Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo
Departamento de Astronomia

SISTEMAS GAUSSIANOS DE COORDENADAS NO UNIVERSO DE GÖDEL

Aluno: Eduardo Lima Rodrigues
Orientador: Mário Novello (CBPF)

Projeto Final de Curso para a obtenção do título de Astrônomo

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à minha família que sempre me apoiou durante esses anos de graduação.

Agradeço também a Renata que me "aturou" durante o período em que estive fazendo esse projeto.

Aos meus amigos da Astronomia: Wailã, Vinícius, Tiago, Tatiana, Sandrão, Ricardo, Luis Antônio, Leda, Gil, Eduardo, Bruno, Bia, B.A., e a todos os outros que tornaram esses anos mais agradáveis.

Ao Magno pelas ajudas indispensáveis durante todo o curso.

À Tatiana pelas traduções.

Aos professores do Observatório do Valongo que sempre me ajudaram: Encarnacion e Sueli.

Aos professores Mário Novello e Ívano Damião Soares que me ajudaram a entender um pouco mais sobre Cosmologia e Gravitação.

Resumo

Exibimos as principais características do modelo cosmológico de Gödel (1949) e apresentamos a construção de sistemas gaussianos locais, cuja união infinita constitui um Atlas que cobre completamente a variedade. Mostramos também algumas propriedades dos observadores gaussianos.

Palavras-Chave:

- Universo de Gödel;
- Curvas Tipo-Tempo Fechadas;
- Sistemas Gaussianos de Coordenadas.

Abstract

We present the main features of Gödel's (1949) cosmological model and the construction of local gaussian systems whose infinite union constitutes an Atlas which covers the manifold. We also show some properties of the gaussian observers.

Keywords:

- Gödel's Universe;
- Closed Time-Like Curves;
- Gaussian Coordinate Systems.

SUMÁRIO

Convenções

Utilizaremos as seguintes convenções:

Os índices gregos e os índices latinos maiúsculos variam de 0 a 3;
Os índices latinos minúsculos variam de 1 a 3;
A assinatura da métrica é -2.

Primeira Equação de Estrutura de Cartan:

$$d\theta^A = -\varpi^A{}_B \wedge \theta^B$$

Segunda Equação de Estrutura de Cartan:

$$\Omega^A{}_B = d\varpi^A{}_B + \varpi^A{}_C \wedge \varpi^C{}_B$$

Derivada Covariante:

$$A^\alpha_{;\mu} \equiv A^\alpha_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\nu$$

onde (;) denota a derivada covariante e (,) a derivada simples.

Símbolo de Christoffel:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right)$$

A Equação de Einstein com constante cosmológica não-nula:

$$R_{AB} - \frac{1}{2} R \eta_{AB} = 8k\pi T_{AB} + \Lambda \eta_{AB}$$

onde consideramos c = 1.

Denotaremos os sistemas gaussianos por $\tilde{x}^{\alpha}$.

Capítulo 1

Introdução

Em 1949, Kurt Gödel publicou um modelo cosmológico globalmente homogêneo que é solução das equações de Einstein com constante cosmológica não-nula cuja fonte da geometria é um fluido perfeito. As partículas que compõem esse fluido possuem rotação não-nula em relação ao compasso de inércia local. Esse modelo possibilita a existência de curvas do tipo-tempo fechadas.

Apesar desse modelo ser estático e possuir rotação não nula, diferente do Universo onde vivemos que está se expandindo e aparentemente não possui rotação, seu estudo é importante por ser uma solução exata das equações de Einstein e por sua simplicidade operacional e constituir um paradigma de modelo com rotação. Isso o torna um dos modelos cosmológicos mais estudados no contexto da Teoria da Relatividade Geral de Einstein quando a vorticidade é incluída nas características do fluido considerado como fonte da gravitação.

O fato do modelo de Gödel possibilitar a existência de curvas do tipo-tempo fechadas implica a não existência de um tempo global, ou seja, não podemos representar eventos em termos de um sistema de coordenadas gaussianas único, diferente de outros modelos cosmológicos mais simples como por exemplo os modelos de FRW e de Sitter que são ou podem ser escritos em termos de um sistema gaussiano de coordenadas único, ou seja, é possível encontrar uma coordenada tempo global.

A Teoria das Variedades Riemannianas Diferenciáveis afirma entretanto que é sempre possível, pelo menos em um domínio restrito, representar eventos através de um sistema gaussiano de coordenadas.

Com efeito, neste trabalho iremos apresentar a construção de sistemas gaussianos de coordenadas locais no Universo de Gödel bem como as propriedades dos observadores gaussianos.

Capítulo 2

O Modelo de Gödel

2.1 Introdução

Como foi dito anteriormente, o modelo cosmológico proposto por Gödel é um modelo de um universo espaço-temporalmente homogêneo gerado por um fluido perfeito cujas partículas possuem uma rotação não-nula em relação ao compasso de inércia local, que é solução exata das equações de Einstein com constante cosmológica não-nula.

Esse modelo possui um papel importante dentro do contexto da Relatividade Geral devido à sua facilidade operacional e às suas características interessantes como a existência de curvas do tipo-tempo fechadas. Isso coloca em questão o princípio de Causalidade, que afirma que a matéria se move globalmente para o futuro.

Nesse capítulo iremos explicitar a solução de Gödel e algumas características de seu modelo.

2.2 A Solução de Gödel

O elemento de linha da métrica de Gödel em coordenadas (t, x, y, z) se escreve:

$$ds^2 = a^2\left(dt^2 + 2e^x dydt + \frac{1}{2}e^{2x}dy^2 - dx^2 - dz^2\right) \tag{2.1}$$

onde a é uma constante de dimensão [L].

