

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Terra
Observatório do Valongo
Departamento de Astronomia

Modelo Numérico para Convecção no Interior de Europa

Aluno: Leonardo Sattler Cassará (OV/UFRJ)

Orientador: Wladimir Lyra (JPL/Caltech/UFRJ)

Projeto de Conclusão de Curso para a obtenção do título de Astrônomo
Rio de Janeiro, Brasil

Leonardo Sattler Cassará

MODELO NUMÉRICO PARA CONVECÇÃO NO INTERIOR DE EUROPA

Monografia apresentada ao Curso de Astronomia da UFRJ, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de BACHAREL em Astronomia.

Orientador: Wladimir Lyra

Rio de Janeiro

2015

Resumo

As missões *Voyager* e *Galileo* forneceram imagens e dados que revelaram uma superfície jovem e ativa em Europa, com diversas formações geológicas como domos, cavidades e tectônica de placas. O aquecimento por marés devido à sua interação com Júpiter tem um papel importante neste cenário, e diversos estudos sugerem a existência de um oceano líquido subsuperficial como explicação para as formações geológicas observadas. Os modelos propostos se baseiam na presença de uma casca de gelo flutuante sobre uma camada convectiva, onde derretimento parcial ocorre a partir de uma energia de ativação proveniente da dissipação das marés. Material quente boiaria até formar várias das estruturas observadas na superfície de Europa. Entretanto, este processo convectivo não é muito entendido, necessitando mais investigação. Apresentamos aqui um modelo numérico 2D para ilustrar a possibilidade de convecção no interior de Europa, testando diferentes cenários de profundidade da casca de gelo. Com uma temperatura na base $T_b = 270\text{ K}$ e uma temperatura no topo da camada $T_t = 100\text{ K}$, sob reologia Newtoniana, nós reproduzimos movimentos convectivos consistentes com a presença de um oceano líquido sob a superfície de Europa, e com as estruturas nela encontradas como altura e extensão dos domos e depressões.

Palavras chave: Europa, Aquecimento por marés, oceano, convecção, reologia.

Abstract

The *Voyager* and *Galileo* missions provided images and data that revealed an active and young surface in Europa, with several geological formations such as domes, pits and evidence for plate tectonics. Tidal heating due to interaction with Jupiter plays an important role in this scenario, and several studies suggest the existence of a liquid subsurface ocean to explain the observed features. Proposed models rely on the presence of a floating ice shell over a convective layer, where partial melting takes place with activation energy aided by tidal dissipation. Buoyant warm material would reach the surface to form many of the observed features on Europa's surface. However the process that drives this convection is only marginally understood, warranting further investigation. Here we present a 2D numerical model to illustrate the possibility of convection in Europa's interior, testing different values for ice shell depth. With a bottom temperature $T_b = 270\text{ K}$, a top temperature $T_t = 100\text{ K}$ and under Newtonian rheology, we reproduce a thermal convection consistent with the presence of a subsurface liquid ocean, and with the terrain's morphology such as height and extension of pits and ridges.

Keywords: Europa, Tidal heating, ocean, convection, rheology.

Agradecimentos

Aos meus professores da vida, meus pais, que sempre lutaram pela minha educação e muito contribuíram pra cada conquista que obtive. Um especial agradecimento à minha mãe que, mesmo aos 8 anos, não se assustou (e apoiou) quando revelei interesse em cursar Astronomia. À minha irmã, companheira e amiga, que muito aturou e sem reclamar todas minhas noites em claro, mesmo tendo que dormir no mesmo quarto que eu. Aos vários amigos que me acompanharam ao longo da vida, pessoas que me ajudaram (e muito) quando precisei me divertir, e me entenderam (mais ainda) quando precisei me ausentar. Serei eternamente grato a todos.

Aos professores de sala de aula, do Instituto de Física, minha eterna gratidão ao Henrique Boschi Filho. Grande tutor e professor, primeiro a me orientar em pesquisa, graças ao seu incentivo e ajuda pude realizar graduação sanduíche na Universidade da Califórnia em Berkeley pelo programa Ciência Sem Fronteiras, que muito contribui para o meu aprendizado. Deixo registrado também meus agradecimentos ao Governo Federal, criador do programa, e à CAPES, agência que forneceu as bolsas e auxílios.

No Observatório do Valongo, agradeço a todos. Em especial, aos professores Gustavo F. Porto de Mello e Hélio Jaques Rocha-Pinto, que além de excelentes profissionais e pessoas, me ajudaram desde os primeiros momentos de minha graduação com ótimas aulas e conselhos. Ao professor Alexandre Lyra de Oliveira, outro ótimo educador e pessoa que muito admiro e que, juntamente com a incrivelmente solícita Rosa Maria Machado, estiveram diretamente ligados ao sucesso da minha candidatura no Ciência Sem Fronteiras, que me colocou na instituição que fez nascer este projeto.

Ao meu orientador Wladimir Lyra. Agradeço novamente pela incrível oportunidade de um estágio de verão no JPL/NASA durante meu período nos EUA. Lá pude conhecer os principais pesquisadores por trás dos mais relevantes estudos sobre Europa. Com ele me orientando trabalhei com total liberdade, desde a escolha do tema até os passos principais, na pesquisa que originou o presente estudo: A Finite-difference code for Ice Shell Convection in Europa's Interior (desenvolvida dentro de dois meses). Obrigado pelas elucidações acerca das equações, as dicas computacionais, as importantes ajudas na construção de textos científicos e muitos, muitos outros ensinamentos.

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Órbita e Marés	17
1.2	Modelos do Interior	18
1.3	Morfologia Externa	20
2	O Modelo	30
2.1	Viscosidade	30
2.2	Equações de Navier-Stokes	31
2.2.1	Equação de Continuidade	32
2.2.2	Equação de Momento	32
2.2.3	Equação de Energia	34
2.3	Aplicação ao Modelo	36
2.4	Estrutura da Litosfera	38
2.4.1	Equilíbrio Hidrostático	39
3	Métodos	41
3.1	Resolvendo a Equação de Momento	41
3.2	Resolvendo a Equação de Energia	44
3.3	Construindo o Ambiente	46
3.3.1	Condições Iniciais e de Contorno	47
4	Resultados e Conclusões	50
4.1	Imagens da Convecção	50
4.1.1	d = 20 quilômetros	51
4.1.2	d = 25 quilômetros	55

4.1.3	d = 30 quilômetros	58
4.2	Conclusões	61
4.3	Formando as Estruturas	64
5	Perspectivas	66
5.1	Próximas Missões	66
5.2	Sobre Água e Vida em Europa	68
A	Adimensionalização	70
A.1	Conservação de Momento	70
A.2	Conservação de Energia	72
B	Método das Diferenças Finitas	74
C	Métodos Numéricos	76
C.1	Método de Sobre-relaxação	76
C.2	Runge-Kutta	78
D	Detalhes da Superfície	79
	Referências Bibliográficas	88

Lista de Figuras

- 1.1 Imagem de Europa tirada pela sonda *Galileo*, mostrando regiões claras e escuras. A coloração se dá pela maior presença de minérios e outros elementos como evaporitos de sais dos oceanos (Spencer et al. 2006). Por toda a casca externa de gelo se apresentam rachaduras que são de fato formações de cristas com quilômetros de extensão, consequência de processos geológicos. Esta visão global de Europa revela o quão ativa e dinâmica ela é, o que abre a possibilidade de um oceano líquido de água abaixo de sua superfície. Créditos: Greenberg (2005). 16
- 1.2 Ilustração da Órbita de Europa e a ação do efeito de maré. Quando Europa se encontra em seu pericentro observamos que a deformação do bojo é máxima, e mínima quando no apocentro. Podemos observar que é sempre o mesmo lado de Europa que aponta para Júpiter, devido à rotação síncrona (na verdade há um efeito da rotação não-síncrona que leva o lado da superfície voltado a Júpiter ser diferente com o tempo (Geissler et al. 1998), devido ao desacoplamento entre o núcleo e a superfície que evidencia a presença de uma camada líquida interna). A amplitude da deformação é de 20 a 30 metros, variando ao longo da órbita de 3,5 dias terrestres. As deformações estão exageradas para fins ilustrativos. 17
- 1.3 Modelos do interior de Europa. Na esquerda está Europa com um núcleo metálico e manto rochoso. À direita estão representadas três possíveis constituições da litosfera. Primeira: casca de gelo, camada convectiva e oceano líquido. Segunda: casca de gelo e camada convectiva, sem presença de água líquida. Esse caso não é provável pois não condiz com os dados magnéticos da sonda Galileo. Terceira: casca de gelo seguida de água puramente líquida, um cenário menos provável pois a energia advinda das marés não seria suficiente para manter toda a litosfera derretida. 19

1.4	Ilustração de diapirismo na camada convectiva, manifestado na forma de canais (esquerda) e cogumelos (direita) que levam material quente à superfície, assim como ocorre no manto terrestre na formação de vulcões. Apesar da imagem ilustrar criovulcões em atividade, a existência dessas estruturas em Europa é incerta. Créditos: Greenberg (2005).	20
1.5	Exemplo de crateras em Europa. À esquerda está a cratera Pwyll, com longos rastros de ejeção a partir de seu centro de impacto. À direita Tyre Macula e seus anéis concêntricos causados pelo impacto. A coloração escura do centro de Pwyll e ao redor de Tyre indicam exposição de material novo sobre a superfície, vindo do interior provavelmente pela violência do impacto. Imagens feitas com composição de cores. Créditos: Greenberg (2005).	21
1.6	À esquerda, um dos maiores domos em Europa, com aproximadamente 40 quilômetros de extensão. Esse em particular mostra rachaduras no terreno próximo assim como no próprio domo. Sua formação ocorre como resposta ao soerguimento da superfície. À direita exemplos de cavidades, consequência do derretimento parcial da superfície. Nessa imagem a formação central aparenta ter sido dividida por deslocamento do solo, comum em Europa devido à tectônica de placas. Créditos: Greenberg (2005).	22
1.7	Ilustração de diapirismo. Material diapírico ascendente, ao atingir camadas superiores, deforma a casca de gelo e gera os domos (parte esquerda). Se esse material está muito quente, gera as cavidades pois acaba por derreter porções do gelo, desgastando-o e fazendo com que parte dele ceda (parte direita). Créditos: Head et al. (1999).	23
1.8	Exemplo de como falhas transcorrentes geram bandas de separação. Isso se dá quando o traçado da transcorrente cria depressões ou bacias, com ranhuras paralelas ao longo da abertura como as observadas na figura anterior. Créditos: Greenberg (2005).	23
1.9	Zoom de uma das bandas de separação, gerada pelo tectonismo de forma semelhante às falhas transcorrentes na Terra, quando falhas são formadas por deslocamento horizontal das placas, sem movimentos verticais. Créditos: Greenberg (2005).	24

1.10	Imagem obtida por Galileo de uma região caótica conhecida como Conamara Chaos, o terreno que aparece acidentado nesta imagem e que possui aproximadamente 80 quilômetros de extensão. Essas regiões são resultado da tectônica de placas e do derretimento por processo interno de aquecimento, provavelmente grande quantidade de material diapírico com temperatura elevada. Créditos: Greenberg (2005).	25
1.11	Apesar de presente na maioria nas outras imagens, eis uma ilustrativa da estrutura das cristas duplas. A área mostrada possui aproximadamente 12 quilômetros de extensão. Créditos: Greenberg (2005).	26
1.12	Explicações de formação das cristas. A primeira, por compressão de material entre placas (compressão por marés), não é aceita amplamente por não exigir existência de uma camada convectiva, e portanto de não é compatível com o modelo aqui apresentado. A segunda explicação, que atribui ao diapirismo a causa do soerguimento da crosta, é a mais difundida e tem ganhado destaque com o avanço dos estudos sobre processos convectivos no interior de Europa. Créditos: Pappalardo et al. (1999).	27
1.13	Ilustração da dinâmica das placas na Terra e os principais tipos de limites e estruturas associados, que servem como base para uma analogia à dinâmica do relevo de Europa. Limites conservativos devem estar associados à geração das bandas de separação. O cenário que envolve o limite divergente descreve bem a formação das cristas duplas em Europa. O processo de choque de placas em limites convergentes é um candidato à explicação da formação dos terrenos caóticos. Pontos com magma em ascensão são mostrados, com plumas (abaixo da placa) e diapirs (intrusões na crosta). Créditos: Teixeira et al. (2009).	28
1.14	Mosaico em preto e branco de Europa. Créditos: Greenberg (2005).	29
3.1	Resolução da Eq. (3.4) via método das diferenças finitas. Ver Apêndice B para detalhes sobre o método.	44
3.2	Trecho do código em que a Eq. (3.11) é resolvida via Runge-Kutta e o grid de temperatura é atualizado a partir do elemento $T[i,k]$	45

3.3	Aspecto do grid de T antes do início das convecções. A é definido via Eq. (2.3) e d é o tamanho da caixa a ser simulada. 0.0 Myr indica o número de anos corridos em milhões.	47
4.1	Gráfico da esquerda: resultado para $A = 7,8$ ($Q = 17,5$ kJ/mol). Direita: resultado para $A = 8,0$ ($Q = 17,8$ kJ/mol), ambos simulando uma caixa com $d = 20$ km. A simulação se desenvolveu por 33.8 Myr para a figura da esquerda e 31.3 Myr para a da direita.	51
4.2	Gráfico da esquerda: resultado para $A = 8,2$ ($Q = 18,4$ kJ/mol). Direita: resultado para $A = 8,5$ ($Q = 19$ kJ/mol). O sistema se desenvolve por 33,3 Myr para a simulação da esquerda e por 35,2 Myr para a da direita.	52
4.3	Gráfico da esquerda: resultado para $A = 9,0$ ($Q = 20,2$ kJ/mol). Direita: resultado para $A = 9,5$ ($Q = 21.3$ kJ/mol). O sistema se desenvolve por 37,4 Myr para a simulação da esquerda e por 34,6 Myr para a da direita.	52
4.4	Gráfico da esquerda: resultado para $A = 7,8$. Direita: $A = 8,0$	53
4.5	Gráfico da esquerda: resultado para $A = 8,2$. Direita: $A = 8,5$	54
4.6	Gráfico da esquerda: resultado para $A = 9,0$. Direita: resultado para $A = 9,5$	54
4.7	Cálculo da topografia dinâmica para $A = 7,5$ ($Q = 16,8$ kJ/mol).	55
4.8	Perfil da convecção para $A = 7,5$. Tempo total da simulação: 24,4 Myr.	55
4.9	Cálculo da topografia dinâmica para $A = 8,0$ ($Q = 17,9$ kJ/mol).	56
4.10	Perfil da convecção para $A = 8,0$. Tempo total da simulação: 24,9 Myr.	56
4.11	Cálculo da topografia dinâmica para $A = 8,5$ ($Q = 19$ kJ/mol).	57
4.12	Perfil da convecção para $A = 8,5$. Tempo total da simulação: 25,1 Myr.	57
4.13	Cálculo da topografia dinâmica para $A = 7,0$ ($Q = 15,7$ kJ/mol).	58
4.14	Perfil da convecção para $A = 7,0$. Tempo total da simulação: 18,2 Myr.	58
4.15	Cálculo da topografia dinâmica para $A = 7,5$ ($Q = 16,8$ kJ/mol).	59
4.16	Perfil da convecção para $A = 7,5$. Tempo total da simulação: 16,7 Myr.	59
4.17	Cálculo da topografia dinâmica para $A = 8,0$ ($Q = 17,9$ kJ/mol).	60

4.18	Perfil da convecção para $A = 8,0$. Tempo total da simulação: 18,5 Myr.	60
4.19	Resultado do modelo para $d = 15$ km, com $A = 9,0$. A topografia alcança valores máximos de ~ 15 metros, compatíveis com algumas estruturas de Europa, mas plumas convectivas não são observadas. Sem o processo convectivo, o transporte de material mais aquecido até camadas superiores não ocorre, e o processo de rejuvenescimento da superfície fica comprometido (pois o diapirismo se torna improvável).	61
5.1	Concepções artísticas de futuras missões destinadas a estudar Europa. Esquerda: Europa Clipper. Créditos: NASA/JPL-Caltech. Direita: Missão JUICE (Jupiter Icy Moon Explorer). Créditos: ESA/AOES.	67
5.2	Concepção artística de criorrobô que poderia ser usado para explorar o fundo do oceano de Europa. Não há evidência de que o manto rochoso apresente fontes hidrotermais como na figura. Créditos: NASA/JPL-Caltech.	69
B.1	Trecho do código em que funções das derivadas são definidas. A definição dos operadores F e G e da função da viscosidade $\eta(T)$ também estão presentes.	75
C.1	Trecho do código em que o método SOR é definido para ser utilizado na resolução do grid de Ψ	77
C.2	Resolução via Runge-Kutta. A função $f(t, T)$ é expressa pelo termo em parênteses na última linha, com os termos laplaciano, advectivo e q	78
D.1	Estudos têm dado suporte à existência de tectonismo em Europa. Essa ilustração conceitual do processo (onde uma placa é forçada sob a outra) mostra como a camada mais externa se move de encontro à uma porção mais aquecida da camada mais profunda. Esse processo semelhante a placas em limite convergente. Uma banda de baixo relevo foi criada na superfície e derretimento local gerou "criolavas". Créditos: NASA/Noah Kroese, I.NK.	79

- D.2 A imagem da esquerda mostra uma porção da crosta de Europa feita de blocos que se separaram e foram transportados para novas posições. Essas são uma das melhores evidências geológicas da existência de água líquida. Essas são as chamadas regiões caóticas, e em destaque está Conamara Chaos. Nessa imagem de cores falsas, as áreas vermelho-amarronzadas representam materiais diferentes de gelo resultante de atividade geológica. Áreas em branco são o resultado da ejeção de material durante a formação da cratera de impacto Pwyll, de 25 quilômetros de diâmetro. Planícies de gelo são mostradas em tom azul para distinguirmos grãos mais grossos (azul escuro) de mais finos (azul claro). Linhas largas e escuras são cristas e fraturas diversas, algumas com mais de 3 mil quilômetros de extensão. Créditos: NASA/JPL/University of Arizona. 80
- D.3 Essa imagem do hemisfério sul de Europa foi obtida pela sonda Galileo durante sua sexta órbita ao redor de Júpiter. A parte esquerda superior apresenta uma região da lua que sofreu um intenso processo de enfraquecimento da superfície. Ao sul, se encontra Agenor Linea, uma misteriosa formação composta de diversas cristas paralelas. Thera e Thrace Macula são as formações escuras e irregulares que se sobressaem ao centro, sendo Thera a menor delas, mais à esquerda. Norte é o topo da imagem e o Sol ilumina a superfície pela direita. A imagem cobre uma área de aproximadamente 675 por 675 quilômetros. Essas imagens foram tiradas em 20 de fevereiro de 1997, às 12 horas, 55 minutos e 34 segundos (Universal Time), quando a sonda estava a 81.707 quilômetros da superfície. Créditos: NASA/JPL. 81

- D.4 Pontos vermelhos e cavidades compõem a superfície cortada por cristas de Europa, nessa figura que combina informações de imagens tiradas por Galileo durante duas órbitas diferentes por Júpiter. Os domos e cavidades presente nesta região do hemisfério norte de Europa possuem aproximadamente 10 quilômetros de diâmetro cada. Os pontos escuros são os chamados lenticulae, termo em latim para sardas. Seus tamanhos similares sugerem que a camada de gelo de Europa deva estar sofrendo com experimentando processos como os caracterizados por convecções de manto, com gelo mais aquecido movendo-se para cima enquanto porções mais frias da superfície experimentam rompimento por derretimento parcial. Essa seria outra evidência da existência de um oceano subsuperficial abaixo compondo sua litosfera. Créditos: NASA/JPL/University of Arizona/University of Colorado. 82
- D.5 Essa vista de Europa mostra uma região que possui textura similar à matriz de terrenos caóticos, que são avistadas em resoluções médias a altas em diversos locais pela superfície. O desenvolvimento deste terreno deve ser o principal processo de rejuvenescimento desta lua. O norte está para o topo e o Sol ilumina a superfície pela esquerda. Convecção da camada interna poderia gerar movimento vertical em áreas com diferentes concentrações de calor (leia-se energia), que atinjam uma superfície não uniforme em sua espessura. Depósito direto de material convectivo na superfície seria possível, ou água líquida a partir de canais extensos (diapirs, por exemplo). A imagem cobre uma área de aproximadamente 175 por 180 quilômetros. A resolução é de 235 metros por elemento de figura. As imagens foram tiradas em 31 de Maio de 1998, à uma distância de 23 mil quilômetros pela sonda Galileo. Créditos: NASA/JPL/University of Arizona. 83

- D.6 Essa imagem de Europa foi obtida a 62 mil quilômetros de altura pela sonda Galileo durante sua primeira aproximação de Europa. A área na imagem é de 252 por 393 quilômetros, e mostram estruturas com tamanho mínimo de 1,6 quilômetros. O Sol ilumina pela direita, revelando diversas cristas cortando a cena, platôs com extensão de 10 quilômetros e manchas escuras que são depressões, apresentando materiais mais escuros. Nenhuma cratera de impacto é observada, indicando que este é um local geologicamente jovem. Algumas cristas apresentam espaços vazios com interrupções abruptas, e a diferença na textura do terreno próximo indicam que as partes faltantes foram provavelmente apagadas por material "criovulcânico". Esse material deve ser basicamente composto por água subsuperficial ou gelo da camada convectiva, transportado por processo diapírico. Créditos: NASA/JPL/University of Arizona. 84
- D.7 A sonda Galileo fez sua maior aproximação de Europa passando a 200 quilômetros da superfície. Essa imagem foi tirada num dos pontos mais próximos à numa altura de 560 quilômetros, e é a imagem de maior resolução obtida por Galileo. A foto foi registrada numa posição de grande obliquidade, de forma que a visão se assemelha à de alguém olhando pela janela de um avião. As estruturas na parte debaixo da imagem estão muito mais próximas do observador do que àquelas do topo. Muitas cristas brilhantes são observadas na figura, com materiais mais escuros nos vales e depressões. No centro da imagem, as cristas e vales regulares dão lugar a uma região mais escura com colinas que se atravessam, que devem ser uma das várias regiões que chamamos de lenticulae. Estruturas circulares escuras e menores são provavelmente crateras de impacto. O norte é para a direita da figura, e o Sol ilumina a superfície também pela direita. Essa imagem tem aproximadamente 1.8 quilômetros de extensão. A resolução é de 6 metros por elemento de figura. Essa foto foi tirada em 16 de dezembro de 1997. Créditos: NASA/JPL. 85

- D.8 A enigmática e fascinante superfície de Europa se apresenta aqui nessa visão reprocessada e colorida, feita a partir de fotos tiradas por Galileo de 1990. Essa é a imagem colorida de Europa que apresenta a maior parte da superfície e com a maior resolução. Variações de cor estão associadas a diferentes estruturas geológicas e localidade. Por exemplo, áreas que aparecem em azul ou branco contém gelo de água relativamente pura, enquanto áreas avermelhadas e amarronzadas incluem componentes diferentes de gelo em altas concentrações. As regiões polares, visíveis na esquerda e direita desta figura, são notavelmente mais azuis que as latitudes equatoriais, que se apresentam mais esbranquiçadas. Essa variação de cor acredita-se ser por conta da diferença do tamanho do grão de gelo presente nestes locais. Imagens tiradas com filtros no infravermelho próximo, verde e violeta foram combinadas para produzir esse mosaico. Intervalos entre as imagens obtidas foram preenchidos com cores simuladas baseadas na coloração da superfície adjacente e com tipos similares de terrenos. Créditos: NASA/JPL-Caltech/SETI Institute. 86
- D.9 Essa concepção artística mostra uma visão de Júpiter a partir de Europa. Sua superfície acidentada, rígida e congelada, porém abrigando um ambiente potencialmente dinâmico e cheio de vida, aparece tingida com regiões avermelhadas sobre as quais estudos têm tentado entender melhor. Ela pode ser vista em primeiro plano enquanto o planeta gigante, o grande provedor da energia vital deste sistema, paira ao fundo. Créditos: NASA/JPL-Caltech. 87

Lista de Tabelas

2.1	Grandezas relevantes ao modelo e seus respectivos valores.	37
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

Europa é o local mais provável de abrigar vida em nosso quintal sideral. Segunda das Galileanas em distância de Júpiter, seu tamanho é aproximado ao da nossa Lua, e tem atraído a atenção de muitos desde as primeiras imagens da missão *Voyager* no final dos anos 70. Sua superfície revela um ambiente inóspito, frio e desértico, com um relevo bem característico que faz sua aparência ser de uma bola de gelo com rachaduras. Porém, com baixo número de crateras e presença de algumas estruturas geológicas, essa lua revelou-se bem mais ativa e interessante que um monótono mundo congelado. Essas estruturas na superfície são provavelmente consequência de um oceano líquido interno, o que acende o debate sobre a existência de vida em Europa.

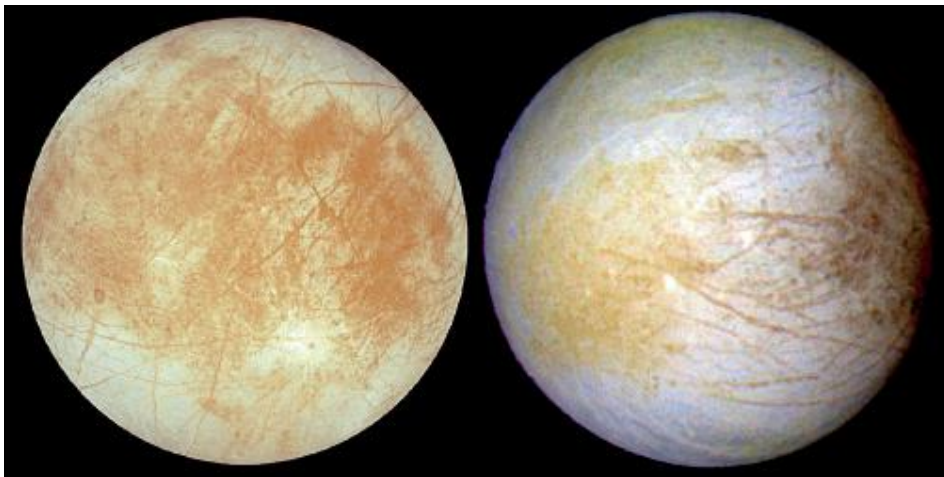


Figura 1.1: Imagem de Europa tirada pela sonda *Galileo*, mostrando regiões claras e escuras. A coloração se dá pela maior presença de minérios e outros elementos como evaporitos de sais dos oceanos (Spencer et al. 2006). Por toda a casca externa de gelo se apresentam rachaduras que são de fato formações de cristas com quilômetros de extensão, consequência de processos geológicos. Esta visão global de Europa revela o quão ativa e dinâmica ela é, o que abre a possibilidade de um oceano líquido de água abaixo de sua superfície. Créditos: Greenberg (2005).

1.1 Órbita e Marés

Os experimentos de gravidade de *Galileo*, sonda enviada à Europa na década de 90, indicam que ela é diferenciada, provavelmente possuindo um núcleo metálico com 700 km de raio, uma manto rochoso de silicato e uma litosfera de 150 km de espessura e com valor de densidade próximo da água ($\rho = 917 \text{ kg/m}^3$). Externamente, a litosfera de Europa se apresenta como uma casca de gelo quebradiça cuja espessura acredita-se ser menor que 2 km, e abaixo dessa casca o estado da água também é incerto. O período orbital de Europa dura 3,5 dias terrestres, e sua órbita é caracterizada por estar em ressonância com Io e Ganimedes. Io é a lua mais próxima de Júpiter, seguido por Europa e Ganimedes (Calisto, a quarta e mais distante das Galileanas, não está em ressonância com as outras).

