

# Inequações Variacionais Aplicadas ao Problema do Mercado de Opções

V. P. ISRAEL, M. A. RINCON \*

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Caixa Postal 68530, Rio de Janeiro, CEP 21944, Brasil

## Resumo

Desde o trabalho clássico de Black e Scholes [2] diversas técnicas para calcular o valor de opções européias tem sido desenvolvidas. Quando se trata de encontrar o valor de opções americanas as técnicas utilizadas precisam mudar de estratégia e se adaptar à possibilidade de exercício antecipado característico deste tipo derivativo. Com o intuito de resolver o problema do mercado de opções americanas um sistema de inequações variacionais é obtido e métodos numéricos sobre este sistema são utilizados. O objetivo deste trabalho é obter o preço da opção americana de venda utilizando o método de elementos finitos e o método de diferenças finitas. Resultados computacionais são apresentados.

*Palavras chaves:* Método de elementos finitos, mercado de opções, inequações variacionais

## 1 Introdução

O problema de encontrar o valor de uma opção americana de venda é equivalente a obter a solução de um sistema de inequações variacionais desde que sua formulação respeite um conjunto determinado de hipóteses.

Devido as características da solução do problema estaremos trabalhando em um espaço de Sobolev com peso. Isto apresenta uma série de dificuldades matemáticas para obtenção desta solução.

Objetivando reduzir as barreiras que o espaço de Sobolev trás será realizado um processo de regularização permitindo encontrar a solução desejada num espaço mais simples e por conseguinte possibilitando a elaboração computacional do problema.

Mostra-se que o problema computacional se aproxima do problema exato para boas escolhas da malha e para discretizações adequadas. Algumas mudanças de variáveis serão feitas para obter um sistema mais simples e facilitar a implementação computacional. A partir da transformação do problema original em um problema computacional mais viável é utilizado os métodos de elementos

---

\*E-mails: [viniciuspi@posgrad.nce.ufrj.br](mailto:viniciuspi@posgrad.nce.ufrj.br), [rincon@dcc.ufrj.br](mailto:rincon@dcc.ufrj.br)

finitos e diferenças finitas e assim é obtida a solução aproximada. Na última seção deste artigo são apresentados os resultados numéricos para valores reais do mercado e é realizada uma simulação que mostre a convergência da solução como resultado de escolhas cada vez melhores do domínio computacional.

## 2 Formulação do Problema

Deseja-se determinar uma função  $U(X, t)$  que forneça o valor da opção americana de venda, onde  $X$  é o preço do ativo-objeto no tempo  $t$ .

A função  $U$  é dada por

$$U(X, t) = \sup_{\theta \in \mathcal{T}_{[t, T]}} E_p \left( e^{-\int_t^\theta r(s) ds} \psi(X_\theta, t) \right) \quad (1)$$

onde  $\theta$  é o tempo de parada que pertence ao conjunto de tempos de parada  $\mathcal{T}_{[t, T]}$ ,  $r$  é o fator da taxa de retorno,  $\psi$  é o obstáculo e  $X_\theta$  é uma estimativa do valor do ativo-objeto no tempo  $\theta$ .

Desta forma seja o problema variacional derivado da fórmula de Black e Scholes [2] para  $m$  independentes fontes de incerteza. O modelo é representado pelo movimento Browniano  $m$ -dimensional  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Onde  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  denota o filtro natural associado com  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  e supõe-se que  $X_t \in \mathbb{R}^n$  envolve o processo de Itô de modo que:

$$\begin{aligned} dX_s &= b(X_s, s) ds + \sigma(X_s, s) dB_s, & s > t \\ X_t &= X \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $X$  é determinístico. Considere as seguintes hipóteses

- (H1) O vetor direção  $b : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^{1,0}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  e possui derivada  $b_X$  limitada.
- (H2) A matriz dispersão  $\sigma : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  é  $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , limitada e com derivadas  $\sigma_X$ ,  $\sigma_{XX}$  e  $\sigma_t$  limitadas.
- (H3) A matriz  $a$  é coerciva, isto é,

$$\exists \eta > 0 \quad \text{tal que} \quad \epsilon^T a \epsilon \geq \eta \|\epsilon\|, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad (X, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$

onde  $a$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $a := \sigma(X, t)^T \cdot \sigma(X, t)$ . A matriz  $a$  é conhecida como matriz difusão e  $\sigma^T$  representa a transposta de  $\sigma$ .

**Observação:** Em particular nota-se que  $b$  e  $\sigma$  satisfazem a condição global de Lipschitz  $\|b(x, t) - b(y, t)\| + \|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)\| \leq c \|x - y\|$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $c > 0$ .

Sob as hipóteses (H1) - (H3) (ver [5]) existe uma única solução forte contínua em  $t$  de (2).

- (H4) A taxa  $r : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$  é  $C^1(0, T)$ .

Associado ao processo (2), à variável de decisão  $\theta$  e ao obstáculo  $\psi$ , o valor esperado para a função prêmio é definido por

$$J_t^X(\theta) = E_p \left[ e^{-\int_t^\theta r(s) ds} \psi(X_\theta, \theta) \right], \quad (3)$$

e o problema de parada é definido por

$$U(X, t) = \sup_{\theta \in \mathcal{T}_{[t, T]}} J_t^X(\theta), \quad (4)$$

onde  $T < \infty$  representa o tempo final,  $\mathcal{T}_{[t, T]}$  é o conjunto dos tempos de parada em  $[t, T]$ .

A função  $e^{-\int_t^\theta r(s) ds} \psi(X_\theta, \theta)$  é denominada função prêmio sendo que o termo exponencial representa a atualização no tempo referente a taxa de juros livre de risco.

Pela definição de  $U$  em (4) tem-se

$$U(X, t) = \sup_{\theta \in \mathcal{T}_{[t, T]}} E_p \left[ e^{-\int_t^\theta r(s) ds} \psi(X_\theta, \theta) \right] \geq E_p \left[ e^{-\int_t^{\bar{\theta}} r(s) ds} \psi(X_{\bar{\theta}}, \bar{\theta}) \right], \quad \forall \bar{\theta} \in [0, T].$$

Tomando  $\bar{\theta} = t$  tem-se

$$U(X, t) \geq E_p [\psi(X, t)] = \psi(X, t),$$

pois  $\psi(X, t)$  é um martingal. Logo a função

$$U(X, t) \geq \psi(X, t), \quad \forall (X, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$$

e para  $t = T$  tem-se  $U(X, T) = \psi(X, T), \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$ .

Note que a caracterização do valor da opção americana por (4) possibilita o exercício antecipado. Isto é, pode-se escolher um tempo de exercício  $\theta \in \mathcal{T}_{[t, T]}$  que forneça o maior prêmio. Contudo, ao contrário da opção européia, não é possível encontrar a solução analítica de (4) pela solução de uma equação diferencial parcial, deste modo, faz-se necessário desenvolver o problema de inequação variacional como é feito a seguir.