Logo, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ vale

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 e^x & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ a^2 e^x & 0 & \dfrac{a^2 e^{2x}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

e a sua inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{a^2} & 0 & \dfrac{2e^{-x}}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{a^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{2e^{-x}}{a^2} & 0 & \dfrac{-2e^{-2x}}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{a^2} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

O determinante g é dado então por

$$\det g = -\frac{a^8 e^{2x}}{2}. \tag{2.4}$$

Sempre é possível escrever uma métrica em termos de uma base de tetradas onde ela toma a forma Minkowskiana, ou seja:

$$ds^2 = \eta_{AB}\theta^A\theta^B = \left(\theta^0\right)^2 - \left(\theta^1\right)^2 - \left(\theta^2\right)^2 - \left(\theta^3\right)^2. \tag{2.5}$$

Para a métrica de Gödel é conveniente utilizar a seguinte escolha:

$$\begin{cases} \theta^0 = a\left(dt + e^x dy\right) \\ \theta^1 = adx \\ \theta^2 = \dfrac{a}{\sqrt{2}} e^x dy \\ \theta^3 = adz \end{cases}. \tag{2.6}$$

Derivando exteriormente as 1-formas θ^A, um cálculo direto nos permite encontrar os coeficientes de rotação de Ricci não nulos:

$$\begin{cases} \gamma_{012} = -\gamma_{102} = \dfrac{\sqrt{2}}{2a} \\ \gamma_{021} = -\gamma_{201} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2a} \\ \gamma_{120} = -\gamma_{210} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2a} \\ \gamma_{122} = -\gamma_{212} = \dfrac{1}{a} \end{cases} . \qquad (2.7)$$

As 1-formas de rotação são definidas como:

$$\varpi_{AB} = \gamma_{ABC}\theta^C \ . \qquad (2.8)$$

Os únicos elementos não nulos são dados por

$$\begin{cases} \varpi^0{}_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2a}\theta^2 \\ \varpi^0{}_2 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2a}\theta^1 \\ \varpi^1{}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2a}\theta^0 + \dfrac{1}{a}\theta^2 \end{cases} . \qquad (2.9)$$

Das 1-formas de rotação e de suas derivadas exteriores, através da Segunda Equação de Estrutura de Cartan, encontramos as 2-formas de curvatura

$$\begin{cases} \Omega^0{}_1 = -\dfrac{1}{2a^2}\theta^0 \wedge \theta^1 \\ \Omega^0{}_2 = -\dfrac{1}{2a^2}\theta^0 \wedge \theta^2 \\ \Omega^1{}_2 = \dfrac{1}{2a^2}\theta^1 \wedge \theta^2 \end{cases} . \qquad (2.10)$$

Uma vez que as 2-formas de curvatura são definidas como

$$\Omega^A{}_B = \frac{1}{2} R^A{}_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D$$

obtemos imediatamente as componentes não nulas do tensor de curvatura na base de tetradas escolhida, dadas por

$$\begin{cases} R^0_{101} = -\dfrac{1}{2a^2} \\ R^0_{202} = -\dfrac{1}{2a^2} \\ R^1_{212} = \dfrac{1}{2a^2} \end{cases} \quad . \tag{2.11}$$

Por um cálculo direto obtemos o tensor de Ricci:

$$R_{00} = \frac{1}{a^2} \tag{2.12}$$

E, finalmente, o escalar de curvatura R:

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ ,$$

isto é,

$$R = \frac{1}{a^2} . \tag{2.13}$$

Vamos agora voltar nossa atenção para a fonte desta geometria.

Como a fonte de curvatura do modelo de Gödel é um fluido perfeito, incoerentemente distribuído no espaço, de densidade de energia ρ e pressão nula, podemos escrever para o tensor momento-energia, no sistema de tetradas que estamos utilizando, a expressão:

$$T_{AB} = \rho V_A V_B, \tag{2.14}$$

onde V_A, no sistema inercial, vale $V_A = \delta^0_A$.

A equação de Einstein com termo cosmológico é dada por

$$R_{AB} - \frac{1}{2} R \eta_{AB} = 8k\pi T_{AB} + \Lambda \eta_{AB}, \tag{2.15}$$

onde consideramos c = 1.

Logo, para que a métrica de Gödel seja solução das equações de Einstein com termo cosmológico temos

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} = 8k\pi\rho \\ \\ \Lambda = -4k\pi\rho \end{cases} . \tag{2.16}$$

Podemos, então, considerar a constante a como um parâmetro associado a curvatura, já que, ao tomarmos o limite de $a \to \infty$, ρ e Λ tendem a zero, ou seja, um espaço tempo Minkowskiano.

2.3 Quantidades Cinemáticas

Das relações obtidas anteriormente podemos calcular os parâmetros cinemáticos do espaço-tempo de Gödel, que são:

Expansão (θ):

Por definição temos

$$\theta \equiv -\gamma^{0}_{BC}\eta^{BC}, \tag{2.17}$$

logo

$$\theta = -\gamma^{0}_{12}\eta^{12} - \gamma^{0}_{21}\eta^{21} = 0 \tag{2.18}$$

Deformação (shear) (σ_{AB}):

Por definição

$$2\sigma_{AB} \equiv -\gamma^{0}_{AB} - \gamma^{0}_{BA} + \gamma^{0}_{A0}\eta_{A0} - \frac{2}{3}\theta h_{AB} \quad , \tag{2.19}$$

onde: $h_{AB} \equiv g_{AB} - V_A V_B$, tensor projeção, de onde obtemos

$$\sigma_{AB} = 0 \quad . \tag{2.20}$$

Aceleração (A_μ):

Temos

$$A_\mu \equiv -\gamma^{0}_{\mu 0} = 0 . \tag{2.21}$$

Rotação (ϖ_{AB}):

$$2\varpi_{AB} \equiv -\gamma^{0}_{AB} + \gamma^{0}_{BA} + \gamma^{0}_{A0}\delta^{0}_{B} - \gamma^{0}_{B0}\delta^{0}_{A} \tag{2.22}$$

O único termo não-nulo é dado por

$$2\varpi_{12} = -\gamma^{0}_{12} + \gamma^{0}_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{a}\,, \tag{2.23}$$

logo

$$\varpi_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2a}\,. \tag{2.24}$$

E, para o vetor rotação, temos

$$\varpi^{A} = (0,0,0,\varpi_{12}) = \left(0,0,0,-\frac{\sqrt{2}}{2a}\right) = \text{constante.} \tag{2.25}$$

Podemos concluir então que as partículas componentes do fluido fonte da geometria de Gödel seguem geodésicas ($A_{\mu} = 0$) e apresentam rotação ($\varpi^{A} \neq 0$) rígida ($\sigma_{AB} = 0$, $\theta = 0$) em relação ao compasso de inércia local.