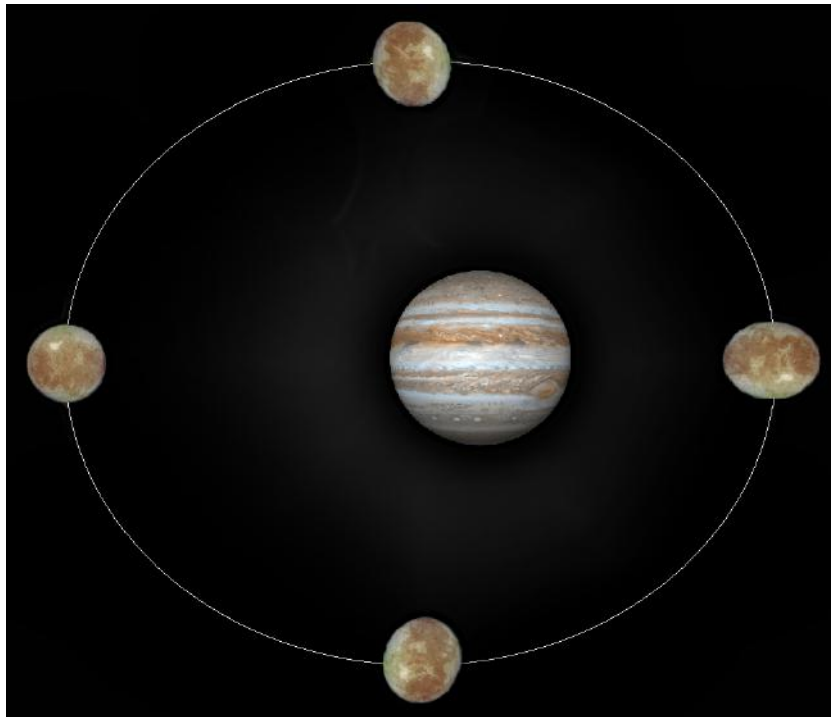


Figura 1.2: Ilustração da Órbita de Europa e a ação do efeito de maré. Quando Europa se encontra em seu pericentro observamos que a deformação do bojo é máxima, e mínima quando no apocentro. Podemos observar que é sempre o mesmo lado de Europa que aponta para Júpiter, devido à rotação síncrona (na verdade há um efeito da rotação não-síncrona que leva o lado da superfície voltado a Júpiter ser diferente com o tempo (Geissler et al. 1998), devido ao desacoplamento entre o núcleo e a superfície que evidencia a presença de uma camada líquida interna). A amplitude da deformação é de 20 a 30 metros, variando ao longo da órbita de 3,5 dias terrestres. As deformações estão exageradas para fins ilustrativos.

Em uma razão 1 : 2 : 4, quando Ganimedes gira ao redor de Júpiter uma vez, Europa gira exatamente duas e Io quatro vezes. Neste sistema, eventualmente Europa e Io se alinham com Júpiter, numa configuração conhecida como *conjunção*. Neste caso Europa está em seu apocentro (ponto de sua órbita mais distante de Júpiter). O mesmo alinhamento ocorre entre Europa e Ganimedes, mas nesse caso Europa está em seu pericentro (seu ponto mais próximo de Júpiter). A interação gravitacional destes corpos sob esta configuração é responsável pela excentricidade da órbita de Europa, que está por trás do efeito de maré. A alteração da distância Júpiter-Europa, de quando esta se encontra no apocentro e no pericentro, gera um bojo de deformação que pode chegar a 30 metros de amplitude. Além disso, Europa apresenta acoplamento de maré com Júpiter, possuindo rotação síncrona (ver Geissler et al. (1998) para detalhes sobre rotação não-síncrona em Europa), portanto sempre a mesma porção de sua superfície irá formar o bojo, que se alonga na direção de Júpiter quando no pericentro e possui um bojo mínimo no apocentro.

1.2 Modelos do Interior

As deformações de maré agem ao longo de um dia em Europa, já que devido à rotação síncrona seu período de rotação é o mesmo que o orbital (3,5 dias terrestres). Tais deformações causam estresse na casca de gelo quebradiça de Europa, rachando-a e movimentando porções da superfície, caracterizando atividade tectônica. No interior, a forma como essas deformações agem e o que elas produzem depende do estado da água. Acredita-se haver (Carr et al. 1998), logo abaixo da casca externa, uma camada de gelo em estado subsólido de altíssima viscosidade, que recebe energia térmica proveniente do atrito gerado por essas deformações. A quantidade de calor que o interior de Europa recebe do efeito de maré é tida como a energia de ativação em modelos convectivos, que visam explicar como essa energia é dissipada. As convecções seriam possíveis graças à *reologia*¹ (relação entre estresse e deformação de um material) dessa camada. Nela, uma célula convectiva levaria milhares de anos para completar um ciclo.

¹A reologia é um importante objeto de estudo, pois a mesma depende, dentre outras coisas, do tamanho dos grãos do gelo, da exata quantidade de energia recebida das marés, e da presença de elementos como sais e material orgânico (ver Pappalardo et al. (1999) e Spencer et al. (2006)) nesse gelo. A presença desses elementos foi obtida a partir da análise espectroscópica da superfície de Europa, servindo como forte evidência da existência de um oceano salino abaixo da superfície.

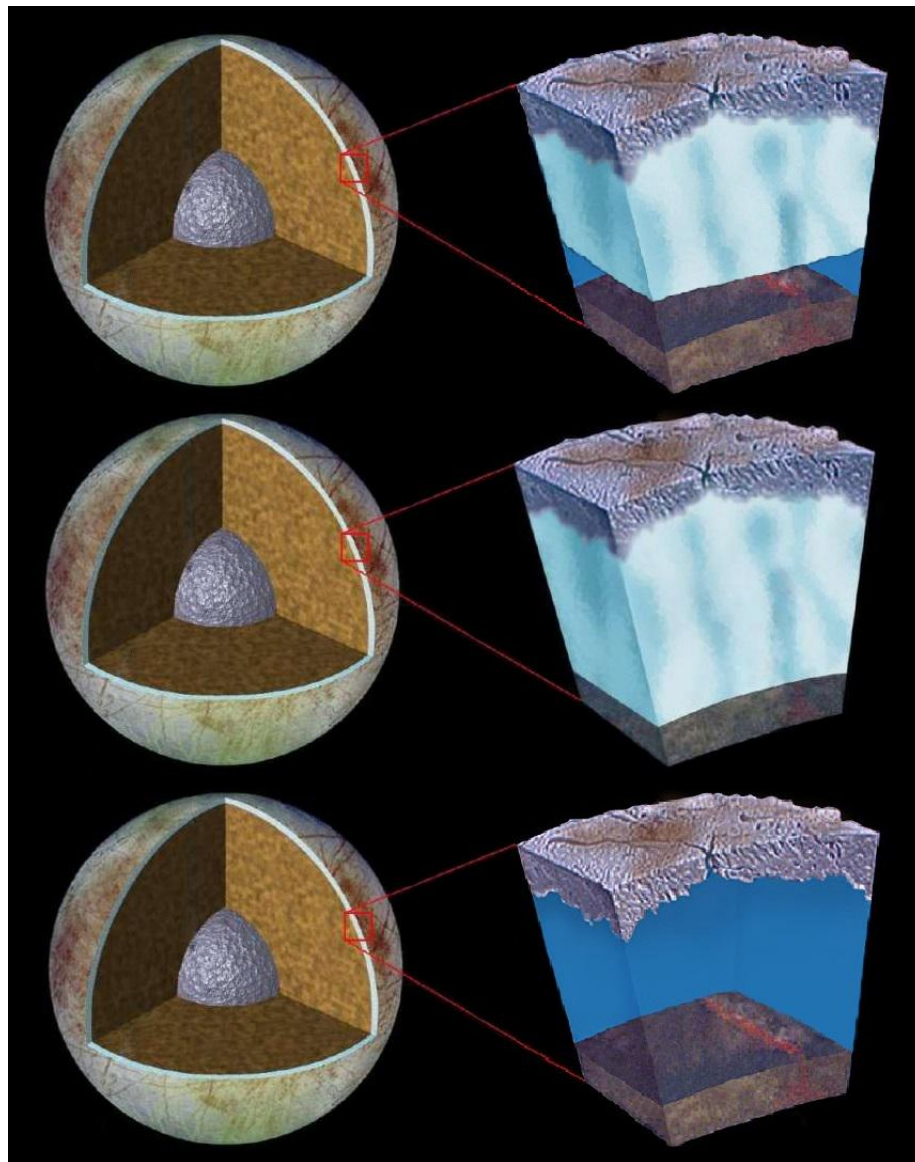


Figura 1.3: Modelos do interior de Europa. Na esquerda está Europa com um núcleo metálico e manto rochoso. À direita estão representadas três possíveis constituições da litosfera. Primeira: casca de gelo, camada convectiva e oceano líquido. Segunda: casca de gelo e camada convectiva, sem presença de água líquida. Esse caso não é provável pois não condiz com os dados magnéticos da sonda Galileo. Terceira: casca de gelo seguida de água puramente líquida, um cenário menos provável pois a energia advinda das marés não seria suficiente para manter toda a litosfera derretida.

As evidências do oceano em Europa vêm de estudos magnéticos (Zimmer et al. (2000), Khurana et al. (1998) e Kivelson et al. (2000)) e geológicos (Pappalardo et al. 1999), através de análises das estruturas como evidências de um processo térmico interno. Para construção de modelos deste processo, se faz importante conhecer a reologia do gelo para melhorar o entendimento de como a viscosidade varia com a temperatura, e

da espessura da camada pois seu tamanho tamanho é o que viabiliza a existência de água líquida: se ela for muito grande, tomando toda a extensão da litosfera, não há água líquida (segunda ilustração da Fig.1.3). Por outro lado, se ela possuir algumas dezenas de quilômetros de espessura (primeira ilustração da Fig.1.3), a possibilidade de um oceano líquido logo abaixo dela é real.

1.3 Morfologia Externa

O processo convectivo não é suficiente para explicar as estruturas que vemos na superfície. O mesmo estresse que fornece energia para a convecção na camada viscoelástica age no interior criando rachaduras localizadas e falhas que se estenderiam até a superfície, gerando um cenário propício para um processo chamado *diapirismo* (ver próxima figura).

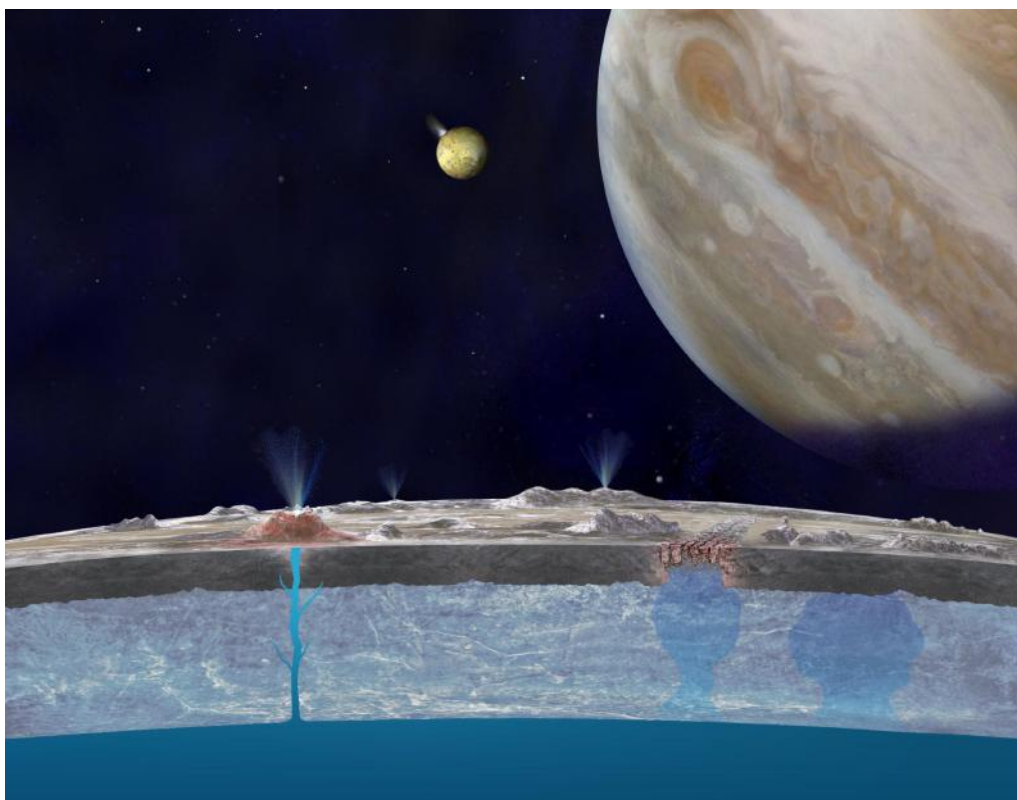


Figura 1.4: Ilustração de diapirismo na camada convectiva, manifestado na forma de canais (esquerda) e cogumelos (direita) que levam material quente à superfície, assim como ocorre no manto terrestre na formação de vulcões. Apesar da imagem ilustrar criovulcões em atividade, a existência dessas estruturas em Europa é incerta. Créditos: Greenberg (2005).

O diapirismo desempenha o papel de levar material aquecido de camadas profundas até outras mais externas. Esse material móvel, conhecido como material diapírico, chega até a superfície e altera o relevo de Europa. O processo é análogo ao diapirismo que conduz magma até a superfície terrestre, iniciado por plumas ascendentes do manto ao atingirem camadas superiores.

Imagens de *Voyager* e *Galileo* mostram indícios de uma provável *atividade criovulcânica* que ainda não foi confirmada, a partir de prováveis ejeções de material mais jovem sobre terreno antigo. Porém, nenhum gêiser foi observado após tentativas semelhantes às que encontraram erupções em Enceladus. Caso haja confirmação, será um forte indicativo da presença de água líquida. Algumas das estruturas encontradas (e bem estudadas) em Europa são (Pappalardo et al. 1999): crateras de impacto, *lenticulae* (porções escuras de mesmo tamanho espalhadas pela superfície), bandas de separação, regiões caóticas e cristas. *Crateras de impacto*, como ressaltado, são raras e esparsas, sugerindo uma superfície que se renova como num ambiente geologicamente ativo.

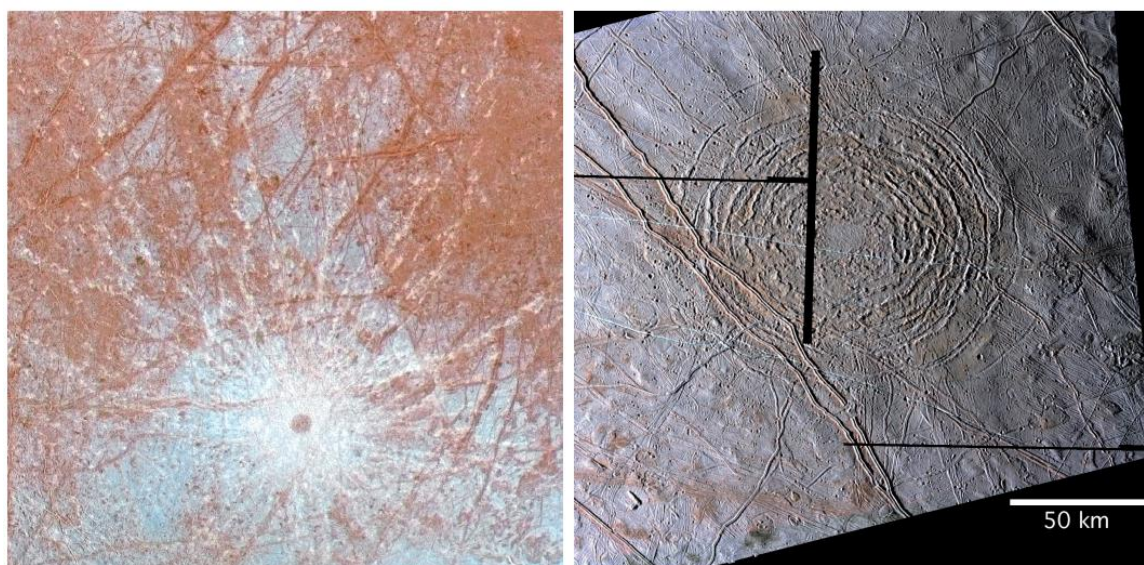


Figura 1.5: Exemplo de crateras em Europa. À esquerda está a cratera Pwyll, com longos rastros de ejeção a partir de seu centro de impacto. À direita Tyre Macula e seus anéis concêntricos causados pelo impacto. A coloração escura do centro de Pwyll e ao redor de Tyre indicam exposição de material novo sobre a superfície, vindo do interior provavelmente pela violência do impacto. Imagens feitas com composição de cores. Créditos: Greenberg (2005).

Lenticulae, também chamado terreno salpicado ou sarapintado, é um termo que se refere a ocorrências circulares e elípticas da superfície de Europa. É composto por domos e cavidades (ver Fig.1.7 e Fig.D.4), que provavelmente possuem o mesmo processo de formação por serem similares em tamanho e estarem uniformemente distribuídos (apresentam diâmetros de 5 a 15 quilômetros e alturas de até 100 metros). Acredita-se que esse processo seja o diapirismo, que ao levar materiais para camadas próximas à superfície ocasiona soerguimento da casca de gelo por conta das intrusões, gerando os domos. Se este material estiver suficientemente quente pode também causar derretimento local da superfície que se desgasta e cede, dando origem às cavidades. Isso é ilustrado na Figura 1.6, onde domos são resultado do que ocorre na parte esquerda e cavidades na parte direita.



Figura 1.6: À esquerda, um dos maiores domos em Europa, com aproximadamente 40 quilômetros de extensão. Esse em particular mostra rachaduras no terreno próximo assim como no próprio domo. Sua formação ocorre como resposta ao soerguimento da superfície. À direita exemplos de cavidades, consequência do derretimento parcial da superfície. Nessa imagem a formação central aparenta ter sido dividida por deslocamento do solo, comum em Europa devido à tectônica de placas. Créditos: Greenberg (2005).

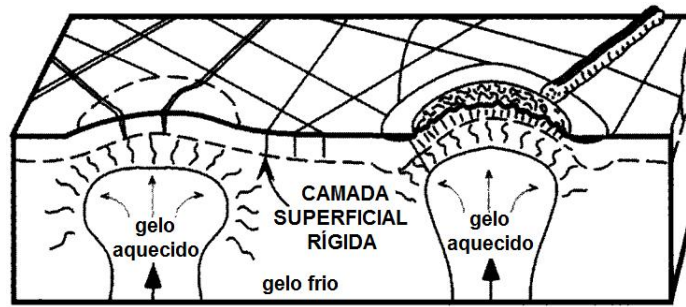


Figura 1.7: Ilustração de diapirosmo. Material diapírico ascendente, ao atingir camadas superiores, deforma a casca de gelo e gera os domos (parte esquerda). Se esse material está muito quente, gera as cavidades pois acaba por derreter porções do gelo, desgastando-o e fazendo com que parte dele ceda (parte direita). Créditos: Head et al. (1999).

Bandas de separação são um processo litosférico onde porções da casca de gelo se separam e geram depressões ou bacias (*pull-apart basins*), resultado do processo entre placas tectônicas chamado de *falha transcorrente* (ou transformante²). Na Terra, um famoso encontro de placas que está sujeito a esse tipo de movimento é a falha de San Andreas na Califórnia, onde a placa do Pacífico (deslocando-se para o norte) colide obliquamente com a placa Norte americana (que se movimenta para o Sul), e deslizam entre si somente na horizontal.

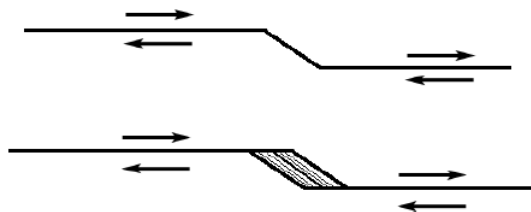


Figura 1.8: Exemplo de como falhas transcorrentes geram bandas de separação. Isso se dá quando o traçado da transcorrente cria depressões ou bacias, com ranhuras paralelas ao longo da abertura como as observadas na figura anterior. Créditos: Greenberg (2005).

²As falhas transcorrentes possuem, na Terra, extensão da ordem de dezenas a centenas de quilômetros, e largura da ordem dezenas a centenas de metros. Algumas delas cortam a litosfera e atingem o manto, correspondendo então a limites de placas litosféricas. Quando essas estruturas estão associadas a cadeias existentes ao longo dos oceanos (cadeias meso-oceânicas), são denominadas *falhas transformantes*. Falhas transcorrentes são também chamadas de *limites conservativos* pois a crosta não é consumida e nem criada nesse processo.

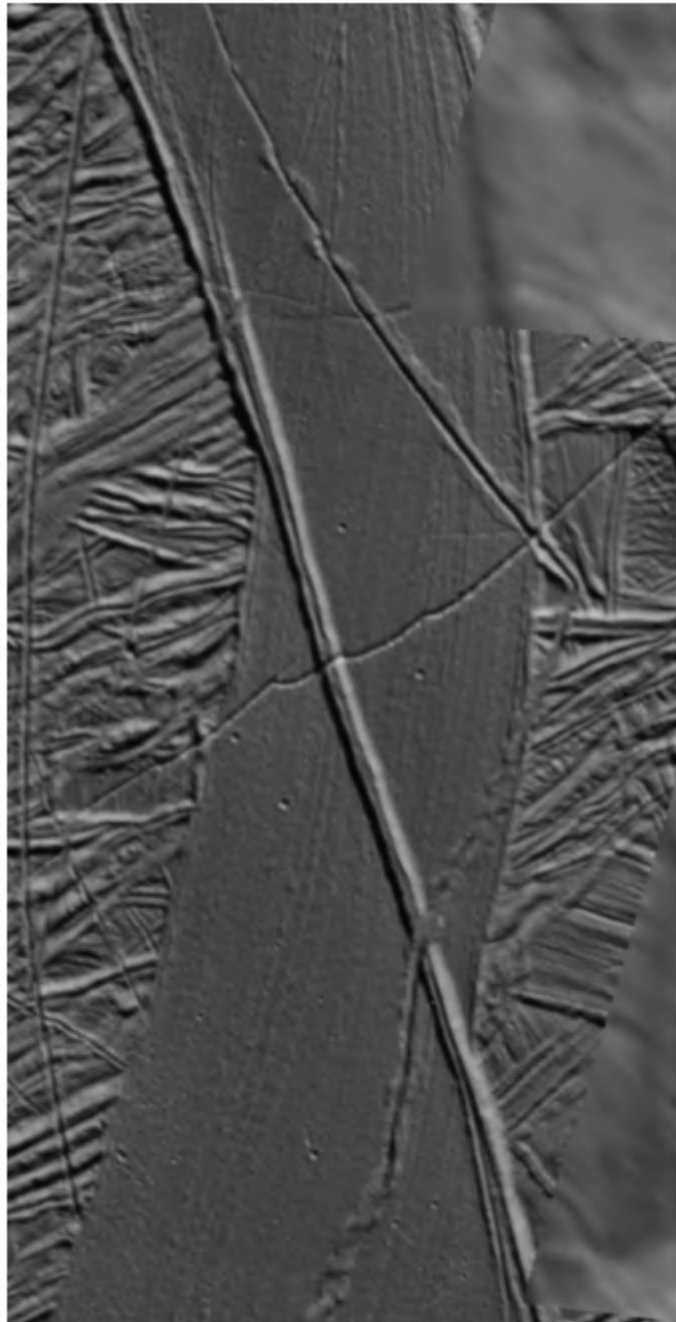


Figura 1.9: Zoom de uma das bandas de separação, gerada pelo tectonismo de forma semelhante às falhas transcorrentes na Terra, quando falhas são formadas por deslocamento horizontal das placas, sem movimentos verticais. Créditos: Greenberg (2005).

Regiões caóticas se caracterizam por grandes porções escuras e deformadas da superfície, variando de alguns a centenas de quilômetros de extensão. Aparentam ser uma formação jovem, provavelmente criada pelo derretimento generalizado da superfície aliado à deformação da crosta pelo bojo de marés e movimentos análogos à tectônica de placas.



Figura 1.10: Imagem obtida por Galileo de uma região caótica conhecida como Conamara Chaos, o terreno que aparece acidentado nesta imagem e que possui aproximadamente 80 quilômetros de extensão. Essas regiões são resultado da tectônica de placas e do derretimento por processo interno de aquecimento, provavelmente grande quantidade de material diapírico com temperatura elevada. Créditos: Greenberg (2005).

Cristas em Europa podem se estender por várias centenas de quilômetros, com largura e altura de alguns quilômetros. Elas sempre aparecem em pares e cobrindo formações mais antigas, e são umas das estruturas mais encontradas em Europa. Uma explicação para como são formadas se dá puramente pelo tectonismo, onde duas placas comprimem material preexistente em fraturas da casca de gelo, fazendo com que ele suba e se deposite em ambos os lados da falha ao longo de sua extensão (Fig.1.11).



Figura 1.11: Apesar de presente na maioria nas outras imagens, eis uma ilustrativa da estrutura das cristas duplas. A área mostrada possui aproximadamente 12 quilômetros de extensão. Créditos: Greenberg (2005).

Outros estudos entendem que elas se formam como consequência de um processo de diapirismo análogo ao proposto para o *lenticulae*, mas com algumas diferenças: o mesmo material diapírico, ao alcançar camadas mais externas da litosfera, encontra falhas na casca de gelo e acaba por elevar suas bases ao invés de formar intrusões, erguendo paredes duplas ao longo da falha e formando o padrão duplo das cristas. Isso ocorre nas cadeias oceânicas da Terra nos chamados *limites divergentes* (ver próxima figura), que formam-se quando placas sujeitas a *falhas normais*³ afastam-se devido à convecção do manto.

³Falhas normais, diferentemente das falhas transcorrentes, possuem o deslocamento principal na vertical, onde um lado da falha desce em relação ao outro.

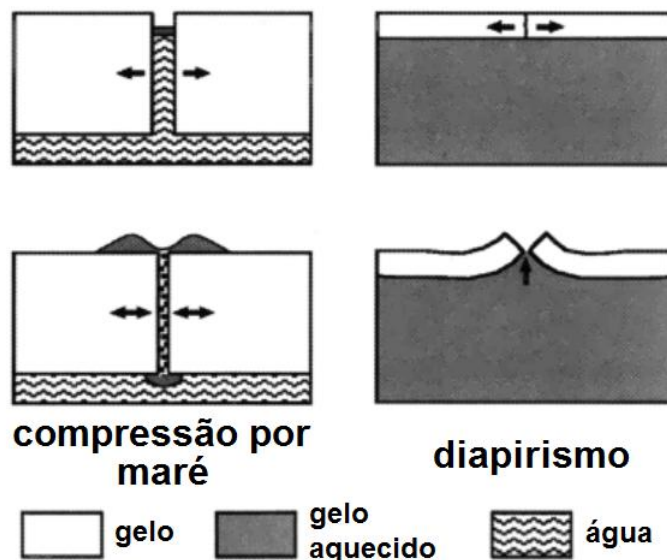


Figura 1.12: Explicações de formação das cristas. A primeira, por compressão de material entre placas (compressão por marés), não é aceita amplamente por não exigir existência de uma camada convectiva, e portanto de não é compatível com o modelo aqui apresentado. A segunda explicação, que atribui ao diapirismo a causa do soergimento da crosta, é a mais difundida e tem ganhado destaque com o avanço dos estudos sobre processos convectivos no interior de Europa. Créditos: Pappalardo et al. (1999).

Muitos processos aqui apresentados são análogos aos eventos que ocorrem na litosfera terrestre (ver Fig. 1.13). As falhas transformantes (presentes na costa oceânica) em limites conservativos caracterizam desvios ao longo da falha original, e eventualmente formam bacias podendo explicar o processo pelo qual surgem as bandas de separação em Europa. O soergimento de placas em limites divergentes descreve bem a formação de cristas em Europa segundo o modelo de diapirismo. Outro tipo de limite de placas encontrado na Terra e que pode estar associado a uma estrutura da superfície de Europa é o *limite convergente*.