## 2.1 Inequação Variacional

Considere o operador:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial X_i} \left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) - \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial X_j}, \quad (5)$$

$$\text{onde} \quad a_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial X_j} - b_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, n,$$

onde  $a$  e  $b$  são definidos nas hipóteses **(H1)** - **(H3)**.

Define-se o espaço  $W^{m,p,\mu}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p,\mu}$ , denominado espaço de Sobolev com peso, com a norma

$$\|U\|_{m,p,\mu} = \left\{ \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}^n} |D^k U(x)|^p e^{-\mu|x|} dx \right\}^{1/p},$$

onde  $m$  é um inteiro não negativo,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $0 < \mu < \infty$ .

Considerando  $\mathcal{X}$  equipado com a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ , o espaço  $L^p([0, T]; \mathcal{X})$  consiste no conjunto das funções enumeráveis  $v : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$  tal que

$$\int_0^T \|v\|_{\mathcal{X}}^p dt \leq \infty.$$

Note que as componentes  $S_i$  do preço do ativo-objeto  $X = (S_1, S_2, \dots, S_n)$  pertencem ao intervalo ilimitado  $S_i \in [0, \infty)$ . Pela definição do operador  $\mathcal{A}$ , e do fato que as componentes  $S_i \in [0, \infty)$  então o espaço  $W^{2,p,\mu}$  é o espaço das soluções admissíveis  $U(\cdot, t)$ . Desta forma é natural que o obstáculo  $\psi(\cdot, t)$  satisfaça a seguinte condição.

**(H5)** O obstáculo  $\psi \in L^p([0, T]; W^{2,p,\mu})$ , onde  $p > (n/2) + 1$  e  $\psi$  é limitada e não negativa.

Sob as hipóteses **(H1)** - **(H5)** tem-se o seguinte resultado que pode ser obtido em [1].

**Lema 1** *Considere o seguinte sistema de inequações variacionais*

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U - rU \leq 0 \text{ e } U \geq \psi, & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U - rU \right) (\psi - U) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ U(X, T) = \psi(X, T), & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (6)$$

Então existe uma única solução  $U$  de (6) satisfazendo as seguintes condições.

- 1)  $U \in L^2([0, T]; H_{loc}^1) \cap L^p([0, T]; W^{2,p,\mu})$ .
- 2)  $\frac{\partial U}{\partial t} \in L^2([0, T]; L_{loc}^2) \cap L^p([0, T]; W^{0,p,\mu})$ .

O Teorema a seguir estabelece uma relação entre o problema (1) e o problema (6).

**Teorema 1** *Seja  $U$  solução de (6) então*

$$U(X, t) = \sup_{\theta \in \mathcal{T}_{[t, T]}} E_p \left[ e^{-\int_t^\theta r(s) ds} \psi(X_\theta, \theta) \right].$$

**Demonstração:** Seja o processo estocástico

$$\mathcal{M}_t = e^{-\int_0^t r(s) ds} U(X_t, t) - \int_0^t e^{-\int_0^s r(v) dv} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U - rU \right) (X_s, s) ds.$$

É conhecido que o processo  $\mathcal{M}_t$  é um martingal e  $(E_p(\mathcal{M}_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = \mathcal{M}_{\tau_1})$ , para um martingal entre 0 e  $\theta$  tem-se

$$E_p(\mathcal{M}_\theta) = E_p(\mathcal{M}_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_p(\mathcal{M}_\theta) &= E_p \left( e^{-\int_0^\theta r(s) ds} U(X_\theta, \theta) - \int_0^\theta e^{-\int_0^s r(v) dv} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U - rU \right) (X_s, s) ds \right) \\ &= E_p(\mathcal{M}_0) = E_p(U(X_0, 0)) = U(X_0, 0). \end{aligned}$$

Pela condição (6)<sub>1</sub> tem-se  $(\partial U / \partial t + \mathcal{A}U - rU \leq 0)$  então

$$U(X_0, 0) \geq E_p \left( e^{-\int_0^\theta r(s) ds} U(X_\theta, \theta) \right) \geq E_p \left( e^{-\int_0^\theta r(s) ds} \psi(X_\theta, \theta) \right),$$

pois  $U(X_t, t) \geq \psi(X_t, t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . Assim, tem-se que

$$U(X_0, 0) \geq \sup_{\theta \in \mathcal{T}_{[0, T]}} E_p \left( e^{-\int_0^\theta r(s) ds} \psi(X_\theta, \theta) \right).$$

Seja  $\theta_{ot} = \inf\{0 \leq s \leq T, U(X_s, s) = \psi(X_s, s)\}$  um tempo de parada. Note que para  $0 \leq s < \theta_{ot}$  tem-se por (6)<sub>2</sub> que  $(\partial U / \partial t + \mathcal{A}U - rU = 0)$ , pois  $U(X_s, s) > \psi(X_s, s)$ ,  $\forall 0 \leq s < \theta_{ot}$ .

Utilizando a igualdade  $E_p(\mathcal{M}_0) = E_p(\mathcal{M}_{\theta_{ot}})$ , tem-se

$$E_p(\mathcal{M}_0) = E_p(\mathcal{M}_{\theta_{ot}}) = E_p \left( e^{-\int_0^{\theta_{ot}} r(s) ds} U(X_{\theta_{ot}}, \theta_{ot}) \right).$$

Mas, no instante  $\theta_{ot}$  tem-se  $U(X_{\theta_{ot}}, \theta_{ot}) = \psi(X_{\theta_{ot}}, \theta_{ot})$  resultando em

$$U(X_0, 0) = E_p \left( e^{-\int_0^{\theta_{ot}} r(s) ds} \psi(X_{\theta_{ot}}, \theta_{ot}) \right).$$

Isto significa que  $\theta_{ot}$  é um tempo de parada ótimo, pois

$$U(X_0, 0) = E_p \left( e^{-\int_0^{\theta_{ot}} r(s) ds} \psi(X_{\theta_{ot}}, \theta_{ot}) \right) \geq \sup_{\theta \in \mathcal{T}_{[0, T]}} E_p \left( e^{-\int_0^\theta r(s) ds} \psi(X_\theta, \theta) \right).$$

Isto é,  $\theta_{ot}$  realiza o supremo de todos os tempos de parada.

A demonstração para  $t \in (0, T]$  é análoga. ■

Note que como  $p > (n/2) + 1$  por **(H5)**, o Teorema de Imersão de Sobolev garante que  $U(\cdot, t) \in W^{m, p, \mu} \subset C^0(\overline{0, T})$ . Isto é, para todo  $t \in [0, T]$  a função  $U(X, t)$  está definida, inclusive nos tempos inicial  $t = 0$  e final  $t = T$ .

## 2.2 Regularização

Com o objetivo de evitar as dificuldades matemáticas do espaço de Sobolev com peso considere a seguinte regularização, proposta em [1], para  $p = 2$ .

