

# Análise e Simulação Numérica de um Problema Parabólico com Fronteira Móvel

A. Scardua, M. A. Rincon \*

*Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro*

*Caixa Postal 68530, Rio de Janeiro 21945-970, Brazil*

## Resumo

Neste trabalho, estamos interessados em obter a aproximação da solução numérica para o modelo termodinâmico linear com fronteira móvel. Aplicaremos o método de elementos finitos no espaço associado ao método de diferenças finitas no tempo para obter uma solução numérica aproximada. Alguns experimentos numéricos serão apresentados para mostrar os efeitos da fronteira móvel nos problemas termodinâmicos lineares.

**Palavras chaves:** Método de Elementos Finitos, Método de Neumark, Fronteira Móvel, Problema Termodinâmica.

## 1 Introdução

Problemas de fronteira variável surgem em uma grande variedade de contextos e têm sido estudados por cerca de um século. Muitas aplicações à Mecânica do Contínuo têm sido obtidas desde os trabalhos pioneiros de Helmholtz e Kirchhoff ( $\approx 1860$ ) em jatos fluidos e de Neuman no *Problema de Stefan* que se aplica por exemplo ao problema de fronteira variável para a equação unidimensional do calor. Este último é objeto de nosso estudo e pode ser visto, por exemplo, como um modelo para certos processos envolvendo reações químicas. Os exemplos a seguir são problemas de fronteira móvel.

---

\*E-mails:aline@yahoo.com.br, rincon@dcc.ufrj.br

## 1.1 Problema da Propagação de Chamas

Surge na Teoria da Combustão na propagação de chamas (para chamas curvas consideramos o problema bidimensional). O trabalho de Buckmaster e Ludford desenvolve o estudo e a formulação matemática adequados à análise dentro do ambiente da Teoria das Chamas Equidifusionais Premixadas, analisando os limites de energia de alta ativação.

## 1.2 Problema de Estruturas Metálicas a Nível Atômico

Mudanças no arranjo dos átomos em fases condensadas envolvem a liberação ou absorção de energia termal na interface de fase. Exemplos comuns são a liberação de calor latente de congelamento durante a solidificação de um metal, a transformação do aço em inoxidável durante tratamento por calor e o selamento de rachaduras durante o reparo por soldagem de grandes fendas em aerofólios. A formulação matemática destes problemas requer o estabelecimento das Equações do Calor para as fases envolvidas, especificação de condições iniciais e de fronteira e uma descrição das condições na interface entre as fases. Como a posição na interface não é conhecida a priori e deve ser determinada como parte da solução, o problema é não-linear. Considere o problema de solidificação em uma região semi-infinita  $0 < x < \infty$  inicialmente líquida e à temperatura uniforme  $u(x, 0) = T_1 > T_m$  onde  $T_m$  é a temperatura de congelamento da substância em questão e sujeita a uma temperatura fixa  $u(x, 0) = T_0 < T_m$  no seu fronteira  $x = 0$ . Após um tempo  $t$  uma película sólida é formada e a interface separando as fases sólida e líquida se move ao longo da direção  $x$ -positiva. A formulação do problema requer então encontrarmos funções  $u_s(x, t)$ ,  $u_l(x, t)$  e  $\xi(t)$  tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial u_s}{\partial t}, & 0 < x < \xi(t), \\ \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_l} \frac{\partial u_l}{\partial t}, & \xi(t) < x < \infty, \end{cases}$$

sujeitas a

$$\begin{cases} u_s(0, t) = T_0, & \text{em } x = 0, \\ u_l(x, t) \rightarrow T_1 & \text{quando } x \rightarrow \infty, \\ u_s(\xi, t) = u_l(\xi, t) = T_m & \text{e} \\ k_s \frac{\partial u_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial u_l}{\partial x} = \rho L \frac{d\xi}{dt} = \rho Lv \end{cases}$$

no fronteira da interface  $x = \xi(t)$ . A primeira das últimas condições especificam contato perfeito na interface sólido-líquido enquanto a segunda é uma condição (nesta interface) de equilíbrio da energia

térmica. Aqui  $L$  é o calor latente de congelamento (medido em Joules/Kilograma) e  $v = d\xi/dt$  é a velocidade de avanço da interface sólido-líquido.

## 2 Formulação do Problema

Nosso objetivo é estudar as soluções aproximadas do seguinte sistema termodinâmico

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (x, t) \in Q_t \\ u(\alpha(t), t) = 0, \quad u(\beta(t), t) = 0, & \forall x \in (\alpha(t), \beta(t)) \text{ e } 0 < t < T \\ u(x, 0) = u_0(x), & \alpha(0) < x < \beta(0) \end{cases} \quad (1)$$

onde  $k$  é uma constante positiva.