Limite convergente descreve o cenário em que duas placas colidem frontalmente, com consequências que dependem da diferença de densidade entre elas. Geralmente, a placa de maior densidade mergulha sob a outra, entra em fusão parcial em profundidade e gera grande volume de magma e lava que ascende à superfície. Quando possuem densidades iguais, um cenário mais provável para Europa (toda a casca externa seria formada por gelo de mesma natureza), o processo envolve intensas deformações compressivas, estando assim possivelmente associado ao terreno que caracteriza as regiões caóticas.

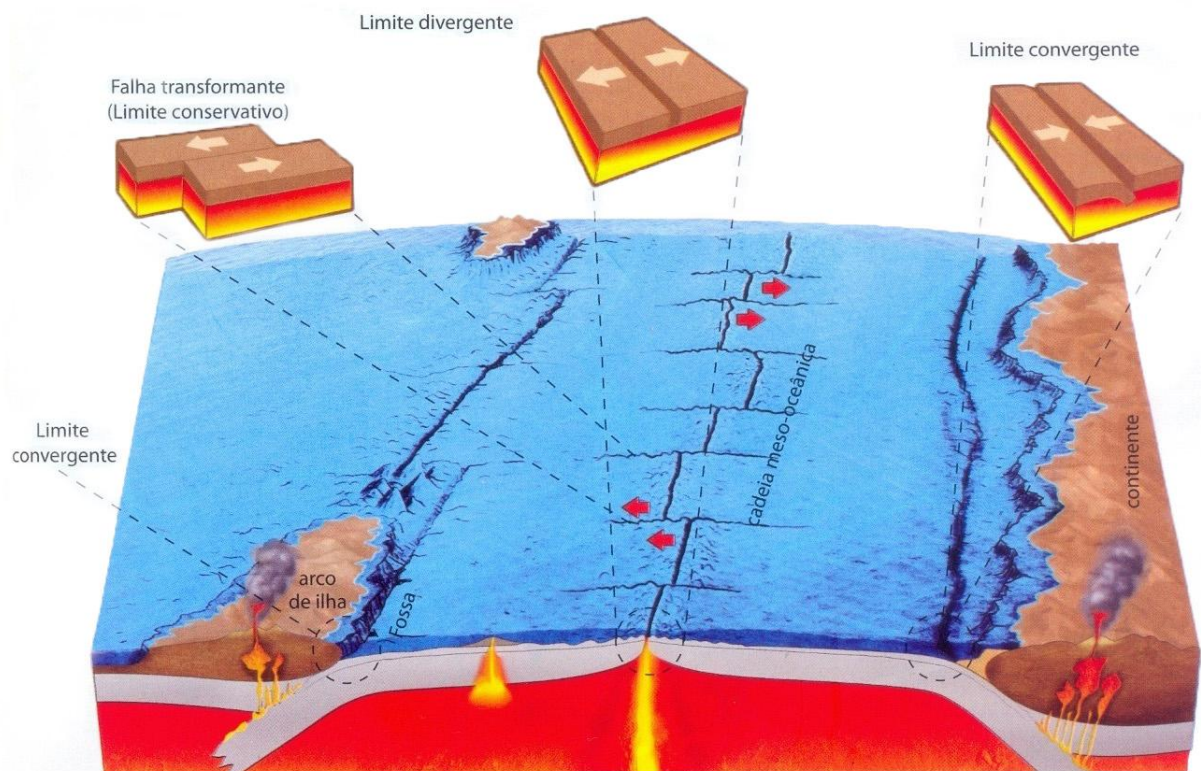


Figura 1.13: Ilustração da dinâmica das placas na Terra e os principais tipos de limites e estruturas associados, que servem como base para uma analogia à dinâmica do relevo de Europa. Limites conservativos devem estar associados à geração das bandas de separação. O cenário que envolve o limite divergente descreve bem a formação das cristas duplas em Europa. O processo de choque de placas em limites convergentes é um candidato à explicação da formação dos terrenos caóticos. Pontos com magma em ascensão são mostrados, com plumas (abaixo da placa) e diapirs (intrusões na crosta). Créditos: Teixeira et al. (2009).

É tentador associar a tectônica de placas da Terra com a provável dinâmica de Europa quando se vê a lua como um todo. Não temos imagens suficientes e nem em tempos significativamente distantes (as imagens da *Voyager* são aproximadamente 10 anos mais antigas que as da sonda *Galileo*) para verificar um análogo da deriva continental, teoria que afirma os continentes terem um dia sido uma única massa de terra (Pangeia). Além disso, é provável que pelo tamanho de Europa e a taxa de deformações a que está sujeita (a cada 3,5 dias terrestres, seu período orbital), as alterações da superfície devido à tectônica ocorra numa escala de tempo bem menor que na Terra, sendo então um processo vital para entendimento das estruturas da superfície.

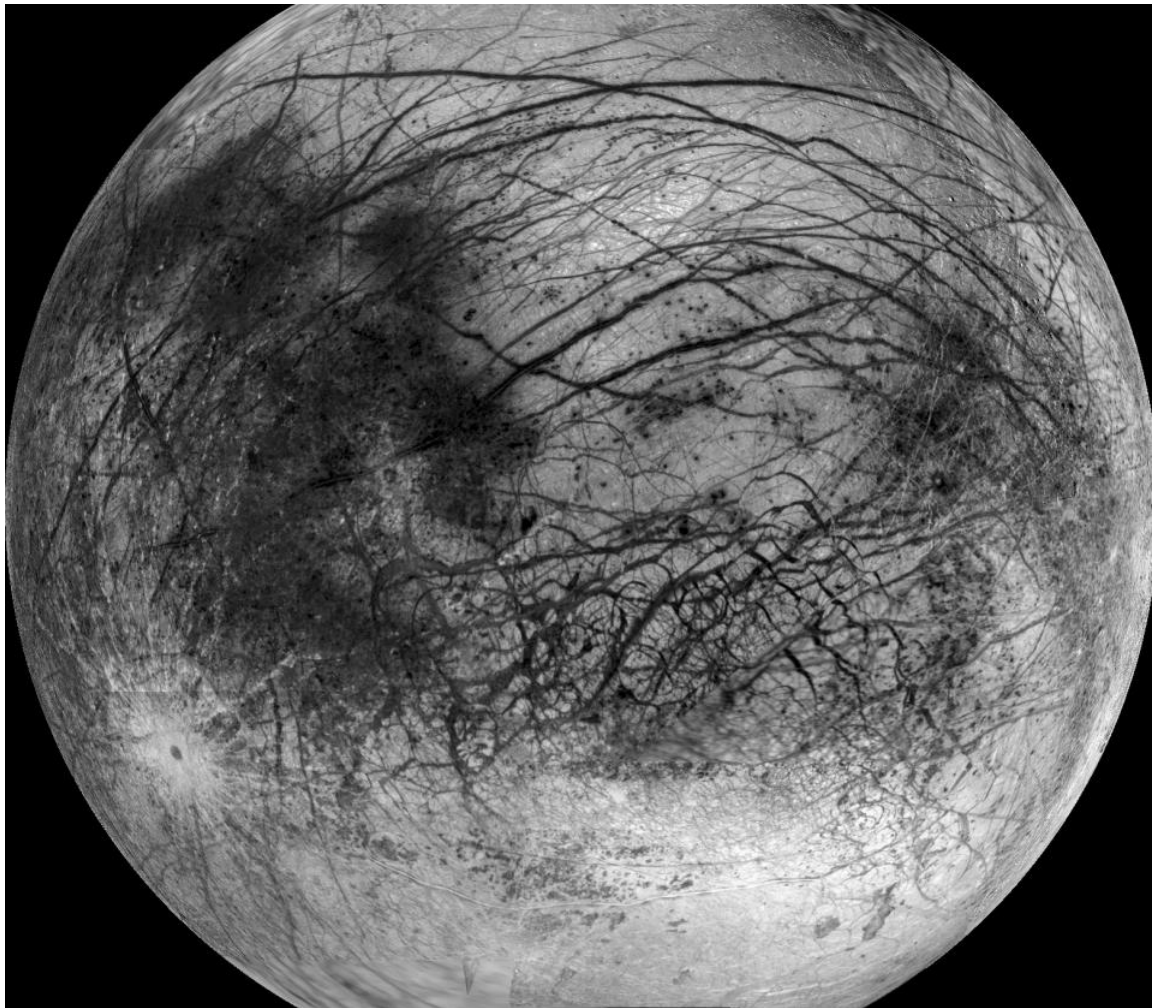


Figura 1.14: Mosaico em preto e branco de Europa. Créditos: Greenberg (2005).

Estudar essas estruturas ajuda a entender a composição geral da litosfera e o processo que as produz. Se as convecções em Europa podem ocorrer numa camada cuja espessura e reologia não estão bem determinadas, e essa mesma camada serve como restrição para existência de um oceano líquido, a verificação de nosso modelo deve partir dessas estruturas que conhecemos. Para verificar se nosso modelo está compatível com a realidade, as deformações da superfície (resposta ao estresse interno causado pelas convecções) podem ser calculadas via equações de equilíbrio hidrostático. Sendo a magnitude desse estresse um dos resultados de nosso modelo, podemos checar diretamente ao calcular a altura das estruturas que ele gera. Sabemos que, de modo geral, as estruturas da superfície de Europa não ultrapassam 300 km de altura e que suas extensões variam bastante. Com esses números podemos investigar se nosso modelo (e os parâmetros iniciais) estão compatíveis com a morfologia e dimensões do relevo que conhecemos.

Capítulo 2

O Modelo

Nós construímos um modelo que descreve o processo convectivo no interior de Europa, que provoca um estresse interno e conseqüentemente altera a casca de gelo, e o relacionamos com as estruturas encontradas na superfície. Modelos semelhantes podem ser encontrados na literatura, onde a principal diferença se dá na reologia empregada e no tipo de linguagem e método numérico usado para resolver o problema. Muitos utilizam reologia Maxwelliana (ou viscoelástica) e outros tipos de deformação não Newtoniana para descrever a natureza do gelo. Porém, por esperarmos que estresse e taxas de tensão sejam muito pequenos nos satélites de gelo, é mais provável que o mecanismo de deformação mais relevante seja difusivo. Isso pois as escala de tempo das convecções em Europa são enormes ($\sim 10^6 - 10^7$ anos), favorecendo a dominância de processos difusivos que resultam num comportamento Newtoniano. Além disso, a reologia Newtoniana tem a vantagem, de um ponto de vista numérico, de ser simples, possuindo relação direta entre viscosidade e temperatura. Sua desvantagem é depender de parâmetros como o tamanho dos grãos de gelo, cujo valor ainda é incerto.

2.1 Viscosidade

A dependência da viscosidade com a temperatura (e, em menor grau, com a pressão) em fluidos Newtonianos é dada por

$$\eta(T, p) = C \exp\left(\frac{Q + pV}{RT}\right), \quad (2.1)$$

onde C é uma constante ligada ao tamanho dos grãos do gelo que constituem a camada convectiva e a um fator de proporcionalidade, Q a energia de ativação em J/mol, V o volume de ativação, $R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ é a constante universal dos gases e T é a temperatura absoluta. Essa equação é análoga à lei de Arrhenius, que é uma boa aproximação para os casos de viscosidade Newtoniana. Uma possível lei para a viscosidade

é então escrita da seguinte forma:

$$\eta(T) = \eta_0 \exp \left\{ A \left(\frac{T_b}{T} - 1 \right) \right\}. \quad (2.2)$$

Essa é a relação entre viscosidade (η) e temperatura (T) para o gelo sob condições Newtonianas (Han & Showman 2010) usada nesse e em outros modelos. Ela fornece uma boa descrição dos dados experimentais e é numericamente equivalente à equação anterior. T_b é a temperatura de derretimento encontrada na base da camada convectiva, onde se espera estar em contato com água na forma líquida; η_0 é a viscosidade também na base ($\sim 10^{13}$ Pa s) para um cenário com grãos de ~ 0.1 mm a ~ 0.5 mm de diâmetro, e A é a constante relacionada à energia de ativação do problema.

O parâmetro A fornece um peso (importância) ao gradiente de temperatura. Seu valor é expresso por (Deschamps & Sotin 2001)

$$A = \frac{Q}{RT_b}. \quad (2.3)$$

Os valores usuais da energia de ativação Q são de $16 - 22$ kJ mol⁻¹, fornecendo valores de A entre 7 e 10. Eles implicam em contrastes de viscosidade da ordem de $10^5 - 10^8$ para o modelo, entre a base ($T_b = 270$ K) e o topo ($T_t = 100$ K) do grid.

2.2 Equações de Navier-Stokes

Muitos processos em geodinâmica podem ser descritos por modelos matemáticos, isto é, um conjunto de equações diferenciais parciais aliadas a condições iniciais e de contorno, definidas num domínio específico. Em processos convectivos, como o explorado neste estudo, as equações que governam o problema são as chamadas equações de Navier-Stokes¹. Elas se baseiam em leis de conservação, e aqui serão aplicadas sob condições específicas para o fluido da camada convectiva de Europa, cujas principais características são altíssima viscosidade, densidade quase constante ao longo da camada e aproximadamente incompressível.

¹Originalmente, as *equações de Navier-Stokes* são apenas as de conservação de momento, porém é comum encontrarmos na literatura o termo se referindo ao conjunto formado pelas equações de continuidade, momento e energia.

2.2.1 Equação de Continuidade

Considere um fluido de densidade ρ que é função da posição x_j ($j = 1, 2, 3$), e u_j denota as componentes de velocidade. Segundo a lei de conservação de massa, a taxa de variação de um fluido de volume fixo V é dada pela taxa com que o mesmo flui sobre um contorno S deste volume. Matematicamente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau = - \int_S \rho u_j dS_j, \quad (2.4)$$

onde τ é um elemento de volume. Pelo teorema da divergência de Gauss podemos levar a equação anterior à forma a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) d\tau. \quad (2.5)$$

Essa forma é análoga à forma Euleriana (representação do movimento do fluido de forma macroscópica para todo tempo t):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j), \text{ ou} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} &= - \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assumindo a condição de incompressibilidade, onde a densidade de um fluido não varia com o tempo, e tendo ρ o mesmo valor para todo x_j , temos para o lado esquerdo da última equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0. \quad (2.7)$$

Sendo assim, a equação de continuidade sob a condição de fluido incompressível se reduz a

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.8)$$

ou, em notação vetorial,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.9)$$

2.2.2 Equação de Momento

Partindo da segunda lei de Newton, temos que a taxa de variação do momento contido num volume V de um fluido é igual à integral de volume das forças externas agindo sob os elementos do fluido somada à integral de superfície de estresses normais e de cisalhamento

agindo sob a superfície S do volume V , subtraído da taxa pela qual o momento flui para fora do volume pela superfície S . Matematicamente essa lei é expressa por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i d\tau = \int_V \rho F_i d\tau + \int_S \sigma_{ij} dS_j - \int_S \rho u_i u_j dS_j, \quad (2.10)$$

onde F_i é o i -ésimo componente da força externa por unidade de massa ($F_i = g_i$ se representar a gravidade); σ_{ij} é o tensor de estresse com componentes de cisalhamento ($i \neq j$) e de pressão ($i = j$), o mesmo valendo para o último termo contendo u_i e u_j . Notamos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j). \quad (2.11)$$

Substituindo a Eq. (2.11) em (2.10), obtemos

$$\int_V \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) \right) d\tau + \int_S \rho u_i u_j dS_j = \int_V \rho F_i d\tau + \int_S \sigma_{ij} dS_j. \quad (2.12)$$

Integrando por partes o segundo termo da primeira integral volumétrica, temos

$$- \int_V u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) d\tau + \int_S \rho u_i u_j dS_j = \int_V \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\tau. \quad (2.13)$$

Aplicar o teorema de Gauss ao último termo da Eq. (2.12) nos fornece

$$\int_S \sigma_{ij} dS_j = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau. \quad (2.14)$$

Substituindo a Eq. (2.14) e (2.13) em (2.12), obtemos a equação de movimento que é válida para um volume arbitrário V (e definindo $F_i = g_i$ como a força externa atuante no problema):

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.15)$$

O tensor de estresse σ_{ij} aqui representa a tensão total sobre o fluido, que leva em consideração o estado em repouso (caso chamado de estresse hidrostático). É comum então definir σ'_{ij} , conhecido como *deviatoric stress*, ou, em português, estresse deviatórico (Gerya 2010), como sendo os estresses não relacionados ao caso hidrostático:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - P \delta_{ij}, \quad (2.16)$$

Onde δ_{ij} é a delta de Kronecker (0 para $i \neq j$, 1 para $i = j$). Em geociências, normalmente a pressão corresponde à condição hidrostática, e é computada como função da profundidade z e do perfil de densidade $\rho(z)$,

$$P(z) = P_0 + g \int_0^z \rho(z) dz. \quad (2.17)$$

Na dinâmica do escoamento de fluidos altamente viscosos, como o material do manto da Terra ou a provável camada convectiva de Europa, a magnitude típica da aceleração destes fluidos é da ordem de $\frac{\partial u_i}{\partial t} \approx \frac{\Delta u}{\Delta t} \approx 0$, fazendo com que a primeira derivada do lado esquerdo em (2.15) possa ser desprezada. Além disso, tomando a condição de fluido incompressível (Eq. (2.8)) para a segunda derivada do mesmo membro, e usando a definição da Eq. (2.16), podemos reescrever a equação de movimento (2.15) em sua forma final para o modelo deste trabalho:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i = 0. \quad (2.18)$$

A equação (2.18) é conhecida como Equação de Stokes.

2.2.3 Equação de Energia

A lei de conservação de Energia, que conta perdas e ganhos de energia que ocorrem num volume V do fluido, por unidade de tempo, é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E d\tau = \int_S u_i \sigma_{ij} dS_j + \int_V \rho u_i F_i d\tau - \int_S k \frac{\partial T}{\partial x_j} dS_j - \int_S \rho E u_j dS_j + \int_V \rho H d\tau. \quad (2.19)$$

O primeiro termo no lado direito é a taxa na qual o trabalho é realizado na borda; o segundo representa a taxa que o trabalho é realizado por forças externas em cada elemento do fluido dentro do volume V ; o terceiro é a taxa na qual energia em forma de calor é conduzida através de S ; o quarto termo é a taxa em que energia é transportada através de S pelo movimento de massa estabelecido (k é o coeficiente de condução de calor); e o quinto termo é a taxa de aquecimento proveniente de fontes internas (de extrema relevância para o modelo). O primeiro e terceiro termos da equação anterior podem ser representadas da seguinte maneira:

$$\int_S u_i \sigma_{ij} dS_j = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_S \rho u_i^2 u_j dS_j - \int_V \rho u_i F_i d\tau + \int_V \phi d\tau, \quad (2.20)$$

onde $\phi = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij}$ é a função de dissipação viscosa, ($\phi = 0$ via Eq. (2.8)), e

$$\int_S k \frac{\partial T}{\partial x_j} dS_j = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) d\tau. \quad (2.21)$$

A energia por unidade de massa E do fluido pode ser escrita como

$$E = \frac{1}{2} u_i^2 + c_V T, \quad (2.22)$$

onde c_V é o calor específico à volume constante, e T é a temperatura. Isso permite que o quarto termo da Eq. (2.19) seja reescrito como

$$-\int_S \rho E u_j dS_j = -\int_S \left[\frac{1}{2} u_i^2 + c_V T \right] u_j dS_j = -\frac{1}{2} \int_S \rho u_i^2 u_j dS_j - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j c_V T) d\tau. \quad (2.23)$$

Substituindo as Eqs. (2.20) - (2.23) na Eq. (2.19) (com $\phi = 0$):

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho c_V T) d\tau = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) d\tau - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_V T u_j) d\tau + \int_V \rho H d\tau. \quad (2.24)$$

Como essa equação é válida para qualquer volume arbitrário V , devemos obter

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_V T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_V T u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho H. \quad (2.25)$$

Aplicando a derivada temporal de Lagrange D/Dt separadamente para T e ρ no lado esquerdo, ficamos com

$$\rho c_V \frac{DT}{Dt} + c_V T \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho H. \quad (2.26)$$

A primeira lei da termodinâmica é expressa por

$$dU = \delta Q + \delta W, \quad (2.27)$$

onde

$$\delta Q = c_V dT + \frac{\alpha}{\beta} dV = c_p dT - \alpha \frac{T}{\rho} dP, \quad (2.28)$$

$$\delta W = -P dV,$$

e α e β representando a expansividade térmica e compressibilidade térmica, respectivamente. Quando as diferenciais destas equações são tomadas como derivadas de Lagrange (Ricard 2007), e utilizando as equações (2.28), a Eq.(2.27) pode ser reescrita como

$$\frac{DU}{Dt} = c_V \frac{DT}{Dt} + \left(\frac{\alpha}{\beta} T - P \right) \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{\rho}, \quad (2.29)$$

ou ainda,

$$\frac{DU}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{T}{\rho} \frac{DP}{Dt} - P \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{\rho}, \quad (2.30)$$

com a substituição da variação do volume a partir da conservação de massa,

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{(1/\rho)}{Dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{\rho}. \quad (2.31)$$

Utilizando a condição de incompressibilidade ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) e igualando as equações anteriores, ficamos com a seguinte igualdade:

$$\rho c_V \frac{DT}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{DP}{Dt}. \quad (2.32)$$

Substituindo a equação (2.32) na (2.26), e sendo a densidade constante ao longo do tempo ($D\rho/Dt = 0$), ficamos com a seguinte expressão:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho H, \quad (2.33)$$

que, abrindo a derivada de Lagrange e reescrevendo em termos do operador ∇ , equivale a

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho H, \quad (2.34)$$

assumindo c_p , c_V e γ constantes.

2.3 Aplicação ao Modelo

As equações encontradas na seção anterior (Eqs. (2.18) e (2.34)) são resolvidas iterativamente no modelo criado. Para isso, elas são trabalhadas algebricamente de forma a se tornarem adimensionais, um processo comum em problemas numéricos. Todos os passos que levam às equações aqui apresentadas estão presentes de forma detalhada no Apêndice A. O desenvolvimento parte das equações (2.18) e (2.34), e após as manipulações lá apresentadas (incluindo a aproximação de Boussinesq), a forma adimensional das equações de Navier-Stokes para o momento, energia e continuidade, respectivamente, são da seguinte forma:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} - \nabla p - (Ra\theta)\mathbf{z} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \nabla^2 \theta + q', \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.37)$$

Podemos observar que a última equação é idêntica à Eq. (2.9). Assim como na Eq. (2.18), σ'_{xz} é o tensor de estresse, aqui já em sua forma adimensional (o mesmo vale para p , representando a pressão). Ra o número de Rayleigh, θ a temperatura adimensional, q' é a taxa de aquecimento do interior (a linha indica que, diferentemente de q , q' é adimensional) e \mathbf{z} é o vetor unitário e \mathbf{u} a velocidade. O número de Rayleigh é o parâmetro adimensional do sistema, definido por (todas as grandezas que o definem, presentes na Tabela 2.1, possuem dimensão que portanto se cancelam):

$$Ra = \frac{\rho_0 g \alpha \Delta T d^3}{\kappa \eta_0}, \quad (2.38)$$

caracterizando a tendência à flutuabilidade (empuxo) ou difusão em um fluido. Se $Ra \ll 1$ em um sistema, a transferência de calor se dá basicamente via condução, e se $Ra \gg 1$, via convecção.

Grandeza Física	Símbolo	Valores
Gravidade	g	1.3 m s^{-2}
Densidade	ρ_0	917 kg m^{-3}
Expansividade térmica	α	$1.65 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
Difusividade térmica	κ	$1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Calor específico	c_p	$2000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Temperatura topo	T_t	100 K
Temperatura base	T_b	270 K
Viscosidade na base	η_0	10^{13} Pa s
Frequência da deformação de maré	ω	3.3^{-6} s^{-1}
Rigidez do gelo	μ	$4 \times 10^9 \text{ Pa}$
Amplitude da tensão de maré	ϵ_0	2.1×10^{-5}
Espessura da camada convectiva	d	20 – 35 km

Tabela 2.1: Grandezas relevantes ao modelo e seus respectivos valores.

Na Eq. (2.36), o parâmetro q representa a dissipação volumétrica da energia mecânica das marés (em W/m^3), para um corpo de Maxwell incompressível (Mitri & Showman 2005). Ele equivale a ρH presente na Eq. (2.34), e seu valor é dado por

$$q = \frac{\epsilon_0^2 \omega^2 \eta}{2 \left[1 + \frac{\omega^2 \eta^2}{\mu^2} \right]}. \quad (2.39)$$

As deformações de maré podem alterar o relevo de duas formas: direta e indiretamente. A forma direta advém do estresse externo, possivelmente fraturando a superfície e movendo porções do gelo que flutuam como placas. A indireta viria a partir das convecções que tratamos nesse estudo, que produz estresse na superfície a partir das plumas convectivas ascendentes, além de ser responsável por levar material de camadas profundas até próximo da superfície. Sendo assim, a Eq.(2.39) é a ponte entre as deformações de maré e a teoria de convecções em Europa, pois q é a energia de ativação de todo o processo convectivo.

Sendo descrita como uma energia que provém de processos mecânicos dissipativos, a Eq. (2.39) depende de fatores dissipativos como a viscosidade da camada (η)

e a rigidez do gelo (μ). Depende também do período orbital, que está intimamente ligado ao efeito de marés em Europa, e da amplitude da tensão causada pelas deformações na superfície (ϵ_0). Uma estimativa dessa amplitude de tensão é obtida pela razão entre a amplitude de deformação vertical na superfície ($\zeta = 20 - 30$ m) e o raio de Europa ($R = 1560$ km). Observa-se que sua única variável é a viscosidade η (e conseqüentemente a temperatura local via Eq. (2.2)), e seu valor médio é $\sim 10^{-7}$ W/m³. As grandezas físicas que definem q , Ra e todos os parâmetros utilizados nesse modelo estão na Tabela 2.1.

2.4 Estrutura da Litosfera

A principal incógnita de Europa é como se configura sua litosfera. Há um oceano líquido? Se há, qual seria o tamanho da camada congelada que julgamos ser o palco das convecções? Sobre esse palco, como exatamente ele se estrutura? A aproximação Newtoniana para a reologia é comumente utilizada por fornecer resultados convectivos a partir dos parâmetros conhecidos (Nimmo & Manga 2009). Mas até que ponto ela descreve bem o gelo? Há modelos que inferem a existência de três camadas ao invés de duas (Nimmo & Manga (2009) e Luttrell & Sandwell (2006)), a partir de análises das propriedades mecânicas da litosfera de Europa como relação profundidade/diâmetro de crateras, e dos mecanismos de compensação das topografias da litosfera (como isostasia²), e relacionando essas características a perfis de estresse do gelo abaixo da superfície. Nesses modelos, há um oceano subsuperficial, uma camada dúctil mais frágil, seguida de outra mais resistente (elástica). Acima destas há a casca de gelo quebradiça de Europa, com suas rachaduras e relevo característico.

Em todas as simulações, observa-se um transiente em que é definida uma porção da caixa onde as convecções ocorrem. Dependendo do valor de A ou d , essa faixa convectiva (inferior) se apresenta maior ou menor, com pouca alteração de temperatura na faixa não-convectiva (superior). Isso é interpretado como uma resposta à alteração local de temperatura que a escolha da reologia proporciona, podendo a faixa convectiva

²Isostasia, ou movimento isostático, é o termo utilizado em Geologia para se referir ao estado de equilíbrio gravitacional (e as suas alterações) entre a litosfera e a camada abaixo desta. Esse processo resulta da flutuação das placas tectônicas sobre o material mais denso da astenosfera da Terra, cujo equilíbrio depende das suas densidades relativas e do peso da placa.

se tornar maior ou menor com o gradiente de temperatura escolhido, com o valor de A , d e até outros parâmetros presentes na Tabela 2.1 (que definem q , por exemplo).

Dessa forma, foi interpretado que a camada convectiva assume as características dúctil e elástica, a primeira para a parte mais profunda e, conseqüentemente, com temperatura mais elevada pois se altera, por exemplo, o tamanho dos grãos de gelo. A segunda para a parte superior onde não são observadas as convecções, delimitando assim a altura máxima das plumas convectivas. Com isso, não somente a casca de gelo externa é uma barreira ao soerguimento da superfície causado pelo estresse das plumas ascendentes, mas também a parte elástica da camada. Calculamos a seguir a *topografia dinâmica*³, fator importante utilizado para checar a consistência do modelo desenvolvido. Descreveremos então o modo que a casca de gelo e a camada elástica inserem forças resistiva à equação.

