *sinódico* é transferida do centro de massa para a estrela de maior massa, com o eixo x apontando para a direção da estrela companheira. A posição do corpo secundário é fixa e unitária, ou seja, os corpos de massas $m_1 = 1 - \mu$ e $m_2 = \mu$ assumem as posições $(x = 0, y = 0)$ e $(x = 1, y = 0)$, respectivamente. Neste cenário, a hamiltoniana do problema fotogravitacional restrito de três corpos é [1]:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + p_x y - p_y(x - \mu) - \frac{\alpha(1 - \mu)}{R_1} - \frac{\beta\mu}{R_2} \quad (3.1)$$

onde,

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.2)$$

$$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}; \quad (3.3)$$

x e y são as coordenadas do terceiro corpo e $p_x = \dot{x} - y$ e $p_y = \dot{y} + (x - \mu)$ são os momentos conjugados. A relação entre o valor da hamiltoniana h e o da constante de Jacobi C é $h = -C/2$.

Pode-se notar que a hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, uma vez que o referencial sinódico elimina tal dependência. Na hamiltoniana, além da energia cinética e do potencial fotogravitacional, aparece o potencial de Coriolis ou L_z .

As equações de Hamilton são :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y, \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - (x - \mu), \quad (3.5)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - \frac{\alpha(1-\mu)x}{R_1^3} - \frac{\beta\mu(x-1)}{R_2^3}, \quad (3.6)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - \frac{\alpha(1-\mu)y}{R_1^3} - \frac{\beta\mu y}{R_2^3}. \quad (3.7)$$

As equações acima foram integradas numericamente pelo método Runge-Kutta-Fehlberg de sétima ordem. Para se resolver um sistema de quarta ordem, são necessárias quatro condições iniciais. Neste caso, foram fornecidos os valores de $x(0)$, $y(0)$, $p_x(0)$ e o da hamiltoniana, h , que é a única integral do movimento. O valor de $p_y(0)$ é então calculado para manter fixo o valor de h .

A Fig. 3.1 mostra duas trajetórias projetadas no espaço de configuração do PRTC, $\alpha = \beta = 1.0$, para $h = -2.25$ e diferentes condições iniciais. Nota-se que o movimento

é quase periódico, pois está sobre um toro bidimensional invariante, sendo portanto uma trajetória confinada ao redor do primário.

Quando a trajetória na configuração é similar ao da Fig. 3.2 (à esquerda) o movimento é caótico e a partícula pode ser encontrada em qualquer região definida pela superfície $h = cte$. A Fig. 3.2 (à direita) mostra que a trajetória além de ser caótica é de escape. Nestas figuras estão representados sobre os eixos as coordenadas x e y da partícula.

A partícula também podem colidir com as estrelas e para melhor lidar com este problema seria preciso que o sistema de equações estivesse regularizado para evitar problemas com o integrador. No instante da colisão, as coordenadas de posição são nulas, ocasionando um valor infinito nas equações de movimento. Para se evitar a colisão e sua vizinhança, uma vez que o sistema não está regularizado, foi definido um intervalo de segurança da ordem de 10^{-3} ao redor de cada corpo onde a integração é interrompida se a órbita entrar neste intervalo.

Algumas comparações do problema fotogravitacional restrito de três corpos com o PRTC podem ser feitas analisando-se qualitativamente o espaço de configuração (Fig. 3.3). Note que para um mesmo $h = -1.71$ e condições iniciais iguais, os movimentos diferem um do outro. A figura à esquerda mostra uma situação de escape para uma partícula no PRTC ($\alpha = \beta = 1.0$), enquanto que a mesma permanece em movimento confinado no problema fotogravitacional restrito de três corpos ($\alpha = \beta = 0.9$), evidenciando o efeito da pressão de radiação em sistemas binários.

3.3 Secção de Poincaré

É impossível examinar todas as trajetórias completas de uma partícula, numa dada superfície ($h = cte$). Para resolver este problema e obter uma visualização global do movi-