Consideramos o domínio  $Q_t \subset \mathbb{R}^2$  definido por

$$Q_t = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T); \alpha(t) < x < \beta(t) \right\}$$

Nosso objetivo é estudar a temperatura  $u = u(x, t)$ , satisfazendo o Problema (1).

Neste trabalho, analisaremos a solução aproximada do Problema (1). Mostraremos também a influência da fronteira móvel nos exemplos numéricos. Para isto, consideraremos as seguintes hipóteses:

$$H1: \quad \alpha, \beta \in C^2(0, \infty) \quad \text{em} \quad 0 < \gamma_0 < \gamma(t) < \gamma_1, \quad \forall t \geq 0,$$

$$H2: \quad \alpha', \beta' \in L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty).$$

Consideraremos agora uma mudança de variáveis para transformar o domínio  $Q_t$  em um domínio cilíndrico  $Q$ . Sob o ponto de vista matemático, resolver o Problema (1) no domínio não cilíndrico é complexo. Dessa forma, consideremos uma mudança de variáveis para transformar o problema num problema equivalente, mas com domínio cilíndrico. Para isto definimos  $\gamma(t) := \beta(t) - \alpha(t)$ . Observe que, quando  $(x, t)$  varia em  $Q_t$ , o ponto  $(y, t)$  de  $\mathbb{R}^2$ , com  $y = (x - \alpha(t))/\gamma(t)$  varia no cilindro  $Q = (0, 1) \times (0, T)$ . Assim, temos a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \tau : Q_t &\rightarrow Q = (0, 1) \times ]0, T[ \\ (x, t) &\mapsto (y, t) = \left( \frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}, t \right). \end{aligned}$$

Note que  $\tau \in C^2(Q_t)$ . De fato  $\alpha$  e  $\beta$  são de classe  $C^2$  e  $\gamma > 0$  no domínio em questão. Pelo *Teorema da Função Inversa* [1], a aplicação  $\tau^{-1}$  também é  $C^2(Q)$ .

Fazendo a mudança de variáveis  $v(y, t) = u(\alpha(t) + \gamma(t)y, t)$ , implica em  $u(x, t) = v\left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}, t\right)$ .

Utilizando a mudança de variáveis, obtemos as seguintes identidades

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial v}{\partial y}(y, t), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{(\gamma(t))^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y, t), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-\alpha'(t) - \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \frac{\partial v}{\partial y}(y, t) + \frac{\partial v}{\partial t}(y, t). \end{cases} \quad (2)$$

Assim, usando as identidades, o Problema (1) é transformado no seguinte problema definido no cilindro  $Q = (0, 1) \times (0, T)$ .

**Problema.** Queremos determinar  $v: Q \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{k}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y} = g(y, t), & \text{em } Q \\ v(0, t) = 0, v(1, t) = 0, & t \geq 0 \\ v(y, 0) = v_0(y), & 0 < y < 1. \end{cases} \quad (3)$$

## 3 Método de Elementos Finitos

### 3.1 Formulação Variacional

Seja  $D(\Omega)$  o espaço das funções teste, infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em  $\Omega$  e  $w \in D(\Omega)$ . Multiplicando a primeira equação do Problema (3) por  $w$  e integrando em  $\Omega = (0, 1)$ , obtemos

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} w dy - \int_0^1 a(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} w dy - \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} w dy = \int_0^1 g(y, t) w dy. \quad (4)$$

### 3.2 O Método de Galerkin

O Método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções por um sub-espaço de dimensão finita. Para aproximarmos tal espaço, definimos um subespaço  $V_m$  gerado pelos  $m$  primeiros vetores da base do espaço  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , ou seja,  $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$ , onde  $[\varphi_i]_{i \in \mathbb{N}}$  é uma base de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Agora, buscamos uma solução aproximada  $v^h(y, t) = v_m(y, t) \in V_m$  do Problema (3) no subespaço  $V_m$ .

### 3.3 Problema Aproximado

Aproximamos o Problema (3) pelo problema de determinar, no espaço das soluções  $V_m$ , uma função  $v^h = v^h(y, t)$ , tal que

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{\partial v^h}{\partial t} w - a(t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial y^2} w - b(y, t) \frac{\partial v^h}{\partial y} w = (g(y, t)w), & \text{em } Q \\ v^h(0, t) = 0, v^h(1, t) = 0 \\ v^h(y, 0) = v_0^h(y), \quad 0 < y < 1 \end{cases} \quad (5)$$

para todo  $w \in V_m$ . Substituindo  $v^h = v^h(y, t)$  em (4) e integrando de 0 a 1, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial v^h}{\partial t} w dy - \int_0^1 a(t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial y^2} w dy - \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial v^h}{\partial y} w dy \\ = \int_0^1 g(y, t) w dy, \quad \forall w \in V_m. \end{aligned} \quad (6)$$