2.4.1 Equilíbrio Hidrostático

Para descrever as elevações do relevo, partimos de uma equação de equilíbrio hidrostático. Sendo h a altura das elevações causadas pelo estresse interno e σ'_{zz} o estresse vertical dado pela (3.1) (Showman & Han 2005):

$$h = \frac{\sigma'_{zz}}{\rho g}, \quad (2.40)$$

onde ρ e g são os mesmos da Tabela 2.1. Essa equação representa o equilíbrio hidrostático num determinado ponto da litosfera, dado pelo peso da coluna de material acima desse ponto compensado pelas forças de estresse abaixo do mesmo. Porém essa é uma estimativa que superestima o valor de h pois nega elasticidade, servindo como um limite superior apenas. Mais que isso, a casca externa de Europa também tem seu comportamento sob estresse (ver Nimmo & Manga (2009) e Luttrell & Sandwell (2006)), descrito pela Lei de Byerlee,

$$h = \frac{\sigma'_{zz}}{C_{By} \alpha_{By} \rho g}, \quad (2.41)$$

onde $C_{By} = 2,6$ e $\alpha_{By} = 0,3$ são fatores adimensionais para o gelo.

Essa seria a contribuição da casca externa de gelo. Para uma provável camada elástica, a contribuição viria na forma da lei de Hooke, a partir da generalização do módulo

³Topografia dinâmica é o termo utilizado, em geodinâmica, para a topografia gerada por forças dinâmicas de fluxo do manto superior na Terra. É a topografia que resulta da convecção na camada de gelo, que gera o estresse σ' definido pela Eq. (3.1).

de Young para um material:

$$F = \left(\frac{ES}{L_0} \right) \Delta L = kx, \quad (2.42)$$

onde S é a seção transversal à força aplicada, L_0 é o tamanho original do corpo e ΔL é o quanto ele deforma. F é a força aplicada ao objeto e E é o módulo de Young. Alguns artigos (Nimmo & Manga 2009) discutem o valor de E para gelo deformável, onde amostras de laboratório apresentam $E = 9$ GPa e observações de geleiras da Terra indicam o valor de $E \sim 0,9$ GPa. Dessa maneira, as equações (2.40) - (2.42) fornecem:

$$0 = \sigma'_{zz} - C_{By}\alpha_{By}\rho gh - \left(\frac{E}{L_0} \right) \Delta L, \quad (2.43)$$

onde a área foi eliminada da Eq. (2.42) por estarmos tratando de pressão, e a área de atuação da deformação é a mesma da seção transversal descrita pela seção transversal S . ΔL é exatamente h , pois esse valor de deformação da lei de Hooke responde com a elevação do relevo. Essa é então a equação de equilíbrio hidrostático do sistema, dada pelas forças de estresse (σ'_{zz}) advindas do processo convectivo e pelas forças resistivas que agem contra a deformação da superfície. Com isso, a topografia dinâmica no modelo é dada por

$$h = \frac{\sigma'_{zz}}{C_{By}\alpha_{By}\rho g + \left(\frac{E}{L_0} \right)}. \quad (2.44)$$

Resta então definir E e L_0 para o modelo. O valor para o módulo de Young E fica definido como sendo o mesmo da rigidez do gelo adotada na Tabela 2.1 ($\mu = 4 \times 10^9$ Pa). Para L_0 , não sendo esse um parâmetro presente em outros estudos, se faz difícil encontrar um valor que se possa generalizar para outros modelos. Sua natureza precisa ser testada e explorada. Aqui, o valor compatível com o que mostram os gráficos gerados pelo modelo construído é entre 30% e 40% da altura da camada convectiva ($L_0 = 0,3 \times d - 0,4 \times d$). Resta então analisar imagens e plots resultantes para obter pistas dos melhores valores de A e d , que forneçam à simulação o necessário para observarmos a convecção, e com relação às estruturas conhecidas, que resultem em valores de h compatíveis com o que se tem conhecimento do relevo de Europa.

Capítulo 3

Métodos

Como ressaltado, o modelo (que foi desenvolvido em *Python*) considera um fluido incompressível, altamente viscoso e de reologia Newtoniana, satisfazendo a aproximação de *Boussinesq* (ver Apêndice A para detalhes). A estrutura do problema é caracterizada por ser bidimensional e dependente do tempo, estando o fluido sujeito a uma convecção térmica aqui simulada numa caixa de lados iguais (construída por grids que mostram o perfil da temperatura T e da tensão σ' a cada passo temporal, ou *time step*). Com fonte interna de energia (q) e um gradiente de temperatura, as derivadas das Eqs. (2.35) e (2.36) são resolvidas pelo método das diferenças finitas (ver Apêndice B). Iterações são necessárias para cada ciclo (com time step bem definido) com o objetivo de resolver a equação não-linear do momento. A dependência com o tempo vem da equação de energia (2.36), que é resolvida após a Eq. (2.35) a fim de atualizar o grid de temperatura para o ciclo iterativo seguinte. O tempo para convergência de cada iteração depende do método e da linguagem utilizada, e detalhes serão mostrados neste capítulo (bem como no Apêndice C). O valor dos passos temporais é tal que possamos alcançar a escala de tempo dos processos convectivos em Europa, que é de $\sim 10^6 - 10^7$ anos, dentro de um número razoável de ciclos iterativos (150 - 200), obtendo assim um resultado satisfatório dentro de aproximadamente 30 minutos para grids de resolução 64×64 , dados os limites computacionais do código e da linguagem utilizada.

3.1 Resolvendo a Equação de Momento

O primeiro passo no modelo é resolver a equação de Navier-Stokes para o momento. Para isso, resolvemos as derivadas da Eq. (2.35) redefinindo algumas grandezas e introduzindo outras, a fim de simplificar o processo algébrico. Isso é alcançado a partir da definição do tensor de estresse σ'_{ij} (ver Gerya 2010, cap. 5), dada por

$$\sigma'_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij}, \quad (3.1)$$

onde $\dot{\epsilon}$ é a taxa de deformação. Sua definição é dada por (ver Gerya 2010, cap. 4)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.2)$$

que nos permite calcular cada componente deste tensor. Temos as duas de cisalhamento, dadas por

$$\dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

e as duas normais

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ficamos então com a seguinte expressão a ser calculada, substituindo a (3.1) na (2.18) e utilizando a definição do tensor de deformação (3.2):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i = 0. \quad (3.3)$$

Dividimos a Equação (3.3) em uma em x e outra em z com o auxílio das componentes em cada direção. Após a adimensionalização (ver Apêndice A), aplicamos o rotacional à mesma equação para que eliminemos a pressão (pois $\nabla \times \nabla f = 0$, sendo f um campo escalar qualquer).

Em seguida definimos Ψ como a *função de corrente*¹, a ser usada ao invés do próprio tensor de estresse σ'_{ij} . Eles se relacionam via velocidade \mathbf{u} pela seguinte expressão (Malevsky & Yuen 1991):

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Nós então substituímos u_x e u_z em (3.3) por derivadas em Ψ utilizando as duas últimas expressões, e após aplicação das derivadas ficamos com (para mais detalhes, ver Gerya 2010, cap. 5):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \eta \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \eta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Ao trabalhar o rotacional aplicado, devemos nos atentar em respeitar a regra do produto para η visto que este não é constante. Isso se dá pela sua dependência com a temperatura

¹A principal motivação da escolha da função de corrente se dá por ela satisfazer, por construção matemática, a condição de incompressibilidade expressa pela Eq. (2.37). Basta reparar que da expressão da Eq. (3.4) temos que $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0$.

via Eq. (2.2), pois T possui um gradiente em z (indo de $T_b = 270$ K até $T_t = 100$ K) e pequenas variações em x (dadas por flutuações e em alguns modelos por condições de pré derretimento que não são consideradas aqui).

Vemos então que a forma da Eq. (3.5) é extremamente complexa, e aplicar o método das diferenças finitas não seria prático. Utilizamos então o seguinte método para resolvê-la: identificamos os operadores de derivadas F e G ,

$$F = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), G = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \quad (3.6)$$

a fim de reescrever essa mesma equação da seguinte maneira:

$$F(\eta F(\Psi)) + 4G(\eta G(\Psi)) = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (3.7)$$

Aplicando a regra do produto:

$$F(\eta)F(\Psi) + \eta F(F(\Psi)) + 4G(\eta)G(\Psi) + 4\eta G(G(\Psi)) = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Dividindo essa equação por η ,

$$\frac{F(\eta)}{\eta} F(\Psi) + F(F(\Psi)) + \frac{4G(\eta)}{\eta} G(\Psi) + 4G(G(\Psi)) = -\frac{Ra}{\eta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (3.9)$$

definimos os fatores $C_1 = F(\eta)/\eta$, $C_2 = G(\eta)/\eta$, e tudo o que está no lado direito de C_3 , e ficamos com:

$$C_1 F(\Psi) + F^2(\Psi) + 4C_2 G(\Psi) + 4G^2(\Psi) = C_3. \quad (3.10)$$

Nos resta então aplicar os operadores F e G , via método de diferenças finitas (detalhes no Apêndice B), aos elementos do grid de Ψ . Isso pode ser feito de diversas formas desde que respeitadas as regras de derivação às quais a Eq. (3.10) está sujeita. Para resolvê-la, o método de iteração utilizado foi o SOR (sigla em inglês para Successive Over Relaxation), ou Sobrerrelaxação Sucessiva. No Apêndice C há detalhes sobre sua estrutura e forma de implementação, com trechos do código em que ele é definido para posterior aplicação ao grid de Ψ .

Durante a iteração, os fatores C_1 , C_2 e C_3 não são afetados pelos operadores D e G em todo ciclo, mas serão redefinidos antes do início de cada um deles pois dependem da temperatura: C_1 e C_2 via η e C_3 via η e $\partial \theta / \partial x$. Para tanto, atualizamos os valores de temperatura na simulação resolvendo a equação de Navier-Stokes para energia, que por depender do tempo avança o sistema a cada ciclo de um passo Δt , além de usar valores do grid de Ψ previamente calculados. Maiores detalhes sobre o passo-a-passo virão a seguir.

3.2 Resolvendo a Equação de Energia

Após resolvida a equação para Ψ , o próximo passo presente no código é resolver o grid de temperatura pela Eq. (2.36), considerando o time step utilizado ($\Delta t \sim 200$ mil anos). Começamos por abrir os produtos e derivadas da Eq. (2.36) que fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + q'. \quad (3.11)$$

Para resolver a equação anterior, cujas derivadas são diretas e facilmente aplicáveis via diferenças finitas, precisamos primeiro dos valores de $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, para resolver o segundo e terceiro termos do primeiro membro, que juntos definem o chamado *termo advectivo* da equação. Para isso, utilizamos a Eq. (3.4). O trecho do código a seguir mostra o método de diferenças finitas aplicado para resolvê-la:

```
#
##### Calculating velocity
for k in np.arange(l1,lp2): # run over cols (different x values)
    for i in np.arange(n1,np2): # run over the line (different z values)

        vx[i,k] = (psi[i+1,k] - psi[i-1,k]) / (2.*dz) # Central first deriv.
        vz[i,k] = -(psi[i,k+1] - psi[i,k-1]) / (2.*dx) # Central first deriv.
#
```

Figura 3.1: Resolução da Eq. (3.4) via método das diferenças finitas. Ver Apêndice B para detalhes sobre o método.

O primeiro e segundo termos do lado direito da Eq. (3.11) representam, juntos, o *laplaciano* da temperatura. Definidos os termos *advectivo* e *laplaciano* e resolvemos a equação da energia pelo método Runge-Kutta (ver Apêndice C) após cálculo das dissipação volumétrica das marés (q). A atualização do grid da temperatura é implementada exatamente como mostrado na Figura 3.2.

O valor de q é calculado a partir de seu numerador (q_{num}) e denominador (q_{den}) via Eq. (2.39). O fator non_dim_q equivale às quantidades utilizadas na adimensionalização de q , presentes na equação (A.17) do Apêndice A. O time step delt_t é declarado anteriormente no programa. Sua definição pode ser dada a partir de grandezas do problema. Um valor usual em dinâmica convectiva é (Ismail-Zaden & Tackley 2010)

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{u_{\text{max}}}, \quad (3.12)$$

definido para a condição de que o deslocamento máximo não exceda um pequeno valor Δz do grid (que poderia ser expresso por Δx), e onde u_{max} é o valor máximo de escoamento

do fluido. Outro valor seria definido a partir da escala de tempo de processos difusivos (Ismail-Zaden & Tackley 2010),

$$\Delta t = \frac{(2/\Delta x^2 + 2/\Delta z^2)^{-1}}{\kappa}, \quad (3.13)$$

onde κ é a difusividade termal e Δx e Δz os espaços entre os elementos do grid, que possuem o mesmo valor pois representam uma caixa de lados iguais no modelo. Porém, ambos os valores apresentam problemas na utilização. O primeiro fornece um passo extremamente grande nas primeiras iterações e reduz drasticamente seus valores ao longo dos ciclos por ser sensível à velocidade do fluido, que é bem alta no início da simulação. O segundo traz consigo o problema de ser um valor demasiadamente alto, e assim poucas iterações já atingiriam o valor temporal condizente com a escala de tempo das convecções em Europa. Sendo assim, as duas definições do passo temporal trazem consigo problemas de caracterização do tempo total e o número de iterações necessárias para atingi-lo. Nos dois casos o tempo total da simulação é suficiente para que as convecções possam se estabelecer, mas para que os ciclos sejam mais controlados ao longo do modelo é definido um valor constante de $\Delta t = 200$ mil anos, que também satisfaz o tempo usual do processo convectivo ($\sim 10^6 - 10^7$ anos), porém dentro de um número razoável de ciclos (entre 150 e 200).

```
##### Updating Temperature Grid
for k in np.arange(l1,lp2): # run over cols (different x values)
    for i in np.arange(n1,np2): # run over the line (different z values)

        q_num = ( epsi_0**2. * (omega)**2. * eta(T[i,k]) )
        q_den = ( 1 + (omega)**2. * eta(T[i,k])**2. ) / mu**2. )
        q = (q_num / q_den) * non_dim_q # adimensional tidal dissipation rate

        ad1 = vx[i,k] * ( (T[i,k+1] - T[i,k-1]) / (2.*dx) ) # Central first deriv.
        ad2 = vz[i,k] * ( (T[i+1,k] - T[i-1,k]) / (2.*dz) ) # Central first deriv.
        advec = ad1 + ad2

        laplace = f_x_2(T,i,k) + f_z_2(T,i,k)

        T[i,k] = T[i,k] + (laplace - advec + q) * delt_t
```

Figura 3.2: Trecho do código em que a Eq. (3.11) é resolvida via Runge-Kutta e o grid de temperatura é atualizado a partir do elemento $T[i,k]$.

Sendo assim, uma vez obtidas as equações que governam um sistema e dados os parâmetros que o caracterizam, o fator que resta para determina qualquer solução particular é definir as condições iniciais e de contorno.

3.3 Construindo o Ambiente

O modelo se dá numa caixa de largura e comprimento d , simulando em duas dimensões uma porção da camada convectiva que circunda o provável oceano de Europa. Para isso, grids $n \times n$ são criados (com resolução $n = 64$) para as variáveis presentes no problema, como a velocidade do fluido u , a função de corrente Ψ , a temperatura T e a viscosidade η , todas elas sujeitas a derivações. Nesses grids, o valor de $u_{i,k}$, por exemplo, representa a posição da linha i e coluna k de um elemento no grid de velocidade. Sendo assim, os valores $u_{0,k}$ se localizam na base desse grid, e $u_{64,k}$ no topo (com k de 0 a 64). Na lateral esquerda estão os pontos $u_{i,0}$ e na direita $u_{i,64}$ (i de 0 a 64).

Como as equações envolvem derivadas de segunda ordem para essas grandezas, duas posições chamadas *pontos fantasmas* (em inglês, *ghost points*) são inseridos nas bordas dos grids (os pontos internos à estes ficam então conhecidos como *pontos físicos*). Isso é realizado para que o método de derivadas finitas possa ser aplicado em todos os pontos incluindo os contornos dos grids, e dessa forma a resolução destes se torna $(n + 4) \times (n + 4)$, com $n = 64$. Vale ressaltar que a finalidade desses pontos é somente definir as derivadas de segunda ordem para os elementos da base ($u_{0,k}$), do topo ($u_{64,k}$) e das laterais esquerda ($u_{i,0}$) e direita ($u_{i,64}$). Suas representações são, tomando como exemplo o grid de velocidade,

$$\begin{aligned} u_{-2,k} \text{ e } u_{-1,k}, \\ u_{66,k} \text{ e } u_{65,k} \end{aligned} \tag{3.14}$$

para a base e o topo, respectivamente (k de -2 a 66). Nas laterais temos:

$$\begin{aligned} u_{i,-2} \text{ e } u_{i,-1}, \\ u_{i,66} \text{ e } u_{i,65}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

representando os pontos pertencentes às fronteiras da esquerda e direita, respectivamente (i de -2 a 66). A implementação algébrica desta representação no código se dá pela utilização de grids 68×68 , visto que os índices -1 e -2 não podem ser utilizados de modo muito prático seguindo a lógica de matrizes em *Python*. Introduzidas as coordenadas dos

grids e como elas definem cada posição, condições iniciais e de contorno são consideradas para essas quantidades a fim de serem satisfeitas as particularidades do problema.

3.3.1 Condições Iniciais e de Contorno

A condição inicial atribuída ao grid de Ψ foi defini-lo como uma matriz 68×68 de zeros somente. Após isso, flutuações entre -1 e 1 são atribuídas aos pontos do grid de modo a simular perturbações. Lá, as condições de contorno também foram aplicadas. Para o grid de temperatura, como ressaltado ele foi definido a partir de um gradiente de temperatura indo de 270 a 100 kelvin, da base ao topo, e como resultado sua aparência é a da Figura 3.3. Os principais parâmetros testados nas simulações estão presentes no título: A é o que se insere na Eq. (2.2) da viscosidade, definido via (2.3); d é o que define a profundidade e largura da caixa em quilômetros. O valor de anos corridos é dado em milhões de anos (Myr), que no caso é mostrado como 0.0 por representarem os grids para o tempo $t = 0$.

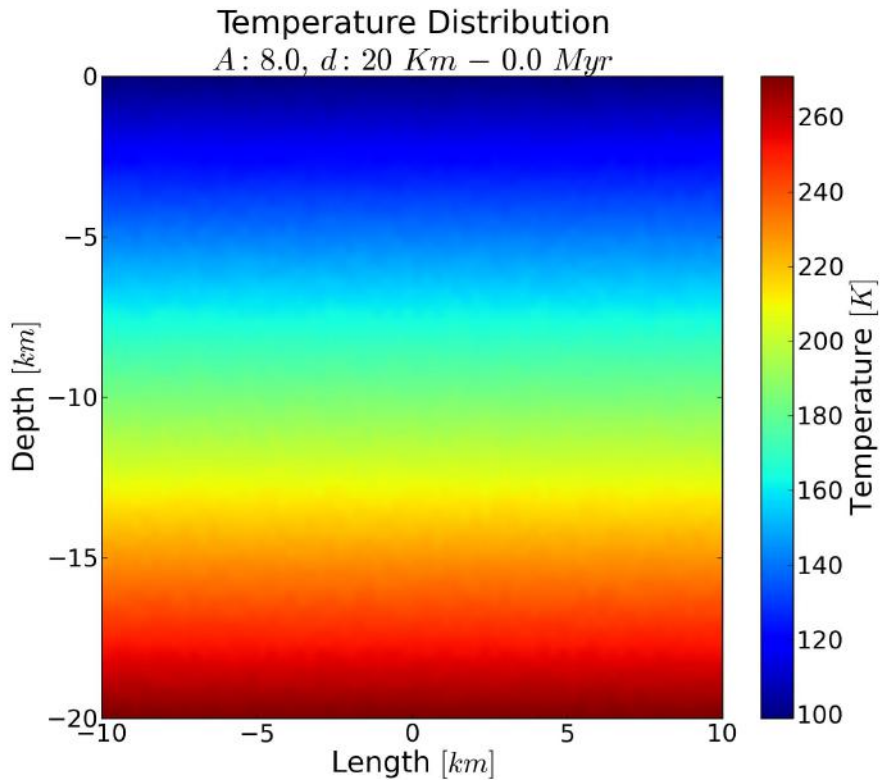


Figura 3.3: Aspecto do grid de T antes do início das convecções. A é definido via Eq. (2.3) e d é o tamanho da caixa a ser simulada. 0.0 Myr indica o número de anos corridos em milhões.

Antes do início de cada processo iterativo, os principais grids do sistema (pois

definem as outras quantidades), o da velocidade u e da temperatura T , são preparados da seguinte maneira:

1— A condição de contorno utilizada para a velocidade u é a de livre deslizamento (ou *free slip*). Ela implica que a componente normal da velocidade é zero e a outra componente não se altera ao longo do contorno:

$$u_z = 0, \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0. \quad (3.16)$$

2— A condição de contorno que serve para caracterizar os elementos da grid nas fronteiras do topo e da base vem também do livre deslizamento:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\Psi_{i,k+1} - 2\Psi_{i,k} + \Psi_{i,k-1}}{\partial z^2} = 0, \quad (3.17)$$

e como exatamente no contorno os valores da velocidade são zero (pela condição anterior, se $u_{i,k} = u_{topo}$ ou $u_{i,k} = u_{base}$, $\Psi_{i,k} = 0$, definindo os pontos fantasmas):

$$\Psi_{i,k-1} = -\Psi_{i,k+1}. \quad (3.18)$$

3— Para a temperatura, o contorno do topo e da base do grid é dado pelo gradiente de T ser zero, significando valores iguais para a fronteira nessas regiões. Matematicamente, isso implica nas seguintes definições dos elementos do grid (para k de -2 a 66):

$$\begin{aligned} T_{-2,k} &= T_{-1,k} = T_{base} = T_{0,k}, \\ T_{66,k} &= T_{65,k} = T_{topo} = T_{64,k}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

4— Para os contornos laterais, usamos a condição periódica para ambos os grids de \mathbf{u} e T , o que é comum em modelos que pretendem representar toda a camada sujeita à convecção. Algebricamente, essa condição diz que o primeiro e segundo pontos fantasmas do grid (da primeira e segunda coluna, ou seja, extrema esquerda), são iguais ao penúltimo e último físicos (parte direita) do grid, respectivamente:

$$u_{i,-2} = u_{i,63}, \quad (3.20)$$

$$u_{i,-1} = u_{i,64},$$

e o penúltimo e último pontos fantasmas (pertencentes à penúltima e última coluna, na extrema direita do grid) se igualam ao primeiro e segundo físicos (parte esquerda), respectivamente:

$$u_{i,65} = u_{i,0}, \quad (3.21)$$

$$u_{i,66} = u_{i,1}.$$

Em todos os casos com i variando de -2 a 66. Como ressaltado anteriormente, a notação de índices negativos é para melhor compreensão de como cada condição é implementada, mas na prática os pontos fantasmas pertencem às colunas (e linhas) 1, 2, 67 e 68, enquanto os pontos físicos se localizam no interior destes, nas colunas (e linhas) de índice 3 a 66.

Em resumo, a resolução é feita através dos passos a seguir: **(1)** Resolvemos a Eq. (2.35) iterativamente para a função de corrente Ψ , via Sobrerrelaxação Sucessiva e com as condições iniciais e de contorno dadas. **(2)** Atualizamos o grid de temperatura ao resolver a Eq. (2.36) para T a partir do novo grid Ψ recém calculado, com passos de tempo $\Delta T = 200$ mil anos e sempre reaplicando as condições do sistema. **(3)** Recalculamos Ψ , retornando ao passo **(2)** e avançando novamente. O código foi rodado simulando um tempo total de $\sim 10^6 - 10^7$ anos, suficiente para caracterizar o processo convectivo dentro de 150 e 200 ciclos (levando aproximadamente 45 minutos), e observar alterações relevantes no relevo de Europa.

Capítulo 4

Resultados e Conclusões

Duas características do sistema são exploradas para que possamos entender melhor o ambiente em que as convecções ocorrem e ao mesmo tempo direcionar nossas perguntas à existência de água líquida em Europa. Uma delas é a constante A dada pela Eq. (2.3), escolhida pois ajuda a caracterizar a reologia que é um dos aspectos menos conhecidos da litosfera de Europa. Além disso, ela restringe os valores da energia interna recebida pelo efeito de marés, tido como o principal agente neste cenário convectivo. A segunda variável mais importante neste estudo é obviamente o tamanho da caixa convectiva d . O valor de d está diretamente relacionado à existência de um oceano líquido abaixo da camada convectiva. Tendo a litosfera de Europa uma extensão de 150 km, esse deve ser o valor limite para que a possibilidade de um oceano líquido seja real.

Testamos valores de A e d que satisfaçam as seguintes condições: **(1)** dentro do tempo usual das convecções de Europa, as simulações devem fornecer estruturas de plumas semelhantes a cogumelos, características de quaisquer processos convectivos. **(2)** o estresse resultante das convecções deve gerar estruturas compatíveis com a morfologia conhecida de domos, cavidades, bandas de separação, regiões caóticas e cristas. O cálculo da topografia dinâmica (Eq. (2.44)) restringe quais valores de A e d são compatíveis com a altura, largura e extensão dessas estruturas. Os resultados indicam que $d = 20 - 30$ quilômetros e A entre 7,0 e 9,5 são os valores mais prováveis para a melhor descrição das estruturas de Europa.

4.1 Imagens da Convecção

As principais imagens obtidas a partir do modelo, que apresentam os melhores resultados e melhor ilustram o estudo aqui desenvolvido, serão apresentadas nesta seção. Analisando variações do valor de A para uma mesma profundidade d de camada convectiva, temos diversos resultados a serem comparados.

4.1.1 $d = 20$ quilômetros

Os gráficos seguintes terão suas escolhas de A e diferentes tempos totais de simulação, mas todos foram rodados para o mesmo d , a fim de estudarmos como se desenvolve o sistema dados diferentes valores de energia interna, e explorar a possibilidade de uma camada convectiva de 20 quilômetros.

Cálculo da Topografia

A porção superior das próximas figuras mostra as deformações na superfície, em metros, para cada parâmetro escolhido. Elas foram calculadas pela Eq. (2.44) a partir do grid resultante de σ'_{xz} . O valor de L_0 utilizado foi $L_0 = 0,35 \times d$. Essa foi a escolha pois o desenvolvimento das plumas convectivas se dá até uma altura máxima, em torno de $0,65 \times d$, caracterizando essa região como dúctil o suficiente para permitir convecção. Sendo assim, resta à porção superior da camada experimentar todo o estresse criado nesse processo, se comportando resistivamente de maneira elástica às deformações causadas pelas plumas ascendentes.