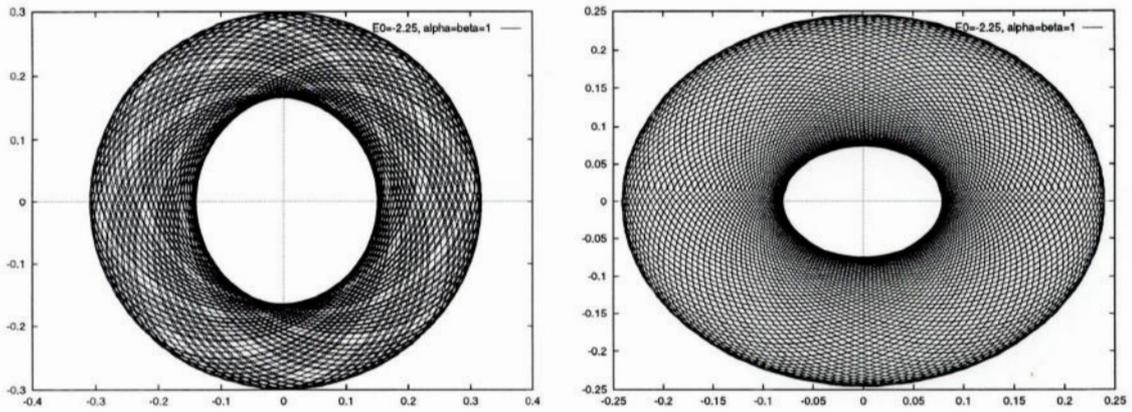


Figura 3.1: Partícula em Movimento Quasi-Periódico

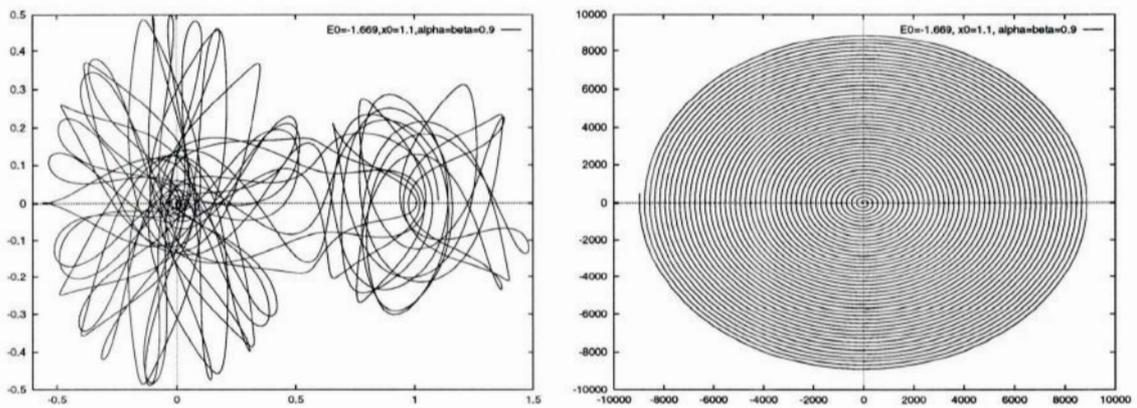


Figura 3.2: Órbita Caótica

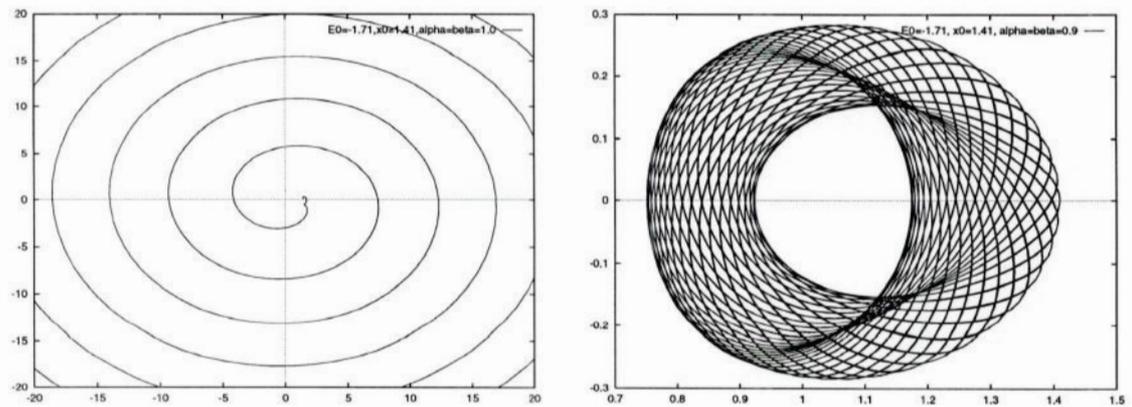


Figura 3.3: Comparação dos Sistemas Fotogravitacional e Gravitacional

mento que a partícula pode possuir, Poincaré sugeriu o uso de uma superfície arbitrária e invariante, $S(\bar{q}, \bar{p}) = 0$, transversal ao movimento. Toda vez que a trajetória cruzar esta superfície numa direção fixa arbitrariamente escolhida, é registrado um ponto. Este procedimento gera um mapa ou secção de Poincaré. No caso de sistemas hamiltonianos, com dois graus de liberdade, gera uma aplicação de $S \rightarrow S$ que preserva a área, como decorrência da preservação da área simplética. A preservação desta área é devido à geometria dos sistemas hamiltonianos. O teorema de Liouville sobre a conservação de volume do espaço de fase é também uma consequência desta geometria.

A secção de Poincaré escolhida foi: $S(x, y, p_x, p_y) = y = 0$. Para se obter os pontos desta secção, fixa-se:

$$h = H(x, y, p_x, p_y), \quad (3.8)$$

e, das quatro condições iniciais necessárias, já se tem duas, h e $y_0 = 0$, bastando fornecer x_0 e p_{x0} , pois o valor de p_y fica determinado a menos de um sinal por:

$$p_{y0} = (x_0 - \mu) \pm \sqrt{(x_0 - \mu)^2 + 2\left(h - \frac{1}{2}p_{x0} + \frac{\alpha(1 - \mu)}{|x_0|} + \frac{\beta\mu}{|x_0 - 1|}\right)}. \quad (3.9)$$

Foi escolhido o valor positivo da raiz de p_{y0} , os valores negativos correspondem a um outro conjunto de condições iniciais.