Integrando por partes a segunda integral, obtém-se

$$\int_0^1 a(t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial y^2} w dy = a(t) w \frac{\partial v^h}{\partial y} \Big|_0^1 - a(t) \int_0^1 \frac{\partial v^h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy = -a(t) \int_0^1 \frac{\partial v^h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy,$$

pois  $w(0) = w(1) = 0$ . Substituindo em (6), temos

$$\int_0^1 \frac{\partial v^h}{\partial y} w dy + a(t) \int_0^1 \frac{\partial v^h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy - \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial v^h}{\partial y} w dy = \int_0^1 g(y, t) w dy. \quad (7)$$

Como,

$$v^h(y, t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) \varphi_i(y), \quad \varphi_i(y) \in V_m, \quad (8)$$

para obtermos a solução aproximada  $v^h(y, t) \in V_m$  é necessário determinar os coeficientes  $c_i(t)$ .

Substituindo (8) em (7), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{i=1}^m (c_i'(t) \varphi_i(y) w) dy + a(t) \int_0^1 \sum_{i=1}^m \left( c_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \\ - \int_0^1 b(y, t) \left( \sum_{i=1}^m \left( c_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \right) w \right) dy = \int_0^1 (g(y, t) w) dy. \end{aligned}$$

Em particular, tomando  $w = \varphi_j(y) \in V_m$  na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left[ c_i'(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy + c_i(t) a(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy \right. \\ \left. - c_i(t) \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy \right] = \int_0^1 (g(y, t) \varphi_j(y)) dy, \end{aligned} \quad (9)$$

para  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Sendo assim, obtém-se um sistema de  $m$  equações diferenciais ordinárias dado por

$$Dc'(t) + (a(t)A - B)c(t) = G \quad \text{e} \quad c(0) = (c_1(0), c_2(0), \dots, c_m(0))^t = c_0, \quad (10)$$

onde

$$A = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy, \quad B = \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy$$

$$\text{e} \quad D = \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy.$$

As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $D$  são quadradas de ordem  $(m+1)$  e  $c = [c_1, c_2, \dots, c_{m+1}]^t$  é o vetor incógnita.

### 3.4 Função de Interpolação

As funções bases  $\varphi_i(y)$  do subespaço  $V_m$ , em geral, são polinômios por partes de grau  $k$  (para  $k = 1, 2, 3$  temos as funções bases lineares, quadráticas e spline cúbicas), definidas em cada elemento finito  $\Omega_e$ , isto é,  $V_m = V_m^k(\Omega) = \{v_n \in V; v_n^e \in P_k(\Omega_e)\}$  onde  $v_n^e$  denota a restrição de  $v_n|_{\Omega_e}$  e  $P_k$  conjunto dos polinômios. Nesse trabalho, consideramos os polinômios lineares por partes definidos por

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} \frac{y - y_{i-1}}{h}, & \forall y \in [y_{i-1}, y_i] \\ \frac{y_{i+1} - y}{h}, & \forall y \in [y_i, y_{i+1}] \\ 0, & \forall y \notin [y_{i-1}, y_{i+1}] \end{cases} \quad (11)$$

e

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \forall y \in [y_{i-1}, y_i] \\ -\frac{1}{h}, & \forall y \in [y_i, y_{i+1}] \\ 0, & \forall y \notin [y_{i-1}, y_{i+1}] \end{cases} \quad (12)$$

onde estamos considerando a malha uniforme  $h = h_i = y_{i+1} - y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  na discretização em  $m$ -partes,  $0 = y_1 < y_2 < \dots < y_{m+1} = 1$ . Podemos verificar que a função assim definida é uma base de  $V_m \subset H_0^1(\Omega)$  e satisfaz a propriedade de interpolação

$$\varphi_i(y_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Assim, observamos que  $\varphi_i \varphi_j = 0$  e  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = 0$  se  $|i - j| > 2$ .

A função  $g(y, t)$  pode ser interpolada pela função  $\varphi_i(y)$ , obtendo-se

$$g(y, t) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(y)g_i(t), \quad (13)$$

onde  $g_i(t) = g(y_i, t)$ . Assim, substituindo (13) em (9), tem-se

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left[ c'_i(t) \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dy + c_i(t)a(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} dy - c_i(t) \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \varphi_j dy \right] \\ &= \int_0^1 g(y, t) \varphi_j dy = \int_0^1 \sum_{i=1}^m g_i(t) \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy = \sum_{i=1}^m g_i(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo em (10), temos

$$\begin{cases} Dc'(t) + (a(t)A - B)c(t) = Dg(t) \\ c(0) = c_0 \end{cases} \quad (15)$$