2.4 Modelo de Gödel em Coordenadas Cilíndricas

Iremos reescrever a métrica de Gödel, mas agora em coordenadas cilíndricas, já que algumas propriedades ficam mais evidentes quando estudadas neste sistema.

Fazendo uma transformação de coordenadas dada por

$$\begin{cases} e^{x_1} = \cosh 2r + \cos\varphi sin 2r \\ x_2 e^{x_1} = \sqrt{2} sin\varphi sin 2r \\ \tan\left(\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2r}\tan\dfrac{\varphi}{2} \\ x_3 = 2z \end{cases}, \tag{2.26}$$

onde $\left|\frac{(x_0 - 2t)}{2\sqrt{2}}\right| < \frac{\pi}{2}$ e (t, r, φ, z) são coordenadas cilíndricas, podemos reescrever a métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas por uma transformação de escala:

$$ds^2 = a^2\left[dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2h(r)dtd\varphi + g(r)d\varphi^2\right] , \tag{2.27}$$

onde

$$\begin{cases} h(r) = \sqrt{2}sinh^2 r \\ g(r) = sinh^2 r\left(sinh^2 r - 1\right) \end{cases} . \tag{2.28}$$

As coordenadas (t, r, φ) estão definidas sobre o espaço tri-dimensional H^3 (hiperbolóide) e variam de $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq r < +\infty$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, respectivamente. A coordenada z é definida sobre o real $\Re$ e varia de $-\infty < z < +\infty$. Assim, podemos dizer que o espaço-tempo da solução de Gödel é definido topologicamente por $H^3 \otimes \Re$.

O tensor métrico e sua inversa em coordenadas cilíndricas são dados por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2\sqrt{2}\sinh^2 r & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ a^2\sqrt{2}\sinh^2 r & 0 & a^2\sinh^2 r\left(\sinh^2 r - 1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

e

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1 - sinh^2 r}{a^2\cosh^2 r} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{a^2\cosh^2 r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{a^2\cosh^2 r} & 0 & \frac{-1}{a^2 sinh^2 r\cosh^2 r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

O determinante é dado por

$$\det g_{\mu\nu} = -a^8 \sinh^2 r \cosh^2 r \quad . \tag{2.31}$$

Podemos verificar que há simetria rotacional nessa métrica, já que os coeficientes $g_{\mu\nu}$ independem da coordenada φ.

2.5 Curvas do Tipo-Tempo Fechadas

O modelo cosmológico de Gödel possui uma propriedade interessante que é o fato de possuir órbitas circulares (t = cte, $r > r_c$ = cte, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, z = cte) que representam curvas do tipo-tempo fechadas, fazendo com que exista a possibilidade de uma partícula retornar ao mesmo ponto do espaço-tempo.

É possível verificar esse fato fazendo dt = dr = dz = 0 na métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas (2.27).

Encontramos

$$ds^2 = a^2 sinh^2 (sinh^2 r - 1) d\varphi^2 \ , \tag{2.32}$$

de onde verificamos que

i) Quando r for tal que $0 < r < r_c = \text{arcsinh } 1$, temos $ds^2 < 0$, ou seja, tipo-espaço;
ii) Quando r for tal que $r = r_c$, temos $ds^2 = 0$, ou seja, tipo-nulo;
iii) E, quando r for tal que $r > r_c$, temos que $ds^2 > 0$, ou seja, tipo-tempo.

Podemos entender o fato de uma partícula poder se movimentar sobre uma curva tipo-tempo fechada retornando ao mesmo ponto no espaço-tempo (sendo uma possível violação da Causalidade) se notarmos que a coordenada φ é uma coordenada angular que varia no intervalo $[0, 2\pi]$.

Porém, essas curvas tipo-tempo fechadas não são geodésicas, ou seja, uma partícula se movendo sobre essas curvas deve estar acelerada, necessitando de um campo externo para acelerá-la. As geodésicas estão confinadas a região $0 < r < r_c$. Esse fato foi mostrado por Novello, Soares e Tiomno através da análise do potencial efetivo.

Como o espaço-tempo da solução de Gödel é homogêneo, essa análise é válida para qualquer ponto da variedade, ou seja, podemos escolher qualquer ponto como origem do "cilindro crítico".

Capítulo 3

Sistemas Gaussianos de Coordenadas no Universo de Gödel

3.1 Introdução

A Relatividade Geral nos permite escolher qualquer sistema de coordenadas para descrever um campo gravitacional, já que isso não modifica a física observada.

O Sistema Gaussiano de Coordenadas é um dos sistemas mais convenientes para ser utilizado, pois assim garantimos imediatamente a sincronização de relógios.

Uma métrica expressa em termos de coordenadas gaussianas tem a forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 - g_{ij}dx^i dx^j \; . \tag{3.1}$$

Nesse capítulo iremos mostrar como podemos construir um sistema gaussiano de coordenadas no universo de Gödel.

3.2 Construção de um Sistema Gaussiano de Coordenadas Local

Para que um sistema de coordenadas possa ser dito gaussiano, o tensor métrico deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \widetilde{g}^{00} = 1 \\ \widetilde{g}^{0i} = 0 \end{cases}, \tag{3.2}$$

com i = 1, 2, 3.

Temos então

$$\widetilde{g}^{00} = g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial S}{\partial x^{\nu}} = 1 \quad , \tag{3.3}$$

onde $S \equiv \widetilde{t}$.

A equação (3.3) é a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula livre e de massa unitária onde S é a função de Hamilton-Jacobi.