Durante toda a integração, coleta-se os valores de (x, p_x) toda vez que $y = 0$ e $\dot{y} > 0$. O conjunto destes pontos para todos os valores $(x_0, p_{x0}, p_{y0}; h)$, formam o mapa de Poincaré para este h . A escolha do sinal de \dot{y} determina o sentido no qual o fluxo $\Phi(t)$ gerado pela solução do problema corta a superfície $y = 0$.

Vale ressaltar que os pontos da secção $(x, y = 0, p_x, p_y; h)$ não estão sobre o plano (x, p_x) , pois em geral $p_y \neq 0$. Na realidade, estes pontos são projetados numa superfície bidimensional (x, p_x) que representa a secção de Poincaré. Nas figuras, os eixos x e p_x são representados pelos eixos da abscissa e da ordenada, respectivamente. A intersecção

da trajetória com a superfície foi determinada com o método de Newton.

O espaço de fase de um sistema de dois graus de liberdade, analiticamente integrável, é foliado por toros bidimensionais invariantes determinados por duas constantes de movimento, que de acordo com o teorema de Louville-Arnold devem:

- (i) ser funcionalmente independentes; e
- (ii) estar em involução , $\{f_1, f_2\}=0$, $f_1 = h$.

Quando estes toros do sistema analiticamente integrável, cruzam a superfície de secção , geram círculos, como é o caso de dois osciladores harmônicos simples desacoplados.

Se o sistema é não -integrável, sua secção é um pouco mais complexa, apresentando além das curvas invariantes, pontos espalhados em regiões bidimensionais. Estas regiões são geradas por trajetórias caóticas.

A Fig. 3.4, que mostra a secção de Poincaré do problema fotogravitacional restrito de três corpos para o caso $\mu = 0.3$ e $\alpha = \beta = 0.9$, como um primeiro exemplo destes conceitos. A estrela de maior massa está localizada na origem do sistema, enquanto que sua companheira está na posição $(x = 1.0; p_x = 0)$. Pode-se observar que o sistema apresenta regiões regulares e caóticas. As regiões mais regulares aparecem do lado esquerdo dos corpos primários; enquanto que à direita do corpo localizado na origem, observa-se uma região regular convivendo com uma região caótica. A região caótica são os pontos espalhados aleatoriamente no mapa e pode ser vista, principalmente, à direita das estrelas. A órbita da Fig. 3.3 (à direita) corresponde à uma curva regular desta secção e a da Fig. 3.2 (à esquerda) corresponde à parte caótica que pode escapar.

As órbitas periódicas aparecem como pontos fixos da secção de Poincaré P ou em potências do mesmo, P^s . Um ponto fixo corresponde a uma órbita que se fecha após dar s voltas, furando a secção s vezes. A Fig. 3.5 é uma órbita periódica aproximada, obtida da secção da Fig. 3.4. No entorno dos pontos fixos estáveis, aparecem curvas invariantes ou "ilhas", e seu número está ligado ao número de voltas s .

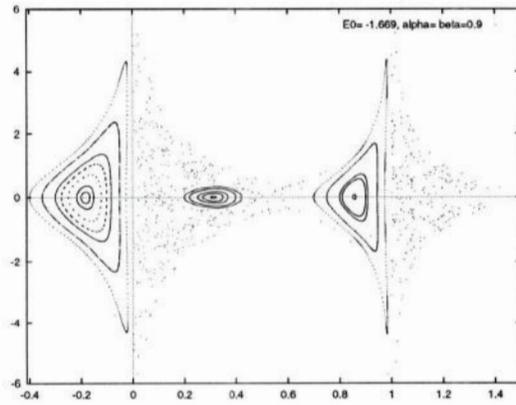


Figura 3.4: Secção que Apresenta Caos

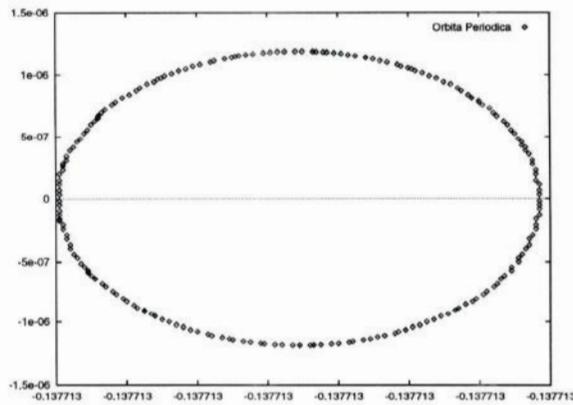


Figura 3.5: Órbita Periódica Aproximada do Sistema $\mu = 0.3, \alpha = \beta = 0.9$

3.4 Órbitas Periódicas

A classificação de Strömgen [12] para as famílias de órbitas periódicas é baseada em sete pontos especiais do problema restrito de três corpos: cinco deles são os pontos de equilíbrio de Lagrange e os outros dois se referem às posições dos corpos primários [12].