### 3.5 Método de Diferenças Finitas

A equação (15) representa um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem na variável  $t$ . Seja  $c(t)$  uma função  $\mathcal{C}^{n+1}(0, T)$ . Então, do Teorema de Taylor temos

$$c(t + \Delta t) = c(t) + \Delta t c'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} c''(t) + \dots + \frac{\Delta t^n}{n} c^{(n)}(t) + E_{n+1}(t)$$

onde

$$E_{n+1} = \frac{c^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\Delta t)^{n+1}$$

Fazendo  $n = 1$ , podemos obter a seguinte aproximação para  $c'(t)$

$$c'(t) = \frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} \quad (16)$$

cujo erro de truncamento é de ordem  $\mathcal{O}(\Delta t)$ . A aproximação (16) é conhecida como diferença progressiva.

Denotando os tempos  $t_n = n\Delta t$  e  $c(t_n) = c^n$ , então, de (16) temos

$$c'(t_n) = \frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Por razões de estabilidade numérica, considere a seguinte família de aproximações, conhecida como método generalizado trapezoidal, ver [6],

$$c(t_n) = c^n = \theta c^n + (1 - \theta) c^{n+1}, \quad 0 < \theta \leq 1. \quad (18)$$

De (15) e (17), temos

$$D\left(\frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t}\right) + (a^n A - b^n(y)B)c^n = Dg^n$$

Usando a família de aproximações em  $c^n$  temos

$$D\left(\frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t}\right) + (a^n A - b^n(y)B)(\theta c^n + (1 - \theta)c^{n+1}) = Dg^n$$

Multiplicando por  $\Delta t$  e fatorando os termos comuns

$$[D + (a^n A - b^n(y)B)\Delta t(1 - \theta)]c^{n+1} = (D - (a^n A - b^n(y)B)\Delta t\theta)c^n + \Delta t Dg^n$$

Na próxima seção, vamos determinar explicitamente as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $D$  para então determinar a solução  $c^n$  para  $n = 0, 1, \dots$

### 3.6 Cálculo das Matrizes

Vamos agora calcular as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $D$  usando as funções base definidas em (11) e (12).

Desde que  $\varphi_i \varphi_j = 0$  para  $|i - j| \geq 2$ , cada matriz do sistema é uma matriz tridiagonal e portanto é suficiente calcular somente os elementos  $(i, i)$ ,  $(i, i + 1)$  e  $(i + 1, i)$

#### 3.6.1 Matriz A

$$A = a_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy.$$

Os elementos da matriz  $A$  são

$$a_{ii} = \frac{2}{h}, \text{ para } i = 2, 3, \dots, m ;$$

$$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = \left(-\frac{1}{h}\right), \text{ para } i = 2, 3, \dots, m - 1.$$

#### 3.6.2 Matriz B

$$B(t) = b_{ij} = \int_0^1 b^n(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \varphi_j dy,$$



Os elementos da matriz  $B$  são

$$\begin{aligned} b_{ii} &= -\frac{h\gamma'(t)}{3\gamma(t)}, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, m ; \\ b_{i,i+1} &= -\frac{1}{6\gamma(t)}(3\alpha'(t) + 3\gamma'(t)y_i + 2\gamma'(t)h), \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, m - 1 ; \\ b_{i+1,i} &= \frac{1}{6\gamma(t)}(3\alpha'(t) + 3\gamma'(t)y_{i+1} - 2\gamma'(t)h), \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, m - 1. \end{aligned}$$

### 3.6.3 Matriz $D$

$$D = d_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_j(y)dy.$$

Os elementos da matriz  $D$  são

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \frac{2h}{3}, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, m ; \\ d_{i,i+1} &= d_{i,i-1} = \frac{h}{6}, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, m - 1. \end{aligned}$$

## 4 Simulação Numérica

Vimos que resolver o Problema (5), ou seja, encontrar  $v^h(y, t)$  implica em encontrar uma solução aproximada do Problema (3), e assim resolver o Problema (1), ou seja, encontrar  $u(x, t)$  já que o Problema (1) é equivalente ao Problema (3).

Consideraremos a barra de comprimento  $[0, 1]$  subdividida em 21 nós ou 20 elementos finitos, isto é,  $h = \frac{1}{20} = 0.05$  e o passo de tempo  $\Delta t = 0.05$ . Consideraremos em particular o peso  $\theta = 0.5$ , definido em (18).

Assumiremos a existência de uma força externa no Problema original (5) para verificar a qualidade do algoritmo utilizado para resolvê-lo, pois, nesse caso a solução exata do Problema (3) é conhecida e dessa forma podemos comparar com a solução aproximada obtida através do método numérico empregado.