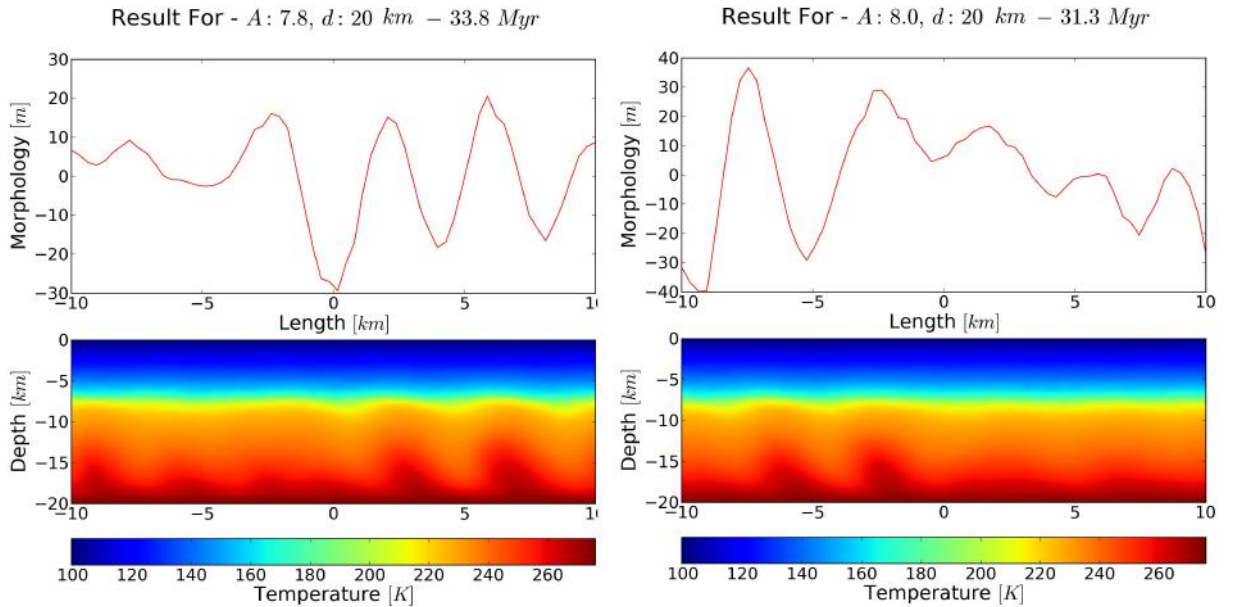


Figura 4.1: Gráfico da esquerda: resultado para $A = 7,8$ ($Q = 17,5$ kJ/mol). Direita: resultado para $A = 8,0$ ($Q = 17,8$ kJ/mol), ambos simulando uma caixa com $d = 20$ km. A simulação se desenvolveu por 33.8 Myr para a figura da esquerda e 31.3 Myr para a da direita.

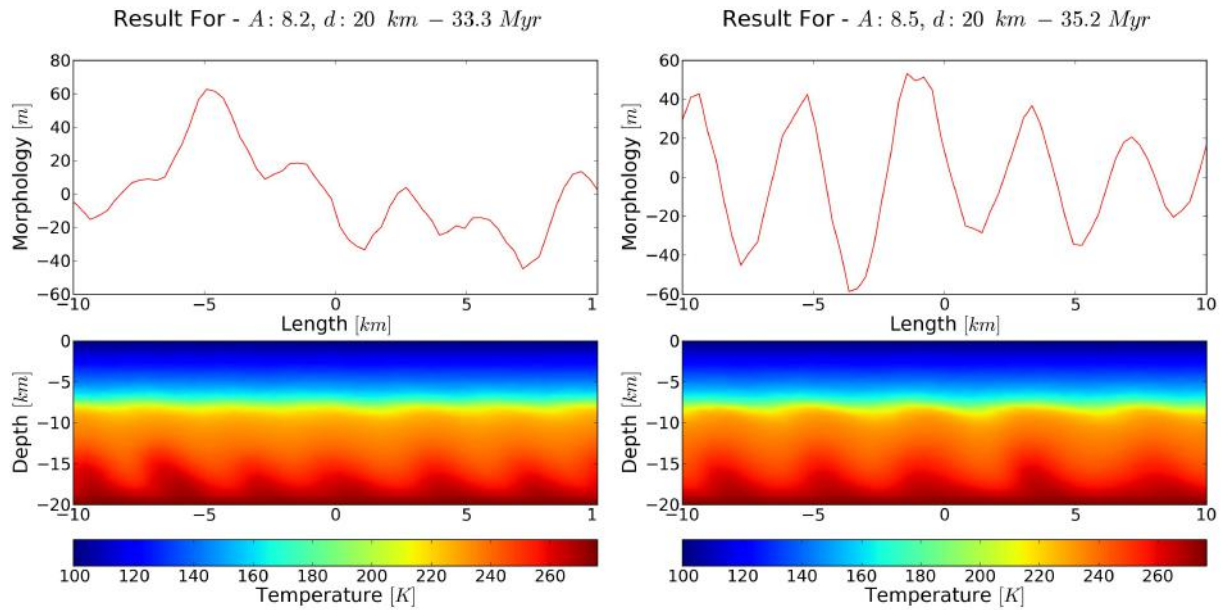


Figura 4.2: Gráfico da esquerda: resultado para $A = 8,2$ ($Q = 18,4$ kJ/mol). Direita: resultado para $A = 8,5$ ($Q = 19$ kJ/mol). O sistema se desenvolve por 33,3 Myr para a simulação da esquerda e por 35,2 Myr para a da direita.

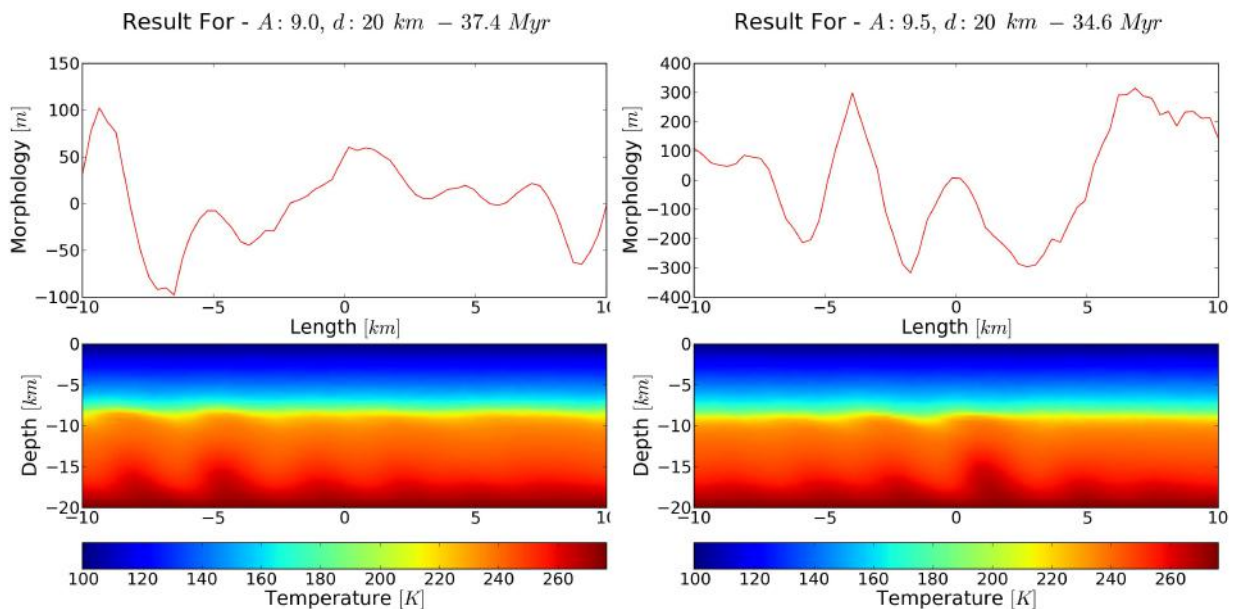


Figura 4.3: Gráfico da esquerda: resultado para $A = 9,0$ ($Q = 20,2$ kJ/mol). Direita: resultado para $A = 9,5$ ($Q = 21,3$ kJ/mol). O sistema se desenvolve por 37,4 Myr para a simulação da esquerda e por 34,6 Myr para a da direita.

Observamos as peculiaridades de cada escolha de A . Pela Eq. (2.3), $A = 7,8$ significa o recebimento de uma energia interna $Q = 17,5 \text{ kJ mol}^{-1}$, $A = 8,5$, $Q = 19 \text{ kJ mol}^{-1}$, e $A = 9,5$ representa $Q = 21,3 \text{ kJ mol}^{-1}$. Essas diferentes energias de ativação, provenientes das marés, se traduz em diferentes elevações pelo cálculo da topografia dinâmica. As sondas Voyager e Galileo não observaram estruturas maiores que 300 metros na superfície, portanto esse é um agente limitante para nossas escolhas de A . Vemos que quanto maior seu valor, mais altos são os valores associados ao estresse abaixo da superfície e, conseqüentemente, maior o h da (2.3). Vale ressaltar que as elevações do relevo não serão exatamente como descritas pelas formas das linhas em vermelho. Elas nos dão a noção da distribuição e intensidade das forças de tensão logo abaixo da casca flutuante, pois processos mais complexos estão envolvidos. Um deles é o diapirismo, ocorrendo quando a casca de gelo apresenta fraturas ou derretimento parcial localizados. Além disso, ela não necessariamente possui a mesma espessura em toda sua extensão, fornecendo mais ou menos barreira às plumas ascendentes. Portanto, a morfologia do relevo de Europa está intrinsecamente ligada às condições locais da casca de gelo.

Perfil das Convecções

As próximas figuras são resultados das mesmas simulações anteriores, porém com maiores detalhes da distribuição de temperatura. As linhas são os vetores de velocidade dos elementos do grid, ilustrando a direção de deslocamento do fluido.

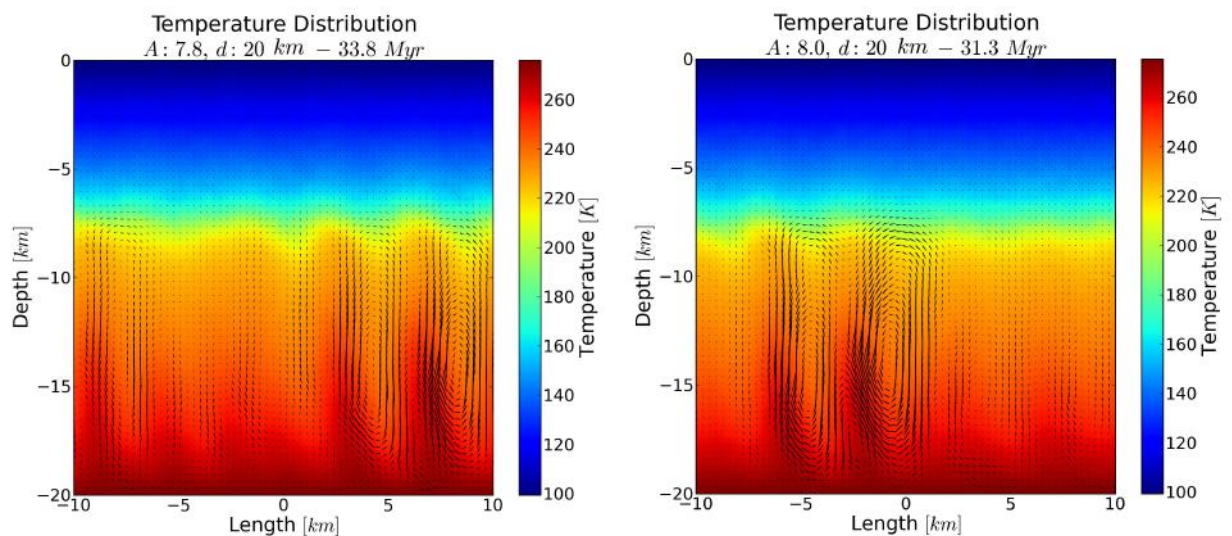


Figura 4.4: Gráfico da esquerda: resultado para $A = 7,8$. Direita: $A = 8,0$.

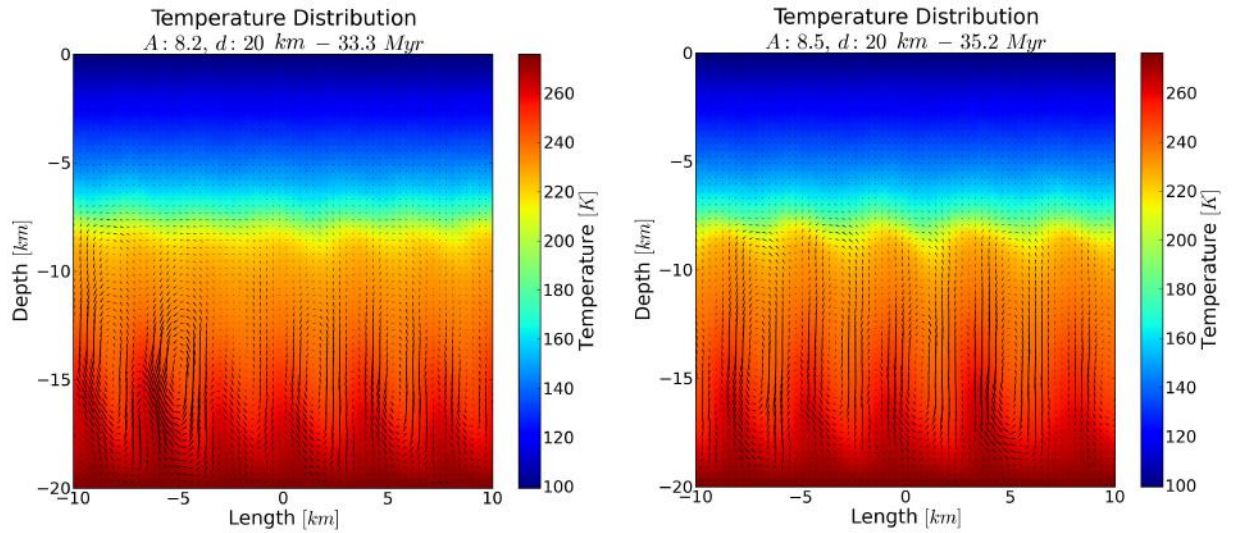


Figura 4.5: Gráfico da esquerda: resultado para $A = 8, 2$. Direita: $A = 8, 5$.

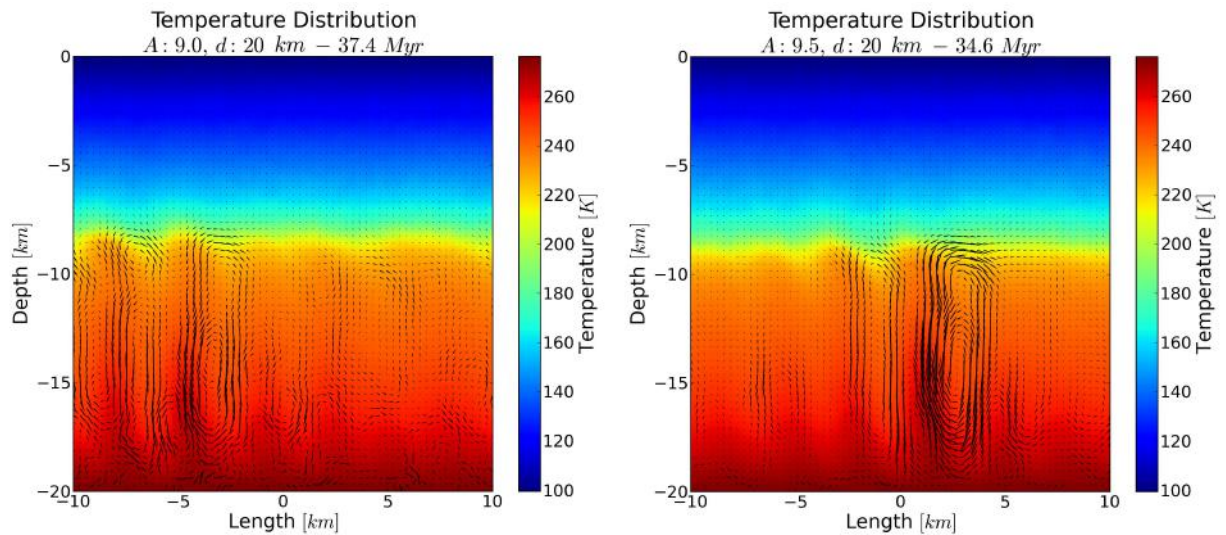


Figura 4.6: Gráfico da esquerda: resultado para $A = 9, 0$. Direita: resultado para $A = 9, 5$.

Vemos o quanto a região que sofre convecção e a elástica estão bem delimitada pela distribuição de cores (mais quentes e frias, respectivamente). As simulações obedecem um transiente de ~ 10 - 20 Myr, dependendo dos parâmetros envolvidos, onde as convecções se dão basicamente na parte inferior do grid. Com o tempo, as plumas se tornam proeminentes e dominam a maior parte da camada, e as linhas de velocidade se experimentam movimentação característica à de fluidos em convecção. Essas figuras são o último frame do vídeo gerado pela simulação, que evidencia todas essas características.

4.1.2 $d = 25$ quilômetros

A seguir estão alguns resultados para uma camada com 25 quilômetros de profundidade.

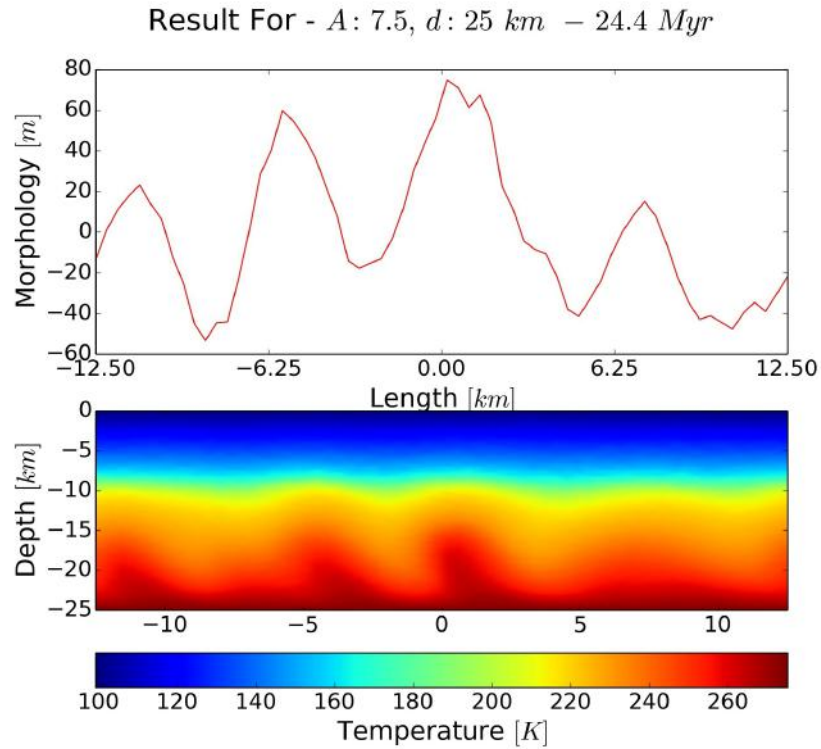


Figura 4.7: Cálculo da topografia dinâmica para $A = 7,5$ ($Q = 16,8$ kJ/mol).

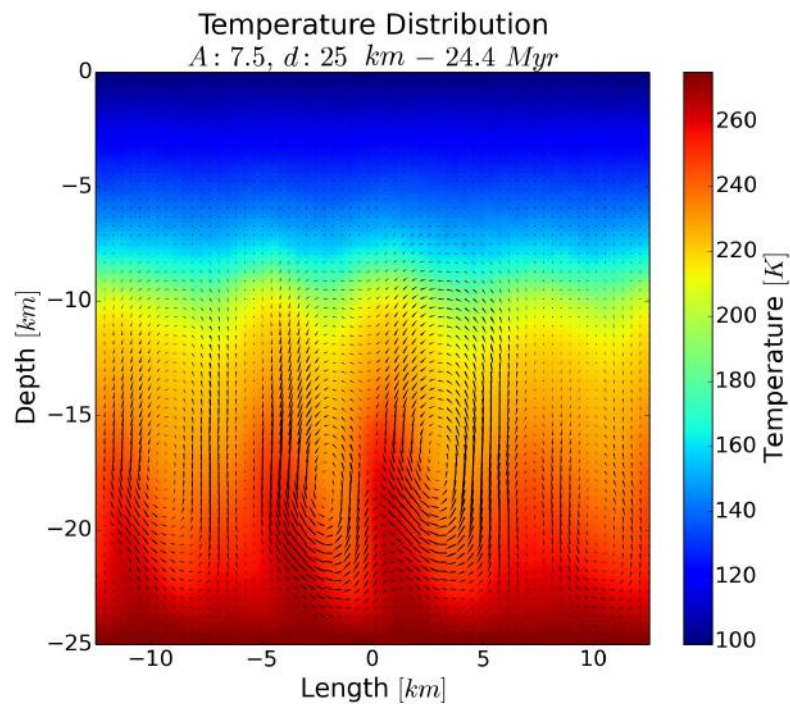


Figura 4.8: Perfil da convecção para $A = 7,5$. Tempo total da simulação: 24,4 Myr.

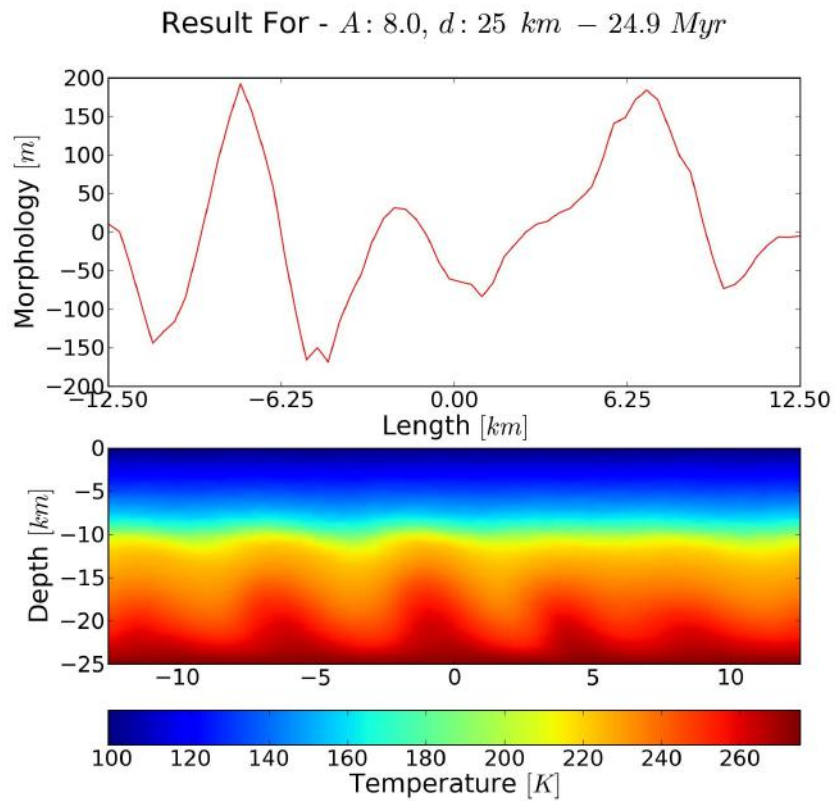


Figura 4.9: Cálculo da topografia dinâmica para $A = 8,0$ ($Q = 17,9 \text{ kJ/mol}$).

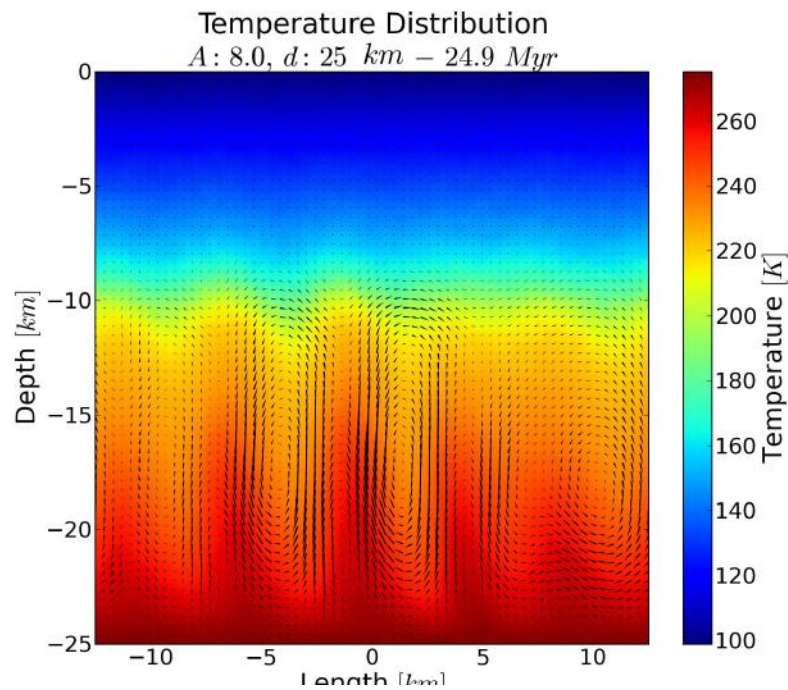


Figura 4.10: Perfil da convecção para $A = 8,0$. Tempo total da simulação: 24,9 Myr.

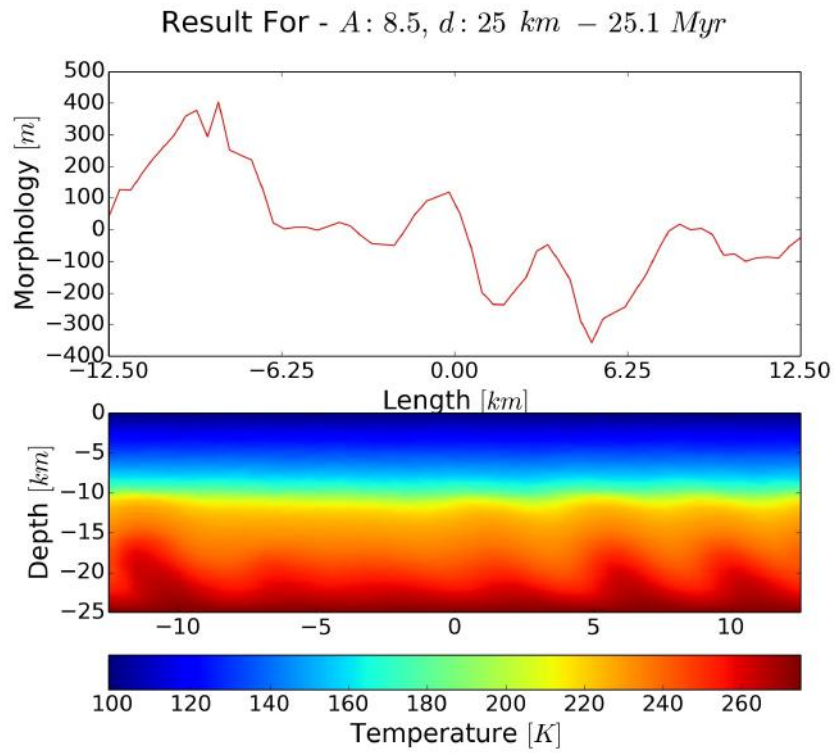


Figura 4.11: Cálculo da topografia dinâmica para $A = 8,5$ ($Q = 19 \text{ kJ/mol}$).

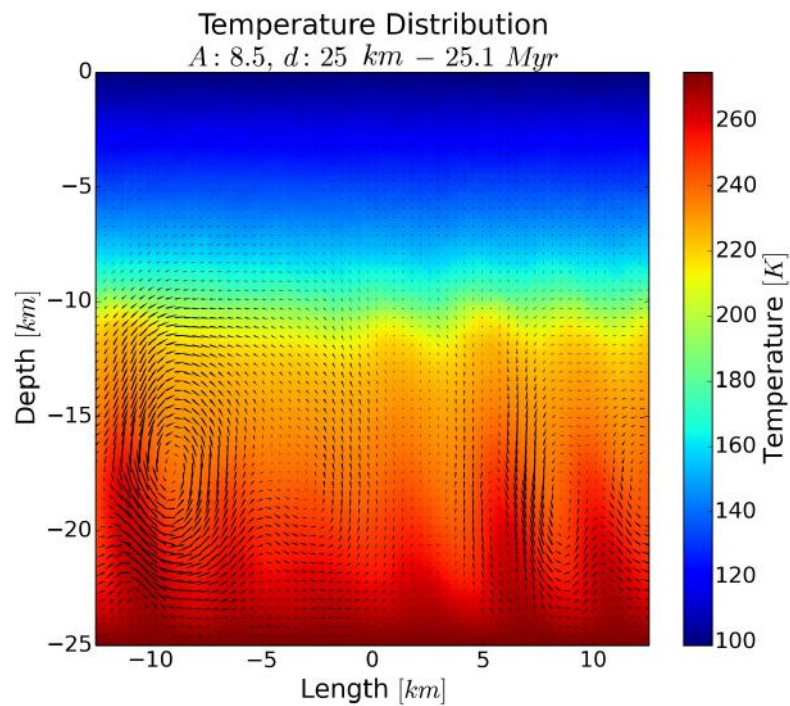


Figura 4.12: Perfil da convecção para $A = 8,5$. Tempo total da simulação: 25,1 Myr.