As classes são :

- (a) Órbitas periódicas retrógradas ao redor de L_3 ;
- (b) órbitas periódicas retrógradas ao redor de L_1 ;
- (c) órbitas periódicas retrógradas ao redor de L_2 ;
- (d) órbitas periódicas ao redor de L_4 - não existem para $\mu = 0.5$;
- (e) órbitas periódicas ao redor de L_5 - não existem para $\mu = 0.5$;
- (f) órbitas periódicas retrógradas ao redor de m_1 ;
- (g) órbitas periódicas diretas ao redor de m_1 ;
- (h) órbitas periódicas retrógradas ao redor de m_2 ; e
- (i) órbitas periódicas diretas ao redor de m_2 .

Um elemento de cada uma das famílias (f), (g), (h) e (i) está representado na secção de Poincaré das Figs. (3.6) e (3.7). Os pontos fixos que correspondem às órbitas retrógradas aparecem ao lado esquerdo das massas e os pontos fixos que representam as órbitas diretas aparecem ao lado direito.

Nesta modelagem das linhas de fluxo do disco de acreção foi utilizado a família de órbitas periódicas simples ao redor da estrela de maior massa, que corresponde à classe *g* de acordo com esta terminologia.

Este trabalho se inicia com a busca de uma órbita periódica do problema, que possa ser refinada e continuada. Há, basicamente, dois métodos para esta busca: um deles é partir de órbitas periódicas lineares na vizinhança do ponto fixo estável na origem; o outro, é tomar um ponto fixo na secção de Poincaré, sendo este o método escolhido.

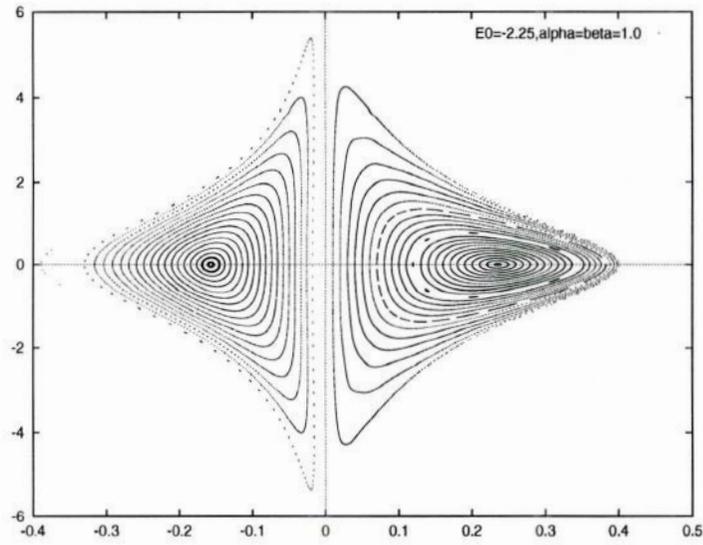


Figura 3.6: Famílias (f) e (g) do PRTC com $\mu = 0.3$

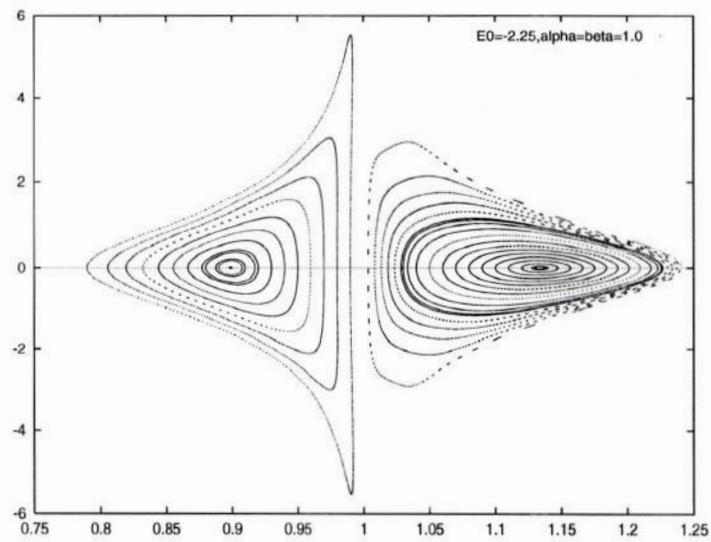


Figura 3.7: Famílias (h) e (i) do PRTC com $\mu = 0.3$

Como mencionado anteriormente, as órbitas periódicas aparecem como pontos fixos no mapa de Poincaré. Ao se fazer uma breve análise do mapa na vizinhança deste ponto pode-se prever a estabilidade e/ou instabilidade do mesmo. Um ponto fixo estável ou elíptico aparece circundado de curvas invariantes circulares, Fig. 3.8 (esquerda), enquanto que, o ponto fixo instável ou hiperbólico aparece rodeado de uma região caótica e suas variedades invariantes só aparecem se as condições iniciais forem especialmente escolhidas.