### 4.1 Exemplo 1

Seja  $g(y, t)$  força externa dada por

$$\begin{aligned} g(y, t) &= \frac{-\text{sen}(\pi y)\text{sen}(\pi t)}{\pi} + \frac{k}{\gamma(t)^2}(\text{sen}(\pi y)\cos(\pi t)) \\ &\quad - \left( \frac{(\alpha'(t) + \gamma(t)y)}{\gamma(t)} \right) \left( \frac{\cos(\pi y)\cos(\pi t)}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Nesse caso a solução exata é dada por

$$v(y, t) = \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi y) \cos(\pi t). \quad (19)$$

com temperatura inicial dada por  $v(y, 0) = \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi y)$  e os valores de fronteira

$v(0, t) = v(1, t) = 0$ . Podemos, então obter uma solução numérica aproximada. Temos também que definir as funções  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  para obtermos os coeficientes  $a(t)$  e  $b(y, t)$  da equação diferencial. Seja em particular

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1} \text{ e } \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1}.$$

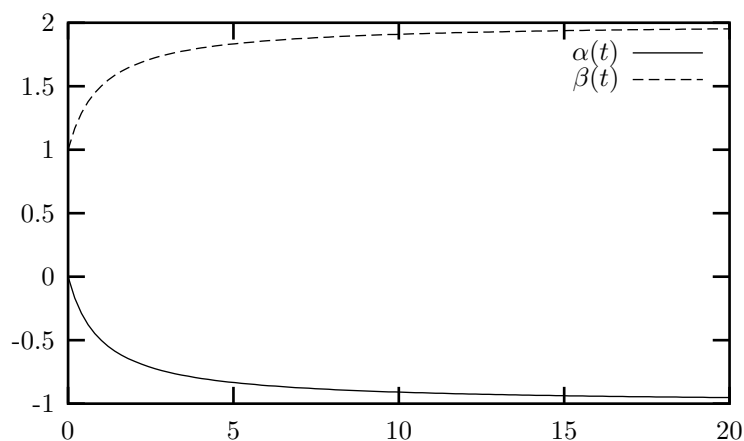


Figura 1: Movimento dos extremos.

A Figura 1 representa o movimento dos extremos  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ .

O erro encontrado para esta solução é

$$\|e\| = \max_{t \in [0,1]} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0,0396\%.$$

Esse resultado comprova a eficácia do método numérico empregado para obtenção da solução aproximada do Problema (5).

## 4.2 Convergência Numérica

Analisaremos agora o comportamento do erro da solução aproximada. A tabela a seguir mostra o comportamento do erro para  $\theta = 0.25, 0.5$  e  $0.75$ , fixando o passo de tempo  $\Delta t = 0.01$  e variando

o número de elementos finitos  $N = 10, 20, 50, 100$  e  $1000$ , onde o erro é definido por

$$\|E\| = \max_{t \in [0,1]} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

e será denotado por  $E_{0.25}, E_{0.5}$  e  $E_{0.75}$  para os diferentes valores de  $\theta$ .

$\Delta T$	$N$	$E_{0.25}(x, t)$	$E_{0.5}(x, t)$	$E_{0.75}(x, t)$
0.01	10	0.005833	0.005747	diverge
0.01	20	0.005814	0.005723	diverge
0.01	50	0.005805	0.005717	diverge
0.01	100	0.005775	0.005688	diverge
0.01	1000	0.005760	0.005652	diverge

Podemos observar que o erro é inversamente proporcional ao tamanho da malha. Ou seja, quanto maior a malha, menor o erro. Podemos notar também que para valores de  $\theta \geq 0.75$  a solução diverge.

Passaremos agora a estudar a temperatura da barra quando a força externa é nula.

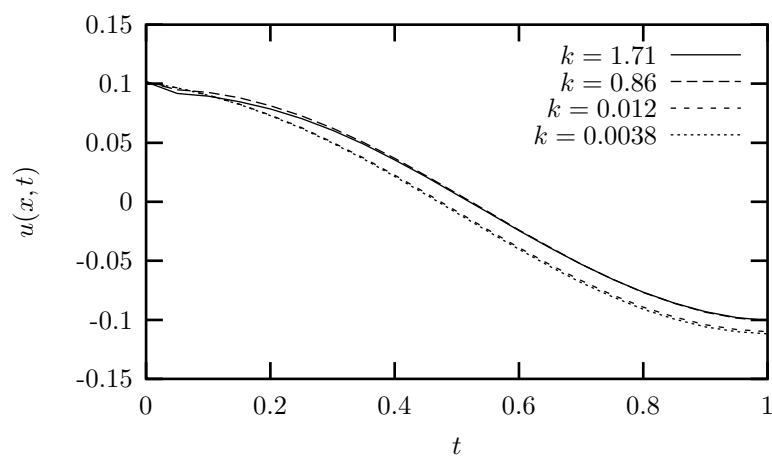


Figura 2: Decaimento exponencial.