Seja  $\varphi \in L^2([0, T]; W^{2,2,\mu})$  uma regularização do obstáculo  $\psi \in L^2([0, T]; W^{2,2,\mu})$  e  $\tilde{\psi} := \psi - \varphi$  satisfazendo a condição

$$\lim_{\|X\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(X, \cdot) = 0, \quad (7)$$

o que significa que dado  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe uma constante  $K$  tal que  $\|\tilde{\psi}\| < \varepsilon$  para  $\|X\|_{\mathbb{R}^n} > K$ .

Seja  $\tilde{U} = U - \varphi \in L^2([0, T]; W^{2,2,\mu})$ , onde  $U$  é a solução do problema (6).

Substituindo  $\tilde{U}$  em (6)<sub>1</sub> obtém-se

$$\frac{\partial(\tilde{U} + \varphi)}{\partial t} + \mathcal{A}(\tilde{U} + \varphi) - r(\tilde{U} + \varphi) \leq 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \mathcal{A}\tilde{U} - r\tilde{U} \leq - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{A}\varphi - r\varphi \right) = \tilde{f}. \quad (8)$$

Note que,  $\tilde{U} = U - \varphi \geq \psi - \varphi = \tilde{\psi}$ . Logo o problema (6) pode ser reformulado do seguinte modo

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \mathcal{A}\tilde{U} - r\tilde{U} \leq \tilde{f} & \text{e } \tilde{U} \geq \tilde{\psi} & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T], \\ \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \mathcal{A}\tilde{U} - r\tilde{U} - \tilde{f} \right) (\tilde{U} - \tilde{\psi}) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T], \\ \tilde{U}(X, T) = \tilde{\psi}(X, T) & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9)$$

Seja  $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de domínios crescentes, abertos e limitados do  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k, \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} \Omega_k &= \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|_{\mathbb{R}^n} < k\} \\ \partial\Omega_k &= \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|_{\mathbb{R}^n} = k\} \end{aligned}$$

Para  $k$  suficientemente grande, considere o truncamento do problema (9) ao domínio  $\Omega_k$ , ou seja, deseje-se determinar uma solução  $U_k$  satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{\partial U_k}{\partial t} + \mathcal{A}U_k - rU_k \leq \tilde{f}_k & \text{e } U_k \geq \psi_k & \text{em } \Omega_k \times [0, T], \\ \left( \frac{\partial U_k}{\partial t} + \mathcal{A}U_k - rU_k - \tilde{f}_k \right) (U_k - \psi_k) = 0 & \text{em } \Omega_k \times [0, T], \\ U_k(X, T) = \psi_k(X, T) & \text{em } \Omega_k, \\ U_k(X, t) = \psi_k(X, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega_k \times [0, T]. \end{cases} \quad (10)$$

Observação: Quando  $X \in \mathbb{R}^n$  e por (7) tem-se

$$\lim_{\|X\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty} \tilde{U}(X, t) = \tilde{\psi}(X, t) = 0. \quad (11)$$

Note que de (7) obtém-se (11). Desta forma na fronteira  $\partial\Omega_k$  faz sentido  $U_k(X, t) = \psi_k(X, t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$  para  $k$  suficientemente grande, sendo isto resultado da regularização. Uma consequência desta aproximação é uma perturbação local confinado à fronteira  $\partial\Omega_k$ . Esta condição é chamada condição artificial de fronteira. Na prática o problema é usualmente definido em domínios limitados. Define-se o espaço

$$H_{\psi_k}^1(\Omega_k) = \{v \in H^1(\Omega_k); v = \psi_k = 0 \text{ em } \partial\Omega_k\}.$$

Em [4] mostrou-se o seguinte resultado.

**Lema 2** *Considere o sistema (10), com  $\psi_k \in L^2([0, T]; H_{\psi_k}^1(\Omega_k))$  e o dado final  $U_k(X, T) \in H_{\psi_k}^1(\Omega_k)$ . Então existe uma única solução  $U_k : \Omega_k \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições*

- 1)  $U_k \in L^2([0, T]; H_{\psi_k}^1(\Omega_k))$
- 2)  $\frac{\partial U_k}{\partial t} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_k))$ .

Além disso, para todo conjunto compacto  $\bar{G}$ , tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \max_{t \in [0, T]} \| \tilde{U}(X, t) - U_k(X, t) \|_{L^\infty(\bar{G})} \right) = 0, \quad (12)$$

para  $X \in \bar{G}$ , onde  $\tilde{U}$  é solução exata do sistema (9).

E de [8] o seguinte resultado é obtido.

**Lema 3 Regularidade da solução.**

*Seja  $\psi_k \in L^2([0, T]; H_{\psi_k}^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k))$  e  $U_k(X, T) \in H_{\psi_k}^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k)$ . Então existe uma única  $U_k : \Omega_k \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições*

- 1)  $U_k \in L^2([0, T]; H_{\psi_k}^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k))$
- 2)  $\frac{\partial U_k}{\partial t} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_k))$ .

A regularização obtida nesta seção e a convergência em (12) justificam o uso de domínios limitados para solução do sistema (6). Na prática utiliza-se o sistema (10) para obter uma solução aproximada de  $U$  partindo da escolha de  $\Omega_k$  suficientemente grande.

### 2.3 Formulação Variacional em Domínios Limitados

Em razão dos resultados obtidos na última seção considere o problema (6) restrito ao domínio  $\Omega_k$  dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_k}{\partial t} + \mathcal{A}U_k - rU_k \leq 0 & \text{e } U_k \geq \psi_k & \text{em } \Omega_k \times [0, T]. \\ \left( \frac{\partial U_k}{\partial t} + \mathcal{A}U_k - rU_k \right) (U_k - \psi_k) = 0 & & \text{em } \Omega_k \times [0, T]. \\ U_k(X, T) = \psi_k(X, T) & & \text{em } \Omega_k. \\ U_k(X, t) = \psi_k(X, t) = 0 & & \text{em } \partial\Omega_k \times [0, T]. \end{cases} \quad (13)$$

Sejam  $U_k(\cdot, t)$  e  $\psi_k(X, t) \in H_{\psi_k}^1(\Omega_k) \cap \overline{H^2(\Omega_k)}$  e  $v \in \mathcal{D}(\Omega_k)$  uma função teste tal que  $v \geq \psi_k$ . Multiplicando  $v$  em (13)<sub>2</sub> e integrando em  $\Omega_k$  obtém-se

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial U_k}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega_k} \mathcal{A}U_k v \, dx - \int_{\Omega_k} rU_k v \, dx \leq 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_k). \quad (14)$$

Do Teorema de Green tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \mathcal{A}U_k v \, dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) v \, dx - \int_{\Omega_k} \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} v \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_k} a_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_k} a_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} v \, dx, \end{aligned} \quad (15)$$

pois  $v \in \mathcal{D}(\Omega_k)$  tem suporte compacto. Define-se

$$\begin{aligned} a_k(t; U_k, v) &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_k} a_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_k} a_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} v \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega_k} rU_k v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_k). \end{aligned} \quad (16)$$

Substituindo (15) e (16) em (14) obtém-se a formulação variacional fraca

$$\left( \frac{\partial U_k}{\partial t}, v \right) + a_k(t; U_k, v) \leq 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_k). \quad (17)$$