4.1.3 $d = 30$ quilômetros

Em seguida resultados para a escolha de $d = 30$ km são apresentados.

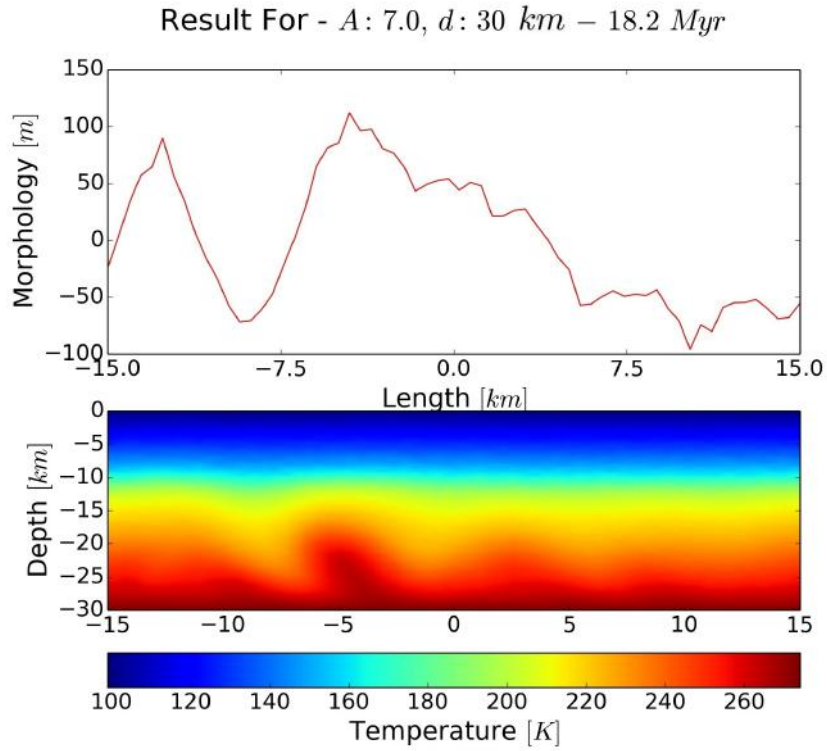


Figura 4.13: Cálculo da topografia dinâmica para $A = 7,0$ ($Q = 15,7$ kJ/mol).

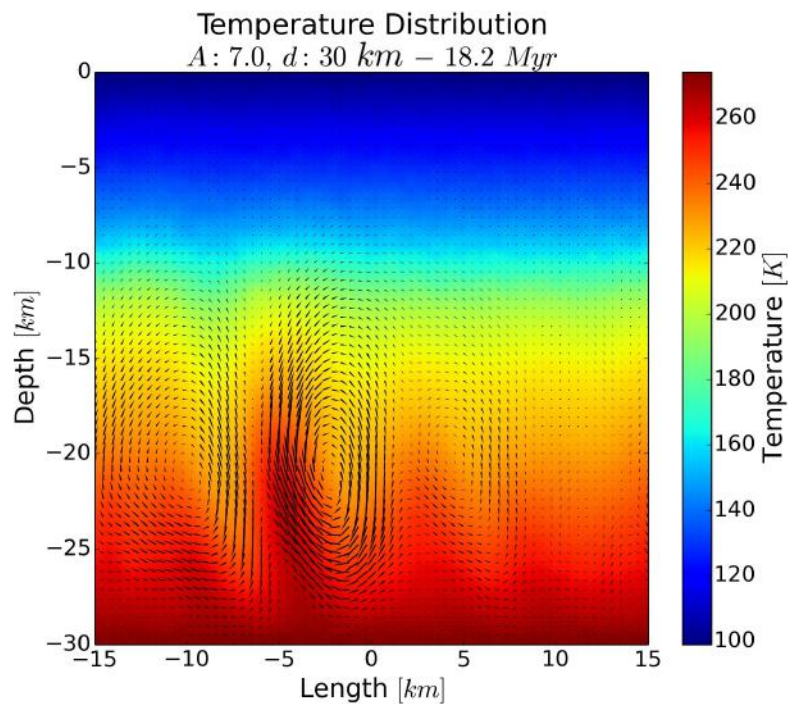


Figura 4.14: Perfil da convecção para $A = 7,0$. Tempo total da simulação: 18,2 Myr.

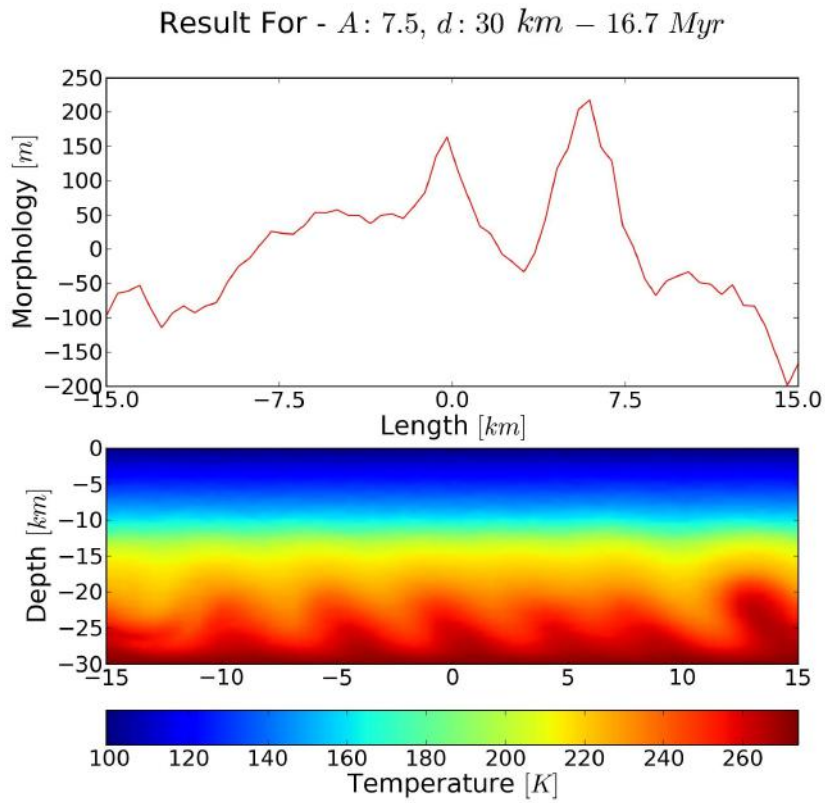


Figura 4.15: Cálculo da topografia dinâmica para $A = 7,5$ ($Q = 16,8 \text{ kJ/mol}$).

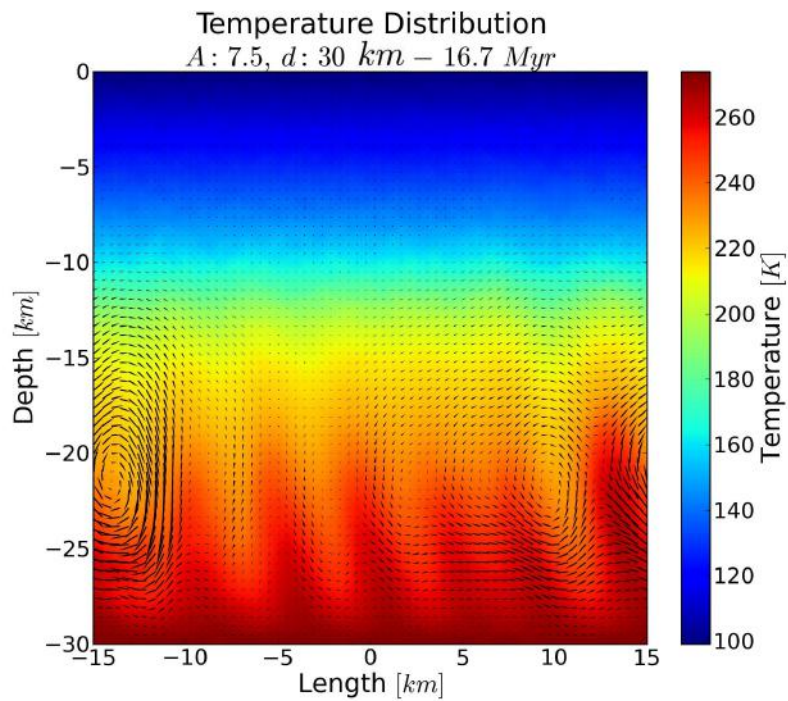


Figura 4.16: Perfil da convecção para $A = 7,5$. Tempo total da simulação: 16,7 Myr.

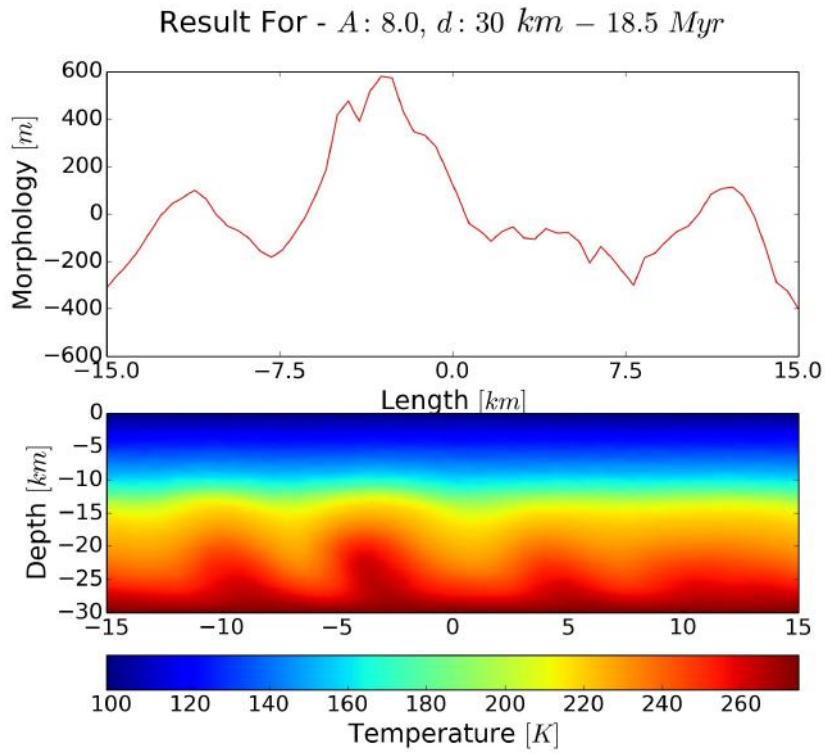


Figura 4.17: Cálculo da topografia dinâmica para $A = 8,0$ ($Q = 17,9 \text{ kJ/mol}$).

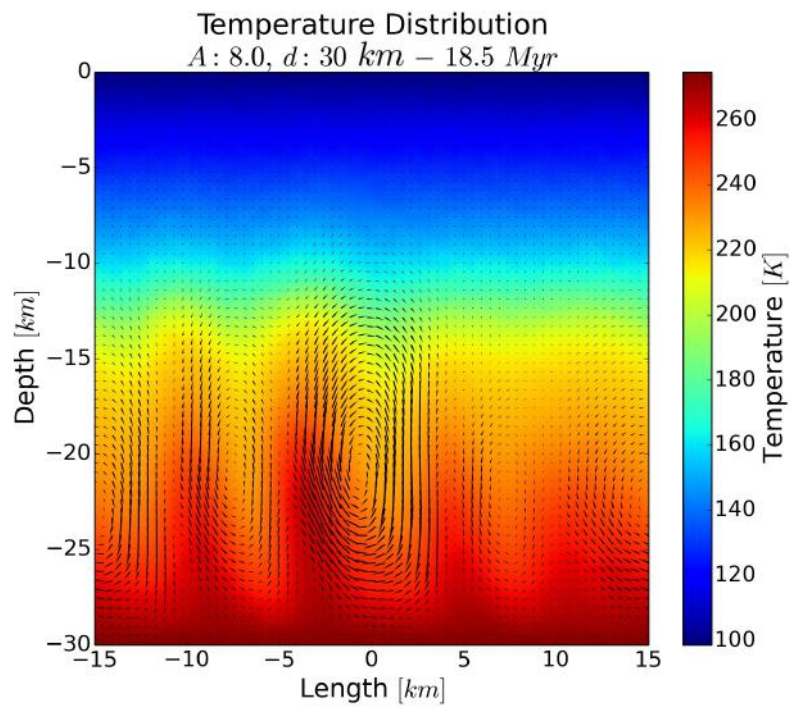


Figura 4.18: Perfil da convecção para $A = 8,0$. Tempo total da simulação: 18,5 Myr.

4.2 Conclusões

A primeira característica revelada pelo modelo é que, para um valor fixo de A , por exemplo $A = 8,0$, os valores expressos pela topografia dinâmica tomam limites superiores e inferiores cada vez mais extremos, conforme aumentamos a profundidade da camada convectiva d . Além disso, se fizermos o caminho inverso e analisarmos para um mesmo A valores de d menores que 20 km, o modelo tem muita dificuldade em reproduzir os formatos de cogumelo característicos de uma convecção, e os valores da topografia dinâmica se tornam extremamente baixos. Veja a figura a seguir para $A = 9,0$ e $d = 15$ km, por exemplo.

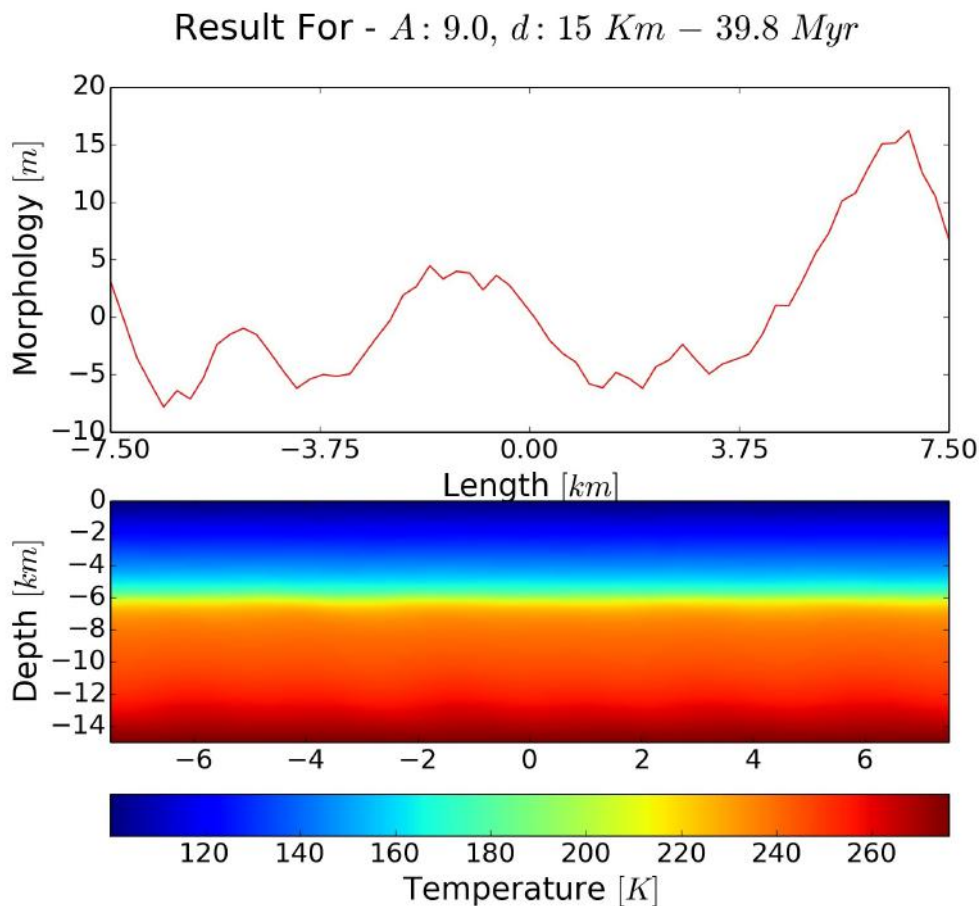


Figura 4.19: Resultado do modelo para $d = 15$ km, com $A = 9,0$. A topografia alcança valores máximos de ~ 15 metros, compatíveis com algumas estruturas de Europa, mas plumas convectivas não são observadas. Sem o processo convectivo, o transporte de material mais aquecido até camadas superiores não ocorre, e o processo de rejuvenescimento da superfície fica comprometido (pois o diapirismo se torna improvável).

O valor de $A = 9,0$ representa um valor razoável de energia interna recebida por Europa ($Q = 20,2$ kJ/mol), mas ainda assim não foi suficiente para a simulação caracterizar plumas de convecção. Testes para $A = 10,0$ foram realizados, fornecendo topografias da ordem de ~ 120 metros, mas ainda sem apresentar plumas. A topografia se altera pois as forças de tensão ainda se fazem presentes. Elas são provenientes de mini células convectivas da parte inferior do grid, semelhantes às observadas no transiente, ou seja, início das simulações, para condições de d maiores que 15 km.

Para simulações com d maiores que 30 quilômetros, o problema se dá na necessidade de valores de A muito pequenos para que a topografia permaneça compatível com a realidade ($h < 300$ metros). Os valores mais considerados para a energia interna em estudos sobre convecções em Europa variam entre $Q \approx 15 - 26$ kJ/mol, representando A entre 7,0 e 12,0. No presente estudo, os valores máximos escolhidos para A ficaram em torno de 10,0 pois, acima destes, os resultados da topografia dinâmica eram irrealistas. Além disso, há também um motivo computacional: o código apresentava muita dificuldade para convergir quando valores para A maiores que 10,0 eram escolhidos, provavelmente pela grande diferença de valores para a viscosidade entre o fundo e topo dos grids. Um estudo maior sobre o método de convergência deve ser realizado para entender essa ocorrência.

Analisando o resultado para $A = 8,0$ e $d = 30$ km (figura 4.17), vemos que esse já seria um valor limite para a quantidade de energia interna que o sistema recebe, pois obtemos resultados com altura da ordem de ~ 600 metros, o que não se verifica. Outros valores limitantes são $A = 8,5$ para $d = 25$ km (Figura 4.11) e, talvez, $A = 9,5$ para $d = 20$ km (parte direita da Figura 4.3). Dessa forma, o ambiente mais realista, com relação às formações do relevo e ao mesmo tempo mais favorável ao aparecimento de plumas convectivas, se encontra na faixa de $d = 20 - 30$ quilômetros, com valores de A entre 7,0 e 9,5. Claro, com algumas ressalvas para as combinações destes parâmetros (por exemplo, a das Figuras 4.11 e 4.17). A mais importante conclusão é o fato de que, com esses valores de d , o modelo é totalmente compatível com a presença de um oceano subsuperficial ($d < 150$ km, tamanho da litosfera de Europa).

Outro aspecto interessante que surge no modelo é a natureza randômica da forma das plumas, extremamente importante se buscamos modelar estruturas com tantas formas diferentes a partir de características pontuais, como os parâmetros A , d e os valores da Tabela 2.1. Isso ajuda na generalização de nossos resultados da seguinte forma: cada família de ocorrências morfológicas de Europa possuem suas próprias alturas e ex-

tensões, com variações inclusive dentro de cada família. Com essa heterogeneidade, um modelo que forneça uma única resposta ao relevo não seria um candidato à um processo global como a convecção de Europa, e que forma tantas estruturas diferentes. Para um mesmo d e A , o modelo pôde oferecer diversas elevações consecutivas de tamanho igual e pouco espaçadas, como a da Figura 4.2 (direita), e numa outra simulação o resultado era semelhante à Figura 4.2 (esquerda), com ocorrências de baixa altitude ao longo da caixa e uma proeminência única. Essas diferentes respostas satisfariam a condição para formação de diferentes estruturas.

Sabemos que mesmo A e mesmo d fixariam uma faixa estreita de topografia dinâmica máxima, portanto ainda resta explicar como este modelo satisfaria as diferentes alturas das estruturas encontradas. Isso poderia ser causado por um maior ou menor recebimento de energia proveniente do atrito gerado pelas marés, já que não se espera que este seja um processo idêntico para toda órbita de Europa. Além disso, não há nenhuma necessidade de restringir o valor de d para toda a camada convectiva de Europa, e nem ao longo do tempo total do processo. Hurford et al. (2005), Nimmo & Manga (2009), Barr & Showman (2009), e Mitri & Showman (2005) consideram que, passado o tempo usual da formação de células convectivas, o transporte de calor se torna efetivo o suficiente para derreter parte da camada até que ela diminua sua espessura inicial d . Com isso, o processo convectivo pode cessar ao atingir uma espessura que não permita sua ocorrência, e o transporte de calor se daria apenas por difusão, pouco eficiente para dissipar toda a energia. Sendo assim, a camada poderia recongelar até atingir novamente uma espessura mínima d necessária para que o cenário convectivo reapareça. E, com um maior valor para d (mesmo que por um período apenas), conforme mostra o modelo, maiores estruturas surgiriam pelo cálculo da topografia dinâmica. Isso tudo poderia estar aliado a outros eventos de geração de energia, como o decaimento radioativo de elementos do manto rochoso (ainda não confirmado), que eventualmente forneceria uma energia considerável para alguns dos ciclos convectivos. Dessa forma, períodos de maior ou menor geração de energia interna seriam a resposta para algumas estruturas mais altas, que são a exceção entre os domos e cristas de tamanhos bem uniformes.

4.3 Formando as Estruturas

Resta então relacionar diretamente os resultados do modelo (e seus principais aspectos) aos possíveis processos de formação das estruturas do relevo de Europa. De um modo geral, as ocorrências que melhor são caracterizadas pelo modelo são os domos e cavidades. Isso pois uma pluma ascendente, como as resultantes no modelo, facilmente gera o estresse esperado para causar uma estrutura com a dimensão dos domos de Europa, e sob as condições necessárias, as cavidades. Estas estruturas (os *lenticulae*), que se acredita serem formados por processo semelhante, apresentam separações da ordem de 5 a 20 quilômetros, indicando que o diapirismo que os forma provém de plumas relativamente isoladas, bem reproduzidas no modelo. As condições de formação de domos ou cavidades, uma vez gerada a pluma convectiva e iniciado o diapirismo, se daria por aquecimento local da casca de gelo, ou mesmo pela energia carregada pela convecção, que poderia aquecer suficientemente a superfície a ponto de causar derretimento parcial e conseqüente rompimento da superfície.

As outras estruturas, como crista e bandas de separação, podem ser causadas por diapirismo aliado a efeitos da tectônica de placas. Como as cristas em Europa possuem quilômetros de extensão, uma pluma convectiva que as gere deve ser igualmente extensa e muito uniforme, e plumas com essas características não são facilmente formadas. Uma explicação pode se dar pela natureza randômica da formação de plumas que encontramos no modelo. Diversas plumas de igual tamanho e separadas por poucos quilômetros podem representar um único soerguimento da superfície, com a extensão equivalente à das cristas de Europa (Figura 4.2, direita).

Algumas plumas que carregam grande quantidade de calor podem ser geradas de forma ainda mais energética, e em alguns casos possuir extensão suficiente para causar um derretimento generalizado na superfície, criando terrenos como o de Chonamara Chaos (Figura 1.10). Não há muitos terrenos caóticos com a extensão de Chonamara Chaos em Europa, indicando que a formação de plumas desta dimensão não deva ser um evento comum, algo que o modelo também indica. Além disso, a casca de gelo que circunda Europa não é necessariamente uniforme em sua espessura. Porções mais frágeis que sofram o efeito do diapirismo podem ceder enquanto outras resistem ao derretimento, e com o posterior resfriamento uma matriz de água recongelada (ou terreno renovado)

surgiria rodeada por porções inalteradas da superfície, criando um terreno acidentado. Esse evento, não necessariamente ligado a uma grande pluma convectiva mas sim a um processo diapírico generalizado (sob uma casca de espessura desigual), também é um cenário compatível com o modelo e uma provável explicação para terrenos caóticos.

Capítulo 5

Perspectivas

Apesar de ser necessária, a presença de um oceano não é evidência de existência de vida. Outros fatores importantes precisam ser estudados e confirmados, como a presença de sais e matéria orgânica no solo. Estudos futuros tentam explorar vários dos aspectos pouco conhecidos nesse problema das convecções em Europa, e a cada descoberta os indícios de água se tornam mais animadores, e conseqüentemente alimenta o debate da existência de vida. Desse modo, há grandes expectativa nas próximas missões destinadas à Júpiter e suas luas.

5.1 Próximas Missões

A geodinâmica de Europa e o comportamento da casca de gelo é completamente controlada por dois fatores: as propriedades mecânicas da litosfera e a sua evolução térmica. Dessa forma, mais estudos acerca da reologia dessa lua são cruciais para restringir os parâmetros que possam então avaliar o quão próximo da realidade é o modelo de convecções internas em Europa, e conseqüentemente podemos estudar sua estratificação e concluir a distribuição de gelo e água líquida. A história geológica de Europa é muito pouco conhecida, ou seja, não sabemos se houve alguma mudança no recebimento de energia das marés. Mais que isso, algum processo diferente já foi o dominante? E sobre as estruturas geológicas, já houveram outras formações? E que tipos de variações das características orbitais e rotacionais de Europa ocorreram com o tempo? E o que elas significaram?

Os dados da Voyager e de Galileo levantaram essas e outras perguntas. Graças a essas sondas se pôde medir a gravidade, densidade, magnetosfera e outros parâmetros importantes, levantar evidências de que Europa é estratificada, detectar materiais orgânicos na superfície e o mais importante, trouxeram imagens que acenderam o debate de um ambiente geologicamente ativo. Mas como é comum no universo científico, a capacidade

de resposta só aumenta a curiosidade pois elaboramos melhor nossas perguntas. Para ajudar a restringir as perguntas, outros tipos de estudos são igualmente relevantes, como por exemplo as análises espectroscópicas da superfície que visam classificar a composição química desta, estudar os compostos lá presentes e suas distribuições. Estudos teóricos da órbita auxiliam a entender melhor a natureza do efeito de maré e traçar um histórico da evolução de Europa, permitindo estudar seu passado geológico.

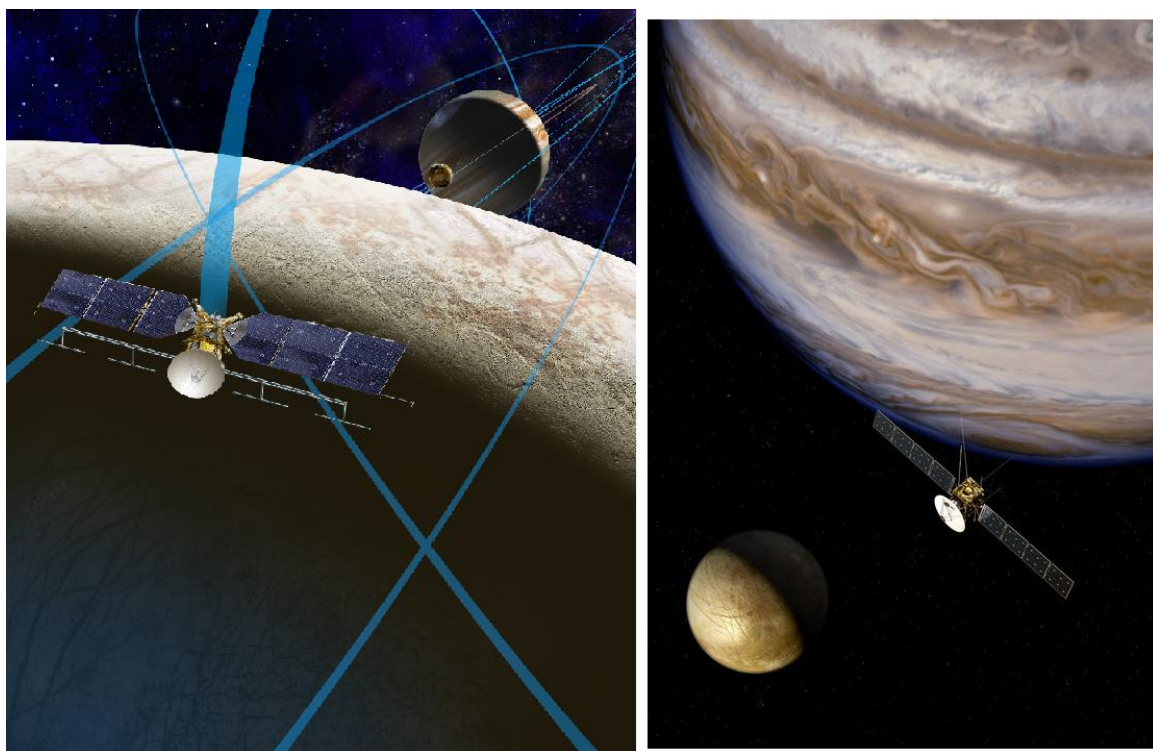


Figura 5.1: Concepções artísticas de futuras missões destinadas a estudar Europa. Esquerda: Europa Clipper. Créditos: NASA/JPL-Caltech. Direita: Missão JUICE (Jupiter Icy Moon Explorer). Créditos: ESA/AOES.