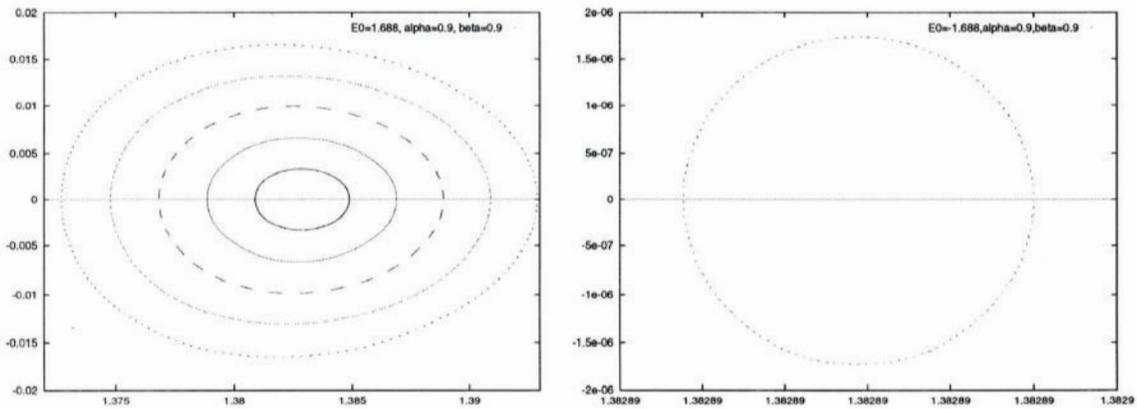


Figura 3.8: Órbita Periódica Estável do Sistema $\mu = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.9$ e seu Ponto Fixo na Secção

Uma órbita periódica de período T é definida por:

$$\Phi(t = 0) = \Phi(t = T), \tag{3.10}$$

sendo Φ o fluxo gerado pela resolução das equações de movimento. A simetria do problema, $(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \longleftrightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t)$ ou $(x, y, p_x, p_y, t) \longleftrightarrow (x, -y, -p_x, p_y, -t)$, proporciona uma economia computacional. Isto porque, devido à esta simetria, as órbitas periódicas simples cruzam o eixo x na secção $y = 0$ com $\dot{x} = p_x = 0$. Portanto, basta partir de um ponto $P_0 = (x_0, 0, 0, \dot{y} > 0)$ e procurar o próximo ponto cujas coordenadas são $P_f = (x_f, 0, 0, \dot{y}_f < 0)$.

3.5 Técnicas Numéricas de Continuação de Soluções

Nesta seção será explicado a técnica numérica para a determinação de famílias de órbitas periódicas, partindo de uma órbita previamente encontrada. Será visto que o método transforma as equações diferenciais em parâmetros de comprimento de arco, s , no espaço de fase.

(i) Determinação de uma Órbita

Seja o conjunto de condições iniciais da órbita periódica num ponto P_0 tal que:

$$P_0 = (x_0, y_0 = 0, z_0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 > 0, \dot{z}_0 = 0) = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_0, \quad (3.11)$$

e seja o ponto P_f a primeira intersecção da mesma órbita com a secção $y = 0, \dot{y} < 0$,

$$P_f = (x_f, y_f = 0, z_f, \dot{x}_f, \dot{y}_f, \dot{z}_f) \equiv (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_f. \quad (3.12)$$

Devido à simetria anteriormente discutida, as relações abaixo são suficientes para a determinação da órbita:

$$\begin{aligned} f^1 &= (x, z, \dot{y})_0 = \dot{x}_f = 0, \\ f^2 &= (x, z, \dot{y})_0 = \dot{z}_f = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

isto é, busca-se soluções que interceptem $y = 0$ com $\dot{x}_f = \dot{z}_f = 0$ e $\dot{y} > 0$. Nas órbitas periódicas simples, esta relação também é válida em $t = T/2$, quando a órbita cruza a secção em $y = 0$ com $\dot{y} < 0$.

Em resumo, definindo os conjuntos $X = (x, z, \dot{y})$ e $F = (f^1, f^2)$, busca-se um $X_0 = (x_0, z_0, \dot{y}_0)$ que seja solução do sistema não linear (Eq. 3.13):

$$F(X_0) = 0, \quad (3.14)$$

onde X_0 representa a solução da órbita periódica desejada.

Supondo que o posto da matriz jacobiana de F ,

$$G = D_X F, \quad (3.15)$$

seja dois, então $F(X_0) = 0$ descreve uma curva característica no espaço $(x, z, \dot{y})_0$. O próximo valor de $X = X_0 + dX$ representará as coordenadas iniciais de uma órbita periódica vizinha.

(ii) Continuação Numérica

Afim de se obter a família de órbitas periódicas, foi utilizado o método de continuação de soluções para se determinar os pontos da curva característica. A idéia do método é integrar esta curva ao longo de um parâmetro de arco s , cujo sistema a ser integrado obedece as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{A_2}{A_0}, \quad \frac{d\dot{y}}{ds} = \frac{A_3}{A_0}, \quad (3.16)$$

onde, $A_1 = (f_z^1 f_{\dot{y}}^2 - f_{\dot{y}}^1 f_z^2)$, $A_2 = -(f_x^1 f_{\dot{y}}^2 - f_{\dot{y}}^1 f_x^2)$, $A_3 = (f_x^1 f_z^2 - f_z^1 f_x^2)$ e $A_0 = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}$, os índices subscritos de f representam as derivadas parciais de $f^{1(2)}$ em relação às respectivas coordenadas. Este método permite passar por pontos de retorno da curva característica, pois para avançar ao longo da mesma não privilegia nenhuma das variáveis.