Logo,

$$\widetilde{g}^{00} = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 g^{00} + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 g^{11} + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 g^{22} + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 g^{33} + 2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right) g^{02} = 1 \,. \tag{3.4}$$

Substituindo $g^{\mu\nu}$, temos

$$a^2 = \frac{1 - sinh^2 r}{\cosh^2 r}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{sinh^2 r \cosh^2 r}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\cosh^2 r}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right).$$

Para resolver a equação acima utilizamos o "ansatz"

$$S(t, r, \varphi, z, \lambda_i) = \lambda_1 t + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 z + F(r) \,. \tag{3.5}$$

Com isso obtemos

$$a^2 = \frac{1 - sinh^2 r}{\cosh^2 r}\lambda_1{}^2 - \left(F'(r)\right)^2 - \frac{1}{sinh^2 r \cosh^2 r}\lambda_2{}^2 - \lambda_3{}^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\cosh^2 r}\lambda_1 \lambda_2$$

$$\left(F'(r)\right)^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\cosh^2 r}\lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_2{}^2}{sinh^2 r\cosh^2 r} - \frac{\left(sinh^2 r - 1\right)}{\cosh^2 r}\lambda_1{}^2 - M^2, \quad (3.6)$$

onde $M^2 \equiv \lambda_3{}^2 + a^2$.

Logo,

$$F(r) = \int\left\{\frac{2\sqrt{2}}{\cosh^2 r}\lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_1{}^2}{sinh^2 r\cosh^2 r} - \frac{\left(sinh^2 r - 1\right)}{\cosh^2 r}\lambda_1{}^2 - M^2\right\}^{1/2} dr. \quad (3.7)$$

Fazendo uma transformação de variável

$$\begin{cases} x = sinh^2 r \\ x + 1 = \cosh^2 r \end{cases}, \quad (3.8)$$

e

$$\begin{aligned} dx &= 2sinh^2 r\cosh^2 r dr = 2\sqrt{x(x+1)}dr \\ dr &= \frac{dx}{2\sqrt{x(x+1)}} \end{aligned}, \quad (3.9)$$

a função F(r) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\frac{dx}{2}\left\{\frac{2\sqrt{2}}{x(x+1)^2}\lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_2{}^2}{x^2(x+1)^2} - \frac{(x-1)}{x(x+1)^2}\lambda_1{}^2 - \frac{M^2}{x(x+1)}\right\}^{1/2} \\ &= \int\frac{dx}{2x(x+1)}\left\{2\sqrt{2}x\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2{}^2 - x(x-1)\lambda_1{}^2 - M^2 x(x+1)\right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$F(x) = \int\frac{dx}{2x(x+1)}\left\{-x^2\left[\lambda_1{}^2 + M^2\right] + x\left[2\sqrt{2}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1{}^2 - M^2\right] - \lambda_2{}^2\right\}^{1/2}. \quad (3.10)$$

Definindo

$$\begin{cases} P \equiv \lambda_1{}^2 + M^2 \\ Q \equiv 2\sqrt{2}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1{}^2 - M^2 \end{cases} \tag{3.11}$$

podemos reescrever a equação (3.10) da forma:

$$F(x) = \int \frac{dx}{2x(x+1)} \left\{ -Px^2 + Qx - \lambda_2{}^2 \right\}^{1/2}$$

ou,

$$F(x) = \int \frac{dx}{2x} \left\{ -Px^2 + Qx - \lambda_2{}^2 \right\}^{1/2} - \int \frac{dx}{2(x+1)} \left\{ -Px^2 + Qx - \lambda_2{}^2 \right\}^{1/2}. \tag{3.12}$$

Essas integrais estão tabeladas e tem como solução:

$$\begin{aligned} F(x) = {} & \frac{\sqrt{P}}{2} arcsin \frac{(-2Px + Q)}{\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2{}^2}} - \frac{\lambda_2{}^2}{2} arcsin \frac{(Qx - 2\lambda_2{}^2)}{x\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2{}^2}} + \\ & + \frac{\sqrt{\left| Q + P + \lambda_2{}^2 \right|}}{2} arcsin \frac{(Q + 2P)x - Q + 2\lambda_2{}^2}{(x+1)\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2{}^2}} \end{aligned} , \tag{3.13}$$

onde

$$\begin{cases} x \equiv sinh^2 r \\ P \equiv \lambda_1{}^2 + M^2 \\ Q \equiv 2\sqrt{2}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1{}^2 - M^2 \end{cases} . \tag{3.14}$$

Logo

$$\tilde{t} = \lambda_1 t + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 z + F(x) \ , \tag{3.15}$$

onde F(x) é dado por (3.13).

Para encontrarmos as outras coordenadas gaussianas utilizaremos as condições (3.2).

Já tínhamos visto que a primeira condição de (3.2) nos dava:

$$\frac{\partial\tilde{t}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\tilde{t}}{\partial x^{\nu}}g^{\mu\nu}=1 \tag{3.16}$$

A segunda condição (3.2) nos dá a seguinte relação:

$$\frac{\partial\tilde{t}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\tilde{x}^{i}}{\partial x^{\nu}}g^{\mu\nu}=0 \tag{3.17}$$

Derivando a expressão (3.16) em relação à λ_i, temos:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial\lambda_i}\right)\left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial x^{\mu}}\right)=0 \tag{3.18}$$

De onde concluímos que, comparando com a equação (3.17)

$$\tilde{x}^{i}=\frac{\partial\tilde{t}}{\partial\lambda_i} \quad , \tag{3.19}$$

ou seja,

$$\begin{cases}\tilde{x}^{1}\equiv\tilde{\xi}=t+\dfrac{\partial F}{\partial\lambda_1}\\ \tilde{x}^{2}\equiv\tilde{\eta}=\varphi+\dfrac{\partial F}{\partial\lambda_2}\\ \tilde{x}^{3}\equiv\tilde{z}=z+\dfrac{\partial F}{\partial\lambda_3}\end{cases} \quad . \tag{3.20}$$

Logo, as coordenadas gaussianas escritas em termos das coordenadas cilíndricas e em termos de parâmetros arbitrários λ_i, cuja escolha determina diferentes sistemas gaussianos de coordenadas locais são dadas por

$$\begin{cases} \tilde{t} = \lambda_1 t + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 z + F(x) \\ \tilde{\xi} = t + \dfrac{\lambda_1}{2\sqrt{P}} \arcsin \dfrac{-2Px + Q}{\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2{}^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \dfrac{(Q + 2P)x + 2\lambda_2{}^2 - Q}{(x+1)\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2{}^2}} \\ \tilde{\eta} = \varphi + \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{(Q + 2P)x + 2\lambda_2{}^2 - Q}{(x+1)\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2{}^2}} - \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{Qx - 2\lambda_2{}^2}{x\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2{}^2}} \\ \tilde{z} = z + \dfrac{\lambda_3}{2\sqrt{P}} \arcsin \dfrac{-2Px + Q}{\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2{}^2}} \end{cases} . \quad (3.21)$$

As geodésicas no Universo de Gödel foram estudadas por Chandrasekhar e Wright e de uma forma alternativa por Novello, Soares e Tiomno (NST). Neste trabalho utilizaremos a análise utilizada por NST.