### 2.4 Sistema Aproximado

Considere o domínio limitado  $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ , para  $k$  fixo, e a discretização uniforme do intervalo  $[0, T]$  na forma  $t_m := m \Delta t$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , onde  $\Delta t = T/M$  para a formulação fraca da inequação variacional (10). Introduz-se a aproximação no tempo de (17) pelo método de diferenças finitas usando o Teorema de Taylor e denota-se  $U(\cdot, m\Delta t) = U^m(\cdot)$ . Desta forma

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} \Big|_{t_m} = \frac{U_k^{m+1} - U_k^m}{\Delta t}, \quad \text{com erro } \mathcal{O}(\Delta t). \quad (18)$$



Para cada  $\Omega_k$ ,  $k$  fixo, tem-se uma solução  $U_k \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k))$ . Seja  $V_k$  um subespaço de  $H_0^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k)$  gerado pelos  $N$  primeiros valores da base de  $H_0^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k)$ . Então as soluções aproximadas são da forma

$$U_k^m(x, t) = \sum_{i=1}^N C_i(t) \phi_i(x), \quad (19)$$

onde  $C_i(t) \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, n$  e  $\{\phi_i(x) \mid i = 1, \dots, N\}$  é base de  $V_k$ .

De (18) e (19) obtém-se o sistema aproximado de (13).

$$U_k^M = \psi_k - \left( \frac{1}{\Delta t} U_k^m, v \right) + a_k(t_m; U_k^m, v) \leq -\frac{1}{\Delta t} (U_k^{m+1}, v), \quad \forall v \in V_k, \quad (20)$$

com  $m = M - 1, \dots, 1$ .

Assim obtém-se um sistema matricial que aproxima por elementos finitos o sistema (20), tomando  $v = \phi_j$ .

$$C^M = \psi_k(b, t_M), \quad \forall b \in \mathcal{N}_k - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_i(t_m) \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\phi_i, \phi_j) + \frac{a_{ij}}{2} (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) + a_j (\nabla \phi_i, \phi_j) - r(\phi_i, \phi_j) \right\} \leq -\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C^{m+1}(\phi_i, \phi_j), \quad (21)$$

onde  $m = 1, \dots, M$  e  $N_k$  denota todos os nós do espaço  $V_k$ .

De (21), determina-se o sistema matricial que fornece a seqüência  $\{C^m\}$  por recorrência. Assim, obtém-se

$$\begin{cases} C^M = \psi_k(b, t_M) \quad \forall b \in N_k \\ A C^m \leq F C^{m+1} \end{cases} \quad (22)$$

para  $m = M - 1, \dots, 1$ , onde  $A = (A_{i,j})$  tal que

$$A_{ij} = -\frac{1}{\Delta t} (\phi_i, \phi_j) - \frac{a_{ij}}{2} (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) - a_j (\nabla \phi_i, \phi_j) - r(\phi_i, \phi_j)$$

e

$$F = -\frac{1}{\Delta t} (\phi_i, \phi_j).$$

Em particular, pode-se observar em [8] que quando  $\{U_k^m\}$  constitui uma aproximação do método implícito de Euler de elementos finitos utilizando partições retangulares e fixando  $k$  obtém-se a estimativa do erro dada por

$$\max_{t \in [0, T]} \|U_k - \tilde{U}_k^m\|_{L^\infty(\Omega_k)} \leq \mathcal{O}(\Delta t + h^{2-\varepsilon}), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (23)$$

### 3 Problema Unidimensional

O operador definido em (5) para o caso unidimensional é dado por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + rX \frac{\partial}{\partial X}.$$

Então o sistema (10) para o caso unidimensional é escrito por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 U_k}{\partial X^2} + rX \frac{\partial U_k}{\partial X} - rU_k \leq 0 \text{ e } U_k \geq \psi_k, \text{ em } \Omega_k \times [0, T] \\ \left( \frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 U_k}{\partial X^2} + rX \frac{\partial U_k}{\partial X} - rU_k \right) (U_k - \psi_k) = 0, \text{ em } \Omega_k \times [0, T] \\ U_k(X, T) = \psi_k(X, T), \forall X \in \Omega_k \\ U_k(X, t) = \psi_k(X, t), \text{ em } \partial\Omega_k \times [0, T], \end{array} \right. \quad (24)$$

onde  $\Omega_k$  é um intervalo positivo da reta.

#### 3.1 Mudanças de Variáveis

As mudanças de variáveis permitem obter um problema variacional mais simples e além disto trazem ganhos computacionais uma vez que reduzem a quantidade de operações na matriz do sistema linear obtida pela utilização do método de elementos finitos. Seja  $U_k(X, t)$  solução do sistema (24), onde  $X > 0$  e  $t \in [0, T]$ . Considere as seguintes mudanças de variáveis

$$X = E e^x, \quad t = T - \frac{\tau}{(1/2)\sigma^2} \quad \text{e} \quad U_k(x, \tau) = E v(x, \tau).$$

Derivando  $U_k$  em relação a  $t$  e a  $X$  com  $E \neq 0$  obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_k}{\partial t}(x, \tau) &= \frac{\partial E v}{\partial t}(x, \tau) = -\frac{1}{2}\sigma^2 E \frac{\partial v}{\partial \tau}(x, \tau), \\ \frac{\partial U_k}{\partial X}(x, \tau) &= \frac{\partial E v}{\partial X}(x, \tau) = \frac{\partial \ln(X/E)}{\partial X} E \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) = e^{-x} \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) \quad \text{e} \\ \frac{\partial^2 U_k}{\partial X^2}(x, \tau) &= \frac{\partial}{\partial X} \left( e^{-x} \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) \right) = -\frac{e^{-2x}}{E} \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) + \frac{e^{-2x}}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau). \end{aligned}$$

Deste modo a inequação (24)<sub>1</sub> após as mudanças de variáveis é equivalente a

$$-\frac{\sigma^2}{2} E \frac{\partial v}{\partial \tau}(x, \tau) + \frac{\sigma^2}{2} E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau) + \left( rE - \frac{\sigma^2}{2} E \right) \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) - rE v(x, \tau) \leq 0. \quad (25)$$

Fazendo as substituições em (24)<sub>1</sub> e dividindo por  $(1/2)\sigma^2 E > 0$  obtém-se

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau}(x, \tau) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau) + (k_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau) - k_1 v(x, \tau) \leq 0, \quad (26)$$

onde  $k_1 = \frac{r}{(1/2)\sigma^2}$ .