Porém, após Voyager e Galileo, e dada a incrível capacidade humana de redefinir a fronteira da exploração espacial, as novas missões como *Europa Clipper* (NASA/JPL-Caltech), proposta para ser lançada em 2025, e *JUICE* (Jupiter Icy Moon Explorer, ESA), a ser lançada em 2022, são de extrema importância para embasar o que temos de conhecimento, melhorar nossos questionamentos e nos guiar às perguntas conclusivas. Imagens de altíssima resolução, com reconhecimento detalhado e instrumentos que possam medir a espessura da casca é o que promete a missão Europa Clipper. A JUICE possuirá uma vasta gama de instrumentos, que caracterizarão ainda mais a vizinhança de Júpiter e promoverá estudos conclusivos sobre importantes parâmetros de Europa.

5.2 Sobre Água e Vida em Europa

A existência de água em Europa ainda não foi constatada. Além da divisão litosférica em uma porção de gelo e outra de água líquida, e todos os modelos que suportam essa teoria, outra evidência da existência de um oceano se deu pela medição de pequenas variações no campo magnético próximo à Europa. Como as luas Galileanas não possuem campo magnético intrínseco (exceto Ganimedes), qualquer medição de campo na vizinhança Joviana seria decorrente da magnetosfera de Júpiter. Com isso, as alterações próximas à Europa foram interpretadas como sendo causadas por um oceano salino subsuperficial, que pela sua movimentação funcionaria como um dipólo elétrico (Khurana et al. 1998). Isso reacendeu o debate teórico sobre a existência de água, e juntamente com a constatação de amônia (McCord et al. 1998), sais e compostos orgânicos na superfície, esse debate tem vindo sempre acompanhado da possibilidade de vida. Mas como se daria o desenvolvimento de vida nesse ambiente?

Pouquíssimo se sabe sobre as condições 150 quilômetros abaixo da superfície de Europa, no fundo do provável mar. Mas Europa parece sim apresentar os ingredientes propícios à vida. Apesar da temperatura do oceano provavelmente ser baixa, a dissipação das marés, além de fornecer energia suficiente para manter um oceano e gerar as convecções, pode aquecer suficientemente a água para que a temperatura se torne propícia à ocorrência de reações químicas necessárias à vida. A provável existência de aberturas termais no manto rochoso (liberando calor do núcleo de ferro), também contribuiria com a energia necessária para vida. Mais que isso, se o interior rochoso de Europa apresenta aberturas hidrotérmicas, como no fundo dos oceanos da Terra, organismos tais como os extremófilos¹ poderiam se desenvolver. Nesse ambiente, os processos convectivos podem transportar nutrientes da superfície (provenientes de impactos de asteroides, por exemplo) para camadas mais profundas, e a casca de gelo funcionaria como um escudo para a radiação que ionizaria elementos essenciais para a formação de moléculas mais complexas.

¹Extremófilos são organismos que vivem em condições geoquímicas extremas, como próximos a fontes hidrotermais no fundo dos oceanos, com alto índice de enxofre, elevada temperatura e sob altíssimas pressões.



Figura 5.2: Concepção artística de criorobô que poderia ser usado para explorar o fundo do oceano de Europa. Não há evidência de que o manto rochoso apresente fontes hidrotermais como na figura. Créditos: NASA/JPL-Caltech.

Vale ressaltar, o maior esforço desse trabalho não é exatamente buscar diretamente vida em Europa, mas tentar caracterizar a habitabilidade desta lua. O primeiro capítulo deste estudo se inicia com um dos maiores consensos entre a comunidade científica: a probabilidade de vida em Europa é mais real do que em qualquer outro lugar na vizinhança solar. Robert T. Pappalardo, um dos mais atuantes pesquisadores de Europa, disse em 2006: "Nós gastamos um bom tempo e esforço tentando descobrir se Marte foi um dia um ambiente habitável. Europa, hoje, provavelmente, é um ambiente habitável. Precisamos confirmar isso... mas Europa, potencialmente, possui todos os ingredientes para vida... e não somente para bilhões de anos atrás... mas para hoje". Dessa forma, sendo o modelo aqui presente compatível com a presença de água em Europa, estudos mais aprofundados se fazem importantes, pois a confirmação de um oceano seria tão incrível quanto suas implicações.

Apêndice A

Adimensionalização

As equações de Navier-Stokes permitem determinar campos de velocidade e pressão num fluido em escoamento. A Eq. (2.18) representa a conservação de momento, enquanto a Eq. (2.34) vem da conservação de energia, e ambas foram apresentadas na Seção 2.3 já na forma adimensional pelas Eqs. (2.35) e (2.36).

A adimensionalização é empregada em problemas de mecânica dos fluidos pois permite a identificação de parâmetros que caracterizam o sistema, como por exemplo o número de Rayleigh, além de ser uma técnica computacional importante para tratar o problema sem preocupação direta com dimensões e valores das grandezas envolvidas, o que facilita o processo de estruturação dos algoritmos e na posterior análise dimensional dos resultados.

A.1 Conservação de Momento

Na equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, temos as seguintes grandezas adimensionais:

$$\eta = \tilde{\eta}\eta_0, \quad x = \tilde{x}d, \quad z = \tilde{z}d, \quad (\text{A.1})$$

$$P = \tilde{P}\frac{\eta_0\kappa}{d^2}, \quad u = \tilde{u}\frac{\kappa}{d}, \quad t = \tilde{t}\frac{d^2}{\kappa}. \quad (\text{A.2})$$

Letras com o til representam as grandezas sem dimensão, variando seus valores independentemente. Para os parâmetros viscosidade e comprimento, a dimensão está em η_0 e d , que guardam valores usuais do problema (presentes na Tabela 2.1). Por ser constante, κ possui o mesmo valor mostrado na Tabela 2.1. Ele é utilizado para conferir a dimensão necessária às demais grandezas. Pressão, velocidade e tempo são as variáveis cujas dimensões estão definidas a partir de parâmetros do problema.

A adimensionalização do tensor de estresse é obtida pela sua definição da Eq.

(3.1) com auxílio da (3.2):

$$\sigma'_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} = 2\tilde{\eta}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial\tilde{x}_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial\tilde{x}_i}\right)\eta_0\frac{\kappa}{d^2} = \tilde{\sigma}'_{ij}\eta_0\frac{\kappa}{d^2}. \quad (\text{A.3})$$

No caso da temperatura, ela possui uma notação diferenciada (sendo representada por θ), cuja adimensionalização se dá por:

$$\theta = \frac{T - T_b}{\Delta T}, \text{ onde } \Delta T = T_t - T_b.$$

Aqui θ se faz adimensional por ser a razão de uma temperatura genérica T subtraída da temperatura inicial do problema, T_b , dividida pela diferença de temperatura usual do problema, $\Delta T = T_t - T_b = 170$ K.

A equação de Navier-Stokes para o momento nas direções x e z , como definida na Eq. (2.18), é dada por

$$\begin{aligned} (\text{equação em } x) \quad & \frac{\partial\sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma'_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x = 0, \\ (\text{equação em } z) \quad & \frac{\partial\sigma'_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma'_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Perceba que essa é a equação de conservação do momento, com dimensão de força por volume [N/m^3] e um termo viscoso (η) ligado à velocidade. Uma equação de estado muito comum em problemas de dinâmica de fluidos é a *Aproximação de Boussinesq*, que descreve uma dependência linear da densidade com temperatura. Ela é definida a partir do fato de que a variação da densidade de fluidos, com a temperatura T e pressão P , normalmente é caracterizada pelos coeficientes de expansividade térmica (α) e compressibilidade (β):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial T}, \\ \beta &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial P}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Nos casos de α e β constantes, integrar as equações anteriores em T e P resulta em

$$\rho = \rho_r \exp^{\beta(P-P_r) - \alpha(T-T_r)}, \quad (\text{A.6})$$

onde os valores com subscrito r (ρ_r , P_r e T_r) são os valores de referência do sistema, como valores iniciais. Sendo $\beta(P - P_r)$ e $\alpha(T - T_r)$ muito menores que a unidade e, particularmente, $\alpha \gg \beta$ e a variação $(P - P_r)$ comparativamente menor que $(T - T_r)$, consideramos apenas o fator da temperatura e usamos a regra $\exp^{-a} \approx 1 - a$, com $a \ll 1$, e obtemos (Ismail-Zaden & Tackley 2010):

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_b)], \quad (\text{A.7})$$

onde ρ_0 é uma densidade de referência, que é o valor da densidade à temperatura T_b . A aproximação de Boussinesq representa uma simplificação importantíssima para esse modelo.

Após essas definições, voltamos à equação geral de momento (2.18) substituindo ρ com a definição da (A.7), que fornece

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho_0 g_i - \rho_0 g_i \alpha (T - T_b) = 0. \quad (\text{A.8})$$

O terceiro termo pode ser interpretado como um novo termo de pressão e entrar no gradiente da seguinte forma:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} (P + x_i \rho_0 g_i) - \rho_0 g_i \alpha (T - T_b) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Agora aplicamos as definições de parâmetros e variáveis adimensionais para as grandezas dessa equação, apresentadas por (A.1), (A.2) e (A.3), além de utilizar a definição de $T - T_b$ dada pela adimensionalização da temperatura:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}'_{ij}}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\eta_0 \kappa}{d^3} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left(\tilde{P} \frac{\eta_0 \kappa}{d^3} + \tilde{x}_i \rho_0 g_i d \right) - \rho_0 g_i \alpha \Delta T \theta = 0. \quad (\text{A.10})$$

Dividindo a equação anterior pelo fator $\frac{\eta_0 \kappa}{d^3}$, temos:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}'_{ij}}{\partial \tilde{x}_j} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left(\tilde{P} + \tilde{x}_i \frac{d^3}{\eta_0 \kappa} \rho_0 g_i d \right) - \frac{\rho_0 g_i \alpha d^3 \Delta T}{\eta_0 \kappa} \theta = 0. \quad (\text{A.11})$$

Chamaremos o conteúdo no parêntese de uma pressão p que está associado a um gradiente em x_i , que representa as coordenadas cartesianas x e z . Somente \tilde{P} e \tilde{x}_i não são constantes, e uma simples análise revela que as dimensões dos termos ligados a \tilde{x}_i se cancelam. Além disso, as grandezas ao lado do θ definem o número de Rayleigh (Ra) via Eq. (2.38). Sendo $g_i = 0$ se $i = x$, e $g_i = g\mathbf{z}$ se $i = z$, e usando ∇ como notação do gradiente em p , temos:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}'_{ij}}{\partial \tilde{x}_j} - \nabla p - (Ra\theta)\mathbf{z} = 0, \quad (\text{A.12})$$

que é exatamente a Eq. (2.35), apresentada omitindo-se o til por conveniência, assim como foi feito para os passos subsequentes no Capítulo 3. Vale ressaltar que o rotacional aplicado ao último termo resulta em uma derivada em x negativa, por isso o sinal negativo no segundo membro na Eq. (3.4) no Capítulo 3.

A.2 Conservação de Energia

A equação de conservação de energia encontrada no Capítulo 2 (Eq. (2.34)) foi

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + q, \quad (\text{A.13})$$

onde k é a condutividade térmica do problema definida como $k = \kappa\rho_0c_p$, e q é a taxa de produção de calor interna. Abrindo as derivadas:

$$\rho_0c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0c_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q. \quad (\text{A.14})$$

Usando as definições de parâmetros adimensionais e substituindo k por sua definição:

$$\frac{\rho_0c_p\Delta T\kappa}{d^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} + \frac{\rho_0c_p\Delta T\kappa}{d^2} \left(\tilde{u}_x \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{\rho_0c_p\Delta T\kappa}{d^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} \right) + q. \quad (\text{A.15})$$

Dividindo tudo por $\frac{\rho_0c_p\Delta T\kappa}{d^2}$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} + \left(\tilde{u}_x \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} \right) = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} \right) + q', \quad (\text{A.16})$$

onde

$$q' = q \frac{d^2}{\rho_0c_p\Delta T\kappa}. \quad (\text{A.17})$$

Apêndice B

Método das Diferenças Finitas

Muito utilizado em problemas numéricos, o método das diferenças finitas é aqui apresentado para as derivadas usuais do problema. Considere um grid 2-D construído para representar uma função genérica ϕ . O elemento $\phi_{i,k}$ representa a posição da linha i e coluna k do grid. A derivada (central) de primeira ordem para esta função é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\phi_{i+1,k} - \phi_{i-1,k}}{2h}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= \frac{\phi_{i,k+1} - \phi_{i,k-1}}{2h},\end{aligned}\tag{B.1}$$

onde h representa a distância entre elementos do grid. Temos $h = \Delta x$ para a derivada em x e $h = \Delta z$ para a derivada em z , mas possui o mesmo valor se o grid representa uma caixa de lados iguais, que é o caso de nosso modelo. A derivada de segunda ordem, que parte de (B.1) utilizando pontos auxiliares entre os pontos do grid, é definida como

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \frac{\phi_{i+1,k} - 2\phi_{i,k} + \phi_{i-1,k}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} &= \frac{\phi_{i,k+1} - 2\phi_{i,k} + \phi_{i,k-1}}{h^2}.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Vemos pela Eq. (3.5) que se faz necessário resolver um termo cruzado de derivadas, definido como o operador G pela (3.6). Nesse caso, o método de derivadas finitas fornece

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} = \frac{\phi_{i,k} - \phi_{i-1,k} - \phi_{i,k-1} + \phi_{i-1,k-1}}{h^2}.\tag{B.3}$$

Essas derivadas estão presentes no código desenvolvido através de rotinas (funções em *Python*), que recebem um grid genérico representado pela letra M (de matriz). Na figura a seguir está um trecho do código que define as derivadas a serem aplicadas na resolução das Eqs. (2.35) e (2.36) pelos métodos discutidos no Capítulo 3. Também estão na figura os operadores F e G definidos no mesmo capítulo, e a função η que depende da temperatura, cuja expressão é dada pela Eq. (2.2) e A_cte é a constante A discutida no Capítulo 2, dada pela (2.3).

```

##### Building Functions #####
#
## Derivatives
def f_z_2(M,i,k): # second deriv. in z

    f_z_2 = ( M[i+1,k] - 2.*M[i,k] + M[i-1,k] ) / (dz**2)

    return f_z_2

def f_x_2(M,i,k): # second deriv. in x

    f_x_2 = ( M[i,k+1] - 2.*M[i,k] + M[i,k-1] ) / (dx**2)

    return f_x_2

def f_cross_2(M,i,k):

    f_cross_2 = ( M[i,k] - M[i,k-1] - M[i-1,k] + M[i-1,k-1] ) / (dx*dz)

    return f_cross_2

#
## Functions of derivatives
def F(M,i,k):

    F = f_z_2(M,i,k) - f_x_2(M,i,k)

    return F

def G(M,i,k):

    G = f_cross_2(M,i,k)

    return G

#
## Eta - function of temperature
def eta(Temp):

    return eta_0 * np.exp(A_cte * (T_m/Temp - 1.) )
#
#####

```

Figura B.1: Trecho do código em que funções das derivadas são definidas. A definição dos operadores F e G e da função da viscosidade $\eta(T)$ também estão presentes.

Apêndice C

Métodos Numéricos

C.1 Método de Sobrerrelaxação

Após alguns testes de convergência que buscavam otimizar a solução do modelo, o método iterativo escolhido para resolver a equação de momento (2.35) foi o SOR, ou Soberrelaxação Sucessiva. Ele equivale ao método de Gauss-Seidel otimizado, que se assemelha ao método de Jacobi. Se desejamos atualizar o grid Ψ num determinado algoritmo a partir de valores vizinhos, pelo método de Jacobi seria da forma

$$\Psi_{new}(i, k) = \frac{\Psi_{old}(i+1, k) + \Psi_{new}(i-1, k) + \Psi_{old}(i, k+1) + \Psi_{new}(i, k-1)}{4}. \quad (C.1)$$

O método de Gauss-Seidel é um avanço sobre esse pois sua convergência é mais rápida e, além disso, ele não requer a utilização de dois grids diferentes com valores antigos para atualizar novos, já que novos valores podem ser usados assim que calculados. Dessa maneira, podemos atualizar $\Psi(i, k)$ usando um algoritmos da forma

$$\Psi(i, k) = \frac{\Psi(i+1, k) + \Psi(i-1, k) + \Psi(i, k+1) + \Psi(i, k-1)}{4}. \quad (C.2)$$

Porém, a velocidade de convergência ainda pode ser melhorada, o que ocorre com a utilização do método de Sobrerrelaxação Sucessiva, aplicado da seguinte maneira: seja Ψ^* o novo valor do grid calculado via Gaus-Seidel (C.2). Definimos

$$\Delta\Psi(i, k) = \Psi^*(i, k) - \Psi_{old}(i, k), \quad (C.3)$$

como a mudança recomendada pelo método Gaus-Seidel. O problema dessa diferença é que ela ainda se mantém muito conservadora. De modo a agilizar o processo, aumentamos o valor de $\Delta\Psi(i, k)$ por um valor α_{SOR} e o novo grid é definido por:

$$\Psi_{new}(i, k) = \alpha_{SOR}\Delta\Psi(i, k) + \Psi_{old}(i, k), \quad (C.4)$$

onde α_{SOR} é o fator que mede o quanto há de "sobrerrelaxação". Se $\alpha_{SOR} = 1$ temos o próprio método de Gaus-Seidel. Se $\alpha_{SOR} > 2$ o método não converge, e se $\alpha_{SOR} < 1$

há "subrelaxação". O método conhecido como Sobrerrelaxação Sucessiva emprega a Eq. (C.4) com valor de α_{SOR} entre 1 e 2, que é definido como

$$\alpha_{SOR} = \frac{2}{1 + \pi/L}, \quad (C.5)$$

onde L representa o número de elementos do grid.

A figura a seguir apresenta o trecho do código em que o método de Sobrerrelaxação é definido, com elementos como C_1 , C_2 e C_3 , e outros fatores presentes na Eq. (3.10). As construções de u e v são feitas para isolar de todo o resto o elemento do grid que interessa ($\Psi^*(i, k)$ de (C.3), representado por M_ast), artifício algebricamente simples. Novamente, a função foi definida para ser aplicada a um grid M qualquer.

```
alpha_sor = 2./(1. + (np.pi/nx)) # Alpha for SOR

for k in np.arange(l1,lp2): # run over cols (different x values)
    for i in np.arange(n1,np2): # run over the line (different z values)

        ## Constants
        C1 = F(Eta,i,k) / Eta[i,k]
        C2 = G(Eta,i,k) / Eta[i,k]
        dT_dx = (T[i,k+1] - T[i,k-1])/(2.*dx)
        C3 = -(Ra * dT_dx) / Eta[i,k]

        ## Building u
        u = ( -2.*C1/(dz**2) + 2.*C1/(dx**2) + 6./(dz**4)
              + 6./(dx**4) + 4.*C2/(dx*dz) + 8./((dx**2)*(dz**2)) )

        ## Building v
        v_1 = (M[i+1,k] + M[i-1,k])/(dz**2) - (M[i,k+1] + M[i,k-1])/(dx**2)
        v_2 = (M[i+2,k] - 4.*M[i+1,k] - 4.*M[i-1,k] + M[i-2,k])/(dz**4)
        v_3 = (M[i,k+2] - 4.*M[i,k+1] - 4.*M[i,k-1] + M[i,k-2])/(dx**4)
        v_4 = (-M[i,k-1] - M[i-1,k] + M[i-1,k-1])/(dx*dz)
        v51 = M[i+1,k+1] - 2.*M[i+1,k] + M[i+1,k-1]
        v52 = M[i,k+1] + M[i,k-1]
        v53 = M[i-1,k+1] - 2.*M[i-1,k] + M[i-1,k-1]
        v_5 = (v51 - 2.*v52 + v53)/((dx**2)*(dz**2))
        v = C1*v_1 + v_2 + v_3 + 4.*C2*v_4 + 2.*v_5

        ## Defining psi_ast
        M_ast = (C3 - v) / u
        delt_M = M_ast - M_old[i,k]
        M[i,k] = delt_M * alp + M_old[i,k]
```

Figura C.1: Trecho do código em que o método SOR é definido para ser utilizado na resolução do grid de Ψ .

C.2 Runge-Kutta

Para a parcela temporal do problema, resolvemos a equação de energia (3.11) via Runge-Kutta de primeira ordem. Este é um método por etapas que se utiliza de um valor inicial, cujo esquema é dado por:

$$T^{t+\Delta t} = T^t + f(t, T)\Delta t, \quad (\text{C.6})$$

onde T^t representa um valor inicial para $t = 0$ e $f(t, T)$ é uma função a ser definida, que nesse caso é dada pelos termos laplaciano, de advecção e pela dissipação volumétrica da energia q . A C.6 é implementada na última linha do trecho a seguir, que é o mesmo que a Figura 3.2:

```
##### Updating Temperature Grid
for k in np.arange(l1,lp2): # run over cols (different x values)
    for i in np.arange(n1,np2): # run over the line (different z values)

        q_num = ( epsi_0**2. * (omega)**2. * eta(T[i,k]) )
        q_den = ( 1 + (omega**2. * eta(T[i,k])**2.) / mu**2. )
        q = (q_num / q_den) * non_dim_q # adimensional tidal dissipation rate

        ad1 = vx[i,k] * ( (T[i,k+1] - T[i,k-1])/(2.*dx) ) # Central first deriv.
        ad2 = vz[i,k] * ( (T[i+1,k] - T[i-1,k])/(2.*dz) ) # Central first deriv.
        advec = ad1 + ad2

        laplace = f_x_2(T,i,k) + f_z_2(T,i,k)

        T[i,k] = T[i,k] + (laplace - advec + q) * delt_t
```

Figura C.2: Resolução via Runge-Kutta. A função $f(t, T)$ é expressa pelo termo em parênteses na última linha, com os termos laplaciano, advectivo e q .

Apêndice D

Detalhes da Superfície

Neste apêndice encontram-se imagens extras que ajudam a entender as peculiaridades do relevo de Europa, e fornecem um melhor entendimento do ambiente que estamos descrevendo neste estudo.

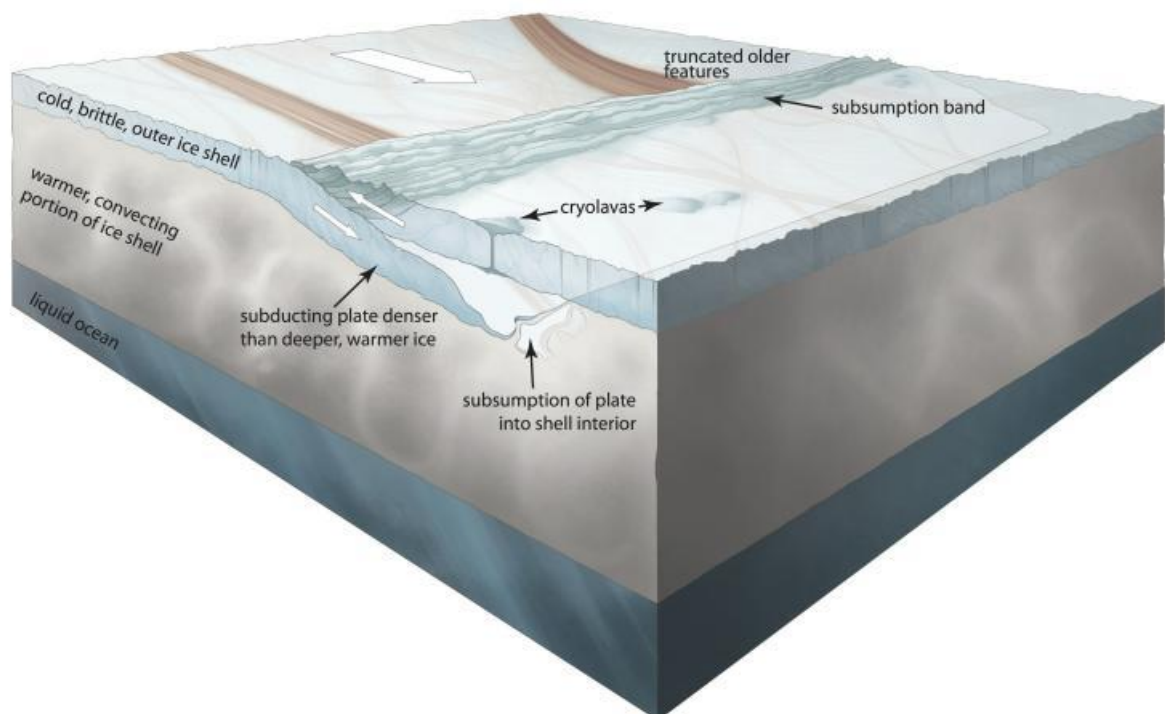


Figura D.1: Estudos têm dado suporte à existência de tectonismo em Europa. Essa ilustração conceitual do processo (onde uma placa é forçada sob a outra) mostra como a camada mais externa se move de encontro à uma porção mais aquecida da camada mais profunda. Esse processo semelhante a placas em limite convergente. Uma banda de baixo relevo foi criada na superfície e derretimento local gerou "criolavas". Créditos: NASA/Noah Kroese, I.NK.