As equações para geodésicas em um ponto P arbitrário são

$$\begin{cases} \dot{t} = A_0 \left[1 - \dfrac{2 sinh^2 r}{\cosh^2 r} \right] + \dfrac{\sqrt{2} B_0}{\cosh^2 r} \\ \dot{r} = A_0{}^2 - D_0{}^2 - \left[\dfrac{\sqrt{2} A_0 sinhr}{\cosh r} - \dfrac{B_0}{sinhr \cosh r} \right]^2 \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\sqrt{2} A_0}{\cosh^2 r} - \dfrac{B_0}{sinh^2 r \cosh^2 r} \\ \dot{z} = C_0 \end{cases} , \quad (3.22)$$

com $\dfrac{dx^\mu}{ds} = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z})$ e A_0, B_0, C_0, D_0 são constantes.

Veremos mais adiante que essas geodésicas estão confinadas em um cilindro de raio r_c e origem em P.

Capítulo 4

Uma Escolha Particular de "Observadores Gaussianos"

4.1 Introdução

Ao encontrarmos um sistema de coordenadas gaussianos nós estamos definindo matematicamente uma família de hipersuperfícies tri-dimensionais tipo-espaço que são interceptadas em apenas um ponto por um conjunto de geodésicas tipo-tempo.

Nesse capítulo iremos identificar geodésicas ortogonais às hipersuperfícies $\tilde{t}$ constante dentre as geodésicas do modelo de Gödel (3.22).

4.2 Sistema de Coordenadas Gaussianas I

Escolhendo-se um ponto arbitrário *P* que tenha como característica r = 0 como a origem do sistema gaussiano implica que a constante B_0 das equações (3.22) deve ser nula (de acordo com a análise de $_{NST}$).

Podemos impor também os seguintes valores para as constantes A_0, C_0 e D_0 para este sistema gaussiano

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{\mu}{a} \\ C_0 = B_0 = 0 \; , \\ D_0 = \dfrac{1}{a} \end{cases} \tag{4.1}$$

onde definimos $\mu \equiv \frac{\lambda_1}{a}$ e escolhemos $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Logo

$$\begin{cases} P = \lambda_1^{\,2} + M^2 = a^2\left(\mu^2 + 1\right) \\ Q = 2\sqrt{2}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^{\,2} - M^2 = a^2\left(\mu^2 - 1\right) \end{cases} \tag{4.2}$$

e as coordenadas gaussianas desse sistema (Gauss-I) em função das coordenadas cilíndricas é

$$\begin{cases} \tilde{t} = \mu a t + \frac{a}{2}\sqrt{\mu^2 + 1} arcsin\Psi + \frac{\mu a}{\sqrt{2}} arcsin\Delta \\ \tilde{\xi} = t + \frac{\mu}{2\sqrt{\mu^2 + 1}} arcsin\Psi + \frac{1}{\sqrt{2}} arcsin\Delta \\ \tilde{\eta} = \left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} arcsin\Delta \\ \tilde{z} = z \end{cases}, \tag{4.3}$$

onde $\begin{cases} \psi = 1 - 2\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1}x \\ \Delta = \frac{3\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1}\frac{x}{x + 1} - \frac{1}{x + 1} \end{cases}$. (4.4)

O tensor métrico pode ser obtido utilizando a equação de transformação

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right) g^{\alpha\beta}. \tag{4.5}$$

As componentes não-nulas são

$$
\begin{cases}
\widetilde{g}^{00} = 1 \\
\widetilde{g}^{11} = \left(\dfrac{\partial \widetilde{x}^1}{\partial x^0}\right)^2 g^{00} + \left(\dfrac{\partial \widetilde{x}^1}{\partial x^1}\right)^2 g^{11} = -\dfrac{(x-1)}{a^2\left[(\mu^2+1)x-(\mu^2-1)\right]} \\
\widetilde{g}^{12} = \left(\dfrac{\partial \widetilde{x}^1}{\partial x^1}\right)\left(\dfrac{\partial \widetilde{x}^2}{\partial x^1}\right) g^{11} + \left(\dfrac{\partial \widetilde{x}^1}{\partial x^0}\right)\left(\dfrac{\partial \widetilde{x}^2}{\partial x^2}\right) g^{02} = \dfrac{\sqrt{2}}{a^2\left[(\mu^2+1)x-(\mu^2-1)\right]} \\
\widetilde{g}^{22} = \left(\dfrac{\partial \widetilde{x}^2}{\partial x^1}\right)^2 g^{11} + \left(\dfrac{\partial \widetilde{x}^2}{\partial x^2}\right)^2 g^{22} = \dfrac{(\mu^2-1)}{a^2 x\left[(\mu^2+1)x-(\mu^2-1)\right]} \\
\widetilde{g}^{33} = \left(\dfrac{\partial \widetilde{x}^3}{\partial x^3}\right)^2 g^{33} = -\dfrac{1}{a^2}
\end{cases}, \tag{4.6}
$$

onde $x = sinh^2 r$.

As componentes covariantes são dadas por

$$
\begin{cases}
\widetilde{g}_{00} = 1 \\
\widetilde{g}_{11} = -a^2(\mu^2-1) \\
\widetilde{g}_{12} = a^2\sqrt{2}x \\
\widetilde{g}_{22} = a^2 x(x-1) \\
\widetilde{g}_{33} = -a^2
\end{cases} \tag{4.7}
$$

e o determinante

$$
\det(\widetilde{g}_{\mu\nu}) = -a^6 x\left[(\mu^2-1)-x(\mu^2+1)\right] \tag{4.8}
$$

ou

$$
\sqrt{-\widetilde{g}} = a^3\sqrt{x\left[(\mu^2-1)-x(\mu^2+1)\right]}. \tag{4.9}
$$

Para escrever a métrica desta região devemos reescrever a variável x em termos das novas coordenadas (Gauss-I).