O conjunto de equações diferenciais (Eqs. 3.16) pode ser integrado por qualquer método numérico de solução de equações diferenciais ordinárias. Foi implementado um método do tipo preditor-corretor, sendo o preditor um Euler e para o corretor foi utilizado o método de Newton modificado, que segue abaixo:

Suponha que:

$$X^k = X^{k-1} + \Delta X^{k-1}, \quad (3.17)$$

sendo que a grandeza ΔX^{k-1} deve obedecer à seguinte relação :

$$G(\Delta X^{k-1}) = -F(X^{k-1}), \quad (3.18)$$

o lado direito representa a quantidade que falta para se atingir a curva característica mais refinada. A norma é definida por:

$$\Delta X^T \Delta X, \quad (3.19)$$

e minimizada por:

$$\Delta X^{k-1} = -G^T (GG^T)^{-1} F(X^{k-1}). \quad (3.20)$$

Com este método após poucos passos chega-se às condições da órbita periódica com a precisão requerida.

(iii) Implementação do método para o problema bidimensional - caso planar

O programa integra ao mesmo tempo as equações de movimento:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y, \quad (3.21)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - (x - \mu), \quad (3.22)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - \frac{\alpha(1-\mu)x}{R_1^3} - \frac{\beta\mu(x-1)}{R_2^3}, \quad (3.23)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - \frac{\alpha(1-\mu)y}{R_1^3} - \frac{\beta\mu y}{R_2^3}. \quad (3.24)$$

e as equações variacionais:

$$\delta\dot{x} = \delta y + \delta p_x \quad (3.25)$$

$$\delta\dot{y} = -\delta x + \delta p_y \quad (3.26)$$

$$\delta\dot{p}_x = \left(\frac{3\alpha(1-\mu)x^2}{R_1^5} + \frac{3\beta\mu(x-1)^2}{R_2^5} - \frac{\alpha(1-\mu)}{R_1^3} - \frac{\beta\mu}{R_2^3} \right) \delta x + \left(\frac{3\alpha(1-\mu)xy}{R_1^5} + \frac{3\beta\mu(x-1)y}{R_2^5} \right) \delta y + \delta p_x \quad (3.27)$$

$$\delta\dot{p}_y = \left(\frac{3\alpha(1-\mu)xy}{R_1^5} + \frac{3\beta\mu(x-1)y}{R_2^5} \right) \delta x + \left(\frac{3\alpha(1-\mu)y^2}{R_1^5} + \frac{3\beta\mu y^2}{R_2^5} - \frac{\alpha(1-\mu)}{R_1^3} - \frac{\beta\mu}{R_2^3} \right) \delta y - \delta p_x \quad (3.28)$$

onde,

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.29)$$

$$R_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}. \quad (3.30)$$

Dadas as condições iniciais $(x_0, 0, 0, p_{y0})$ para o ponto P_0 na secção de Poincaré com $y = 0$ e $\dot{y} > 0$, o próximo ponto P_f na secção com $y = 0$ e $\dot{y} < 0$, é determinado após meio período $T/2$, onde a matriz das variacionais, $A = A(T/2)$, também é calculada. Para o cálculo das variacionais foi tomado uma matriz diagonal 4×4 , $A(0)$, como condições iniciais. Isto significa que foram integradas 20 equações : 4 equações de Hamilton e 4 conjuntos com 4 condições iniciais para as variações definidas por $A(0)$.

A matriz G é obtida de $A(T/2)$, sendo:

$$G = (a_{1,3} + \beta_4 a_{2,1} \quad a_{3,4} + \beta_4 a_{2,4}), \quad (3.31)$$

onde $\beta_4 = -v_4/v_2$; v_4 e v_2 representam o campo vetorial no ponto P_f da órbita. A parcela que envolve o β_4 representa a correção para a diferença de tempo entre a órbita e suas variações para atingir a secção .

Tomando: $x = y(1)$; $y = y(2)$; $p_x = y(3)$; $p_y = y(4)$, os elementos da matriz G são :

$$g(1, 1) = \frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{\dot{y}(4)}{\dot{y}(2)} \frac{\partial y}{\partial x} \text{ e} \quad (3.32)$$

$$g(1, 2) = \frac{\partial p_x}{\partial p_y} - \frac{\dot{y}(4)}{\dot{y}(2)} \frac{\partial y}{\partial p_y}. \quad (3.33)$$

Com isto, calcula-se A_0 , dx e dp_y da seguinte forma:

$$A_0 = \sqrt{g(1, 1)^2 + g(1, 2)^2}, \quad (3.34)$$

$$dx = \frac{g(1, 1)ds}{A_0}, \quad (3.35)$$

$$dp_y = \frac{g(1, 2)ds}{A_0}. \quad (3.36)$$

Sendo dx e dp_y o incremento dX num passo ds dado pelo preditor para integrar as Eqs. (3-16). Em seguida refina-se esta aproximação implementando-se um corretor com o Newton modificado descrito no ítem (ii).

3.6 Resultados

De acordo com Paczyński [2], o tamanho máximo do disco corresponde à última órbita que não intercepta nenhuma outra, ou seja, o corte foi feito na bifurcação da família g .