A figura 2 representa a mesma solução para diferentes valores de  $k$ , onde  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica do material da barra. Podemos observar que o valor de  $k$  está diretamente relacionado com o seu decaimento assintótico, mostrando que a prata ( $k = 1.71$ ) tem uma maior

condutividade térmica que a argila ( $k = 0.0038$ ). Isso significa que a transferência de calor é mais rápida quanto maior o  $k$ .

A tabela a seguir mostra valores do coeficiente térmico  $k$  para alguns tipos de materiais.

Material	$k(cm^2/s)$
Prata	1.71
Alumínio	0.86
Ferro fundido	0.12
Argila	0.0038

A Figura 3 mostra a evolução da fronteira para os tempos  $t = 0.0; 0.25; 0.5; 0.75; 1.0$ ; onde o comprimento da barra varia de  $\gamma(0) = 1$  a  $\gamma(1) = 2$ . A Figura 4 representa a temperatura da

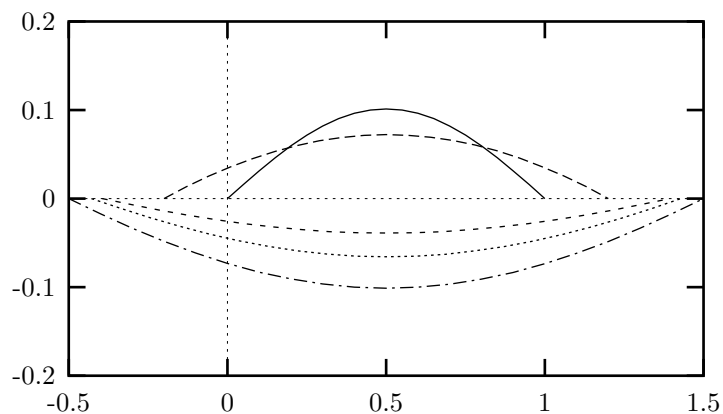


Figura 3: Movimento da fronteira.

barra para  $k = 1.71$ , ou seja, para a prata. Podemos notar que a temperatura varia rapidamente, devido ao crescimento da fronteira.

## 5 Equação do calor com fronteira não-homogênea

Nessa seção estudaremos as soluções aproximadas do seguinte sistema termodinâmico com condição de fronteira não-homogênea

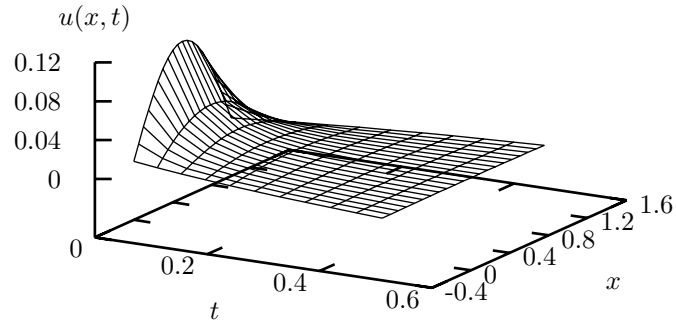


Figura 4: Temperatura da barra variando com o tempo.

$$(IV) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & \text{em } Q_t \\ u(\alpha(t), t) = h(t), \quad u(\beta(t), t) = g(t), & 0 < t < T \\ u(x, 0) = u_0(x), & \alpha(0) < x < \beta(0) \end{cases} \quad (20)$$

Consideramos o domínio  $Q_t \subset \mathbb{R}^2$  definido por

$$Q_t = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) / \alpha(t) < x < \beta(t)\},$$

onde  $k$  é a constante de condutividade térmica do material,  $h(t)$  e  $g(t)$  são funções dadas.

Nosso objetivo é estudar a solução  $u = u(x, t)$ , satisfazendo o Problema (20).

A idéia da resolução desse problema é procurar reduzi-lo a um outro com condições de fronteira homogêneas, do tipo já estudado, através de uma mudança de variáveis dependente de  $u(x, t)$ .

Dessa forma, considere os pares  $\{\alpha(t), h(t)\} \wedge \{\beta(t), g(t)\}$  e a reta definida por:

$$y - h(t) = \frac{g(t) - h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}(x - \alpha(t)).$$

Definimos uma função  $G(x, t)$  de classe  $C^2$  da forma

$$G(x, t) = h(t) + \frac{g(t) - h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}(x - \alpha(t)).$$

Note que  $G(\alpha(t), t) = h(t)$  e  $G(\beta(t), t) = g(t)$ .

Suponha que a solução  $u(x, t)$  possa ser escrita na forma

$$u(x, t) = w(x, t) + G(x, t). \quad (21)$$

Então,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.$$

Substituindo em (20), temos

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = f(x, t).$$

Assim,

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x, t) - \frac{\partial G}{\partial t} + k \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = F(x, t).$$

De (21), temos  $w(x, t) = u(x, t) - G(x, t)$ .