Para isso, basta multiplicar a coordenada $\tilde{\xi}$ por $-\mu a$ e somar com a coordenada $\tilde{t}$ para obtermos

$$x = \frac{(\mu^2 - 1)}{2(\mu^2 + 1)}[1 - sinN], \tag{4.10}$$

onde $$N = \frac{2\sqrt{\mu^2 + 1}}{a}(\tilde{t} - \mu a \tilde{\xi}). \tag{4.11}$$

Assim podemos escrever a métrica da região Gauss-I como

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{t}^2 - a^2(\mu^2 - 1)d\tilde{\xi}^2 + a^2 g(\tilde{t}, \tilde{\xi})d\tilde{\eta}^2 + 2a^2 h(\tilde{t}, \tilde{\xi})d\tilde{\xi}d\tilde{\eta} - a^2 d\tilde{z}^2, \tag{4.12}$$

onde as funções $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$ são as mesmas funções encontradas anteriormente em função das novas coordenadas:

$$\begin{cases} \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{\xi}) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{\mu^2 - 1}{(\mu^2 + 1)^2}(1 - sinN)[3 + \mu^2 + (\mu^2 - 1)sinN] \\ \tilde{h}(\tilde{t}, \tilde{\xi}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\mu^2 - 1}{\mu \ \ + 1}(1 - sinN) \end{cases} \tag{4.13}$$

4.3 Limite de Validade do Sistema Gauss-I

Como já falamos anteriormente não é possível estabelecer um sistema de coordenadas gaussianas que cubra toda a variedade. Iremos agora estabelecer o limite de validade do sistema Gauss-I.

Como função seno varia entre o intervalo [-1,+1] , temos que

$$-1 \leq \Psi \leq +1 \tag{4.14}$$

onde $\Psi = 1 - 2\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}x$.

Logo, o sistema Gauss-I é válido somente nos intervalos

$$0 \leq x \leq x_c = \frac{\mu^2-1}{\mu^2+1} \ , \tag{4.15}$$

onde x pode ser dado em coordenadas gaussianas ou em coordenadas cilíndricas.

Em coordenadas cilíndricas o limite nos dá

$$r_c = arcsinh\sqrt{\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}} \ . \tag{4.16}$$

4.4 Propriedades Cinemáticas dos Observadores Fundamentais de Gauss-I

Chamaremos de observadores fundamentais os observadores que seguem geodésicas ortogonais às hipersuperfícies tipo-espaço Σ definidas por $\widetilde{t} = cte$.

São eles em coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} l^0 = -\frac{\mu}{a}\frac{sinh^2 r - 1}{\cosh^2 r} \\ l^1 = \frac{\sqrt{\mu^2 - 1 - (\mu^2+1)sinh^2 r}}{a\cosh r} \\ l^2 = \frac{\sqrt{2}\mu}{a}\frac{1}{\cosh^2 r} \\ l^3 = 0 \end{cases} , \tag{4.17}$$

e, em coordenadas gaussianas, por definição

$$\widetilde{l}^{\mu} = \delta_0^{\mu} \tag{4.18}$$

O fluxo de matéria em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$V^{\mu} = \frac{1}{a}\delta_0^{\mu} \ , \tag{4.19}$$

e, em coordenadas gaussianas

$$\widetilde{V}^{\mu} = (\mu, \frac{1}{a}, 0, 0) \, . \tag{4.20}$$

Com isso podemos dar uma interpretação geométrica para o parâmetro μ: ele mede o ângulo entre a 4-velocidade $\widetilde{V}^{\mu}$ do fluido e as geodésicas $\widetilde{l}^{\mu}$, ou seja, o quanto a matéria que compõe o fluido gerador da geometria se desvia das curvas geodésicas tipo-tempo no sistema Gauss-I, como vemos na expressão abaixo:

$$\widetilde{l}^{\mu}\widetilde{V}_{\mu} = \mu \ . \tag{4.21}$$

Os parâmetros cinemáticos, em coordenadas gaussianas, associados a eles são:

Expansão (θ):

Podemos escrever a expansão como

$$\theta = \widetilde{l}^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-\widetilde{g}}}\left(\widetilde{l}^{\mu}\sqrt{-\widetilde{g}}\right)_{|\mu} \tag{4.22}$$

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{-\widetilde{g}}}\frac{\partial\sqrt{-\widetilde{g}}}{\partial\widetilde{t}} = -2\frac{\sqrt{\mu^2+1}}{a}\tan N \ . \tag{4.23}$$

Podemos notar que θ diverge em r = 0 e r = r_c, já que nesses pontos $\sqrt{-\widetilde{g}}$ é nulo, o que condiz com o fato de que o sistema Gauss-I é limitado para observadores geodésicos dentro desse limite, um cilindro de raio r_c.

Aceleração (A^{μ}):

$$A^{\mu} = \widetilde{l}^{\mu}_{;\nu}\widetilde{l}^{\nu} = 0 \tag{4.24}$$

Deformação (shear) ($\sigma_{\mu\nu}$):

A deformação pode ser obtida através da expressão

$$\sigma_{\mu\nu} = h^{(\alpha}_{\mu} h^{\beta)}_{\nu} \widetilde{l}_{(\alpha;\beta)} - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} \,. \tag{4.25}$$

As componentes não-nulas são

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -\dfrac{1}{3}\theta\widetilde{g}_{11} \\ \sigma_{12} = -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\dfrac{\mu^2 - 1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}\left[\cos N - \dfrac{2}{3}\tan N(1 - sinN)\right] \\ \sigma_{22} = -\dfrac{a}{2}\dfrac{\mu^2 - 1}{\left(\mu^2 + 1\right)^{3/2}}\cos N\left[2 + sinN\left(\mu^2 - 1\right) - \dfrac{1}{3}\theta\widetilde{g}_{22}\right] \\ \sigma_{33} = -\dfrac{1}{3}\theta\widetilde{g}_{33} \end{cases} \tag{4.26}$$

Rotação ($\varpi_{\mu\nu}$):

$$\varpi_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} \widetilde{l}_{[\alpha;\beta]} = 0 \tag{4.27}$$

Portanto, apesar das partículas que compõem o fluido que gera a geometria neste modelo possuírem rotação, os observadores fundamentais de Gauss-I não possuem rotação (por definição).