A inequação (26) pode ser reduzida a uma inequação parabólica mais simples através da introdução de duas variáveis auxiliares  $\alpha$  e  $\beta$ . Com este intuito, suponha que a solução seja da forma

$$v(x, \tau) = u(x, \tau) e^{\alpha x + \beta \tau}. \quad (27)$$

Substituindo (27) em (26) e dividindo por  $e^{\alpha x + \beta \tau}$  obtém-se

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}(k_1 + 2\alpha - 1) + u(\alpha^2 + (k_1 - 1)\alpha - k_1 - \beta) \leq 0. \quad (28)$$

Tomando  $\alpha = -\frac{1}{2}(k_1 - 1)$  e  $\beta = -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2$  os termos em  $u$  e  $\partial U/\partial X$  são eliminados e então a inequação variacional (28) escreve-se por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) \geq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau), \quad (29)$$

Note que após realizar as mudanças de variáveis chega-se a relação

$$U_k(x, \tau) = Eu(x, \tau) e^{\alpha x + \beta \tau} = Eu(x, \tau) e^{-\frac{1}{2}(k_1 - 1)x - \frac{1}{4}(k_1 + 1)^2 \tau}. \quad (30)$$

Para a inequação  $U_k \geq \psi_k$  em (24)<sub>1</sub> também é realizada a mudança de variáveis. Para isto é preciso definir o obstáculo  $\psi_k$  para o caso unidimensional, que posteriormente, será utilizado nas simulações numéricas.

Seja o obstáculo  $\psi_k$  dado por

$$\psi_k := \max(E - X, 0) \quad (31)$$

Realizando as mudanças de variáveis para  $U_k \geq \psi_k$  como em (30) obtém-se

$$\begin{aligned} E e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) &\geq \max(E - Ee^x, 0) \geq E \max(1 - e^x, 0) \\ u(x, \tau) &\geq e^{-\beta \tau} \max(e^{-\alpha x} - e^{\bar{\alpha}x}, 0), \quad \text{onde } \bar{\alpha} = \frac{1}{2}(k_1 + 1). \end{aligned} \quad (32)$$

Logo,  $u(x, \tau) - e^{-\beta \tau} \max(e^{-\alpha x} - e^{\bar{\alpha}x}, 0) \geq 0$ .

### 3.2 Condição Inicial e de Fronteira

A mesma transformação realizada na seção anterior para a primeira inequação de (24) deve ser feita para a condição de tempo final  $T$  e na fronteira  $\partial\Omega_k$ . Para a condição final,  $U_k(X, T) = \psi_k(X) = \max(E - X, 0)$ ,  $\forall X \in \Omega_k$ . Observe que  $t \in [0, T]$  então  $\tau = (T - t)(1/2)\sigma^2$ . Seja  $\bar{T} = (1/2)T\sigma^2$  então  $\tau \in [0, \bar{T}]$ . Pela mudança de variáveis em (32) com  $\tau = 0$  tem-se

$$u(x, 0) = \max(e^{-\alpha x} - e^{\bar{\alpha}x}, 0). \quad (33)$$

Considere agora o caso em que  $X \in \partial\Omega_k$ . Note que  $x = \ln(X/E) = -\infty$ . Como  $\Omega_k = [X_i, X_f]$ , onde  $X_i > 0$  é o valor inicial e  $X_f$  é o valor final do ativo-objeto. Pela condição (24)<sub>4</sub>, segue que

$$U_k(X, t) = \psi_k(X) = \max(E - X, 0), \quad \forall X \in \partial\Omega_k,$$

então como  $x_0 = \ln(X_0/E)$  e  $x_f = \ln(X_f/E)$  e pela mudança de variáveis em (32) resulta que

$$u(x_0, \tau) = e^{-\beta\tau} \max(e^{-\alpha x_0} - e^{\bar{\alpha}x_0}, 0), \quad \forall \tau \in [0, \bar{T}] \quad e$$

$$u(x_f, \tau) = e^{-\beta\tau} \max(e^{-\alpha x_f} - e^{\bar{\alpha}x_f}, 0), \quad \forall \tau \in [0, \bar{T}].$$

A partir das mudanças de variáveis realizadas e de suas condições de fronteira e tempo final, o sistema (24) pode ser escrito por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \tau} \geq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad e \quad u \geq \Psi, \quad (x, \tau) \in [x_0, x_f] \times [0, \bar{T}] \\ \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u - \Psi) = 0, \quad (x, \tau) \in [x_0, x_f] \times [0, \bar{T}] \\ u(x_0, \tau) = e^{-\beta\tau} \max(e^{-\alpha x_0} - e^{\bar{\alpha}x_0}, 0) = \Psi(x_0, \tau), \quad \tau \in [0, \bar{T}] \\ u(x_f, \tau) = e^{-\beta\tau} \max(e^{-\alpha x_f} - e^{\bar{\alpha}x_f}, 0) = \Psi(x_f, \tau), \quad \tau \in [0, \bar{T}] \\ u(x, 0) = \max(e^{-\alpha x} - e^{\bar{\alpha}x}, 0) = \Psi(x, 0), \quad x \in [x_0, x_f]. \end{array} \right. \quad (34)$$

O sistema de inequações variacionais (34) obtido a partir de (24) é mais simples em termos da implementação computacional.

## 4 Método de Elementos Finitos

O objetivo desta seção é obter a implementação numérica da solução aproximada. Para isto são utilizados os métodos de elementos finitos e diferenças finitas.

### 4.1 Formulação Variacional

Considere a formulação variacional do sistema (34), onde  $u(\cdot, t) \in H_{\Psi}^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k)$  e seja  $v \in \mathcal{D}(\Omega_k)$  uma função teste tal que  $v \geq \Psi$ . Assim, como consequência imediata da forma variacional feita anteriormente, obtém-se

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial \tau} v \, dx + \int_{\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_k). \quad (35)$$

## 4.2 Método de Galerkin

O método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções  $H_{\Psi}^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k)$  por um subespaço de dimensão finita. Para aproximar tal espaço, define-se um subespaço  $V_h$  gerado pelos  $N$  primeiros elementos da base do espaço de Hilbert  $H_{\Psi}^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k)$ , ou seja,  $V_h = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]$ , onde  $\{\phi_i, i \in \mathbb{N}\}$  é uma base de  $H_{\Psi}^1(\Omega_k) \cap H^2(\Omega_k)$ . Agora, procura-se uma solução aproximada  $u_h = u_h(x)$  do problema (35) no subespaço  $V_h$ .

Então, para  $u_h \in V_h$  tem-se

$$u_h(x, \tau) = \sum_{i=1}^N C_i(\tau) \phi_i(x)$$

Substituindo  $u$  por  $u_h$  em (35) para cada  $k$  fixo e aproximando a derivada em relação a  $\tau$  por diferenças finitas obtém-se

$$\sum_{i=1}^N \frac{(C_i^m - C_i^{m-1})}{\Delta\tau} \int_{\Omega_k} \phi_i(x) \phi_j(x) dx + \sum_{i=1}^m C_i^m(\tau) \int_{\Omega_k} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx \geq 0,$$

com  $j = 1, \dots, N$ ,  $m = M, \dots, 1$  e um erro  $\mathcal{O}(\Delta\tau)$ . Podendo ser escrito no seguinte sistema de inequações ordinárias

$$(A + \Delta\tau B) C^m \geq A C^{m-1} \quad (36)$$

onde  $A_{ij} = \int_{\Omega_k} \phi_i(x) \phi_j(x) dx$ ,  $B_{ij} = \int_{\Omega_k} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx$

com  $i, j = 1, \dots, N$  e  $m = M, \dots, 1$  e são matrizes simétricas.