Por comparação com problema de Hill [6] foi constatado que as famílias após a bifurcação, seguiram o ramo estável de uma bifurcação do tipo *pitchfork* para o modelo fotogravitacional. Esta hipótese deve ser confirmada com o cálculo de parâmetros de estabilidade da órbita. Além disto, este parâmetro permite uma determinação mais acurada de x_{max} .

A Fig. 3.9 (à direita) mostra a curva característica e as órbitas da família g usadas para a modelagem do disco, da estrela TY Bootis. A bifurcação da curva característica está próxima ao ponto de retorno da mesma com relação à coordenada x . Este valor ocorre em $x \approx 0.345$. Note que a primeira órbita após a bifurcação (Fig. 3.9 - esquerda) intercepta outra órbita, começando a caminhar em direção à origem. A Fig. 3.10 é uma ilustração das órbitas após a bifurcação: elas assumem um formato *triangular* muito assimétrico e caminham para a colisão exibindo laços. O gráfico da Fig. 3.10 (à direita) mostra a variação dos x s máximo e mínimo do disco, pode-se perceber que eles não são simétricos.

A Fig. 3.12 mostra a curva característica e o momento da bifurcação da família do sistema binário Cygnus X-1. O fato do parâmetro da pressão de radiação do corpo secundário deste sistema possuir um valor distante de um; i. e., significativo, provocou uma diminuição da extensão do disco. Isto pode ser observado pelo tamanho do x máximo do disco (vide tabela).

Na tabela da página 48 estão os resultados x 's máximos do disco para alguns sistemas binários. As curvas características dos sistemas são similares, por isto, não foi necessário mostrar cada uma.