Capítulo 5

Extensão dos Sistemas Gaussianos de Coordenadas

5.1 Introdução

Vimos no capítulo anterior que, uma vez escolhida a origem do sistema gaussiano, as geodésicas que passam por esse ponto estão confinadas a um cilindro de raio r_c, dado por (4.16).

Devido a esse confinamento nós não podemos prolongar analiticamente além desse limite o sistema Gauss-I. Entretanto, como as equações de transformação (3.21) possuem parâmetros arbitrários λ_i, é possível fazer escolhas convenientes destes parâmetros de forma que possamos criar um outro sistema gaussiano de coordenadas local cujo domínio de validade contenha parte da variedade além de Gauss-I, como veremos nesse capítulo.

5.2 Sistema de Coordenadas Gaussianas II

Como vimos anteriormente não é possível estender o sistema de coordenadas Gauss-I além de um raio finito r_c. No entanto nós podemos encontrar outro sistema gaussiano de coordenadas para $r > r_c$, que chamaremos de Gauss-II, apenas fazendo uma nova escolha de observadores fundamentais.

Estaremos então definindo um novo tempo local $\widetilde{t}_2$ através da escolha de uma outra classe de geodésicas tipo-tempo.

Iremos escolher os seguintes valores para os parâmetros que caracterizam o novo sistema:

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{\mu}{a} \\ B_0 = \dfrac{\nu}{a} \\ C_0 = 0 \\ D_0 = \dfrac{1}{a} \end{cases} , \tag{5.1}$$

e, conseqüentemente, os parâmetros λ_i tomam os valores

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu a \\ \lambda_2 = \nu a \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} . \tag{5.2}$$

Com esses valores encontramos explicitamente as seguintes fórmulas de transformação:

$$\begin{cases} \widetilde{t}_2 = \mu a t + \nu a \varphi + \dfrac{a}{2}\sqrt{\mu^2+1}\, arcsin\Psi_2 - \dfrac{\nu a}{2} arcsin\chi_2 + \dfrac{a}{2}\left(\nu + \sqrt{2}\mu\right) arcsin\Delta_2 \\ \widetilde{\xi}_2 = t + \dfrac{\mu}{2\sqrt{\mu^2+1}} arcsin\Psi_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} arcsin\Delta_2 \\ \widetilde{\eta}_2 = \varphi + \dfrac{1}{2} arcsin\Delta_2 - \dfrac{1}{2} arcsin\chi_2 \\ \widetilde{z}_2 = z \end{cases} , \tag{5.3}$$

onde,

$$\begin{cases} \Psi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\left[2\sqrt{2}\mu\nu - 2\left(\mu^2+1\right)sinh^2 r + \mu^2 - 1\right] \\ \chi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\left[\dfrac{\left(2\sqrt{2}\mu\nu + 3\mu^2 + 1\right)sinh^2 r - \left(\mu + \sqrt{2}\nu\right)^2 + 1}{sinh^2 r + 1}\right] \\ \Delta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\left[\dfrac{\left(2\sqrt{2}\mu\nu + \mu^2\right)sinh^2 r - 2\nu^2}{sinh^2 r}\right] \end{cases}, \tag{5.4}$$

com $\quad q = \left(2\sqrt{2}\mu\nu + \mu^2 - 1\right)^2 - 4\nu^2\left(\mu^2+1\right)$. $\qquad$ (5.5)

Como no capítulo anterior, podemos encontrar a métrica da região Gauss-II, que é dada por

$$d\tilde{s}_2^{\,2} = d\tilde{t}_2^{\,2} - a^2\left(\mu^2-1\right)d\tilde{\xi}_2^{\,2} + 2a^2\left(\sqrt{2}x - \mu\nu\right)d\tilde{\xi}_2 d\tilde{\eta}_2 + a^2\left[x(x-1) + \nu^2\right]d\tilde{\eta}_2^{\,2} - a^2 d\tilde{z}_2^{\,2} \tag{5.6}$$

e

$$x = \frac{\sqrt{q}}{2\left(\mu^2+1\right)} sinN_2 - \frac{2\sqrt{2}\mu\nu + \mu^2 - 1}{2\left(\mu^2+1\right)} \quad , \tag{5.7}$$

com

$$N_2 = \frac{2\sqrt{\mu^2+1}}{a}\left(\tilde{t}_2 - \mu a\tilde{\xi}_2 - \nu a\tilde{\eta}_2\right). \tag{5.8}$$

5.3 Propriedades Cinemáticas dos Observadores Fundamentais de Gauss-II

As componentes da 4-velocidade dos observadores de Gauss-II em coordenadas cilíndricas são dados por

$$\begin{cases} p^{0} = \dfrac{1}{a^{2}\cosh^{2} r}\left[\mu\left(1 - sinh^{2} r\right) + \sqrt{2}\nu\right] \\ p^{1} = \dfrac{1}{a\cosh r sinh r}\left[\left(\mu^{2} - 1\right)\cosh^{2} r sinh^{2} r - \left(\sqrt{2}\mu sinh^{2} r - \nu\right)^{2}\right] \\ p^{2} = \dfrac{1}{a\cosh^{2} r sinh^{2} r}\left[\sqrt{2}\mu sinh^{2} r - \nu\right] \\ p^{3} = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

e, em coordenadas gaussianas as geodésicas são definidas por

$$\widetilde{p}^{\mu} = \delta_{0}^{\mu} \ . \tag{5.10}$$

Vemos então que o ângulo entre a 4-velocidade e o fluxo de matéria dos observadores geodésicos de Gauss-II é idêntico ao encontrado em Gauss-I

$$\widetilde{p}^{\alpha}\widetilde{V}_{\alpha} = \widetilde{l}^{\alpha}\widetilde{V}_{\alpha} = \mu \ . \tag{5.11}$$

Os parâmetros cinemáticos associados, em coordenadas gaussianas são:

Expansão (θ_2):

$$\theta_{2} = \widetilde{p}^{\mu}_{;\mu} = -\frac{2}{a}\sqrt{\mu^{2} + 1}\tan N_{2} \ . \tag{5.12}$$