Então,

$$\begin{aligned} w(\alpha(t), t) &= u(\alpha(t), t) - G(\alpha(t), t) = h(t) - h(t) = 0 \\ w(\beta(t), t) &= u(\beta(t), t) - G(\beta(t), t) = g(t) - g(t) = 0 \\ w(x, 0) &= u(x, 0) - G(x, 0) = u_0(x) - G_0(x) \end{aligned}$$

Dessa forma, com as transformações anteriores obtemos um problema com condição de fronteira homogênea dado por

$$(V) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F(x, t), & \text{em } Q_t \\ w(\alpha(t), t) = 0, \quad w(\beta(t), t) = 0, & 0 < t < T \\ w(x, 0) = u_0(x) + G_0(x) \end{cases} \quad (22)$$

e são válidos os Teoremas 2.1 e 2.2 para o Problema (22), sob as hipóteses (H1) e (H2).

Consideraremos a mesma mudança de variáveis do caso anterior. Assim, obtemos as seguintes identidades

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) = -\frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}(y, t), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{(\gamma(t))^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}(y, t), \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \frac{-\alpha'(t) - \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}(y, t) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}(y, t). \end{cases}$$

Dessa forma, o Problema (22) definido num domínio não cilíndrico, é transformado no seguinte problema definido no cilindro  $Q = (0, 1) \times (0, T)$ .

**Problema:** Queremos determinar  $\bar{w}: Q \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$(VI) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{k}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - \frac{(\alpha' + \gamma' y)}{\gamma} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = H(y, t), & \text{em } Q \\ \bar{w}(0, t) = 0, \bar{w}(1, t) = 0, & t \in [0, 1] \\ \bar{w}(y, 0) = \bar{w}_0(y), & 0 < y < 1. \end{cases} \quad (23)$$

onde  $Q = (0, 1) \times (0, T)$ .

Fazendo o mesmo procedimento do Teorema 2.2, obtemos o seguinte problema aproximado

## 6 Problema Aproximado

Aproximamos o Problema (23) pelo problema de determinar, no espaço das soluções  $V_m$ , uma função  $\bar{w}^h = \bar{w}^h(y, t)$ , tal que

$$(VII) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial \bar{w}^h}{\partial t}, \theta \right) - a(t) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}^h}{\partial y^2}, \theta \right) - \left( b(y, t) \frac{\partial \bar{w}^h}{\partial y}, \theta \right) = (H(y, t), \theta), & \text{em } Q \\ \bar{w}^h(0, t) = 0, \bar{w}^h(1, t) = 0, & t \in [0, 1] \\ \bar{w}^h(y, 0) = \bar{w}_0^h(y), & 0 < y < 1, \end{cases} \quad (24)$$

onde  $\theta \in V_m$ .

Dessa forma, podemos aplicar o método de elementos finitos com o método de diferenças finitas para resolver esse problema.

### 6.1 Simulação Numérica com fronteira não-homogênea

Assim como no caso homogêneo, ilustraremos o problema do calor com fronteira não-homogênea. Utilizaremos os mesmos dados do problema do calor com fronteira homogênea, ou seja, uma malha dividida em 20 elementos finitos,  $\Delta t = 0.05$  e um peso  $\theta = 0.5$  e assumiremos que  $h(t) = -t$  e  $g(t) = t$ , ou seja, de um lado a barra está perdendo calor e do outro está recebendo.

### 6.2 Exemplo 1

Inicialmente vamos construir uma solução exata para comparar com a solução aproximada obtida do método numérico. Consideraremos a solução aproximada do problema transformado como

$$\bar{w}(y, t) = \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi y) \cos(\pi t),$$

a temperatura inicial dada por  $\bar{w}(y, 0) = \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi y)$  e os valores de fronteira  $\bar{w}(0, t) = \bar{w}(1, t) = 0$ .

Seja em particular

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1} \text{ e } \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1}$$

como no exemplo 1 com fronteira homogênea.

Nessas condições, a força externa ou fonte de calor  $H(y, t) = g(y, t)$  é dada por

$$H(y, t) = \frac{-\text{sen}(\pi y)\text{sen}(\pi t)}{\pi} + \frac{k}{\gamma(t)^2}(\text{sen}(\pi y)\cos(\pi t)) \left( -\frac{(\alpha'(t) + \gamma(t)y)}{\gamma(t)} \right) \left( \frac{\cos(\pi y)\cos(\pi t)}{\pi} \right).$$

A figura (5) representa a solução  $\bar{w}(y, t)$  do Problema (23).