Seja  $\phi_i$  com  $i = 1, \dots, N$  base de  $V_h$  define-se  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_k)$  da seguinte forma:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{1}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Utiliza-se a malha uniforme  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$  e, portanto, a discretização no espaço é feita de modo que  $x_i = x_0 + ih$ , para  $i = 1, \dots, N$ .

Após definida a função  $\phi$  é possível calcular as matrizes  $A$  e  $B$ .

Para  $i = j$ :

$$a_{ii} = (\phi_i(x), \phi_i(x)) = \int_{\Omega_k} \phi_i^2(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx = \frac{2h}{3},$$

$$b_{ii} = \left( \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \right) = \int_{\Omega_k} \frac{\partial \phi_i^2(x)}{\partial x} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial \phi_i^2(x)}{\partial x} dx = \frac{2}{h}$$

Para  $j = i + 1$ :

$$a_{i,i+1} = (\phi_i(x), \phi_{i+1}(x)) = \int_{\Omega_k} \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) dx = \frac{h}{6}$$

$$b_{i,i+1} = \left( \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}, \frac{\partial \phi_{i+1}(x)}{\partial x} \right) = \int_{\Omega_k} \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x}(x) dx = \frac{-1}{h}.$$

Note que 
$$u_h^m(x_j) = \sum_{i=1}^N C_i^m \phi_i(x_j) = \begin{cases} C_i^m, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

O sistema matricial iterativo (36) pode ser escrito da forma

$$K C^m \geq b^{m-1}, \quad \text{com } K = A + \Delta \tau B, \quad b^{m-1} = A C^{m-1} \quad \text{e } m = 1, \dots, M. \quad (37)$$

## 5 Método Iterativo

Observe que a matriz  $A$  é estritamente diagonal dominante e a matriz  $B$  é diagonal dominante então a matriz  $K$  é estritamente diagonal dominante.

Para  $m = 1$ , o vetor  $C^0$  dado pela condição inicial (34)<sub>5</sub> é dado por

$$C^0 = (\Psi(x_1, 0), \Psi(x_1, 0), \dots, \Psi(x_{N-1}, 0))^t.$$

E as condições de fronteira (34)<sub>3</sub>, (34)<sub>4</sub> são dadas respectivamente por

$$C_0^m = \Psi(x_0, \tau_m), \quad \forall m = 1, \dots, M,$$

$$C_N^m = \Psi(x_f, \tau_m), \quad \forall m = 1, \dots, M.$$

O sistema matricial de inequações (37) pode ser utilizado considerando

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, \tau) \in [x_0, x_f] \times [0, \bar{T}].$$

Isto implica que o sistema linear sob a forma matricial se escreve por

$$K C^m - b^{m-1} = 0.$$

O passo seguinte é verificar se a condição  $u(x_i, \tau_m) \geq \Psi(x_i, \tau_m)$  é satisfeita. Caso isto não ocorra é feita a projeção  $u(x_i, \tau_m) = \Psi(x_i, \tau_m)$  conservando (34)<sub>2</sub>. E ainda para  $C_i^m = \Psi(x_i, \tau_m)$  as inequações (34)<sub>1</sub> são satisfeitas, pois  $K C^m - b^{m-1} \geq 0$ .

O sistema iterativo (37) é resolvido para cada  $m$  fixo pelo método de sobre-relaxação projetado (SORp). O programa (SORp) é adaptado para resolução de sistemas lineares tridiagonais, como o caso da matriz  $K$ . Desta forma não é necessário o armazenamento dos zeros desta matriz reduzindo o custo computacional.

## 6 Simulações Numéricas

Exemplos numéricos será dados para ilustrar o método desenvolvido. Para isto são necessárias explicitar algumas variáveis do modelo como tempo de exercício  $T$ , taxa de juros  $r$  e preço de exercício  $E$ .

### 6.1 Exemplo 1:

Para esta simulação foram coletados os valores da ação da petrobras PETR4-PN ( $X_i$ ) em cada dia útil (DU) pelo período de um ano. Os dados foram obtidos do *site* do Banco do Brasil ([www.bb.com.br](http://www.bb.com.br)) referentes as cotações na BM&F.

Suponha que os preços do ativo sejam dados nos seis primeiros meses, do dia 24/03/2003 até o dia 24/09/2003. Deseja-se saber o valor da opção americana de venda do dia 24/09/2003 com vencimento no dia 22/03/2004. Considere que o preço de exercício contratado seja  $E = R\$ 75,00$ .

Utiliza-se a volatilidade histórica, para isto calcula-se primeiramente a média dos retornos dada por

$$\mu = \frac{1}{128} \sum_{i=1}^{128} \ln(X_{i+1}/X_i) = 0,0024,$$

onde 128 é a quantidade de dias úteis que se conhece os dados. A volatilidade diária é dada por

$$\sigma_{dia} = \sqrt{\frac{1}{128} \sum_{i=1}^{128} (\ln(X_{i+1}/X_i) - 0,24\%)^2} = 0,0163,$$

e a volatilidade histórica anual é dada por

$$\sigma_{anual} = \sqrt{250} \sigma_{dia} = 15,8114 \times 0,0163 = 0,2577.$$

Desta forma, a volatilidade é  $\sigma = 0,2577$ . A taxa de juros é  $r_{anual} = 8\%$  que transformando para taxa de juros contínua livre de risco tem-se

$$r = \ln(1 + r_{anual}) = \ln(1 + 0,08) = 0,07696 = 7,69\%.$$

O passo seguinte é determinar o intervalo  $\Omega_k$ . Note que na prática não se pode garantir que o preço da ação estará dentro do intervalo estipulado  $\Omega_k$  durante o prazo de validade da opção. Contudo para fins de cálculo computacional é preciso tomar tal intervalo limitado.

De acordo com as mudanças de variáveis realizadas na seção (3.1) tem-se para  $\Omega_k = [X_0, X_F]$

$$X_0 = Ee^{x_0} \implies x_0 = \ln(X_0/E) \quad \text{e} \quad X_F = Ee^{x_f} \implies x_f = \ln(X_F/E).$$

Toma-se uma malha no espaço composta de  $2N$  elementos, então

$$x_0 = \ln(X_0/E) = -N \Delta x \implies N = \frac{\ln(E/X_0)}{\Delta x} \quad \text{com} \quad E, X_0, \Delta x \neq 0.$$

Como  $x_0 = -N\Delta x$  e  $x_f = N\Delta x$  determina-se  $X_F$  por  $x_0 = -x_f$  segue que  $\ln(X_F/E) = \ln(E/X_0)$ . Donde conclui-se que  $X_F = E^2/X_0$ , com  $X_0 \neq 0$ . O domínio é limitado dado por  $\Omega_k = [X_0, E^2/X_0]$ . Para este primeiro exemplo, escolhe-se ao acaso  $X_0 = 10$  resultando em  $X_F = E^2/X_0 = 562,5$  e  $\Omega_k = [10; 562,5]$ . Logo, o exemplo 1 é feito para  $\sigma = 0,2577$ ,  $r = 0,0769$ ,  $T = 6$  meses ou  $T = 0.5$  ano e  $E = R\$ 75,00$ , com  $X \in [10, 562.5]$  e  $t \in [0, 1/2]$ .