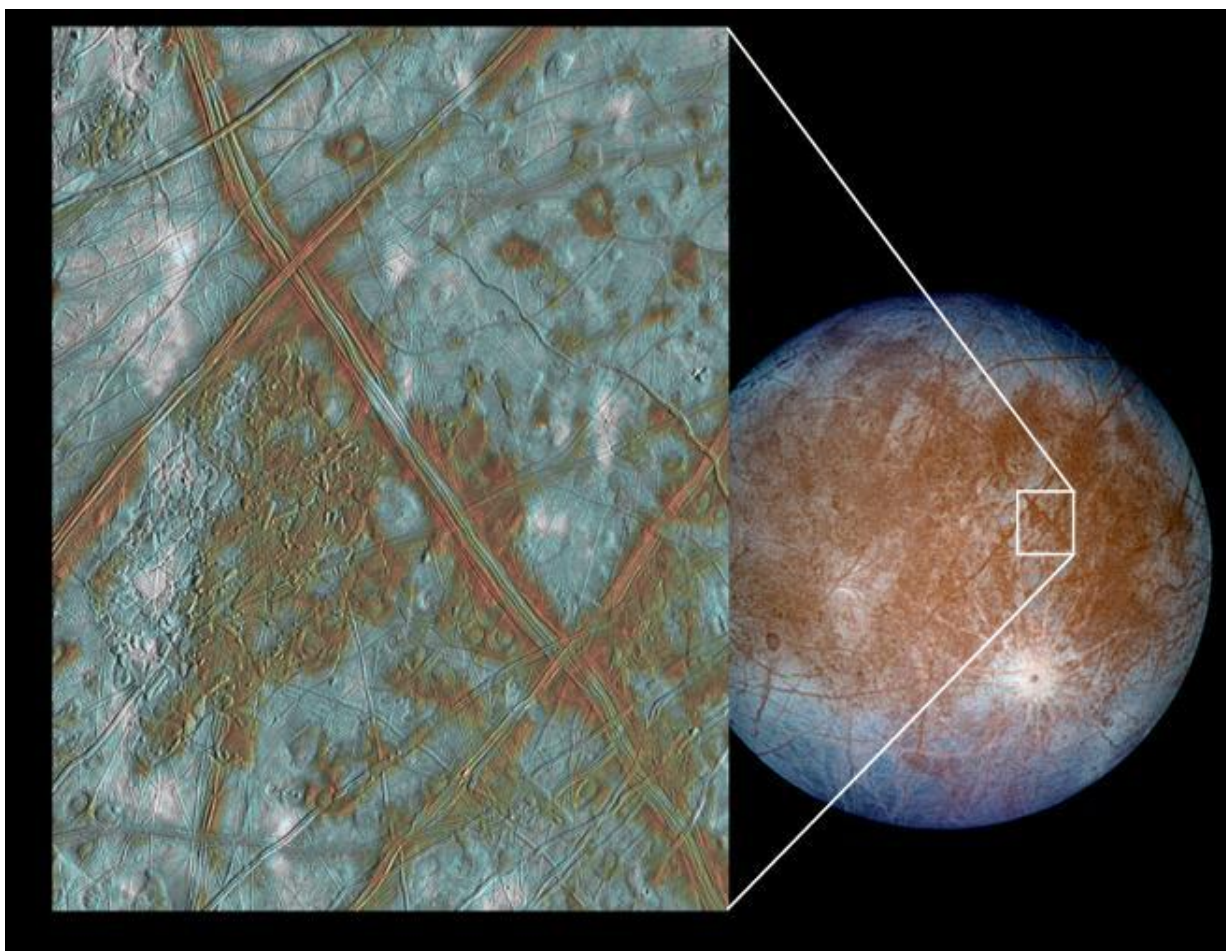


Figura D.2: A imagem da esquerda mostra uma porção da crosta de Europa feita de blocos que se separaram e foram transportados para novas posições. Essas são uma das melhores evidências geológicas da existência de água líquida. Essas são as chamadas regiões caóticas, e em destaque está Conamara Chaos. Nessa imagem de cores falsas, as áreas vermelho-amarronzadas representam materiais diferentes de gelo resultante de atividade geológica. Áreas em branco são o resultado da ejeção de material durante a formação da cratera de impacto Pwyll, de 25 quilômetros de diâmetro. Planícies de gelo são mostradas em tom azul para distinguirmos grãos mais grossos (azul escuro) de mais finos (azul claro). Linhas largas e escuras são cristas e fraturas diversas, algumas com mais de 3 mil quilômetros de extensão. Créditos: NASA/JPL/University of Arizona.

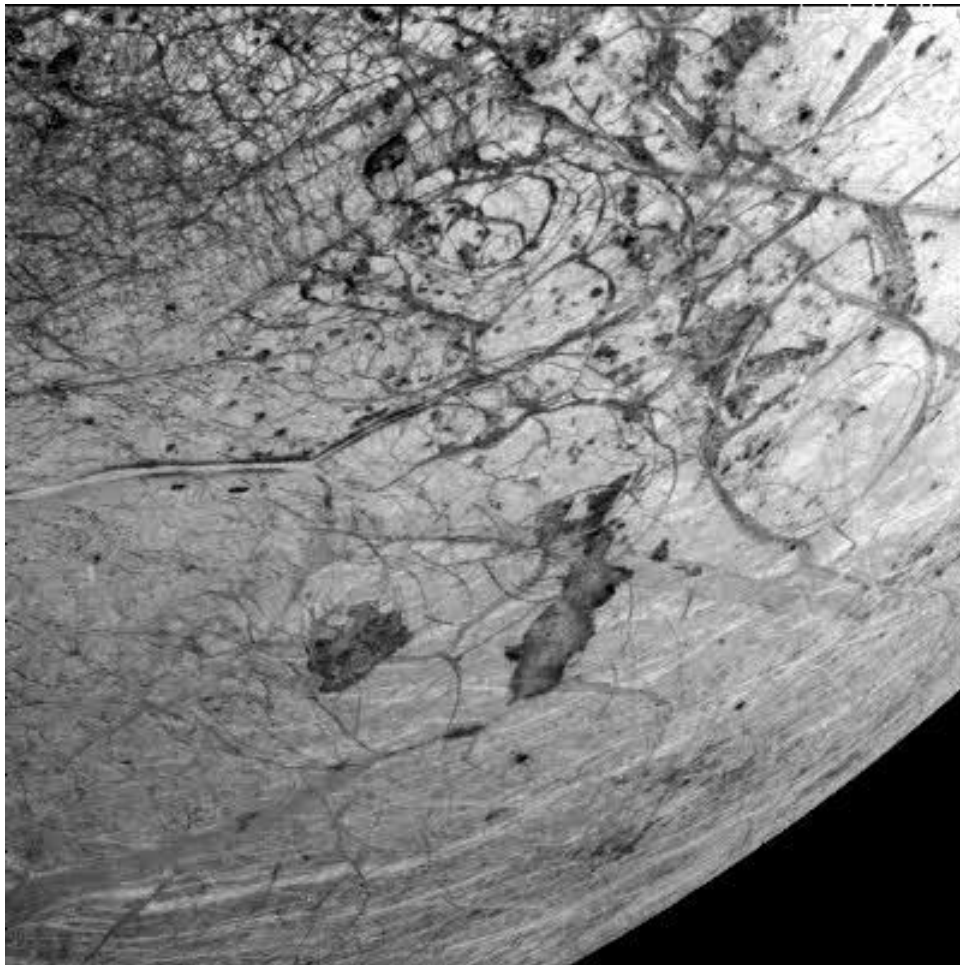


Figura D.3: Essa imagem do hemisfério sul de Europa foi obtida pela sonda Galileo durante sua sexta órbita ao redor de Júpiter. A parte esquerda superior apresenta uma região da lua que sofreu um intenso processo de enfraquecimento da superfície. Ao sul, se encontra Agenor Linea, uma misteriosa formação composta de diversas cristas paralelas. Thera e Thrace Macula são as formações escuras e irregulares que se sobressaem ao centro, sendo Thera a menor delas, mais à esquerda. Norte é o topo da imagem e o Sol ilumina a superfície pela direita. A imagem cobre uma área de aproximadamente 675 por 675 quilômetros. Essas imagens foram tiradas em 20 de fevereiro de 1997, às 12 horas, 55 minutos e 34 segundos (Universal Time), quando a sonda estava a 81.707 quilômetros da superfície. Créditos: NASA/JPL.



Figura D.4: Pontos vermelhos e cavidades compõem a superfície cortada por cristas de Europa, nessa figura que combina informações de imagens tiradas por Galileo durante duas órbitas diferentes por Júpiter. Os domos e cavidades presente nesta região do hemisfério norte de Europa possuem aproximadamente 10 quilômetros de diâmetro cada. Os pontos escuros são os chamados lenticulae, termo em latim para sardas. Seus tamanhos similares sugerem que a camada de gelo de Europa deva estar sofrendo com experimentando processos como os caracterizados por convecções de manto, com gelo mais aquecido movendo-se para cima enquanto porções mais frias da superfície experimentam rompimento por derretimento parcial. Essa seria outra evidência da existência de um oceano subsuperficial abaixo compondo sua litosfera. Créditos: NASA/JPL/University of Arizona/University of Colorado.

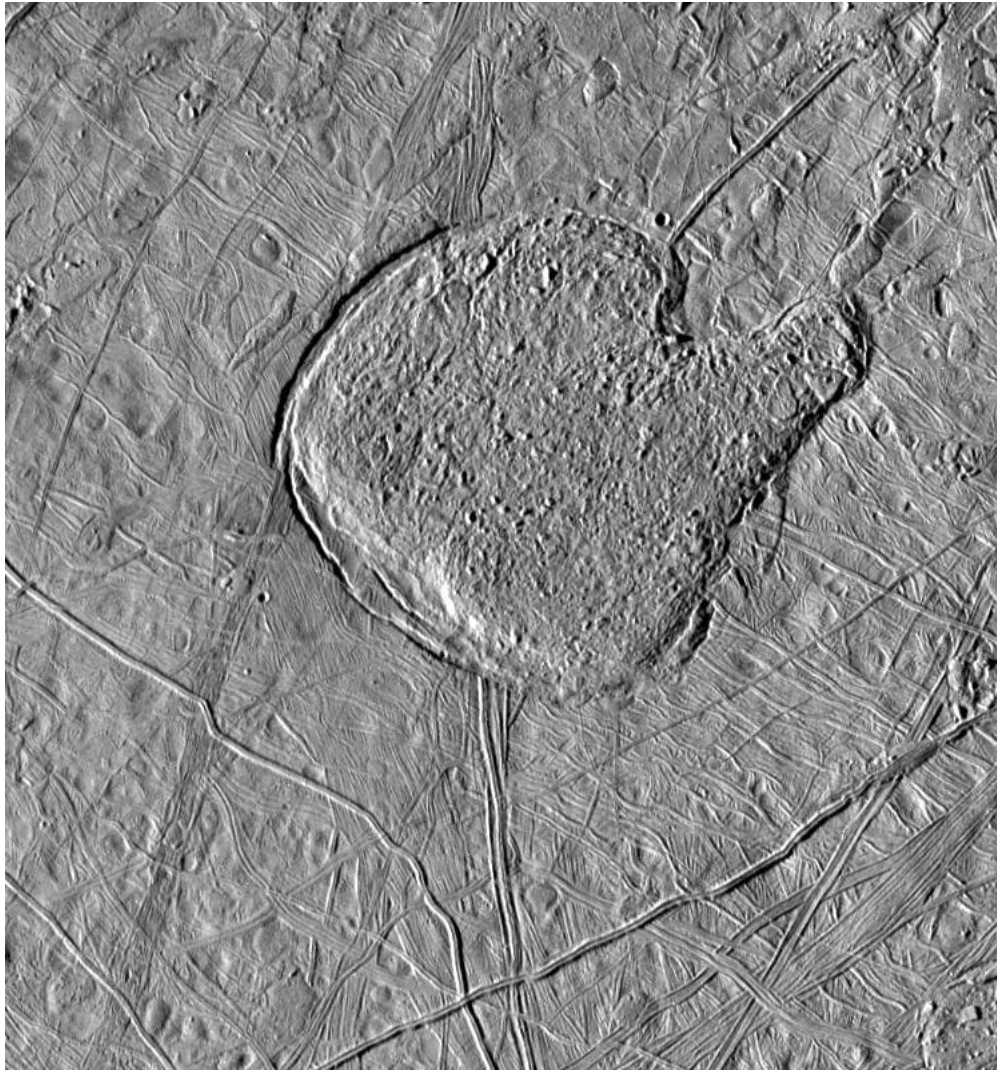


Figura D.5: Essa vista de Europa mostra uma região que possui textura similar à matriz de terrenos caóticos, que são avistadas em resoluções médias a altas em diversos locais pela superfície. O desenvolvimento deste terreno deve ser o principal processo de rejuvenescimento desta lua. O norte está para o topo e o Sol ilumina a superfície pela esquerda. Convecção da camada interna poderia gerar movimento vertical em áreas com diferentes concentrações de calor (leia-se energia), que atinjam uma superfície não uniforme em sua espessura. Depósito direto de material convectivo na superfície seria possível, ou água líquida a partir de canais extensos (diapirs, por exemplo). A imagem cobre uma área de aproximadamente 175 por 180 quilômetros. A resolução é de 235 metros por elemento de figura. As imagens foram tiradas em 31 de Maio de 1998, à uma distância de 23 mil quilômetros pela sonda Galileo. Créditos: NASA/JPL/University of Arizona.

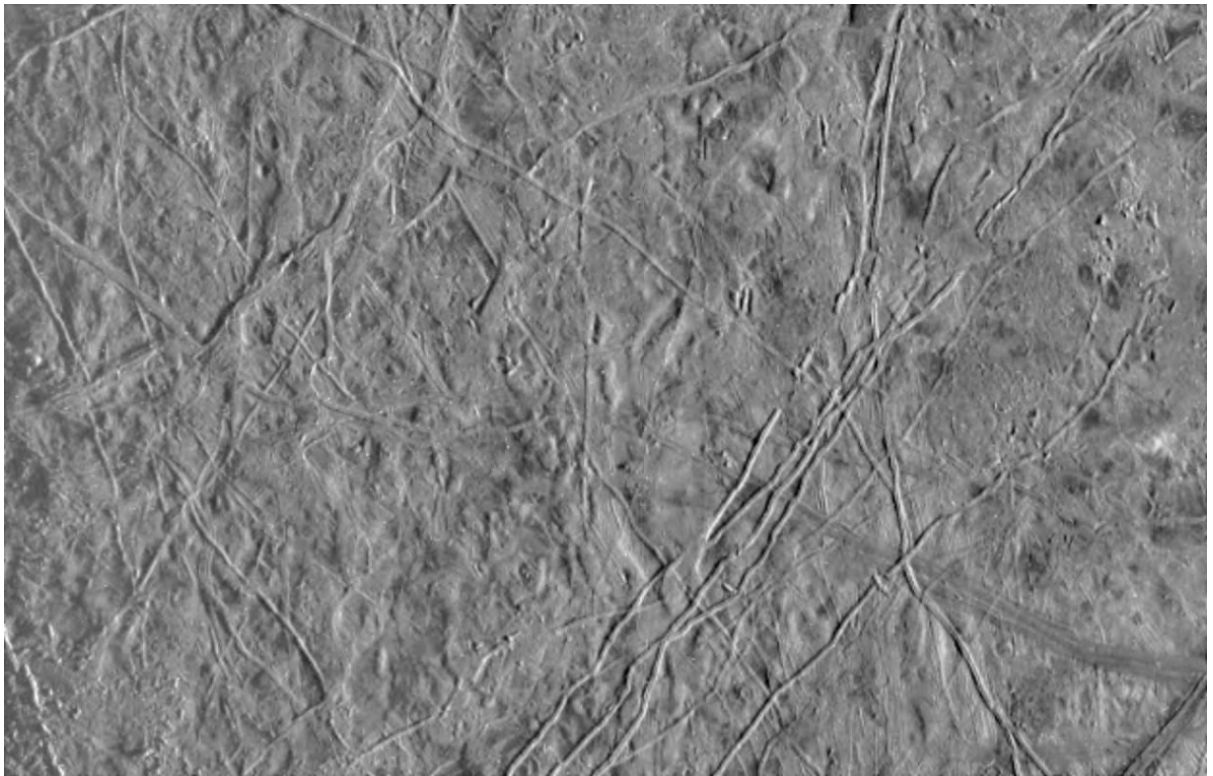


Figura D.6: Essa imagem de Europa foi obtida a 62 mil quilômetros de altura pela sonda Galileo durante sua primeira aproximação de Europa. A área na imagem é de 252 por 393 quilômetros, e mostram estruturas com tamanho mínimo de 1,6 quilômetros. O Sol ilumina pela direita, revelando diversas cristas cortando a cena, platôs com extensão de 10 quilômetros e manchas escuras que são depressões, apresentando materiais mais escuros. Nenhuma cratera de impacto é observada, indicando que este é um local geologicamente jovem. Algumas cristas apresentam espaços vazios com interrupções abruptas, e a diferença na textura do terreno próximo indicam que as partes faltantes foram provavelmente apagadas por material "criovulcânico". Esse material deve ser basicamente composto por água subsuperficial ou gelo da camada convectiva, transportado por processo diapírico. Créditos: NASA/JPL/University of Arizona.



Figura D.7: A sonda Galileo fez sua maior aproximação de Europa passando a 200 quilômetros da superfície. Essa imagem foi tirada num dos pontos mais próximos à numa altura de 560 quilômetros, e é a imagem de maior resolução obtida por Galileo. A foto foi registrada numa posição de grande obliquidade, de forma que a visão se assemelha à de alguém olhando pela janela de um avião. As estruturas na parte debaixo da imagem estão muito mais próximas do observador do que àquelas do topo. Muitas cristas brilhantes são observadas na figura, com materiais mais escuros nos vales e depressões. No centro da imagem, as cristas e vales regulares dão lugar a uma região mais escura com colinas que se atravessam, que devem ser uma das várias regiões que chamamos de lenticulae. Estruturas circulares escuras e menores são provavelmente crateras de impacto. O norte é para a direita da figura, e o Sol ilumina a superfície também pela direita. Essa imagem tem aproximadamente 1.8 quilômetros de extensão. A resolução é de 6 metros por elemento de figura. Essa foto foi tirada em 16 de dezembro de 1997. Créditos: NASA/JPL.

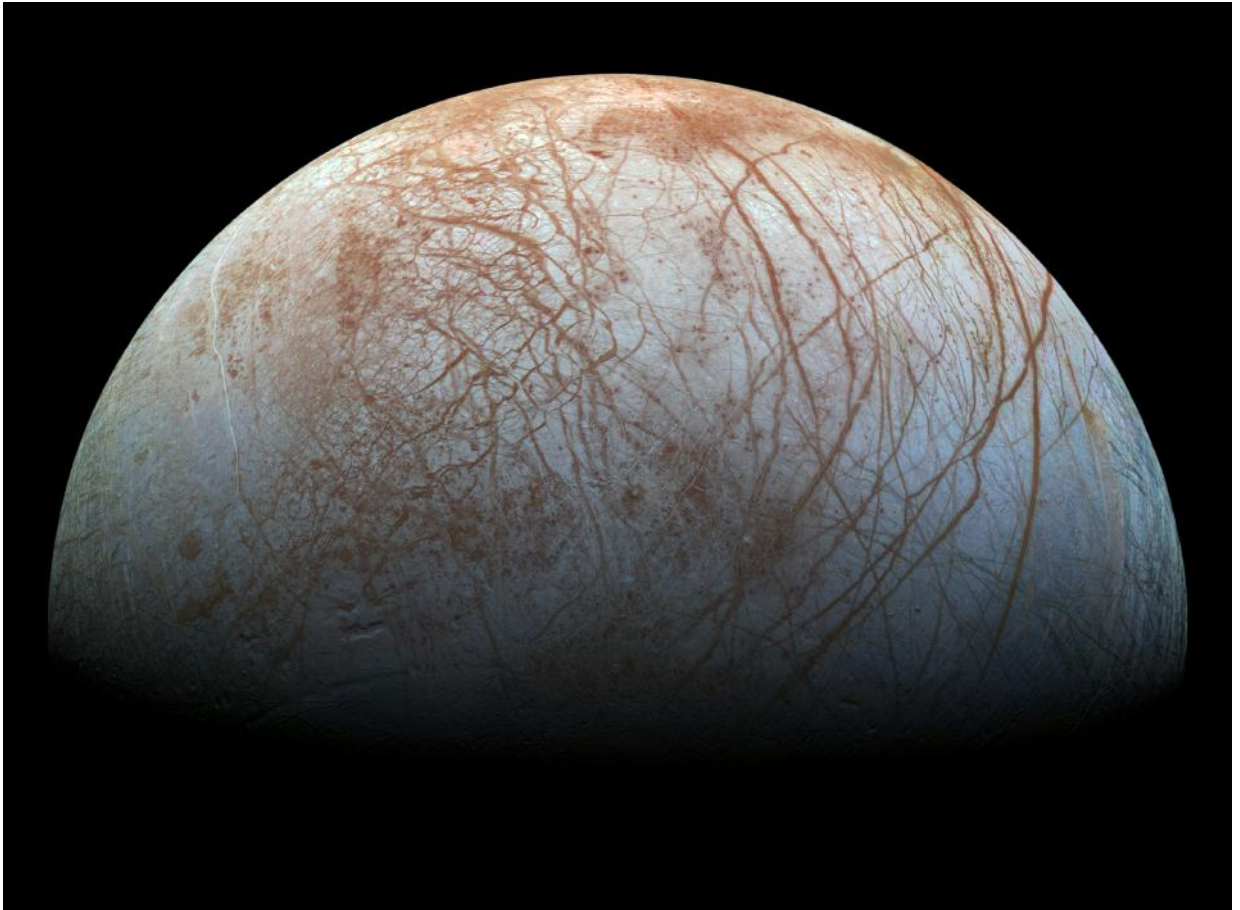


Figura D.8: A enigmática e fascinante superfície de Europa se apresenta aqui nessa visão reprocessada e colorida, feita a partir de fotos tiradas por Galileo de 1990. Essa é a imagem colorida de Europa que apresenta a maior parte da superfície e com a maior resolução. Variações de cor estão associadas a diferentes estruturas geológicas e localidade. Por exemplo, áreas que aparecem em azul ou branco contém gelo de água relativamente pura, enquanto áreas avermelhadas e amarronzadas incluem componentes diferentes de gelo em altas concentrações. As regiões polares, visíveis na esquerda e direita desta figura, são notavelmente mais azuis que as latitudes equatoriais, que se apresentam mais esbranquiçadas. Essa variação de cor acredita-se ser por conta da diferença do tamanho do grão de gelo presente nestes locais. Imagens tiradas com filtros no infravermelho próximo, verde e violeta foram combinadas para produzir esse mosaico. Intervalos entre as imagens obtidas foram preenchidos com cores simuladas baseadas na coloração da superfície adjacente e com tipos similares de terrenos. Créditos: NASA/JPL-Caltech/SETI Institute.

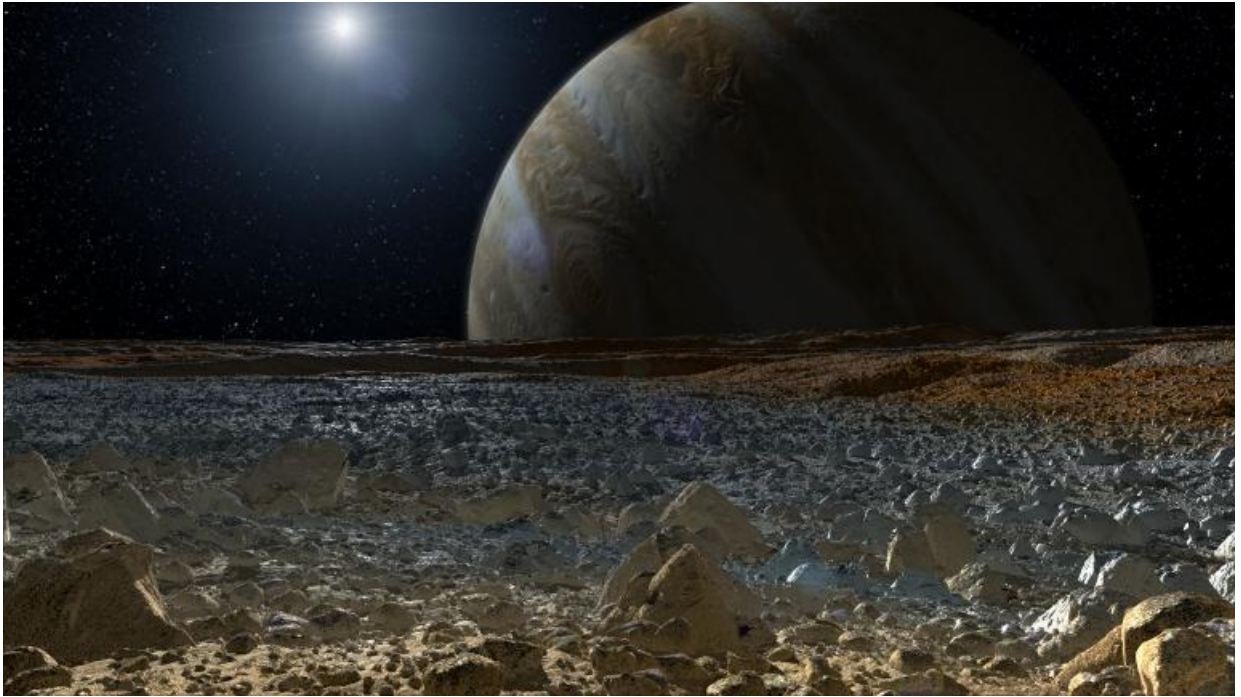


Figura D.9: Essa concepção artística mostra uma visão de Júpiter a partir de Europa. Sua superfície acidentada, rígida e congelada, porém abrigando um ambiente potencialmente dinâmico e cheio de vida, aparece tingida com regiões avermelhadas sobre as quais estudos têm tentado entender melhor. Ela pode ser vista em primeiro plano enquanto o planeta gigante, o grande provedor da energia vital deste sistema, paira ao fundo. Créditos: NASA/JPL-Caltech.

Referências Bibliográficas

- Barr, A. C. & Showman, A. P. 2009, Heat Transfer in Europa's Icy Shell (Europa, University of Arizona Press, 405-429)
- Carr, M. H., Belton, M. J. S., Chapman, C. R., et al. 1998, Nature 391, 363-395
- Deschamps, F. & Sotin, C. 2001, Journal of Geophysical Research 106, 5107-5121
- Geissler, P. E., Greenberg, R., Hoppa, G., et al. 1998, Nature 391, 368-370
- Gerya, T. 2010, Numerical Geodynamical Modelling (Cambridge University Press)
- Giordano, N. J. & Nakanishi, H. 2006, Computational Physics, Second Edition (Pearson Prentice Hall)
- Greenberg, R. 2005, Europa - The Ocean Moon, Search for an Alien Biosphere (Springer-Praxis)
- Han, L. & Showman, A. P. 2008, Geophysical Research Letters 35
- Han, L. & Showman, A. P. 2010, Icarus 207, 834-844
- Han, L. & Showman, A. P. 2011, Icarus 212, 262-267
- Head, J. W., Pappalardo, R. T., & Sullivan, R. 1999, Journal of Geophysical Research 104, 24223-24236
- Hurford, T. A., Beyer, R. A., Schmidt, B., et al. 2005, Icarus 177, 380-396
- Husmann, H. & Spohn, T. 2004, Icarus 171, 391-410
- Ismail-Zaden, A. & Tackley, P. 2010, Computational Methods for Geodynamics (Cambridge University Press)
- Khurana, K. K., Kivelson, M. G., Stevenson, D. J., et al. 1998, Nature 395, 777-780
- Kivelson, M. G., Khurana, K. K., Russell, C. T., et al. 2000, Science 289, 1340-1343
- Korenaga, J. 2009, Geophysical Journal International 179, 154-170

- Luttrell, K. & Sandwell, D. 2006, *Icarus* 183, 159-167
- Malevsky, A. V. & Yuen, D. A. 1991, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* 65, 149-171
- McCord, T. B., Hansen, G. B., Fanale, F. P., et al. 1998, *Science* 280, 1242-1245
- McKinnon, W. B. 1999, *Geophysical Research Letters* 26, 951-954
- Mitri, G. & Showman, A. P. 2005, *Icarus* 177, 447-460
- Nimmo, F. & Manga, M. 2009, *Geodynamics of Europa's Icy Shell* (Europa, University of Arizona Press, 381-404)
- Pappalardo, R. T., Belton, M. J. S., Brenem, H. H., et al. 1999, *Journal of Geophysical Research* 104, 24015-24055
- Pappalardo, R. T., Head, J. W., Greeley, R., et al. 1998, *Nature* 391, 365-368
- Ricard, Y. 2007, *Treatise on Geophysics*, vol. 7, *Mantle Dynamics*, 31-87
- Showman, A. P. & Han, L. 2005, *Icarus* 177, 425-437
- Sotin, C., III, J. W. H., & Tobie, G. 2002, *Geophysical Research Letters* 29, 74-1
- Spencer, J. R., Grundy, W. M., Dumas, C., et al. 2006, *Icarus* 182, 202-210
- Teixeira, W., Fairchild, T. R., de Toledo, M. C. M., & Taioli, F. 2009, *Decifrando a Terra*, Segunda Edição (Companhia Editora Nacional)
- Zimmer, C., Khurana, K. K., & Kivelson, M. G. 2000, *Icarus* 147, 329-347