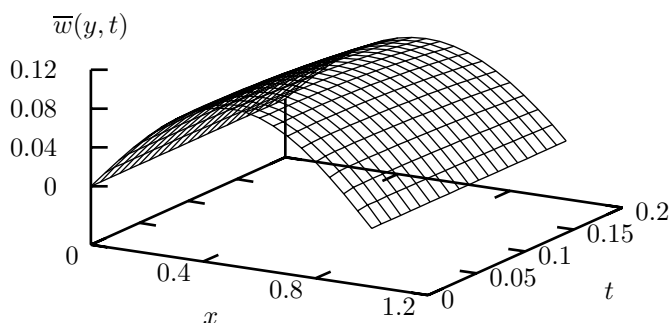


Figura 5: Solução  $\bar{w}(y, t)$ .

Aplicando a transformação inversa  $\tau^{-1}$ , obtemos a solução aproximada  $w(x, t)$  do Problema(22), representada na figura 6.

A figura 7 representa a função

$$G(x, t) = h(t) + \frac{g(t) - h(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}(x - \alpha(t)) = -t + \frac{2t(t+1)}{3t+1} \left( x + \frac{t}{t+1} \right).$$

A figura 8 mostra a solução  $u(x, t) = w(x, t) + G(x, t)$  do Problema (20) para a prata ( $k = 1.71$ ).

## Referências

- [1] E.L.Lima: *Curso de análise vol. 2*; Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1981).



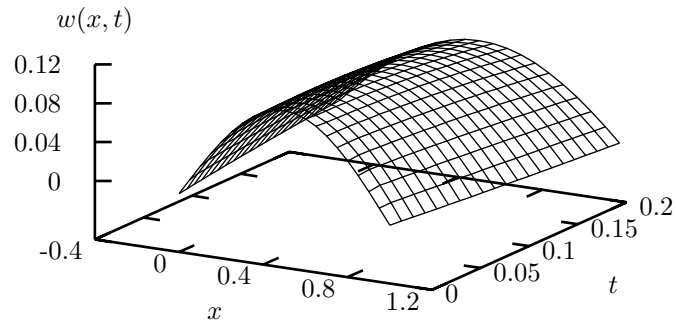


Figura 6: Solução  $w(x, t)$ .

- [2] D.G.Zill, M.R.Cullen: *Equações Diferenciais vol. 2*; Makron Books (2001).
- [3] D.G.Figueiredo: *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais* ; Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1977).
- [4] I-Shih Liu, M.A.Rincon: *Introdução ao Método dos Elementos Finitos- Análise e Aplicações*; Editora IM/UFRJ (2001).
- [5] B.S.Santos: *Análise Numérica do Sistema Termoelástico Linear em Domínios com Fronteira Móvel* ; UFRJ/IM-NCE , Rio de Janeiro (2002).
- [6] T.J.R.Hughes: *The Finite Element Method- Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*; Dover Publications (2000).
- [7] R.L.Burden, J.D.Faires: *Análise Numérica*; Editora Thompson.
- [8] R.D.Rodrigues, M.A.Rincon: *Numerical Solution for the Model of Vibrating Elastic Membrane with Moving Boundary*; Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation [ISSN 1007-5704] (2005).

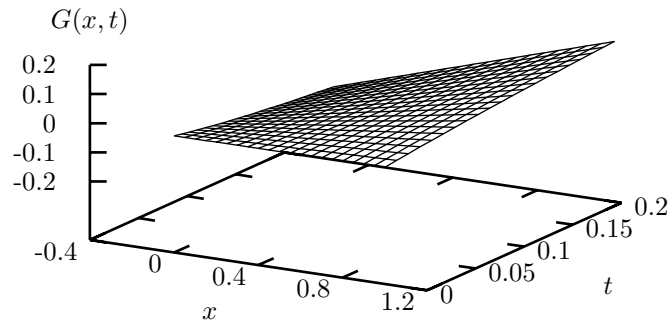


Figura 7: Função  $G(x, t)$

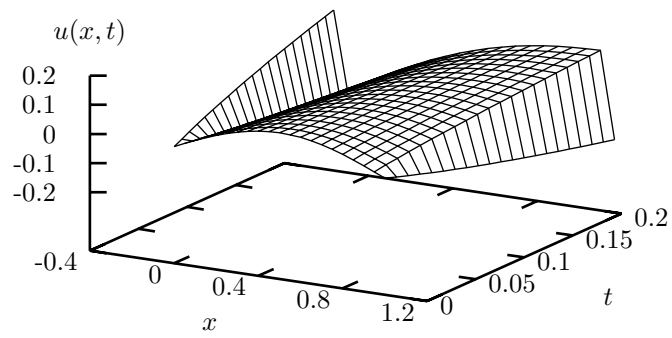


Figura 8: Solução  $u(x, t) = w(x, t) + G(x, t)$ .