A figura 6.1 mostra as funções  $U_k(0.0, X)$  e  $U_k(0.4, X)$  com  $X \in \Omega_k$  observadas no intervalo  $[60, 100]$ .

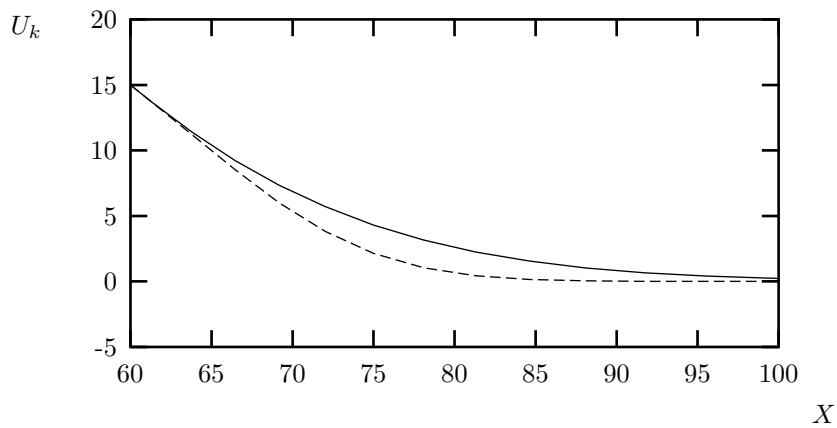


Figura 6.1: Gráfico da função  $U_k$  para  $t = 0$  (linha contínua) e  $t = 0.4$  (linha tracejada) considerando o intervalo  $[60, 100]$ .



Uma análise do comportamento da função aproximada  $U_k$  para  $X$  fixo e variando  $t \in [0, 1/2]$  é apresentado na figura 6.2. Os valores para  $X$  foram tomados tais que  $X = 60$ ,  $X = 70$ ,  $X = 80$ ,  $X = 90$  e  $X = 103$ .

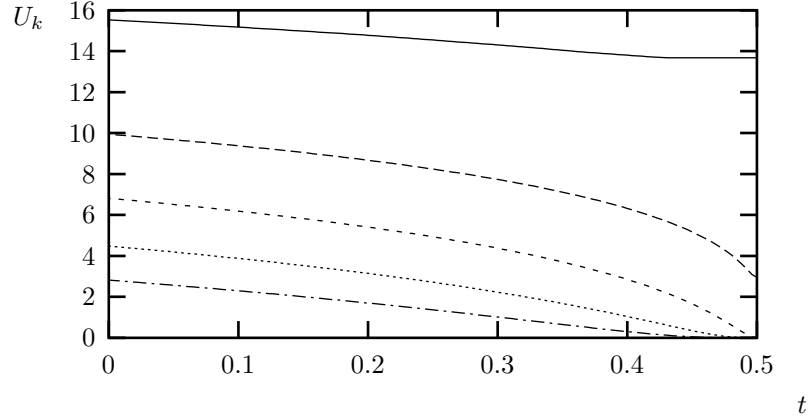


Figura 6.2: Gráfico da função  $U_k$  (de cima para baixo) para  $X = 60$ ,  $X = 70$ ,  $X = 80$ ,  $X = 90$  e  $X = 103$  considerando  $t \in [0, 1/2]$ .

A partir da análise da solução aproximada  $U_k$  para  $t$  fixo e para  $X$  fixo pode-se mostrar o gráfico de  $U_k$  em função de  $X$  e  $t$ . O gráfico (6.3) representa a aproximação da função  $U$  em relação a  $X$  e  $t$ .

No tempo  $t = 0$ , isto é, no dia 24/09/2003, o valor da ação PETR4-PN foi cotado a R\$ 58,67. Logo, uma estimativa para o valor da opção americana de venda é

$$U(58.67; 0) \cong R\$ 16,33.$$

Para verificar a qualidade da aproximação toma-se um domínio limitado  $\Omega_M = [X_M, E^2/X_M]$ . e uma seqüência de domínios encaixados de modo que

$$\Omega_{K_0} \subset \Omega_{K_1} \subset \Omega_{K_2} \subset \Omega_{K_3} \subset \dots \subset \Omega_M.$$

Pela convergência em (12) tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \max_{t \in [0, T]} \| U(X, t) - U_k(X, t) \|_{L^\infty(\Omega_k)} \right) = 0.$$

Seja  $\Omega_M = [1, 75^2/1] = [1, 5625]$  e define-se a seqüência

$$\begin{aligned} \Omega_{K_3} &= [5, 75^2/5] = [5; 1125] \\ \Omega_{K_2} &= [10, 75^2/10] = [10; 562, 5] \\ \Omega_{K_1} &= [15, 75^2/15] = [15; 375] \\ \Omega_{K_0} &= [20, 75^2/20] = [20; 281, 25] \end{aligned}$$

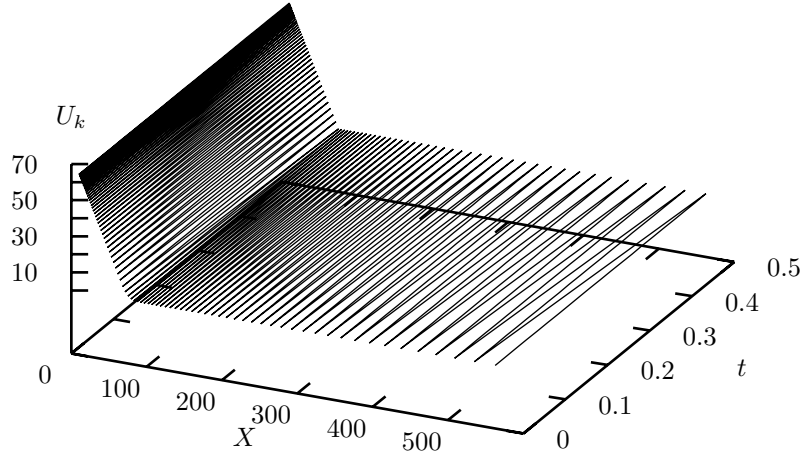


Figura 6.3: Gráfico do valor da opção americana de venda.

Em comum a cada uma das malhas dos domínios citados está o ponto  $X = 75$ . Então, será comparado o erro de cada um dos  $U_{k_i}$  de  $\Omega_{k_i}$  com a solução aproximada  $U_M$  de  $\Omega_M$  no ponto  $X = 75$  para todo  $t \in [0, T]$ . Para isto é utilizada a norma do máximo.