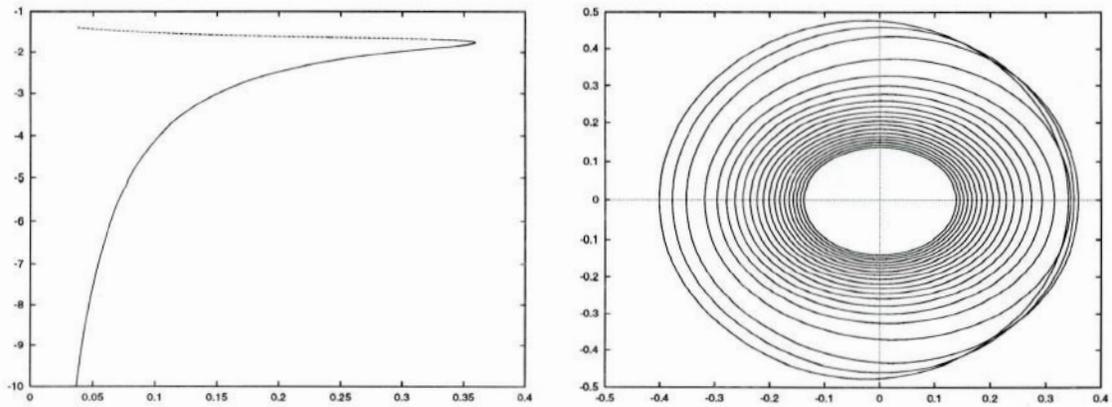


Figura 3.9: Modelagem do Disco da Estrela Binária TY Bootis

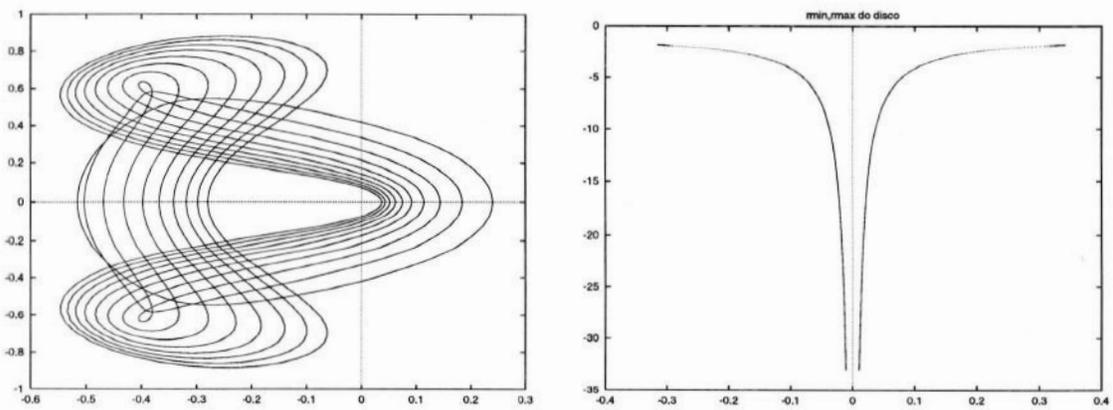


Figura 3.10: Sistema Binário TY Bootis

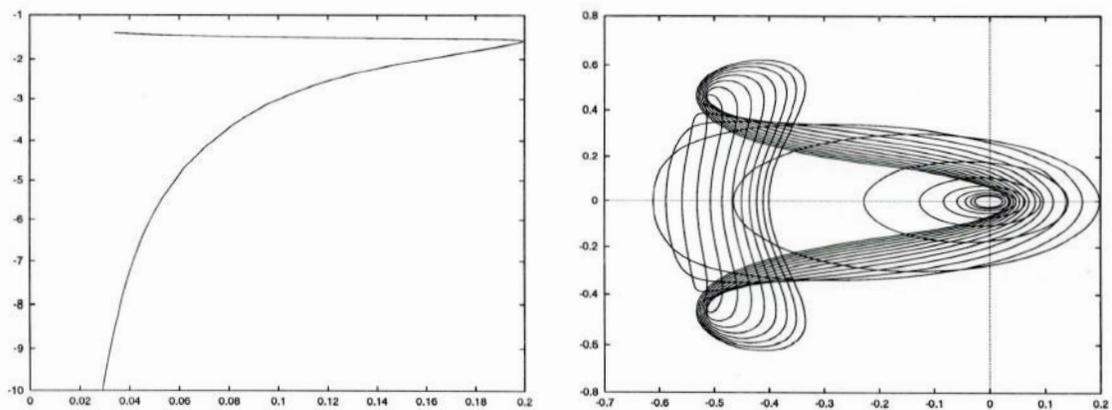


Figura 3.11: Sistema Binário Cygnus X-1

Sistema Binário	μ	α	β	x_{max}
TY Bootis	0.3	1.0	1.0	0.345
Cygnus X-1	0.39	1.0	0.38	0.199
V444 Cygni	0.28	0.96	0.81	0.312
ν_2 Velorum	0.34	0.99	0.83	0.258
UU Caciopéia	0.44	0.88	0.74	0.214

3.7 Comentários Finais e Perspectivas

O que se pode efetivamente concluir a respeito dos resultados apresentados neste capítulo é que, a influência da pressão de radiação modifica o PRTC alterando seus resultados quantitativos, como já foi evidenciado no capítulo precedente.

Outro fato notável foi estudado no sistema Cygnus X-1. A estrela primária tem como parâmetro de pressão de radiação ($\alpha = 1.0$), correspondendo ao caso gravitacional puro, enquanto que sua companheira tem ($\beta \neq 1$). Neste caso, é visível que a pressão de radiação diminui o x máximo do disco. A simulação inversa foi feita: manteve-se o valor de $\beta = 1.0$ e $\alpha \neq 1.0$, foi verificado que o raio máximo do disco aumentou. Com isto, pode-se afirmar que o tamanho do disco é aumentado pela pressão de radiação da estrela primária e diminuído pela pressão de radiação de sua companheira.

Para se determinar com mais precisão estes resultados, seria necessário determinar o parâmetro de estabilidade das órbitas, que são relacionados com os autovalores da matriz das equações variacionais $A(T)$. Isto será a próxima meta a ser seguida.

Para uma modelagem mais realista do disco seria necessário um tratamento hidrodinâmico. Os resultados do tipo de abordagem aqui apresentados podem servir de guia para tais modelos.

Também seria interessante estudar o caso espacial; as órbitas periódicas tipo (c) e órbitas Halos ao redor de L_2 , bem como estudar a relação entre as variedades estáveis e

instáveis destas órbitas e a região ocupada pelo disco. Estas variedades se relacionam com as órbitas de transferência de massa, da companheira para a região do disco e vice-versa.

Referências

- [1] Niedzielska, Zuzanna, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **67**, 205-213 (1997).
- [2] Pacyński, B., *The Astrophysical Journal*, **216**, 822-826 (1977).
- [3] Zagouras, C. G., *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **51**, 331-348 (1991).
- [4] Zhou, H. e Leung, K., *Astrophysics and Space Science* **141**, 257-270 (1988).
- [5] Brouke, R. A., *Periodics Orbits in the Restrired Three Body Problem with Earth-Moon Masses*, JPL, Technical Report 32-1168, (1968).
- [6] Simó C., Stuchi T. J., *Central Stable/Unstable Manifolds and the Destruction of KAM Tori in the Planar Hill Ploblem*, *Phisica D.*, em publicação .
- [7] Simó C., *Modern Methods in Celestial Mechanics*, ed D. Berest and C. Froesché, 285-330, *Éditions Frontière* (1990).
- [8] Scherman, D. W., *Astrphysics ans Space Science* **19**, 351-358 (1972).
- [9] Radzievskii, V. V., *Astron. Zh.* **27** 250 (1950).
- [10] Elipe, L. e Lara, M., *Celestial Mechanics* **68**, 1-11 (1997).
- [11] de Aguiar, M. A. M., *Caos em Sistemas Hamiltonianos*, *pre-print* Universidade Estadual de Campinas, (1992).

- [12] Szebehely, V., Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies, Academic Press, New York (1967).
- [13] Batten, Alan H., Binary and Multiple System of Star, Pergamon Press Ltd. (1973).
- [14] Keith, Symon R., Mecânica; tradução de Gilson Brand Batista, Rio de Janeiro: Campus (1982).
- [15] Gómez G., Llibre J., Martínez R. e Simó C., Station Keeping around L_2 , Technical Report for European Space Agency (ESA), 1985.
- [16] Morales Ruiz, Juan J., Diferencial Galois Theory and non-Integrability of Hamiltons Systems, Switzerland: Birkhäuser Verlag, 48, (1999).