Como no sistema Gauss-I, temos também duas divergências que são os limites de validade do sistema Gauss-II dados por

$$\tilde{t}_2 - \mu a \tilde{\xi}_2 - \nu a \tilde{\eta}_2 = \pm \frac{\pi a}{4\sqrt{\mu^2+1}} \quad . \tag{5.13}$$

Aceleração (A^{μ}):

$$A^{\mu} = \tilde{p}^{\mu}_{;\nu} \tilde{p}^{\nu} = 0 \tag{5.14}$$

Deformação (shear) ($\sigma_{\mu\nu}$):

As componentes não-nulas são dadas por

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -\dfrac{1}{3}\theta_2 \tilde{g}_{11} \\ \sigma_{12} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{\dfrac{q}{\mu^2+1}}\cos N_2 - \dfrac{1}{3}\theta_2 \tilde{g}_{12} \\ \sigma_{22} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{q}{\mu^2+1}}\left[\dfrac{\left(2\sqrt{2}\mu\nu + \mu^2 - 1\right) - \sqrt{q} sin N_2}{\mu^2+1}\right] - \dfrac{1}{3}\theta_2 \tilde{g}_{22} \\ \sigma_{33} = -\dfrac{1}{3}\theta_2 \tilde{g}_{33} \end{cases} \quad . \tag{5.15}$$

Rotação ($\varpi^{\mu\nu}$):

$$\varpi^{\mu\nu} = h^{\alpha}_{\mu} h^{\beta}_{\nu} \tilde{p}_{[\alpha;\beta]} = 0 \quad . \tag{5.16}$$

Logo, como os observadores fundamentais de Gauss-I, os observadores fundamentais de Gauss-II não possuem rotação.

5.4 Limite de Validade do Sistema Gauss-II

Vimos que esse sistema de coordenadas está limitado a uma região $r_1 \leq r \leq r_2$, onde os valores de r_1 e r_2 podem ser obtidos dos valores onde θ diverge.

Os limites do sistema Gauss-II não dependem apenas de μ, como Gauss-I, mas também do parâmetro ν e podemos escolhê-los de forma que $r_1 \leq r_c$, com uma interseção não-nula entre os sistemas. Isso garante a continuidade da geometria de Gödel de $r = 0$ até $r = r_2$.

Conclusão

Vimos que o modelo cosmológico proposto por Gödel não admite um sistema gaussiano de coordenadas global devido à propriedade de confinamento do campo gravitacional, mas que é possível construir sistemas gaussianos locais.

Encontramos um conjunto de transformações (3.21) de onde é possível passar do sistema de coordenadas cilíndrico para o sistema gaussiano local escolhendo os parâmetros arbitrários λ_i.

Inicialmente escolhemos, dentre as classes de sistemas gaussianos possíveis, o sistema Gauss-I dado por $\lambda_1 = \mu a$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ e vimos que ele está limitado a uma região do espaço-tempo de Gödel, $0 = r = r_c$, onde esse raio crítico é escrito em função do parâmetro μ. De modo a estender esse domínio, criamos outro sistema gaussiano de coordenadas local chamado de Gauss-II escolhendo os valores dos parâmetros λ_i como sendo $\lambda_1 = \mu a$, $\lambda_2 = \nu a$, $\lambda_3 = 0$. Assim, esse novo sistema ficou limitado a região $r_1 = r = r_2$, onde os valores de r_1 e r_2 dependem, além do parâmetro μ, do parâmetro ν e esses parâmetros podem ser escolhidos de forma que $r_1 = r_c$, criando assim uma interseção entre os dois sistemas gaussianos.

Concluímos então que podemos cobrir toda a variedade da solução de Gödel procedendo de forma análoga indefinidamente, criando sistemas gaussianos locais sucessivos, com diferentes valores de λ_i, com interseção entre eles.

Bibliografia

Adler, R., Bazin, M. and Schiffer, M. "Introduction to General Relativity"; 2nd Ed., McGraw-Hill Kogakusha (1975);

Anderson, J.L "Principles of Relativity Physics"; Academic Press, New York, USA (1972);

Calvão, M.O. "Geodésicas em Universos do Tipo de Gödel ; Tese de Mestrado, CBPF, Brasil (1982);

Chandrasekhar, S. and Wright, J.P. "The Geodesics in Gödel Universe"; Proc. Nat. Acad. Sci. (USA); **47**, 341 (1961);

D'Inverno, R. "Introducing Einstein's Relativity"; Claredon Press, Oxford (1992);

Gödel, K. "An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equations of Gravitation"; Rev. Mod. Phys., **21**, 447 (1949);

Goldstein, H. "Classical Mechanics"; 2nd Ed., Addison-Wesley, Reading, USA (1962);

Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. "Table of Integrals, Series and Products"; Academic Press, New York, USA (1965);

Guimarães, M.E.X. "Sistemas Sincrônicos de Coordenadas no Universo de Gödel"; Tese de Mestrado, CBPF, Brasil (1991);

Landau, L. and Lifchitz, E. "Mechanics"; Pergamon Press, Oxford (1960);

Morris, M.S. and Thorne, K.S. "Wormholes in Spacetime and Their Use for Interstellar Travel: a Tool for Teaching General Relativity"; Am. J. Phys., **56**, 395 (1988);

Novello, M.; II Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF, Brasil (1982);

Novello, M., Soares, I.D. and Tiomno, J. "Geodesic Motion and Confinement in Gödel's Universe"; Phys. Rev. D, **27**, 779 (1983);

Novello, M., Svaiter, N.F. and Gimarães, M.E.X. "Backwards Time-Travel Induced by Combined Magnetic and Gravitational Fields"; Mod. Phys. Lett., **7**, 381 (1992);

Novello, M., Svaiter, N.F. and Gimarães, M.E.X. "Synchronized Frames for Gödel's Universe"; Gen. Rel. Grav., **25**, 137 (1993);

Soares, I.D.; Notas de aula do curso "Métodos em Cosmologia Relativista", CBPF (2001) (Não publicado);

Weinberg, S. "Gravitation and Cosmology"; John Wiley & Sons, New York, USA (1972).