A norma do erro utilizada define-se por

$$\|E_i\|_\infty = \max_{t \in [0, T]} |U_M(75, t) - U_{k_i}(75, t)|.$$

A tabela a seguir apresenta os erros encontrados

$X = 75$   
 $t \in [0, 1/2]$   
 $\sigma = 0,2577$   
 $r = 0,0769$ .

Tabela do erro	
i	$\ E_i\ _\infty$
0	0,1248
1	0,1160
2	0,1020
3	0,0746

Observe que conforme  $\Omega_{k_i}$  converge para  $\Omega_M$  a função  $U_{k_i}(75, t)$  converge para  $U_M(75, t)$  de acordo com (12).

Nos gráficos da figura 6.4 pode-se observar a diferença entre as funções  $U_k$  para os vários domínios considerados e tomando  $t = 0$ . Percebe-se que para uma vizinhança bem próxima de  $X = 75$  com  $t = 0$  a diferença entre as curvas fica clara.

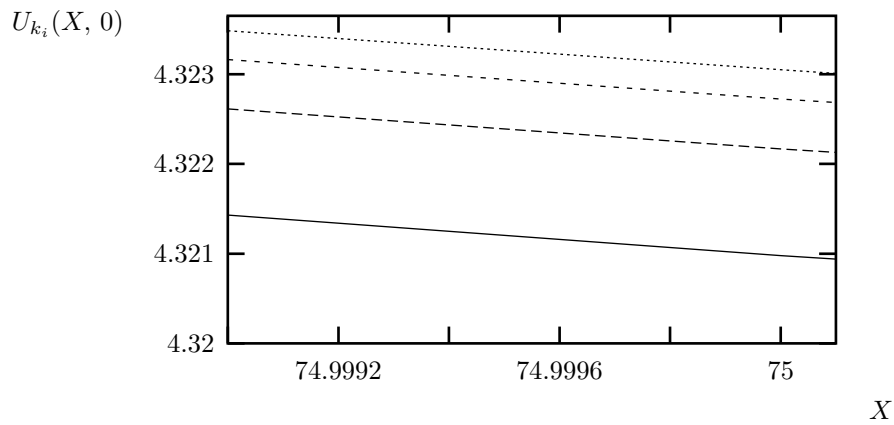


Figura 6.4:

## 6.2 Exemplo 2:

Agora é realizada uma série de simulações para obter o valor aproximado da opção americana de venda quando o preço de exercício é alterado. Considera-se  $X = 100$ ,  $r = 16\%$ ,  $\sigma = 0,2577$ ,  $T = 1/2$  ano e escolhe-se  $\Omega_k = [10, E^2/10]$ .

E	$U_k(100, 0)$
95	1.94
97	2.56
100	3.72
103	5.26
105	6.43

Observe que conforme o preço de exercício aumenta a solução  $U_k$  sofre influência do obstáculo dado por  $\max(E - X, 0)$ . Desta forma, quando o preço de exercício da opção americana de venda aumenta seu prêmio também aumenta.

As figuras 6.2 mostram esta característica.

As simulações realizadas mostram o comportamento da função aproximada  $U_k$  para vários parâmetros utilizados. Apesar dos vários modelos existentes não fornecerem a solução precisa dos preços ou não corresponderem por completo com a realidade do mercado eles servem de parâmetros importantes para atuação no mercado. E de fato, são bastante utilizados na prática para nortear a ação dos investidores.

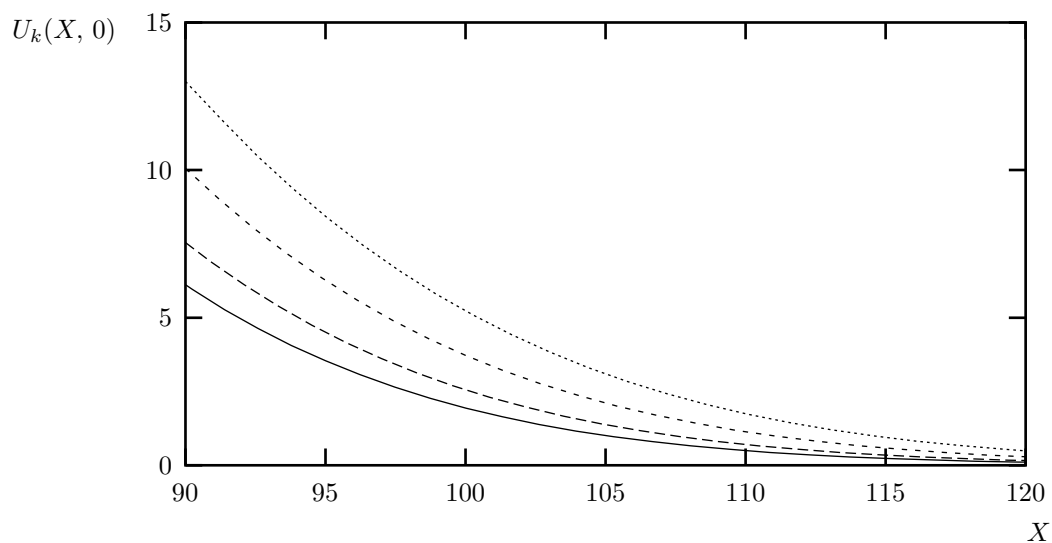


Figura 6.5: Gráfico das funções  $U_k$  para vários preços de exercício 105, 103, 100, 97 e 95 de cima para baixo respectivamente.

## Referências

- [1] BENSOUSSAN, A., LIONS, J., **Applications des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique**, Dunod, Paris, 1978.
- [2] BLACK, F., SCHOLES, M., **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**, J. Political Economy, 81 (1973), pp. 637-354.
- [3] HULL, John C., **Opções, Futuros e Outros Derivativos**, 3<sup>a</sup> ed. Bolsa de Mercadorias e Futuros, 1997.
- [4] JAILLET, Patrick, LAMBERTON, Damien, LAPEYRE, Bernard, **Analyse Numerique des Options Americaines**, Cahier du Cerma, 9 (1988), pp. 66-126.
- [5] KARATZAS, Ioannis, SHREVE, Steven, **Brownian Motion and Stochastic Calculus**, 2<sup>a</sup> ed. Springer, 1991.
- [6] LAMBERTON, Damien, LAPEYRE, Bernard, **Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance**, Mathematiques & Applications, 1991.
- [7] LIU, I-Shih, RINCON, M. A., **Introdução ao Método de Elementos Finitos**, IM/UFRJ, 2001.

- [8] MARCOZZI, M. D., **On the Approximation of Optimal Stopping Problems with Application to Financial Mathematics**, SIAM J. Sci. Comp., vol. 22, (2001), pp. 1865-1884.
- [9] OKSENDAL, Bernt, **Stochastic Differential Equation: an introduction with application**, 4<sup>a</sup> ed., Springer, 1995.
- [10] WILMOTT, P., DEWYNNE, J., HOWISON, S., **Option Pricing: Mathematical Models and Computation**, Oxford Financial Press, Oxford, 1993.